

DERIVADAS FRACCIONARIAS PARA ANALIZAR LA VISCOELASTICIDAD
DE LA GUADUA EN EL PLANO TRANSVERSAL

Luis Felipe Zuluaga Mosquera

Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Civil y Geomática

Programa Académico de Ingeniería Civil

Santiago de Cali, Agosto 2022

DERIVADAS FRACCIONARIAS PARA ANALIZAR LA VISCOELASTICIDAD
DE LA GUADUA EN EL PLANO TRANSVERSAL

Luis Felipe Zuluaga Mosquera

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Civil

Co-directores:

Daniel Gómez, PhD

Jose Jaime García, PhD

Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Civil y Geomática

Programa Académico de Ingeniería Civil

Santiago de Cali, Agosto 2022



Nota de aceptación

Aprobado por el comité de grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad del Valle para optar al título de Ingeniero Civil.

Jurado

Jurado

Santiago de Cali, Agosto 2022

TABLA DE CONTENIDO

	Página
LISTA DE TABLAS	VI
LISTA DE FIGURAS	VII
RESUMEN	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.2. OBJETIVOS	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	3
2. MARCO DE REFERENCIA	4
2.1. Revisión de antecedentes	4
2.2. Marco teórico	5
2.2.1. Ensayos viscoelásticos	5
2.2.2. Determinación del ensayo	6
2.2.3. Modelos reológicos tradicionales	7
2.2.4. Derivadas fraccionarias	10
2.2.5. Ajuste de modelos	11
2.2.6. Calidad de ajuste	12
3. METODOLOGÍA	13
3.1. Material	13
3.2. Arreglo experimental	13
3.3. Realización de ensayos	14
3.4. Procesamiento de datos	16
3.5. Ajuste de modelos	16
3.6. Mejoramiento del costo computacional	16

	Page
4. RESULTADOS	18
4.1. Probetas y ensayos	18
4.2. Consideraciones en el ajuste	19
4.3. Resultado de ajustes	20
4.4. Análisis de resultados	20
5. CONCLUSIONES	26
BIBLIOGRAFÍA	27

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
4.1. Cantidad, dimensiones y propiedades físicas de probetas usadas. El coeficiente de variación se presenta entre paréntesis.	18
4.2. Cantidad de ensayos por arreglo experimental y duración.	18
4.3. Resultados de ajuste para el SLS, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.	21
4.4. Resultados de ajuste para el Maxwell de dos ramas, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.	21
4.5. Resultados de ajuste para el Scott-Blair, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.	22
4.6. Resultados de ajuste para el Maxwell fraccionario, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.	22

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
1.1. Esquema de Guadua con abrazaderas (J. García et al., 2017).	2
2.1. Ejemplo de ensayos viscoelásticos.	5
2.2. Modelos viscoelásticos tradicionales.	8
2.3. Sólido linear estándar.	9
2.4. Modelo de Wiechert o Maxwell generalizado.	9
2.5. Elemento de orden fraccionario.	11
2.6. Modelo de Maxwell fraccionario.	11
3.1. Probetas de Guadua angustifolia para cada ensayo.	14
3.2. Arreglo experimental para ensayos de relajación de esfuerzos.	15
3.3. Patrón de carga para los ensayos.	15
4.1. Comparación entre esfuerzos en el material (azul) y humedad relativa (rojo) en la ejecución del ensayo.	19
4.2. Ejemplo de zona considerada (verde) en el ajuste de ensayos de larga duración.	20
4.3. Curvas típicas de ajuste de datos experimentales (círculos) de los modelos sólido linear estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se incluye un acercamiento a la zona del pico para observar diferencias entre modelos.	23
4.4. Promedio de error pico para los modelos sólido linear estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se diferencian por duración de ensayo y tipo de probeta.	23
4.5. Promedio de coeficiente de determinación para los modelos sólido linear estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se diferencian por duración de ensayo y tipo de probeta.	24

RESUMEN

La *Guadua angustifolia* es una especie de bambú con buenas propiedades mecánicas que puede reemplazar materiales contaminantes de la construcción como el acero y el concreto. Uno de los desafíos para incentivar el uso de la *Guadua* es la caracterización de sus propiedades. Una de estas es la viscoelasticidad que presenta en el plano transversal. Para analizar este comportamiento, se realizaron ensayos de relajación de esfuerzos a anillos y partes de anillos del material, con diferentes duraciones de ensayo. De los ensayos se evidenció un comportamiento esperado para materiales viscoelásticos como lo es una fuerza pico seguido de una fase de relajación. Para ensayos de larga duración se identificó unas variaciones de esfuerzo que se atribuyeron a variaciones de las variables ambientales en el ensayo como la temperatura ambiente y la humedad relativa. Para ajustar los datos experimentales se plantearon modelos reológicos tradicionales y modelos avanzados de derivadas fraccionarias. Los modelos de derivadas fraccionarias han demostrado gran utilidad para la caracterización de múltiples problemas ingenieriles, logrando soluciones que nos son posibles con el cálculo tradicional. Todos los modelos planteados lograron un excelente ajuste a los datos experimentales ($\bar{R}^2 > 0.930$), destacándose las ventajas que presentan los modelos de derivadas fraccionarias por tener un menor número de parámetros y un ajuste comparable a los modelos tradicionales a pesar de su costo computacional.

Palabras clave: *Guadua angustifolia*, viscoelasticidad, relajación de esfuerzos, derivadas fraccionarias, ecuación constitutiva, optimización.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La *Guadua angustifolia* es una especie de bambú presente en Colombia y otros países de América Central y del Sur. Se destaca por tener una resistencia axial semejante a la del acero (Lakkad y Patel, 1981), convirtiéndolo en un material óptimo para la construcción. Es renovable, de rápido crecimiento, con una huella de carbono mucho menor comparada con materiales convencionales como el concreto (van der Lugt et al., 2006).

Su uso en el país se ha limitado a construcciones temporales como andamios y puntales, desaprovechando su potencial de remplazar materiales contaminantes. Uno de los principales motivos de su bajo aprovechamiento es la complejidad de las uniones (Jayanetti y Follett, 2008), las cuales suelen involucrar cortes, perforaciones con varillas e inyecciones de mortero (NSR 10, 2010). Estas uniones resultan costosas y son propensas a presentar concentraciones de esfuerzo, convirtiéndolos en potenciales puntos de falla.

Se han planteado alternativas para solventar esta problemática como la producción de prefabricados de bambú laminado (Sharma et al., 2015), logrando crear elementos de dimensiones estandarizadas que facilitan su uso como material constructivo. Otra alternativa propuesta por un grupo de investigación de la Universidad del Valle consiste en la utilización de abrazaderas de acero que se ajustan al culmo (J. García et al., 2017)(Fig. 1.1), con lo cual se evita la realización de cortes o perforaciones. Los cortes y perforaciones frecuentemente usados en otras uniones crean concentraciones de esfuerzos y modos de falla frágiles. Las abrazaderas han demostrado tener un excelente desempeño mecánico por su alta ductilidad y capacidad de carga, además que facilitan la producción de prefabricados, reduciendo los costos de las construcciones e incentivando el uso de la *Guadua*.

Sin embargo, estudios han demostrado que el bambú presenta propiedades viscoelásticas (Amada y Lakes, 1997; Habibi et al., 2016). Al tratarse de un material polimérico, debido a su matriz de lignina y celulosa (Mohanty et al., 2005), su desempeño mecánico cambia con el tiempo. Varios estudios se han desarrollado para tener

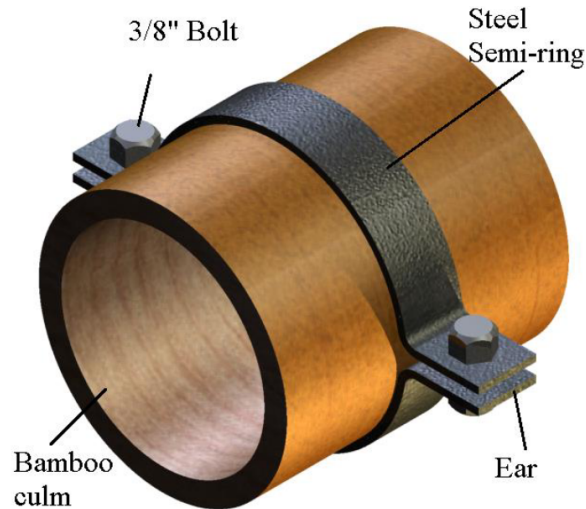


Figura 1.1.: Esquema de Guadua con abrazaderas (J. García et al., 2017).

un mayor entendimiento de la viscoelasticidad del bambú (Habibi et al., 2016; Yu et al., 2011). Sin embargo, hasta el momento no se registra un estudio enfocado a caracterizar la viscoelasticidad de la Guadua en el plano transversal al culmo. Uno de los principales aportes del estudio de esta propiedad es la realización de diseños estructurales más completos donde la Guadua se vea sometida a cargas o desplazamientos en el plano transversal al culmo, como es el caso de las uniones con abrazaderas.

