



Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática

Jhonatan Elías Posso Torres

Código: 201604228

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática
2020



Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática

Jhonatan Elías Posso Torres

Código: 201604228

Ligia Amparo Torres Rengifo

Directora de trabajo de grado

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática

2020

Agradecimientos

A Dios primeramente y sobre todas las cosas por haberme permitido la oportunidad de llevar a cabo este trabajo de investigación con todo lo que implicaba, dándome la oportunidad de crecer a nivel personal, familiar, académico y espiritual.

A mi madre Luz Mary Torres Vanegas que ya no se encuentra en esta vida pero que fue el motor para emprender hace ya varios años este arduo y enriquecedor proceso que me ha permitido caminar por los nuevos caminos que han venido de la mano con este trabajo.

A mi padre José Alberto Posso Torres y hermanos que han sido mi apoyo y compañía en momentos de esfuerzo y dificultades.

A mi directora de trabajo de investigación Ligia Amparo Torres por su orientación y apoyo constante, quien con su experiencia me ha aconsejado oportunamente y encaminado con un altísimo nivel profesional en los aspectos esenciales de este proceso de formación.

Tabla de Contenidos

Índice de Ilustraciones	vi
Índice de Tablas	viii
Resumen.....	1
Introducción	2
Capítulo I. Aspectos generales de la investigación.....	5
1.1. Planteamiento del problema.....	5
1.2. Objetivos	12
1.2.1. Objetivo general.....	12
1.2.2. Objetivos específicos	12
1.3. Justificación	12
1.4. Antecedentes	16
Capítulo II. Marco conceptual de referencia	25
2.1. El desarrollo del pensamiento variacional y la modelación de relaciones funcionales en los documentos curriculares legales en Colombia.....	26
2.1.2. Estándares básicos de competencias en matemáticas	31
2.1.2.1. El desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional.....	32
2.1.2.2. La formación por competencias.....	34
2.1.2.3. Procesos generales en el desarrollo del pensamiento variacional.....	35
2.1.3. Derechos básicos de aprendizaje	37
2.2. Perspectiva didáctica: concepciones teóricas acerca del desarrollo del pensamiento variacional y la modelación de relaciones funcionales.....	40
2.2.1. El estudio de la variación a partir del enfoque covariacional	41
2.2.2. La función como covariación.....	42
2.2.2.1. El razonamiento covariacional.....	44
2.2.3. La modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje en la educación matemática	49
2.2.3.1. Algunas perspectivas de modelación en educación matemática.....	50
2.2.4. La modelación en la Educación Matemática Realista.	57
2.2.4.1. El proceso de matematización en la EMR	58
2.2.4.2. Principios de la EMR.....	59
2.2.4.3. La modelación y los modelos en la EMR	64

2.3. Perspectiva matemática: el surgimiento y desarrollo de los conceptos de función y función cuadrática	67
2.3.1. Un acercamiento a la historia de la construcción del concepto de función	67
2.3.1.1. Algunos obstáculos epistemológicos en el surgimiento de la noción de función....	67
2.3.1.2. El estudio de curvas a partir de ecuaciones	69
2.3.1.3. El estudio de curvas mecánicas.....	70
2.3.1.4. El análisis matemático	71
2.3.1.5. La definición de función en la Teoría de Conjuntos.....	72
2.3.2. La función en las matemáticas actuales	73
Capítulo III. La función cuadrática como covariación	88
3. 1 Sobre el diseño de la propuesta de aula	88
3.1.1. Situaciones y actividades	89
3.2. Acerca de la experimentación	97
3.2.1. Contexto de desarrollo	97
3.2.2. Aspectos del desarrollo de la implementación.....	98
3.3. Resultados y análisis de resultados	100
3.3.1. Análisis de resultados de la situación 1	101
3.3.2. Análisis de resultados de la situación 2	170
Capítulo IV. Conclusiones generales y reflexiones didácticas	260
4.1. Conclusiones generales.....	260
4.2. Algunas reflexiones didácticas	269
Referencias Bibliográficas	273
Anexo: La Propuesta de Aula	279

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2010)	54
Ilustración 2. Ciclo de modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009).....	54
Ilustración 3. Niveles de matematización según Freudenthal.....	61
Ilustración 4. Niveles de comprensión y cambios de “modelo de” a “modelo para”	65
Ilustración 5. Ejemplo de función cuadrática.	74
Ilustración 6. Problemas fundamentales del cálculo.....	75
Ilustración 7. Tipos de simetría de funciones.	76
Ilustración 8. Ejemplos de modelos matemáticos.....	77
Ilustración 9. El plano cartesiano y la circunferencia.	78
Ilustración 10. Definición de función real de variable real.....	80
Ilustración 11. Gráfica de una función.....	80
Ilustración 12. Representación esquemática de una función.	81
Ilustración 13. Definición de límite.	82
Ilustración 14. Esquema de las propiedades de una función cuadrática.	84
Ilustración 15. S1T1P3R1	105
Ilustración 16. S1T1P3R1	105
Ilustración 17. S1T1P4R1	107
Ilustración 18. S1T1P5R1	109
Ilustración 19. S1T1P5R2	109
Ilustración 20. S1T2P2R1	113
Ilustración 21. S1T2P2R2	113
Ilustración 22. S1T1P3aR1 y S1T1P3bR1.....	116
Ilustración 23. S1T2P4R1 y S1T2P5R1	119
Ilustración 24. S1T2P6aR1 y S1T2P6bR1.....	122
Ilustración 25. S1T3P2R1	127
Ilustración 26. S1T3P3aR1-S1T3P3bR1-S1T3P3cR1-S1T3P3dR1.....	131
Ilustración 27. S1T3R3cR1 y S1T3R3dR2.....	131
Ilustración 28. S1T3P4aR1	134
Ilustración 29. S1T3P4cR1	135
Ilustración 30. S1T3P5cR1	139
Ilustración 31. S1T3P6bR1	142
Ilustración 32. S1T3P6cR1	142
Ilustración 33. S1T3P7cR1	145
Ilustración 34. S1T3P7aR1-S1T3P7bR1-S1T3P7cR1.....	146
Ilustración 35. S1T3P8aR1	149
Ilustración 36. S1T4P2aR1-S1T4P2bR1-S1T4P2cR1.....	156
Ilustración 37. S1T4P3aR1 y S1T4P3bR1.....	159
Ilustración 38. S1T4P4R1	161
Ilustración 39. S1T4P5aR1 y S1T4P5bR1.....	163
Ilustración 40. S2T1P2bR1	174

Ilustración 41. S2T1P4aR1	178
Ilustración 42. S2T1P5aR3 y S2T1P5bR1.....	181
Ilustración 43. S2T1P5aR1 y S2T1P5bR1.....	182
Ilustración 44. S2T1P6aR1	186
Ilustración 45. S2T1P7R2.....	186
Ilustración 46. S2T1P8R1	189
Ilustración 47. S2T1P9aR1	191
Ilustración 48. S2T1P10a, S2T1P10b y S2T1P10c	194
Ilustración 49. S2T2P2aR1	204
Ilustración 50. S2T2P5R1	210
Ilustración 51. S2T2P8aR1	219
Ilustración 52. S2T2P8aR1	219
Ilustración 53. S2T2P8cR1	220
Ilustración 54. S2T3P2R1	226
Ilustración 55. S2T3P4R1	229
Ilustración 56. S2T3P6aR1	233
Ilustración 57. S2T3P9aR1	238
Ilustración 58. S2T3P9bR1	238
Ilustración 59. S2T3P10R1	240
Ilustración 60. S2T3P11R1	242

Índice de Tablas

Tabla 1 Acciones mentales del razonamiento covariacional	46
Tabla 2 Niveles de razonamiento covariacional	47
Tabla 3 Perspectivas en modelación matemática. Kaiser et al. (2007).....	51
Tabla 4 Estructura general de la propuesta de aula.....	90
Tabla 5 Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula.....	93
Tabla 6 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 1 (S1T1P1)	101
Tabla 7 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 2 (S1T1P2)	102
Tabla 8 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 3 (S1T1P3)	104
Tabla 9 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 4 (S1T1P4)	106
Tabla 10 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 5 (S1T1P5)	108
Tabla 11 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P1)	111
Tabla 12 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P2)	112
Tabla 13 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P3a)	114
Tabla 14 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P3b)	115
Tabla 15 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 4 (S1T2P4)	117
Tabla 16 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 5 (S1T2P5)	117
Tabla 17 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 6a (S1T2P6a).....	120
Tabla 18 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 6b (S1T2P6b)	121
Tabla 19 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 1 (S1T3P1)	124
Tabla 20 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 2 (S1T3P2)	126
Tabla 21 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3a (S1T3P3a).....	128
Tabla 22 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3b (S1T3P3b)	128
Tabla 23 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3c (S1T3P3c).....	129
Tabla 24 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3d (S1T3P3d)	129
Tabla 25 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4a (S1T3P4a).....	132
Tabla 26 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4b (S1T3P4b)	133
Tabla 27 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4c (S1T3P4c).....	133
Tabla 28 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4d (S1T3P4d)	134
Tabla 29 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5a (S1T3P5a).....	137
Tabla 30 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5b (S1T3P5b)	138
Tabla 31 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5c (S1T3P5c).....	138
Tabla 32 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6a (S1T3P6a).....	140
Tabla 33 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6b (S1T3P6b)	141
Tabla 34 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6c (S1T3P6c).....	141
Tabla 35 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7a (S1T3P7a).....	143
Tabla 36 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7b (S1T3P7b)	144
Tabla 37 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7c (S1T3P7c).....	144
Tabla 38 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8a)	148
Tabla 39 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8b)	148
Tabla 40 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 1 (S1T4P1)	152
Tabla 41 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2a (S1T4P2a).....	153

Tabla 42 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2b (S1T4P2b)	154
Tabla 43 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2c (S1T4P2c).....	154
Tabla 44 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 3a (S1T4P3a).....	157
Tabla 45 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 3b (S1T4P3b)	158
Tabla 46 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 4 (S1T4P4)	161
Tabla 47 Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 5 (S1T4P5)	162
Tabla 48 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 1 (S2T1P1)	171
Tabla 49 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 2a (S2T1P2a).....	172
Tabla 50 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 2b (S2T1P2b)	173
Tabla 51 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 3 (S2T1P3)	175
Tabla 52 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 4a (S2T1P4a).....	176
Tabla 53 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 4b (S2T1P4b)	177
Tabla 54 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5a (S2T1P5a).....	179
Tabla 55 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5a (S2T1P5b)	180
Tabla 56 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5c (S2T1P5c).....	180
Tabla 57 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 6a (S2T1P6a).....	184
Tabla 58 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 6b (S2T1P6b)	184
Tabla 59 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P7)	185
Tabla 60 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P8)	188
Tabla 61 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 9a (S2T1P9a).....	190
Tabla 62 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 9b (S2T1P9b)	190
Tabla 63 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10a (S2T1P10a).....	192
Tabla 64 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10b (S2T1P10b)	193
Tabla 65 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10c (S2T1P10c).....	193
Tabla 66 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 11 (S2T1P11)	195
Tabla 67 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 12a (S2T1P12a).....	197
Tabla 68 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 12b (S2T1P12b)	197
Tabla 69 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 1a (S2T2P1a).....	200
Tabla 70 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 1b (S2T2P1b)	200
Tabla 71 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 2a (S1T2P2a).....	202
Tabla 72 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 2b (S1T2P2b)	203
Tabla 73 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 3a (S2T2P3a).....	205
Tabla 74 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 3b (S2T2P3b)	206
Tabla 75 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4a (S2T2P4a).....	207
Tabla 76 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4b (S2T2P4b)	207
Tabla 77 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 5 (S2T2P5)	210
Tabla 78 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 6a (S2T2P6a).....	212
Tabla 79 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 6b (S2T2P6b)	213
Tabla 80 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 7 (S2T2P7)	215
Tabla 81 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 8a (S2T2P8a).....	216
Tabla 82 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4b (S2T2P8b)	217
Tabla 83 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 8c (S2T2P8c).....	217
Tabla 84 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 1a (S2T3P1a).....	223

Tabla 85 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 1b (S2T3P1b)	223
Tabla 86 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 2 (S2T3P2)	225
Tabla 87 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 3a (S2T3P3a).....	227
Tabla 88 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 3b (S2T3P3b)	227
Tabla 89 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 4 (S1T3P4)	229
Tabla 90 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 5 (S2T3P5)	231
Tabla 91 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 6a (S2T3P6a).....	232
Tabla 92 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 6b (S2T3P6b)	232
Tabla 93 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 7 (S2T3P7)	234
Tabla 94 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8)	236
Tabla 95 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 9a (S2T3P9a).....	237
Tabla 96 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 9b (S2T3P9b)	237
Tabla 97 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 7 (S2T3P10)	239
Tabla 98 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 11 (S2T3P11)	241
Tabla 99 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 1 (S2T4P1)	244
Tabla 100 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 2 (S2T4P2)	246
Tabla 101 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 3 (S2T4P3)	248
Tabla 102 Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 4 (S2T4P4)	249

Resumen

En el presente trabajo se estudia la variación, de acuerdo con el enfoque covariacional, asociada a la función cuadrática, característica de situaciones de la vida cotidiana como la actividad deportiva, económica y proyectos productivos escolares, las cuales al ser estudiadas facilitan la movilización de aspectos del razonamiento covariacional, como parte del pensamiento variacional, presentes en procesos de modelación, que pueden ser identificados y caracterizados. Para esto, se elaboraron y se trabajaron dos situaciones en contexto que condensan aportes de la perspectiva curricular, la perspectiva didáctica y la perspectiva disciplinar (matemáticas). Luego de la implementación de la propuesta de aula con estudiantes de grado noveno, se tipificaron las respuestas dadas, posibilitando el estudio de procesos de modelación y la caracterización de aspectos del razonamiento covariacional, basado en una rejilla de análisis que articula el proceso de modelación de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1985) y el marco conceptual del Razonamiento Covariacional (Carlson et. Al, 2003). Como conclusión, se pudo verificar que es posible estimular el pensamiento variacional a partir del estudio de la variación vinculada a la función cuadrática, como una relación de dependencia, y desarrollar procesos de modelación que permitan una mejor conceptualización de la función, en los cuales se manifiesta el razonamiento covariacional al coordinar las imágenes de dos variables que cambian de manera conjunta, y que es posible caracterizarlo de acuerdo con las acciones mentales evidenciadas en los registros obtenidos para así determinar niveles de razonamiento.

Palabras clave: Variación, covariación, razonamiento covariacional, modelación, función, función cuadrática.

Introducción

En la literatura analizada para la puesta en marcha de la presente investigación pudo observarse que una de las condiciones necesarias para el estudio de las matemáticas es la formación del *pensamiento matemático*; aspecto que se hizo evidente de manera especial al estudiar los documentos curriculares del sistema educativo colombiano, en tanto que en estos se promueve el fortalecimiento y desarrollo del pensamiento matemático y, con este, del *pensamiento variacional*, al ser considerado este último como uno de sus componentes fundamentales y como pieza esencial en la enseñanza de las funciones.

No obstante, aún cuando el énfasis sobre el estudio del pensamiento matemático es bastante considerable, se ha podido también comprobar mediante el análisis de resultados en pruebas nacionales e internacionales que el nivel de apropiación de la materia en los entornos escolares es bastante deficiente, y que a raíz de tal dificultad se ve también afectada la apropiación, ya en la educación superior, de las habilidades necesarias para sobrellevar de un modo óptimo la asignatura de cálculo.

Aunado a lo anterior, con este estudio se ha logrado comprender de igual modo la trascendencia del desarrollo de habilidades para llevar a cabo procesos de modelación, lo que permite identificar en el estudiante un nivel de comprensión de la misma situación y lograr una representación matemática acorde y potente del objeto o procedimiento matemático presente y que posibilite su estudio.

Dados estos problemas, para el desarrollo de este texto se plantean algunos interrogantes sustanciales que fijan el desarrollo del mismo, por ejemplo: *¿Es posible articular de manera efectiva la perspectiva curricular, la didáctica y la disciplinar en una propuesta de aula para el aprendizaje de la función cuadrática? y ¿qué aportes de estas perspectivas son propicios para la*

elaboración de una propuesta de aula que promueva el desarrollo del pensamiento variacional?

Estas cuestiones direccionaron el presente ejercicio de investigación hacia la conformación de una propuesta de aula para el grado 9º que permitiera el desarrollo del pensamiento variacional a partir del estudio de la variación asociada a la función cuadrática, considerando las relaciones funcionales como dependencia entre las magnitudes presentes en un contexto, y finalmente hacia la consolidación de la pregunta central que se espera responder en adelante, a saber: *¿Qué aspectos del pensamiento variacional se desarrollan en estudiantes de grado noveno a través de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática?*

Lo realizado se expone a través de varios capítulos, así:

En el primer capítulo se abordan los planteamientos y problemáticas que dan origen a este trabajo, para lo cual se plantean posteriormente los objetivos que orientarán el desarrollo y lo esperado. Después, se presentará la búsqueda y análisis de la literatura de investigación que trata los aspectos relacionados con este trabajo y que son punto de partida dadas las cuestiones que allí se han abordado y las recomendaciones a las nuevas investigaciones.

En el segundo capítulo se analiza lo correspondiente al estudio de la variación y las relaciones funcionales a partir de la perspectiva curricular en Colombia, la perspectiva didáctica y sus aportes a nivel nacional e internacional y la perspectiva disciplinar, al considerar la relevancia de la historia y la epistemología de las matemáticas. En cada perspectiva se hace especial énfasis en aspectos claves de la variación asociada a la enseñanza de las funciones como relaciones de dependencia, considerando el proceso de modelación como fundamental en la comprensión del objeto matemático.

En el tercer capítulo se consolidan los aportes de las tres perspectivas de estudio

desarrolladas en el capítulo anterior y se da cuenta de la forma cómo está constituida la propuesta de aula y lo que se pretende con esta; además, se especifican las características de la población donde se lleva a cabo la implementación. En este capítulo también se desarrolla el análisis de los resultados de la propuesta, la cual está constituida por dos situaciones problema y cada una a su vez conformada por tres tareas.

Para cerrar, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones obtenidas del análisis de resultados y del trabajo, y posteriormente se expresan algunas recomendaciones didácticas, todo esto en concordancia con los objetivos generales y específicos planteados al inicio de la investigación.

Capítulo I. Aspectos generales de la investigación

Este capítulo comprende, en primer lugar, la presentación del planteamiento del problema, el cual surge luego de identificar en diferentes investigaciones algunas dificultades respecto a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, y en especial del concepto de función. En segundo lugar, se plantean los objetivos que permitirán el diseño y construcción de una propuesta para responder a la pregunta sobre cómo abordar y proponer una nueva alternativa educativa que permita superar las dificultades identificadas en la revisión documental. Finalmente, en tercer lugar, se revisan distintos resultados de investigaciones que anteceden y justifican la necesidad de proponer estrategias didácticas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático a partir del componente variacional.

1.1. Planteamiento del problema

El desarrollo del pensamiento variacional es un propósito fundamental en el currículo escolar de matemáticas durante la educación básica y media en Colombia, sin embargo los resultados de algunas investigaciones en educación matemática dan cuenta de que, en primer lugar, en la enseñanza escolar no suelen emplearse estrategias didácticas que susciten el estudio de la variación como una forma de aproximación a la noción de función; y en segundo lugar, que a los estudiantes se les dificulta el análisis de la variación y de las relaciones funcionales¹ presentes en una situación propuesta.

¹ Comprendiendo la función como aquella que permite atrapar matemáticamente la covariación entre cantidades de magnitud a través de sus registros de representación (Posada y Villa, 2006) y el estudio de las funciones como un elemento fundamental para potenciar el pensamiento Variacional (Villa, 2008).

En una investigación llevada a cabo por Gonzales y Grueso (2016) al respecto de lo anterior, estos desarrollaron una propuesta para la enseñanza de la función como covariación que arrojó como resultado la identificación de diversas dificultades en los estudiantes para coordinar los cambios en cada variable y los cambios simultáneos de dos variables relacionadas, lo que afectó directamente poder describir y comprender la razón de cambio de funciones trabajadas. En su propuesta, teniendo como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento variacional el análisis las relaciones funcionales presentes, atendiendo a la covariación, los investigadores plantearon a un grupo de estudiantes el estudio de tres situaciones problema en un contexto dinámico.

