



Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje de los prismas regulares que integra recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado

Luis Miguel Lugo Galvis

Vladimir Alexander Pechene Montenegro

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas

2025

Dedico este trabajo de grado a mi madre Zoraida Lugo Galvis por asegurarse de mi bienestar y cuidado por estar en cada paso que doy permitiendo que reciba una educación de alta calidad. Y a mi tutor de grado por guiarme en este proceso en virtud de la paciencia y la dedicación personal.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por brindarme las oportunidades para cumplir uno de mis propósitos en la vida y es ser un docente en la educación matemática. En segundo lugar, agradezco a mi madre Zoraida Lugo Galvis por asegurarse de que este en buenas manos aun estando lejos de mí. En tercer lugar, a mi sobrina Juliana Salinas Lugo, por ser mi compañera de viaje y mi apoyo emocional en las situaciones más difíciles. En cuarto lugar, a mi profesor Vladimir Alexander Pechene Montenegro por guiarme en virtud de la paciencia y la dedicación personal por exigirme mejorar como persona y como académico. Por último, agradezco a la Universidad del Valle por darme el privilegio de conocer profesores íntegros, intelectuales y de gran calidez humana.

Resumen

Este trabajo tuvo como objetivo caracterizar el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares en la que se integran recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado. Para el alcance de este objetivo se diseñó una THA acerca del estudio de los prismas regulares y se describió la progresión de aprendizaje de los estudiantes con base a la heurística de los modelos emergentes. La metodología empleada correspondió a la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la estrategia metodológica fueron los experimentos de enseñanza. Los resultados obtenidos fueron dos. En primer lugar, se diseñó un THA que articula recursos curriculares digitales en el estudio de los prismas regulares con estudiantes de séptimo grado. El segundo resultado muestra una progresión de aprendizaje en el estudio de los prismas regulares descrito por los procesos hipotéticos realizados por los estudiantes en la organización de tareas. Por último, se presentan cuatro conclusiones obtenidas. En primer lugar, se muestra que la organización de tareas promueve el aprendizaje del estudio del prisma de base regular. En segundo lugar, se promueve el hallazgo de la propiedad invariante con la ayuda de (AGD) GeoGebra. En tercer lugar, se muestra que la organización de tareas permite hacer inferencias sobre las ideas matemáticas del estudiante. Y, en cuarto lugar, se muestra que la organización de tarea promueve la toma de decisiones para el ajuste la implementación de las tareas.

Palabras clave: heurística de modelos emergentes, Prisma de base regular, recursos curriculares digitales, trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Abstract

This work had as its objective to characterize the design of a hypothetical learning trajectory for the study of regular prisms in which digital curricular resources are integrated with seventh-grade students. For the achievement of this objective, an HLT about the study of regular prisms was designed, and the learning progression of the students was characterized based on the heuristic of emergent models. The methodology used was carried out based on design-based research (DBR), and the methodological strategy was teaching experiments. The results obtained were two. First, an HLT was designed that articulates digital curricular resources in the study of regular prisms with seventh-grade students. The second result shows a learning progression in the study of regular prisms described by the hypothetical processes carried out by the students in the organization of tasks. Finally, four obtained conclusions are presented. First, it is shown that the organization of tasks promotes the learning of the study of the regular-based prism. Second, the discovery of the invariant property is promoted with the help of (DGE) GeoGebra. Third, it is shown that the organization of tasks allows making inferences about the student's mathematical ideas. And fourth, it is shown that the organization of tasks promotes decision-making for the adjustment of the implementation of the tasks.

Keywords: digital curricular resources, heuristic of emergent models, hypothetical trajectories of learning, prism of regular base.

Tabla de contenido

1. El planteamiento del problema	13
El desarrollo de pensamiento espacial en la escuela	14
El aprendizaje de los sólidos geométricos en la escuela	16
Errores y dificultades relacionadas con el concepto de estudio	17
Uso de tecnologías digitales en procesos de aprendizaje de la geometría.....	19
Pregunta problema.....	21
Objetivos	21
Objetivo general.	21
Objetivos específicos.	21
Justificación.....	22
Antecedentes.....	25
Sobre el aprendizaje de la geometría mediada por tecnologías digitales	26
Sobre el aprendizaje de los cuerpos geométricos mediante el uso de tecnologías digitales.....	27
Sobre el uso de las THA para la enseñanza de la geometría - a partir del uso de ...	28
tecnologías digitales	28
2. Referentes teóricos	30
La noción de recurso curricular digital.....	30
Trayectorias hipotéticas de aprendizaje.....	32
La Heurística de los Modelos Emergentes	33
Objeto matemático de estudio	34

Elementos de un prisma	36
Algunas propiedades de los prismas	37
3. Metodología.....	39
La Investigación Basada en el Diseño.....	39
Los experimentos de enseñanza.....	40
Participantes de los experimentos de enseñanza.....	41
Fases de los experimentos de enseñanza.	42
Fase1 de preparación.	58
Fase 2 de implementación.....	60
Fase 3 análisis retrospectivo.....	60
4. Resultados de la investigación.....	80
El diseño de una THA para el estudio de los prismas regulares en las que se integran recursos curriculares digitales	80
Descripción de la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas de base regular	91
Nivel situacional	92
Nivel referencial.....	94
Nivel general	96
Nivel formal.....	99
5. Conclusiones	102
El diseño de una THA para el estudio de los prismas regulares en las que se integran recursos curriculares digitales	102

Descripción de la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas regulares.....	104
6. Limitaciones y consideraciones	108
7. Referencias bibliográficas.....	109

Índice de Tablas

Tabla 1 Conocimiento movilizado en cada tarea por los estudiantes	44
Tabla 2. segmentación de las intervenciones de los estudiantes	62

Índice de figuras

Figura 1. Representación de un prisma recto	35
Figura 2. Representación de un prisma regular.....	36
Figura 3. Elementos centrales de un prisma	37
Figura 4. Tarea 1A, ilustración 1.	48
Figura 5. Tarea 2A, ilustración 2.	48
Figura 6. Tarea 2A, ilustración 1,2,3 y 4	50
Figura 7. Tarea 2B, ilustración 1,2,3 y 4.....	51
Figura 8. Tarea 2C, ilustración 1 y 2.	52
Figura 9. Tarea 3A, ilustración 1,2,3 y 4.	53
Figura 10. Tarea 3B, Ilustración 1,2,3 y 4.....	54
Figura 11. Tarea 3C, ilustración 1,2,3 y 4.	55
Figura 12. Tarea 3D, ilustración 1,2,3 y 4.	56
Figura 13. Tarea 4A, ilustración 1,2 y 3.	57
Figura 14. Ilustración, tarea 4B 1,2 y 3.....	58
Figura 15. Aula de clase.....	60
Figura 16. Tarea 1A, ilustración 2, pregunta 4.	72
Figura 17. Respuesta escrita 1, tarea 1A, ilustración 2	72
Figura 18. ilustración 2, tarea 1A, pregunta 5.	73
Figura 19. Respuesta escrita 2, tarea 1A, pregunta 5	73
Figura 20. Tarea 2A, ilustración 3 y 4 pregunta 4.....	74
Figura 21. Respuesta escrita 3, tarea 2A, Ilustración 3 y 4.	74
Figura 22. Ilustración, 1 y 2 tarea 2B, pregunta 1	75
Figura 23. Tarea 2B, pregunta, respuesta escrita 4.....	75
Figura 24. Tarea 3A pregunta, ilustración 1, pregunta 1.	76
Figura 25. Respuesta escrita 5, tarea 3A, Ilustración 1.	76
Figura 26. Tarea 3C, pregunta 1, ilustración 1.	77
Figura 27. Respuesta escrita 6, ilustración 1, tarea 3C.	77

Figura 28. Tarea 4A, pregunta 1, ilustración 1,2 y 3.....	78
Figura 29. Respuesta escrita 7, tarea 4A, ilustraciones 1,2 y 3.....	78
Figura 30. Tarea 4B, pregunta 1, ilustración 1,2 y 3.....	79
Figura 31. Respuesta escrita 8, tarea 4B ilustración 1,2 y 3.....	79
Figura 32. Tarea 1A, ilustración 1.	81
Figura 33. Tarea 1A, ilustración 2.	82
Figura 34. Tarea 2A, ilustración 1,2,3 y 4.	83
Figura 35. Tarea 2B, ilustración 1,2,3 y 4.....	84
Figura 36. Tarea 2C, ilustración 1y 2.	85
Figura 37. Tarea 3A, ilustraciones 1,2,3 y 4.....	86
Figura 38. Tarea 3B, ilustraciones 1,2,3 y 4:.....	87
Figura 39. Tarea 3C, ilustración 1,2,3 y 4.	88
Figura 40. Tarea 3D, ilustración 1,2,3 y 4.	89
Figura 41. Tarea 4A, ilustración 1,2 y 3.	90
Figura 42. Tarea 4B, ilustración 1,2 y 3.....	91
Figura 43. Tarea 1A, pregunta 4, ilustración 2.	92
Figura 44. Tarea 1A, ilustración 2, pregunta 4.	93
Figura 45. Tarea 1A, ilustración 1, pregunta 3.	93
Figura 46. Respuesta escrita 10, tarea 1A, ilustración 1, pregunta 3.	94
Figura 47. Tarea 2A, pregunta 4, ilustración 3 y 4.....	95
Figura 48. Tarea 2A, respuesta escrita 11, pregunta 4.	95
Figura 49. Tarea 2C, pregunta 2, ilustración 1y 2.	96
Figura 50. Respuesta escrita 12, tarea 2C, pregunta 2, ilustración1.	96
Figura 51. Tarea 3C, ilustración 1, pregunta 1.	97
Figura 52. Respuesta escrita 13, tarea 3C, pregunta 1, ilustración 1.	98
Figura 53. Tarea 3D, pregunta 2, ilustración 1.	98
Figura 54. Respuesta escrita 14, tarea 3D, ilustración 1.	99
Figura 55. Tarea 4A, pregunta 1, ilustraciones 1,2 y 3.	100

Figura 56. Respuesta escrita 15, tarea 4A, ilustración 1,2 y 3	100
Figura 57. Tarea 4B, pregunta 2, ilustración 1,2 y 3	101
Figura 58. Respuesta escrita 16, tarea 4B, ilustración 1,2 y 3.....	101

1. El planteamiento del problema

El desarrollo del pensamiento espacial es requerido en la escuela, ya que promueve habilidades en los estudiantes como comprender, interpretar e interactuar con el mundo que los rodea. Estos procesos cognitivos, que se inician a partir de la interacción con el espacio físico, la coordinación corporal y la manipulación de objetos, además encuentra en el estudio de los sólidos geométricos una alternativa para promover el aprendizaje a partir de lo intuitivo hacia lo formal (MEN, 2006).

Hay que mencionar, que entre la progresión de lo intuitivo a lo formal en el aprendizaje de los sólidos geométricos existe una brecha en la construcción de definiciones. Esta brecha consiste en la complejidad que tienen los estudiantes en reconocer las relaciones que hay entre sus elementos y las relaciones entre las propiedades de esos elementos, para construir sus propios razonamientos acerca del objeto matemático de estudio (guillen 2010).

Por otro lado, describir sólidos geométricos a partir de lo visual requiere una comprensión profunda de sus propiedades matemáticas, lo que es un desafío en el aprendizaje de los estudiantes. Dicho lo anterior, los estudiantes suelen enfrentarse a dificultades para articular las relaciones entre los elementos de un sólido geométrico al verse influenciados por representaciones visuales inadecuadas que les generan ideas erróneas (Guillen, 2006).

Con respecto, a las representaciones inadecuadas de sólidos geométricos emerge la dificultad de centrar la atención de los estudiantes en la observación de los sólidos geométricos de tal modo que puedan aprender a partir de un espacio gráfico a un campo teórico. Aunque, Sinclair y Robutti (2012) documentan sobre el potencial de los ambientes de geometría dinámica (AGD), para promover la comprensión de propiedades geométricas a partir de lo espacio gráfico al campo teórico, requiere lograr que el estudiante centre la atención en las propiedades invariantes del objeto matemático al emplear las herramientas de (AGD).

De modo que hay una problemática al promover el desarrollo del pensamiento espacial, con el estudio de los sólidos geométricos dado que, requiere superar dificultades que parten de la observación de sus elementos y las relaciones que tienen entre sí. Además, aunque el potencial de los recursos digitales privilegia la observación, se requiere enfocar al estudiante a

partir de lo visual, en las propiedades invariantes de los sólidos geométricos para promover un progreso de lo espacio gráfico a el campo teórico.

El desarrollo de pensamiento espacial en la escuela

El pensamiento espacial es un conjunto de procesos cognitivos que permiten crear y manipular representaciones mentales de los objetos en el espacio, comprender las relaciones entre los objetos y su relación con el espacio en todas sus dimensiones, además comprender sus transformaciones y las diversas formas de representación incluyendo el material concreto. Por otro lado, estos procesos cognitivos inician a temprana edad, comprendiendo el entorno que los rodea a través de la coordinación y uso de sus sentidos hasta llegar a comprender, características, propiedades físicas de los objetos en espacio, et., a la par se involucran propiedades geométricas fundamentales para la realización de razonamientos más abstractos que se requieren en la comprensión de la geometría formal (MEN,2006).

Reflexionar respecto al pensamiento espacial comprende i) el estudio de las propiedades de los objetos con base en la ubicación y movimiento respecto a otros objetos y al espacio, lo cual implica, centrar la mirada en lo cualitativo, es decir, la descripción de un objeto a partir de identificar qué tan cerca, que tan lejos está el objeto de otro o con relación al espacio, respecto a características de forma, orientación etc., ii) el estudio de la identificación y localización del estudiante interactuando con el espacio que lo rodea, lo cual involucra aspectos de tamaño y por ende la metrización, es decir, transitar desde lo cualitativo a lo cuantitativo, posibilitando el estudio de nuevas propiedades relacionadas con los objetos. iii) el estudio de las propiedades anteriores con sus procesos de medición evoluciona en conocimientos más formales de la geometría, en especial el de la geometría euclidiana con sus axiomas, teoremas, demostraciones etc. (MEN,2006).

Estas razones hace necesario el estudio de la geometría con tareas que involucren la concentración y coordinación del cuerpo, por ejemplo: en el arte, la pintura, la construcción de figuras de manera artesanal y tecnológica, con tareas deportivas como el baile, la natación, tareas de observación que involucren representar patrones en el medio ambiente como las

plantas, los minerales, los animales, el uso de medios de representación del espacio como los mapas, la elaboración de figuras con material concreto, etc. (MEN,2006).

El dominio de los estudiantes del espacio físico y el geométrico hace necesario involucrar el estudio de los cuerpos geométricos, considerando relaciones espaciales como similitudes, diferencias entre los cuerpos sólidos y los cuerpos huecos además las relaciones que el estudiante posee entre ellos, por ejemplo, distancia, posición, tamaño etc., incluyendo el reconocimiento de sus elementos, por ejemplo, caras, vértices, figuras planas, etc. De lo anterior se destacan, procesos que involucran la localización con la ayuda de sistemas de referencia como, por ejemplo, el plano cartesiano las medidas etc., para ubicar puntos líneas figuras en el espacio, el estudio la varianza o invarianza de las transformaciones sobre los objetos.

Por otro lado, el trabajo de integrar los objetos bidimensionales con los tridimensionales mediante sus transformaciones y movimientos incorporan ideas matemáticas sobre el volumen, área, perímetro, permitiendo el estudio de sistemas de medición y a su vez trabajar la simetría la congruencia entre otras (MEN,2006).

Para afinar el pensamiento espacial centrado en el estudio de los movimientos de las figuras bidimensionales, tridimensionales y sus transformaciones que involucran componentes métricos la geometría activa promueve el uso de los sentidos, usando material concreto privilegiando la exploración y representación del espacio. No obstante, hay más alternativas como los ambientes tecnológicos dado a que privilegia la realización de representaciones no estáticas, que le permiten realizar representaciones complejas con más detalle y precisión, superando la manera tradicional como lo es a lápiz y papel, o el uso de materiales concretos, despertando el interés de los estudiantes (MEN,2006).

De modo que, hay retos en el desarrollo del pensamiento espacial como el paso de un comprensión cualitativa e intuitiva a un razonamiento formal y abstracto muy empelado en la geometría. Estos retos se centran en como los estudiantes adquieren habilidades para comprender las relaciones espaciales como la ubicación el movimiento y la metrización. Por otro lado, al trabajar con sólidos geométricos la visualización y manipulaciones mentales de

figuras y cuerpos geométricos empujan procesos cognitivos complejos que requieren de una guía de aprendizaje estructurada.

El aprendizaje de los sólidos geométricos en la escuela

La comprensión geométrica del espacio en los estudiantes es necesaria ya que involucra el medio en que vive y se desarrolla, que a su vez es utilizado como herramienta para promover el pensamiento lógico. En cuanto a la manera de iniciar su aprendizaje se considera adecuado empezar con tareas que promuevan niveles de comprensión cada vez más formales. Con base en lo anterior, se hace necesario plantear tareas manuales que involucren la estimulación de las manos y el cerebro, pero al mismo tiempo promoviendo la argumentación. Es por esta razón que durante la realización de tareas manuales se pretende que el estudiante identifique los elementos matemáticos de un objeto, por ejemplo, el tipo de cara de una pirámide (debe tener caras triangulares) sea promovido a niveles más formales como por, ejemplo, el número mínimo de caras de una pirámide con base es triangular, promoviendo la relación de los elementos ya conocidos de un objeto entre sí (Freudenthal (1973, p. 408), citado por Guillen 2010).

Esta comprensión geométrica del espacio es una mirada que implica iniciar el aprendizaje de la geometría por el espacio. Con base a esta mirada se considera adecuado iniciar el aprendizaje de la geometría a partir de los sólidos geométricos dado que i) se puede promover el uso de material manipulativo y posibilitar que los estudiantes transiten de un razonamiento informal o uno más elaborado. ii) el uso de material manipulativo facilita procesos cognitivos como el anclaje, además la abstracción es más directa en el espacio con sus sólidos que el plano con sus figuras, en el espacio el análisis con base a la argumentación es más extenso, en el espacio se privilegia lo intuitivo iii) los sólidos geométricos promueven nociones de propiedades que se dan en el plano como figuras planas, punto, recta perpendicularidad, paralelismo etc., (Freudenthal (1983, pp. 297-313) citado por Guillen, 2010).

Ahora bien, en la producción de ideas matemáticas aprender a definir no es un proceso espontáneo en el aprendizaje de la geometría, dado que hay requisitos que implican que se debe estar habituado con todos los elementos que describen a un mismo objeto, es decir,

aunque un estudiante pueda mencionar de qué está hecho algún objeto, no implica que lo pueda definir, en este punto se requiere el reconocimiento de las propiedades y sus relaciones de manera ordenada, permitiendo argumentar de manera razonada para llegar a conjeturar una definición. Por ende, en el aprendizaje de los sólidos geométricos se requiere privilegiar la argumentación razonada, promoviendo la organización de propiedades considerando no solo la realización de una prueba, sino también para intuir que algo debe ser probado, de este modo, acercarse a una comprensión más formal de las propiedades, conjeturas, definiciones etc., (Guillen, 2010).

De modo que, en el aprendizaje de los sólidos geométricos, existe una brecha entre el paso del conocimiento intuitivo al formal. Esta falta de progresión en el proceso de abstracción se observa en los estudiantes cuando estos suelen identificar elementos concretos, como caras, aristas o vértices, pero enfrentan dificultades para reconocer propiedades y las relaciones entre ellas para luego organizarlas y producir argumentos matemáticos. Esta dificultad para identificar propiedades y sus relaciones entre sí conlleva el no construir argumentos sólidos que se acerquen a definiciones matemáticas. Además, esta limitación anteriormente dicha en los estudiantes conduce a un desafío que no consiste solo en mostrar los objetos, sino en guiar el razonamiento intuitivo a uno formal para promover en los alumnos la estructuración de sus observaciones para aprender a generar sus propias definiciones.

Errores y dificultades relacionadas con el concepto de estudio

En el aprendizaje de los sólidos geométricos las ideas matemáticas pueden describir atributos físicos necesarios y suficientes de una representación visual. Como, por ejemplo: en una familia de prismas, el tener dos caras de base es un atributo necesario, aunque no suficiente para describir el objeto o la representación visual de un prisma. La comprensión de estas ideas matemáticas asociadas a la representación visual de un objeto matemático ha dejado ver como la falta de articulación de la idea matemática y representación visual conlleva a ideas erróneas en el aprendizaje de los sólidos geométricos. Estas ideas erróneas se les han atribuido a fenómenos prototípicos, y a prejuicios prototípicos de los cuales se ha

documentado cómo la falta de articulación de los estudiantes con la idea matemática y representación visual (Guillen, 2006).

Con respecto a los fenómenos prototípicos se refieren a aquellas ideas más generales que requieren del uso de atributos necesarios más no suficientes de una representación visual y son las más conocidas por los estudiantes. De los fenómenos prototípicos surgen los prejuicios prototípicos que inciden en los atributos necesarios y suficientes de la representación visual de una idea matemática. La articulación de estos aspectos en la construcción de la representación visual de una idea matemática requiere de interpretar representaciones visuales y procesos de clasificación. Sin embargo, se ha descrito a través de tareas acerca de sólidos geométricos que las representaciones de los atributos necesarios, pero no suficientes tienen características visuales muy sobresalientes actuando como un distractor en la comprensión de los estudiantes (Guillen, 2006).

Acerca de la idea de distractor se ha delimitado en los dos aspectos siguientes: i) distractores de orientación: son aquellas representaciones visuales de las ideas matemáticas que están ubicadas en posiciones en las que no se logra percibir de manera clara sus atributos necesarios y suficientes por ejemplo un triángulo rectángulo ubicado en una posición no vertical a su ángulo recto, influye como un distractor visual en el reconocimiento del tipo de triángulo observado. Sin embargo, si logra rotar ese triángulo hasta dejarlo en posición vertical a su ángulo recto, podrá identificar que se trata de un triángulo rectángulo. ii) distractores de configuración: son aquellas ideas matemáticas que el estudiante no ha profundizado en sus experiencias previas como por ejemplo la observación de la altura de un triángulo que reposa sobre su base. Sin embargo, si efectúa las operaciones para hallar la altura en un triángulo cuyos atributos muestran que la altura no siempre reposa sobre su base, permitirá al estudiante comprender la idea matemática adecuada de la altura en un triángulo (Guillen, 2000).

De modo que al trabajar con representaciones visuales de las ideas matemáticas requieren de ser observadas desde diferentes ángulos y vistas y las operaciones realizadas sobre ellas, deben ser direccionadas al hallazgo de propiedades invariantes para no inducir al estudiante a ideas erróneas del tipo fenómeno prototípico y prejuicios prototípicos.

Uso de tecnologías digitales en procesos de aprendizaje de la geometría

El uso de tecnologías digitales en procesos de aprendizaje de la geometría refiere a los ambientes de geometría dinámica (AGD), en el cual son considerados la gran variedad de software con la función de arrastrar, lo que permite dar movimiento a las representaciones de objetos matemáticos, dada la cualidad de emplear un lenguaje netamente matemático no se refiere como un software de geometría dinámica si no que se emplea la terminología (ADG). Por otro lado, su significado de manera corta es considerada como un artefacto que en manos de los usuarios se convierte en un instrumento con enfoques distintos según el usuario y las orientaciones de las tareas utilizadas (Sinclair y Robutti, 2012).

Las representaciones dinámicas en los (ADG) son fundamentales dado que a partir de las ideas matemáticas que emergen de los estudiantes surge el estudio de cómo interpretan los diagramas arrastrables, son referidas dos perspectivas teóricas: la primera refiere que los diagramas arrastrables son vistos como una serie de ejemplos que difícilmente pueden ser igualados en ambientes estáticos como por ejemplo el lápiz y el papel. La segunda perspectiva refiere que los diagramas son vistos como acciones operativas mentales o físicas que modifican a una figura más que una serie de ejemplos. Independientemente de la manera en que los estudiantes estén interpretando los diagramas arrastrables con base a las perspectivas mencionadas, lo que se ha documentado es que estos diagramas arrastrables facilitan el paso de lo espacio gráfico a lo teórico llamando la atención del estudiante a las invariancias visuales que hay en él y con el acompañamiento verbal de un docente (Sinclair y Robutti, 2012).

Para iniciar la orientación de las tareas en (ADG) se refieren la herramienta de arrastre y la herramienta de medición siendo estas dos, fundamentales en (AGD). La herramienta de arrastre la cual es la encargada de posibilitar la selección de objetos para moverlos continuamente dentro de una pantalla. Por otro lado, el uso de la herramienta de arrastre se caracteriza en dos grupos fundamentales: i) el espacio gráfico que consiste en la búsqueda de propiedades invariantes ii) las propiedades invariantes encontradas se expresan mediante una conjetura y se ordenan de manera que se llegue a la comprensión de una propiedad pasando así

al campo teórico. De estas dos características surgen las modalidades de arrastre. Pero cabe resaltar que hay otras modalidades de arrastre que están en función del color más que del movimiento conocido como arrastré cromático entre otros (Sinclair y Robutti, 2012).

Por otro lado, está la herramienta de medición en los (ADG), su uso se caracteriza en dos grupos fundamentales i) en lo espacio gráfico, están centrados en la percepción del dibujo, este enfoque consiste en vincular la medida de una manera exploratoria para encontrar relaciones cuantitativas, invariantes, congruencias, simetrías etc. de las cuales se desprenden otras modalidades como la medición guiada usada para la transformación de figuras de acuerdo una medida dada ii) en lo teórico en las propiedades de la figura vinculado a la necesidad de validar, en este enfoque se usa la modalidad de medida probatoria para verificar una intuición, una conjetura, etc. Otra modalidad es la medida de prueba que se usa para verificar o refutar una prueba usando casos particulares que involucran la medición (Sinclair y Robutti, 2012).

De modo que, los estudiantes presentan dificultades para progresar de la observación gráfica de sólidos geométricos a la comprensión teórica de sus propiedades, debido a la falta de direccionamiento para centrar su atención en las características invariantes. Por otro lado, los AGD emergen como herramientas tecnológicas, para privilegiar las representaciones visuales con la ayuda de herramientas como el arrastre y la medición. Sin embargo, estas herramientas de los AGD requieren ser diseñadas de tal forma que el estudiante centre la atención hacia las propiedades invariantes y facilitar el paso de lo concreto a lo abstracto con el acompañamiento docente.

En síntesis, el desarrollo del pensamiento espacial y su desarrollo a través de las interacciones de mundo físico que lo rodea incluyendo sus representaciones mentales es necesario el estudio de los sólidos geométricos privilegiando el estudio de sus propiedades y sus representaciones bidimensionales. En cuanto a el estudio de los sólidos geométricos se ha documentado que hay dificultad en la descripción de sus elementos y también en argumentar como estos elementos se relacionan entre sí para el hallazgo de propiedades. Por otro lado, se ha documentado que promover el aprendizaje de los sólidos geométricos en ambientes de

geometría dinámica privilegia la observación y permite centrar la atención del estudiante en propiedades específicas con la ayuda de herramientas como lo son el arrastre, la medición y la mediación docente.

De acuerdo con la necesidad del aprendizaje de los sólidos geométricos en la escuela y sus dificultades para describir y argumentar que tipo de relaciones existen entre sus elementos se propone promover la atención de los estudiantes en el estudio de propiedades de prismas regulares con la ayuda de AGD, centrados en la herramienta de medición y el empleo del arrastre para medir. Esta propuesta se basa en la creación de un diseño que emplea trayectorias hipotéticas de aprendizaje en ambientes de geometría dinámica donde surge la siguiente pregunta problema.

Pregunta problema

¿Qué caracteriza el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares mediante el uso de recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado?

Objetivos

Objetivo general.

Caracterizar el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares en la que se integran recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado

Objetivos específicos.

Diseñar una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares en la que se integran recursos curriculares digitales.

Describir la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas regulares.