Para describir el comportamiento viscoelástico de los materiales y ajustar pruebas experimentales se plantean modelos reológicos. En la literatura se presentan numerosos modelos tradicionales (Gutierrez-Lemini, 2014) y recientemente se han desarrollado modelos avanzados. Estos modelos avanzados se destacan por la incorporación de derivadas de orden fraccionario, un campo de estudio novedoso que ha demostrado ventajas en la solución de diversos problemas ingenieriles (Mainardi, 2010). Algunos estudios han reportado que los modelos fraccionarios exhiben un mejor ajuste al comportamiento viscoelástico de materiales biológicos comparado con los modelos tradicionales (Matlob y Jamali, 2019).

Teniendo en cuenta la necesidad de caracterizar el comportamiento viscoelástico de la Guadua y las ventajas que presentan los modelos avanzados de derivadas fraccionarias, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo modelar el comportamiento viscoelástico de la guadua en el plano transversal al culmo con el uso de modelos de derivadas fraccionarias?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar con derivadas fraccionarias el comportamiento viscoelástico de la Guadua en el plano transversal al culmo.

1.2.2 Objetivos específicos

- Realizar ensayos de probetas de Guadua para determinar el comportamiento viscoelástico del material sometido a cargas transversales.
- Ajustar los resultados experimentales con modelos viscoelásticos tradicionales y de derivadas fraccionarias.
- Determinar el modelo óptimo para representar el comportamiento viscoelástico de la Guadua basado en la calidad del ajuste y el tiempo de análisis.

2. MARCO DE REFERENCIA

2.1 Revisión de antecedentes

En un estudio preliminar ([Amada y Lakes, 1997](#)), se observó el comportamiento viscoelástico del bambú sometido a torsión y flexión. Se destacó la influencia de la humedad en los resultados de los ensayos. Adicionalmente, se resaltó la anisotropía del material, al obtenerse diferentes valores de amortiguamiento para cada tipo de ensayo.

En 2016 se realizó un estudio para caracterizar el comportamiento viscoelástico del bambú a partir de sus componentes microestructurales ([Habibi et al., 2016](#)). Se observó que las células de parénquima son las principales responsables de la respuesta viscoelástica a bajas frecuencias de carga, mientras que a altas frecuencias se atribuyó tanto a las células de parénquima como a las fibras.

El fenómeno de creep resulta de gran interés para investigadores que estudian el bambú, destacándose dos estudios. Una primera investigación ([L. Li y Xiao, 2016](#)) se enfocó en el estudio de laminados de bambú sometidos a ensayos de creep uniaxial de corta y larga duración. Se implementó el modelo viscoelástico de Burguers para caracterizar la respuesta de los laminados con resultados satisfactorios. Por otra parte, un estudio experimental, llevado a cabo en la Nanjing Forestry University ([Yang et al., 2020](#)), buscó caracterizar el creep en contrachapados de bambú laminado. Se sometió el material a ensayos de compresión y tensión de corta duración a diferentes niveles de carga. Se comprobó que el modelo de Burguers logra representar de forma apropiada el comportamiento de creep.

Recientemente se elaboró un estudio sobre la caracterización de un compuesto de fibras de bambú sometido a ensayo de creep de corta duración ([Songsong y Maosong, 2021](#)). Al ajustar modelos viscoelásticos a los datos experimentales se observó que un modelo de derivadas fraccionarias presentó mejores resultados comparado con un modelo viscoelástico tradicional.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Ensayos viscoelásticos

La viscoelasticidad es el comportamiento mecánico de materiales que poseen propiedades tanto elásticas como viscosas. Por tanto, su desempeño varía con el paso del tiempo. Para estudiar este comportamiento se suelen hacer dos tipos de ensayos, ensayo de relajación de esfuerzos y ensayo de creep.

El ensayo de relajación de esfuerzos consiste en someter el material a una historia de deformación mientras se registra el esfuerzo resultante. Una curva típica de este ensayo (Fig. 2.1a) muestra como el material tiene una respuesta inicial máxima, formando un pico, y va decayendo con el paso del tiempo. Por su parte, el ensayo de creep consiste en aplicar al material una historia de esfuerzo y registrar las deformaciones a lo largo del tiempo (Fig. 2.1b). Cada ensayo permite obtener una propiedad diferente del material. El ensayo de relajación de esfuerzos permite determinar el módulo de relajación, y el ensayo de creep la capacitancia de fluencia o función de creep. Sin embargo, existe una relación entre ambas propiedades cuando se trabaja en el rango lineal de la viscoelasticidad.

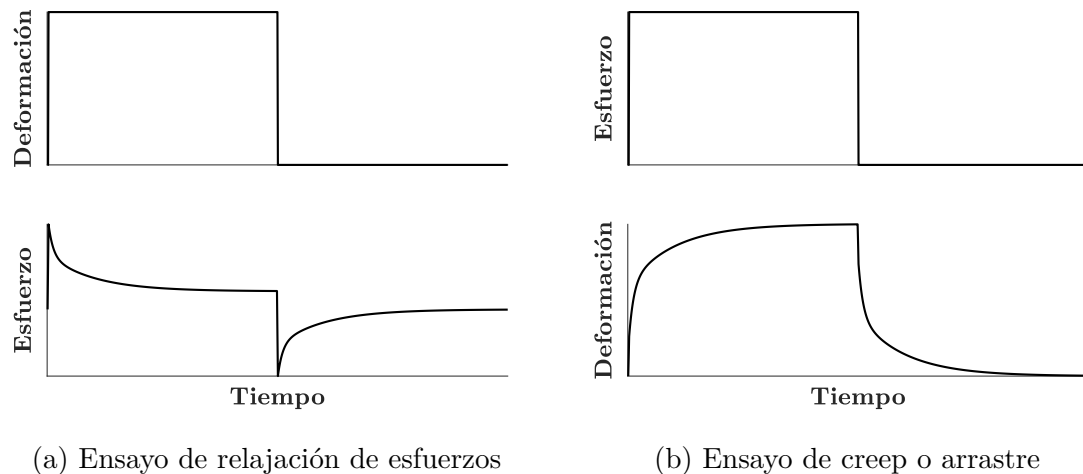


Figura 2.1.: Ejemplo de ensayos viscoelásticos.

Por tanto, el ensayo de interés de este estudio corresponde al de relajación de esfuerzos, pues se conocen las deformaciones a las que va a estar sometida la Guadua y se busca determinar la variación en el tiempo de los esfuerzos resultantes.

2.2.2 Determinación del ensayo

Para las pruebas de relajación de esfuerzos se implementaron ensayos establecidos en la literatura para caracterizar propiedades transversales al culmo del bambú. Un ensayo es el de compresión circunferencial o de resistencia de borde descrito en la norma ISO 22157 (2019). El ensayo consiste en cargar transversalmente una probeta de bambú con geometría similar a la de un anillo. Esto genera esfuerzos de flexión que cambian de signo y magnitud al rededor del elemento.

Otros ensayos propuestos (Molari y García, 2021), consisten en cargar partes de anillos en forma de semianillos o en forma de C. El ensayo de semianillos consiste en cargar una mitad de anillo de bambú, apoyado en la parte inferior sobre platinas que permitan el desplazamiento de sus extremos, generando esfuerzos de tracción en la parte interna del elemento. El ensayo de C consiste en cargar un anillo de bambú con un corte que le da forma similar a una C, generando esfuerzos de compresión en la parte interna. Con estos ensayos, se puede conocer la respuesta del material sometido a varios esfuerzos y validar los resultados obtenidos para cada configuración.

Una de las propiedades determinadas a partir de estos ensayos es el módulo de elasticidad circunferencial efectivo. La formula para el cálculo de esta propiedad en ensayos de anillos se obtiene a partir de la teoría de mecánica de sólidos y se presenta a continuación (Young et al., 2002),

$$E_A = \frac{12R^3}{Lt^3} \left(\frac{\pi k_1}{4} - \frac{2k_2^2}{\pi} \right) \frac{P}{\Delta_v} \quad (2.1)$$

donde R , L y t son el radio medio, el ancho y el espesor del anillo, respectivamente. Δ_v es el desplazamiento producido en el anillo, P es la fuerza resultante, k_1 y k_2 son parámetros que dependen de las dimensiones del anillo y de propiedades del material calculados a partir de las siguientes ecuaciones

$$k_1 = 1 - \frac{t^2}{12R^2} + \frac{t^2 FE}{12R^2 G} \quad (2.2)$$

$$k_2 = 1 - \frac{t^2}{12R^2} \quad (2.3)$$

al considerar el material como transversalmente isótropo (Torres et al., 2007), la relación entre el módulo de elasticidad E y el módulo a cortante G se puede obtener como $2(1 + \nu)$, tomando la relación de Poisson igual a 0.22 (García et al., 2012). F es un factor de forma igual a 1.2 para una sección rectangular (Sharma et al., 2013).