Estas dificultades para describir la variación y la covariación presente en relaciones funcionales en contextos dinámicos dan cuenta de que, en ciertos tipos de actividades trabajadas en clase, es posible avanzar en algunas acciones y comportamientos asociados al pensamiento variacional, pero que desarrollar otras de mayor categoría en el pensamiento variacional es más complejo cuando se pretende coordinar la razón de cambio promedio y en mayor medida la razón de cambio instantánea, por tanto, terminan afectándose algunas habilidades para la comprensión de conceptos matemáticos de mayor complejidad.

Carlson (1998), Monk y Nemirovsky (1994) & Thompson (1994^a) (citados en Carlson et al., 2003, p. 122-123) demostraron en sus investigaciones que incluso estudiantes de nivel de pregrado tienen dificultad para analizar y modelar relaciones funcionales en situaciones que involucran variación continua entre variables; además, según Kaput (1994) y Rasmussen (2000) (citados en Carlson et al., 2003, p. 123) “esta habilidad es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos” y comprender otros conceptos matemáticos, por ejemplo, los relacionados con el cálculo. En su investigación, Carlson et al., (2003) evidenciaron, cuando un grupo de

estudiantes de pregrado analizaba la covariación, que era usual que los estudiantes se encontraran con dificultades para “construir imágenes de una razón que cambia de manera continua y, en particular, dificultades para representar e interpretar imágenes de una razón decreciente o creciente para una situación física” (p. 147), lo que, según esta investigación, está asociado directamente con el razonamiento covariacional.

Por su parte, a partir de la perspectiva variacional del estudio de la función lineal, Posada y Villa (2006) identificaron que varios estudiantes de nivel escolar participantes en una investigación exhibieron dificultades en el conocimiento y comprensión de la representación gráfica de la variación propia de funciones lineales, lo cual afectó la comprensión de características variacionales inherentes a las situaciones estudiadas. En relación con esto, la captación y estudio de la variación y la covariación se debe poder realizar en el registro gráfico y en todos los registros de representación de una función asociada a una situación, o como lo plantean Dolores y Salgado (2009, p. 72) al analizar la representación gráfica de la variación relativo a funciones: “la graficación covariacional requiere necesariamente esa transición”, refiriéndose a la posibilidad de identificar y relacionar la información entre un registro y otro.

De acuerdo con la literatura relacionada con esta materia, el estudio de la variación está asociado a procesos de modelación en los cuales también se han registrado dificultades, algo que también afecta el pensamiento variacional dado que la captación y modelación de la covariación son objeto del pensamiento variacional (Vasco, 2003). A su vez, Bosch et al., (2010) plantean que la modelación debe estar integrada a cualquier actividad de estudio de matemáticas, pues es a través de este proceso que la enseñanza de las matemáticas logra ser de tipo funcional y no meramente formal. En su investigación, estudian lo indispensable de vincular la actividad de modelación al momento en que se está conociendo, por parte del estudiante, un objeto

matemático en una situación significativa y contextualizada para el aprendizaje: “En este sentido, las cuestiones problemáticas «vivas» deben (re)situarse en el origen y núcleo de la actividad matemática cuyo estudio va a requerir iniciar un proceso de modelización matemática para poder aportar una respuesta” (Bosch et al., 2010, p. 560-561).

De acuerdo con la propuesta de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), en la etapa escolar el estudio de la variación en situaciones en contexto es fundamental para la comprensión de las funciones, las cuales son enseñadas con diferentes estrategias. La función cuadrática es una de las que más se trabaja en los últimos años de la educación escolar, por tanto, las dificultades también han estado vinculadas a esta, evidenciándose que, por ejemplo, los estudiantes no comprenden todas sus propiedades básicas ya que la mayoría de las veces se les ha enseñado centrando la atención casi de manera exclusiva en la construcción de gráficas a partir de tablas dadas, lo cual, según Arboleda y Meneses (1996), obstaculiza la comprensión posterior en problemas de aplicación (citados en Henao y Vanegas, 2013, p. 2885).

En relación con lo anterior, también es posible identificar que en el caso de la enseñanza de las funciones se han registrado dificultades relacionadas con el dominio y comprensión de modelos o expresiones analíticas, de tal manera que, por un lado, no se identifican o comprenden las relaciones existentes entre parámetros y variables y, por el otro, no se reconocen los componentes y características del modelo en cuestión, los cuales permitan determinar una solución a la situación trabajada. Por su parte, Chevallard (1984, 1989), Bolea (2002) y Sutherland et al., (2000) revelan en sus investigaciones esta ausencia del “juego” entre parámetros y variables, identificando que hay estudiantes que realizan cálculos con ecuaciones de primer grado, segundo grado o con funciones, los cuales se limitan a procedimientos de

despeje o cálculo de la variable dependiente, demostrando también complicaciones al tratar de identificar o establecer una relación funcional para una variable indicada (citados en Ruiz et al., 2007a, p. 1). Así, al no presentarse un correcto trabajo con las variables, además de la manipulación de modelos algebraicos y el dominio apropiado del juego o intercambio entre parámetros y variables, no se alcanza un buen acercamiento a la comprensión de la noción de función, incluso se dificulta “el estudio de familias de funciones y el uso de estas familias como modelos de relaciones entre magnitudes” (Ruiz; Bosch, y Gascón, 2007a, p. 1).

De otro lado, en el análisis de estrategias de los docentes en el aula, Torres, Valoyes y Malagón (2002) identifican que en varios casos de la enseñanza del álgebra escolar las propuestas educativas giran en torno a la revisión de ejercicios elementales de tratamiento mayormente aritmético y con poco énfasis en el dominio de procesos de modelación dentro del uso de modelos en cuestión, promoviendo la comprensión de esta especialidad de las matemáticas como procedimientos exclusivamente algorítmicos e iterativos, lo cual obstaculiza el desarrollo del pensamiento variacional en los casos que implica solucionar otro tipo de problemas, como es el caso de los escritos en lenguaje natural y que implican mayor nivel de complejidad; en estos casos, el álgebra no se enseña a través de una progresión lenta sino como mecanismo manipulador enfatizado en el cálculo (Castro, 2012).

Al respecto, Rojas et al., (1999) concluyen que algunos estudiantes que se ejercitan exclusivamente en este tipo de estrategias de estudio de ecuaciones y funciones, muestran un nivel básico de comprensión del álgebra escolar y lo concerniente a las relaciones funcionales, incluso después haber transcurrido tiempo y clases en grados superiores de la educación escolar, exhibiendo dificultades para comprender la semántica y la sintaxis de las actividades desarrolladas, lo que también ocasiona que su avance en el estudio y comprensión de procesos

más complejos asociados al pensamiento variacional no se lleve a cabo de manera eficaz.

Lo presentado anteriormente no solo da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes durante el estudio de la variación, también permite proponer un escenario de reflexión acerca de las estrategias metodológicas de clase llevadas al aula, incluso las que se presentan en recursos didácticos como los libros de textos escolares de matemáticas que usan los estudiantes.

En esa línea, Andrade (1998) concluyó que algunos libros de texto ilustran la variable como una letra que representa una cantidad desconocida o un número generalizado, y que de esta manera no se comprende la relevancia de la variable, producto de la ruptura que hay del paso de la aritmética al álgebra, entendiendo que “para lograr la variable fue necesario el uso de la letra como incógnita y luego como cantidades generales, antes de pasar a representar la variación” (p. 248). En relación al estudio de las funciones y de la variación, esta se presenta en un apartado al final del libro sin ilustrar de manera apropiada características de la variación, ni la explicación de la forma cómo se puede identificar o representar en los diferentes registros de representación.

En consecuencia, este tipo de presentación en textos también incide en la forma como los estudiantes asimilan la noción de variable, pues no evidencian las relaciones entre magnitudes y los procesos de variación y covariación presentes; al respecto, Castro (2012) afirma que las primeras aproximaciones escolares por parte de estudiantes donde no se entiende el verdadero significado de las letras y los símbolos algebraicos empleados en modelos, pueden entorpecer la construcción apropiada del concepto de variable.

Por su naturaleza y características dificultades como las anteriormente expuestas pueden unificarse para reflexionar y plantear metodologías o estrategias didácticas de aula que incentiven y fortalezcan el pensamiento variacional en los estudiantes para que sean empleadas

por los docentes de matemáticas. Dicho trabajo supone, entonces, la comprensión de las características, procesos, comportamientos y diferentes elementos que componen el pensamiento variacional, lo que también implica la posibilidad de facilitar el desarrollo de procesos como la modelación de relaciones funcionales, mientras se estudia la variación y el cambio presente en la dependencia entre magnitudes de una situación, para que de esta manera el estudiante pueda avanzar en el conocimiento de las propiedades de las funciones de cualquier tipo, y, para el caso que se viene trabajando, la función cuadrática especialmente².

De manera consecuente, las problemáticas anteriormente expuestas suscitan la siguiente pregunta: *¿Qué aspectos del pensamiento variacional se desarrollan en estudiantes de grado noveno a través de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática?*

Esta pregunta surge con el propósito de retomar algunas de las recomendaciones vistas en la literatura analizada y llevar a cabo una práctica en la cual se pueda profundizar en la identificación y caracterización de aspectos clave del pensamiento variacional en estudiantes de secundaria cuando llevan a cabo el análisis de la variación y el desarrollo de procesos como la modelación de situaciones problema planteadas, principalmente en el contexto de las funciones cuadráticas, comprendiendo la fortaleza del análisis de situaciones problema que implican la variación, para la comprensión y apropiación del concepto de función cuadrática en la escuela.

² En el marco de este trabajo se considera la función cuadrática, de acuerdo con un apartado anterior, por ser una de las que más comúnmente se estudian en la etapa escolar, por posibilitar el estudio de la variación en contextos del mundo real, lo cual también permite obtener conclusiones que inciden en la situación estudiada, como la optimización; además, porque al prestar atención a la razón de cambio en esta función es posible promover procesos de generalización que faciliten la comprensión de las propiedades de otras funciones, sean polinómicas o de otra clase.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Identificar y caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional que se movilizan a través de la implementación de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática como covariación, en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa (en adelante IE) El Hormiguero.

1.2.2. Objetivos específicos

- Identificar aportes teóricos y metodológicos en la investigación en educación matemática en torno a la modelación de fenómenos de variación a través de la función cuadrática como covariación, a partir de las perspectivas curricular, didáctica y matemática.
- Articular una propuesta de aula que involucre la modelación a través de la función cuadrática de fenómenos de variación y los resultados de los estudios de referentes curriculares, didácticos y matemáticos sobre la problemática.
- Caracterizar aspectos del pensamiento variacional desarrollados en estudiantes de grado noveno de la IE El Hormiguero en el proceso de modelación de fenómenos que impliquen covariación a través de la función cuadrática.

1.3. Justificación

En el espectro de las investigaciones en educación matemática se han desarrollado marcos teóricos y propuestas metodológicas con diferentes enfoques que permiten caracterizar aspectos de la comprensión y el aprendizaje de saberes matemáticos en estudiantes de distintos niveles educativos. En relación con lo anterior, se referencian algunas investigaciones que dan cuenta de la pertinencia de la propuesta de este trabajo en relación a la necesidad de potenciar el

pensamiento variacional a partir de la modelación de fenómenos que implican variación asociada a la función cuadrática.

Se inicia entonces mencionando que para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes que cursan la educación básica y media es sustancial llevar a cabo un estudio de las funciones que involucre el análisis de la variación y el cambio de las cantidades implicadas en una situación dinámica (Vasco, 2003; Villa, 2012). En concordancia con lo anterior, Vasco (2003) expresa que el desarrollo de pensamiento variacional no es únicamente la memorización de fórmulas que se emplean para despejar valores en diversos ejercicios, tampoco dibujar gráficas, ya que incluso esto puede distraer y obstaculizar este pensamiento; es indispensable captar qué varía con qué, cómo lo hace, entre otros detalles.

El estudio de las funciones en general, y, de las funciones cuadráticas, en particular, a partir de la modelación de situaciones dinámicas que implican variación permite alcanzar mayor comprensión y dominio de la información presente en el contexto, la relación entre los diferentes registros de representación de la información, las relaciones entre los elementos de la expresión analítica y lo que representan. Al respecto, se resalta que el proceso de modelación es objeto del pensamiento variacional y que cumple un papel fundamental en el análisis de una situación o fenómeno de la realidad cuando están implicadas cantidades que varían, covarían y las que no (MEN, 2006; Vasco, 2003).

En un estudio realizado por Azcárate y Deulofeu (1996) en torno al desarrollo de la función, dichos investigadores identificaron que en un momento de la historia de las matemáticas se llevó a cabo el tratamiento de algunas situaciones dinámicas con funciones a partir de la dependencia entre variables, periodo en el cuál los babilonios, los griegos, Oresme, Newton, entre otros, desarrollaron importantes aportes a las matemáticas y propiciaron, bajo nuevos

enfoques, diferentes teorías, como es el caso del estudio de las funciones en el análisis matemático y la comprensión y definición de las funciones en la Teoría de Conjuntos, en la cual la perspectiva que se privilegia es la correspondencia entre cantidades.

De acuerdo con lo anterior, Vasco (2003) señala que hay algunas maneras de estudiar las funciones en el ámbito escolar que no son las más favorables para los estudiantes, expresando, por ejemplo, que la enseñanza de las funciones principalmente con un enfoque de correspondencia se puede volver poco atractivo durante las actividades educativas,

[...] las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada. Esto estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada. (Vasco, 2003, p. 5)

De acuerdo con lo anterior, se subraya la importancia de enseñar a los estudiantes a analizar lo que cambia, reproducir patrones y también identificar la dependencia e independencia de variables en situaciones dinámicas, siendo una aproximación a la noción de función como dependencia entre magnitudes: para lograr esto, el estudiante no debe ver sólo la variación, sino que se le debe educar para que vaya un poco más a fondo y pueda analizar la covariación entre cantidades, lo anterior haciendo eco de la definición de pensamiento variacional en tanto que en esta se sostiene que se pueden producir sistemas mentales donde las variables covarían al igual que en el estudio de subprocesos recortados de la realidad con cantidades de la misma o distinta magnitud. De esta manera “El objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud” (Vasco, 2003, p. 6).

De acuerdo a lo mencionado, es entonces posible concluir que existe la posibilidad de vincular de manera válida y coherente el estudio de la función cuadrática con marcos teóricos para el desarrollo de procesos de modelación al estudiar este objeto matemático, considerando

con especial atención la covariación presente entre cantidades vinculadas en una situación problema que implica fenómenos dinámicos.

De otro lado, centrados en la función, se reconoce la relevancia y trascendencia de este objeto matemático en la estructura matemática. Además, dadas las características del grupo etáreo del grado al que se dirige la propuesta, se identifica la necesidad de consolidar una estrategia que favorezca la comprensión de las relaciones funcionales para el estudio posterior del cálculo, y dado el enfoque covariacional de las situaciones trabajadas, que favorezca así mismo el fortalecimiento del estudio de las relaciones funcionales como relaciones de dependencia y no exclusivamente como relaciones de correspondencia según la definición de función en la teoría de conjuntos.

La propuesta de intervención de aula articula los elementos teóricos tomados de los referentes teóricos y, de acuerdo con estos, presenta una estructura lógica y coherente que posibilita llevar a cabo la caracterización de las actividades y acciones llevadas a cabo por los estudiantes que las ejecutan. Desarrollar todo el proceso de indagación y análisis es el ejercicio de una práctica investigativa pertinente, seria y ajustada a las necesidades y propósitos en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, expresada en el diseño de la propuesta, el diseño de la rejilla de análisis, el análisis de las respuestas, la caracterización de las mismas y la caracterización y clasificación de los aspectos de razonamiento covariacional de los estudiantes; este procedimiento con el fin de fortalecer la actividad investigativa del docente investigador, describir los alcances y la efectividad de la propuesta en la enseñanza de la función cuadrática a partir de situaciones en contextos, fortalecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra escolar y generar nuevas reflexiones y propuestas al campo de investigación.

1.4. Antecedentes

En la investigación en educación matemática se han realizado estudios acerca de distintas estrategias para el desarrollo del pensamiento variacional, con distintos enfoques de referencia, de los cuales se ha podido comprender la importancia de direccionar la enseñanza del concepto de función a partir de una perspectiva variacional, en la cual se considere, por ejemplo, respecto a la función cuadrática, la forma como se presenta en situaciones dinámicas y los procesos de modelación que se pueden llevar a cabo en el estudio de la covariación de las magnitudes relacionadas.

Un ejemplo de lo anterior lo desarrolló Villa (2012) tomando como referencia el marco conceptual del razonamiento covariacional de Carlson et al., (2003), el cual realizó un estudio de caso para describir cómo un estudiante razona covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación, asociadas a funciones cuadráticas. El autor resalta el valor de la percepción, la identificación y la caracterización de la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento variacional, además, apoyándose en documentos curriculares del MEN, indica que uno de los propósitos de las matemáticas en la educación básica es el desarrollo de este componente del pensamiento matemático, el cual pone su acento en el estudio sistemático de la variación, la covariación y la correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente.

Para llevar a cabo su investigación, Villa diseñó una secuencia de actividades para desarrollar una línea convergente de indagación, esto implicó realizar preguntas en torno al *qué*, *cómo*, *cuánto* del cambio de las cantidades y los cambios mismos que intervienen en la situación; y llevó a cabo una triangulación continua de las fuentes de información, como las descripciones del estudiante, las producciones escritas y los referentes teóricos que aducen acciones mentales en los estudiantes para determinar niveles de covariación.

Entre sus conclusiones, el autor confirma que el razonamiento covariacional, entendido como un proceso que evoluciona en los distintos niveles del marco conceptual, no se desarrolla en forma lineal, sino que se presenta en forma recursiva, también, que algunos estudiantes pueden aproximarse a una interpretación variacional de las concavidades sin que ello exija un estudio previo del cálculo diferencial, y que es importante promover el uso de las diferentes representaciones y actividades experimentales como el uso de un software dinámico y el diálogo a través de preguntas. Así mismo, que las traslaciones entre los contextos de representación pueden posibilitar avances en los niveles de razonamiento covariacional en los estudiantes, y que el estudio de la función cuadrática a partir de la perspectiva variacional supone avances significativos en comparación con la secuencia de enseñanza tradicional (definición-propiedades-procedimientos-aplicaciones), en tanto que esta última, aunque permite abordar algunas características, en la mayoría de los casos estas carecen de sentido en un contexto de variación.

En esta misma línea, Gonzáles y Grueso (2016) desarrollaron una propuesta de aula que pretendía potenciar el pensamiento variacional a través del estudio de la variación y el cambio a través de tareas que implicaban la covariación. En la propuesta, fundamentada en el enfoque teórico de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999), los estudiantes trabajaron situaciones problema a partir de eventos dinámicos en los que estaba implícita la necesidad de analizar la covariación entre cantidades de magnitudes. Con los resultados de este trabajo identificaron y caracterizaron rasgos del razonamiento covariacional evidenciados en ellos, de acuerdo con el marco teórico de Carlson et al., (2003) de los niveles de razonamiento covariacional.

En sus conclusiones, los autores reafirmaron que “los fundamentos para la construcción del concepto de función obedecen a la asociación y estudio de fenómenos de cambio” y que “por

lo tanto, este concepto debe estar soportado en nociones de variable, de dependencia, de transformación y de variación” (González y Grueso, 2016, p. 241). Además, también identificaron que para el estudio de tareas de covariación es necesario el enfoque dinámico para el aprendizaje de las funciones, y que el marco conceptual propuesto por Carlson et al., (2003) es un marco teórico que favorece el diseño de tareas, análisis del razonamiento covariacional y clasificación de procesos realizados por los estudiantes.

Otra de las conclusiones obtenidas, fue los avances importantes en el razonamiento covariacional de los estudiantes en la medida que resolvían las preguntas para el acercamiento a la noción de función y los conceptos relacionados con esta como variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. Además, los estudiantes se pudieron clasificar en los distintos niveles de razonamiento covariacional descritos en el marco conceptual de Carlson de acuerdo con la comprensión del comportamiento de los cambios en lo cualitativo y lo cuantitativo, exceptuando el nivel cinco al no haberse propuesto el trabajo de la razón de cambio instantánea.