Justificación

Con base en los lineamientos del MEN (2006), en este trabajo se refieren tres aspectos centrales para la enseñanza matemáticas, procesos generales, conocimientos fundamentales y contextos, centrado en el desarrollo del pensamiento espacial a través de sistemas geométricos. Por otro lado, se propone el estudio de los sólidos geométricos por su amplia gama de representaciones que promueven procesos como la descripción, clasificación y formulación de conjeturas. Además, Se integra el papel de la prueba en AGD para validar conjeturas y avanzar hacia la argumentación teórica. Finalmente, la planificación del diseño de tareas se articula mediante Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), que organizan la secuencia de las tareas a partir de las ideas previas de los estudiantes.

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas escolares, se consideran tres aspectos centrales: los procesos generales, conocimientos fundamentales, y los contextos. A continuación, se presenta una corta referencia de lo que implica cada uno. i) Procesos generales: son aquellos que están presentes en el aprendizaje y se destacan cinco fundamentales, el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, la práctica y comparación de procedimientos. ii) En los conocimientos fundamentales están presentes los procesos generales articulados con el desarrollo del pensamiento matemático vinculado a los sistemas propios de las matemáticas como por ejemplo los sistemas geométricos y que se amplían al combinarse entre sí. iii) En el contexto se tiene presente el lugar en que el estudiante vive y cómo este lugar le da significado a las matemáticas que aprende, con base a distintos factores como lo es el económico, social, político. Esto con la intención de aplicar la educación matemática con experiencias didácticas significativas en los estudiantes (MEN,2006).

Considerando, el MEN (2006) y su mención acerca de los tres aspectos para la enseñanza de las matemáticas escolares: los procesos generales, conocimientos fundamentales, y los contextos se presenta la justificación de la articulación del diseño de tareas en este trabajo basadas en el pensamiento espacial y sistemas geométricos privilegiando

el razonamiento en contextos tecnológicos, ya que los ambientes tecnológicos cada vez están más presentes en el diario vivir de los estudiantes.

Acerca del pensamiento espacial, se ha referido que requiere de procesos cognitivos que involucren la construcción y la interacción con las representaciones mentales de los objetos en el espacio, las conexiones entre ellos, las transformaciones y sus diversas interpretaciones con material concreto. Sin embargo, el empleo de estos procesos cognitivos requiere del uso de representaciones, que hacen parte de los sistemas geométricos que permiten describir y clasificar formas, ya que contienen elementos que se articulan conformando un todo situado en el espacio y establecen relaciones de posición, orden, tamaño, etc., al hacer parte de distintos sistemas de notación o simbólicos. Por otro lado, la realización de estos procesos se posibilita con base en tres características: i) los elementos que los conforman, como líneas, rectas, curvas, superficies y cuerpos; ii) las operaciones y transformaciones con las que se coordinan; iii) los vínculos entre los elementos, las operaciones y las transformaciones (MEN, 2006).

Por otro lado, estas tres características se articulan acorde al tipo de sistemas geométricos utilizados, por ejemplo: el sistema de coordenadas en dos dimensiones y tres dimensiones considerados como sistemas geométricos usados para representar la ubicación de un punto o definir la ubicación de objetos geométricos. Articulan estas características fundamentales de la siguiente forma: i) los elementos principales que los conforman: ejes coordenados, origen, cuadrantes y coordenadas ii) las operaciones y transformaciones con las que se combinan son: a) ubicación de puntos, construir figuras, calcular distancias, longitudes de segmentos entre otras y b) las transformaciones son: la rotación, la simetría, la traslación entre otras. iii) las relaciones entre los elementos las operaciones y transformaciones que las combinan permiten modificar y ubicar los objetos geométricos en el espacio sin alterar sus atributos necesarios y suficientes (MEN, 2006).

De modo que, al promover el pensamiento espacial a través de los sistemas geométricos, se privilegia el desarrollo del pensamiento geométrico. Este desarrollo es considerado como un progreso lento, donde el estudiante parte de abstracciones informales en la educación media, hasta llegar a otras abstracciones más formales. De acuerdo con el enfoque

de promover el pensamiento espacial para desarrollar pensamiento geométrico se presenta a continuación la justificación del diseño de tareas centrado en el estudio de los sólidos geométricos privilegiando la exploración del espacio, la evolución de la imaginación en el espacio, el hallazgo de conjeturas, y la capacidad de interactuar y manipular sus representaciones como procesos de aprendizaje relevantes en el desarrollo del pensamiento geométrico (MEN, 1998).

Con respecto a el aprendizaje de los sólidos geométricos, orientados a tareas que involucren procesos matemáticos como la descripción, la clasificación, la formulación de conjeturas, etc., se han considerado favorables dado que: i) hay una amplia gama de estructuras matemáticas que pueden sustentar la elaboración de tareas, ii) Los sólidos geométricos presentan una gran diversidad de representaciones tanto visuales como de lenguaje escrito y, iii) Permiten focalizar procesos matemáticos de descripción, clasificación para el hallazgo de conjeturas, propiedades, pruebas etc. Guillen (1997).

Además estas tareas, que involucran procesos matemáticos como describir, clasificar conjeturar etc., pueden ser direccionadas con enfoques numéricos teniendo en cuenta, que las representaciones de manera concreta de algunos sólidos geométricos como, por ejemplo: los prismas, pueden ser usados para contar las caras, aristas, ángulos etc. y esta manera de contar ha facilitado a los estudiantes expresar sólidos geométricos sin una previa representación gráfica del objeto y hacerlo a partir de un número n de lados en lenguaje natural. En concordancia con estos argumentos anteriores se puede, por ejemplo, proponer al estudiante situaciones en las que deban relacionar el número n de lados con el número de caras del prisma (Guillen, 2010).

A su vez, el papel de la prueba en los AGD se propone privilegiar el aprendizaje de los sólidos geométricos centrado en procesos matemáticos (descripción, clasificación, la formulación de conjeturas etc.) ya que existen fuertes evidencias que dejan ver cómo los estudiantes logran acercarse a la argumentación teórica partiendo de lo espacio gráfico hacia una estimulación visual que se genera el reconocimiento de propiedades e invariantes relacionadas con el objeto de estudio.

Por último, se presenta la justificación del empleo de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) para la planeación y articulación del diseño de tareas en este trabajo dado que, emplean secuencias de tareas a partir de las ideas previas del estudiante para promover la construcción de su aprendizaje de las matemáticas. Esta construcción de aprendizaje se promueve al privilegiar las ideas matemáticas del estudiante para facilitar a los docentes anticipar y responder inquietudes, empujando las ideas matemáticas que emergen del estudiante durante la realización de las tareas. Además, estas secuencias de tareas promueven la comprensión en los estudiantes respecto al objeto matemático de estudio al integrar problemas matemáticos no rutinarios, interacciones grupales y recurso curriculares como los digitales, guiados por un marco teórico coherente. De modo que las THA facilitan una planificación que se ajusta de acuerdo a las ideas matemáticas propias del estudiante, centrado en la interacción y la adaptabilidad. Por último, fortalecen la formación docente en el planteo de hipótesis, en la realización de análisis y la conexión entre investigación y práctica (Simón, 1995).

En conclusión, se considera pertinente el diseño de una THA de prismas regulares que integre recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado, dado que, promueve el desarrollo del pensamiento espacial con la ayuda de su amplia gama de representaciones estructuradas que ofrecen un contexto ideal para promover los procesos de exploración, descripción, clasificación, facilitando que los estudiantes argumenten ideas claras sobre sus propiedades. Estos argumentos, a su vez, promueven situaciones que requieren la necesidad de validación, haciendo que la prueba en AGD surja, para confirmar o refutar sus ideas. Finalmente, estas pruebas para validar promueven nuevos argumentos que facilitan el paso de ideas matemáticas informales a ideas matemáticas formales.

Antecedentes

A continuación, se presentan tres secciones en las que destacan: i) las investigaciones relacionadas con la enseñanza de la geometría mediada por tecnologías digitales, ii) La enseñanza de los cuerpos geométricos con el uso de tecnologías, y iii) El uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la enseñanza de la geometría a partir del uso de tecnologías digitales.

Por lo que refiere al primer apartado, se presentan trabajos que dejan ver como el uso de tecnologías contribuyen al desarrollo del pensamiento espacial en la escuela. En cuanto a la segunda sección, se presentan algunos documentos que han fijado la atención en la importancia de la enseñanza se puede ver como una secuencia de tareas se puede desarrollar a través del uso del uso de tecnologías promoviendo el desarrollo del razonamiento informal a uno más formal. Por último, se presenta como las trayectorias hipotéticas de aprendizaje a partir del uso de tecnologías permiten caracterizar diseños de tareas para la enseñanza de la geometría y además privilegian una mejor comprensión del pensamiento matemático del estudiante. Estos resultados se han considerado para la elaboración de este documento.

Sobre el aprendizaje de la geometría mediada por tecnologías digitales

Aramendiz (2022) realizó un estudio acerca de una secuencia didáctica mediada por las aplicaciones de realidad aumentada AR Sólidos platónicos y Geometría RA para el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de octavo grado. Con el objetivo general de analizar las implicaciones de una secuencia didáctica con realidad aumentada a partir de sólidos platónicos en el desarrollo del pensamiento espacial con estudiantes de 8° en la institución educativa Joaquín Ochoa Maestre de Valledupar. Su metodología fue de carácter mixta y descriptiva. Durante la implementación de esta secuencia didáctica con seis secciones dejaron ver la evolución del desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes dada las interacciones con las gráficas visuales recreadas con tecnología de manera satisfactoria en los 3 primeros niveles de los Van Hiele.

España (2020) realizó un estudio acerca de la estrategia educativa para el desarrollo del pensamiento espacial a través de la aplicación móvil Arloon Geometry, en estudiantes de grado sexto. Con el objetivo general de implementar una estrategia educativa para el desarrollo del pensamiento espacial a través de aplicaciones móviles en estudiantes de sexto grado. La metodología usada es de alcance explicativo y cualitativo. Durante la implementación de esta estrategia realizada con los niveles de razonamiento del modelo de los Van Hiele a través del uso de tecnología los estudiantes lograron superar todos los niveles planteados en la actividad los cuales fueron reconocer, analizar, y deducir de manera informal.

De los estudios de Aramendiz (2022) y España (2020) en este trabajo se consideró la alternativa de privilegiar las representaciones visuales para promover el pensamiento espacial con la ayuda de las herramientas tecnológicas en particular los AGD, para promover las ideas matemáticas de los estudiantes para promover el progreso de la comprensión intuitiva a la comprensión formal.

Sobre el aprendizaje de los cuerpos geométricos mediante el uso de tecnologías digitales

Olivera y Mussato (2020) realizan un estudio basado en las contribuciones que tiene el software de geometría dinámica 3D en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la comprensión de la geometría espacial en estudiantes de grado 7°, usando el modelo de los Van Hiele. La metodología aplicada es cualitativa, intervenido con registros fotográficos, de cuestionarios enfocados a la comprensión de poliedros en todos los niveles del modelo de Van Hiele. Esto dejó ver avances en el pensamiento geométrico de los estudiantes al pasar de una información visual a un análisis de propiedades para posteriormente conjeturar aportando un acercamiento a la comprensión de lógica formal.

Además, Blanco y Samboni (2022) realizan un estudio con el objetivo principal de fortalecer los procesos de aprendizaje en los sólidos geométricos. En la Institución Educativa Técnico Comercial Sagrado Corazón de Jesús, integrando una estrategia pedagógica mediada con tecnologías digitales (Realidad Aumentada) en estudiantes de grado 4°. Para este estudio se favorecen los aspectos previstos en las diferentes pruebas internacionales y nacionales en educación como las prueba PISA, la prueba ICFES. La metodología fue cualitativa con la modalidad de intervención en la práctica. Los resultados dejaron evidencias sobre el favorecimiento del software de GeoGebra 3d y la orientación de las tareas en el aprendizaje de conceptos de los poliedros a partir de gráficas privilegiando la comprensión de la lógica formal y el hallazgo de conjeturas.

De los estudios de Olivera y Mussato (2020) y Además, Blanco y Samboni (2022) en este trabajo se consideró la alternativa de trabajar con sólidos geométricos particularmente con prismas regulares en AGD dado que el estudio de la comprensión de sus propiedades y sus relaciones entre si se consideran apropiado para promover el pensamiento espacial con

fundamentos de la geometría promoviendo las representaciones visuales para facilitar el progreso de ideas matemáticas intuitivas a ideas matemáticas formales.

Sobre el uso de las THA para la enseñanza de la geometría - a partir del uso de tecnologías digitales

Cano (2022) realiza un estudio para caracterizar el empleo de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje para la enseñanza de la semejanza en estudiantes de 8° grado de escolaridad integrando tecnologías digitales. Los referentes teóricos fueron: Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, integración de tecnologías, heurística de modelos emergentes. La metodología usada fue la metodología basada en el diseño de manera cualitativa y se realizó un experimento de enseñanza. Los resultados de este estudio permitieron: i) diseñar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el aprendizaje de la semejanza. ii) describir el aprendizaje de la semejanza de triángulos a través de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. iii) hallazgo de formas en que los estudiantes resuelven tareas usando tecnologías digitales.

Cumbal (2020) realizó un estudio con el propósito de caracterizar las prácticas de enseñanza de dos profesores nóveles usando trayectorias hipotéticas de aprendizaje incorporando recursos digitales para enseñar la translación. Los referentes teóricos usados son: la aproximación instrumental y el modelo del conocimiento tecnológico pedagógico del contenido. La metodología usada fue el estudio de casos múltiples y la investigación con base al diseño. Los resultados principales son: i) Los profesores nóveles usaron trayectorias hipotéticas de aprendizaje con recursos digitales para comprender el pensamiento matemático de los estudiantes al desarrollar las tareas. ii) El conocimiento tecnológico, pedagógico en las tareas permitió caracterizar las prácticas del profesor al desarrollar las tareas. iii) la orientación de las explicaciones de pantalla, guía y explicación dejan ver la integración de recursos digitales de los profesores que hicieron parte del estudio.

Por su parte, Bocanegra y Devia (2019) realizan un estudio acerca de los procesos de generalización geométrica a partir de trayectorias hipotéticas de aprendizaje con estudiantes de grado sexto, una prueba piloto en el colegio Isabel II I.E.D y la implementación de THA En el colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D., pero esta THA. Se basó en (ADG). Su

objetivo general es el de promover la comprensión de figuras geométricas en niños de 10 a 13 años. Su aspecto metodológico fue la entrevista basada en tareas. Después de haber implementado THA articulada con (ADG) se evidencia que los estudiantes lograron comprender algunas propiedades de las figuras geométricas.

De los estudios de Cano (2022), Cumbal (2020) y Bocanegra y Devia (2019) en este trabajo se consideró el empleo de THA, para articular unas secuencias de tareas que establecen procesos hipotéticos de aprendizaje facilitando el análisis de los procesos reales con respecto a la enseñanza y el aprendizaje, en este caso en particular el diseño de las tareas y la caracterización de aprendizaje sobre los prismas de base regular.

2. Referentes teóricos

En este capítulo se presentan los referentes teóricos para la planeación y diseño de las tareas. Se inicia, con el referente de la noción de recurso curricular digital, para dirigir el enfoque de las tareas a través de procesos de instrumentalización e instrumentación en un contexto particular como lo son los AGD en el aprendizaje de la geometría. Luego se refiere el referente teórico de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje para la planificación de tareas estructurada con una meta de aprendizaje una secuencia de tareas y unos procesos hipotéticos. Además, se emplea el referente de la heurística de modelos emergentes para articular las tareas en cuatro niveles situacional, referencial, general y formal. Por último, se refieren los prismas regulares como objeto matemático de estudio su definición sus propiedades y su teorema fundamental.

La noción de recurso curricular digital.

Un recurso curricular de manera general hace referencia a los materiales, herramientas, que se utilizan para promover el aprendizaje y la enseñanza incluye libros de texto, artículos de revistas, tecnologías digitales etc. (Trouche, Gueudet, Pepin y Salinas, 2020).

A su vez un recurso curricular digital es aquel que crea una interacción con los usuarios ampliamente distinta a los recursos antiguos o aquellos que no se presentan en forma digital como, por ejemplo, generar información de manera inmediata, maneras de contacto distintas como el dinamismo de las tecnologías digitales, sonido, etc., además permiten ser modificadas o adaptadas. También, está pensado para una población específica como, por ejemplo: el grado de escolaridad, la edad, el contenido asociado con un curso. Estas características anteriormente mencionadas, hacen que difieran de las tecnologías digitales. Por otro lado, esta noción más ampliada de recurso ha ampliado la labor profesional del docente, dado a las nuevas interacciones generadas con los recursos, en el cual son consideradas no solo las tareas de clase, sino también la planeación, la elaboración de evaluaciones, redacción, entre otros (Trouche, Gueudet, Pepin y Salinas, 2020).

Estas nuevas interacciones que el docente tiene con estos recursos que incluyen los digitales, orientado en el logro del objetivo planteado, han requerido de un trabajo nombrado

documento, se nombra así, dado que, es realizado con una intención predeterminada. De lo anterior proviene el enfoque documental de lo didáctico. Este enfoque anteriormente mencionado es una teoría didáctica que tiene como objetivo principal, comprender la evolución profesional del docente a través del estudio de sus interacciones con los recursos en las tareas de enseñanza. Por otro lado, tiene conceptos fundamentales como el de esquema y además cabe resaltar que surge de la necesidad que generó la digitalización de la información y la comunicación haciendo imperante nuevos enfoques teóricos otros (Trouche, Gueudet, Pepin y Salinas, 2020).

Partiendo del enfoque documental de lo didáctico, el trabajo del profesor en la elaboración de un documento se refiere como el proceso de La Génesis instrumental, este proceso descrito de manera breve consiste en ver el uso de los recursos de manera que promuevan la interacción y sean susceptibles a mejoras. Con la finalidad de privilegiar estos procesos se consideran dos aspectos: i) las características del recurso los cuáles influyen en la manera de llevar a cabo la práctica del profesor este aspecto es referido como instrumentación. ii) los conocimientos del área y las capacitaciones con los que los profesores disponen para orientar la modificación de los recursos, este proceso es referido como instrumentalización, orientados al objetivo didáctico del profesor que surge a través de la preparación del diseño y reiteradas implementaciones (Trouche, Gueudet, Pepin y Salinas, 2020).

A su vez, los esquemas de uso, referidos como un conjunto de situaciones del trabajo profesional del profesor, que se presentan en el desarrollo de un objetivo planteado, son fundamentales en los procesos de elaboración de diseño de tareas. Por otro lado, estos esquemas de uso tienen cuatro aspectos: i) invariante operativo establece las normas de intencionalidad de las tareas de manera general. ii) reglas de acción establecen las instrucciones directas para llevar a cabo las tareas. iii) teoremas en acto y concepto, incorporan los conocimientos implícitos por ejemplo en teoremas en acto se considera descubrir los usos de la herramienta y en los de concepto ideas matemáticas del objeto matemático que se aborda. iv) lenguaje simbólico para representar ideas matemáticas como por ejemplo gráficos signos etc., (Trouche, Gueudet, Pepin y Salinas, 2020).

De modo que, se considera pertinente el uso de recursos curriculares digitales para la elaboración de este trabajo, con base a la mirada del enfoque documental de lo didáctico el cual requiere de recursos más esquemas de uso, para la elaboración de tareas. dado que se ha documentado que este enfoque promueve el desarrollo profesional del docente.

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) es un término utilizado para mencionar la ruta que es estipulada por el profesor de manera anticipada, para promover la comprensión de un concepto matemático en particular (Simón,1995). Además, una THA, se menciona como hipotética dado que, la ruta de aprendizaje anticipada y trazada por el profesor, solo son aproximaciones, ya que, no se puede conocer con anterioridad la ruta real de aprendizaje que seguirá cada estudiante. Por otro lado, esta ruta de aprendizaje es planificada con base a una tendencia general que se ha documentado acerca del aprendizaje de los estudiantes. De modo que una THA se construye con base a las ideas propias matemáticas del profesor y las hipótesis acerca de las ideas matemáticas de los estudiantes. Por último, cabe subrayar, que la intencionalidad de una THA es la justificación de las decisiones que el profesor toma para promover el aprendizaje de los estudiantes, y es aplicada con la ayuda de las interacciones entre alumno profesor y el objeto matemático de aprendizaje (Simón,1995).

Para comprender mejor lo que es una THA mencionaremos sus tres elementos centrales:

- i) el objetivo de aprendizaje, el cual es la meta de aprendizaje a alcanzar, y que proporciona la selección de tareas a articular o adaptar; ii) secuencia de tareas, son los modelos de tareas que se inician de acuerdo a las ideas matemáticas previas del estudiante y se articulan empelando las ideas que emergen en cada tarea; iii) los proceso hipotéticos de aprendizaje, son procesos anticipados de como las ideas del estudiante pueden ser promovidas al interactuar con los modelos de tareas diseñadas y que se renuevan con base a los procesos reales de aprendizaje del estudiante. De modo que el diseño de las tareas emerge sobre como el profesor está entendiendo las ideas matemáticas del estudiante y de ese modo planear las posibles situaciones donde surjan inquietudes o dificultades y de este modo planear de qué manera intervenir en el aula (Simón,1995).

De modo que para este trabajo se empela el modelo de Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) para promover la planificación y la práctica docente en matemáticas. Dado que una THA, centra su estructura en torno a un objetivo de aprendizaje, una secuencia de tareas y los procesos hipotéticos de los estudiantes, para ser adaptados a distintitos enfoques conceptuales de enseñanza y aprendizaje que guían al profesor en la toma de decisiones. Por otro lado, su principal aporte es que permite conectar la planificación inicial con la realidad del aula, facilitando la observación, la toma de decisiones informadas durante el aprendizaje y la reflexión continua para adaptar las estrategias basado en la comprensión de las ideas matemáticas de los estudiantes.

La Heurística de los Modelos Emergentes

Se han referenciado que el planteo de problemas abiertos promueve la creatividad de los estudiantes, al momento de proponer estrategias acertadas para solucionarlo, sin embargo, estos problemas han sido de tipo llamativo y de contextos familiares en los estudiantes (Lesh y Harel, 2003 citado por Gravemeijer ,2007). De acuerdo con lo anterior se considera potente el planteo de problemas abiertos, en virtud de sus buenos resultados de aprendizaje con los estudiantes, por lo cual, han sido incluidos en los modelos emergentes, los cuales son considerados como el desarrollo y razonamiento de reorganizaciones de situaciones, y se interesan por el aprendizaje de los estudiantes a largo plazo. Además, la organización de las situaciones propuestas parte de manera informal hasta que el estudiante logre ordenarlas de manera formal (Gravemeijer, 2007).

A su vez la heurística de diseño de modelos emergentes es un concepto más amplio el cual promueve procesos dinámicos y reflexivos de simbolización y construcción de significado. Para promover estos procesos el estudiante es situado en la reflexión de varios modelos a través de sus propias experiencias, orientándose a emplear sus propios razonamientos. Además, cada modelo promueve la organización de situaciones que involucran el empleo razonamientos cada vez más formales. De acuerdo con lo anterior, en un primer modelo el estudiante debe expresar razonamientos de manera informal y en un último modelo debe llegar a expresar razonamientos de manera formal. Por otro lado, cada modelo contiene submodelos

que actúan como una cadena de significación lo que permite establecer niveles que parten de modelos informales a modelos formales (Gravemeijer, 2007).

La articulación de estos modelos está seleccionada por cuatro niveles que categorizan el diseño de las tareas: i) Situacional: las tareas son interpretadas y solucionadas de acuerdo con la comprensión del uso de las herramientas de interacción con el entorno a través del empleo de estrategias. ii) Referencial: las tareas incorporan modelos ya articulados para la interpretación y solución de la tarea. iii) General: las tareas involucran ideas propias de la matemática que el estudiante debe descubrir y comprender para dar solución a la tarea. iv) Formal: las ideas propias de la matemática ya no pertenecen al modelo empleado en las tareas y las ideas matemáticas construidas a lo largo de los niveles son necesarias para la comprensión y solución de las tareas. En los anteriores niveles surge la intencionalidad de los modelos de y para que se articulan en el planteo de las tareas (Gravemeijer, 2007).

Los modelos de y para refieren a los pensamientos o ideas matemáticas que ha construido el estudiante en el desarrollo de las tareas dado que el modelo de, consiste en vincular las tareas a al modelo propuesto en las tareas y el modelo para, consiste en vincular las ideas propias de las matemáticas que ya no están presentes en el moldeado empleado en la tarea tareas (Gravemeijer, 2007).

De modo que la heurística de modelos emergentes privilegia el diseño de tareas orientadas a niveles que promuevan la comprensión de un objeto matemático en particular a través de la implementación de modelos construidos a través de sus propios razonamientos informales y formales. Además, requiere contextualizar al estudiante a situaciones que despierten su interés. Por esta razón se ha considerado pertinente el diseño de las tareas en este trabajo con base en el enfoque de Heurísticas de Modelos Emergentes para promover el pensamiento geométrico.

Objeto matemático de estudio

Prismas

Con base a el libro de Guillen (1999) un prisma es un poliedro que se describe como una figura formada por un numero finito de regiones poligonales. Además, a cada lado de la

región se le conoce con el nombre de arista. También cumple, que cuando dos regiones poligonales se intersecan cada lado de una región poligonal es exactamente el lado de la otra región poligonal y sus lados poligonales se encuentran en un punto.

Por otro lado, tomando de referencia a Con base en Coxter (1971) y Clemens, O'Daffer, Cooney (1998), los prismas se definen en dos grupos: i) prismas rectos, son aquellos poliedros que se generan cuando un polígono se une con otro polígono congruente, con rectángulos ubicados en cada lado correspondiente de los polígonos además, cada polígono comparte un vértice y dos caras (véase Figura 1), ii) prismas regulares, son aquellos poliedros que se generan cuando un polígono regular se une con otro polígono regular congruente, con paralelogramos ubicados en cada lado correspondiente de los polígonos congruentes regulares además, cada polígono comparte un vértice y dos caras (Véase figura 2).

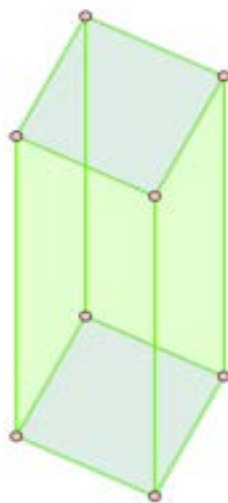


Figura 1. Representación de un prisma recto: este es un prisma regular recto y además cuadrangular

Fuente: elaboración propia.

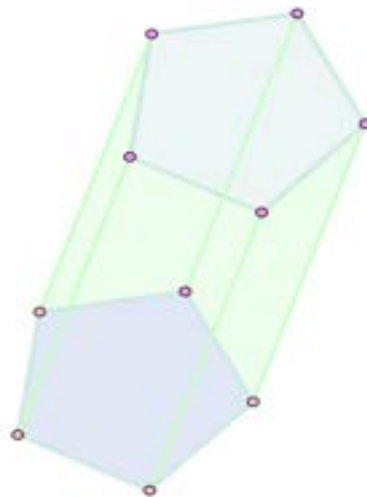


Figura 2. Representación de un prisma regular: este es un prisma regular pentagonal

Fuente: elaboración propia.

Elementos de un prisma

Tomando como referencia el documento de Clemens, O'Daffer, Cooney (1998) Un prisma está conformado por los siguiente elementos: i) las regiones poligonales de un prisma se llaman caras, además, las caras que siempre son paralelogramos se nombran como caras laterales y las otras dos restantes son polígonos de n lados y congruentes entre sí llamadas bases ii) los lados y los puntos de encuentro de los lados, de las regiones poligonales se llaman aristas, iii) los puntos de encuentro de la aristas se llaman vértices, iv) la distancia perpendicular entre las bases se conoce como altura de un prisma. A continuación, se presenta una ilustración de los elementos de un prisma en la Figura, 3.