De igual forma, las fórmulas para ensayos de semianillos (Ec. 2.4) y C (Ec. 2.5) se presentan a continuación (Molari y García, 2021).

$$E_{SA} = \frac{6R_i^3}{Lt^3} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) \frac{P}{\Delta_v}. \quad (2.4)$$

$$E_C = \frac{6\pi R^3}{Lt^3} \frac{P}{\Delta_v}. \quad (2.5)$$

donde R_i es el radio interno del anillo.

Para conocer el esfuerzo máximo en la parte interna del elemento se presentan las siguientes ecuaciones (Young et al., 2002; Molari y García, 2021)

$$\sigma = \frac{M}{Lth} \frac{\left(\frac{t}{2} - h\right)}{R_i} \quad (2.6)$$

$$\sigma_C = \frac{M}{Lth} \frac{\left(\frac{t}{2} - h\right)}{R_i} + \frac{P}{Lt} \quad (2.7)$$

$$h = R - \frac{t}{\log\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} \quad (2.8)$$

donde σ es el esfuerzo de tracción máximo en anillos y semianillos, σ_C es el esfuerzo máximo a compresión en C, h es un parámetro que define la posición del eje neutro con respecto al centroide, R_o es el radio externo del anillo y M es un momento flector que depende de la configuración del ensayo, sean anillos (Ec. 2.9), semianillos (Ec. 2.10) o C (Ec. 2.11).

$$M_A = \frac{PRk_2}{\pi} \quad (2.9)$$

$$M_{SA} = \frac{PR_i}{2} \quad (2.10)$$

$$M_C = PR \quad (2.11)$$

2.2.3 Modelos reológicos tradicionales

La viscoelasticidad se representa por medio de modelos reológicos, ya sea en forma de integral hereditaria o en forma de operador diferencial. La forma de integral

hereditaria se basa en el principio de superposición de Boltzmann, según el cual, el esfuerzo en un material viscoelástico lineal se obtiene como la suma de las respuestas a una secuencia de deformaciones. En el caso de historias de deformación generales, esta suma se realiza por medio de una integral hereditaria (Ec. 2.12)(Mainardi, 2010) como,

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

donde t es el tiempo, τ es una variable transitoria, σ es el esfuerzo del material, ϵ es la deformación, $\dot{\epsilon}$ es la tasa de deformación y $E(t)$ es el módulo de relajación. De esta forma, se logra describir el fenómeno de memoria característico de los materiales viscoelásticos.

Cada modelo reológico está asociado con una ecuación constitutiva. La ecuación constitutiva relaciona el esfuerzo con la deformación. En el caso de los modelos representados en forma de integral hereditaria, esta ecuación es el módulo de relajación. En este estudio, el módulo de relajación caracteriza la viscoelasticidad de la Guadua sometida a ensayos de relajación de esfuerzos.

Dos ejemplos de modelos reológicos comunes son el resorte, ideal para modelar sólidos elásticos lineales, y el amortiguador, usado para representar fluidos newtonianos. La combinación de estos elementos en configuraciones diferentes dan origen a variados modelos viscoelásticos que pueden describir adecuadamente la respuesta de los materiales viscoelásticos. Por ejemplo, si se conectan en serie se obtiene el modelo de Maxwell (Fig. 2.2a) o en paralelo, el modelo de Kelvin (Fig. 2.2b).



Figura 2.2.: Modelos viscoelásticos tradicionales.

Un modelo apropiado para caracterizar materiales poliméricos es el sólido lineal estándar (SLS). Este modelo es representado por un resorte en paralelo con un modelo de Maxwell (Fig. 2.3). Muchos plásticos se modelan con el SLS.

Sin embargo, cuando se trata de materiales más complejos como los biológicos, son necesarios modelos más sofisticados. Un ejemplo es el modelo de Wiechert o de

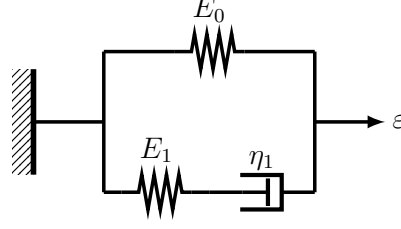


Figura 2.3.: Sólido lineal estándar.

Maxwell generalizado, representado por un resorte en paralelo con varios modelos de Maxwell (Fig. 2.4). Cada modelo de Maxwell se considera una rama del modelo de Wiechert. El número de ramas del modelo de Wiechert depende de la complejidad de la respuesta del material. El módulo de relajación de este modelo se muestra a continuación (Ec. 2.13), también conocido como series de Prony.

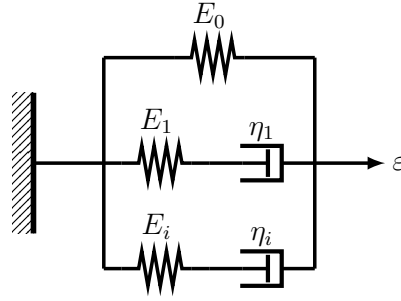


Figura 2.4.: Modelo de Wiechert o Maxwell generalizado.

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i} \quad (2.13)$$

donde t es la variable de tiempo, E_i es un módulo de elasticidad, τ_i es un tiempo de relajación y N es el número de ramas del modelo. Para el caso del SLS, N es igual a 1. Los tiempos de relajación se definen como $\tau_i = \eta_i/E_i$. El módulo de elasticidad E_0 recibe también el nombre de módulo de equilibrio o módulo de largo plazo. Esto se debe a que con el paso del tiempo, la contribución de las ramas del modelo va disminuyendo hasta solo quedar el aporte de E_0 . Los otros módulos de elasticidad presentan su mayor aporte en la respuesta instantánea del material, pero van disminuyendo con el paso del tiempo en función de los tiempos de relajación. Entre mayor sean los tiempos de relajación, más perdura el aporte de la rama a la respuesta del material.

2.2.4 Derivadas fraccionarias

La combinación de resortes y amortiguadores dan origen a lo que se denomina modelos viscoelásticos tradicionales. Sin embargo, con la aplicación del cálculo fraccionario se pueden desarrollar modelos avanzados.

El campo del cálculo fraccionario se puede considerar novedoso. Los primeros descubrimientos sobre su discusión datan de 1695, en una carta escrita por Leibniz a L'Hopital mostrando su interés por las derivadas de orden fraccionario. Sin embargo, solo hasta 1974 se realizó la primera conferencia en cálculo fraccionario y sus aplicaciones (Ross, 2006). Es en los últimos años donde han presentado gran atractivo, por su capacidad para describir numerosos problemas ingenieriles (H. Li et al., 2020, 2021, 2022).

El cálculo fraccionario se basa principalmente en dos conceptos, la integral y la derivada de orden fraccionario. En la literatura se plantean diferentes representaciones de derivadas e integrales, entre las que se encuentran las formuladas por Riemann-Liouville y Caputo. El enfoque de este estudio son las derivadas de orden fraccionario, por lo que se presentan a continuación las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (Ec. 2.14) y Caputo (Ec. 2.15) (Mainardi, 2010).

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.14)$$

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.15)$$

donde Γ es la función Gamma, $f(t)$ es una función que depende del tiempo y α es el orden de la derivada, el cual puede estar entre 1 y 0. Tomando como referencia la teoría presentada por Mainardi (2010), la definición de derivada fraccionaria implementada en este estudio es la de Caputo. Se puede observar que si α es igual a 1, la derivada fraccionaria es igual a la primera derivada de la función y si α es igual a 0 se obtiene la función.

Una de las aplicaciones del cálculo fraccionario es en el campo de la viscoelasticidad. Con la definición de derivada fraccionaria, se da origen al elemento de orden fraccionario (Ec. 2.16)(Fig. 2.5). El orden de este elemento (definido por el valor de α) le permite describir un estado entre resorte y amortiguador, siendo el caso de orden cero el de un resorte y el caso de orden uno el de un amortiguador. Este elemento es también conocido como modelo de Scott-Blair.

$$\sigma(t) = E_0 \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} . \quad (2.16)$$

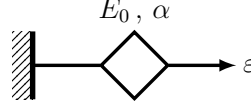


Figura 2.5.: Elemento de orden fraccionario.