Por su parte, Insuasty (2004) en una investigación analizó lo relacionado con el estudio de las funciones, haciendo énfasis en la conceptualización y manejo del concepto de parámetro y de las familias de funciones cuadráticas. En ésta señala que tradicionalmente el estudio de las funciones en la educación escolar se ha limitado a la tabulación de datos, su representación gráfica en el plano cartesiano y su expresión analítica, pasando por alto procesos más complejos y relaciones abstractas en relación con este objeto matemático; y concluye que para el estudio de las funciones se deben reconocer e interpretar cada una de sus representaciones tabular-analítica-gráfica-verbal, además, establecer relaciones con grado de complejidad entre estas.

Un aspecto clave que se debe desarrollar en el estudio de las funciones es promover el reconocimiento de las familias de funciones y sus representaciones, lo cual implica el tratamiento de parámetros y su interrelación con otras representaciones. En relación a lo anterior, Insuasty plantea que para lograr el aprendizaje es necesario que los estudiantes conciban la función misma como objeto (estructuralmente), más que como proceso (operacionalmente), y para esto es necesario poner en juego concepciones estructurales. Para abordar la situación, la autora propone una prueba constituida por situaciones problema para que los estudiantes desarrollen tratamientos con su respectivo análisis reflexivo en relación a los efectos de las variaciones de los parámetros como generadores de las familias de funciones.

En su investigación, Insuasty pudo concluir que los estudiantes de grado décimo y undécimo que participaron en la prueba mostraron dificultades con el paso del lenguaje gráfico al lenguaje analítico. Para la superación de lo anterior, sugiere que se fortalezca el trabajo o enseñanza de funciones en relación a fenómenos cotidianos y con una amplia y clara relación de los distintos sistemas de representación. También recomienda el uso de calculadoras graficadoras ya que son valiosas al momento de la visualización de la función.

En otra de sus investigaciones, Insuasty (2014) estudia la importancia de la modelización de situaciones para el estudio, comprensión y aprendizaje de la función cuadrática. Para esto, combina fundamentalmente dos referentes teóricos: la Teoría Antropológica de lo Didáctico – TAD–, a partir de la cual establece el estudio de la función cuadrática como instrumento de modelización, y el Enfoque Instrumental, para comprender la integración de las TIC y los recursos pedagógicos que hay a disposición de los profesores para la representación, manipulación y estudio de las funciones cuadráticas. De acuerdo con los referentes se selecciona

y se adapta una secuencia de tareas a partir de un estudio de caso como metodología de investigación.

Insuasti toma la Orquestación Instrumental (Trouche, 2005) como sustento teórico para hacer uso del recurso tecnológico en la práctica pedagógica, en este caso la plataforma PhET del Portal de la Universidad de Colorado. A partir del Enfoque Instrumental (Guin y Trouche, 2007) se pretende hacer uso del simulador como un recurso que potencia la actividad matemática del estudiante y realizar procesos de modelación de situaciones de movimiento al estudiarse como praxeologías.

Finalizando su investigación, Insuasti concluye que es importante y enriquecedor el uso de recursos TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados al concepto de función, ya que la interacción con dichos medios dinamiza la participación de los estudiantes y la apropiación de los conocimientos relativos a la materia de estudio. De igual modo, observa la autora, puede notarse que la utilización del recurso electrónico permitió generar técnicas para el manejo de sistemas de representación, como la lectura de puntos sobre la gráfica, plantear un sistema de ecuaciones, identificar características y elementos de la representación gráfica de una función cuadrática y la identificación de una familia de funciones al variar parámetros. También los estudiantes pudieron llegar a justificaciones apropiadas a las tareas gracias a la combinación de recursos tecnológicos, papel y lápiz.

Por otra parte, Henao y Vanegas (2013) diseñaron una propuesta metodológica para promover el estudio de la función cuadrática a partir de un enfoque variacional, la cual estaba constituida por tres tareas en las cuales se desarrollaron procesos de modelación en el marco de la Educación Matemática Realista –EMR–. Con esta propuesta los autores atendían a la recomendación del MEN de hablar en los documentos curriculares acerca de la importancia de

emplear la resolución de problemas y desarrollar procesos de modelación de situaciones del mundo real, comprendiendo la función cuadrática por su papel en la modelación de fenómenos físicos, además, con el propósito de “acercar a los estudiantes hacia una mejor conexión entre el mundo matemático y el mundo real” (p. 2885).

Finalizando su trabajo, los autores resaltan lo potente del marco teórico de la EMR para promover los procesos de modelación e identificar los niveles alcanzados por los estudiantes al desarrollar las tareas y para materializar nuevas estrategias de intervención en el aula, todo esto considerando la importancia de poder presentar en las actividades situaciones que estén planteadas en un contexto que facilite el acercamiento del grupo de estudiantes para, posteriormente, llegar a la conceptualización de los objetos matemáticos empleados.

Bajo otra mirada, Hurtado y Zúñiga (2011) tuvieron en cuenta principalmente el tratamiento que dan los textos de enseñanza del concepto de función cuadrática y el desarrollo del pensamiento variacional, tomando como metodología de análisis la Teoría Antropológica de lo Didáctico –TAD– de Chevallard (1996, 1999). Bajo esa consideración, los investigadores se focalizaron por ejemplo en la incidencia real que tienen los libros para la enseñanza de las matemáticas en las instituciones educativas, especialmente sobre el acercamiento al concepto de función cuadrática; para ello se analizaron algunos textos escolares con el propósito de identificar en ellos si se reconoce la relevancia de los conocimientos provenientes del saber sabio, haciendo un análisis histórico-epistemológico en el desarrollo del saber, y también observando en forma detallada la relación con el saber/enseñar en las aulas, tomando como referencia para esta situación *la transposición didáctica* (Chevallard, 1998).

Después de realizado el análisis de textos, Hurtado y Zúñiga concluyeron que en algunos textos se daba mejor tratamiento al concepto de función pues en estos se buscaba explicitar los

elementos que la caracterizan y los conjuntos de números en los que se da, a diferencia de otros que privilegian los ejemplos para mostrar cómo se construye la gráfica y las características del polinomio que define la función. Así mismo, se observó que ciertos libros planteaban actividades que integraban conceptos propios del pensamiento variacional como constante, variable, función, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, en contextos cotidianos y de la geometría, además, el uso de diferentes registros de representación para evidenciar la relación de dependencia entre las variables, que es característico de la noción de variación y cambio. Sin embargo, también se identificaron dificultades pues no se avanzó al nivel de poder trabajar la forma como se da la variación de los elementos del conjunto de llegada antes o después del punto máximo o mínimo, dificultando el estudio formal de la función cuadrática.

Continuando con las conclusiones de Hurtado y Zúñiga, se tiene también que hubo textos en los que pudo evidenciarse, en la unidad correspondiente al trabajo del pensamiento variacional, una profunda carencia de actividades que permitieran que se llevara a cabo el razonamiento y el proceso de modelación de manera ligada, desarrollando entonces tareas agrupadas en procesos como la comunicación, resolución de problemas y ejercitación de algoritmos. Finalmente, en su investigación los autores observaron también que en una lección dedicada solo al tema de función cuadrática se hicieran explícitos la mención de conceptos como variable, función, dominio, rango, gráficas, la relación de dependencia entre variables, mostrando varios ejemplos; lo anterior reflejó el poco o casi nulo tratamiento de los conceptos de variación y cambio, indispensables en el aprendizaje y comprensión del concepto de función cuadrática.

De acuerdo con los antecedentes para esta investigación se puede concluir que para promover el desarrollo del pensamiento variacional en la etapa escolar es pertinente desarrollar y

ejecutar secuencias de actividades en contextos dinámicos que favorezcan el análisis de la variación en el estudio de las funciones, ya que este enfoque no ha sido ampliamente abordado por los docentes de matemáticas, también, que el marco conceptual del razonamiento covariacional es una potente herramienta teórica para analizar aspectos del pensamiento variacional que pueden ser evidenciados y caracterizados en las respuestas de estudiantes al estudiar situaciones que implican variación. La importancia de este marco teórico también se visualiza en la posibilidad de que, al ser ampliamente trabajado por la comunidad de docentes de la educación básica y media, enriquecerá las prácticas de los mismos y se reflejará en el aprendizaje de los estudiantes.

La educación matemática realista propone un marco teórico para promover y desarrollar el proceso de modelación de relaciones funcionales en el cual, a partir de los distintos niveles, se pueden diseñar, implementar y analizar secuencias didácticas con grupos de estudiantes y, dadas sus características, se puede asociar con el marco conceptual del razonamiento covariacional, los cuales por su naturaleza tienen puntos comunes de trabajo como el pensamiento variacional y el proceso de modelación. De acuerdo con lo anterior, una propuesta de intervención de aula que permita estudiar la variación, que promueva los procesos de modelación de las relaciones presentes y que posibilite el análisis de estos dos procesos se constituye en una propuesta que integra dos componentes fundamentales en el desarrollo del pensamiento variacional.

El estudio de las funciones en la educación escolar, entendidas como relaciones de dependencia, y la atención sobre la covariación de las cantidades presentes, es una alternativa para acercarse a las nociones de variable y parámetro, y para coordinar los cambios de los valores de las cantidades cuando se trabaja con los distintos registros de representación de la situación, donde no solo se privilegie la modelación de expresiones analíticas sino que también

se analicen las propiedades y relaciones entre tablas, gráficas y enunciados en lenguaje natural. Ahora, al hablar de la función cuadrática, debe tenerse en cuenta que, al ser esta una de las más enseñadas en la escuela, es indispensable elaborar nuevas propuestas didácticas que estén formuladas en contextos de distinta naturaleza, destacando la importancia de analizar contextos dinámicos en los cuales se analicen fenómenos de la realidad que impliquen la variación cuadrática y que puedan ser modelados por este tipo de funciones; que procuren la comprensión de propiedades, procedimientos y nociones fundamentales y que no se limiten exclusivamente al enfoque de correspondencia, sino que sean puestas en contextos cercanos y amigables que permitan a los estudiantes comprender con más facilidad la variación y las relaciones funcionales asociadas.

Capítulo II. Marco conceptual de referencia

Este capítulo se encuentra dividido en tres secciones que corresponden a perspectivas teóricas relevantes en el campo de la educación matemática, referentes del presente trabajo de investigación: la perspectiva curricular, la perspectiva didáctica y la perspectiva disciplinar (que en este caso corresponde a las matemáticas). A partir de las tres perspectivas se analiza en la literatura los planteamientos relativos al desarrollo del pensamiento variacional en la educación escolar, las orientaciones para el estudio de la variación en documentos curriculares en Colombia, marcos teóricos que promueven y analizan el estudio de la variación y el cambio, el estudio de las funciones como relaciones de dependencia y las propiedades básicas de las funciones.

En la perspectiva curricular se aborda brevemente algunos de los cambios respecto al currículo escolar de matemáticas en los últimos sesenta años hasta la organización de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje –DBA– (MEN, 2016). En relación a estos últimos, se analiza la manera como se promueve el desarrollo del pensamiento variacional a partir del estudio de los sistemas algebraicos y analíticos en diferentes etapas de la educación escolar, lo cual garantiza que el desarrollo de esta propuesta didáctica esté ajustada a los parámetros establecidos para el currículo escolar de matemáticas.

En la perspectiva didáctica, el desarrollo del apartado posibilita el análisis de estudios respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, considerando estas como relaciones de dependencia, en las cuales se presta atención a la variación de las cantidades propias de una situación problema y a los cambios simultáneos de las cantidades, y se posibilita el análisis de la covariación entre ellas y llevar a cabo la modelación de las relaciones presentes en el contexto

estudiado. Para esto, se indagan algunos trabajos realizados en los que se identifica y considera la covariación de las cantidades presentes, en los cuales se da cuenta de ciertos comportamientos que evidencian acciones y niveles de razonamiento covariacional (Carlson et. al., 2003), además, se verifica que durante este proceso también se ejecutan procesos de modelación esenciales en la actividad matemática que pueden ser desarrollados por los estudiantes y posteriormente analizados de acuerdo con sus características, como el proceso de modelación formulado en la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1985).

En la última parte del capítulo se analizará el devenir histórico del concepto de función, a partir de la perspectiva disciplinar, analizando la manera como evolucionó la noción de función, sus características, propiedades, el concepto de variable; además, identificando el momento en que se empleó la noción de función en el estudio de curvas mecánicas, hasta su definición más reciente en la teoría de conjuntos. Lo anterior es una parte importante porque justifica la forma como se debe promover la enseñanza de las funciones sin olvidar sus propiedades básicas, por ejemplo, en el estudio de la variación presente en situaciones en donde la función cuadrática es el modelo por excelencia que reúne en forma matemática lo principal de la situación de estudio para, posteriormente, poder llegar a niveles de generalización de sus propiedades, en los cuales se pueda comprender la noción de función y las familias de funciones.

2.1. El desarrollo del pensamiento variacional y la modelación de relaciones funcionales en los documentos curriculares legales en Colombia

Durante los últimos 60 años la investigación a nivel internacional acerca del currículo escolar de matemáticas desarrolló cambios y nuevos enfoques. De acuerdo con la *matemática moderna* en Estados Unidos en 1962, las *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática Volumen IV*, (Steiner, H. y Christiansen, B., 1979), "Las cuatro dimensiones del concepto de

currículo son los objetivos, contenidos, metodología y evaluación." Steiner 1980, (Citado en Rico, 1998, p. 5). Por su parte, de las obras: *Las Matemáticas sí cuentan* (1985), *School Mathematics in the 1990s. ICMI Study Series* (1986), elaborado por Howson y Kahane, *Perspectives on Mathematics Education* (1985) del grupo de especialistas BACOMET, *The Secondary School Mathematics Curriculum* (1985) por la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), se destaca la idea de “La visión activa de la enseñanza, en la que la manipulación de objetos y la elaboración de modelos constituyan una etapa obligada en la adquisición y dominio de los conceptos” (Rico, 1995, p. 6).

2.1.1. El currículo escolar de matemáticas y los lineamientos curriculares

En la década de los sesenta y setenta, en Colombia se promulgaron decretos en los niveles de primaria y secundaria que indicaban objetivos generales y específicos conductuales (MEN, 1998). En 1975, se inició una reforma conocida como el *Mejoramiento Cualitativo de la Educación*, que incluía renovación de programas, capacitación del magisterio y disponibilidad de medios educativos, los cambios realizados desde 1976 hasta la renovación curricular del ministerio promulgada por decreto en 1984. Las primeras reformas consistieron en trabajar en la educación básica primaria cuatro tipos de sistemas: los aritméticos, los geométricos, los métricos y los estocásticos. Para los niveles de secundaria y media se añadían los sistemas analíticos, los conjuntistas, los lógicos y los generales, con la idea principal de que en vez de tratar de manera individual las disciplinas que conforman las matemáticas en grados superiores de la básica secundaria y media, se privilegiara el estudio por sistemas analíticos como colecciones, transformaciones y relaciones de orden.

En 1994, al expedirse la Ley General de Educación se abrió la posibilidad para que cada institución educativa, de manera autónoma, pudiera formular su propio Proyecto Educativo

Institucional –PEI–, reformar currículos, planes de estudio, y programas. A este respecto, Vasco (2003) afirma que a raíz de las dificultades que se derivaron de la libertad expresada en la Ley de 1994, el MEN debió establecer pautas curriculares a través de indicadores de logros, Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), para así orientar las nuevas responsabilidades que afrontarían las instituciones educativas. Ya en esta nueva apuesta, surgen cambios y desarrollos significativos de la forma como se pretende abordar la educación matemática escolar, la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia.

Previo a la concepción de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), la propuesta de la renovación curricular de 1976 planteó la posibilidad de estudiar las matemáticas escolares como sistemas y no como conjuntos. La idea principal del *enfoque de sistemas* permitía a los estudiantes acercarse a las distintas especialidades de las matemáticas de tal forma que las comprendieran como totalidades estructuradas, con sus elementos, operaciones y relaciones; elementos claves para el incremento en la capacidad de conceptualizar. Además, el docente podría hacer distinción entre los sistemas simbólicos, conceptuales y concretos (MEN, 1998).

Los Lineamientos Curriculares orientan el desarrollo del pensamiento matemático a través de cinco expresiones que lo conforman, relacionados con sistemas matemáticos:

- i. Pensamiento numérico y sistemas numéricos,
- ii. Pensamiento espacial y sistemas geométricos,
- iii. Pensamiento métrico y sistemas de medidas,
- iv. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y
- v. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Dichas expresiones están mediadas por cinco procesos, a saber: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar, razonar y formular; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 1998, 2006; Vasco, 2003), teniendo un apoyo considerable en lo desarrollado en el anterior *enfoque de sistemas* de la renovación curricular y orientados hacia la *conceptualización* por parte de los estudiantes y la comprensión de sus posibilidades y el desarrollo de competencias. En relación a esto, Vasco señala:

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue pues un paso adelante muy significativo, pues pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa: La modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para “resolver problemas”, los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares, por necesarios que estos sean. (2003, p. 4)

En lo anterior se demuestra la importancia de llevar a cabo el proceso de modelación de fenómenos y procesos de la realidad, promovido en los lineamientos curriculares con el propósito de que fuera llevado a las prácticas educativas en las aulas de clase; no obstante, la importancia de llevar a cabo estos procesos radica en la posibilidad de favorecer las expresiones del pensamiento matemático o subdivisiones de este. En particular, en relación con el pensamiento variacional, en los lineamientos curriculares se habla del álgebra como:

Una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de

la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional. (MEN, 1998, p. 17)

De esta manera se identifica lo relevante del estudio de la variación y el cambio de cantidades en las actividades educativas escolares que conllevan al desarrollo del pensamiento variacional, además, de llevar a cabo diseños y reformas curriculares institucionales y de estrategias y metodologías en cuanto a las clases se refiere. Se plantea pues que, de acuerdo con los lineamientos, en el desarrollo del pensamiento variacional se debe tener presente la evolución histórica del concepto de variación (desde sus orígenes cuando se realizaron los primeros estudios matemáticos del movimiento) y los núcleos conceptuales en los que está involucrada, como son:

- I. Continuo numérico
- II. La función como dependencia y modelos de función
- III. Las magnitudes
- IV. El álgebra en su sentido simbólico
- V. Modelos matemáticos de tipos de variación

En los lineamientos curriculares de matemáticas se propone el estudio de las relaciones funcionales como dependencia, a partir del estudio de la variación de cantidades de magnitud, sus representaciones, para de esta manera estimular en el estudiante la observación, registro y utilización del lenguaje matemático (MEN, 1998). En este sentido:

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. (p. 50)

El estudio de las matemáticas escolares y el desarrollo del pensamiento variacional debe cumplir unos momentos que se van dando en la medida que el estudiante desarrolla las diferentes actividades propuestas en el aprendizaje y comprensión de las relaciones funcionales al estudiar la variación; por tanto, las clases de matemáticas en el aula no pueden ser la presentación de contenidos aislados o con una aparente desconexión.

La introducción a la noción de función como dependencia entre variables, permite al estudiante identificar y señalar las relaciones funcionales entre los mundos que cambian. De esta manera se hace emerger la función como herramienta necesaria para enlazar patrones de variación y así predecir y controlar lo que cambia, a partir de los distintos modelos simples de función que se estudian en la educación básica secundaria y media (MEN, 1998).

Por último, debe decirse que las estructuras conceptuales en los Lineamientos Curriculares dan cuenta del direccionamiento establecido para las nuevas propuestas que promueven el desarrollo del pensamiento variacional a través de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas escolares en Colombia y se constituyen en un fundamento de la propuesta desarrollada en el presente trabajo de investigación.