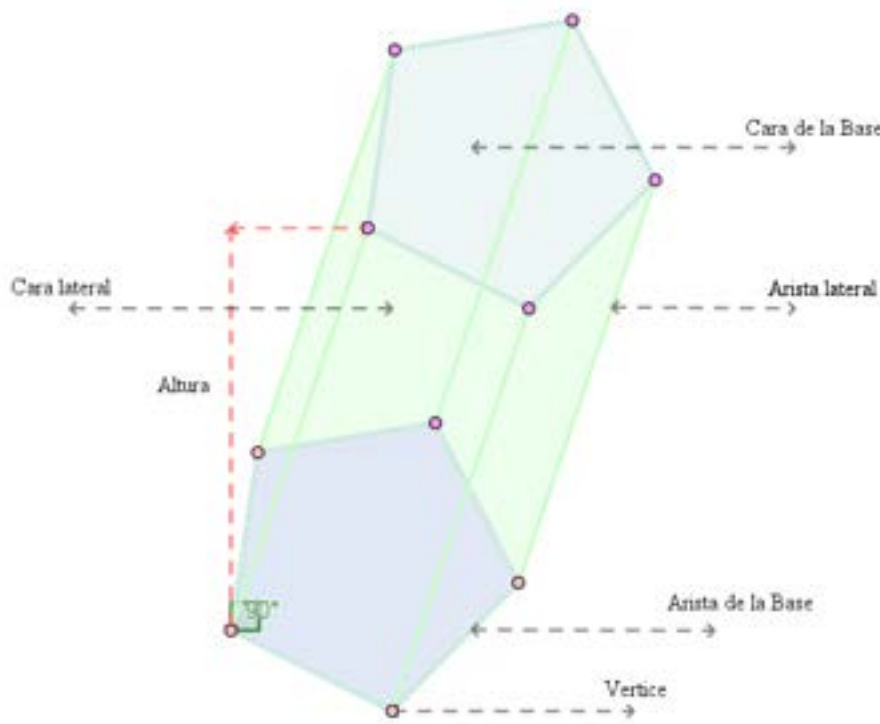


Figura 3. Elementos centrales de un prisma: en el prisma regular pentagonal está indicado los elementos centrales de los prismas

Fuente: elaboración propia.

Algunas propiedades de los prismas

Para concluir, según Clemens, O'Daffer, Cooney (1998) todo prisma regular cumple con la propiedad de que sus bases son polígonos regulares congruentes entre sí. Además, todo prisma recto cumple con la propiedad de que las aristas de sus caras laterales son perpendiculares a la base. De modo que todos los prismas deben cumplir con el siguiente teorema, las aristas laterales de un prisma son congruentes y paralelas entre sí.

En conclusión, el diseño de tareas en este trabajo se fundamenta con base a cuatro referentes teóricos centrales: los recursos curriculares digitales y sus procesos de instrumentalización e instrumentación para promover la interacción de los estudiantes con los recursos. Por otro lado, se planifica el diseño de tareas tomando como referencia las THA para una planificación estructurada y adaptable. Además, de acuerdo con la Heurística de Modelos Emergentes se propone articular tareas que promuevan el aprendizaje a través de niveles de

razonamiento, para que los estudiantes pasen de ideas informales a ideas formales.

Finalmente, se presenta la teoría matemática del estudio de los prismas regulares con sus elementos, propiedades y su teorema fundamental.

3. Metodología

En este documento se trabaja bajo el paradigma de la IBD como panorama general y se delimita a la mirada de los experimentos de enseñanza para analizar las interacciones del profesor y el estudiante cuando el estudiante crea conocimiento a partir de su propia idea matemáticas.

La Investigación Basada en el Diseño

La investigación basada en el diseño es referida como un conjunto de teorías de investigación de carácter principalmente cualitativo. Su objetivo es estudiar el aprendizaje con base a situaciones particulares, a través del diseño, los distintos procesos de aprendizaje, planeaciones y recursos de enseñanza, de tal manera que se privilegia la comprensión de los procesos de aprendizaje involucrados, los de la enseñanza y los de la evaluación. De acuerdo con el objetivo de la investigación basada en el diseño IBD incorpora y dispone de un conjunto de teorías metodológicas que potencian el aprendizaje. Esta actividad de la investigación basada en el diseño consiste en plantear un objetivo, una planeación y una metodología (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

A su vez la IBD involucran experimentos de diseño que consideran una gran cantidad de variables, interacciones, dirigido por la teoría puesta en práctica, en el que emergen modelos teóricos (Ortiz, 2023).

Las características de experimentos de diseño conforman una estructura en la que se articulan las situaciones de aprendizaje y enseñanza con principios teóricos (documentación, búsqueda de bibliografía etc.). Las situaciones de aprendizaje y enseñanza están orientadas al problema de investigación y las variables con el estudio, además consideran los entornos de los estudiantes. Los principios teóricos están direccionados a los principios de la elaboración de un diseño que para este caso corresponde a los elementos que estructuran la THA. Esta elaboración de diseño es basada en la literatura de modelos de procesos que se dan en el aprendizaje para crear o modificar sus habilidades, destrezas por medio del razonamiento la atención, lo lógico, lo abstracto etc., referida como diseño instruccional, articulados con los resultados teóricos sobre el diseño basado en las experiencias del estudiante (Ortiz, 2023).

Por otro lado, aunque la IBD se centra en el aprendizaje de situaciones particulares empleando ciclos iterativos para la reformulación de hipótesis, conjeturas, reformulación de diseño instruccional, e incluso la manera de analizar los datos, para este trabajo solo se empleara un solo ciclo es decir que las hipótesis, conjeturas, el diseño instruccional y análisis de los datos están previamente establecidos.

De modo que la IBD han desarrollado una manera de articular la práctica docente en los procesos de enseñanza y aprendizaje con los análisis teóricos, dado que, se parte de las descripciones de los logros de aprendizaje del estudiante y los atribuye a los procesos de aprendizaje para ser comprendidos para realizar modificaciones a través del diseño y mejorar la práctica profesional del docente. Estas razones anteriores se consideran relevantes para la elaboración de tareas enfocadas en los procesos inmersos de la prueba a través de experimentos de diseño.

Los experimentos de enseñanza

Los experimentos de enseñanza hacen parte del conjunto de teorías de la IBD, están conformados por una secuencia de situaciones de aprendizaje, de las cuales se destacan las interacciones del alumno con el docente, basadas en sus conocimientos previos promoviendo su aprendizaje referido como momentos significativos de enseñanza. Además, se requiere de un investigador observador en el que su rol principal es el de recolectar datos para luego ser analizados. La finalidad de un experimento de enseñanza es producir modelos de aprendizaje en articulación a un conocimiento en particular que emerge de las interacciones entre investigador y docente con base a los datos recolectados de una secuencia de situaciones de aprendizaje. El tiempo y lugar de los experimentos de enseñanza son de acuerdo con el objetivo planteado, pueden tardar horas, días, meses, incluso años y pueden ser empleados según el número y tipo de estudiantes, como laboratorios, auditorios, aulas de clase etc. (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Los experimentos de enseñanza se caracterizan en tres fases principales el Diseño, la implementación y el análisis como se describe a continuación.

i) El diseño: aquí se establecen las características de los recursos y sus modos de uso, para la elaboración de las tareas, en este caso particular se usó el ADG GeoGebra priorizando herramientas como la medida y el arrastre. Por otro lado, se establecen los contenidos teóricos matemáticos relacionados con los prismas regulares y los objetivos o meta de aprendizaje que guían las tareas. Por último, se articulan las características de los recursos, sus modos de uso, y los componentes teóricos de las tareas.

ii) La implementación: aquí se interviene con la THA en un grupo específico de estudiantes del grado séptimo de básica secundaria, además se determina la manera de recolección de datos, en este caso particular audios, hojas de trabajo y grabación de video. Por otra parte, se busca alcanzar el objetivo de la intervención que, para este estudio, es promover el aprendizaje de la definición de un prisma de base regular con la ayuda de (ADG).

iii) El análisis: aquí, el enfoque se centra en el tratamiento de los datos recolectados a partir de los registros de audio y video de las intervenciones de clase. Para ello se seleccionaron segmentos de enseñanza con base a tres criterios a) reconocer discusiones entre el profesor y el estudiante acerca de un objeto matemático, b) las discusiones que se hallan reconocido entre el profesor y estudiante acerca de un objeto matemático, deben tener un soporte físico o evidencia escrita de trabajo. c) las discusiones entre estudiante y profesor acerca de un objeto matemático se enfocan en un criterio de interés del investigador.

Participantes de los experimentos de enseñanza

La intervención en el aula de la (THA) se llevó a cabo en la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina, ubicada en el barrio San Luis, al oriente de la ciudad de Santiago de Cali. Los estudiantes pertenecen al séptimo grado, específicamente al curso 7-5, que está conformado por 28 estudiantes. Por otro lado, el aula de clase está equipada con un cajón metálico donde se almacenan los computadores y se les suministra la carga de energía. De este cajón metálico se utilizaron y se cargaron 17 computadores para que los estudiantes realizarán las tareas de manera individual, en parejas y un grupo de tres. Además, el desarrollo

de las tareas se realizó con acompañamiento docente y la ayuda de un Video Bean para aclarar algunas dudas de manera general. Por último, se utilizaron dos celulares para grabar audio y video de las intervenciones de la clase.

Fases de los experimentos de enseñanza.

Previamente a la elaboración de las tareas, se seleccionaron referentes con dos enfoques distintos i) para su articulación y ii) para su adaptación los cuales se presentan a continuación.

i) Simón (1995). Realizan el estudio reconstruyendo la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista. Su objetivo principal es explicitar como la teoría constructivista fomenta la investigación en educación matemática, sin contar con una metodología definida, de modo que requiere de modelos particulares según el interés de investigación. Con base a este estudio las tareas diseñadas en este trabajo se articularon de manera que se pueda promover el aprendizaje de un objeto matemático articulado a una meta de aprendizaje dentro de una THA.

Coxter (1971), en su libro Fundamentos de geometría, presenta la definición teórica de un prisma recto regular, articulando la relación entre sus elementos: bases y caras laterales regulares. Por esta razón, en este trabajo se elaboran tareas orientadas a promover la comprensión de prismas de base regular, mostrando la relación entre las caras de la base y las caras laterales.

Además, Clemens, O'Daffer, Cooney (1998), en su libro Geometría con aplicaciones y solución de problemas, presenta la definición teórica de prisma articulando de la relación de congruencia entre las bases y la relación de paralelismo entre las caras laterales. Por esta razón, en este trabajo se elaboran tareas orientadas a promover la comprensión de congruencia entre las bases y las relaciones de paralelismo entre las caras laterales de los prismas de base regular.

Por otro lado, Villers, Govender, Paterson (2009) en su estudio definir en geometría. Su objetivo principal es promover la comprensión de propiedades necesarias y suficientes dentro de un objeto matemático para promover el aprendizaje de la definición en geometría. Con base a este estudio las tareas en este trabajo promueven la identificación de elementos y

propiedades de los prismas de base regular con el objetivo de promover la comprensión de su definición.

Por último (Gravemeijer, 2007). Realiza un estudio acerca de la modelización emergente como precursor de la modelización matemática. Su objetivo principal es mostrar que la heurística de modelos emergentes promueve los procesos de modelización matemática en vista de que proporciona una estructura de tareas de modelización. De modo que con base a este estudio se emplea el uso de tareas modeladas para promover la meta de aprendizaje en este trabajo.

ii) Ropero (2022) realiza un estudio acerca de la práctica matemática de definir: Un análisis del discurso de estudiantes de secundaria al definir familias de poliedros. Su objetivo principal es analizar y describir las estrategias que utilizan los estudiantes para aprender a definir conceptos de geometría espacial. El estudio muestra que el uso de ejemplos y contraejemplos de sólidos geométricos facilita la comprensión de su definición, ya que los estudiantes lograron describir propiedades para construir argumentos propios. De modo que se consideró útil adaptar el uso de contraejemplos para estudiar algunas propiedades de los prismas de base regular en a las tareas de este trabajo para promover la descripción argumentada.

Además, Valle (2020) realiza un diseño de tareas acerca de cómo identificamos elementos de los prismas al construir cajas. Su objetivó principal de diseño es partir de un contexto de la vida cotidiana del estudiante que promueva la comprensión de los prismas regulares al reconocer las relaciones entre sus propiedades al observar los cambios que hay al cambiar de una representación tridimensional a una bidimensional. De modo que en este trabajo algunas tareas se adaptaron con base al contexto de las cajas para familiarizar al estudiante con el objeto matemático.

Por otro lado, Villarroel (2011) realiza un estudio acerca de los materiales didácticos concretos en geometría en primer año de Secundaria. Su objetivo principal es identificar y caracterizar materiales didácticos concretos en el aprendizaje de los contenidos de geometría en primer año de bachillerato. El estudio evidenció que los materiales didácticos concretos,

bajo el enfoque de la matemática realista, promueven la reflexión de los estudiantes acerca de los contenidos geométricos en la discusión de sus propias experiencias al manipular objetos. De modo que se adaptaron algunas tareas para promover discusiones que surjan a partir de la interacción con las representaciones del objeto matemático a través de sus propias experiencias para la elaboración de las tareas en este trabajo.

Pechené (2024) realiza un estudio acerca de Una trayectoria hipotética de aprendizaje que integra recursos curriculares digitales como medio para la enseñanza de la semejanza. Su objetivo principal es describir como se promueve la meta de aprendizaje y sus procesos hipotéticos en AGD GeoGebra empelando la heurística de modelos emergentes. Con base a este estudio en este trabajo se adaptaron modelos de tareas en AGD.

Los modelos de tareas adaptadas en la elaboración de la THA se distribuyen con base a los cuatro niveles de la heurística de modelos emergentes de la siguiente manera: en el situacional esta la tarea 1A, en el referencial están las tareas 2A, 2B, 2C, en el general están las tareas 3A, 3B, 3C, 3D y en el nivel formal están las tareas 4A, 4B. Además, la elaboración de estas tareas integra recursos digitales con GeoGebra para facilitar procesos de aprendizaje como describir y argumentar a partir de la observación. A continuación, se presenta una tabla con los conocimientos movilizados (Véase Tabla 1) y describe el propósito específico de cada tarea y el proceso hipotético del que espera que los estudiantes comprendan de manera progresiva acerca de los prismas regulares para aprender a definir iniciando de la identificación de elementos hasta la inferencia de propiedades formales.

Tabla 1

Conocimiento movilizado en cada tarea por los estudiantes

Nivel	Tarea	Conocimiento matemático
Situacional	Tarea 1A.	Elementos visuales de prismas y algunas relaciones de posición entre sus elementos.

		- Caras o figuras planas. - Aristas. - Vértices. Relaciones de posición. - Base inferior y base superior. - Prisma en reposo horizontal. - Prisma en reposo vertical.
Referencial	Tarea 2A.	- Determinar la congruencia de las bases de un prisma de base regular. - Determinar la congruencia de las caras laterales de un prisma de base regular.
	Tareas 2B.	- Reconocer las aristas de un prisma de base regular. - Determinar la congruencia entre las aristas opuestas de un prisma de base regular.
	Tarea 3C.	- Reconocer los vértices de un prisma de base regular.

General	Tarea 3A.	- Determinar que las aristas de la base de un prisma de base regular son todas congruentes entre sí. - Determinar que las aristas de las bases, de un prisma de base regular son paralelas entre sí.
	Tarea 3B.	- Determinar congruencia e incongruencias de las bases según el prisma representado.
	Tarea 3C.	-Determinar la congruencia e incongruencia de las aristas opuestas según el prisma representado.
	Tarea 3D.	- Determinar si las aristas de las bases, de un prisma de base regular tienen relación de paralelismo según el prisma representado.
Formal	Tarea 4A.	-Determinar que las bases de un prisma de base regular son polígonos regulares de n lados y paralelos entre si
Formal	Tarea 4B.	-Determinar que las caras laterales de un prisma de base regular son

paralelogramos y cada vértice
de la base comparte dos
paralelogramos.

Fuente: Elaboración propia

En el nivel situacional la tarea 1A, promueve el alcance de dos propósitos a) Identificar figuras planas en representación tridimensional de prismas de base regular y b) Reconocer elementos centrales como vértices, aristas y caras con la ayuda de dos ilustraciones dinámicas.

Tarea 1A: a) En la ilustración 1 hay tres gráficas de prismas de base regular contextualizados a través de cajas de chocolate sobre un plano dinámico (véase Figura 4). Con base en estas gráficas se le propone al estudiante seleccionar un punto cualquiera en el plano con el cursor y dejarlo presionado para moverlo de manera horizontal y vertical, además se le hace mención sobre los elementos que debe describir para promover la distinción de figuras planas. b) En la ilustración 2 se presenta una sola gráfica de un prisma de base regular contextualizado en forma de una caja de chocolate (véase Figura 5). Con base en esta gráfica se le propone al estudiante describir los elementos que hay en interior de las cajas, y se le indica que presione el botón Inicio para mover una de las caras de la base y observe la profundidad, además observar con más detalle cómo los vértices y aristas unen estas figuras planas.

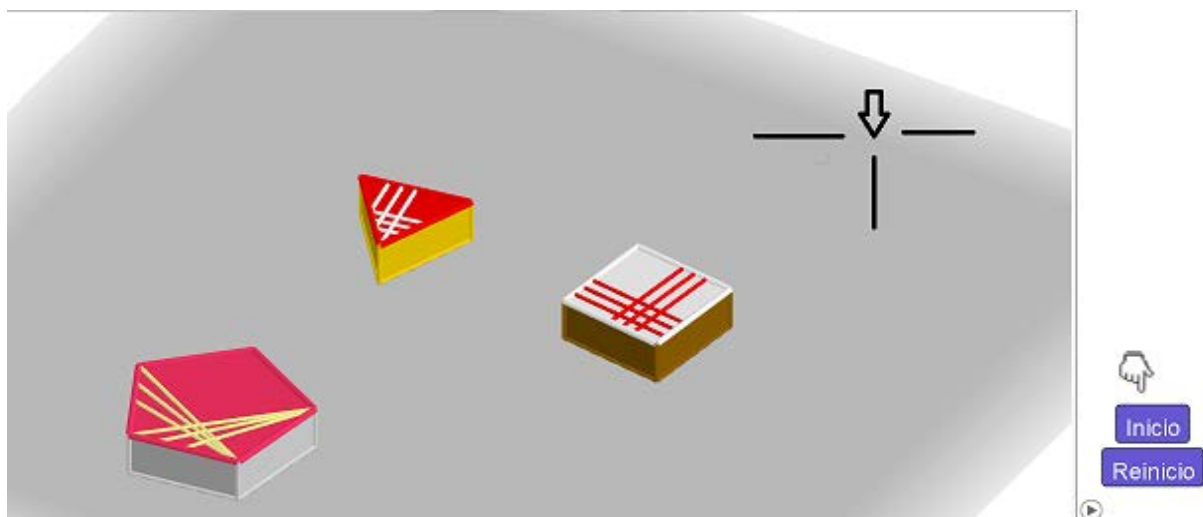


Figura 4. Tarea 1A, ilustración 1: animación de prismas regulares en contextos de cajas de chocolate para la identificación de caras aristas y vértices al mover le plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

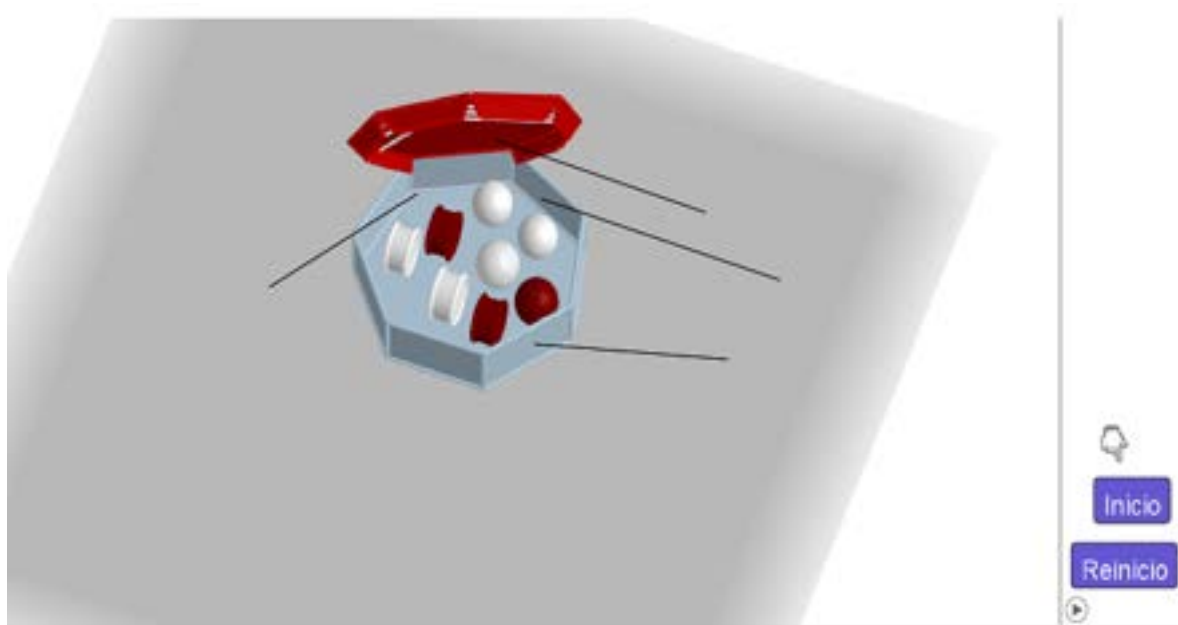


Figura 5. Tarea 2A, ilustración 2: animación de un prisma regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: de elaboración propia

En el nivel referencial las tareas 2A, 2B y 2C, promueven el alcance de los siguientes propósitos 2A: c) Identificar las bases de un prisma de base regular y reconocer que son congruentes entre sí. d) Identificar las caras laterales de un prisma de base regular y reconocer que son congruentes entre sí. 2B: e) Identificar las aristas de un prisma regular. f) Reconocer que las aristas opuestas de las bases de un prisma de base regular son congruentes. g) Reconocer que las aristas opuestas de las caras laterales de un prisma de base regular son congruentes entre sí. 2C: h) Identificar los vértices de un prisma de base regular. i) Reconocer que los vértices son el punto de unión de las aristas.

En la tarea 2A: c) Con base en las ilustraciones 1 y 2 se le propone al estudiante oprimir el botón inicio para observar el movimiento de las caras de las bases del prisma regular representado (véase figura 6) y se le pide identificar sus formas y reconocer si son de igual tamaño entre sí, por la siguiente razón, al movilizar las caras se superponen facilitando dos aspectos primero el movimiento promueve la atención hacia las figuras que se quieren identificar, segundo la superposición facilita la comparación de tamaño lado a lado punto a punto de manera visual. d) Se le pide al estudiante realizar el mismo procedimiento de movilizar y superponer las caras laterales del prisma de base regular representado en la ilustración 2 y 4 (véase Figura 6) con la ayuda del botón inicio y se le pide al estudiante que identifique la forma y reconozca si son de igual tamaño.

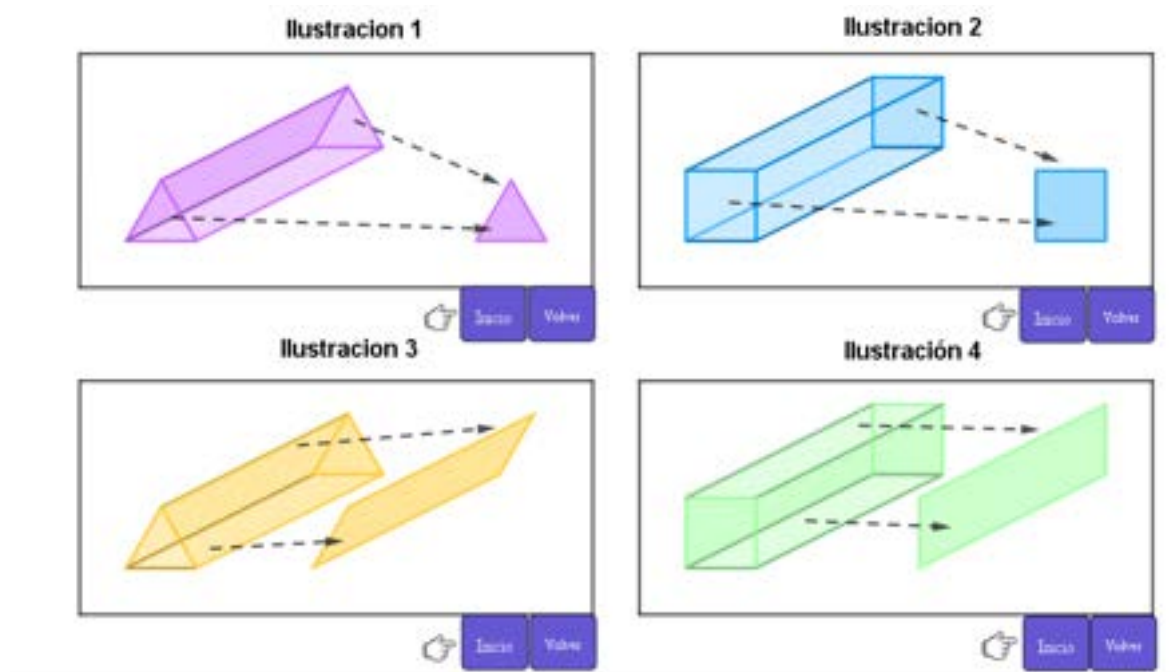


Figura 6. Tarea 2A, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para observar la superposición de las caras laterales y de la base al oprimir el botón inicio y reconocer relaciones de congruencia

Fuente: elaboración propia

En la tarea 2B: e) Con base en las ilustraciones 1 y 2 se le propone al estudiante oprimir el botón inicio para observar el movimiento de las aristas del prisma de base regular representado (véase Figura 7) y pueda identificar su forma, dado que el movimiento centra la atención en la observación de las aristas el facilita reconocer su forma. f) A partir de la ilustración 3 se le propone la estudiante oprimir el botón inicio para observar el movimiento de las aristas de la base de un prisma de base regular (véase Figura 4), para reconocer si tienen igual forma y tamaño entre sí, ya que al moverse las aristas estas superponen entre sí facilitando comparar la forma y el tamaño entre sí. g) con base en la ilustración 4 Se propone al estudiante realizar el mismo procedimiento, con la ayuda del botón inicio movilizar las aristas de las caras laterales del prisma de base regular representado (véase Figura 7), para que queden superpuestas, y reconozca que son de igual forma ay tamaño.