Similar al modelo tradicional de Maxwell, se plantea el modelo de Maxwell fraccionario (Fig. 2.6). Este modelo reemplaza el amortiguador del modelo tradicional por un elemento de orden fraccionario.

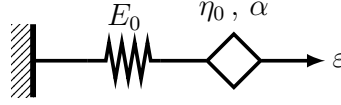


Figura 2.6.: Modelo de Maxwell fraccionario.

Los módulos de relajación del modelo de Scott-Blair (Ec. 2.17) y el de Maxwell fraccionario (Ec. 2.18) se presentan a continuación (Mainardi, 2010),

$$E(t) = \frac{E_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (2.17)$$

$$E(t) = E_0 E_\alpha[-(t/\tau_0)^\alpha] \quad (2.18)$$

donde E_α es la función de Mittag-Leffler, que se puede considerar una función exponencial generalizada.

2.2.5 Ajuste de modelos

Una vez formulado el módulo de relajación del modelo, se obtiene el esfuerzo teórico con la integral hereditaria (Ec. 2.12) para cualquier historia de deformación. Para que el modelo pueda representar el comportamiento del material, el esfuerzo teórico debe corresponder a la respuesta observada experimentalmente. Como la deformación es establecida previamente, la única forma de modificar el esfuerzo teórico es por medio de los parámetros del modelo, los cuales son los módulos de elasticidad, los

tiempos de relajación y el orden de la derivada fraccionaria. Estos se pueden asignar manualmente y comparar los esfuerzos hasta tener un ajuste razonable. Sin embargo, herramientas computacionales como MATLAB facilitan esta tarea. Usando algoritmos de optimización, se puede emplear una secuencia de comandos que modifiquen los parámetros del modelo automáticamente, reduciendo la diferencia entre el esfuerzo teórico y experimental.

Algunos algoritmos de optimización incluidos en el software MATLAB son FMINCON y Particle swarm optimization (PSO). FMINCON se basa en algoritmos de punto interior (Byrd et al., 1999, 2000; Waltz et al., 2006), mientras que el PSO se basa en algoritmos de enjambre de partículas (Kennedy y Eberhart, 1995; Pedersen, 2010; Mezura-Montes y Coello, 2011). La finalidad de estos algoritmos es minimizar una función objetivo, que en este estudio depende de la diferencia entre el esfuerzo teórico y experimental, modificando los parámetros del modelo hasta obtener un ajuste deseado. La función objetivo escogida fue la raíz del error cuadrático medio normalizado (NRMSE). Cabe resaltar que esta función objetivo no fue tomada como indicador de calidad de ajuste, solo fue usada para el proceso de optimización.

2.2.6 Calidad de ajuste

Una vez ajustados los modelos, se cuantificó la capacidad del modelo de representar la respuesta experimental con indicadores. Estos indicadores permiten comparar los modelos planteados. Un indicador simple pero relevante es el error entre el esfuerzo máximo teórico y experimental (Ec. 2.19). Este error califica la capacidad del modelo de representar la zona inicial de relajación de esfuerzos.

$$\%Error_{pico} = \left| \frac{\sigma_{pico} - \sigma_{tpico}}{\sigma_{pico}} \right| * 100 \quad (2.19)$$

donde σ_{pico} es el máximo esfuerzo alcanzado en el ensayo y σ_{tpico} es el máximo esfuerzo teórico generado por el modelo.

Otro indicador de interés es el coeficiente de determinación (R^2), el cual evalúa el error acumulado a lo largo de toda la historia de esfuerzo (Ec. 2.20). Este indicador varía entre 1 y $-\infty$, siendo 1 un ajuste perfecto y a medida que disminuye es menor la calidad del ajuste.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(\sigma - \sigma_t)^2}{\sum(\sigma - \bar{\sigma})^2} \quad (2.20)$$

3. METODOLOGÍA

3.1 Material

Las probetas de *Guadua angustifolia* fueron obtenidas de 25 culmos provenientes del Eje Cafetero con edad de cultivo entre 4 y 5 años. El material fue tratado con bórax y secado siguiendo prácticas bien establecidas (García et al., 2012). Los culmos se almacenaron en condiciones ambientales dentro del laboratorio. Debido a que partes de culmos fueron usados en otros estudios, su categorización con respecto a la altura no pudo ser establecida. Para la producción de las probetas, se realizaron cortes perpendiculares al eje del culmo en las zonas de entrenudos cada 2cm. De esta forma se obtienen los anillos con un ancho nominal igual a la distancia de corte. Se verificó que los anillos no presentaran defectos que pudieran alterar los resultados de los ensayos. Se realizaron mediciones del diámetro externo, espesor, ancho, peso y contenido de humedad. Para este último, se utilizó un medidor de humedad EXTECH MO50. Con las dimensiones y el peso de los anillos, se calculó la densidad de las probetas asumiendo una geometría de cilindro hueco. Esta densidad fue ajustada al 12 % de contenido de humedad de acuerdo con la norma ISO 22157 (Eq. 3.1). Se cortaron 77 anillos (Fig. 3.1a) para la realización de los diferentes ensayos, usando 35 para el ensayo de compresión circunferencial y los otros como semianillos (Fig. 3.1b) y C (Fig. 3.1c). Para los semianillos se realizaron cortes con un bisturí afilado sobre líneas demarcadas en los anillos y lijando las caras de los extremos sobre una superficie plana. Para las C se retira una pequeña parte del anillo, sin necesidad de tener una separación específica debido a que los extremos libres no estarían sometidos a carga.

$$\rho_{12} = \rho_{test} \left[\frac{1.12}{1 + MC} \right] \quad (3.1)$$

3.2 Arreglo experimental

Una vez se tienen las probetas, se configura el arreglo experimental (Fig. 3.2). El arreglo es conformado por 5 dispositivos. El principal es una máquina de ensayos universal (UTM), encargada de aplicar los desplazamientos a las probetas. Otros dos

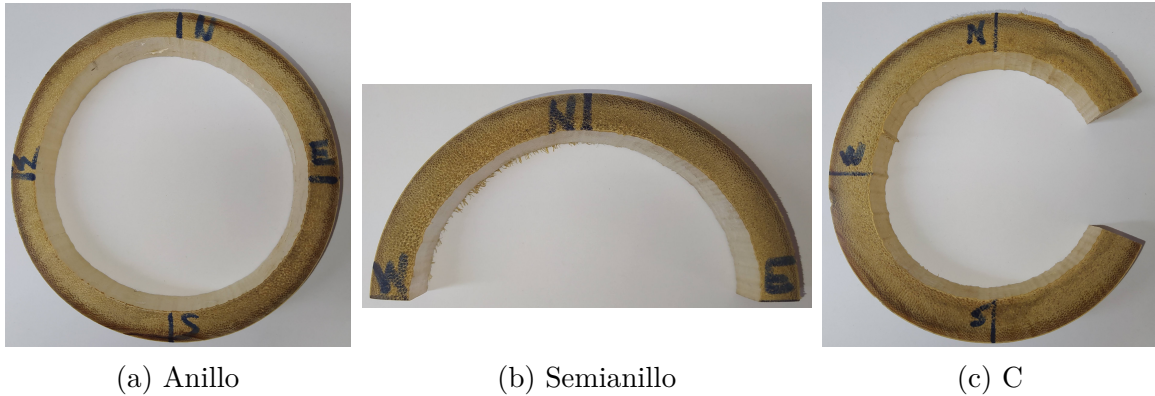


Figura 3.1.: Probetas de *Guadua angustifolia* para cada ensayo.

dispositivos son una celda de carga LCM703-50 (Omega, USA) que registra la fuerza resultante, y un LVDT LD610-15 (Omega Engineering, Inc., USA) para medir los pequeños desplazamientos del ensayo. Ambos dispositivos conectados a un sistema de adquisición de datos (DAQ) V-Link-200 (Lord Corporation, NC, USA) para capturar la señal de los dispositivos a una tasa de muestreo determinada y almacenarla en un computador para su posterior procesamiento. Finalmente, debido a que los ensayos se realizan bajo condiciones ambientales, se cuenta con un termohigrómetro Goove H5075 para medir variables ambientales como temperatura y humedad relativa.