2.1.2. Estándares básicos de competencias en matemáticas

El documento de los Estándares Básicos de Competencias –EBC– en Matemáticas (MEN, 2006) inicia con la frase “Potenciar el pensamiento matemático: Un reto escolar”, dando cuenta de la propuesta y objetivo principal que ha sido trabajado desde la Ley de 1994 y los lineamientos curriculares de matemáticas. Al inicio de dicho documento se sustenta el valor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela a través de tres fines, entre los cuales uno de ellos termina por considerarlas como “un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que

están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes” (MEN, 2006, p.47). Este fin justifica y re direcciona las prácticas educativas al momento de enseñar matemáticas en el ámbito escolar y constituye para los objetivos de la presente investigación uno de los argumentos para el tipo de actividades que se llevarán a cabo y que se analizarán posteriormente en la intervención con los estudiantes, donde el carácter contextual de la situación problema a trabajar conduce a desarrollar y fortalecer el pensamiento variacional.

2.1.2.1. El desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional

En el caso de las cinco expresiones que comprenden el pensamiento matemático, según los EBC en Matemáticas, se hará hincapié en el desarrollo del pensamiento variacional, considerando también que los otros pensamientos como el numérico, espacial, métrico y aleatorio, con sus respectivos sistemas, también tienen relación y se presentan en alguna medida en la actividad matemática.

El estudio y la comprensión de la variación y el cambio cumplen un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional en todos los niveles educativos en la educación matemática escolar. En primera instancia, en los estándares se realiza una breve descripción de aquello que implica el pensamiento variacional, como “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (MEN, 2006, p. 66). El propósito de propiciar el desarrollo de este tipo de pensamiento en la escuela es crear condiciones favorables para la comprensión y uso de conceptos en el estudio de las funciones y sus sistemas, el cálculo integral y diferencial y, en relación a estos, la solución de situaciones problema que involucran la

modelación de procesos y fenómenos de variación y cambio en la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias.

En los EBC se propone que para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional durante los primeros niveles en la escuela, se debe propiciar el estudio de las regularidades, analizar lo que cambia, analizar patrones numéricos y geométricos. Las regularidades como unidades de repetición, presentes en sucesiones o secuencias, dan lugar a un patrón, y al realizar estos estudios se desarrolla la habilidad para identificar el patrón y reproducirlo por medio de una fórmula (MEN, 2006). De esta manera, ya se están dando condiciones favorables para que el pensamiento variacional en el estudiante se consolide poco a poco y así en el estudio de conceptos con mayor nivel de complejidad, el identificar regularidades en las distintas representaciones propuestas se algo que se pueda identificar con facilidad.

Al igual que en el punto anterior, al proponer actividades para analizar lo que cambia también se están fortaleciendo aspectos de los otros tipos de pensamiento matemático y los procesos generales, facilitando el que se establezcan conjeturas, construyan representaciones en los diferentes registros, realicen cálculos, modele, y se logre obtener generalizaciones de acuerdo con la situación planteada. De igual manera, el estudio y generalización de los patrones numéricos y geométricos favorecen el manejo simbólico y el aprendizaje de los sistemas algebraicos, incluso antes de su trabajo en forma directa en grados octavo y noveno, con el propósito de realizar posteriores construcciones de expresiones algebraicas en situaciones propuestas.

Según los EBC, en la educación básica secundaria y los grados en donde se lleva a cabo el trabajo algebraico en forma directa, el sistema algebraico es el predilecto para representar la variación, sin embargo, las otras formas de representación como la tabular, geométrica, gráfica,

icónica, gestual, también son muy importantes en el proceso de modelación y lo que corresponde al estudio de la situación trabajada. Al respecto, se propone que el estudio de la variación y las relaciones funcionales en estos niveles se puede llevar a cabo a partir de situaciones de la vida cotidiana, situaciones de las ciencias sociales y naturales y situaciones de las matemáticas que permitan hacer un acercamiento al concepto de función como una relación de dependencia entre variables; de esta manera, se puede lograr la apropiación de conceptos claves del pensamiento variacional como *constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia*, propiciando el aprendizaje de las funciones y las familias de funciones.

2.1.2.2. La formación por competencias

En los lineamientos curriculares se entendía la *competencia matemática* como la “consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático” (MEN, 2006, p. 48), lo que implicaba el tránsito de las estructuras y conceptos de las matemáticas como herramientas prácticas dentro y fuera de la escuela. Por su parte, en los EBC se hace referencia a las competencias como “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p. 49).

Del concepto de competencia se deriva la expresión *ser matemáticamente competente*, la cual se interpreta como la comprensión del uso del conocimiento en contextos diversos, en las facetas práctica y formal del conocimiento matemático, y los conocimientos de tipo conceptual y procedimental (MEN, 2006). En lo que a las facetas se refiere, comprende que lo práctico es la posibilidad de emplear ese conocimiento para mejorar su calidad de vida y desempeño como ciudadano y que lo formal es el emplear el lenguaje de las matemáticas con sus registros de

representación. En cuanto a los tipos de conocimiento, el conceptual consiste en un conocimiento teórico producto de la actividad cognitiva y con muchas relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos.

Las argumentaciones anteriormente indicadas permiten señalar que el ser matemáticamente competente también implica cumplir con algunos procesos durante la actividad matemática, de los cuales se mencionan cinco, como son: *formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar, razonar, y formular; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos*. Para el desarrollo de esta investigación nos centraremos en los de *formular y resolver problemas* y *modelar procesos y fenómenos de la realidad*, por su relevancia al estudiar la covariación de magnitudes de fenómenos de la realidad, sin embargo, tampoco se puede desconocer que los otros procesos también se presentan en alguna medida en el trabajo de las actividades propuestas.

2.1.2.3. Procesos generales en el desarrollo del pensamiento variacional

Como se mencionó en el párrafo anterior, los procesos de *formular y resolver problemas* y *modelar procesos y fenómenos de la realidad* constituyen momentos claves en el trabajo por parte del estudiante. Respecto al primer proceso, los EBC plantean la necesidad de proponer a los estudiantes situaciones que se puedan identificar en un contexto y posteriormente relacionar con toda la parte matemática a trabajar para determinar una solución apropiada y poder llegar a procesos mayores de generalización. A su vez, son varias las competencias que el estudiante está trabajando en este proceso, como aquellas que “permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas” (MEN, 2006, p. 52).

Al respecto del segundo proceso, *modelar procesos y fenómenos de la realidad*, debe entenderse primero que los EBC comprenden el concepto de modelo como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional, con el que se representa la realidad para hacerla más comprensible; construcción o artefacto material o mental, un sistema, una estructura, una imagen analógica para hacer cercana una idea o concepto y así poder manejarlo y apropiarse de este (MEN, 2006). De acuerdo con esto, el proceso de modelación involucra la construcción de modelos de una situación estudiada y para esta investigación se pretende que el estudiante construya modelos de la función cuadrática en relación a la situación planteada.

Otro aspecto relevante en el proceso de modelación consiste en la posibilidad de comprender las relaciones existentes entre las variables del modelo para así determinar niveles de importancia y complejidad en la construcción de otros modelos y la manipulación de los mismos. En relación a esto, en los EBC se menciona el proceso de modelación como aquel que facilita construir modelos de situaciones problema, “permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad” (MEN, 2006, p. 53) y de esta manera hacer predicciones, utilizar procedimientos de cálculo numérico y razonar acerca de los resultados en relación con la situación inicial propuesta.

El proceso de modelación también se asume en el documento como un sinónimo de matematizar, y a su vez se entienden ambas en relación a lo propuesto por Freudenthal (1977), como:

[...] simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación. (MEN, 2006, p. 53)

Lo anterior permite identificar y justificar la importancia de estos procesos y la forma como se relacionan y se llevan a cabo en la implementación de la actividad a trabajar con los estudiantes en el desarrollo de esta investigación, que está encaminada al desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional.

2.1.3. Derechos básicos de aprendizaje

A continuación, se exponen algunos aspectos de los *Derechos Básicos de Aprendizaje* – DBA– para el área de matemáticas, en su segunda versión (MEN y Universidad de Antioquia, 2016) respecto al desarrollo del pensamiento variacional y el estudio de las funciones.

En el segundo DBA de grado noveno se anota lo siguiente: “Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones” (MEN y Universidad de Antioquia, 2016, p. 66). Lo señalado en este DBA presenta una forma de abordar el tema de las funciones, sin embargo se entiende que el tratamiento implica más la ejercitación de cálculos y mecanización de algoritmos que el proceso de modelación de una situación en contexto que permita entre varias cosas percibir y estudiar la variación. Dicho de otra manera, las capacidades a desarrollar que aparecen son “proponer” y “desarrollar”, pero no se define si de situaciones problema o contextualizadas, por tanto, estas capacidades podrían limitarse al “despeje”, que implica la manipulación de una expresión algebraica y es solo una parte del proceso de modelación.

La primera evidencia que se presenta en el documento para el anterior DBA, “Identifica y utiliza múltiples representaciones de números reales para realizar transformaciones y comparaciones entre expresiones algebraicas” (p. 66), permite apoyar la idea que se entiende para la implementación de este DBA. Por otra parte, la última evidencia descrita y el ejemplo

dado dan una idea sobre cómo se deben relacionar los tipos de representación que tiene una función, sin embargo, esta idea o tratamiento que se debe hacer no es claro y la comprensión de las relaciones entre los tipos de representación puede quedar con bases deficientes y este concepto fundamental ser aprendido de manera poco apropiada.

Otro DBA relacionado, en este caso para el estudio de la variación, es el séptimo:

“Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones” (p. 70). De este se puede decir que al parecer da prioridad al análisis de gráficas en relación a situaciones dinámicas que implican variación, y de acuerdo con las evidencias, el análisis puede ser verbal o la explicación y representación de la variación con gráficas, entendiéndose que no es clave la integración de una expresión analítica de la situación que permita un análisis formal y de mayor complejidad del concepto y que complemente las distintas representaciones.

Respecto al desarrollo del pensamiento variacional, al analizar los dos anteriores DBA y hacer una comparación con los EBC para el conjunto de grados de 8º y 9º, se observa que el planteamiento que proponen los EBC presenta una estructura más integral para abordar el objeto matemático y menos encaminada al trabajo por contenidos y a la ejercitación en forma mecánica que se percibe en los DBA. De acuerdo con lo anterior, se observa el estándar “Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan” (MEN, 2006, p. 87), que permite considerar múltiples adecuaciones a actividades escolares que no se limitan a la mecanización de rutinas de despeje, sino a analizar el cambio, la relación coherente entre las distintas representaciones de una situación que implica variación, el papel que cumplen los parámetros y las variables, y la forma como se relacionan las familias de funciones.

En relación con los DBA se puede concluir lo siguiente: i) la forma como se pretende fortalecer y desarrollar el pensamiento variacional en grado noveno no es clara; ii) los enunciados que presentan algún tipo de relación con el concepto de función tienden al trabajo de algoritmos, rutinas de ejercitación y despeje; iii) los enunciados donde se hace referencia a los tipos de representación del concepto de función están direccionados hacia la identificación de información en estas representaciones, y no hacia la identificación de relaciones entre ellas, ni a la construcción de representaciones gráficas, tabulares y de expresiones algebraicas que implican un trabajo de mayor complejidad y apropiación conceptual y procedimental; y iv) aunque para el estudio de la variación se propone abordar situaciones dinámicas (lo que sería una propuesta interesante), la propuesta recae únicamente en la identificación de la variación en gráficos, la realización de descripciones verbales y explicaciones.

De lo tratado y desarrollado en la perspectiva curricular se destacan los siguientes aspectos como aportes para la investigación:

- VI. La propuesta de aula a desarrollar partirá de la apropiación conceptual de algunos elementos pertinentes desarrollados en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas por su estructura, validez y pertinencia en lo que corresponde a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto educativo colombiano.
- VII. Las actividades propuestas en este trabajo se enmarcarán en el pensamiento variacional, dado que el estudio de la variación y el cambio en diferentes contextos permite alcanzar mayor comprensión de los objetos matemáticos relacionados, de tal manera que se pueda identificar y lograr su descripción, modelación y representación en distintos registros o sistemas simbólicos y en especial la comprensión y uso de conceptos y procedimientos de

las funciones y sus sistemas analíticos, asumiendo la función como una dependencia entre magnitudes variables.

- VIII. En el estudio de la variación, la resolución de problemas es un proceso general de la actividad matemática que podría convertirse en eje organizador del currículo de matemáticas, a partir de situaciones ligadas a experiencias cotidianas, significativas para los alumnos y del mundo cercano, de las mismas matemáticas o de otras ciencias. De esto se destaca que los contextos a trabajar en las situaciones no tienen que ser explícitamente de la realidad, también pueden ser situaciones en las matemáticas u otras ciencias que favorezcan la comprensión apropiada de dicha situación y el tratamiento matemático de acuerdo con las cuestiones planteadas.
- IX. Por último, la modelación como otro de los procesos generales en la actividad matemática, que permite la detección de esquemas o regularidades en el estudio de situaciones y que pueden ser representados por modelos mentales, gestuales o simbólicos para su estudio y así responder a preguntas en dicha situación. Estas representaciones son esenciales en el estudio de la variación y la comprensión del concepto de función, todos aquellos gestos, gráficos que los estudiantes diseñen, comentarios, expresiones algebraicas permitirán posteriormente llevar a cabo el análisis de los resultados de la implementación de la propuesta de aula.

2.2. Perspectiva didáctica: concepciones teóricas acerca del desarrollo del pensamiento variacional y la modelación de relaciones funcionales

En el desarrollo de este apartado se analizan algunas propuestas didácticas que propenden por establecer rutas alternativas para el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio y

comprensión de la variación y el cambio, el aprendizaje apropiado del concepto de función y la función cuadrática, comprendiendo la modelación como estrategia clave en el proceso.

2.2.1. El estudio de la variación a partir del enfoque covariacional

En la organización e implementación del currículo de la educación matemática escolar en Colombia se identificó el estudio de la variación como una estrategia y actividad educativa fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y, especialmente, del pensamiento variacional. De acuerdo con esto, dicho desarrollo se puede promover a partir de estrategias o metodologías que impliquen el análisis de patrones aritméticos, geométricos, la modelación de fenómenos y, en general, el estudio de situaciones “para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables” (MEN, 1998, p. 17), apuntando hacia el estudio de la covariación. Al respecto, Vasco (2003) señala:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que *covaríen* en forma semejante a los patrones de *covariación* de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6)

Además, manifiesta que el pensamiento variacional cumple con un movimiento mental que se lleva a cabo a través de unos momentos o fases como son:

1. Captar lo que cambia, lo que permanece constante y los patrones repetidos en algunos procesos.
2. Producir sistemas mentales o “modelos mentales” con variables internas que interactúan reproduciendo con cierta aproximación las covariaciones detectadas.
3. Activar los modelos mentales para que arrojen resultados.
4. Comparar los resultados con el proceso que se trata de modelar.

5. Revisar para refinar o descartar el modelo

En casos donde hay sistemas simbólicos con tecnologías socialmente disponibles como las palabras, dibujos u otros íconos, letras o números, se dan momentos como:

1. formulación simbólica del sistema o modelo mental por medio de algún sistema simbólico con su respectiva tecnología.
2. Momento de calcular con la representación tecnológica disponible.
3. Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
4. Momento de la reformulación del modelo.

Según Vasco (2003), los anteriores momentos describen la finalidad del pensamiento variacional que es “la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente – pero no exclusivamente – las variaciones en el tiempo” (p. 6). Además, en el estudio de la covariación recomienda una notación para el trabajo con la correlación positiva o negativa y luego estudiar la proporcionalidad directa entre cantidades:

Así se detecta que la proporcionalidad directa es sólo un tipo muy específico de covariación positiva, y que la proporcionalidad inversa es sólo un tipo muy específico de correlación negativa entre cantidades absolutas o no negativas. (Vasco, 2003, p. 9)

Finalmente, el autor también considera la modelación como una actividad clave en el estudio de la covariación, pero este aspecto se desarrollará más adelante.

2.2.2. La función como covariación

El estudio de la variación es un enfoque conveniente para el aprendizaje y comprensión del concepto de función (Dolores y Salgado, 2009; Posada y Villa, 2006; Villa, 2008, 2012). La variación implica la covariación y la correlación de magnitudes (Villa, 2008, 2012), y, de acuerdo con esto, el estudio de la covariación es fundamental para el desarrollo del razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003; Dolores y Salgado, 2009; Villa, 2012);

además, el estudio de la covariación es una forma potente para el aprendizaje del concepto de función y en este proceso de aprendizaje y apropiación de la función es muy importante llevar a cabo el proceso de modelación de situaciones (Villa, 2008).

Villa (2008) plantea en su investigación la importancia de la comprensión de la función cuadrática a partir de la atención y estudio de la forma como covarían dos cantidades de magnitud, obteniendo una variación lineal de la razón de cambio entre ellas. Para este autor, el aprendizaje de la función cuadrática no solo debe atender las variaciones presentes en las cantidades de las magnitudes, sino que se debe poner especial cuidado a la forma como estas se corresponden, teniendo presente el concepto de razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como relación clave, la cual varía linealmente. De acuerdo con lo anterior, en este proceso de estudio de la función se presentan particularidades como la descripción cualitativa del cambio a partir de la gráfica, el cambio de la razón de cambio, la construcción de una función en la que su razón de cambio varía linealmente, la asociación de cómo varía el cambio con las concavidades de la gráfica, entre otras, lo cual está relacionado o evidencia el desarrollo del razonamiento covariacional en el estudiante.

Por su parte, para el estudio y comprensión de la función, Dolores y Salgado (2009) hacen énfasis especialmente en lo que han llamado graficación covariacional: a partir de esta se pueden representar las diferencias al considerar cómo y cuánto cambian las variables que están relacionadas unas con otras. Los autores hacen hincapié en el trabajo con funciones y su representación gráfica con el objetivo de plantear algunas posibles soluciones a errores y dificultades asociados al entendimiento del significado gráfico de las funciones, a la comunicación o extracción de información de las gráficas, a la articulación de las diferentes

representaciones del concepto de función, entre otras dificultades y errores inscritos al desarrollo de un razonamiento covariacional.

En su trabajo, Dolores y Salgado (2009) definen la *graficación covariacional* como “las actividades de representación gráfica en las que se involucra la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambia una con respecto la otra” (p. 66), tomando como elemento principal el cambio, centrando su atención en la representación gráfica de este y considerando la variación estrechamente ligada al proceso de medición del cambio. En primera instancia, para el estudio de la covariación en gráficas de funciones, expresan que:

Una interpretación cualitativa o cuantitativa de una gráfica requiere de centrar la atención en los efectos sobre la relación entre las dos variables, y en particular en su patrón de covariación, es decir atender simultáneamente los efectos que provocan los cambios de la variable independiente en la variable dependiente. (p. 64)

En relación a los cambios en variables y las gráficas, los estudiantes “las interpretan como si no hubiese alguna relación que las vincule” (p. 65), dando muestra del escaso sentido de covariación que ellos presentan al estudiar las gráficas y, a su vez, señalando el objetivo de dicho trabajo de la graficación covariacional, “ya que parte esencial de este modo de graficación radica justamente en la representación gráfica de la correlación necesaria entre el aumento o disminución de una las variables y los efectos que causa (aumento o disminución) en la otra variable” (p. 65).

2.2.2.1. El razonamiento covariacional.

El trabajo de investigación de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003), analiza lo relacionado con la forma como razonan los estudiantes al aprender el concepto de función a

partir del estudio de la variación y la covariación entre cantidades de magnitudes en el estudio y modelación de eventos dinámicos.

En su trabajo, los investigadores definen el *razonamiento covariacional* como “ las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.124); de acuerdo con esto se constituye en una perspectiva de trabajo didáctico propicio dadas sus características, eje temático de tratamiento y naturaleza en el marco de la educación matemática. Algunas de las situaciones que condujeron al surgimiento de dicho marco conceptual a partir de los resultados y conclusiones de investigaciones referenciadas en su documento, reiteran la importancia de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en los currículos escolares, considerando de manera relevante la observación y estudio durante los primeros años escolares de los patrones de cambio, comprendiendo formas de representarlo, con el propósito de analizar y entender situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía en una relación dependiente con otra y así llegar a modelar distintas relaciones funcionales. En niveles superiores, las destrezas alcanzadas son esenciales para interpretar modelos de eventos dinámicos, comprender los conceptos fundamentales del cálculo y las ecuaciones diferenciales.