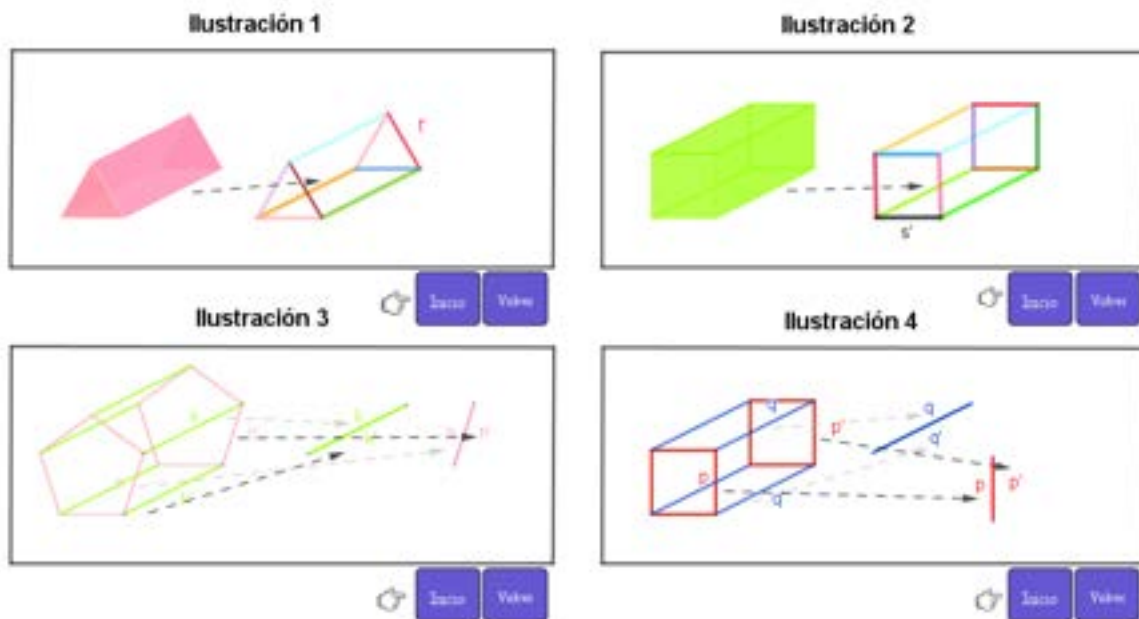


Figura 7. Tarea 2B, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para observar las aristas y la relación de congruencias en las aristas opuestas al oprimir al botón inicio

Fuente: elaboración propia

En la tarea 2C: h) Con base en las ilustraciones 1 y 2 se propone al estudiante oprimir el botón lupa para indicar el punto de encuentro de las aristas del prisma de base regular representado (véase Figura 5) y se le pide que identifique y mencione todos los vértices del prisma de base regular, ya que los vértices son superpuestos sobre el prisma de base regular se promueve la observación y facilita su identificación. i) Sobre las mismas ilustraciones 1 y 2 al superponer los vértices con la ayuda del botón lupa sobre las aristas (véase Figura 8) permite al estudiante observar que en ese lugar se unen las aristas del prisma base regular.

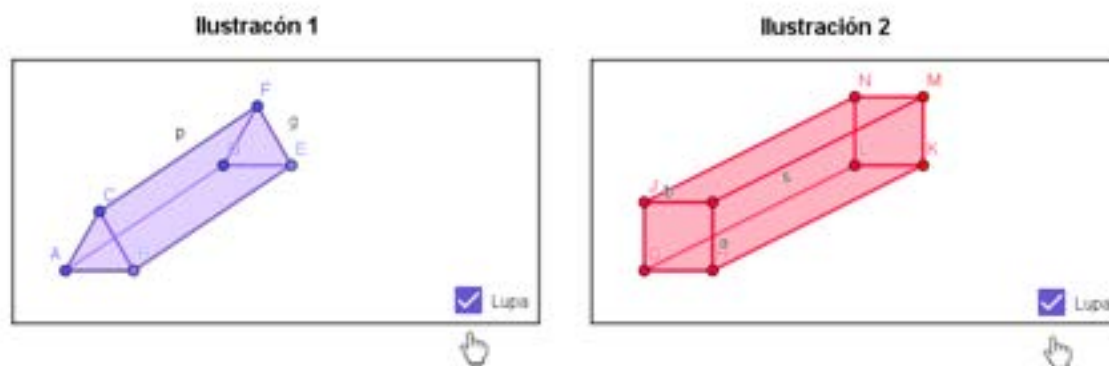


Figura 8. Tarea 2C, ilustración 1 y 2: animación para observar e identificar los vértices como el punto de encuentro de las aristas al oprimir el botón lupa.

Fuente: elaboración propia

En el nivel general las tareas 3A, 3B, 3C y 3D, promueven el alcance de los siguientes propósitos 3A: j) Utilizar las ideas matemáticas aprendidas en los niveles anteriores para justificar sus respuestas. k) Explicitar las relaciones de congruencia entre las aristas de las bases de un prisma de base regular. l) Explicitar las relaciones de paralelismo de las aristas de las bases de un prisma de base regular. 3B: m) Utilizar las ideas matemáticas aprendidas en los niveles anteriores para justificar sus respuestas. n) Explicitar relaciones de congruencia entre las bases de un prisma de base regular. 3C: ñ) Utilizar las ideas matemáticas aprendidas en los niveles anteriores para justificar sus respuestas. o) Explicitar relaciones de congruencia en las aristas opuestas de un prisma de base regular. 3D: p) Utilizar las ideas matemáticas aprendidas en los niveles anteriores para justificar sus respuestas. q) Explicitar las relaciones de paralelismo de las aristas de las bases de un prisma de base regular.

En la tarea 3A: j) Con base en las ilustraciones 1, 2, se le propone al estudiante realizar comparaciones de forma y tamaño para inferir si las aristas de las bases del prisma de base regular representado son de igual forma y tamaño entre sí (véase Figura 9), con base en la tarea 2B propósito d, la cual realizaron con la ayuda de la superposición. k) Con base en las ilustraciones 1 y 2 sobre el prisma de base regular representado, el estudiante deberá

reconocer la superposición como una manera de medir usando el deslizador (véase figura 6), y de esta manera superponga los segmentos en las aristas y reconocer que son de igual forma y tamaño. l) Con base en las ilustraciones 2 y 4 se le propone al estudiante reconocer relaciones de paralelismo entre las aristas de las bases del prisma de base regular representado ya que se puede observar con la ayuda del deslizador (véase figura 9), que las aristas quedan superpuestas sobre dos líneas paralelas e inferir que estas son paralelas.

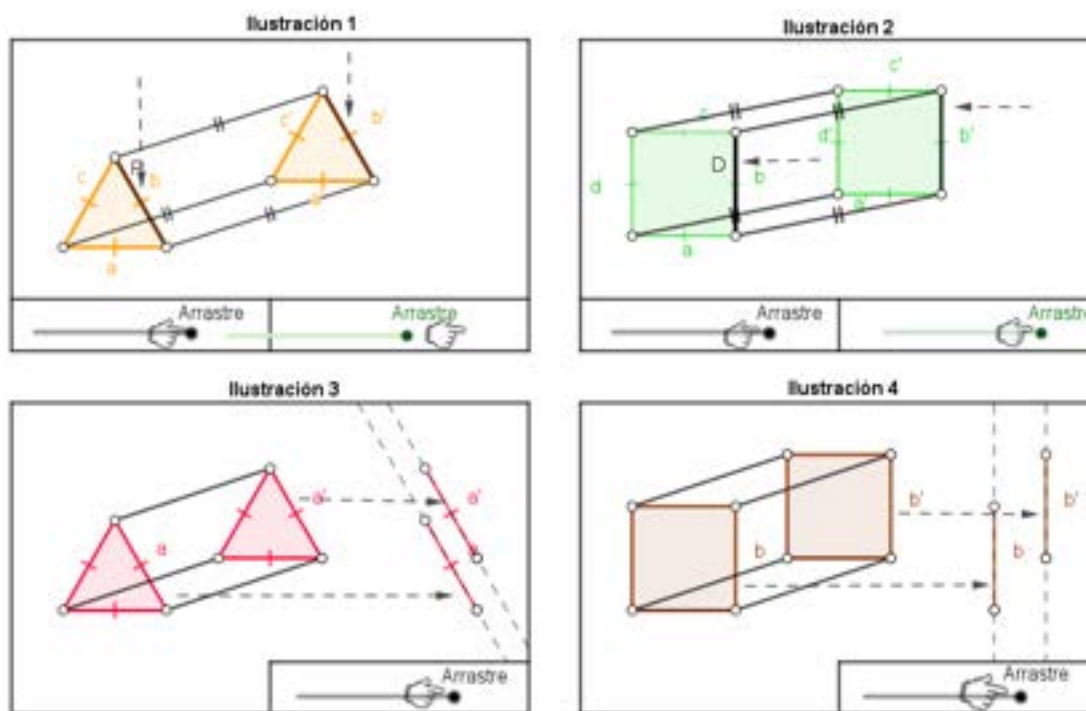


Figura 9. Tarea 3A, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para observar que las aristas son paralelas y congruentes al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 3B: m) Con base en las ilustraciones 1, 2 3 y 4 se espera que el estudiante pueda usar los deslizadores (véase Figura 10), para realizar superposiciones y de esta manera poder argumentar con base a la idea matemática vista en tareas anteriores, las caras de la base de un prisma de base regular son de igual forma y tamaño. n) En las ilustraciones 1 y 2 las caras de las bases del prisma de base regular representado tienen igual forma y tamaño entre sí así que el estudiante lo puede reconocer a través del uso del deslizador (véase Figura 7) al superponerlas entre sí verificando que las caras coinciden de manera exacta. Además, este

mismo procedimiento lo puede realizar a partir de las ilustraciones 2 y 4 moviendo el deslizador (véase Figura 10) para superponer y determinar que las caras no coinciden de manera exacta.

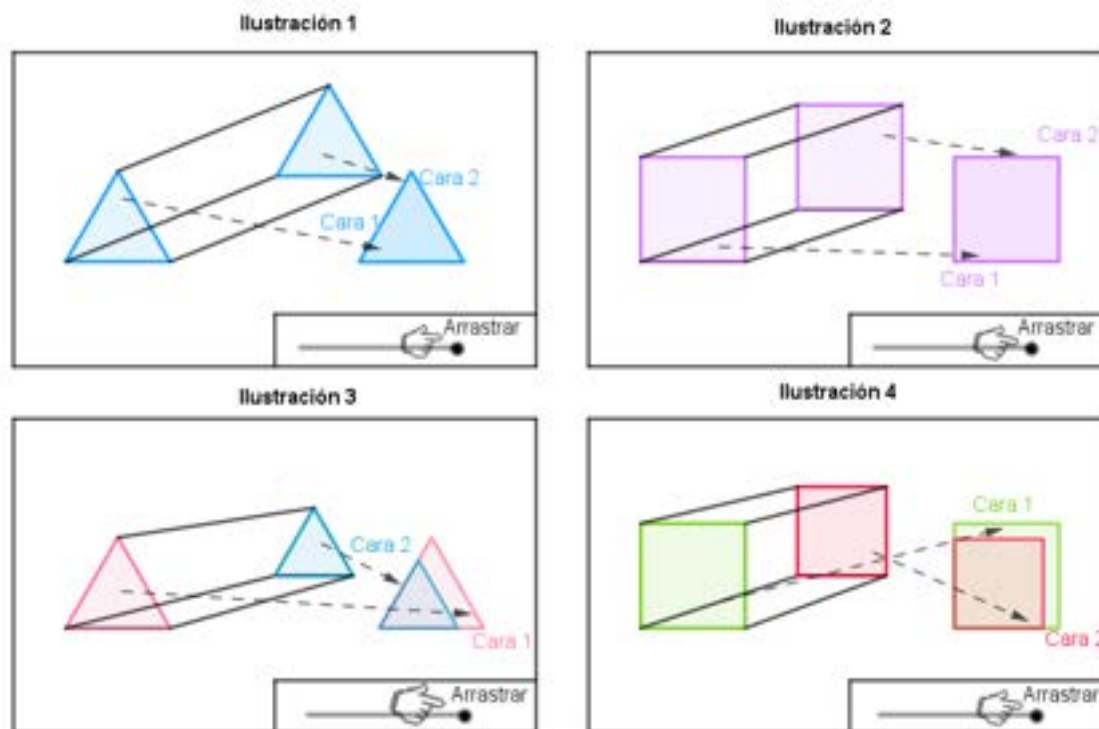


Figura 10. Tarea 3B, Ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para explicitar relación de congruencia de las caras con la ayuda de la superposición al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 3C: ñ) Con base de las ilustraciones 1, 2 3 y 4 se espera que el estudiante pueda usar los deslizadores (véase Figura 8) para realizar superposiciones y de esta manera poder argumentar con base a la idea matemática vista en tareas anteriores, las caras de la base de un prisma de base regular tienen aristas opuestas de igual forma y tamaño. o) En las ilustraciones 1 y 2 en el prisma de base regular representado, las caras de las bases tienen igual forma tamaño entre sí y el estudiante lo puede reconocer a través del uso del deslizador (véase Figura 11) al superponerlas entre sí verificando que cada arista con su opuesta correspondiente coinciden de manera exacta. Además, este mismo procedimiento lo puede

realizar a partir de las ilustraciones 2 y 4 moviendo el deslizador (véase Figura 8) para superponer y determinar que las aristas opuestas no coinciden de manera exacta. Por último, en la tarea 4 el estudiante podrá observar que requiere de mover un deslizador adicional (véase figura 11) para superponer la arista l, para promover la idea matemática de superponer.

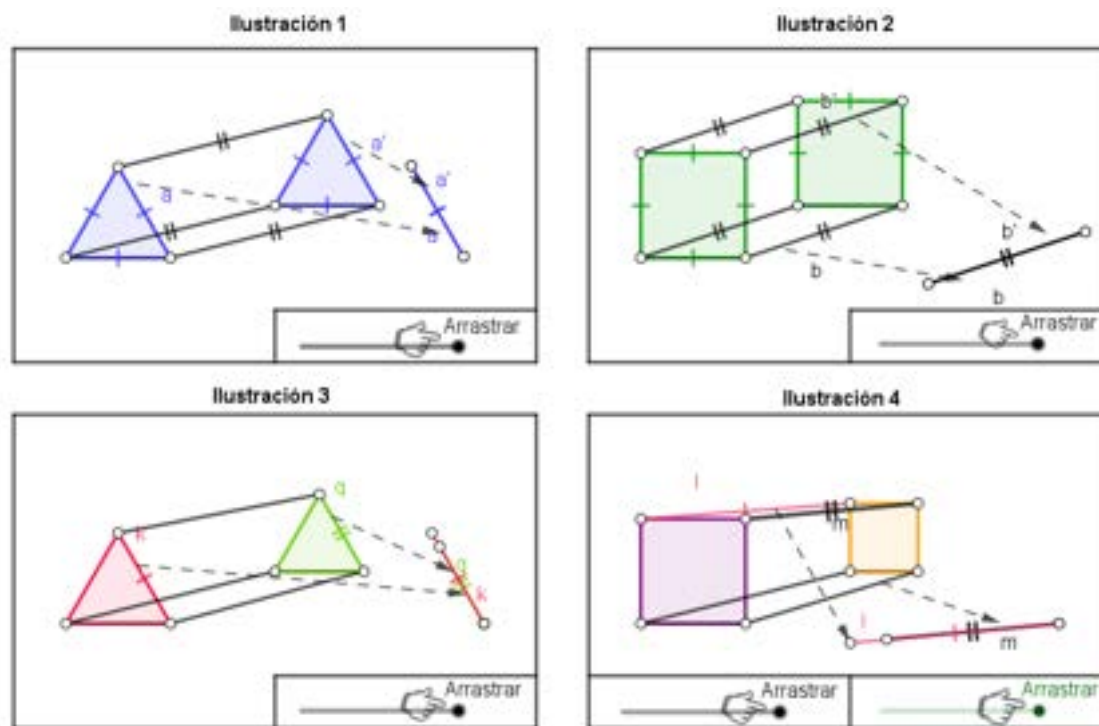


Figura 11. Tarea 3C, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para reconocer si hay o no hay relaciones de congruencia entre sus aristas opuestas al movilizar los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 3D: p) Con base en las ilustraciones 1, 2 3 y 4 se espera que el estudiante pueda usar los deslizadores (véase Figura 9) para realizar superposiciones y de esta manera poder argumentar con base a la idea matemática vista en tareas anteriores, las aristas de la base de un prisma de base regular al prolongarse no se cruzan entre sí. q) En las ilustraciones 1 y 2 las aristas de las caras de las bases del prisma de base regular representado, son paralelas entre sí y el estudiante lo puede inferir a través del uso del deslizador (véase Figura 12) al superponerlas sobre dos rectas paralelas verificando que coinciden de manera exacta. Además, este mismo procedimiento lo puede realizar a partir de las ilustraciones 2 y 4 moviendo el

deslizador (véase Figura 12) para superponer y determinar que las aristas no coinciden de manera exacta sobre dos rectas que se cruzan.

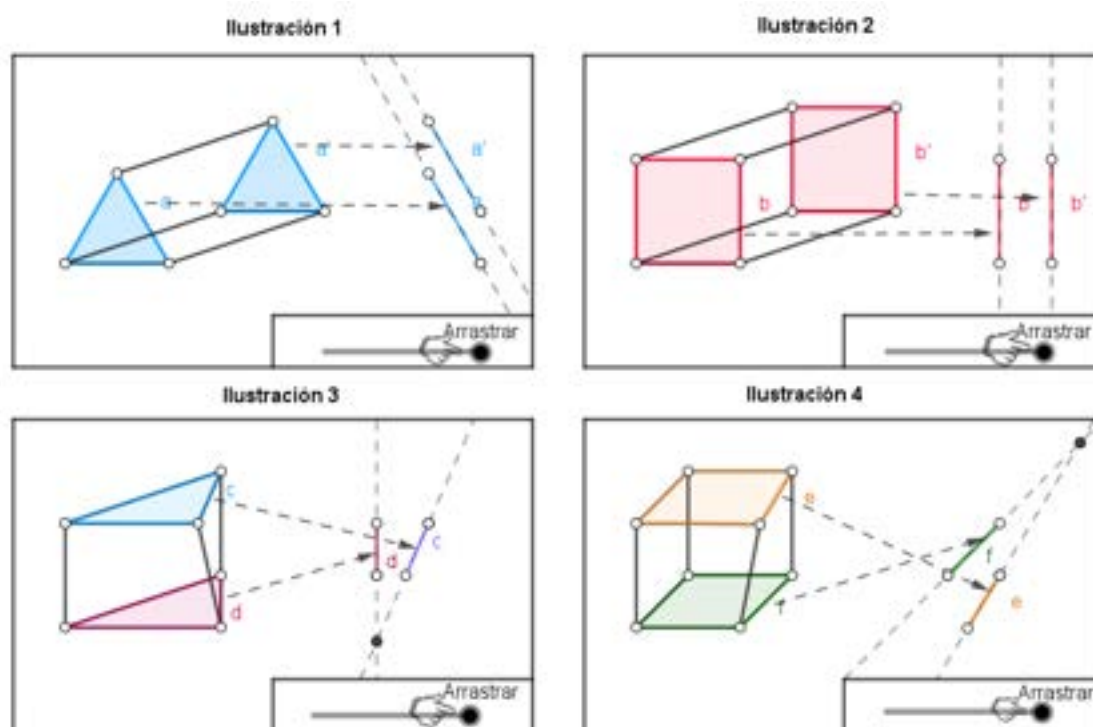


Figura 12. Tarea 3D, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para explicitar relaciones de congruencia y paralelismo entre las aristas opuestas al movilizar los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En el nivel formal las tareas las 4A y 4B, promueven los siguientes propósitos 4A: r) Inferir que las bases de un prisma de base regular de n lados son congruentes y paralelas entre sí. 4B: q) Inferir que las caras laterales de un prisma de base regular de n lados son todos paralelogramos congruentes. s) Reconocer que un prisma de base regular de n lados tiene el mismo vértice para dos caras laterales y una cara de la base.

En la tarea 4A: r) Con base a la ilustración 1, 2 y 3 se le propone la estudiante inferir la propiedad las bases de un paralelogramo son de igual forma y tamaño, ya que al mover el primer deslizador (véase Figura 13) de arriba hacia abajo podrá superponer las caras de las bases y observar que coinciden de manera exacta y que están superpuestas sobre dos líneas paralelas infiriendo que estas bases son paralelas entre sí. Por otra parte, con el segundo

deslizador (véase Figura 10) de arriba hacia abajo podrá incorporar un segmento el cual podrá superponer sobre una arista de la figura y observar que este segmento coincide sobre la arista de manera exacta. Por último, al mover el tercer deslizador (véase Figura 13) podrá rotar este segmento por las aristas de las bases permitiendo observar que las bases tienen todas sus aristas iguales y paralelas entre sí.

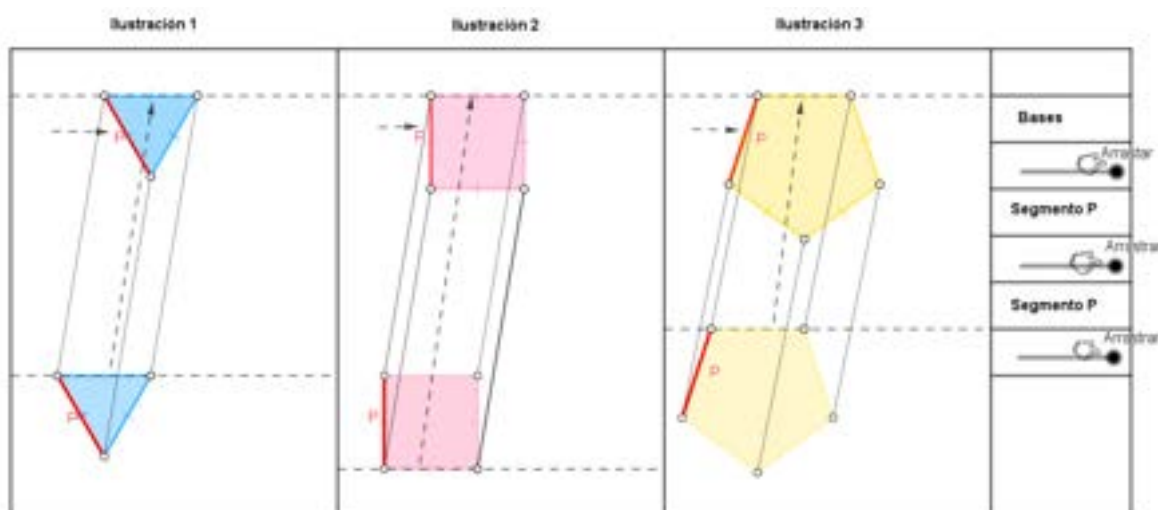


Figura 13. Tarea 4A, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas regulares para hacer inferencias de propiedades de que las bases son paralelas y congruentes para que se aproximen a la definición de prismas de base regular al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 4B: s) Con base las ilustraciones 1,2 y 3 se propone al estudiante inferir que las caras laterales son paralelogramos de igual forma y tamaño, el estudiante lo infiere al mover un segmento P con el uso del botón Segmentó P (véase Figura 14) para superponerlo en las aristas laterales y observar que el segmento coincide de manera exacta en cada una de ellas, y con base al idea matemática vista las caras de las bases son de igual forma y tamaño todas las caras laterales son paralelogramos de igual forma y tamaño. t) Con base en las ilustraciones 1,2 y 3 al mover el deslizador (véase Figura 14) se superponen paralelogramos de colores que coincide de manera exacta, facilitando la observación de que las caras laterales comparten un solo vértice de la base.

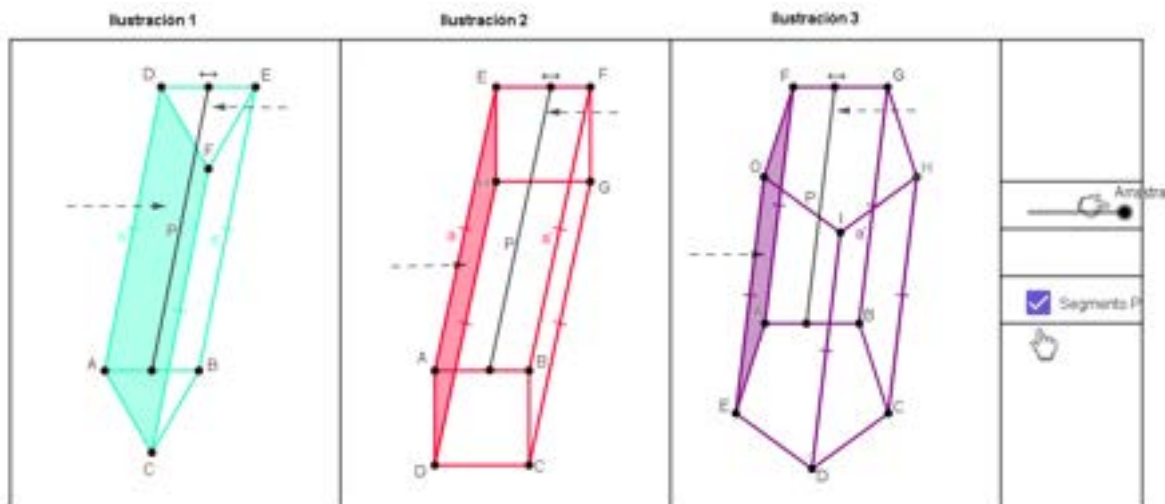


Figura 14. Ilustración, tarea 4B 1,2 y 3: animación de prismas de base regular para que hagan inferencias de que las caras laterales son paralelas y congruentes además relacione los vértices con el número de aristas. Fuente: elaboración propia

Fase I de preparación.

Se realiza una THA con base en los aspectos centrales que la conforman: i) objetivo de aprendizaje. ii) un supuesto acerca de cómo el estudiante comprende todo lo relacionado con el objetivo de aprendizaje y iii) la creación de una trayectoria hipotética de aprendizaje y su modificación (Simón, 1995).

i) Se selecciona un componente matemático en particular para promover su aprendizaje, además se privilegian los procesos cognitivos a trabajar. De modo que en este trabajo se busca promover el aprendizaje de la definición de un prisma de base regular con la ayuda de AGD, privilegiando los procesos cognitivos de observación, descripción, y argumentación.

ii) Se plantea un supuesto de cómo promover ciertos procesos cognitivos en los estudiantes para la comprensión de un componente matemático en particular. De modo que en este trabajo las tareas se articulan con base en la modelización de tareas en los ADG para guiar y privilegiar los procesos de observación, descripción y argumentación.

iii) se elabora una trayectoria con base a la meta de aprendizaje y sus procesos hipotéticos a trabajar. Por otro lado, cabe subrayar que no es motivo de interés la modificación

de la trayectoria hipotética en ciclos repetitivos, de modo que se realiza un solo ciclo con su respectivo análisis.

Con base en Gravemeijer (2007) se articularon modelo de tareas de cuatro niveles i) situacional ii) referencial iii) general y iv) formal, y fueron adaptados con base en (pechene,2024) como se describe a continuación.

Con base en Villers, Govender, Paterson (2009) se traza una meta de aprendizaje promoviendo el aprendizaje de la definición a través la comprensión de sus propiedades. Además, con base a (pechene,2024) las propiedades se promueven con base a modelos heurísticos.

i) Con base en Valle (2020) se contextualiza al estudiante en un contexto de cajas de chocolate y se privilegia la identificación de forma y tamaño de prisma de base regular. El diseño del modelo de la tarea se adapta con base en (Pechené, 2024) al movilizar elementos de las figuras planas en AGD GeoGebra, para que el estudiante las reconozca y mencione algunas relaciones entre ellas.

ii) Con base en Villarroel (2011) se adaptan las tareas acerca de descomponer las figuras tridimensionales en figuras bidimensionales para que el estudiante reconozca propiedades de congruencia entre esas figuras planas. El modelo de tareas se adapta con base en (Pechené, 2024) al movilizar con botones figuras planas en AGD GeoGebra, que se superponen para reconocer diferencias de tamaño y forma, ordenando cada característica en viñetas para inferir su clasificación.

iii) Con base en Roper (2022) se adaptan las tareas de observar los elementos de figuras tridimensionales a partir de armazones conformados por varillas de mecano para identificar relaciones de congruencia entre las aristas. El modelo de tarea se adapta con base Pechené, (2024) al movilizar segmentos con deslizadores para identificar relaciones de posición y orientación, además emplea el uso de contraejemplos ordenado las gráficas por viñetas.

iv) Con base en Coxter (1971), se emplea la definición de prisma recto regular que está centrada en la relación de las caras de un prisma regular. Además, se articula con base en Clemens, O'Daffer, Cooney (1998) que proporciona una definición de prisma regular centrada

en las relaciones de paralelismo de sus bases y caras laterales. El modelo de tareas se adapta con base en Pechené, (2024) quien moviliza varios elementos del prisma en conjunto con la ayuda de deslizadores para inferir la comprensión formal del objeto matemático representado.

Fase 2 de implementación.