3.3 Realización de ensayos

Para iniciar el ensayo, se disponen las probetas en la máquina universal con una pequeña precarga que garantice el contacto entre elementos. Para cargar la probeta, se establece un desplazamiento y una velocidad de carga. Se busca que la carga produzca deformaciones muy pequeñas, de forma que la respuesta del material se mantenga en el rango lineal. Para garantizar esto, se realizaron pruebas piloto para definir los desplazamientos y velocidades de carga adecuados para cada tipo de ensayo. De estas pruebas se determinó que se aplicarían deformaciones de 0.5 y 1mm para anillos y semianillos, y 2mm para C debido a la flexibilidad de estas probetas, con velocidades de carga de 6 y 12mm/min. Se estableció un patrón de carga compuesto por una rampa de carga inicial hasta el desplazamiento Δ_v , conservando el desplazamiento un tiempo t_s y terminar con una rampa de descarga (Fig. 3.3). Ya que la viscoelasticidad es función del tiempo, es de interés conocer la variación de la respuesta respecto a la

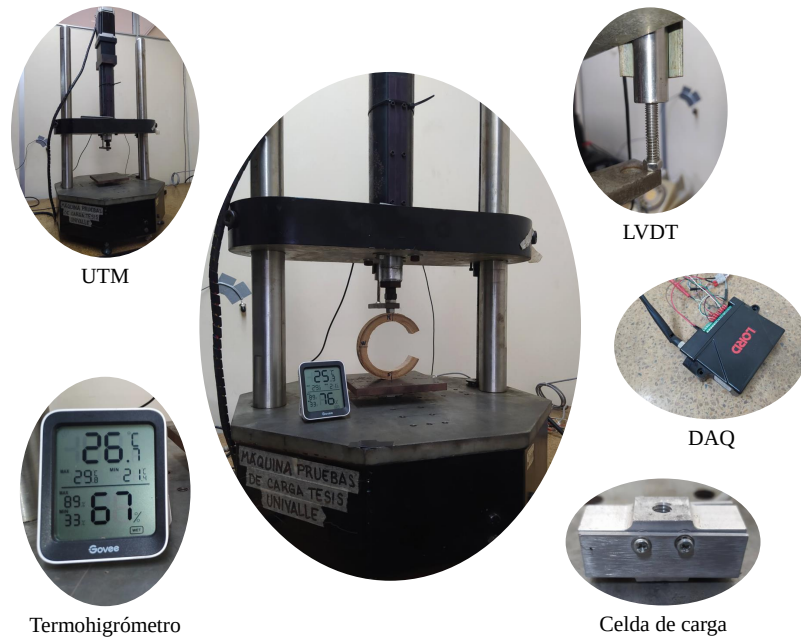


Figura 3.2.: Arreglo experimental para ensayos de relajación de esfuerzos.

duración del ensayo. Se determinó que los ensayos debían presentar diferentes duraciones, categorizándolas en ensayos de corta y larga duración. Los ensayos de corta duración se caracterizan por ser de 10 minutos, mientras que los de larga duración son de más de 1 hora.

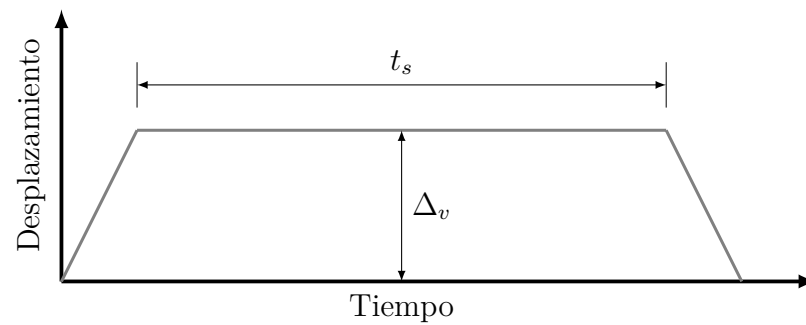


Figura 3.3.: Patrón de carga para los ensayos.

3.4 Procesamiento de datos

A partir de los ensayos, se generan archivos que contienen la información registrada por el LVDT y la celda de carga. Los datos crudos son modificados para tener la información en términos de mm y N para el LVDT y la celda de carga, respectivamente. Los datos corregidos se procesan con el software MATLAB. Se generan los vectores de tiempo, desplazamiento y fuerza. Debido a que los dispositivos presentan ruido, se requiere filtrar la señal para un adecuado ajuste de los modelos. Un primer filtro consiste en usar el identificador de Hampel, el cual remueve datos atípicos de la señal. Una vez removidos estos valores, se realiza un diseño de filtros Butterworth y filtrado digital de fase cero para mejorar la señal.

3.5 Ajuste de modelos

Con los datos procesados, se ajustaron los parámetros de los modelos viscoelásticos. El proceso se llevó a cabo con la herramienta MATLAB. Cuatro modelos viscoelásticos fueron considerados. El primer modelo es el sólido lineal estándar (SLS), el segundo es el modelo generalizado de Maxwell con dos ramas ([J. J. García et al., 2022](#)), el tercero es el modelo de Scott-Blair y por último el modelo de Maxwell fraccionario. El SLS cuenta con 3 parámetros, mientras que el Maxwell de dos ramas cuenta con 5. Por otra parte el modelo de Scott-Blair cuenta con 2 parámetros, y el Maxwell fraccionario con 3. Los modelos de derivadas fraccionarias tienen menos parámetros en relación a los modelos tradicionales considerados. Los parámetros optimizados, los indicadores de calidad de ajuste y el tiempo computacional de cada modelo fueron almacenados en una base de datos para su posterior análisis. Además, con la información del tipo de ensayo y las dimensiones de la probeta, se generó la historia de esfuerzo del material con los datos experimentales. La función de Mittag-Leffler requerida para el modelo de Maxwell fraccionario fue evaluada numéricamente aplicando la función desarrollada por [Garrappa \(2015\)](#).

3.6 Mejoramiento del costo computacional

Debido a la duración de los ensayos y la tasa de muestreo, los archivos pueden contener una gran cantidad de datos. El ajuste de los modelos viscoelásticos implica numerosos cálculos que afectan el tiempo computacional requerido. Para reducir el

costo computacional, se implementan mejoras como la reducción del número de datos, integral hereditaria numérica mejorada y las propiedades de los modelos. El proceso de reducir los datos consiste en disminuir la tasa de muestreo con un filtro paso bajo antialiasing, pero evitando perder información relevante como las fuerzas pico. La integral hereditaria numérica mejorada consiste en aprovechar el patrón de carga presentado en la Fig. 3.3 y la forma de la integral hereditaria descrita en la Ec. 2.12. Debido a que la integral incluye como producto la tasa de deformación, la cual es diferente de cero solo durante las rampas de carga y descarga, los cálculos se pueden reducir considerando solo estas zonas en la determinación de la integral. Finalmente, para los modelos basados en el modelo generalizado Maxwell, se aplicó el procedimiento numérico desarrollado por el grupo de Puttlitz (Ramo et al., 2018). Este procedimiento utiliza las propiedades de la función exponencial para calcular la integral hereditaria en cada paso de tiempo, usando solo la información del paso previo y reduciendo significativamente el costo computacional.

4. RESULTADOS

4.1 Probetas y ensayos

Las dimensiones y propiedades físicas de las probetas ensayadas se presentan en la Tabla 4.1, diferenciándolas por tipo mientras que en la Tabla 4.2 se indica el número de ensayos por tipo de probeta y su duración.

Tabla 4.1.: Cantidad, dimensiones y propiedades físicas de probetas usadas. El coeficiente de variación se presenta entre paréntesis.

Tipo	Cantidad	Diametro (mm)	Espesor (mm)	Ancho (mm)	Contenido de humedad (%)	Densidad (gr/cm ³)
Anillo	35	116.27 (2.09)	11.06 (15.34)	20.28 (4.78)	14.61 (9.69)	0.70 (7.43)
Semianillo	18	115.15 (1.92)	11.38 (9.76)	20.20 (3.90)	13.95 (5.07)	0.76 (7.90)
C	24	114.11 (5.11)	11.82 (13.49)	20.22 (5.75)	14.17 (8.34)	0.71 (7.98)

Tabla 4.2.: Cantidad de ensayos por arreglo experimental y duración.

Tipo	Duración	Número de ensayos
Anillo	Corta	25
	Larga	10
Semianillo	Corta	15
	Larga	10
C	Corta	15
	Larga	9

4.2 Consideraciones en el ajuste

En los ensayos de larga duración se observó recuperación de esfuerzos con el paso del tiempo, en especial en los ensayos de probetas tipo C. Este comportamiento no es acorde con la teoría de la viscoelasticidad. Comparando los datos de relajación de esfuerzos con los de humedad relativa y temperatura presentes en el ensayo, se observó que las recuperaciones presentes se deben a las variables ambientales, principalmente la humedad relativa (Fig. 4.1). Los modelos formulados no son capaces de representar esta variación en las curvas. Para realizar un análisis de los modelos ajustados a ensayos de larga duración, se consideraron los datos obtenidos en la primera hora de los ensayos, pues en este periodo las variaciones de humedad son bajas y no afectan la respuesta del material (Fig. 4.2). Una alternativa para evaluar la historia completa obtenida en los ensayos consiste en incluir el efecto de la humedad por medio de un coeficiente que relacione los cambios en el esfuerzo con los cambios de humedad (J. J. García et al., 2022).