De igual modo, los autores mencionados identifican la razón, la covariación y la imagen y sus implicaciones como conceptos relevantes, los cuales se describirán brevemente:

- X. **Razón:** esta expresión se emplea para referirse a la razón de cambio promedio en un subintervalo o la razón de cambio instantánea para imaginar una función sobre todo su dominio.
- XI. **Covariación:** Saldanha y Thompson, 1998 (citados en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003, p. 123), describen la comprensión de la covariación como “mantener en la

mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)”, siendo una actividad mental en la cual se coordinan dos cantidades, siguiendo los valores de cada una en un instante.

XII. **Imagen:** Thompson, 1994 (citado en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003, p. 124)

define la imagen como un constructo “dinámico que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales”

Asociadas a estos conceptos, y como estructura fundamental para el análisis del razonamiento covariacional en estudiantes, los autores proponen dos tablas en las cuales se especifican los comportamientos de estudiantes vinculados a la realización de tareas con las características anteriormente mencionadas. En la primera tabla se puntualizan las acciones mentales del razonamiento covariacional y el comportamiento asociado.

Tabla 1
Acciones mentales del razonamiento covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	<i>Coordinación del valor</i> de una variable con los cambios de otra.	<i>Designación</i> de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	<i>Coordinación de la dirección</i> del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	<i>Construcción</i> de una línea recta creciente. <i>Verbalización</i> de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	<i>Coordinación de la cantidad</i> de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	<i>Localización</i> de puntos/ <i>construcción</i> de rectas secantes. <i>Verbalización</i> de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	<i>Coordinación de la razón de cambio promedio</i> de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	<i>Construcción</i> de rectas secantes contiguas para el dominio. <i>Verbalización</i> de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	<i>Coordinación de la razón de cambio instantánea</i> de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	<i>Construcción</i> de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de la concavidad. <i>Verbalización</i> de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el

dominio de la función (los puntos de inflexión y las concavidades son correctos).

Nota. Fuente: Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.

De acuerdo con este marco conceptual, un estudiante que evidencie las condiciones propias de cada acción mental y comportamiento, puede incluirse en un nivel que determina el desarrollo de razonamiento covariacional presente. A continuación, se presentan los niveles definidos en el estudio de la covariación en este marco conceptual:

Tabla 2
Niveles de razonamiento covariacional

Nivel	Descripción del nivel de razonamiento covariacional
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota. Fuente: Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.

De acuerdo con las acciones mentales y comportamientos indicados en la tabla 1, y los niveles de razonamiento covariacional, un estudiante que esté en nivel 5 (N5) tiene la capacidad

de describir cada una de las acciones mentales, desde las AM1 hasta las AM5, de tal forma que evidencie la comprensión de la razón de cambio instantánea como el refinamiento de la razón de cambio promedio y el comportamiento de crecimiento o decrecimiento en los puntos de inflexión. En relación a esto, los autores también señalan que se pueden presentar comportamientos pseudo-analíticos relacionados con procesos pseudo-analíticos, tal como lo define Vinner, 1997 (citado en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003, p. 130) como aquellos en los cuales los estudiantes parece que han alcanzado algunas acciones mentales específicas, pero al momento de justificar no presentan suficientes evidencias de esas acciones mentales.

Otro aspecto importante de un desarrollo apropiado de razonamiento covariacional en el estudiante, es la posibilidad de interpretar y representar información de gráficas de funciones. Al respecto, los autores señalan que es posible que los estudiantes relacionen coherentemente los valores de las variables como dependientes, por ejemplo, que el valor de una variable cambia con los cambios del valor en la otra variable, y esto se puede relacionar con la ubicación de los ejes de coordenada; situación que se relaciona con AM1. Otra relación posible es el señalamiento de la dirección del cambio en la gráfica a partir de los cambios en las dos variables, indicando una recta creciente (para el caso de funciones crecientes) y que dicho comportamiento está relacionado con AM2.

Para el caso de AM3 y gráficas de funciones, los estudiantes realizan la ubicación de puntos en el plano, atendiendo que el eje x presenta divisiones a una magnitud fija y corresponde a los valores de entrada y que para la ubicación de los puntos se debe precisar los valores de salida en forma correspondiente. Cuando el estudiante lleva a cabo esta acción en relación a gráficas se espera que posteriormente construya rectas secantes que unen los puntos y así podrán relacionarse estas rectas con la razón de cambio promedio para subintervalos de la función,

acercándose así a AM4. Sin embargo, se debe aclarar que AM3 se enfoca en la cantidad del cambio del valor de salida, atendiendo los valores de entrada y AM4 en la razón de cambio del valor de salida con respecto al valor de entrada, para incrementos uniformes del valor de entrada. Para el caso de AM5 los estudiantes realizan la construcción de una curva suave y precisa, evidenciando la comprensión de la razón de cambio instantánea para el dominio de la función.

El marco conceptual del razonamiento covariacional propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003) se constituye en un referente fundamental en la construcción de la propuesta didáctica que se desarrollará más adelante y del análisis de los resultados de los estudiantes luego de haberse enfrentado y trabajado las situaciones indicadas.

2.2.3. La modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje en la educación matemática

A continuación, se presentan algunas acepciones acerca de la modelación y modelo en la actividad matemática, a la vez que se da cuenta de la importancia y vínculos evidenciados entre la modelación en los procesos de enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, su relación con el estudio de la variación y el desarrollo del pensamiento variacional en contextos escolares. Al igual que en distintos momentos de la investigación en educación matemática, para este trabajo surge la inquietud y la necesidad por comprender: *¿Qué es modelación?*, *¿Qué es un modelo?*

Como se había mencionado en el apartado en que se abordó la perspectiva curricular en la educación colombiana, Vasco (2003) señala dos elementos claves para el perfeccionamiento del pensamiento matemático en la escuela: i) La modelación: una actividad clave en el análisis y solución de subprocesos o situaciones de la realidad, y ii) El pensamiento variacional: desarrollado en el estudio y comprensión de la variación, propiamente de la covariación.

Además, señala que estos están muy relacionados entre sí, por ejemplo, cuando se hace el estudio de la variación de una situación determinada y se observan los cambios en las cantidades de magnitudes se producen modelos mentales sobre los cuales se llevan a cabo algunas acciones, como señala:

Luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúan de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar “modelos mentales”; luego tiene un momento de echar andar o correr esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar. (p. 6)

Para Vasco (2003), la *modelación es un proceso de producción de modelos que simulan subprocesos de la realidad*, además, resalta los modelos mentales que se presentan en el análisis del cambio y, en el caso de sistemas simbólicos, la formulación simbólica del sistema mental. De otro lado, de acuerdo a las definiciones del autor, *un modelo es un producto del proceso de modelación* que representa la dinámica de ciertos subprocesos de la realidad. También afirma que “el objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud” (p. 6), definición que lo acerca al marco conceptual de Carlson y colaboradores.

2.2.3.1. Algunas perspectivas de modelación en educación matemática

En las últimas décadas diferentes autores han desarrollado diversos puntos de vista en relación a la modelación matemática, entre estos: Araujo, 2002; 2007; 2009; Blum, et al., 2007; Gerosky, 2010; Kaiser y Sriraman, 2006; Kaiser, Sriraman y Blomhoj, 2006a, 2006b. Kaiser, Sriraman, Blomhoj y García, 2007; Trigueros, 2009; Villa-Ochoa, Bustamante, y Berrio, 2010; Villa-Ochoa, Rojas, y Cuartas, 2010; entre otros (citados en Mesa, 2013).

Para identificar las características de varias de las perspectivas que se han perfeccionado con el transcurso de los años, se detallará, teniendo en cuenta el compendio realizado por Mesa (2013), en la siguiente tabla algunas de sus principales características:

Tabla 3

Perspectivas en modelación matemática. Kaiser et al. (2007)

Perspectiva	Objetivos	Tarea	Característica
Modelación realística	Está orientada a objetivos de carácter pragmático y utilitario, enfocada a la solución de problemas y comprensión del mundo real. Promueve el desarrollo de competencias modeladoras.	Crear una estructura de precios para un conductor de taxi.	Esta es una tarea abierta. Tú tienes que crear un modelo y por lo tanto necesitas el ciclo completo de la modelación.
Modelación contextual	Objetivos psicológicos y relacionados al tema de estudio, por ejemplo problemas de resolución de palabras.	Un taxista tiene un precio fijo de 2,00 € y el precio / km es de 0,15 €. La edad del conductor del taxi es de 43 y su taxi es de 7 años de edad. ¿Cuánto cuesta una unidad de 6 km?	Esto es principalmente un problema de palabras.
Modelación educativa	Objetivos pedagógicos y relacionados con el tema: XIII. Estructura de los procesos de aprendizaje y su promoción. XIV. Introducción de un concepto y su desarrollo. XV. Desarrollo motivacional y mejoramiento de las actitudes hacia las matemáticas. XVI. Promoción del pensamiento crítico en los procesos de modelación y desarrollo de modelos.	La misma tarea que en la modelación contextual.	Un profesor puede utilizar una tarea de modelación para explorar las funciones lineales. El profesor utiliza la comprensión del contexto para desarrollar conceptos matemáticos. La cuestión es cómo una tarea debe ser situada en el plan de estudios.
Modelación sociocrítica	Promoción de una comprensión crítica de los procesos de modelación y los modelos desarrollados como objetivo general, relacionado con el reconocimiento de la dependencia cultural de los ejemplos y enfoques desarrollados de modelación.	¿Cómo debe ser pagado un conductor de taxi?	Usted puede pensar sobre diferentes estructuras de precios, pero la intención también es pensar sobre la cuestión social. Se podría argumentar que un taxista debe ser pagado por cada hora que trabaja.
Modelación epistemológica	Promoción de conexiones entre las actividades de modelación y las actividades matemáticas, re conceptualización de las	¿Cuánto dinero gana un taxista al final del día?	En esta pregunta muchos conceptos están ocultos. Usted tiene que pensar

matemáticas y reorganización de las matemáticas escolares desde una perspectiva de la modelación.	sobre la estructura de precios... ¿Cuántos clientes? ¿Cuánta gasolina se necesitó? ¿El costo original del auto? Para un análisis profundo es necesario considerar varias perspectivas.
---	--

Nota. Fuente: Mesa, Y. (2013). *El modelo matemático como noción, concepto y categoría. Reflexiones desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática.* (p. 20-22). Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

En su investigación, Mesa (2013) destaca que al hablar de modelación las preguntas (perspectivas) más frecuentes y con más despliegue en los medios de divulgación son el *cómo* y el *para qué* de la modelación. De igual modo, señala que los propósitos más manifiestos son los pedagógicos, psicológicos y científicos, hallazgo que le permite señalar que la modelación matemática en la escuela permite desarrollar habilidades en los estudiantes para comprender mejor el mundo que los rodea, crear un panorama o estrategia que permita que la formación en matemáticas sea más llamativo en el cumplimiento del currículo escolar y presentar una imagen realista de las mismas como una ciencia, teniendo especial consideración en los contextos extra-matemáticos que pueden traerse al mundo de las matemáticas para su estudio y comprensión.

La pregunta por el *cómo* de la modelación, señala Mesa, pone en evidencia por lo menos tres enfoques diferentes: *proceso, método de enseñanza y aprendizaje, metodología de investigación*. En lo concerniente a la presente investigación, se partira del enfoque que entiende la *modelación como proceso*, esto, sin poner en detrimento la relevancia de los demás enfoques. Al definir este énfasis, se puede establecer una de las partes indispensables para construir las bases de trabajo y esclarecer más el panorama en las preguntas formuladas sobre modelación y modelo; al respecto Mesa (2013) señala:

Una mirada histórica a las actividades científicas permite identificar la modelación como un *proceso* que involucra ciertas acciones o actividades que llevan a la construcción o producción de modelos que dan cuenta de los fenómenos estudiados por investigadores o científicos. (p. 27)

En este punto, si bien señala Mesa que al entender la modelación como proceso suele reducirse a mera descripciones con las que se pretende tan solo equiparar y mostrar una conexión válida y amplia entre las matemáticas y lo extra-matemático (mundo real) que permita su estudio, si se pone la atención sobre Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Rodríguez, 2010 (citados en Mesa, 2013) nos encontramos que es también posible bajo un enfoque de proceso evidenciar ciclos de modelación o, considerando los niveles de matematización de Freudenthal, evidenciar cuestiones complejas en lo que implican sus categorías, niveles o etapas internas, las relaciones entre estas y el paso o cambio entre una y otra; lo que permite señalar que el enfoque tratado no implica solamente una manera simplista de descripción de serie de pasos.

A continuación, se mostrarán dos de los modelos de los ciclos de modelación mencionados, los cuales en su estructura o proceso muestran la complejidad de esta actividad en actividades científicas y la enseñanza de las matemáticas escolares:

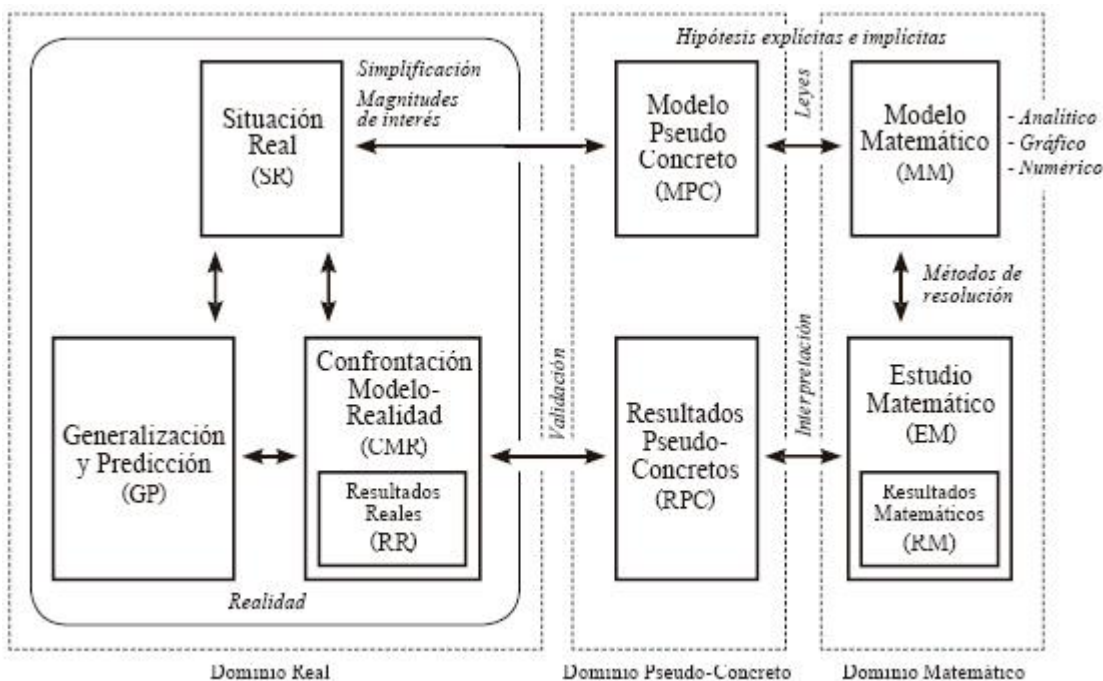


Ilustración 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2010)

Fuente: Mesa, Y. (2013). El modelo matemático como noción, concepto y categoría. Reflexiones desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática. (p. 28). Tesis de maestría.

Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

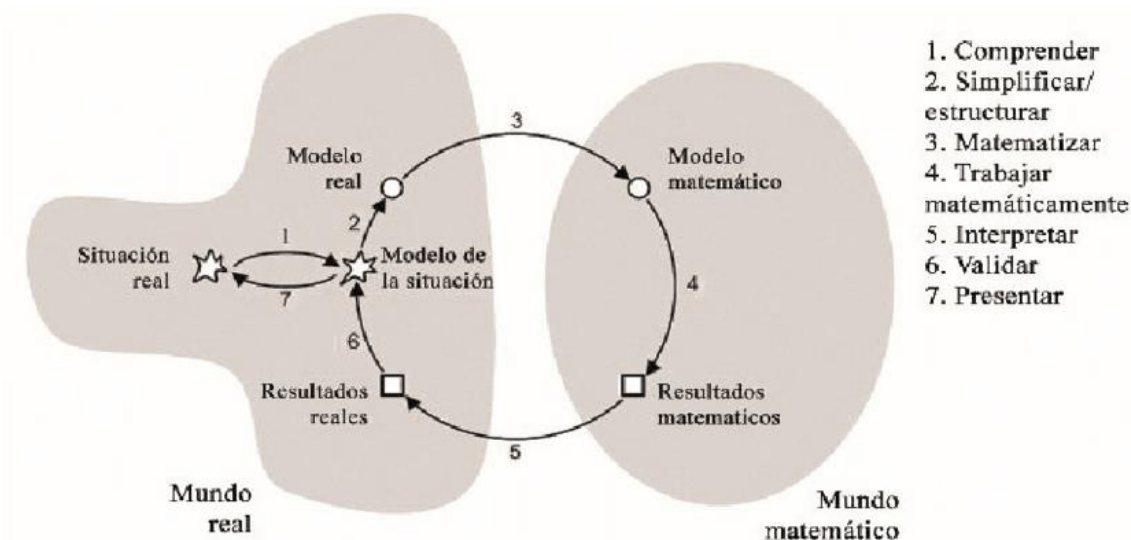


Ilustración 2. Ciclo de modelación de Blum y Borromeo-Ferri (2009)

Fuente: Mesa, Y. (2013). El modelo matemático como noción, concepto y categoría. Reflexiones desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática. (p. 30). Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

De estos ciclos es importante resaltar el papel que juega ‘la realidad’ o ‘el mundo real’ como punto de partida y factor clave en el mismo proceso de modelación, trayendo a consideración y estudio en las matemáticas diferentes aspectos del fenómeno en cuestión, tal como lo expresa Mesa (2013):

Esa “realidad” es asumida generalmente como punto de partida de la actividad de modelación. De esa manera, la modelación matemática, en tanto *proceso* se inicia en una realidad *dada*, la cual para ser conocida, descrita, resuelta, interpretada, etc. plantea unas condiciones dadas las cuales son tomadas por el modelador para llevar a cabo su actividad (p. 29)

La matematización, ligada al proceso de modelación, es otro término que ha trascendido en la actividad matemática en tanto que “*transforma el modelo real en un modelo matemático...*” (Mesa, 2013, p. 32). Este concepto también es mencionado por Vasco en algunos apartados de sus investigaciones y en documentos curriculares como los lineamientos de matemáticas en la educación colombiana, y por Freudenthal, quien le da un desarrollo especial en el proceso de modelación propuesto en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), referencia que se tratara posteriormente.

Por último, para adentrarnos en la comprensión de modelación y modelo y su relación con el aprendizaje de la función, retomaremos el marco conceptual del razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003). Partiendo de la referencia mencionada, y siguiendo especilamente a Kaput, 1994 & Rasmussen, 2000 (citados en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2003), empezaremos por expresar que modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable es indispensable para interpretar modelos de eventos dinámicos.

La concepción sobre modelación en el marco conceptual del razonamiento covariacional se puede asociar a *la modelación como proceso*, comparando el marco con las características de este enfoque de acuerdo con el trabajo de Mesa (2013). Al partir de una *situación real* se lleva a cabo el proceso de modelación según Rodríguez, 2010 y Blum y Borromeo-Ferri, 2009 (citados en Mesa, 2103) como lo exponen en sus respectivos esquemas, o de *subprocesos de la realidad* (Vasco, 2003), por tanto, esta es una característica básica del proceso de modelación. Por consiguiente, el tener como punto de partida eventos dinámicos permite identificar un punto clave en común con la modelación a trabajar por Carlson y colaboradores.

Adentrándose un poco más en el marco conceptual de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003), en el proceso de modelación de relaciones funcionales asociadas a situaciones dinámicas, el concepto de razón es fundamental. Los investigadores hacen hincapié en el estudio del razonamiento covariacional y, en este, del concepto de razón, al cual está vinculada la construcción de una imagen de cambio de una cantidad, la coordinación de las imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de covariación simultánea de dos cantidades; por consiguiente, a la vez que se atiende a la covariación se está fortaleciendo y desarrollando el razonamiento covariacional, lo que nos lleva a pensar que si un estudiante tiene un buen dominio de lo anterior, entonces tendrá mayor facilidad para comprender las relaciones funcionales y así crear y conceptualizar funciones (entiéndase ‘crear’ como la actividad de modelación y ‘modelo’ como el producto de ese proceso).