Para describir la fase implementación se realiza una transcripción de audios y videos consideran algunos aspectos centrales. Primero las intervenciones se enumeraron entre líneas, una línea para la intervención del profesor otra línea para la intervención del estudiante. Segundo se codificaron las respuestas del estudiante cuando identifican reconocen describen o infieren acerca del objeto matemático

A continuación, se muestra en la figura 1 y 2 el espacio físico donde se realizó la implementación y seguido la tabla 1 donde se describe los segmentos de aprendizaje.



Figura 15. Aula de clase: estudiantes de matemáticas en séptimo grado de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina realizando tareas en AGD.

Fuente: elaboración propia

Fase 3 análisis retrospectivo

Para los análisis retrospectivos se segmentaron intervenciones que describen como los estudiantes se aproximan a la comprensión los propósitos matemáticos propuesto en cada nivel en el diseño de tareas. Además, es preciso subrayar que los segmentos describen el alcance de los propósitos propuesto en cada nivel con base a la

evidencia de las respuestas que realiza el estudiante al profesor, evidenciando una idea matemática y complementada con su respuesta escrita en un máximo de 10 líneas y descrito en la siguiente tabla 1.

Tabla 2.
segmentación de las intervenciones de los estudiantes

Nivel	Tarea	Transcripción del segmento (10 líneas)	Códigos
Situacional	Tarea 1A		
	Pregunta	129. P. Hola cómo van	
	4	porque borraron ¿qué paso? Ven	
	¿Qué	leo la pregunta	
	forma tienen las	130. ¿Cuáles son las	
	paredes de las	diferencias entre la paredes y	
	cajas y que	fondo de la caja?	
	similitudes	cuadrado sino rectángulo	
	existen entre	131. E8 cuadradas,	Reconoce la forma de la
	ellas?	rectangulares	base y de las caras laterales del
		132. P. y similitudes	prisma representado.
		133. E8. ¿profe que son	Indaga sobre
		similitudes?	vocabulario desconocido
		134. P. Son cosas que	
		pueden reconocer que son iguales	
		135. P. ¿Qué forma tienen	
		las paredes de las cajas y que	
		similitudes hay? Si ya	
		136. trabajamos el fondo	

	137. E8. que son	Identifica cuadrado
	cuadradas	como sinónimo de rectángulo
	138. P. Si es eso! claro no	
	es un cuadrado, pero puedes decir	
	que tiene cuatro lados, pero eso	
	139. no se llama cuadrado sino	
	rectángulo	
	Tarea 1A	152. P. ¿Qué diferencias
	Pregunta	hay entre las paredes y la tapa de
5		chocolate? ¿Qué venimos
	¿Cuáles	comparando
	son las diferencias	153. nosotros? Venimos
	de forma entre las	comparando formas cierto y
	paredes, la tapa y	154. venimos
	fondo de la caja	comparando Tamaño, ¿qué
	de chocolate?	diferencia hay de forma y tamaño
		de las partes? ¿Cuál es la pared
		155. allí? (indicando la
		pantalla)

		156. E5. Esta (señala la cara lateral del prisma representado en la pantalla)	Reconoce la forma de la cara lateral del prisma representado.
		157. P. ajá y la tapa la de arriba, cierto ¿qué diferencias tienen?	
		158. E5 Que las paredes son rectangulares y no la tapa	Reconoce que hay una diferencia de forma entre las caras laterales y las bases del prisma representado.
		159. P. la tapa es otra figura ¿eso esa es la diferencia!	
Referencial	Tarea 2A	224. P. Si, si bases y estas son caras laterales ¿cuántas caras tiene t y cuantas caras tiene s?	
	Pregunta		
4			
	En la ilustración 3 y 4	225. pero trata de colocar una base y una cara lateral.	
	¿Cómo podrías afirmar que estas	226. P (señala en la pantalla) ¿en qué parte se unen?	

figuras de las		
caras laterales son		
de igual forma y		
tamaño?	227. E8. las bases	reconoce las aristas como elemento en que convergen las caras.
	228. P. Y las caras laterales ¿que respondió en la primera? (señala en la pantalla)	
	229. E8. que son iguales	reconoce que las caras laterales de las figuras comparadas son congruentes.
	230. P. ¿Por qué?	
	231. E8 porque al juntarlas quedan parejitas.	estrategia empleada por el estudiante para comprobar que las figuras son congruentes.
	232. P. exactamente.	
Tarea 2B	211. P. ¿qué forma tienen	
Pregunta	las aristas t y s de los prismas	
1	regulares? es la misma situación de	
¿Qué	la que 212. hable ahorita ese es el	
forma tienen las	famoso doblez, cuando yo hablo de	
aristas t' y s' de	arista no me estoy 213. refiriendo a	

los prismas regulares?	los objetos. Ustedes ya reconocen los objetos revisen atrás a ver (indica las hojas 214. de trabajo). Piénsenlo bien a ver.
215. E8. ósea que podemos colocar línea recta, línea horizontal lo que sea línea, profe no se el 216. nombre de la figura,	: reconoce la forma de las aristas del prisma representado.
217. P. no importa lo que importa es que lo sepas describir, puedes decir la diferencias son una	
218. figura tiene cinco lados la otra figura cuatro.	
219. E8. rectángulo	identifican la forma de la cara lateral del prisma representado.
220. P. exactamente	

General	Tarea 3A		
	Pregunta	431. P. Eso es obvio cierto	
1	¿El segmento de longitud P y las aristas del prisma representado son el mismo tipo de figura? De ser verdadero o falso menciona tipo de figuras son.	ambas son líneas ahora, la pregunta dice como puede afirmar que son 432. Iguales	
		433. E12. con la medida	reconoce que dos líneas
			rectas son iguales si miden lo
			mismo.
		434. P. entonces como se	
		mide allí	
		435. E12. (señala el	Reconoce los patrones
		segmento P en la pantalla)	de tamaño como estrategia para
			medir.
		436. P. Aja! Entonces da	
		clic y compara todos los lados.	
		¿cuál es el segmento P? listo sácalo	
		de allí, a 437. a simple vista es	
		iguales ¿pero que me permite saber	
		que 438. son iguales que hago ya	
		para saber que son iguales?	

	439. E12. meterlo en la	reconoce la
	caja.	superposición como estrategia para comparar el tamaño de figuras
Tarea	670. E5. profe ahí dice	indaga sobre
3C.	que relaciones	vocabulario desconocido.
Pregunta		
1.	671. P. ¿la pregunta?	
¿Qué	672. P. ¿qué relaciones de	
relaciones de	forma y tamaño puedes reconocer	
forma y tamaño	en la arista a y la arista a'	
logras reconocer		
en las caras de las	673. E5. qué relaciones de	reconoce que el tamaño
bases del prisma	tamaños	como un atributo para comparar
representado?		dos figuras.
	674. P. en la Ilustración	
	cuatro	
	675. E5. ¿ilustración	
	cuatro? pregunta cuatro con base a	
	la ilustración cuatro.	
	676. P. ajá ¿Cuál es la	
	arista a y cuál es la arista a'	

		677. E5. si yo esa la acabe de hacer	identifica las aristas del prisma representado
		678. P. a ilustración uno (tarea 3C)	
		679. E5. entonces que relaciones de forma y tamaño	
		680. P. si	
		681. E5. es que es el tamaño es igual que todo es igual.	Identifica que la relación de las aristas es la congruencia.
Formal	Tarea 4A	874. P. ¿cómo puedes comparar las bases ahí?	
	Pregunta		
	1		
		¿De qué menara puedes reconocer si hay o no alguna relación de paralelismo entre las aristas a , a' ?	932. E5. ¿cómo podría compararlas? 875. P. si esta base con esta base reconoce que no siempre puede comparar empleando la estrategia de superponer.

	876. E5. (mueve el deslizador de la ilustración 4A)	reconoce que la estrategia es observar los atributos de cada figura
	878. P. pero que apareció que observas	
	879. E5. estas liniecitas	reconoce que las aristas se pueden prolongar
	880. P. sí y ¿esas liniecitas ahora me indicaban que?	
	881. E5. Que si eran paralelas	reconoce que solo las aristas de las bases del prisma representado se prolongan y si no se cruzan entonces son paralelas.
Tarea 4B	955. P. aja ¿qué sucede si sigo moviendo el deslizador? ¿qué pasa con el mismo vértice y la cara?	
Pregunta 2		
¿Qué relación se puede establecer entre cada una de las	956. E11 ya no pertenece a la cara,	identifica los vértices que pertenecen a una cara especifica.
	957. P. ¿allí? todavía no	

aristas y sus

segmentos

homólogos en
cada uno de los

prismas?

958. E11.no

identifica los vértices

que pertenecen a una cara
especifica.

959. P. mira la puntica y

la cara

960. E11. ahora si

identifica los vértices

que pertenecen a una cara
especifica

961. P. aja entonces cuál

sería la relación. del vértice y la
cara. ya mencionaste una y es que
no 962. pertenece a todas las
caras, pero ¿qué otra relación
habrá?

963. E11. que pueden

pertenecer a dos caras.

Reconoce que un solo

vértice puede pertenecer solo a
dos caras en el prisma
representado.

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel situacional, el estudiante E8, en la tarea 1A pregunta 4, (véase Figura 16) identifica figuras planas en figuras tridimensionales y además menciona algunas relaciones de forma y tamaño como lo es rectangulares y el mismo ancho (véase Figura 17).

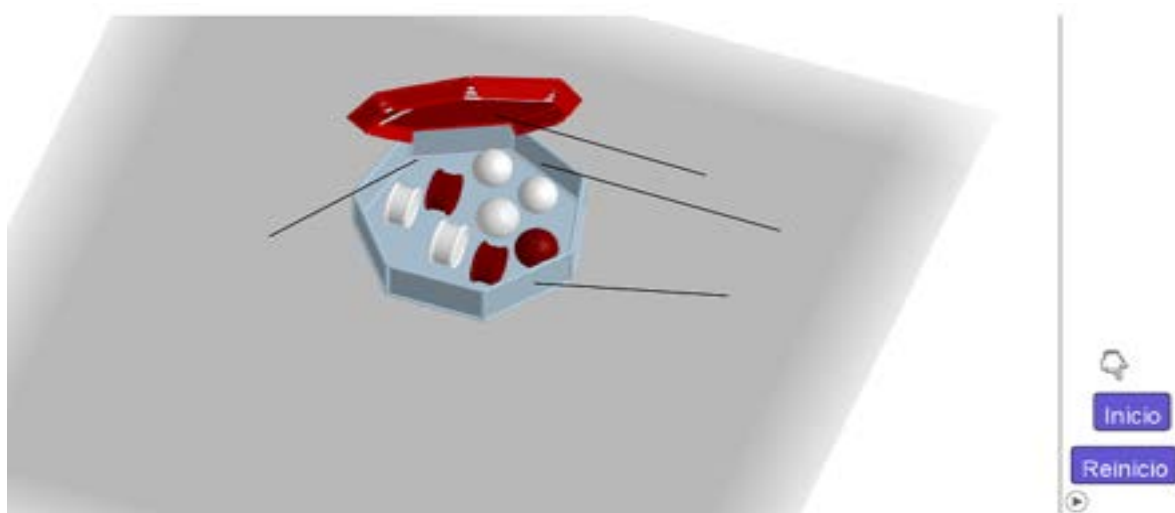


Figura 16. Tarea 1A, ilustración 2, pregunta 4: animación de un prisma regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

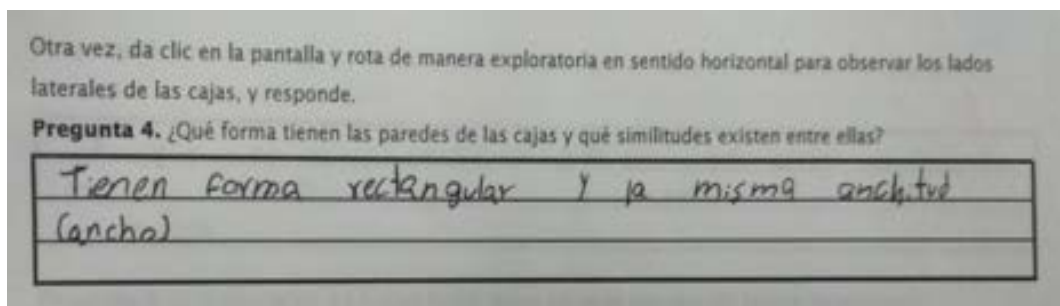


Figura 17. Respuesta escrita 1, tarea 1A, ilustración 2: describe las caras laterales del prisma regular de la tarea 1A, pregunta 4. Fuente de elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel situacional, el estudiante E5 en la tarea 1A pregunta 5, (véase Figura 18) identifica figuras planas en figuras tridimensionales además identifica

relaciones de forma como son rectangulares y que la tapa no es igual a la tapa del fondo (véase Figura 19).

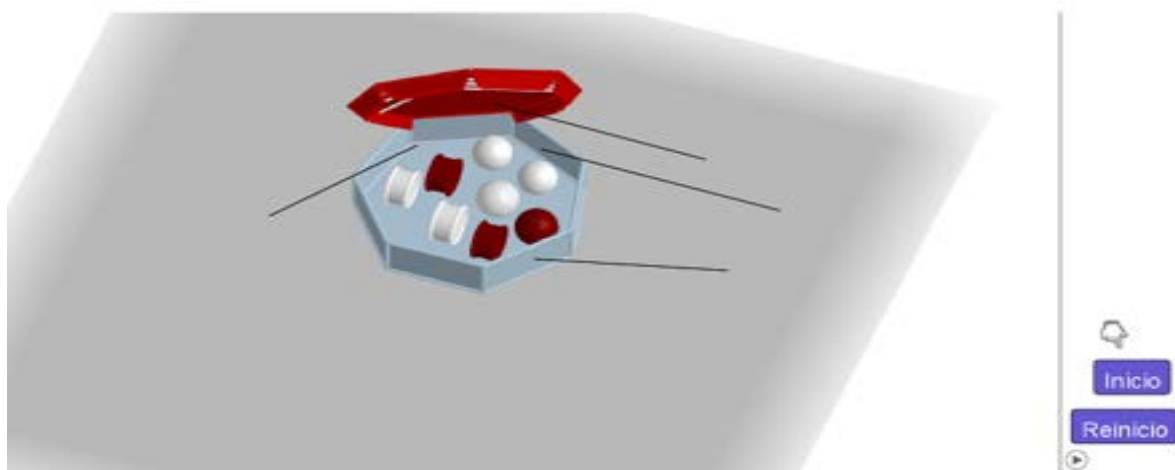


Figura 18. ilustración 2, tarea 1A, pregunta 5: animación de un prisma regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

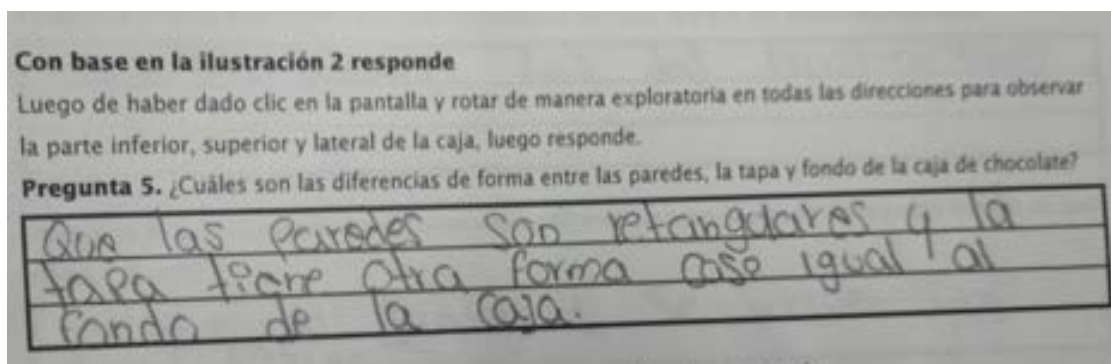


Figura 19. Respuesta escrita 2, tarea 1A, pregunta 5: identifica que las caras laterales son de igual forma. Fuente: elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel referencial, el estudiante E8, en la tarea 2A pregunta 4, (véase Figura 20) reconoce relaciones de congruencia al inferir relaciones de tamaño ya que al juntar puede observar que las caras coinciden de manera exacta, además menciona relaciones de forma cómo, las caras son rectángulos (véase Figura 21). De modo que infiere propiedades

elementales de los prismas de base regular empleando la estrategia de superponer figuras para hacer comparaciones de forma y tamaño.

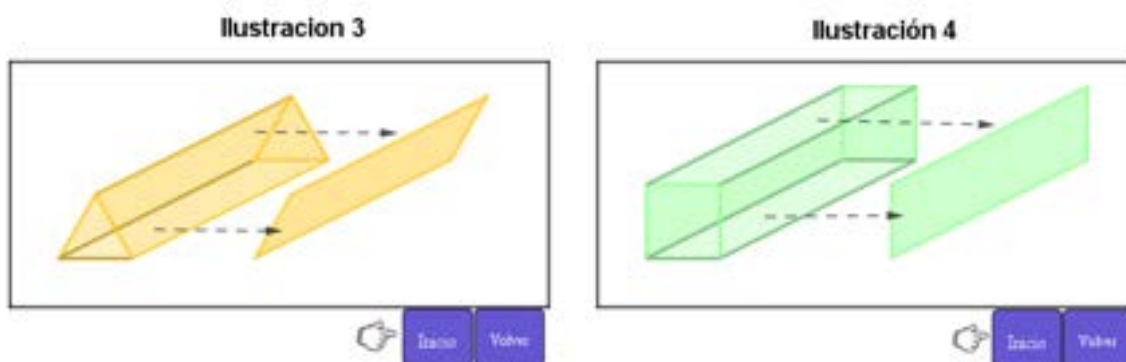


Figura 20. Tarea 2A, ilustración 3 y 4 pregunta 4: Animación de prismas regulares para observar la superposición de las caras laterales al oprimir el botón inicio y reconocer relaciones de congruencia

Fuente: elaboración propia

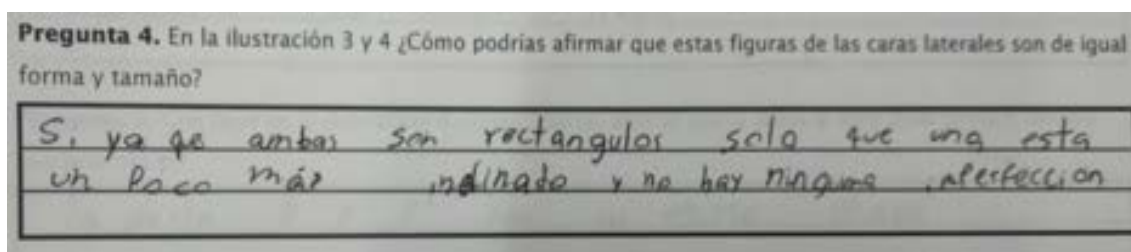


Figura 21. Respuesta escrita 3, tarea 2A, Ilustración 3 y 4: reconoce que ambas son figuras de igual forma.

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel referencial, el estudiante E8 en la tarea 2B pregunta 1 (véase Figura 22) el estudiante logra reconocer elementos centrales de los prismas de base regular como la forma de las aristas al responder que las aristas son líneas rectas horizontales (véase Figura 23).

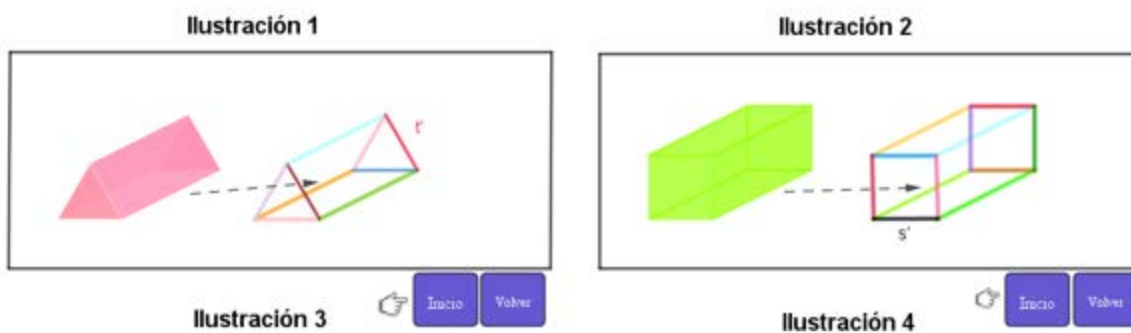


Figura 22. Ilustración, 1 y 2 tarea 2B, pregunta 1: animación de prismas regulares para observar la superposición de las caras de la base al oprimir el botón inicio y reconocer relaciones de congruencia.

Fuente: elaboración propia

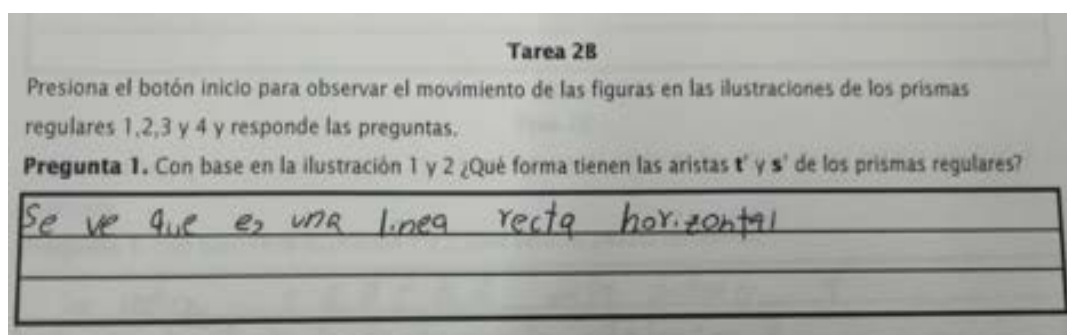


Figura 23. Tarea 2B, pregunta, respuesta escrita 4: reconoce figuras centrales como que las aristas.

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel general, el estudiante E12, en la tarea 3A pregunta 1, (véase Figura 24) identifica propiedades necesarias de los prismas de base regular como lo es tener dos caras de igual forma y todos sus lados iguales, empleando la estrategia de superponer figuras para hacer comparaciones de forma y tamaño (véase figura 25).

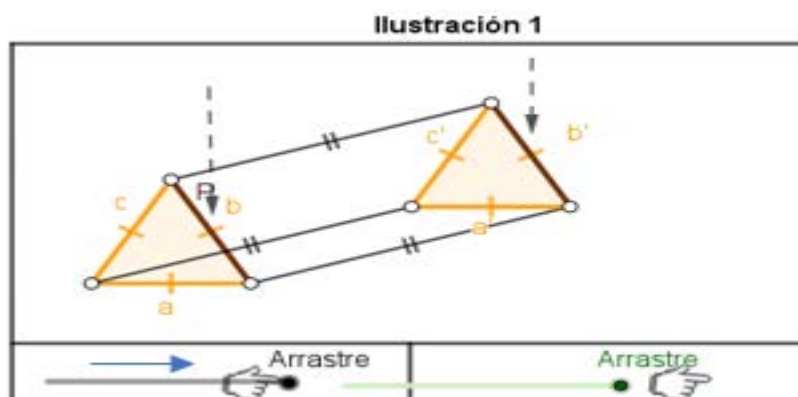


Figura 24. Tarea 3A pregunta, ilustración 1, pregunta 1: animación de prismas regulares para observar que las aristas de la base son congruentes al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

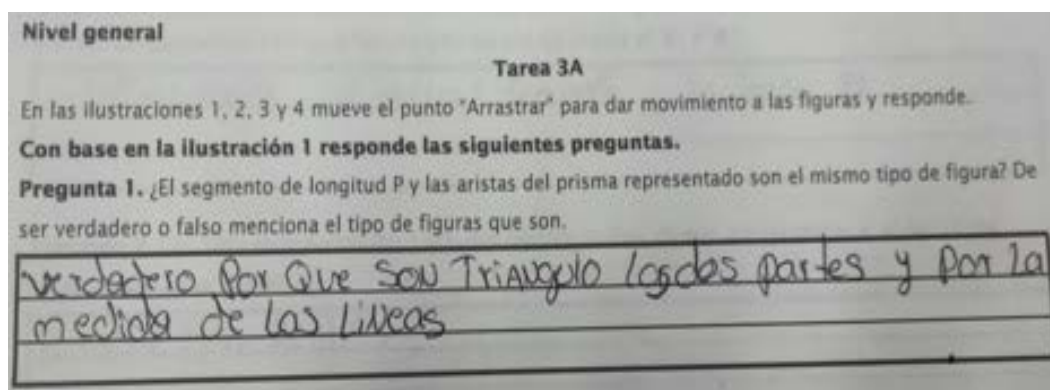


Figura 25. Respuesta escrita 5, tarea 3A, Ilustración 1: reconoce que ambas aristas tienen la misma forma y tienen la media de las líneas es decir igual a P.

Fuente de elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel general, el estudiante E5 en la tarea 3C pregunta 1 (véase Figura 26) reconoce que en los prismas regulares las aristas opuestas son congruentes empleando la estrategia de superponer figuras para hacer comparaciones de forma y tamaño (véase Figura 27).

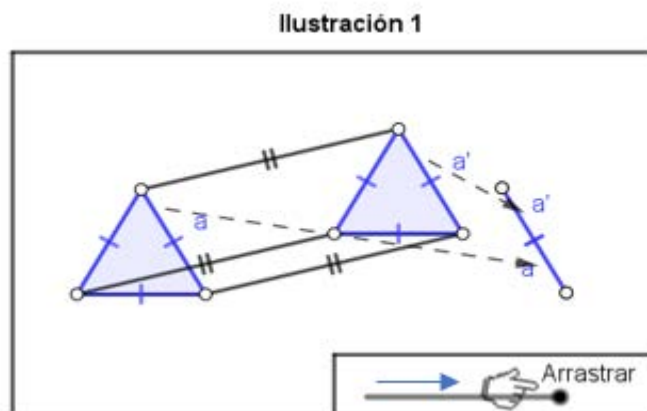


Figura 26. Tarea 3C, pregunta 1, ilustración 1: animación de prismas regulares para observar que las aristas son congruentes al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

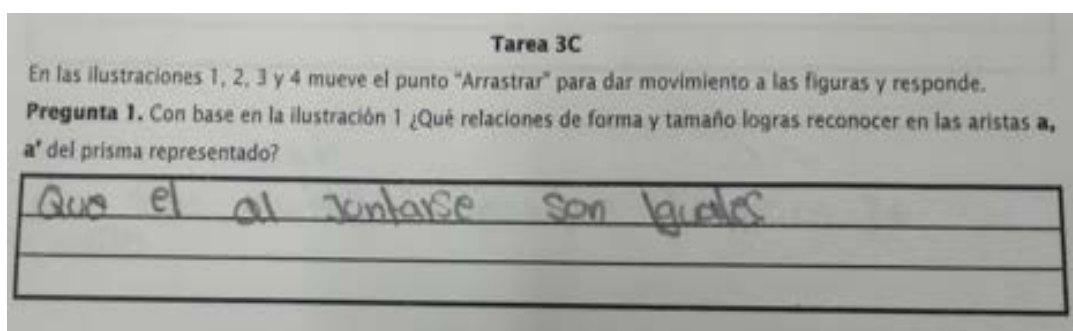


Figura 27. Respuesta escrita 6, ilustración 1, tarea 3C: describen estrategias para determinar que las aristas son del mismo tamaño y forma.

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel formal, el estudiante E5 en la tarea 4A pregunta 1 (véase Figura 28) reconoce que una propiedad que está presente en los prismas de base regular es el tener dos caras paralelas de igual forma y mediada a través de propio análisis al observar la figuras e identificar propiedades vistas en los niveles anteriores (véase Figura 29).