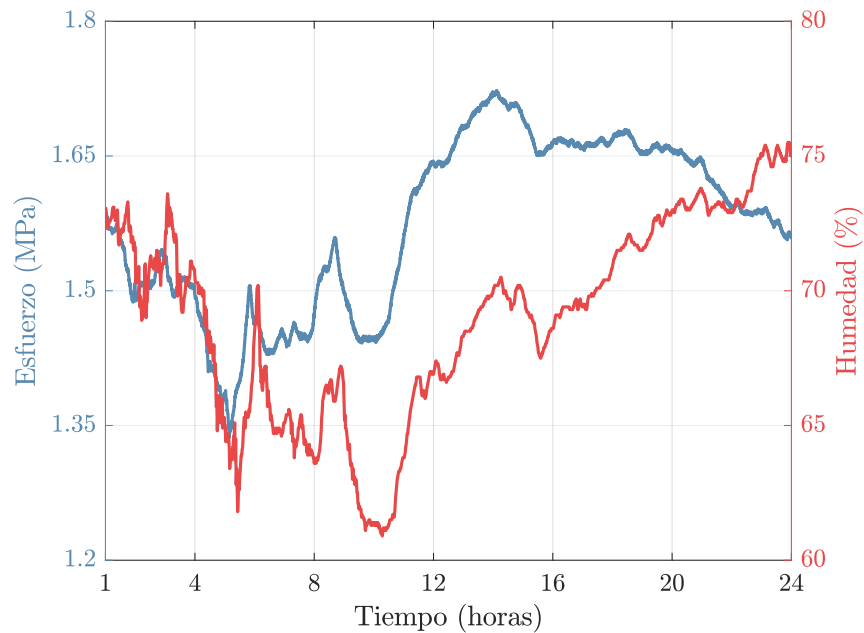


Figura 4.1.: Comparación entre esfuerzos en el material (azul) y humedad relativa (rojo) en la ejecución del ensayo.

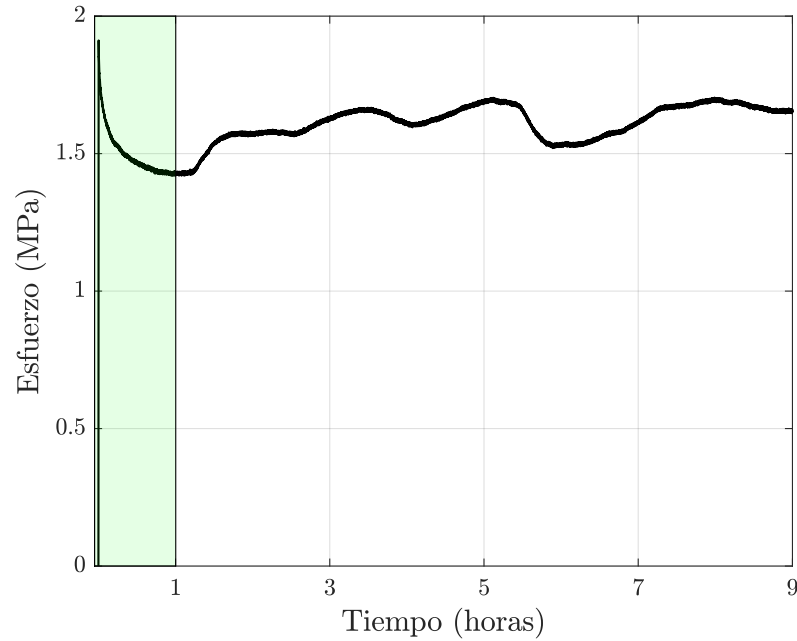


Figura 4.2.: Ejemplo de zona considerada (verde) en el ajuste de ensayos de larga duración.

4.3 Resultado de ajustes

Se presentan en las Tablas 4.3 a 4.6 los resultados de los ajustes de cada modelo, mostrando los promedios del Error pico, coeficiente de determinación, tiempo computacional requerido por ajuste y parámetros, diferenciados por tipo de probeta y duración de ensayo. Además, se incluye la Fig. 4.3 presentando las curvas típicas de datos experimentales junto con los ajustes de modelos, y las Fig. 4.4 y 4.5 donde se comparan los indicadores de calidad de ajuste de los modelos considerados.

4.4 Análisis de resultados

De la Tabla 4.6 se observa que el tiempo computacional para el modelo de Maxwell fraccionario es dos órdenes de magnitud mayor que el de los demás modelos. Esto se debe principalmente al tiempo invertido para la evaluación de la función de Mittag-Leffler. De las Tablas 4.5 y 4.6 se observa que α toma un valor cercano a 0.05 para el modelo de Scott-Blair, y 0.1 para el Maxwell fraccionario. Debido a que el orden

Tabla 4.3.: Resultados de ajuste para el SLS, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.

Tipo	Duración	Error pico (%)	R^2	Tiempo comp. (s)	E_0 (MPa)	E_1 (MPa)	τ_1 (s)
Anillo	Corta	3.33 (29.13)	0.984 (1.03)	0.27 (43.27)	579.66 (32.70)	91.12 (26.83)	156.38 (19.07)
	Larga	8.75 (6.27)	0.976 (0.65)	1.50 (35.48)	543.03 (16.32)	172.72 (19.97)	1346.52 (29.17)
Semianillo	Corta	4.76 (28.79)	0.963 (2.40)	0.26 (34.47)	466.67 (49.10)	106.53 (38.67)	113.58 (12.46)
	Larga	12.51 (15.42)	0.962 (1.04)	1.40 (29.57)	416.59 (34.39)	125.32 (30.47)	903.11 (25.01)
C	Corta	1.91 (68.39)	0.988 (0.50)	0.35 (54.65)	736.62 (50.04)	99.71 (50.13)	94.54 (13.02)
	Larga	7.23 (25.16)	0.972 (1.01)	1.45 (32.31)	619.23 (29.13)	120.13 (47.13)	912.96 (41.40)

Tabla 4.4.: Resultados de ajuste para el Maxwell de dos ramas, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.

Tipo	Duración	Error pico (%)	R^2	Tiempo comp. (s)	E_0 (MPa)	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	τ_1 (s)	τ_2 (s)
Anillo	Corta	1.37 (74.80)	0.996 (0.39)	0.66 (28.55)	570.46 (33.47)	120.57 (139.34)	80.81 (29.34)	12.03 (62.48)	265.36 (28.16)
	Larga	1.76 (60.89)	0.997 (0.28)	4.32 (21.25)	505.14 (19.04)	92.46 (16.95)	180.07 (27.89)	88.42 (36.26)	2504.30 (32.33)
Semianillo	Corta	1.58 (79.30)	0.995 (0.34)	0.66 (41.04)	457.96 (49.35)	141.23 (51.88)	84.51 (40.70)	7.08 (41.76)	205.14 (11.95)
	Larga	2.04 (69.77)	0.995 (0.20)	3.54 (41.82)	403.56 (34.17)	97.75 (31.66)	111.86 (36.57)	57.66 (34.25)	1506.26 (29.14)
C	Corta	1.25 (87.72)	0.998 (0.19)	0.71 (34.17)	730.40 (50.08)	191.22 (113.22)	74.74 (53.59)	7.97 (63.69)	177.54 (30.49)
	Larga	1.34 (92.46)	0.967 (8.67)	5.64 (67.74)	602.44 (28.63)	83.04 (48.99)	112.21 (48.20)	73.37 (47.47)	2007.94 (59.61)

Tabla 4.5.: Resultados de ajuste para el Scott-Blair, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.

Tipo	Duración	Error pico (%)	R^2	Tiempo comp. (s)	E_0 (MPa)	α
Anillo	Corta	2.29 (41.34)	0.993 (0.39)	0.94 (18.31)	751.13 (27.56)	0.039 (29.82)
	Larga	11.43 (37.45)	0.937 (4.04)	2.16 (69.18)	966.01 (11.11)	0.061 (16.32)
Semianillo	Corta	0.82 (67.81)	0.995 (0.70)	1.23 (43.24)	663.07 (44.96)	0.054 (25.68)
	Larga	7.13 (42.94)	0.974 (2.15)	1.80 (46.08)	730.88 (30.82)	0.065 (22.23)
C	Corta	0.52 (66.87)	0.997 (0.36)	1.46 (60.76)	900.46 (50.05)	0.030 (10.39)
	Larga	3.66 (56.29)	0.979 (1.67)	3.16 (55.45)	903.05 (33.41)	0.042 (24.93)

Tabla 4.6.: Resultados de ajuste para el Maxwell fraccionario, entre paréntesis se incluye el coeficiente de variación.