Si bien en el marco conceptual del razonamiento covariacional se hace énfasis en las acciones del estudiante cuando trabaja la covariación de situaciones dinámicas, debe señalarse que estas se desarrollan en concordancia con el proceso de modelación. Entendiendo lo anterior, se puede comprender la pertinencia de este marco conceptual en el desarrollo de la propuesta de

aula de esta investigación, máxime si se tiene en cuenta que en la actividad modeladora que lleven a cabo los estudiantes de las situaciones planteadas será elemento determinante la forma como afronten y ejecuten acciones mentales que se puedan evidenciar, en relación a lo que puedan analizar de la covariación presente y a través de esto alcanzar un desarrollo apropiado del razonamiento covariacional que contribuya notablemente en la modelación de las relaciones funcionales presentes.

2.2.4. La modelación en la Educación Matemática Realista.

Para la Educación Matemática Realista –EMR– (Freudenthal, 1984) la modelación es un instrumento fundamental al momento de pensar y formular situaciones en contextos realistas. La EMR plantea que las matemáticas deberían mantener una fuerte relación con la persona y que esa relación pueda percibirse y construirse a partir del contexto o la realidad con la cual este se relacione, permitiendo así una forma de ser percibidas cercanas y adquieran importancia para los niños y estudiantes en general. Apartados como el siguiente fortalecen la importancia de esa necesidad:

Las matemáticas –si han de tener valor humano– deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad, el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática (Heuvel-Panhuizen, M., 2009a, p. 37)

Para Freudenthal es fundamental el contexto realista a partir del cual el estudiante pueda trabajar y aprender matemáticas. Un contexto realista³ es aquel que tiene sentido para el estudiante, contextos relacionados a la forma como a través de la historia se construyeron esas

³ Realista en esta teoría está relacionado con el verbo holandés *zich realiseren* que significa *imaginar*. Esto es que las situaciones problema ofrecidas a los estudiantes se puedan imaginar y no tienen que ser únicamente situaciones percibidas por los sentidos o de la realidad (Heuvel-Panhuizen, M., 2009a, p. 37)

mismas matemáticas a partir de la realidad, que no sólo sean las matemáticas abstractas: “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (citado en Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 3).

2.2.4.1. El proceso de matematización en la EMR

Los contextos realistas son indispensables para desarrollar una apropiada actividad educativa, propiciando escenarios apropiados y favorables para llevar a cabo el proceso de matematización. De manera general, “matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma” (Freudenthal, 1973, p. 44, citado en Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 2); de acuerdo con lo anterior, se puede identificar la relevancia de los contextos realistas propuestos y defendidos en esta teoría, los cuales permiten cumplir con los momentos ideales en el proceso de matematización, a saber:

- *reconocer características esenciales* en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- *descubrir características comunes*, similitudes, analogías e isomorfismos;
- *ejemplificar ideas generales*;
- *encarar situaciones problemáticas* de manera paradigmática;
- *la irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones*;
- *buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones* iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas;
- *reflexionar* acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión a partir de *diferentes perspectivas* (Freudenthal, 1991, p. 30, citado en Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 2).

Freudenthal señala que las matemáticas son parte de las actividades humanas (Heuvel-Panhuizen, 2009a) y la matematización que se lleva a cabo en distintos niveles de actividad es una manera que evidencia y apoya esta idea. Entender así las matemáticas y la forma como estas se deberían enseñar y aprender a partir de este tipo de actividad es, según Freudenthal, fundamental en la educación matemática, pues la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo y llevando a cabo la matematización como meta central (citado en Heuvel-Panhuizen, 2009a), teniendo en cuenta sus dos formas: *la matematización horizontal y vertical*. Estas serán ampliadas a continuación en los niveles de matematización incluidos en los principios de la EMR, en el principio de nivel.

2.2.4.2. Principios de la EMR

Los principios son aquellos sobre los cuales se desarrolla la EMR, de esta manera se constituyen en herramientas conceptuales fundamentales de esta teoría. Cada uno de los principios establece ideas que permiten llevar a cabo el proceso de matematización, de acuerdo con la EMR, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. De acuerdo con Heuvel-Panhuizen (2008) estos principios son:

- I. Principio de actividad: este principio parte de la idea de Freudenthal de que las matemáticas se aprenden haciendo, que la mejor forma de enseñanza en la escuela no es aquella donde los conocimientos están en forma estática para ser transmitidos, sino que es a través de las reconstrucciones que puedan hacer los estudiantes desde donde se establecen las condiciones apropiadas para que se puedan aprender las matemáticas: “las *producciones propias* desempeñan un importante papel en la EMR” (p. 28).
- II. Principio de realidad: en este, la idea principal está relacionada con el *contexto realista* y se refiere a que las matemáticas presentadas a los estudiantes deben partir de contextos

ligados a la realidad, asemejándose al surgimiento histórico de las matemáticas, para llevar a cabo el proceso de matematización; luego, este tipo de trabajo permitirá que a través de las prácticas hechas se alcance tal nivel de comprensión y uso de herramientas matemáticas que así puedan identificar su aplicabilidad en más situaciones de lo cotidiano.

- III. Principio de nivel: este principio parte de la idea de los niveles de comprensión de las matemáticas a lo largo del estudio de las situaciones problemáticas planteadas y consolida el proceso de modelización. En principio, se hace referencia al cambio de niveles, desde los conocimientos informales hasta los formales, relacionando esto con la idea de Freudenthal de que el acercamiento a las matemáticas debería ser a partir de situaciones en contextos realistas para posteriormente llegar a un nivel formal de trabajo y comprensión de la situación en las matemáticas. Al respecto se observan los niveles propuestos por Freudenthal:

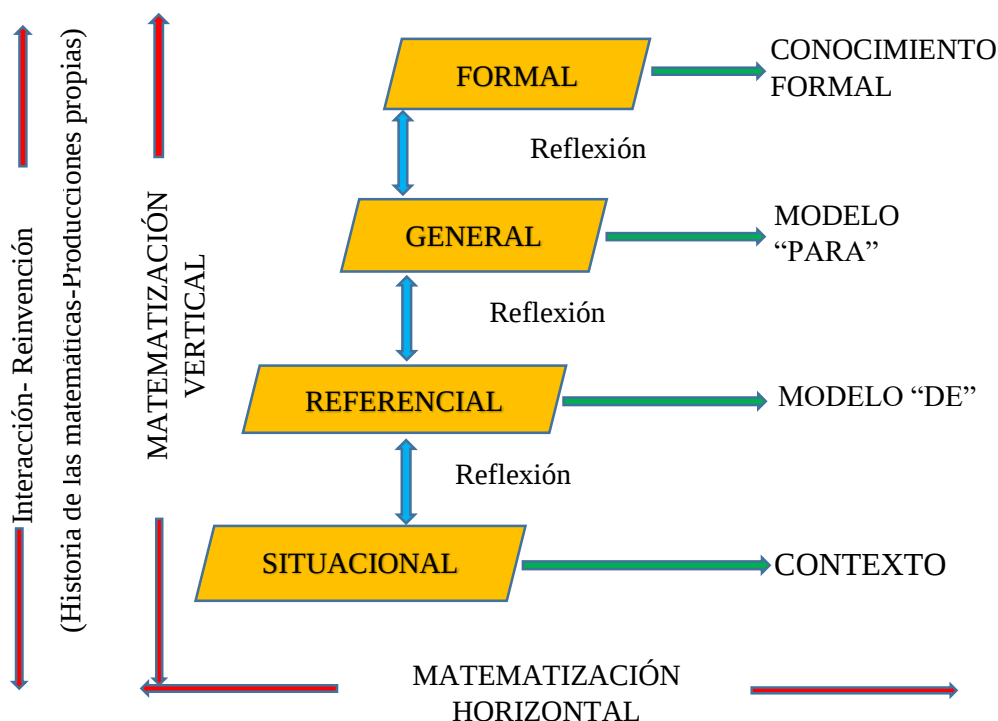


Ilustración 3. Niveles de matematización según Freudenthal.

Fuente: Bressan, Gallego, Pérez, y Zolkower (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*.

Los niveles muestran una descripción de lo que sería la progresión de “la capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto, a la creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones, a la adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias” (Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 29). Aquí es clave la reflexión sobre las actividades llevadas a cabo, sobre los modelos que surgen y sirven como recursos para relacionar esos conocimientos informales de la situación en contextos con las matemáticas formales y mediante esto alcanzar una comprensión profunda de lo aprendido, permitiendo mantener presentes las relaciones entre lo que se aprendió antes y lo que se

aprenderá después; esto se conoce como *matematización horizontal y vertical*. Respecto a estas formas de matematización se puede decir que:

En este proceso de matematización progresiva la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas. Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, no constituyendo una jerarquía estrictamente ordenada. (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 2004, citados en Bressan, Gallego, Pérez, y Zolkower, 2016, p. 6)

Las condiciones a cumplir en cada nivel son indispensables en el proceso, para esto se debe evidenciar de manera más específica lo propio en cada uno:

- Nivel situacional: en este nivel los estudiantes acuden a sus conocimientos informales para, primero, atender los primeros acercamientos a la situación, y segundo, identificar las matemáticas en el contexto para luego visualizarlas, esquematizarlas, reformularlas y descubrir regularidades. Dicho proceso también es conocido como *matematización horizontal*.
- Nivel referencial: de este nivel en adelante se habla de la *matematización vertical*. En este aparecen y se emplean modelos gráficos, materiales o notacionales de la situación trabajada. Aquí los modelos se consideran *modelos de*, en cuanto a que hacen parte de una situación particular.
- Nivel general: contando con la reflexión en cada instante del proceso de matematización, en este nivel se acentúa más y se pone el foco sobre los procesos empleados, conceptos, estrategias, modelos, con el propósito de llegar a la generalización⁴, de tal forma que se

⁴ La *generalización* para Freudenthal no es emplear un procedimiento a una situación nueva, sino que implica conectar las características de varias situaciones reconociendo la similitud y luego de lograr cierta clasificación, emplear un proceso de solución que abarque todas las situaciones identificadas. Gravemeijer, 1994 (citado en Bressan, Gallego, Pérez, y Zolkower, 2016)

puedan considerar formas de tratamiento adecuadas para situaciones con características idénticas. En este nivel los modelos se constituyen en *modelos para*, al relacionarse con casos que sean parecidos donde se pueden emplear estos modelos.

- Nivel formal: en este hay mayor comprensión de conceptos, procedimientos y notaciones convencionales de las matemáticas y a su vez estos se emplean en el trabajo de más situaciones.

Los anteriores niveles tienen la característica de ser dinámicos en el sentido que un estudiante, de manera reflexiva, puede moverse entre uno y otro siempre y cuando lo necesite, considerando que “un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o aspectos de un mismo contenido” (Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 8).

A continuación, se presentan los principios que vinculan las actividades de modelación en el estudio de las matemáticas, según la EMR

- A. Principio de entrelazamiento: este principio hace referencia a la forma como están estrechamente relacionados los capítulos de las matemáticas (Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 30), o conocimientos como lo numérico, métrico, espacial, aleatorio, analítico, variacional, en el trabajo de situaciones de contexto rico. Este principio se puede identificar en la propuesta de los estándares básicos de competencias en matemáticas, la cual establece que si se trabaja una situación problema compuesta de suficientes elementos para su trabajo y desarrollo de habilidades matemáticas, los conocimientos a usar serán varios de manera conjunta para la misma situación, de tal forma que se evidencia el entrelazamiento de estos. Incluso al trabajar un tipo de conocimiento, los diferentes contenidos a emplear se encuentran ligados por la situación propuesta; así se

instituye que “la fortaleza del principio de entrelazamiento reside en que confiere coherencia al currículo” (Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 31).

- B. Principio de interacción: en la EMR se considera la enseñanza de las matemáticas como una actividad social (Heuvel-Panhuizen, 2008), de donde se deduce entonces que, como tal, está ligada a la interacción grupal y que dicha interacción (trabajos de grupo) permite a los estudiantes intercambiar y compartir ideas, estrategias de solución y reflexiones para llegar a una comprensión más profunda del objeto de estudio, es decir, para alcanzar los aprendizajes deseados.
- C. Principio de orientación: según este principio, el papel del profesor y la propuesta curricular son trascendentales a la hora de propiciar escenarios favorables a los estudiantes para la reconstrucción de las matemáticas. Este principio promueve y resalta la participación activa del docente en las actividades de aprendizaje dispuestas a partir de la propuesta curricular institucional, indicando que, más allá de simples indicaciones y guías de trabajo, el docente debe prever las diferentes formas de trabajo de sus estudiantes, las debilidades y fortalezas de las mismas y, en general, favorecer escenarios propicios para que el estudiante se enfrente a varias cuestiones, busque opciones, indague, reflexione y proponga alternativas hasta que a través de esa reconstrucción de las matemáticas se alcancen las metas deseadas en la planeación.

2.2.4.3. La modelación y los modelos en la EMR

De acuerdo al marco general de la EMR, la modelización es una actividad clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tanto que suscita la ampliación de su comprensión y promueve el surgimiento de modelos de problemas en contextos (Heuvel-Panhuizen, 2009b). En relación a lo anterior, aunque el proceso de modelización no es el fin

último durante el aprendizaje de las matemáticas debe decirse que sí constituye una actividad clave, en la medida en que por medio de esta se originan modelos de la situación para su respectiva reflexión.

Dentro de la EMR no se entrega a los estudiantes modelos ya hechos que plasman determinados conceptos matemáticos, sino que se les plantean problemas en contexto presentados de modo tal que susciten actividades de modelización, las que a su vez dan lugar al surgimiento de modelos. (Heuvel-Panhuizen, 2009b, p. 34)

De acuerdo con las actividades de modelización que los estudiantes realicen de una situación realista, debe buscarse como objetivo que puedan hacer uso comprensivo de esos modelos para poder hacer nuevos procesos de modelización de mayor complejidad y a su vez que los niveles de comprensión sean ascendentes:

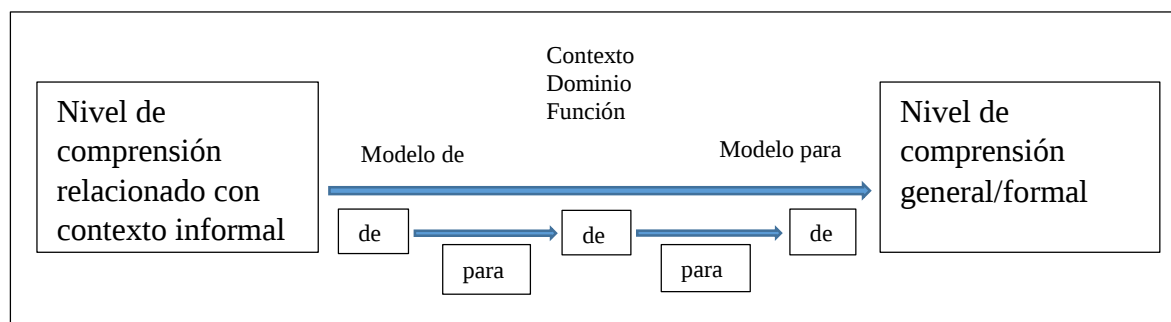


Ilustración 4. Niveles de comprensión y cambios de “modelo de” a “modelo para”
Fuente: Heuvel-Panhuizen (2009b). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*.

Una de las maneras de comprensión de modelo es la que se presenta en la EMR, a saber, el modelo como producto del proceso de modelización y clave para el tratamiento matemático de una situación realista (Freudenthal 1991, citado en Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016). De esta manera, en el planteamiento escolar que se pueda hacer de una situación realista a través de las cuestiones propuestas que giran en torno a la situación, es que los estudiantes pueden llegar a la construcción de modelos en principio informales que, a través de la reflexión que se puede llevar a cabo sobre los mismos, conducen a niveles mayores de comprensión y

formalización, identificándose en los niveles de matematización al principio como *modelos de*, en casos particulares, hasta llegar a *modelos para*, cuando se llega a la formalización y generalización del modelo para situaciones con características similares dentro y fuera de las matemáticas.

Para concluir, se señalan a continuación algunas ideas de la perspectiva didáctica que consideramos claves en el desarrollo de este trabajo de investigación, la formulación y organización de las actividades correspondientes a la propuesta de intervención de aula y para el análisis de resultados de la ejecución de las mismas.

- El estudio de la función a partir de fenómenos o situaciones en contextos cercanos, subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003) y contextos realistas (Freudenthal, 1985) en los cuales el estudiante pueda llevar a cabo diferentes análisis y trabajar la variación y el cambio.
- El estudio de la covariación como un enfoque didáctico para la captación de la variación y el cambio, el desarrollo de sistemas mentales y simbólicos (Vasco, 2003) y actividades cognitivas (Carlson, *et al.*, 2003) en el estudiante que afronta las actividades propuestas durante el proceso de modelación y evidenciar distintos niveles de razonamiento covariacional como parte del desarrollo del pensamiento variacional.
- El proceso de modelación, para este caso el propuesto por Freudenthal, como una estrategia metodológica de enseñanza de las funciones que permita el tratamiento de situaciones donde están presentes el cambio y la variación para llevar a cabo el proceso de modelación, percibir regularidades que, luego de ser identificadas, puedan ser representadas en diferentes registros de representación a través de la construcción de modelos, para el estudio de dicha situación.

A su vez, las actividades cognitivas desarrolladas por los estudiantes pueden ser analizadas, para así identificar acciones mentales y determinar niveles de razonamiento covariacional.

2.3. Perspectiva matemática: el surgimiento y desarrollo de los conceptos de función y función cuadrática

El propósito de este apartado es analizar e identificar aspectos de la función, más específicamente de la función cuadrática, definiciones, tratamientos y concepciones llevadas a cabo por los matemáticos e investigadores en la historia del estudio y comprensión de fenómenos cotidianos, construcción de las matemáticas y avance y desarrollo de otras ciencias, mediante el tratamiento, experimentación y definición de objetos de estudio, obstáculos, retos y alternativas. A continuación, analizaremos brevemente algunos momentos relevantes en la consolidación histórico – epistemológica de los conceptos de función y función cuadrática, también, la forma como son presentados y estudiados en la actualidad.

2.3.1. Un acercamiento a la historia de la construcción del concepto de función

A continuación, se estudiarán algunos obstáculos epistemológicos para el surgimiento del concepto, el estudio de las curvas, el estudio de las ecuaciones, las curvas mecánicas, el desarrollo del cálculo y el análisis matemático y el desarrollo de la teoría de conjuntos.

2.3.1.1. Algunos obstáculos epistemológicos en el surgimiento de la noción de función

En relación a las ideas relacionadas con el surgimiento de la noción de función, se presenta a continuación dos (2) de los obstáculos histórico – epistemológicos que fueron claves y ocasionaron que la definición de dicho concepto tuviera espacios de reflexión, búsqueda y experimentación de diversos tratamientos y definiciones.

1. **La disociación entre número y magnitud, evidenciada en el trabajo llevado a cabo por los griegos con las proporciones y las ecuaciones.** La comprensión por parte de los filósofos y matemáticos de la época del *cambio* y el *movimiento* como factores externos a las matemáticas y la seguridad de que éstas podían estudiarse a partir de la relación entre magnitudes variables, dio lugar al surgimiento de la idea de que las matemáticas eran “estáticas”, y que se podían tratar con incógnitas e indeterminadas (Ruíz – Higuera, 1994); de esta manera, las proposiciones como *proposiciones homogéneas* (razones que estaban formadas por magnitudes del mismo tipo) permitieron avances notables sobre el estudio del movimiento pero no posibilitaron relaciones entre magnitudes distintas y así se dificultaba encontrar *relaciones de dependencia* que acercaran directamente a la noción de función (Azcárate y Deulofeu, 1996).
2. La idea pitagórica de que todo es número y que el mundo está conformado por una multitud de unidades indivisibles, además, que existía una unidad indivisible que generaba otras magnitudes, asuntos que posteriormente fueron confrontados con las paradojas de Zenón y la inconmensurabilidad (Azcárate y Deulofeu, 1996; Ruíz – Higuera, 1994). La inconmensurabilidad se evidenció en casos donde no era posible encontrar una unidad para medir dos cantidades de magnitudes, esto condujo a utilizar por separado números (enteros positivos) y magnitudes, tal como lo haría Euclides en sus dos libros: uno para números y otro para magnitudes, suscitando que el trabajo de acuerdo con la concepción del *continuo* para las magnitudes, fundamental en la concepción de función, y la idea de magnitud variable, no pudieran ser expresados con números, ante la ausencia de los irracionales, dificultando el avance hacia la función pues “*esto impide que se establezcan relaciones*

generales numéricas entre las magnitudes” (Rene de Cotret, 1985, p. 45, citado en Ruíz – Higuera, 1994, p. 154).