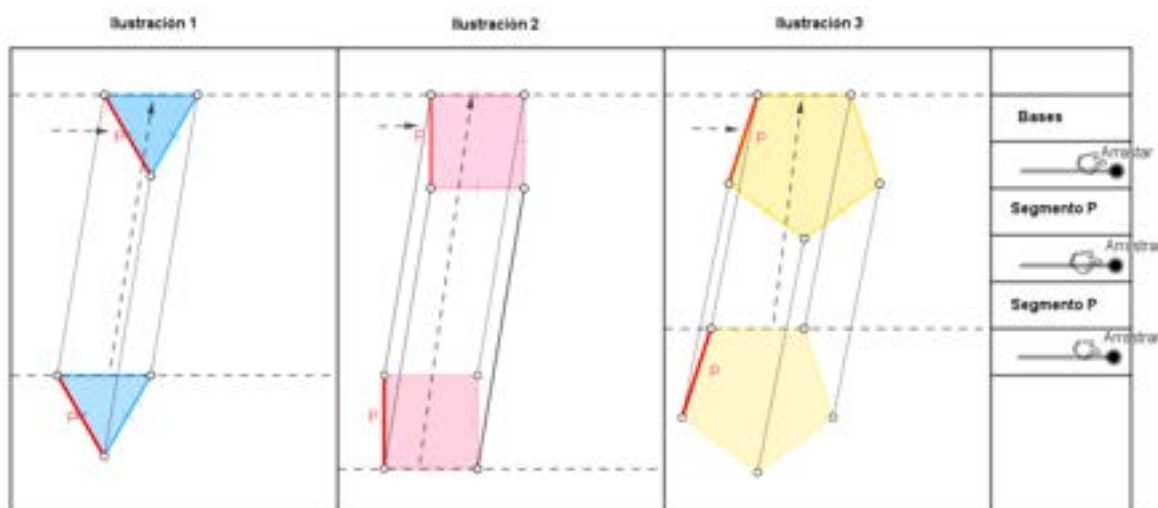


Figura 28. Tarea 4A, pregunta 1, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas regulares para hacer inferencias de propiedades de que las bases son paralelas y congruentes para que se aproximen a la definición de primas de base regular al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

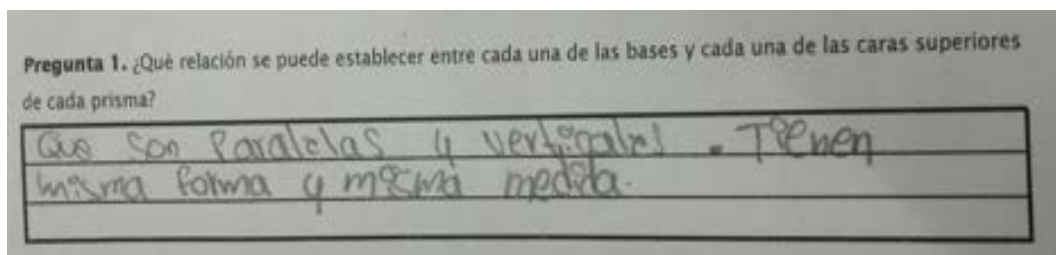


Figura 29. Respuesta escrita 7, tarea 4A, ilustraciones 1,2 y 3: infiere que las bases de un prisma son congruentes.

Fuente elaboración propia

De acuerdo con el segmento presentado en la tabla y la evidencia escrita de la realización de los talleres en el nivel formal, el estudiante E11 en la tarea 4B pregunta 1 (véase Figura 30), reconoce una propiedad que está presente en los prismas y es que dos caras laterales comparten un mismo vértice a través de propio análisis al observar las figuras e identificar propiedades vistas en los niveles anteriores (véase figura 31).

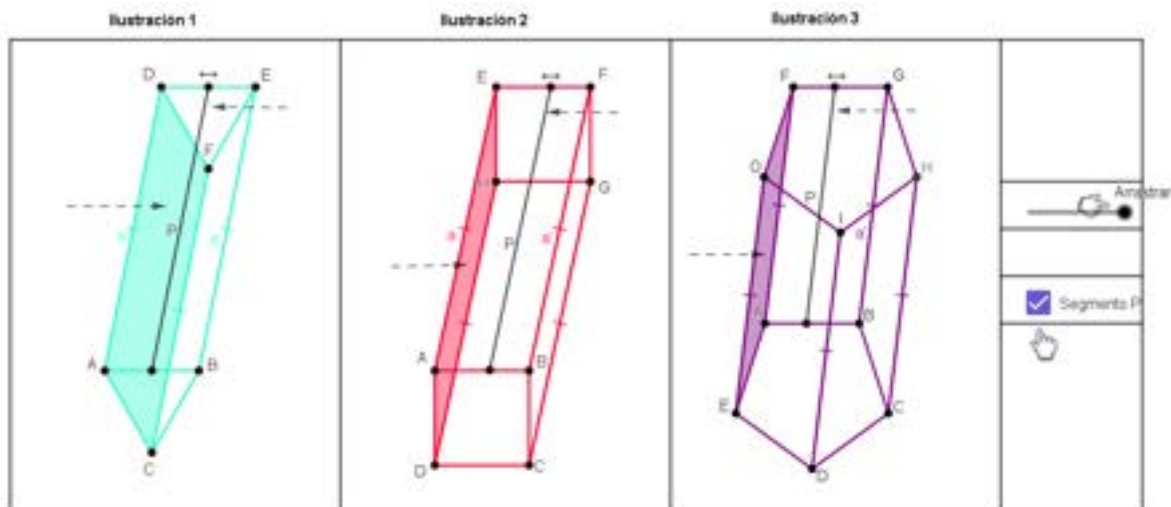


Figura 30. Tarea 4B, pregunta 1, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas de base regular para que hagan inferencias de que relacione hay con los vértices y el número de aristas.

Fuente: elaboración propia

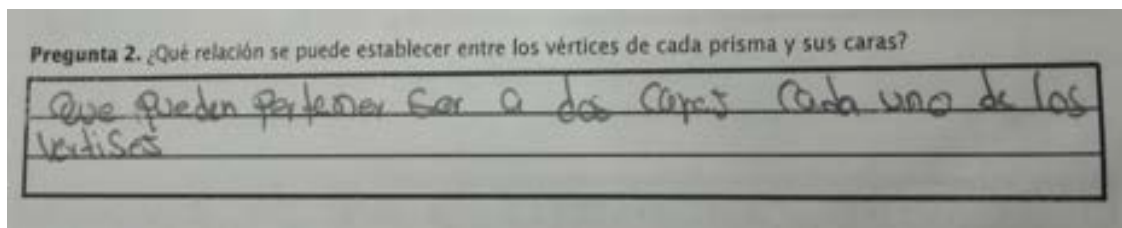


Figura 31. Respuesta escrita 8, tarea 4B ilustración 1,2 y 3: infiere que a lo más un vértice tiene dos caras laterales.

Fuente: elaboración propia

4. Resultados de la investigación

A continuación, se ordenan los resultados de esta investigación con base a los objetivos planteados. En primer lugar, se realiza el diseño de una THA para el estudio de los prismas regulares en las que se integran recursos curriculares digitales. Los resultados de este primer objetivo muestran las intenciones del diseño de las tareas con base a los propósitos matemáticos trazados al emplear modelos de geometría dinámica para promover el aprendizaje de los prismas de base regular. En segundo lugar, se describe la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas regulares. Los resultados de este segundo objetivo muestran la coherencia de los procesos hipotéticos de aprendizaje trazados con los procesos de aprendizaje empleados por los estudiantes.

El diseño de una THA para el estudio de los prismas regulares en las que se integran recursos curriculares digitales

El diseño de la THA consta de dieciséis tareas articuladas en los cuatro niveles de la heurística de los modelos emergentes. i) Situacional: en este nivel se contextualiza al estudiante con un modelo de tarea que consta de dos ilustraciones dinámicas que involucren situaciones de su vida cotidiana. ii) Referencial: este nivel articula dos modelos de tareas, con cuatro ilustraciones y un tercer modelo con dos ilustraciones con base a las presentadas en el nivel situacional, pero en contextos matemáticos. iii) General: en este nivel se articulan cuatro modelos de tareas con cuatro ilustraciones dinámicas cada una, para generalizar las ideas aprendidas en los niveles anteriores, en contextos matemáticos. iv) Formal: en este nivel se emplearon dos modelos de tareas con dos ilustraciones dinámicas cada una, para promover la comprensión de ideas matemáticas nuevas, pero no están articuladas a los procedimientos usuales que le otorgaron su significado inicial. A continuación, se presenta la intención del diseño de las tareas con base a los modelos empleados para el alcance de los propósitos matemáticos trazados.

i) Nivel situacional: corresponde a contextualizar al estudiante través de una situación problema de la vida cotidiana, la cual es la construcción de cajas de chocolate, con el objetivo

de identificar en las figuras planas elementos de los prismas de base regular como las caras, aristas y vértices.

En la tarea 1A, ilustración 1, se presentan tres ilustraciones de prismas de base regular a través del contexto de cajas de chocolate sobre un plano dinámico y dos botones que generan movimiento en una de sus bases (Véase Figura 32). De modo que, al mover el plano desde diferentes posiciones y vistas, la atención se centre en observar figuras planas y reconocer características principales como tamaño y forma. Además, al oprimir los botones de inicio y reinicio se genera movimiento en las una de las bases de cada prisma para fijar la atención en la observación de profundidad de los prismas y como las caras permanecen unidas

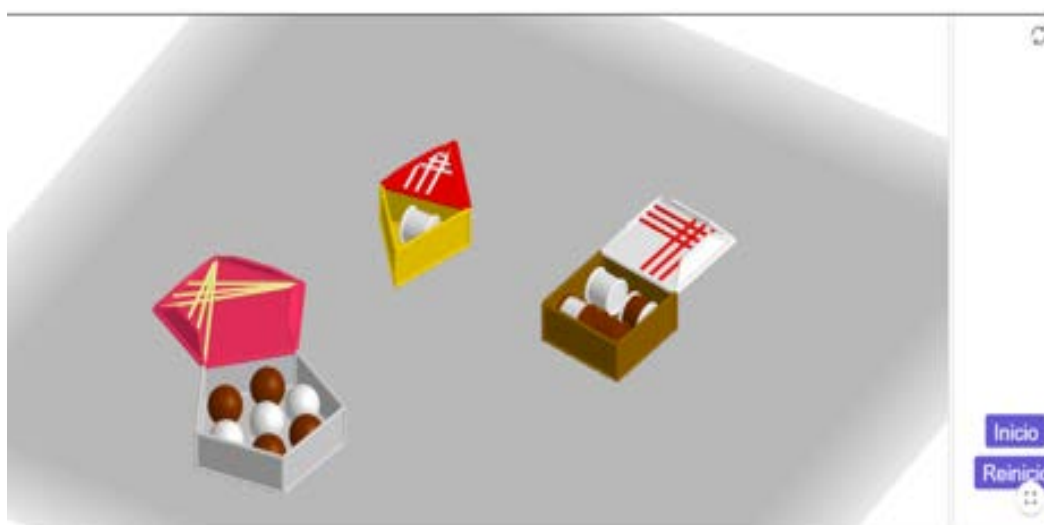


Figura 32. Tarea 1A, ilustración 1: animación de prismas regulares en contextos de cajas de chocolate para la identificación de caras aristas y vértices al mover le plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 1A. ilustración 2, se realiza el mismo procedimiento de mover el plano desde diferentes posiciones y vistas, también se genera movimiento en una de las bases del prisma representado en forma de caja de chocolate, con los botones inicio y reinicio (Véase Figura 33). Sin embargo, la intencionalidad se centra en que describa la forma de los elementos une las caras del prisma representado. Por esta razón se le pregunta al estudiante qué forma se genera al mover la base que queda unida al resto del prisma, además también se le pregunta que

describa el lugar donde se encuentran esos elementos para unir las caras y así pueda reconocer caras aristas y vértices.

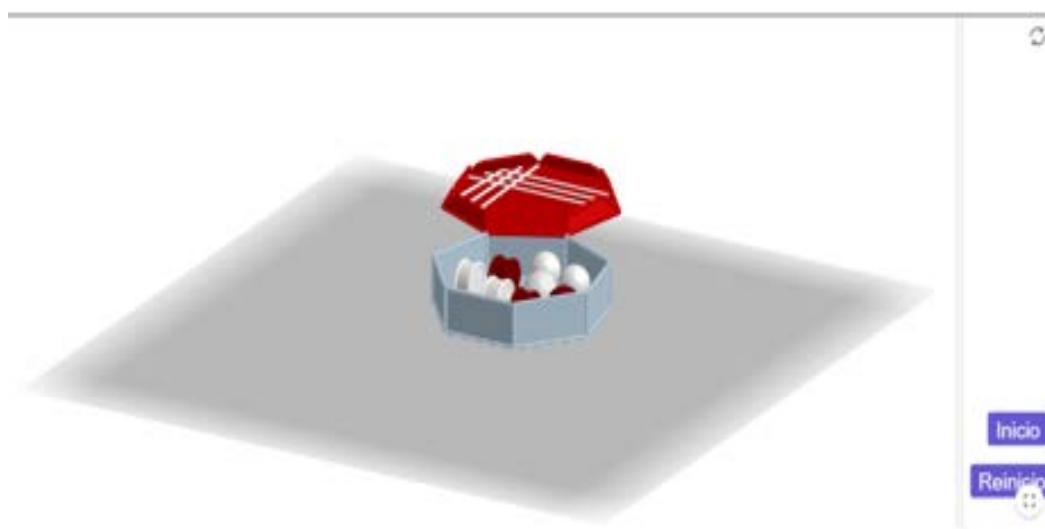


Figura 33. Tarea 1A, ilustración 2: animación de un prisma regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

ii) Nivel referencial: corresponde a la interpretación de modelos con base al contexto de la vida cotidiana, de elaborar cajitas de chocolate, presentados en el nivel situacional para identificar, comparar formas y tamaños de las caras, las aristas y los vértices con la ayuda de la representación de figuras de prismas de base regular, ordenadas en viñetas para promover su clasificación.

En la tarea 2A, se presentan cuatro ilustraciones de prismas de base regular. La primera y tercera son prismas triangulares y la segunda y cuarta son prismas cuadrangulares, además cada par de caras en los prismas se moviliza al oprimir el botón inicio (Véase Figura 34). De modo que en la primera y segunda ilustración las bases de los prismas representados se superponen entre sí al oprimir el botón inicio para centrar la atención en identificar que las caras de las bases de los prismas representados son congruentes entre sí. A su vez en la tercera y cuarta ilustración las caras laterales de los prismas representados se superponen entre

sí para centrar la atención en identificar que las caras laterales del prisma representado son congruentes entre sí.

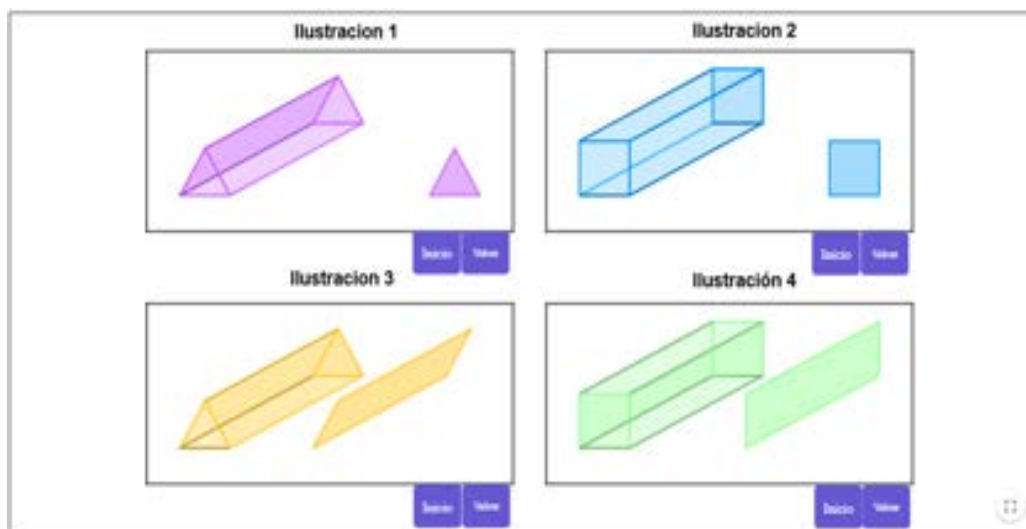


Figura 34. Tarea 2A, ilustración 1, 2, 3 y 4: animación de prismas regulares para observar la superposición de las caras de la base y las caras laterales al oprimir el botón inicio y reconocer relaciones de congruencia.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 2B, se presentan cuatro ilustraciones de prismas de base regular la primera es un prisma triangular, en la segunda y cuarta son prismas cuadrangulares y la tercera es un prisma pentagonal, además, las aristas de los prismas se movilizan al oprimir el botón inicio para centrar la atención en sus elementos y propiedades (Véase Figura 35). De modo que en la primera y segunda ilustración la representación de las aristas se moviliza al oprimir el botón inicio permitiendo observarlas como un elemento aislado y reconocerlas al distinguir su forma. Por otro lado, en la representación tres y cuatro se movilizan las aristas opuestas de una de las caras laterales del prisma representado al oprimir el botón inicio para que queden superpuestas y centrar la atención en reconocer que tanto las aristas de la base como las aristas de las caras laterales son congruentes entre sí.

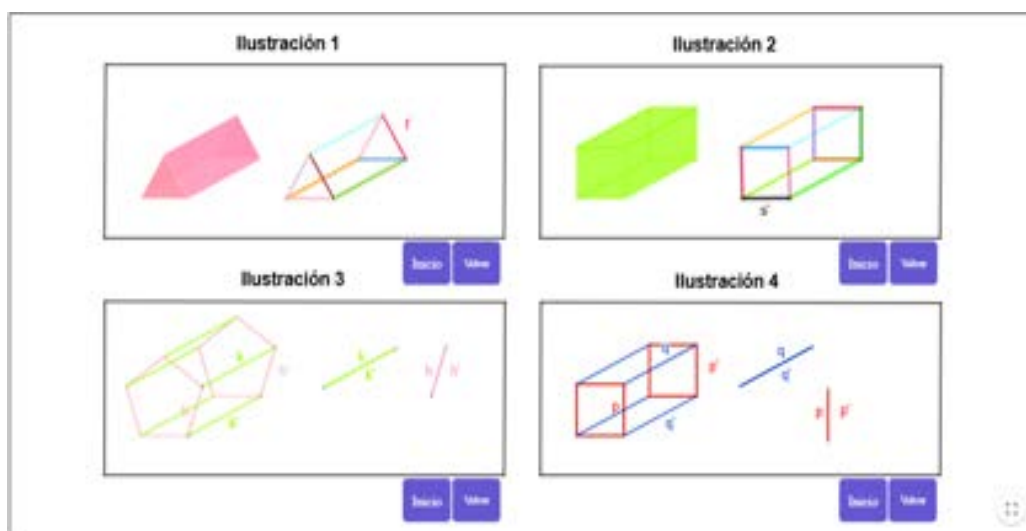


Figura 35. Tarea 2B, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para observar las aristas y la relación de congruencias en las aristas opuestas al oprimir al botón inicio.

Fuente de elaboración propia

En la tarea 2C, se presentan dos ilustraciones la primera de un prisma triangular y la segunda de un prisma cuadrangular, al oprimir el botón inicio se superponen puntos que representa la ubicación de los vértices en los prismas representados (Véase Figura 36). De modo que la primera y segunda ilustración al oprimir el botón lupa, se pueda centrar la atención en observar los puntos y reconocer que son vértices y además inferir que indican el lugar de encuentro de las aristas.

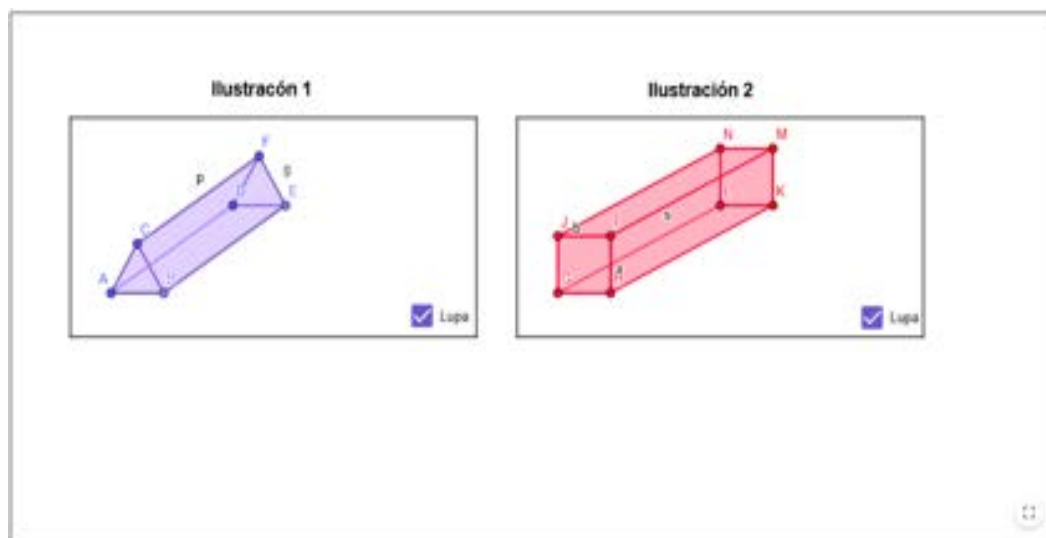


Figura 36. Tarea 2C, ilustración 1y 2: animación para observar e identificar los vértices como el punto de encuentro de las aristas al oprimir el botón lupa.

Fuente: elaboración propia

iii) Nivel general: corresponde a la generalización de las propiedades de prismas de base regular vistas en las tareas anteriores las cuales son: caras de las bases congruentes, caras laterales congruentes, aristas de las bases congruentes y aristas de las caras laterales congruentes, con la ayuda de las ideas matemáticas vistas en los modelos anteriores y articuladas con propiedades de paralelismo.

En la tarea 3A se presentan cuatro ilustraciones la primera y tercera son prismas triangulares, la segunda y cuarta son prismas cuadrangulares, además se emplea el uso de deslizadores para dar movimiento a las aristas de los prismas representados (Véase Figura 37). De modo que en la primera y segunda ilustración se superpone un segmento en una de las aristas de la base del prisma representado con el deslizador de color negro, centrando la atención en reconocer que las aristas de la base son congruentes, además, con el uso del deslizador verde se rotan las aristas sobre la base y con las ideas matemáticas vistas se verifica que todas son congruentes entre sí. Por otro lado, en la ilustración tres y cuatro las aristas de

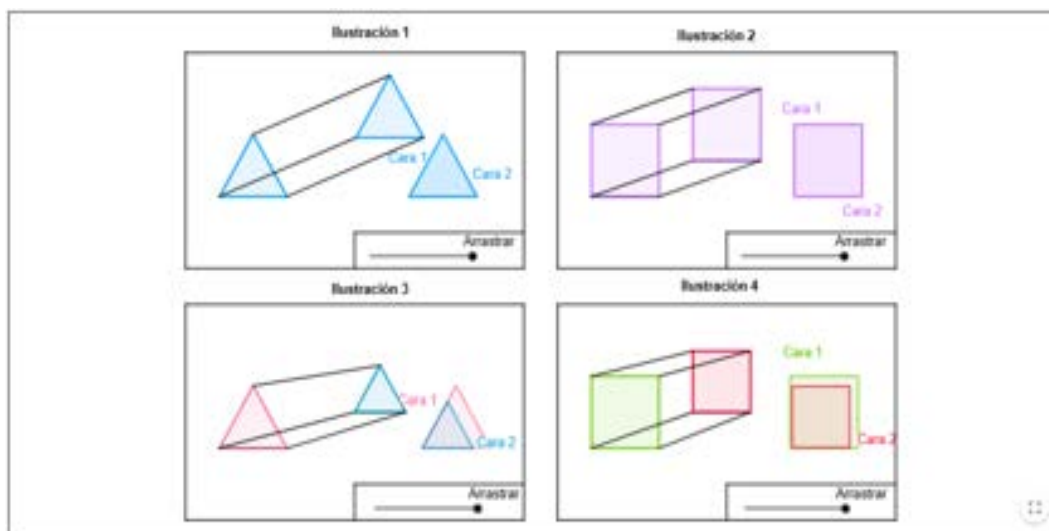


Figura 38. Tarea 3B, ilustraciones 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para explicar relación de congruencia de las caras con la ayuda de la superposición al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la ilustración 3C, se presentan cuatro ilustraciones la primera es un prisma triangular de base regular, la segunda es un prisma cuadrangular de base regular, la tercera es un cuerpo geométrico de tres lados y el cuarto es un cuerpo geométrico de cuatro lados, además las aristas se movilizan con la ayuda de un deslizador (Véase figura 39). De modo que en las ilustraciones uno y dos las aristas se superponen al movilizar el deslizador, centrando la atención en reconocer con la ayuda de las ideas matemáticas vistas, que las aristas opuestas de un prisma de base regular son congruentes. Por otro lado, en la ilustración tres y cuatro en los cuerpos geométricos representados, las aristas se superponen al movilizar el deslizador sin embargo en la ilustración cuatro se requiere mover un segundo deslizador de color verde para lograr superponer las aristas y centrar la atención en reconocer que las aristas no tienen igual tamaño e inferir que no son congruentes.

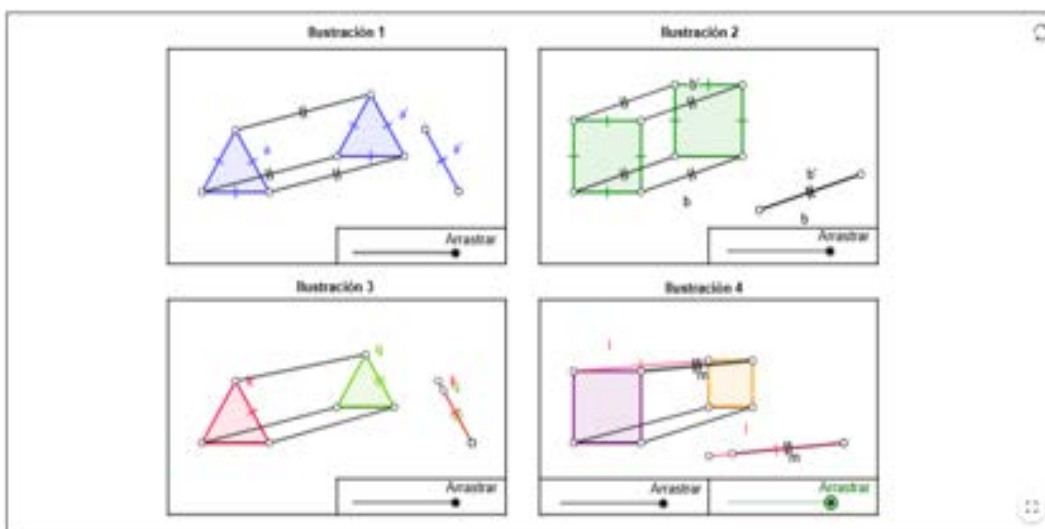


Figura 39. Tarea 3C, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para reconocer si hay o no hay relaciones de congruencia entre sus aristas opuestas al movilizar los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 3D, se presentan cuatro ilustraciones, la primera es un prisma triangular de base regular, la segunda es un prisma cuadrangular de base regular, la tercera ilustración es un cuerpo geométrico de tres lados y el cuarto es un cuerpo geométrico de cuatro lados, además, las aristas se mueven al movilizar los deslizadores (Véase Figura 40). De modo que, en la primera y segunda ilustración las aristas de las bases se superponen sobre dos rectas paralelas con la ayuda del deslizador centrando la atención en que las aristas no se cruzan entre sí, e inferir que son paralelas. Por otro lado, en las ilustraciones tres y cuatro las aristas se superponen sobre dos líneas no paralelas con la ayuda del deslizador centrando la atención en que las líneas no se cruzan e inferir que no son paralelas.