Tipo	Duración	Error pico (%)	R^2	Tiempo comp. (s)	E_0 (MPa)	τ_0 (s)	α
Anillo	Corta	2.39 (34.56)	0.995 (0.24)	74.62 (38.51)	1203.71 (35.06)	596.01 (23.66)	0.083 (32.80)
	Larga	7.96 (39.19)	0.970 (2.04)	399.36 (27.12)	1170.42 (13.80)	3607.99 (0.07)	0.148 (23.00)
Semianillo	Corta	0.79 (73.57)	0.995 (0.95)	150.76 (58.58)	1129.57 (47.22)	148.26 (160.06)	0.099 (22.89)
	Larga	2.65 (98.71)	0.991 (1.08)	423.96 (31.47)	873.56 (34.25)	3443.23 (15.01)	0.151 (26.55)
C	Corta	0.46 (46.95)	0.997 (0.36)	196.52 (40.12)	1640.61 (55.01)	261.60 (114.11)	0.057 (12.48)
	Larga	2.64 (63.53)	0.985 (1.13)	532.69 (55.02)	1332.61 (26.48)	2813.06 (56.63)	0.088 (31.34)

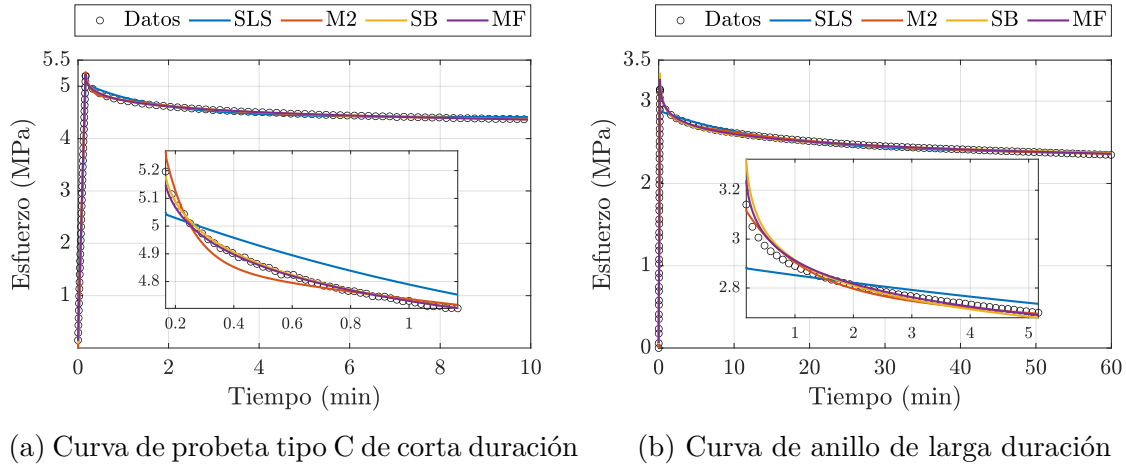


Figura 4.3.: Curvas típicas de ajuste de datos experimentales (círculos) de los modelos sólido lineal estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se incluye un acercamiento a la zona del pico para observar diferencias entre modelos.

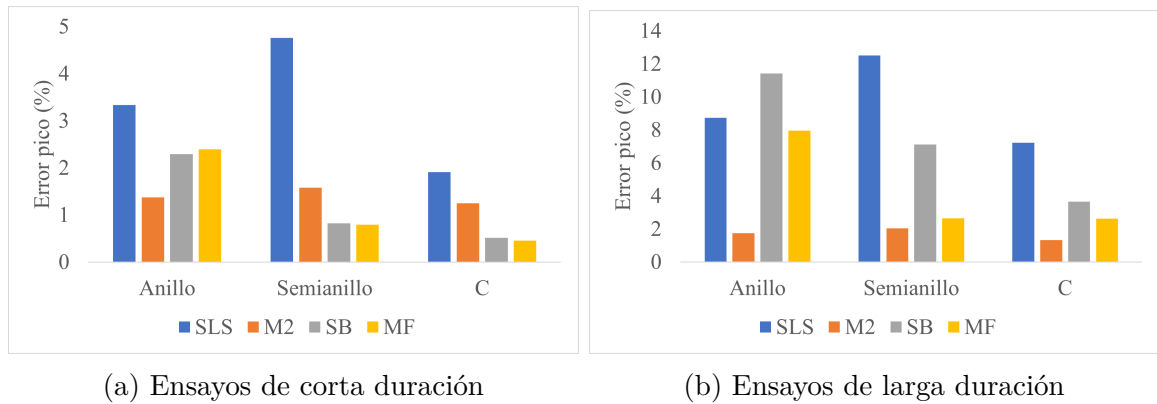


Figura 4.4.: Promedio de error pico para los modelos sólido lineal estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se diferencian por duración de ensayo y tipo de probeta.

es cercano a 0, se puede interpretar que el elemento de orden fraccionario tiene un comportamiento cercano al de un resorte.

De la Fig. 4.3a se observa en la ampliación de la curva como los modelos fraccionarios (amarillo y violeta) logran representar adecuadamente la curvatura inicial característica de los ensayos de relajación, que los modelos tradicionales (azul y rojo) no logran ajustar. Para el caso de los ensayos de larga duración (Fig. 4.3b), se observa

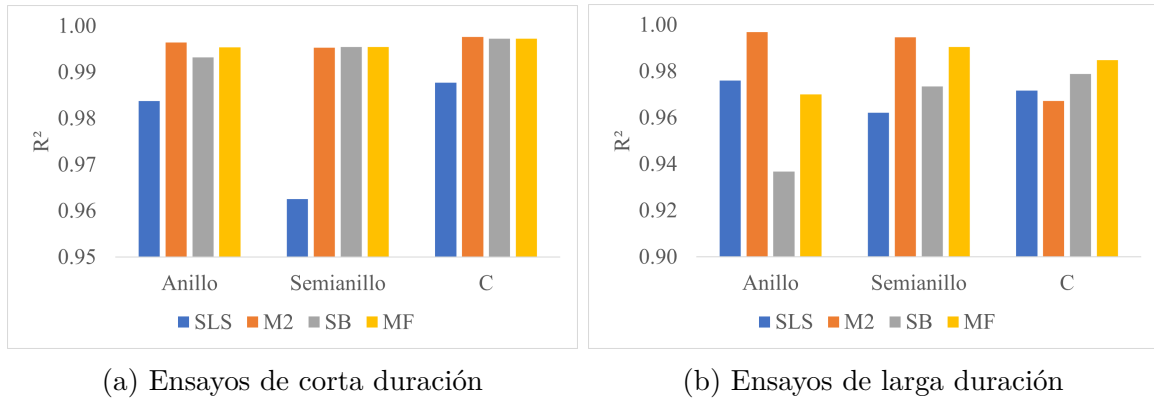


Figura 4.5.: Promedio de coeficiente de determinación para los modelos sólido lineal estándar (SLS), Maxwell de dos ramas (M2), Scott-Blair (SB) y Maxwell fraccionario (MF). Se diferencian por duración de ensayo y tipo de probeta.

nuevamente que los modelos fraccionarios son adecuados para representar la curvatura de los ensayos. Sin embargo, no logran alinearse completamente con la respuesta del material a comparación de los ensayos de corta duración. Esto se puede deber al mayor número de datos que el modelo se debe adaptar y que para lograr un mejor ajuste a toda la historia de esfuerzos deba compensar una reducción en el ajuste de la zona pico.

De la Fig. 4.4a, se observa como los modelos de derivadas fraccionarias presentan un error pico menor que los modelos tradicionales para semianillos y C, y menor al SLS para anillos. De la Fig. 4.4b, se destaca que el modelo de Maxwell de dos ramas presenta el menor error pico entre todos los modelos considerados para las diferentes probetas. Adicionalmente, el error pico aumenta en los ensayos de larga duración comparado con los de corta duración, exceptuando el modelo de Maxwell de dos ramas que tiene el mismo orden de error para ambas duraciones.