Dichas dificultades u obstáculos históricos – epistemológicos fueron relevantes y trascendentes en las investigaciones posteriores motivaron y promovieron el estudio de situaciones de variación y cambio, relacionados en principio con el estudio del movimiento, tal como se presenta a continuación.

2.3.1.2. El estudio de curvas a partir de ecuaciones

Gracias a los avances alcanzados durante los siglos XV y XVI respecto a la configuración de los números reales, los imaginarios y el álgebra simbólica –en la cual se emplean signos para operaciones y letras para representar cantidades desconocidas y coeficientes arbitrarios–, fue notable el progreso hacia la formulación de las primeras definiciones de función. Así, el avance en la notación algebraica por parte de Fermat y Descartes condujo a la aparición de la geometría analítica en el siglo XVII, utilizando el método de coordenadas para expresar las relaciones numéricas de dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, dando la posibilidad de expresar un problema de geometría plana en términos de un problema algebraico equivalente y así introducir la idea de *variable algebraica*⁵.

El estudio de las curvas y cortes de superficies a partir de ecuaciones permite avanzar en ideas fundamentales en relación al concepto de función. Por un lado, la posibilidad de expresar una ecuación en x e y trajo consigo el poder establecer relaciones entre cantidades variables y calcular los valores de una variable para determinados valores de la otra, trazando el camino para

⁵ Esta idea es introducida gracias a la proposición “*Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva*” (Descartes, citado en Ruíz – Higuera, 1994, p. 165).

que posteriormente se llegara a establecer las funciones como relaciones entre conjuntos de números y la representación de funciones por medio de fórmulas (Azcárate y Deulofeu, 1996). Según Sierpinski (1989, citado en Ruíz – Higuera, 1994, p. 168) la notación simbólica y la resolución de ecuaciones permitió superar el obstáculo epistemológico de la disociación entre número y magnitud, sin embargo, trajo otra dificultad para la construcción del concepto de función, pues se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran las que podían ser expresadas como expresiones algebraicas y ecuaciones.

2.3.1.3. El estudio de curvas mecánicas

El surgimiento del análisis matemático y el desarrollo de series infinitas de potencias, gracias a Newton, Leibnitz y otros, permitió el estudio de curvas mecánicas que habían sido excluidas por Descartes y el avance en otras contribuciones al estudio de la función. De las aportaciones de Newton al estudio de funciones, mencionaremos brevemente la interpretación geométrico – cinemática de conceptos del análisis matemático y el método de fluxiones, el cual consistía en presentar dos problemas del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento y caracterizados por la velocidad y el valor del límite del cociente de diferencias $\Delta x/\Delta t$.

Por su parte, Leibnitz también aportó al estudio de las series infinitas de potencias, la notación diferencial y las funciones. En su investigación, identificó que “la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas cuando estas tienden a cero” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 49), introdujo las notaciones para los diferenciales (dx , dy) y para la integral, $\int$, y acotó por primera vez el término función (en 1673), posibilitando que más adelante este fuera utilizado en forma más general (ya en 1694) ligado a la geometría diferencial. En relación al término variable, en Leibnitz se puede observar

ya una concepción distanciada de la cinemática en comparación con Newton, al considerarla un elemento genérico de un conjunto cualquiera.

2.3.1.4. El análisis matemático

Con el fortalecimiento del análisis matemático en el siglo XVIII, el énfasis geométrico o cinemático que se había llevado a cabo en el estudio de las funciones fue cambiando hacia el uso casi exclusivo del álgebra. Euler introdujo la notación $f(x)$ y la definición de términos en relación a la función:

Al definir las nociones iniciales se refiere a los términos constante, cantidad definida que toma siempre un valor determinado, y variable, cantidad indeterminada o universal, que comprende en sí misma todos los valores determinados (refiriéndose a los valores del conjunto de los números complejos o a alguno de sus subconjuntos). (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 50)

Posteriormente, en su primera definición de función en *Introductio in analysis infinitorum* (1748), emplea el término de expresión analítica: “Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números u objetos constantes” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 50). Sin embargo, debido a una controversia con D’Alembert sobre el problema de vibraciones de una cuerda fijada en sus extremos, en el cual aceptó la introducción de curvas que no cumplen leyes analíticas, formuló años después una nueva definición en su *Institutiones calculi differentialis* (1755): “Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquel se llama una función de dicha variable” (p.50).

2.3.1.5. La definición de función en la Teoría de Conjuntos

El desarrollo del cálculo y el análisis en el siglo XVIII y XIX trajo consigo varios aportes en lo que corresponde a la complejidad de la construcción de la expresión moderna de la noción de función.

A continuación se mencionan algunos de dichos aportes, específicamente lo que surgen del trabajo de Lagrange, Fourier, Dirichlet y Cauchy, hasta el surgimiento de la definición en la Teoría de Conjuntos.

Llamamos función de una o varias cantidades a *toda expresión del cálculo* en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las funciones que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas. (Lagrange, citado en Ruíz – Higuera, 1994, p. 177-178)

De acuerdo con lo anterior, Lagrange restringe el concepto de función a las funciones analíticas que están definidas por series de potencias, más específicamente a términos proporcionales a las potencias reales de la variable independiente.

Por su parte, al representar por medio de series de funciones analíticas funciones arbitrarias, Fourier logró un mayor nivel de generalidad de funciones a las que se les puede aplicar, a diferencia de las series de Taylor: “Incluso si hay muchos puntos en los que no exista la derivada de la función o en las que la función no sea continua, la función puede tener un desarrollo en series de Fourier” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 52).

En consonancia con la ideas de Fourier acerca de desarrollos en serie de funciones arbitrarias, Dirichlet propuso la siguiente definición de función:

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x . (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 53)

Por otra parte, paralelamente se desarrollaron en las funciones de variable compleja avances por Cauchy, Riemann y Weirstrass y que coincidieron con conceptos de Lagrange, Fourier y Dirichlet.

Por último, en las consideraciones a tener en cuenta en este repaso histórico concierne mencionar el avance a la definición de función en la teoría de conjuntos, comprendiendo lo logrado hasta el momento como que la función estaba definida para cualquier punto del continuo de valores reales o complejos, o en los puntos de un intervalo dado, pero que ahora estos vienen a ser casos particulares de una definición en términos conjuntistas:

Dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función o aplicación de A en B es una ley que a cada elemento x de A le hace corresponder un solo elemento y de B ; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano $A \times B$ tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F , entonces $y=z$. (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 53)

Se logra de esta manera una definición profunda en las matemáticas pero que ha perdido varias características de las definiciones previas como la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, la dependencia; aquellas relacionadas con los problemas iniciales que dieron origen al estudio de la función.

2.3.2. La función en las matemáticas actuales

El concepto de función ha presentado un desarrollo enriquecido con la estructuración de las matemáticas en general, dando una connotación actual al concepto *per se* fundamental en el estudio de las matemáticas escolares y de nivel superior o pregrado. Para el desarrollo de este apartado observaremos la manera como se presenta este concepto en el libro *Calculus I* (Apóstol, 1984) y *Calculo I de una variable* (Larson y Edwards, 2010), de acuerdo con su perspectiva de enseñanza, definición de conceptos relacionados con la función y algunas aplicaciones.

Respecto a la presentación de las propiedades de este objeto matemático, en Larson y Edwards (2010), un texto empleado en pregrado para programas académicos como las ingenierías, administración, entre otros, se hace una presentación del concepto de función en un “Capítulo P”, que es de introducción de nociones y conceptos. En Apóstol (1984), un texto empleado en pregrado en programas académicos como el de matemáticas puras, la presentación de las funciones se hace en el capítulo I de “Los conceptos del cálculo integral”.

En el “Capítulo P” de Larson y Edwards (2010) se inicia el estudio de las gráficas cartesianas – hablando de Descartes – y su relación con las ecuaciones. En el apartado se considera el aporte histórico de Descartes al unir el álgebra y la geometría dando la posibilidad de expresar gráficos geométricos de forma analítica y representar expresiones algebraicas de forma gráfica y logrando un gran avance en el cálculo. Aunque se enfatiza en las ecuaciones, el primer ejemplo que se aborda corresponde a una función cuadrática, la cual se presenta en su forma algebraica para ser representada gráficamente no sin antes hacer uso de la representación tabular, como se observa a continuación:

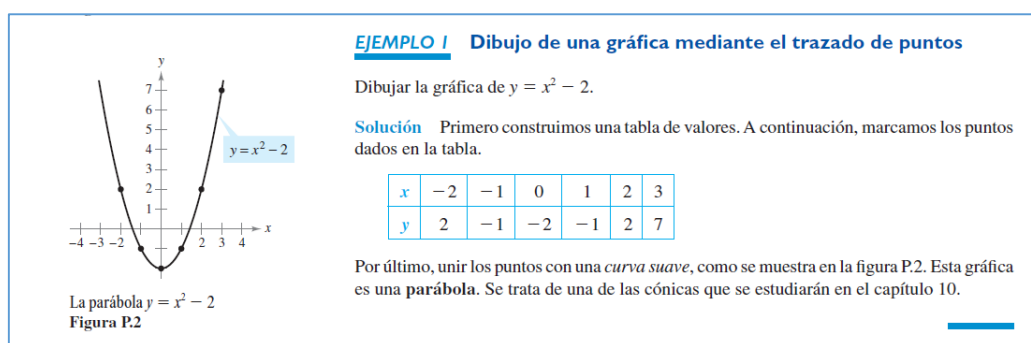


Ilustración 5. Ejemplo de función cuadrática.

Fuente: Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable- Novena Edición*. Ed. McGraw Hill. México. (P.2)

Analizando el ejemplo en la gráfica, se puede identificar que se abordan propiedades de la función, como sus diferentes registros de representación, la familia de las funciones representada (parábola), las cónicas, la noción de continuidad al expresar “curva suave” en el

tipo de línea que se traza para unir los puntos y la posibilidad de hacer representación gráfica de parejas de valores para x y y . Un aspecto no menor es que este ejercicio no está asociado a ningún tipo de contexto o situación problemática, dando la apariencia de mostrar la relación de lo geométrico y lo analítico comentado al inicio respecto al aporte de Descartes.

En Apóstol (1984), en la introducción, se hacen varios comentarios acerca de la importancia del cálculo que muestran la relevancia del mismo, por ejemplo:

El cálculo no sólo es un instrumento técnico, sino que contiene una colección de ideas fascinadoras y atrayentes que han ocupado el pensamiento humano durante centurias. Estas ideas están relacionadas con velocidad, área, volumen, razón de crecimiento, tangente a una línea, y con otros conceptos referentes a otros dominios. El cálculo obliga a detenerse y a pensar cuidadosamente acerca del significado de estos conceptos. (p. 1)

Estas características del cálculo permiten comprender de manera integral y compleja el sentido de dicha materia y los objetos matemáticos relacionados con este, como es el caso de la función.

En un ejemplo inicial de la obra de Apostol (1984), se presentan los dos problemas fundamentales del cálculo: determinar un número que mida el área bajo una curva y determinar un número que mida la pendiente de la recta tangente a la curva (p. 2).

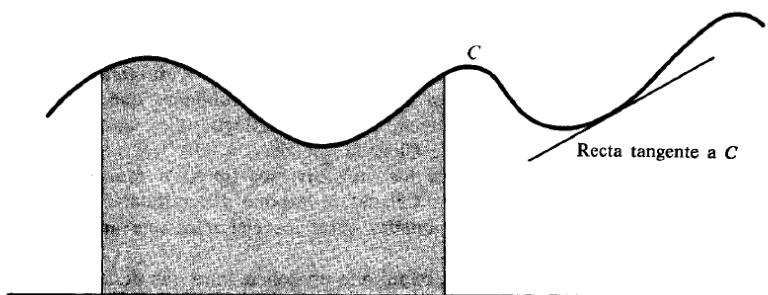


Ilustración 6. Problemas fundamentales del cálculo.

Fuente: Apóstol, T. (1984). *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Segunda Edición*. Ed. Reverté. Barcelona. (P.2)

Esta introducción da cuenta del sentido de la forma como se exponen en el texto los objetos matemáticos fundamentales del cálculo y el gráfico expresa la orientación matemática fundamental dentro del estudio de la estructura de las matemáticas. Por otra parte, la presentación de la teoría de conjuntos se hace al inicio del texto, dando la orientación de los conceptos, notaciones y propiedades derivadas de esta teoría y que serán empleadas en el capítulo 1 y en los siguientes.

Por su parte, Larson y Edwards (2010), de forma previa al abordaje del concepto de función, hacen una presentación de otros elementos asociados a las ecuaciones y funciones. Respecto a las propiedades de las gráficas se presentan los *puntos de intersección* y se indica que un punto $(a, 0)$ o $(0, b)$ es intersección en x o y de la gráfica de una ecuación si son, respectivamente, puntos solución de esta (p. 4); también se muestran algunas gráficas de ejemplo. Otro concepto presentado es el de *simetría de gráficas*.

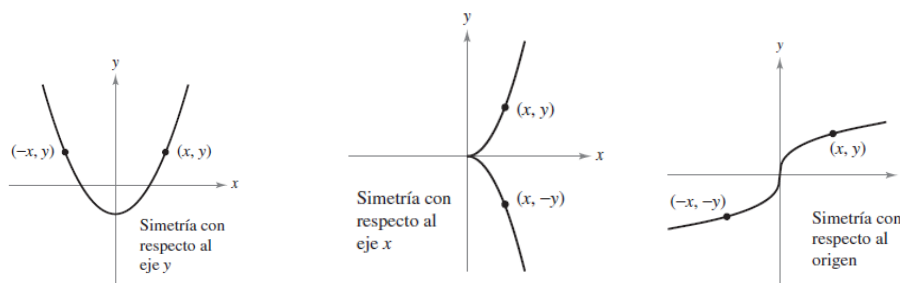


Ilustración 7. Tipos de simetría de funciones.

Fuente: Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable- Novena Edición*. Ed. McGraw Hill. México. (P. 5)

Al respecto, se definen tres tipos de simetría: i) respecto al eje x , ii) respecto al eje y , y iii) respecto al origen. Para estos tipos de simetría se destaca un eje de simetría que es referencia en los dos primeros casos y un punto en el segundo, referencias que son claves para determinar la porción de gráfica que se refleja.

Los modelos matemáticos también se abordan, y de ellos se expresa que se usan para aplicar matemáticas en la vida real. Al respecto se tiene que:

Si se desarrolla un modelo matemático con el fin de representar datos reales, debe esforzarse por alcanzar dos objetivos a menudo contradictorios: precisión y sencillez. Es decir, el modelo deberá ser lo bastante sencillo como para poder manejarlo, pero también preciso como para producir resultados significativos. (Larson y Edwards, 2010, p. 7)

Es importante esta definición que se hace de *los modelos* y *la pendiente* porque son parte fundamental del trabajo en cálculo, además, expresan uno de los objetivos que se pretende respecto al trabajo que se va a desarrollar en el libro en relación a los contextos abordados. Del proceso de modelación se tienen ejemplos como:

EJEMPLO 6 El aumento de dióxido de carbono atmosférico

El observatorio de Mauna Loa, Hawai, registra la concentración de dióxido de carbono (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la figura P.11 se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años. En el número de julio de 1990 de *Scientific American*, se utilizaron esos datos para pronosticar el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035, utilizando el modelo cuadrático:

$$y = 316.2 + 0.70t + 0.018t^2 \quad \text{Modelo cuadrático para los datos de 1960 a 1990.}$$

donde $t = 0$ representa a 1960, como se muestra en la figura P.11a.

Los datos que se muestran en la figura P.11b representan los años 1980 a 2007, y pueden modelarse mediante

$$y = 304.1 + 1.64t \quad \text{Modelo lineal para los datos de 1980 a 2007.}$$

donde $t = 0$ representa a 1960. ¿Cuál fue el pronóstico dado en el artículo de *Scientific American* de 1990? Dados los datos más recientes de los años 1990 a 2007, ¿parece exacta esa predicción para el año 2035?

Ilustración 8. Ejemplos de modelos matemáticos.

Fuente: Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable-Novena Edición*. Ed. Mc Graw Hill. México. (P. 7)

Respecto a *la pendiente*, en Larson y Edwards (2010) se presenta como “una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha” (p. 10). Lo anterior permite una variación horizontal ($\Delta x = x_2 - x_1$, cambio en x) y una vertical ($\Delta y = y_2 - y_1$, cambio en y) que se define como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$; este tipo de definición es la manera formal de la pendiente. También se

presentan las ideas de razones, ritmos y velocidades de cambio, manifestando que estas son de igual modo formas de entender la pendiente.

En el capítulo 1 de los conceptos del cálculo integral, Apóstol comienza, al igual que Larson, señalando la importancia del aporte de Descartes al cálculo por su representación y unificación del álgebra y la geometría, mostrando la ubicación de puntos en el plano, la denominación de los ejes cartesianos, la conformación de puntos o pares ordenados por un valor que corresponde a las abscisas y otro a las ordenadas, los cuadrantes del plano; todo ello ligado a las ecuaciones y un ejemplo de la circunferencia.

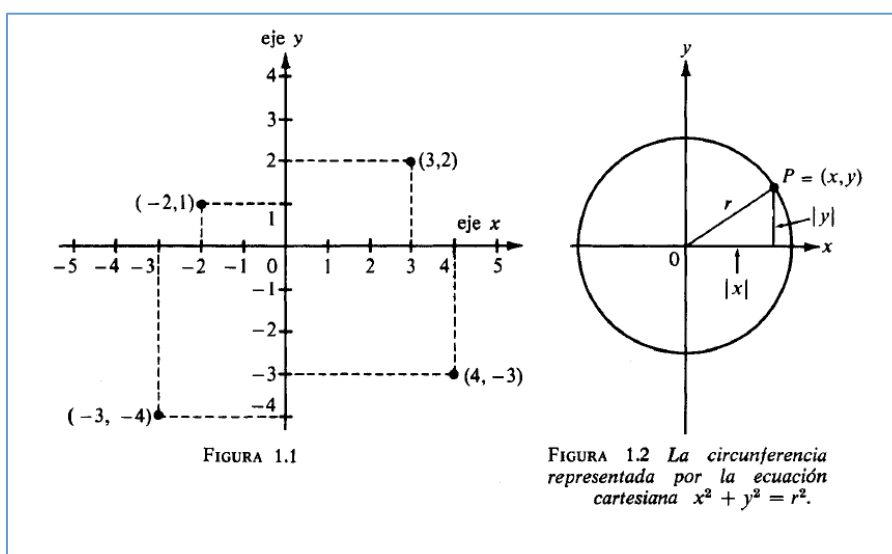


Ilustración 9. El plano cartesiano y la circunferencia.

Fuente: Apóstol, T. (1984). *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Segunda Edición*. Ed. Reverté. Barcelona. (P.60)

Luego de este ejemplo se exponen algunas situaciones susceptibles de ser estudiadas a partir de las relaciones funcionales que implican. Uno de los ejemplos presentados es:

La fuerza F necesaria para estirar un muelle de acero una longitud x a partir de su longitud normal, es proporcional a x . Es decir $F = cx$, donde c es un número independiente de x , que es la constante del muelle. Esta fórmula descubierta por Robert Hooke a mediados del siglo XVII se denomina la ley de Hooke y se dice que expresa la fuerza en función del alargamiento (Apostol, 1984, p. 61 – 62)

Este ejemplo puede ser interpretado como una relación de dependencia entre las cantidades, sin embargo, es de pleno conocimiento el enfoque de correspondencia que se expone en la Teoría de Conjuntos de la cual se consideran los conceptos en el texto.