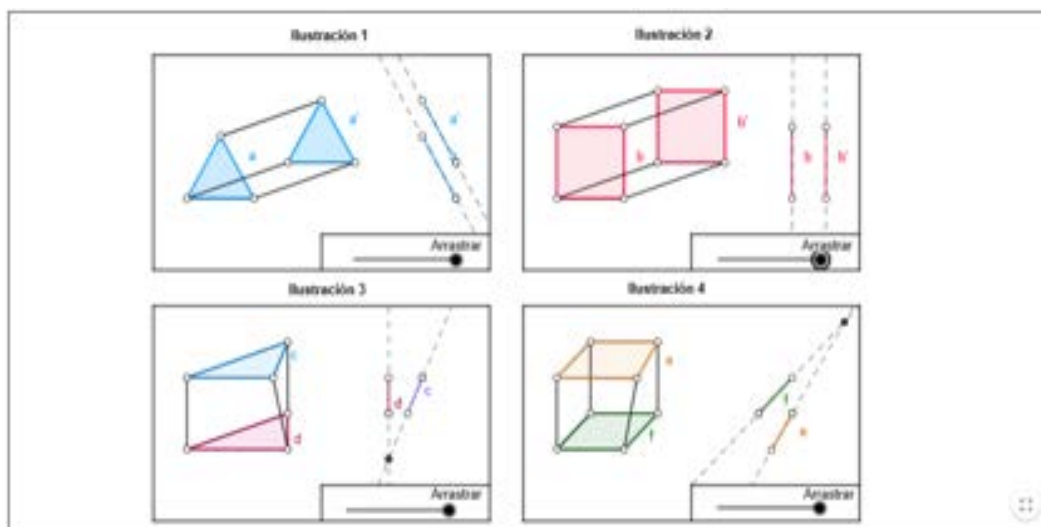


Figura 40. Tarea 3D, ilustración 1,2,3 y 4: animación de prismas regulares para explicitar relaciones de congruencia y paralelismo entre las aristas opuestas al movilizar los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

iv) Nivel formal: corresponde al hallazgo de las siguientes tres propiedades, la primera las caras de la base de un prisma de base regular son paralelas entre sí, la segunda las caras laterales de un prisma de base regular son paralelogramos y tercera cada vértice de la base de un prisma de base regular comparte dos caras laterales. Además, las inferencias deben emerger con base en todas las ideas matemáticas trabajadas durante los anteriores niveles.

En la tarea 4A, se presentan tres ilustraciones de prismas de base regular, la primera es un prisma cuadrangular, el segundo es un prisma cuadrangular y el tercero es un prisma pentagonal, además, los segmentos, las bases se mueven al mismo tiempo a partir de los deslizadores (Véase Figura 41). De modo que al movilizar el deslizador “bases” se centra la atención en que las bases quedan superpuestas entre dos líneas paralelas e inferir que las bases son paralelas entre sí. Por otro lado, al movilizar el deslizador “Segmento P” se incorpora un segmento que se superpone sobre las aristas centrando la atención en reconocer que las aristas de la base son congruentes y se verifica al mover el deslizador “Arrastrar” para todos los lados de la base. De manera que al agrupar estas dos propiedades se infiere que las bases de un prisma regular son congruentes y paralelas entre sí.

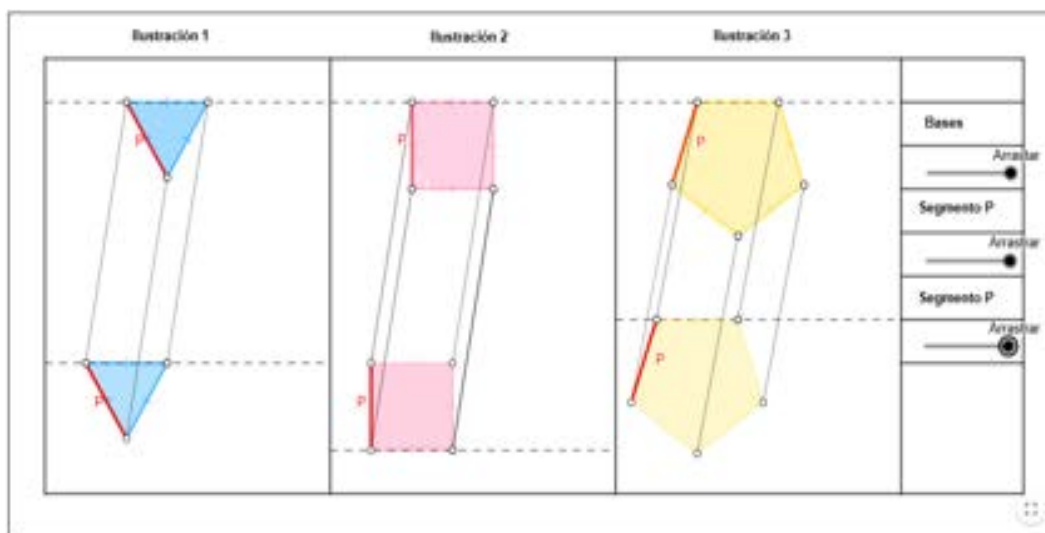


Figura 41. Tarea 4A, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas regulares para hacer inferencias de propiedades de que las bases son paralelas y congruentes para que se aproximen a la definición de prismas de base regular al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

En la tarea 4B, se presentan tres ilustraciones de prismas de base regular, la primera es un prisma triangular, el segundo es un prisma cuadrangular y el tercero es un prisma pentagonal, además, las caras laterales superponen al movilizar el deslizador y el segmento se superpone al oprimir el botón “Segmento P” (Véase Figura 42). De modo que, las caras laterales se superponen dentro de los prismas centrando la atención en la forma de las caras que son cuadriláteros, pero además se observa con base a las ideas matemáticas vistas que los lados opuestos son congruentes y paralelos entre sí. Además, al movilizarlas aristas se observa que solo dos caras laterales comparten el mismo vértice de la base. Por otro lado, al oprimir el botón “segmento P, se superpone un segmento que coincide con todas las aristas opuestas de las caras laterales centrando la atención en que las caras laterales son congruentes y con base a las ideas matemáticas vistas inferir que tiene sus pares de aristas opuestas iguales.

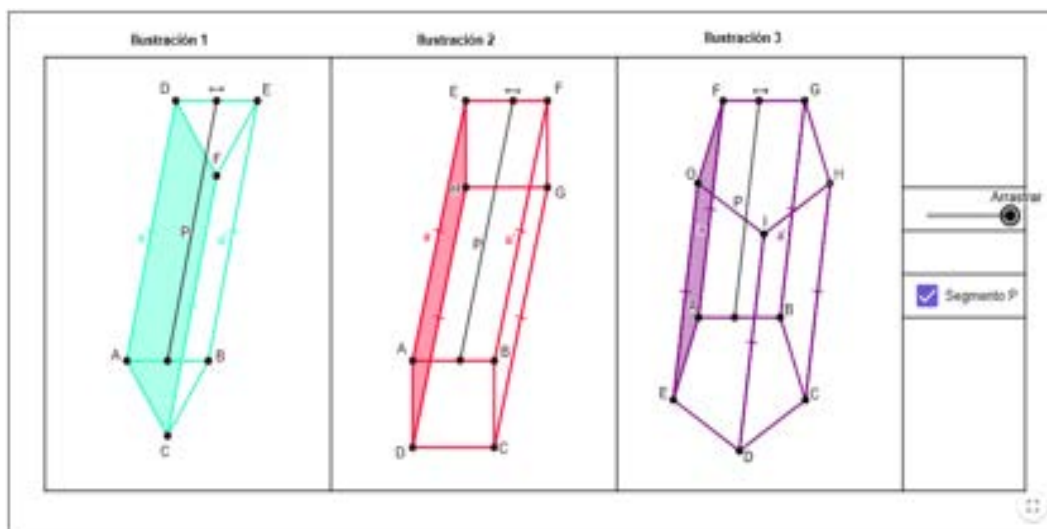


Figura 42. Tarea 4B, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas de base regular para que hagan inferencias de que las caras laterales son paralelas y congruentes además relacione los vértices con el número de aristas.

Fuente: elaboración propia

Descripción de la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas de base regular

A continuación, se presentan algunas de las tareas de la THA con la intención de realizar comparaciones entre los procesos de aprendizaje hipotéticos trazados, con los procesos hipotéticos de aprendizaje realizados por el estudiante. Estas comparaciones de los procesos hipotéticos de aprendizaje trazados con los procesos de aprendizaje realizados por los estudiantes se hacen con la intención de caracterizar la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas de base regular, articulando tres aspectos: el primer aspecto es el propósito vinculado a una tarea seleccionada, el segundo aspecto es el proceso hipotético de aprendizaje trazado para el alcance del propósito de la tarea seleccionada el tercer aspecto es comparar como el estudiante desarrollo el proceso de aprendizaje en referencia con el trazado.

Nivel situacional

El proceso hipotético trazado para la tarea 1A. pregunta 4 con el propósito de identificar figuras planas en objetos tridimensionales es el siguiente: los estudiantes exploran a través de la observación representaciones de prismas de base regular con la ayuda de movimientos orientados en un plano tridimensional, al hacer clic sobre la pantalla con el cursor reconocen los cambios de posición para identificar la base inferior la base superior y las maneras distintas en las que reposa un prisma de base regular como lo son: el reposo horizontal, el reposo vertical o puestos de manera inclinada.

De manera general, se encontró que los estudiantes alcanzaron a identificar figuras planas en objetos tridimensionales ya que, al movilizar el plano desde diferentes posiciones y vistas reconocieron que las caras laterales son rectangulares y además, realizaron afirmaciones de relación entre sus elementos promoviendo la identificación de caras laterales al mencionar que las caras rectangulares están unidas a otras caras como se ejemplifica a continuación con la respuesta de la tarea 1A (véase Figura 43), pregunta 4, del estudiante E9, Figura 44.

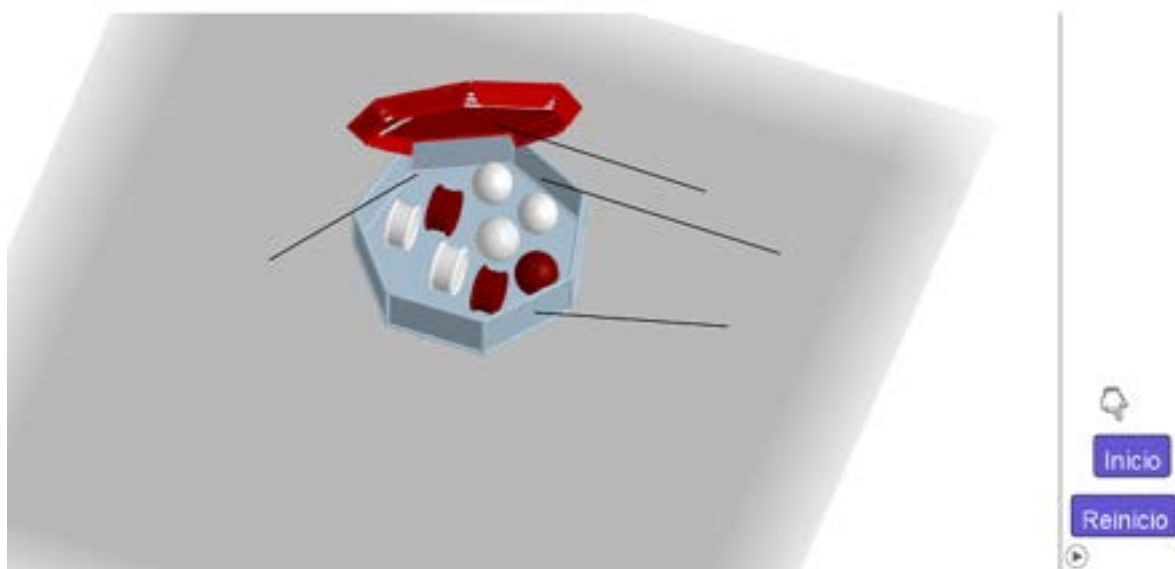


Figura 43. Tarea 1A, pregunta 4, ilustración 2: animación de un prisma regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

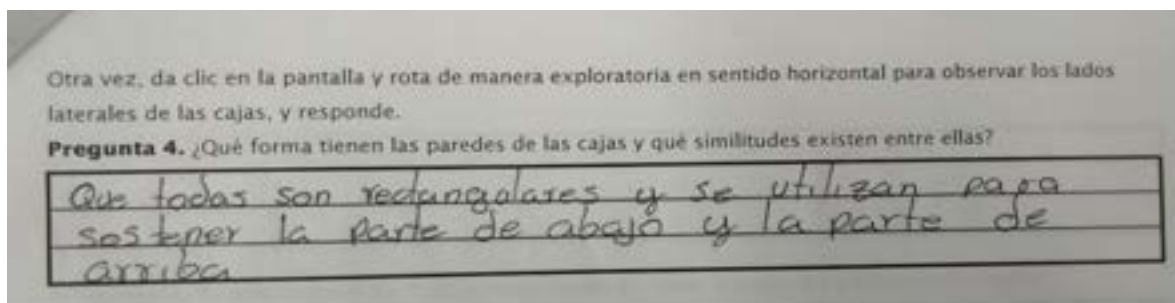


Figura 44. Tarea 1A, ilustración 2, pregunta 4: identifica que las caras laterales son de igual forma.

Fuente: elaboración propia

Por otro lado, también se pudo observar que cuando la figura ya no es rectangular la descripción se dificulta y centran la atención en otros elementos como se ejemplifica a continuación con la respuesta de la tarea 1A (véase Figura 45), pregunta 3, del estudiante E9, figura 46.

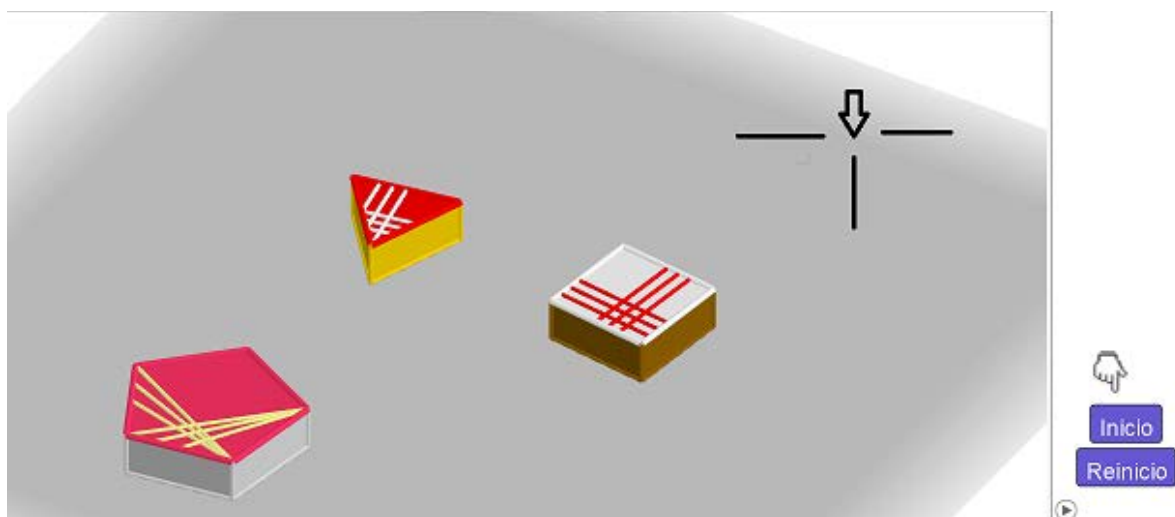


Figura 45. Tarea 1A, ilustración 1, pregunta 3: animación de prismas regular en un contexto de cajas de chocolate para identificar elementos al interior como caras aristas y vértices al mover el plano y oprimir el botón inicio.

Fuente: elaboración propia

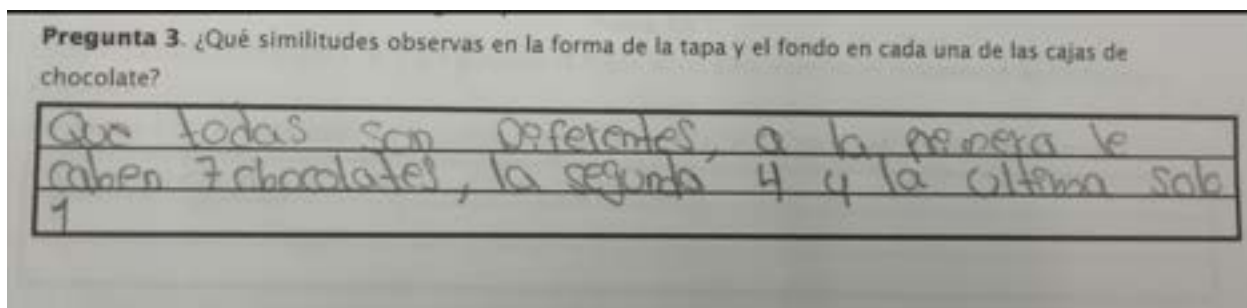


Figura 46. Respuesta escrita 10, tarea 1A, ilustración 1, pregunta 3: cuando las figuras no son rectángulos la descripción se les dificulta.

Fuente: elaboración propia

Nivel referencial

El proceso hipotético trazado para la tarea 2A pregunta 4 con el propósito de identificar las caras laterales de un prisma de base regular y reconocer que son congruentes entre sí, es el siguiente: los estudiantes observan las caras laterales de un prisma regular a través del movimiento que se produce al oprimir el botón inicio para superponerlas entre sí y de esta manera comparar la forma y el tamaño, de modo que reconozcan que son congruentes. Además, en la tarea 2C, pregunta 2 con el propósito de identificar los vértices de un prisma de base regular los estudiantes observan los vértices de un prisma a través de una animación para desvanecer y hacer aparecer los vértices, que se genera al oprimir el botón lupa y de esta manera identificarlos.

De manera general los estudiantes identificaron las caras laterales de un prisma de base regular y reconocieron que son congruentes entre sí, al centrar la atención cuando las caras laterales se movilizan para quedar superpuestas, además comprendieron la superposición como una estrategia para el reconocimiento de propiedades de forma y tamaño. A manera de ejemplo, en la tarea 2A, el estudiante alcanza el propósito de identificar las caras laterales de un prisma regular y reconocer que son congruentes entre al observar su movimiento al momento de ser superpuestas cuando se oprime el botón inicio y de esta manera contrastaron

su tamaño y forma, realizando descripciones como que las figuras parecían ser una sola, como se ejemplifica a continuación con la respuesta a la pregunta de la tarea 2A (véase Figura 47), pregunta 4, estudiante E5, figura 48.

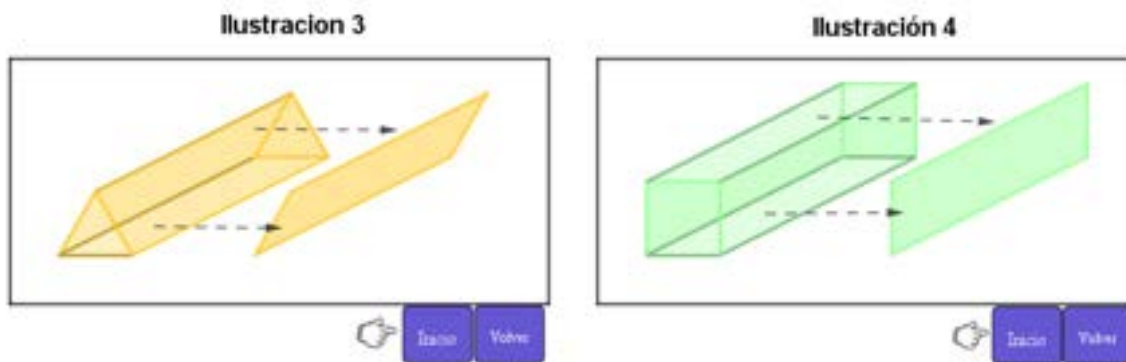


Figura 47. Tarea 2A, pregunta 4, ilustración 3 y 4: Animación de prismas regulares para observar la superposición de las caras laterales al oprimir el botón inicio y reconocer relaciones de congruencia.

Fuente: elaboración propia

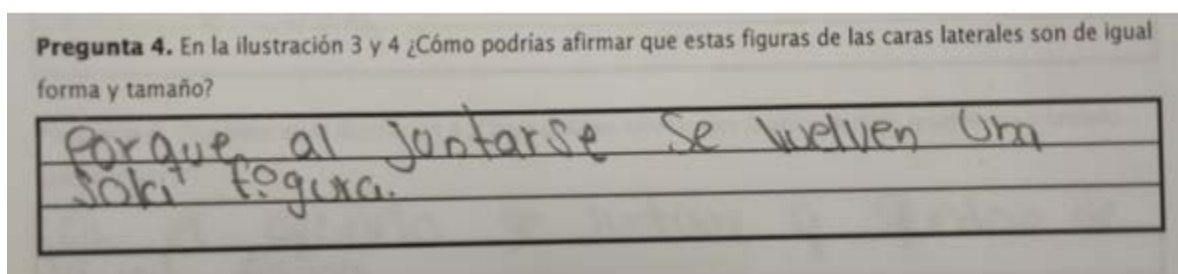


Figura 48. Tarea 2A, respuesta escrita 11, pregunta 4: reconoce que ambas son figuras de igual forma y tamaño cuando observa se superponen.

Fuente: elaboración propia

Por otro lado, se encontró que, en el propósito de identificar los vértices de un prisma de base regular, lograron identificarlos al oprimir en el botón lupa. Sin embargo, se encontró que algunos estudiantes en la ubicación de los vértices mencionan que hay aristas con más de dos vértices como se ejemplifica a continuación con la respuesta de la tarea 2C (véase Figura 49), pregunta 2, estudiante E9, figura 50.

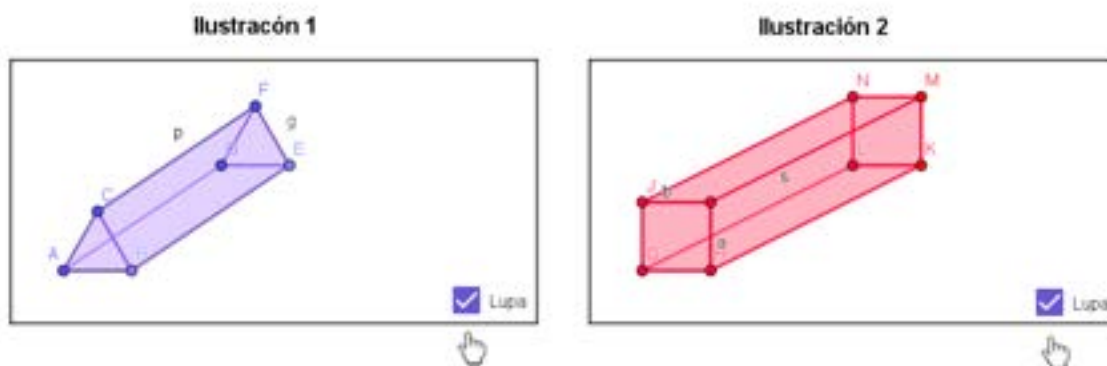


Figura 49. Tarea 2C, pregunta 2, ilustración 1 y 2: animación para observar e identificar los vértices como el punto de encuentro de las aristas al oprimir el botón lupa.

Fuente elaboración propia

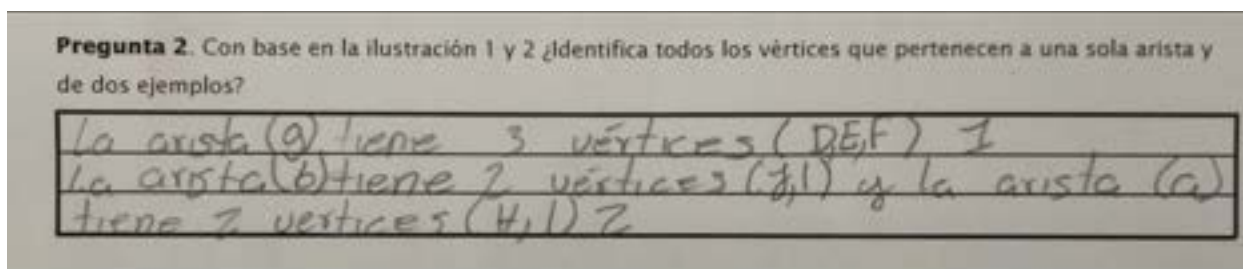


Figura 50. Respuesta escrita 12, tarea 2C, pregunta 2, ilustración 1: logra identificar los vértices, pero no los relaciona bien con las aristas.

Fuente elaboración propia

Nivel general

El proceso hipotético trazado para la tarea 3C, pregunta 1, con el propósito de explicitar las relaciones de congruencia entre las aristas de las bases de un prisma de base regular, es el siguiente: Los estudiantes observan las aristas de un prisma regular a través de del movimiento que se produce al desplazar el punto “arrastre”, para superponerlas entre sí y de esta manera hacer comparaciones de tamaño entre sus lados opuestos y reconozcan si hay una relación de congruencia. Además, en la tarea 3D, pregunta 2, con el propósito de explicitar las relaciones de paralelismo de las aristas de las bases de un prisma de base regular, los estudiantes

observan las aristas de las bases de un prisma regular a través del movimiento que se produce al desplazar el punto “arrastre” para que queden superpuestas en una guía que indica el sentido de orientación de las aristas con base a la prolongación de su tamaño, de modo que reconozcan si las aristas se cruzan o son paralelas.

De manera general los estudiantes lograron explicitar propiedades de congruencia entre las aristas de un prisma de base regular afirmando que se cumple que son de igual forma y no el tamaño al observar la superposición entre ellas. Además, en las propiedades de paralelismo se encontró dificultad para explicitar porque las aristas se cruzan o no se cruzan, dado que en ninguna respuesta se encontró que al superponer las aristas los lados se prolongan permitiendo inferir si son o no son paralelas. A manera de ejemplo en la tarea 3C (véase Figura 51), el estudiante alcanza a explicitar relaciones de congruencia entre las aristas a y a' al describir las condiciones suficientes para explicitar cuando existe congruencia entre estas aristas como se ejemplifica a continuación con la pregunta 1, estudiante E12, figura 52.

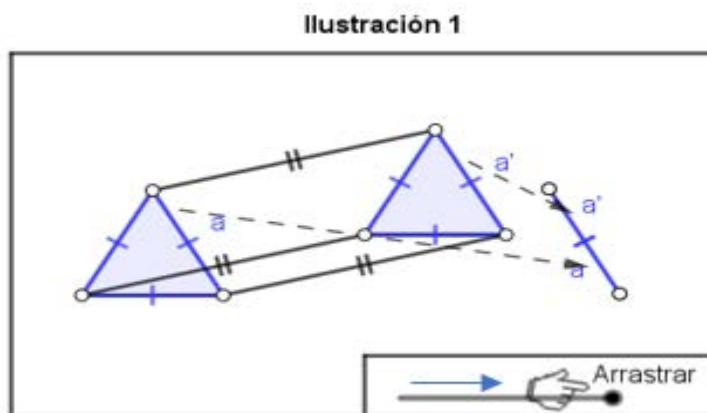


Figura 51. Tarea 3C, ilustración 1, pregunta 1: animación de prismas regulares para observar que las aristas son congruentes al mover los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

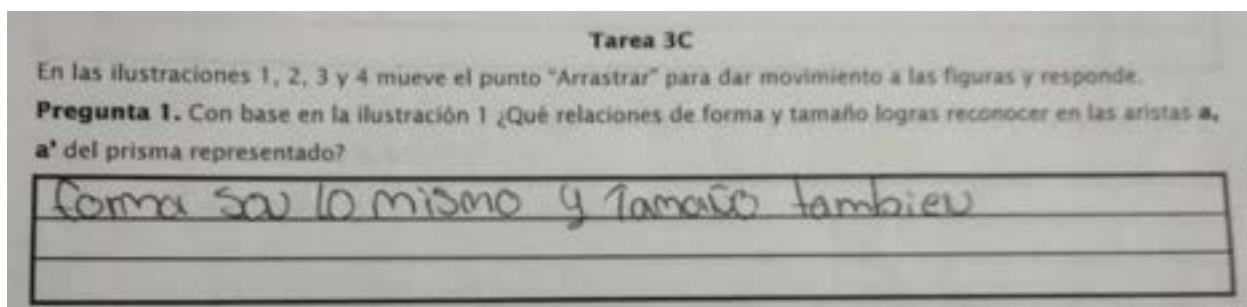


Figura 52. Respuesta escrita 13, tarea 3C, pregunta 1, ilustración 1: explicita relaciones de congruencia.