Los modelos presentan en promedio un coeficiente de determinación mayor a 0.930 (Fig. 4.5a y 4.5b) para los diferentes tipos de probeta y duraciones de ensayo. Esto indica que en general los modelos proveen un muy buen ajuste a los datos experimentales. El modelo SLS (Fig. 4.5a) presenta el menor coeficiente de determinación para todos los tipos de probeta, comparado con el de los demás modelos que es cercano a 0.995. Para los ensayos de larga duración (Fig. 4.5b), los modelos de derivadas fraccionarias presentaron un menor R^2 para las diferentes probetas. El modelo de Maxwell de dos brazos presentó el mayor coeficiente para ensayos de larga duración

de anillos y semianillos, mientras que el Maxwell fraccionario obtuvo el mejor ajuste para ensayos de probetas tipo C.

De los resultados se resalta como los modelos de derivadas fraccionarias logran tener un ajuste similar a los modelos tradicionales, a pesar de tener un menor número de parámetros. El costo computacional requerido por el modelo de Maxwell fraccionario se puede considerar un factor relevante para la implementación de este modelo. Pero teniendo en cuenta que el Maxwell fraccionario logra ajustes de calidad comparable a la del Maxwell de dos ramas con menos parámetros, lo posicionan como un modelo apropiado para representar la respuesta viscoelástica de la *Guadua angustifolia* en el plano transversal al culmo.

5. CONCLUSIONES

En este estudio se adaptaron ensayos establecidos en la literatura para conocer las propiedades en el plano transversal al culmo del bambú para evaluar la relajación de esfuerzos de la Guadua. Tres arreglos experimentales fueron considerados y dos duraciones de ensayo fueron definidas. Se encontró que las variables ambientales influyen en la respuesta del material para ensayos de larga duración, especialmente la humedad relativa. Con la información recolectada de los ensayos, se realizó el ajuste de modelos viscoelásticos tradicionales y de derivadas fraccionarias con el objetivo de evaluar la capacidad de ajuste y conocer las diferencias entre modelos.

En términos generales, todos los modelos formulados lograron representar de forma adecuada el comportamiento viscoelástico de la Guadua. El modelo de Maxwell fraccionario obtuvo valores cercanos a los logrados con el Maxwell de dos ramas con un menor número de parámetros pero con un costo computacional considerable. Debido a la amplia implementación de modelos viscoelásticos tradicionales en programas de elementos finitos, es recomendable el uso del modelo de Maxwell de dos ramas para representar la viscoelasticidad de la Guadua en el plano transversal. No obstante, se destaca el potencial de los modelos de derivadas fraccionarias como una alternativa capaz de representar de igual forma la viscoelasticidad de la Guadua requiriendo menos parámetros, especialmente el modelo de Maxwell fraccionario.

Bibliografía

- AIS. (2010). *Normas colombianas de diseño y construcción sismo-resistente, NSR-10*. (Vol. 2010; Standard). Bogotá, CO: Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica.
- Amada, S., y Lakes, R. (1997). Viscoelastic properties of bamboo. *Journal of Materials Science*, 32(10), 2693–2697.
- Byrd, R. H., Gilbert, J. C., y Nocedal, J. (2000). A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical programming*, 89(1), 149–185.
- Byrd, R. H., Hribar, M. E., y Nocedal, J. (1999). An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4), 877–900.
- García, J., Benítez, C., Villegas, L., Morán, R., y García, J. J. (2017). Thin steel rings as a feasible alternative to connect bamboo culms. En *17th international conference on non-conventional materials and technologies*.
- García, J. J., Zuluaga, L. F., y Gomez, D. (2022). Relaxation tests on rings and part of rings to assess the behavior of guadua angustifolia under sustained transverse loading. *Construction and Building Materials*, 338, 127369.
- García, J. J., Rangel, C., y Ghavami, K. (2012). Experiments with rings to determine the anisotropic elastic constants of bamboo. *Construction and Building Materials*, 31, 52-57. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.12.089>
- Garrappa, R. (2015). Numerical evaluation of two and three parameter mittag-leffler functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(3), 1350–1369.
- Gutierrez-Lemini, D. (2014). *Engineering viscoelasticity*. Springer.
- Habibi, M. K., ho Tam, L., Lau, D., y Lu, Y. (2016). Viscoelastic damping behavior of structural bamboo material and its microstructural origins. *Mechanics of Materials*, 97, 184-198. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.03.002>

- ISO. (2019, enero). *Bamboo structures — determination of physical and mechanical properties of bamboo culms — test methods* (Vol. 2019; Standard). Geneva, CH: International Organization for Standardization.
- Jayanetti, D., y Follett, P. (2008). Bamboo in construction. En *Modern bamboo structures* (pp. 35–44). CRC Press.
- Kennedy, J., y Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. En *Proceedings of icnn'95-international conference on neural networks* (Vol. 4, pp. 1942–1948).
- Lakkad, S., y Patel, J. (1981). Mechanical properties of bamboo, a natural composite. *Fibre science and technology*, 14(4), 319–322.
- Li, H., Gomez, D., Dyke, S. J., y Xu, Z. (2020). Fractional differential equation bearing models for base-isolated buildings: framework development. *Journal of Structural Engineering*, 146(2), 04019197.
- Li, H., Gomez, D., Dyke, S. J., Xu, Z., y Dai, J. (2021). Investigating coupled train-bridge-bearing system under earthquake-and train-induced excitations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 143(5), 051003.
- Li, H., Xu, Z., Gomez, D., Gai, P., Wang, F., y Dyke, S. J. (2022). A modified fractional-order derivative zener model for rubber-like devices for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 148(1), 04021119.
- Li, L., y Xiao, Y. (2016). Creep behavior of glulam and cfrp-enhanced glulam beams. *Journal of Composites for Construction*, 20(1), 04015028.
- Mainardi, F. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. IMPERIAL COLLEGE PRESS. Descargado de <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/p614> doi: 10.1142/p614
- Matlob, M. A., y Jamali, Y. (2019). The concepts and applications of fractional order differential calculus in modeling of viscoelastic systems: A primer. *Critical Reviewstrade; in Biomedical Engineering*, 47(4), 249–276.
- Mezura-Montes, E., y Coello, C. A. C. (2011). Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(4), 173–194.

- Mohanty, A. K., Misra, M., y Drzal, L. T. (2005). *Natural fibers, biopolymers, and biocomposites*. CRC press.
- Molari, L., y García, J. J. (2021). On the radial variation of the transverse mechanical properties of bamboo. *Journal of Building Engineering*, 33, 101557.
- Pedersen, M. E. H. (2010). Good parameters for particle swarm optimization. *Hvass Lab., Copenhagen, Denmark, Tech. Rep. HL1001*, 1551–3203.
- Ramo, N. L., Puttlitz, C. M., y Troyer, K. L. (2018, 01). The development and validation of a numerical integration method for non-linear viscoelastic modeling. *PLOS ONE*, 13(1), 1-13.
- Ross, B. (2006). *Fractional calculus and its applications: proceedings of the international conference held at the university of new haven, june 1974* (Vol. 457). Springer.
- Sharma, B., Gatóo, A., Bock, M., y Ramage, M. (2015). Engineered bamboo for structural applications. *Construction and Building Materials*, 81, 66-73. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.01.077>
- Sharma, B., Harries, K. A., y Ghavami, K. (2013). Methods of determining transverse mechanical properties of full-culm bamboo. *Construction and Building Materials*, 38, 627-637. (25th Anniversary Session for ACI 228 – Building on the Past for the Future of NDT of Concrete) doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.07.116>
- Songsong, S., y Maosong, W. (2021). Evaluation of the applicability of different viscoelasticity constitutive models in bamboo scrimber short-term tensile creep property research. *Science and Engineering of Composite Materials*, 28(1), 363–371.
- Torres, L., Ghavami, K., y Garcia, J. (2007). A transversely isotropic law for the determination of the circumferential young's modulus of bamboo with diametric compression tests. *Latin American applied research*, 37(4), 255–260.
- van der Lugt, P., van den Dobbelsteen, A., y Janssen, J. (2006). An environmental, economic and practical assessment of bamboo as a building material for supporting structures. *Construction and Building Materials*, 20(9), 648-656. doi: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2005.02.023>

- Waltz, R. A., Morales, J. L., Nocedal, J., y Orban, D. (2006). An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical programming*, 107(3), 391–408.
- Yang, W., Zhao, K., Chen, H., Chen, S., y Ding, M. (2020). Experimental study on the creep behavior of recombinant bamboo. *Journal of Renewable Materials*, 8(3), 251.
- Young, W. C., Budynas, R. G., Sadegh, A. M., y cols. (2002). *Roark's formulas for stress and strain* (7.^a ed.). McGraw-Hill New York.
- Yu, Y., Jiang, Z., Fei, B., Wang, G., y Wang, H. (2011). An improved microtensile technique for mechanical characterization of short plant fibers: a case study on bamboo fibers. *Journal of Materials Science*, 46(3), 739–746.