Fuente: elaboración propia

Además, en la tarea 3D (véase Figura 53), para el alcance del propósito de explicitar las relaciones de paralelismo de las aristas de las bases de un prisma de base regular el estudiante reconoce e identifica que las líneas no se cruzan sin embargo no explicita que le garantiza esa afirmación. Como se ejemplifica a continuación con la respuesta de la pregunta 2. estudiante E11, figura 54.

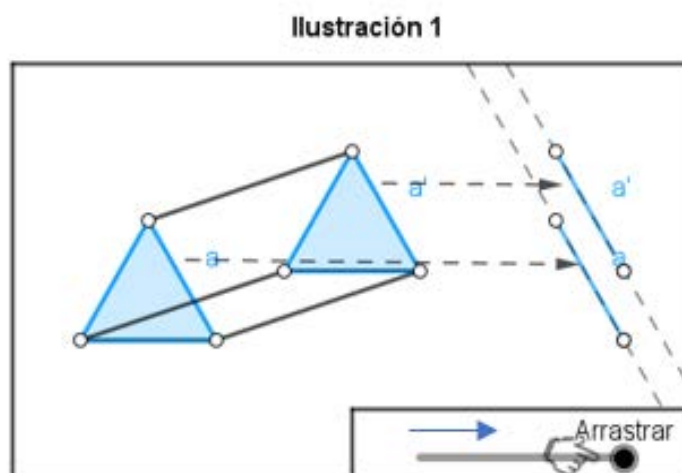


Figura 53. Tarea 3D, pregunta 2, ilustración 1: animación de un prisma regular para reconocer si hay o no hay relaciones de congruencia entre sus aristas opuestas al movilizar los deslizadores.

Fuente: elaboración propia

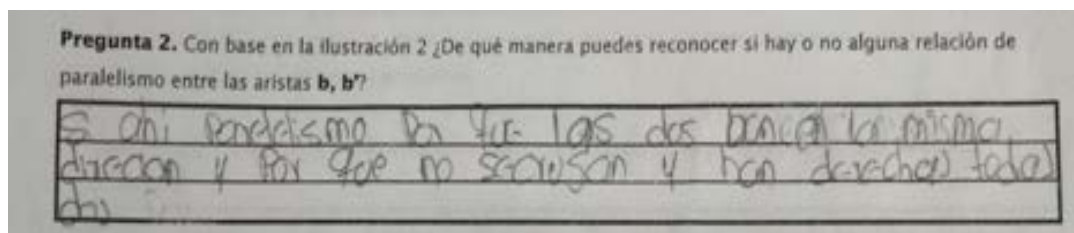


Figura 54. Respuesta escrita 14, tarea 3D, ilustración 1: identifica que las aristas no se cruzan entre sí. Fuente de elaboración propia

Nivel formal

El proceso hipotético trazado para la tarea 4A pregunta 1 con el propósito de inferir que las bases de un prisma de base regular de n lados son congruentes y paralelas entre sí, es el siguiente: Los estudiantes observan que al mover el primer deslizador hay movimiento en las bases del prisma de base regular de manera que se superponen entre sí en cada ilustración, para observar que las bases siempre son congruentes y paralelas entre sí, por otro lado, el segmento P se incorpora en las aristas de cada prisma de base regular, al movilizar el segundo deslizador, y al movilizar un tercer deslizador pueden mover el segmento P en la sobre las aristas de las bases para realizar comparaciones de forma y tamaño. Además, en la tarea 4B pregunta 2 con el propósito de reconocer que un prisma de base regular de n lados tiene el mismo vértice para dos caras laterales y una cara de la base, los estudiantes al mover el deslizador resaltan la forma de las caras laterales y observan que dos caras laterales siempre comparten un solo vértice de la base la cual determina el número de lados del prisma.

Algunos los estudiantes lograron llegar al nivel formal e inferir que las que las bases de un prisma de base regular de n lados son congruentes y paralelas entre sí, es el siguiente al mover los deslizadores para superponer las bases entre sí y comparar las ilustraciones con la ayuda de la observación, sin embargó no hubo inferencia para el número de lados de las bases. A manera de ejemplo en la tarea 4A (véase Figura 55), el estudiante logra reconocer que las bases son congruentes mas no paralelas, además no explicita una inferencia para el número de lados como se ejemplifica en la pregunta 1, estudiante E6, figura 56.

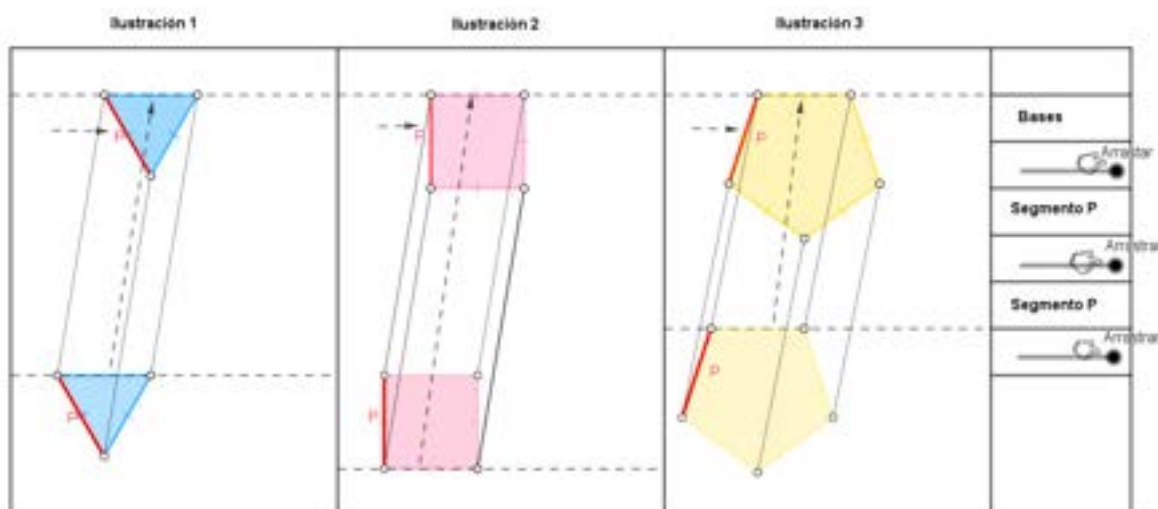


Figura 55. Tarea 4A, pregunta 1, ilustraciones 1,2 y 3: animación de prismas regulares para hacer inferencias de propiedades de que las bases son paralelas y congruentes para que se aproximen a la definición de prismas de base regular al mover los deslizadores.

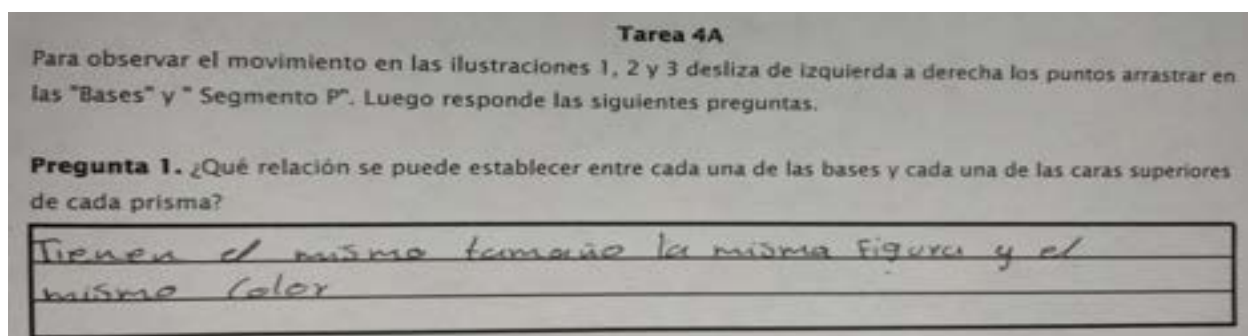


Figura 56. Respuesta escrita 15, tarea 4A, ilustración 1,2 y 3: hace inferencias al describir la propiedad invariante de que las bases de igual forma y tamaño en cada prisma.

Fuente elaboración propia

De modo que en la tarea 4B (véase Figura 57), para el alcance del propósito de reconocer que un prisma de base regular de n lados tiene el mismo vértice para dos caras laterales y una cara de la base, el estudiante reconoce que existe un vértice que comparte dos caras laterales mas no menciona que el vértice pertenece a una de las caras de la base, como se ejemplifica a continuación con la respuesta de la pregunta 2, estudiante E11, figura 58.

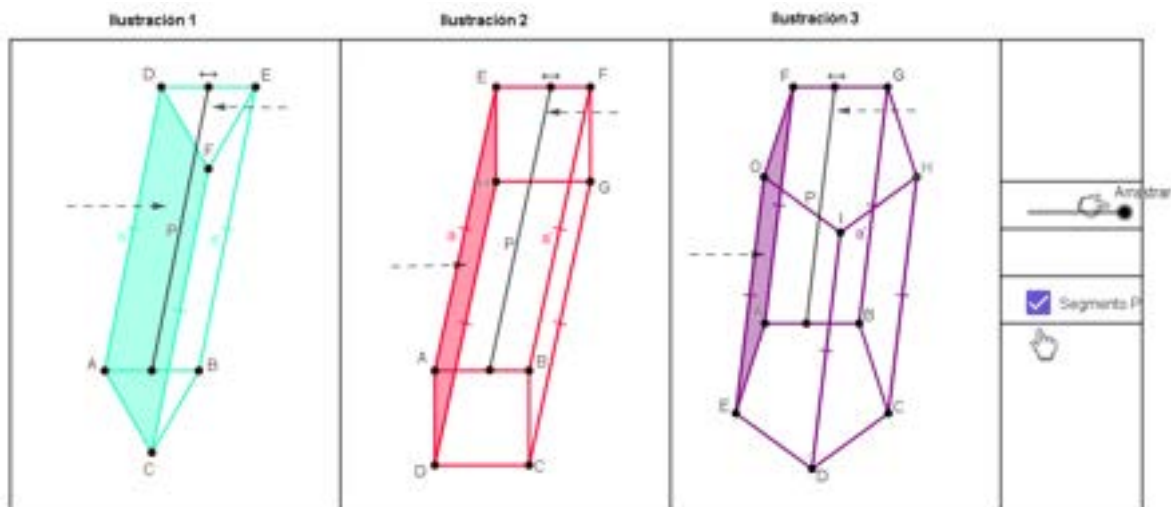


Figura 57. Tarea 4B, pregunta 2, ilustración 1,2 y 3: animación de prismas de base regular para que hagan inferencias de que relacion hay con los vértices y el número de aristas.

Fuente: elaboración propia

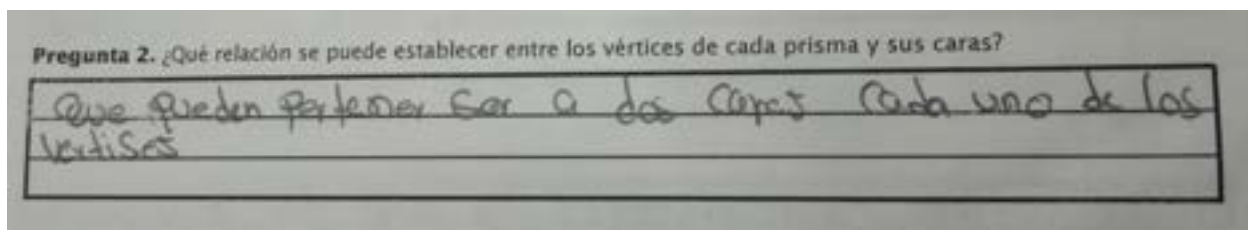


Figura 58. Respuesta escrita 16, tarea 4B, ilustración 1,2 y 3: infiere que a lo más un vértice tiene dos caras laterales.

Fuente: elaboración propia

5. Conclusiones

Este trabajo se realizó con el objetivo de caracterizar el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares en los que se integra recursos curriculares digitales con estudiantes de séptimo grado. Para determinar el alcance de este objetivo se estudiaron los resultados obtenidos en este estudio con base a dos objetivos específicos i) el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares que integra recursos curriculares digitales, y ii) la descripción de la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas regulares. Se consideró que los resultados de los objetivos específicos i) y ii) fueron satisfactorios dado que se elabora una THA para el estudio de prismas regulares y con la ayuda de los recursos curriculares se logra hacer una caracterización de aprendizaje como se presenta a continuación.

El diseño de una THA para el estudio de los prismas regulares en las que se integran recursos curriculares digitales

En coherencia con el primer objetivo específico se logró el diseño de un THA dado que promueve el alcance de la una meta de aprendizaje al observar las respuestas por los estudiantes en la secuencia de tareas y su similitud con los procesos hipotéticos trazados partiendo de ideas intuitivas a ideas formales, como lo menciona el estudio de Simón (1995) en los que describe una THA con una meta de aprendizaje una secuencia de tareas y unos procesos hipotéticos de aprendizaje. Además, las tareas fueron articuladas con base a los cuatro niveles de la heurística de modelos emergentes de Gravemeijer (2007). Como se menciona en la idea anterior se logra el diseño de una THA que para este trabajo se centra en promover el aprendizaje de la definición de los prismas de base regular al articular los modelos de tareas de manera progresiva en los niveles situacional, referencial, general y formal.

Por otro lado, esta articulación de los modelos de tareas se observó en la respuestas de los estudiantes por ejemplo: i) en el nivel situacional, se reconocieron elementos en contextos cotidianos, como en la tarea 1A con cajas de chocolate; ii) en el nivel referencial, reconocieron la congruencia al observar la superposición dinámica, como en las tareas 2A, 2B, con base en

los elementos descritos en el nivel situacional; iii) en el nivel general, explicitaron relaciones como por ejemplo el paralelismo de aristas al mover los deslizadores para comparar, como en las tareas 3C, 3D, con base en las propiedades referidas en el nivel referencial; y iv) en el nivel formal, infieren propiedades empleando sus propios modelos, como en las tareas 4A, 4B, al inferir que las bases de un prisma regular son paralelas y congruentes, además de la relación de los vértices con respecto a sus caras. De modo que, la articulación de las tareas mostró que los estudiantes parten de ideas intuitivas hasta construir ideas más formales.

Por último, este diseño de una THA coincide con el estudio de Wickstrom y Langrall (2018), quienes diseñaron un LT trayectoria de aprendizaje aplicado por la profesora Purl que se organiza de manera secuencial en tres niveles de razonamiento matemático, articulados con tareas. Estos niveles mencionados anteriormente son: i) el nivel de acción que se trabajó mediante la Tarea 3 que propone cubrir superficies, donde los estudiantes comprendieron la estructuración del espacio y el conteo concreto de unidades de manera manual al cubrir las figuras con fichas, ii) el nivel de proceso se promueve con la Tarea 4 que propone construir rectángulos de área constante, donde los alumnos, al generar figuras con la misma área pero distintas dimensiones, reflexionan sobre los principios de conservación y compensación sin depender del conteo individual y iii) el nivel de objeto abstracto se desarrolló con las tareas que proponen la comparación de unidades de diferente tamaño como pies cuadrados frente a yardas cuadradas, donde los estudiantes operaron con relaciones multiplicativas y escalares, mostrando el área como un concepto abstracto de operaciones matemáticas.

Acerca de, la articulación de recursos digitales centrados en el dinamismo y de la funcionalidad de superposición de figuras con el software de GeoGebra promueve la comprensión de propiedades invariantes y su argumentación como se trazó en los procesos hipotéticos de aprendizaje. Esta comprensión de invarianzas y habilidad para argumentar se observó en los resultados obtenidos de la THA en los distintos niveles al identificar explicitar y emplear propiedades con base a la superposición de vértices caras y aristas de los prismas regulares al oprimir botones y deslizadores. Lo anteriormente descrito se ha documentado por Sinclair y Robutti (2012) al afirmar que las AGD y la mediación docente facilita pasar de un

campo gráfico a un campo teórico. De modo que las tareas de la THA que integran (AGD) y se escalona en los niveles de las heurísticas de modelos emergentes promueven el alcance de la meta de aprendizaje partir de ideas intuitivas hasta llegar a ideas formales.

Por último, se concluye que se logró el diseño de THA con la integración de recursos curriculares digitales dado que promueven el alcance de una meta de aprendizaje al ordenar y seleccionar los tipos de tareas, por los niveles presentados en la heurística de modelos emergentes y el trazo de unos procesos hipotéticos de aprendizaje, coincide con lo documentado presentado por Pechene y Garzón (2023) en su trabajo sobre la semejanza. Este estudio de la semejanza describe que el diseño de una THA con la integración de recursos curriculares digitales ADG y la heurística de modelos emergentes, promueve la guía y dirección de las discusiones en el aula de clase con respecto al objeto matemático y las ideas que se pretenden alcanzar. Además, se afirma que con la ayuda de estos instrumentos tecnológicos se pueden predecir futuras respuestas de los estudiantes fortaleciendo las maneras de intervenir en el aula de clase y fortalecer la competencia docente.

Descripción de la progresión de aprendizaje de los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de los prismas regulares

En coherencia con el segundo objetivo específico se logró promover la comprensión de propiedades invariantes con la ayuda de AGD GeoGebra, con base a la comprensión de los estudiantes acerca de los prismas de base regular. De manera puntual refiero a las propiedades aprendidas en cada uno de los niveles de la THA por parte de los estudiantes y la manera en cómo se entiende la definición en geometría.

Se logro promover el aprendizaje de la identificación de propiedades invariantes. Este aprendizaje se observó en las respuestas de los estudiantes como, por ejemplo: i) en el nivel situacional tarea 1A, los estudiantes identificaron elementos geométricos en contextos cotidianos, como caras y aristas, mediante observación. ii) en el nivel referencial por ejemplo tareas 2A, 2B, observaron la superposición dinámica para reconocer congruencias entre las caras y las aristas, avanzando hacia clasificaciones basadas en similitudes de forma y tamaño. iii) en el nivel general las tareas 3C, 3D, explicitaban relaciones de congruencia y paralelismo

apoyándose en los deslizadores para comparar forma y tamaño, avanzado a ideas más formales y iv) en el nivel formal en tareas 4A, 4B), infieren propiedades generales como el paralelismo y congruencia de bases. Estas respuestas anteriormente presentadas dejan ver el paso de ideas intuitivas hacia ideas más formales.

De modo que, que se logra observar el avance del aprendizaje en los estudiantes, dado que, muestra que la integración de recursos digitales promueve el aprendizaje acerca de la definición geométrica, facilitando a los estudiantes reconocer propiedades formales al centrar la atención en las propiedades invariantes con la ayuda de un docente. Esta afirmación anteriormente dicha coincide con el estudio de Sinclair y Robutti (2012) quienes mencionan que los movimientos intencionados y el arrastre guiado en AGD promueven a los estudiantes centrar su exploración en propiedades específicas, como congruencias o paralelismos, al mover u observar objetos con movimiento intencionados. Estos movimientos son planeados previamente por el docente de modo que articulen la observación empírica promoviendo la formulación de conjeturas basadas en las invariantes visuales.

Por otro lado, la práctica de aprender a definir, se entendió como un proceso que se inicia a partir de la observación y la argumentación. Este aprendizaje de aprender a definir se observó en las respuestas de los estudiantes en la THA así, por ejemplo: i) en el nivel situacional (Tarea 1A), los estudiantes identificaron y describieron elementos como caras, aristas y vértices en contextos cotidianos de cajas de chocolate, comenzando a establecer relaciones básicas entre ellos, ii) en el nivel referencial tareas 2A, 2B, 2C, avanzaron hacia la identificación de congruencias observando superposiciones dinámicas de caras y aristas, lo que promovió argumentar sobre similitudes en forma y tamaño. iii) En el nivel general tareas 3C, 3D, explicitaron relaciones de congruencia y paralelismo apoyándose en deslizadores para comparar y contrastar propiedades y iv) en el nivel formal Tareas 4A, 4B, inferían propiedades generales como el paralelismo y la congruencia de bases, así como la relación entre vértices y caras, integrando las ideas matemáticas trabajadas en las tareas anteriores.

Además, la práctica de aprender a definir coincide con el estudio de Guillen y Puig (2006), iniciando con la clasificación a partir de la comparación y explicación de propiedades,

tal como evidenciaron las respuestas de los estudiantes. Este aprendizaje de clasificar se observó en las tareas, por ejemplo: en la tarea 1 "construir formas", los estudiantes reconocieron y agruparon poliedros por apariencia y composición en contextos lúdicos con puzzles. ii) en la tarea 2 "formas rígidas y deformables", progresaron identificando relaciones de inscripción mediante la manipulación de armazones y modelos físicos, promoviendo la argumentación sobre la pertenencia de unos sólidos a otros. iii) en la Tarea 3 "relaciones a partir de características numéricas", explicitaban propiedades comunes y dualidades usando tablas para contrastar caras, vértices y aristas y iv) en la Tarea 4 "análisis mediante simetrías" infirieren relaciones estructurales como dualidad e inscripción basándose en grupos de simetría, integrando así conceptos geométricos y algebraicos.

Por último, se concluye que los estudiantes logran la comprensión de la definición de los prismas de base regular como un proceso que parte de la observación y la argumentación, lo que coincide con el estudio de Guillén y Puig (2006), documentado que los estudiantes parten de procesos matemáticos como la descripción, la organización de atributos y la argumentación para aprender a definir ya que se considera un proceso y no un resultado. Además, afirma que no se trata de aprender una definición de manera memorística, sino que los estudiantes participen en los procesos de descripción, ordenar, conjeturar, demostrar y precisar los conceptos en diversas áreas y situaciones.

De modo que, en concordancia con el objetivo general de caracterizar el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el estudio de los prismas regulares con estudiantes de séptimo grado, integrando recursos curriculares digitales, se considera alcanzado dado que la articulación y alcance de los objetivos específicos da cuenta de ello: i) con el primer objetivo específico se logra el diseño de una THA que presenta una secuencia de tareas progresivas basada en la heurística de modelos emergentes de Gravemeijer (2007), articulando niveles situacional, referencial, general y formal para facilitar la transición de ideas intuitivas a formales; y ii) con el segundo objetivo específico se logra la descripción de la progresión de aprendizaje, evidenciada en las respuestas de los estudiantes que, con apoyo de AGD con GeoGebra y la intervención docente, emplean la medición y arrastre, para identificar

propiedades invariantes, explicitando relaciones de congruencia y paralelismo, y avanzando en procesos de argumentación para la comprensión de prisma regulares.

6. Limitaciones y consideraciones

En primer lugar, los participantes del experimento de enseñanza pertenecen a un grupo muy reducido de lo que es la población estudiantil esto limita la generalización de los resultados.

En segundo lugar, la falta del número de equipos limitó el registro de video y el registro escrito de manera individual. Este limitante de registrar a cada estudiante por individual reduce la identificación de dificultades particulares de cada estudiante.

En tercer lugar, se considera pertinente minimizar el número de preguntas de modo que en una sola pregunta se pueda indagar acerca de dos ilustraciones a la vez que estén refiriendo una misma propiedad. Esta consideración de la reducción de preguntas se propone con base a las intervenciones de los estudiantes expresaron inconformidad por haber dos preguntas que aludían a una misma propiedad, aunque se tratara de ilustraciones distintas.

En cuarto lugar, se observó que la falta de conocimientos previos matemáticos acerca de paralelismo y la distinción entre rectángulo y paralelogramo en los estudiantes generó dificultades para argumentar, con base en la descripción de los elementos de los prismas regulares, en las tareas del nivel referencial.

Por último, el discurso del profesor puede ser mejorado dado que, al conocer los procesos hipotéticos reales se observó que la organización de elementos para comparar genero dificultad en los estudiantes, por ejemplo: algunos estudiantes se aproximaron mucho a los procesos hipotéticos trazados, pero se confundían al ordenar los elementos a comparar en cuanto al nivel formal. Por esta razón se considera que el discurso pudo ser más enfático o más ilustrativo en cuanto a la manera de ordenar los elementos, para identificar las relaciones que entre los elementos de los prismas regulares.

7. Referencias bibliográficas

- Aramendiz, J. (2023). *Secuencia didáctica mediada por las aplicaciones de realidad aumentada AR Sólidos platónicos y Geometría RA para el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de octavo grado* [Tesis de maestría, Universidad de Santander]. Repositorio UDES. <https://repositorio.udes.edu.co/server/api/core/bitstreams/bf545326-2622-4c85-bb18-c8b7761c495e/content>
- Blanco Albarracín, D. A., & Samboni Muñoz, M. A. (2022). *Estrategia pedagógica para el proceso de aprendizaje de cuerpos sólidos geométricos mediante la aplicación Sólidos RA con estudiantes del cuarto grado* [Tesis de maestría, Universidad de Santander].
- Bocanegra González, I. X., & Devia Ávila, M. A. (2019). *Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica* [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio UPN. <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/10894>
- Cano, A. (2022). *La trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza de triángulos mediada por la tecnología digital* [Tesis de licenciatura, Universidad del Valle]. EBSCOhost.
- Clemens, S. R., O'Daffer, P. G., & Cooney, T. J. (1998). *Geometría*. Pearson Educación.
- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. Universidad del Valle. Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia para el Desarrollo Internacional (AID).
- Cumbal Acosta, L. C. (2020). *Caracterización de las prácticas de profesores nóveles que integran recursos digitales con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la traslación* [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. Biblioteca Digital

Univalle. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/9d1df36a-d9f5-4fd3-97bb-8420ec21daff>

De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. En T. V. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world* (71st Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 189-203). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

España, L. (2020). *Estrategia educativa para el desarrollo del pensamiento espacial a través de la aplicación móvil Arloon Geometry, en estudiantes de grado sexto* [Tesis de maestría, Universidad de Santander]. Repositorio UDES.
<https://repositorio.udes.edu.co/server/api/core/bitstreams/c30f9d74-7dc1-492b-abcf-15b8e9b2bdd0/content>

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modeling as a precursor to mathematical modeling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). Springer.

Guillen Soler, G. (1999). *El mundo de los poliedros*. Editorial Síntesis.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (1), 35-53.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4055>

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿y en la investigación? En *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Guillén, G., & Puig, L. (2006). *Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad*

entre poliedros. Estudio exploratorio. Educación Matemática, 18(3), 65–102.

<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518304>

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*.

https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29 (1), 75–88.

<https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824>

Mota Oliveira Scalabrin, A. M., & Mussato, S. (2020). Uso del software GeoGebra: Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de poliedro. *Paradigma*, 41(2), [páginas no especificadas].

Ortiz-Nicolás, J. C. (2023). Investigación en diseño: análisis, reflexiones, y áreas de oportunidad. *Legado de Arquitectura y Diseño*, 18 (34), 45–54. <https://doi.org/fincluir>

Pechené Montenegro, V. A., & Garzón-Castro, D. (2023). Una trayectoria hipotética de aprendizaje que integra recursos curriculares digitales como medio para la enseñanza de la semejanza [Manuscrito no publicado]. Universidad del Valle.

Ropero Quintero, D. A. (2022). *La práctica matemática de definir: un análisis del discurso de estudiantes de secundaria al definir familias de poliedros* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN].

Sinclair, N., & Robutti, O. (2012). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Third*

International Handbook of Mathematics Education (pp. 571–596). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Salinas-Hernández, U., & Sacristán, A. I. (2020). *El enfoque documental de lo didáctico*. DAD-Multilingual.

Valle Montero, L. M. (2020). Identificamos los elementos de los prismas al construir cajas. *Números*, 104, 129–132.

Villarroel, S., & Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números*, 78 (1), 73–94.

Wickstrom, M. H., & Langrall, C. W. (2018). El caso de la Sra. Purl: Utilizar una trayectoria de aprendizaje como herramienta para la enseñanza. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9412-8>