En la introducción a las funciones, Larson y Edwards (2010) las presenta como:

Una relación entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y) , donde x es un elemento de X y y un elemento de Y . Una función de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x , entonces también tienen el mismo valor de y . (p. 19)

Esta primera definición de relación funcional se asocia a la idea conjuntista de función y también se indica a x como variable independiente y a y como variable dependiente, que más adelante en el texto se define como la definición de una función real de una variable real:

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y . El dominio de f es el conjunto X . El número y es la imagen de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el valor de f en x . El recorrido o rango de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X . (p. 19)

De acuerdo con la definición, es claro identificar el enfoque de correspondencia a tratar en el texto respecto al concepto de función y lo que a ella corresponde de la relación entre los valores de x y y , tal como se representa gráficamente:

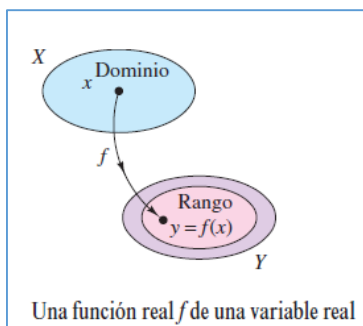


Ilustración 10. Definición de función real de variable real.
Fuente: Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable- Novena Edición*. Ed. Mc Graw Hill. México. (P. 19)

De las funciones también se puede identificar su *dominio* y *rango*. El dominio está conformado por el conjunto de números reales para el cual está definida una función o el que se da junto con la función; el rango está determinado por el dominio y hace parte o puede ser todo el conjunto de números reales. En relación al dominio y el rango también se explicita que cualquier función tiene una representación gráfica, para la cual se introduce la notación “ x = Distancia dirigida desde el eje y ” y “ $f(x)$ = Distancia dirigida desde el eje x ” (p. 22).

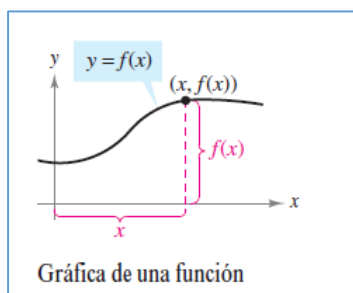


Ilustración 11. Gráfica de una función.
Fuente: Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable- Novena Edición*. Ed. Mc Graw Hill. México. (P. 22)

En relación al comportamiento de la gráfica de la función, en el capítulo 3 de Larson (2010) se hace referencia al crecimiento y decrecimiento en una función, expresando que “Una función f es *creciente* sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ ”, al igual que “Una función f es *decreciente* sobre un

intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ ” (p.179). Sin especificar en la función cuadrática, en el texto se abordan otros aspectos de las funciones en términos generales y de las funciones polinómicas, que se van estudiando a medida que se introduce en el campo de los límites, las ecuaciones diferenciales, derivadas e integrales.

En Apóstol (1984) una primera presentación de la noción de función se expresa como:

Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y , una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y . El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y , asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función (Este puede ser todo el conjunto Y , pero no es necesario) (p.62).

Respecto a esta forma como se relacionan los valores de los conjuntos X y Y , la representación que describe la regla de correspondencia entre los valores de x y y se expresa mediante la gráfica:

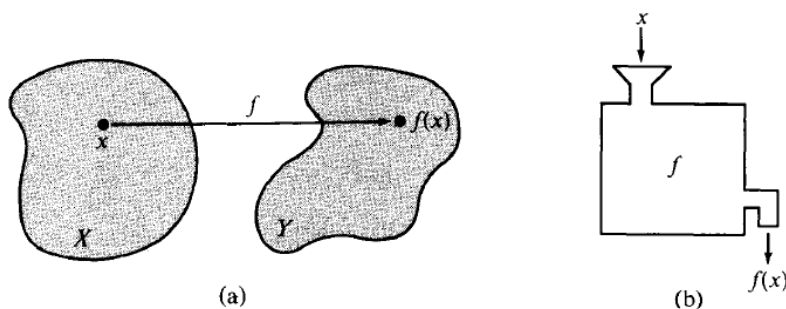


Ilustración 12. Representación esquemática de una función.

Fuente: Apóstol, T. (1984). *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Segunda Edición*. Ed. Reverté. Barcelona. (p. 63)

De esta se destaca la notación x para representar todos los valores del dominio de una función f y $f(x)$ para representar todos los valores que corresponden a x en la misma función. Posteriormente, se establece la definición de función a partir de conjuntos de pares ordenados como:

Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento". Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el dominio de f . El conjunto de los segundos elementos y se denomina recorrido de f , o conjunto de valores de f . (Apostol, 1984, p. 65)

Apóstol define las funciones polinómicas como aquellas de la forma:

$$P(x) = c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k, \text{ con } c_0, c_1, \dots, c_n \text{ como los coeficientes del polinomio}$$

y el entero no negativo n es su grado (si $c_n \neq 0$); esta definición es relevante de acuerdo con el trabajo de la función cuadrática como una de las funciones polinómicas y que se abordará en la propuesta de aula de este trabajo. Otra característica fundamental de las funciones está

relacionada con *la continuidad*, la cual es entendida del siguiente modo: "Se dice que una

función f es continua en un punto p si a) f está definida en p , y b) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ (P.160),

comprendiendo la importancia de la definición del límite de una función:

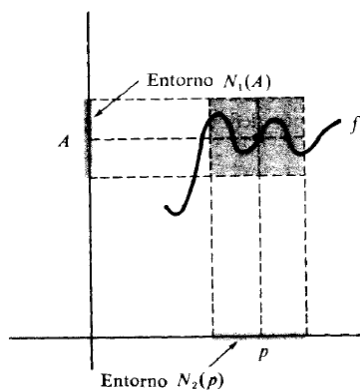


FIGURA 2.3 Existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$, pero no se dice nada de f en p .

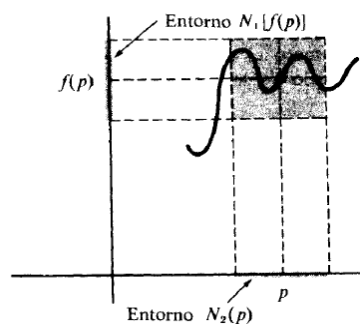


FIGURA 3.3 f está definida en p y $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, de manera que f es continua en p .

Ilustración 13. Definición de límite.

Fuente: Apóstol, T. (1984). *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Segunda Edición*. Ed. Reverté. Barcelona. (p. 158)

Aunque se han abordado definiciones relevantes relacionadas con la función, es de resaltar que la definición de variable, parámetro, constante, ecuación, entre otros elementos de

las funciones, no se encuentran explicitados entre las definiciones, pero sí se trabaja con ellos en diferentes momentos del trabajo con el cálculo.

El siguiente esquema resume aspectos conceptuales claves en el aprendizaje del concepto de función cuadrática:

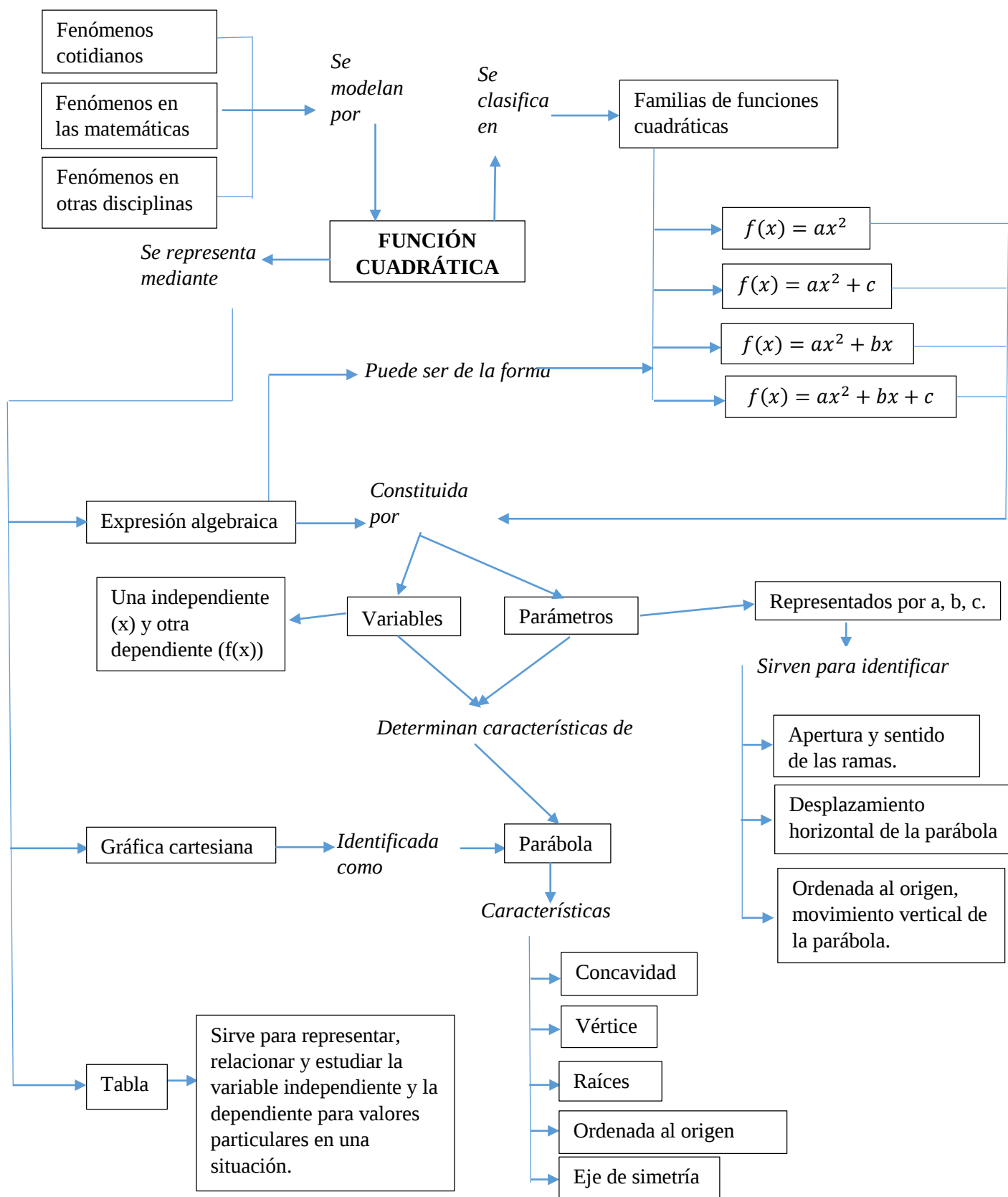


Ilustración 14. Esquema de las propiedades de una función cuadrática.

El anterior gráfico es una manera de expresar la articulación de los insumos teóricos de la comprensión de la función en las matemáticas con las anteriores perspectivas revisadas. De acuerdo con lo anterior, se consideran situaciones en contextos cotidianos, matemáticos y de otras ciencias, que pueden ser estudiadas en distintas actividades escolares con el propósito de llegar a la comprensión de las funciones, y, en especial, de las funciones cuadráticas como compete a este trabajo.

La función cuadrática se estudia a partir de la familia de funciones que las comprende, haciendo uso de las distintas representaciones como son su forma algebraica, su gráfica cartesiana y las tablas de valores. A partir de su expresión algebraica se trabajan propiedades como las funciones de las constantes – parámetros y de las variables para a partir de estos poder modelar varias expresiones de la situación estudiada. Así mismo, observar y analizar las gráficas cartesianas permite comprender otras características como la forma de la parábola, en la cual se puede identificar el vértice, concavidad, simetría y cortes. Finalmente, debe decirse también que el estudio de tablas y los cambios de los valores de las cantidades es otra forma de analizar y comprender propiedades de la función cuadrática, como la variación, que se van presentando en las cantidades.

La unificación del trabajo con las distintas representaciones favorece el abordaje de propiedades fundamentales de la función cuadrática, con el propósito de que, de manera simultánea, se fortalezca la actividad enmarcada en el pensamiento variacional de los estudiantes, una actividad fundamental para el análisis en esta investigación.

Del apartado de la perspectiva disciplinar acerca de la naturaleza de las funciones se pueden establecer aportes y elementos claves para el desarrollo de la propuesta de aula, como:

- La identificación de obstáculos epistemológicos en la evolución de la noción de función da cuenta del gran avance hacia, por ejemplo, la posibilidad de formar razones heterogéneas entre dos cantidades diferentes y de esta manera poder llevar a cabo un análisis de la forma como varían los valores de cada una en una situación dinámica.
- El estudio del concepto de función ha sido determinante para el desarrollo de otros dominios de las matemáticas, permitiendo reconocer la relevancia de este objeto matemático y sus propiedades en la conformación de lo que en la actualidad se conoce como el cálculo integral y el análisis. De este aspecto se toma la relevancia de la enseñanza de la función cuadrática en la propuesta.
- Analizar las regularidades en los fenómenos observados. Estos primeros acercamientos dan cuenta de la importancia de atender a los comportamientos que van presentado determinadas cantidades de acuerdo con las condiciones de una situación en la que están implicadas, de modo que las posibles regularidades permiten hacer descripciones, estudios e hipótesis de los comportamientos posteriores.
- En la historia de las matemáticas, el desarrollo de la función muestra un instante donde la relación de dependencia entre cantidades variables fue considerada de manera especial como una forma de hacer el estudio de fenómenos dinámicos en donde la continuidad expresada en el tiempo permitía hacer estudios detallados del comportamiento de dichas cantidades. De esta etapa, se considera para este trabajo la posibilidad de tomar contextos dinámicos para acercarse a la noción de función, como una relación de dependencia entre las cantidades vinculadas y posibilitando analizar la variación y covariación de los valores de las mismas, además, la comprensión de las características, por parte del estudiante, de las constantes y las

variables de una función, en términos de Euler, para lograr un acercamiento a la noción de este objeto matemático.

Capítulo III. La función cuadrática como covariación

En el presente capítulo se tratan aspectos relacionados con la consolidación de la propuesta de aula, especificándose lo concerniente a la estructura y todos los aspectos tomados de los referentes teóricos de acuerdo con las perspectivas curricular, didáctica y disciplinar; además, las condiciones presentes durante la implementación en la institución educativa. Por último, se analizan las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, tomando como referencia la rejilla de análisis propuesta para así poder identificar, caracterizar y clasificar diferentes aspectos del razonamiento variacional movilizados en los estudiantes.

3. 1 Sobre el diseño de la propuesta de aula

En la estructura de esta propuesta de aula (ver anexo 1) convergen aspectos desarrollados en el marco de referencia como parte de los objetivos específicos establecidos: en estos se planteó identificar aportes teóricos y metodológicos en la investigación, a partir de las perspectivas curricular, didáctica y matemática. De acuerdo con los documentos curriculares colombianos, para el diseño de esta propuesta de aula se considera la idea de potenciar el pensamiento matemático, comprendiendo que dentro de este se debe desarrollar y potenciar el pensamiento variacional a partir del análisis de relaciones funcionales, como una relación de dependencia, centrando la atención en el estudio de la variación y el cambio presente en situaciones dinámicas, de acuerdo con el enfoque covariacional, y siendo el proceso de modelación un factor fundamental en este propósito. Los EBC en Matemáticas tenidos en cuenta corresponden a los descritos en los grados 8° y 9° como “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas” e “Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación”, evidenciando lo

ajustada que está la propuesta de aula a los lineamientos curriculares de la educación básica secundaria en Colombia y su pertinencia de acuerdo con los propósitos en cada estándar.

De acuerdo con el enfoque didáctico, los aportes considerados se derivan, por un lado, de lo propuesto por Carlson y colaboradores en su estudio de la variación y más específicamente de la covariación entre cantidades que cambian, en contextos dinámicos, considerando la modelación como un proceso que se presenta en el análisis de la covariación y, por otro parte, de lo propuesto por Freudenthal sobre el proceso de modelación como un factor clave para la enseñanza de las matemáticas y el estudio de problemas en contextos realistas.

De acuerdo con el enfoque disciplinar, los aportes considerados tienen que ver con las evidencias históricas del estudio de relaciones funcionales en la cinemática, las definiciones de variable, parámetro, función, puntos de inflexión, la notación algebraica, entre otras, que permiten definir las propiedades fundamentales de las funciones y la función cuadrática.

3.1.1. Situaciones y actividades

Las dos situaciones problema están constituidas cada una por cuatro tareas y por determinada cantidad de preguntas en cada tarea. La primera tiene como referente la pregunta por los posibles ingresos económicos del dueño de un gimnasio, y toma como variables el valor de la mensualidad y el número de clientes o socios que asisten, lo que permite privilegiar el trabajo con valores discretos con el propósito de llevar a cabo con los estudiantes los primeros acercamientos al estudio de la covariación. En esta se llevan a cabo los primeros estudios de las cantidades vinculadas con la situación, las relaciones de dependencia presentes, las diferentes representaciones que se derivan de la situación, la identificación de la variación y los cambios y los primeros acercamientos a la covariación.

La segunda situación está relacionada con un proyecto de educación ambiental, aunque la actividad es hipotética, está relacionada con actividades que se desarrollan en el proyecto de la institución educativa donde asisten los estudiantes, como el cultivo y producción de legumbres y vegetales en una zona de una sede rural de la misma. El contexto planteado en esta situación, por relacionarse con áreas de cultivo y uso de unidades y medidas de longitud y de superficie, facilita la realización de un estudio de tipo geométrico para poder llevar a cabo un estudio relacionado con la continuidad y analizar, dados los intervalos en las medidas posibles y la representación de formas, medidas y movimientos posibles con la ayuda de TIC (geogebra), la idea de covariación. En esta tarea se profundiza en el estudio de cómo y cuánto cambian las cantidades de la situación, además, sobre el concepto de razón de cambio y la caracterización de la función cuadrática relacionada con el propósito de optimización presente. En esta actividad se empleó el software geogebra, el cual permitía trabajar de manera interactiva con las gráficas propuestas en la tarea 1 y 2 de la situación.

En la siguiente tabla se presenta la estructura general de la propuesta de aula:

Tabla 4
Estructura general de la propuesta de aula

Situaciones	Tareas	Número de preguntas
Situación 1: Introducción a la covariación a través de un contexto cotidiano.	Tarea 1: Comprendiendo la situación.	5
	Tarea 2: Analizando las cantidades en registros tabulares.	6
	Tarea 3: Analizando cómo cambian las cantidades a partir de registros tabulares.	8
	Tarea 4: Analizando los cambios de las cantidades a partir de registros gráficos.	5
Situación 2:	Tarea 1: Explorando superficies rectangulares y analizando	12

Estudio de la covariación a través de un contexto escolar.	relaciones de dependencia (Geogebra)	
	Tarea 2: Analizando cambios de las cantidades de la situación en diferentes registros de representación.	8
	Tarea 3: Caracterización de la función cuadrática de la situación.	11
	Tarea 4: Analizando la covariación en otras funciones.	4

La estructura general de la propuesta de aula (ver Anexo 1) surge como respuesta a las dificultades y conclusiones a las que muchos investigadores han llegado en sus estudios previos. En ese sentido, se proyecta como un recurso didáctico que permita facilitar el desarrollo del pensamiento matemático, el estudio de la variación a partir del enfoque covariacional y el aprendizaje y la enseñanza del concepto de función cuadrática.

Así, por la naturaleza del objeto matemático de este estudio, la modelación será entendida como un proceso indispensable en el estudio de las relaciones funcionales presentes en diferentes fenómenos dinámicos y cotidianos, en los cuales es posible analizar la forma como cambian las cantidades, e incluso, analizar cómo cambian dos cantidades al unísono respecto a las condiciones de la situación.

El contenido de la Tabla 5, que se presenta más adelante, surgió como resultado de contrastar el Marco Conceptual del Razonamiento Covariacional (Carson et. al., 2003) y la propuesta de modelación presente en el marco de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1984). La posibilidad de vincular estos dos marcos teóricos es posible también por las condiciones de favorabilidad expresadas en los documentos curriculares de la educación matemática en Colombia, que suscitan el estudio de las relaciones funcionales mediante el

desarrollo de procesos de modelación que responden al estudio de las relaciones de dependencia presentes en relaciones funcionales en contextos cotidianos, matemáticos o de otras ciencias.

Además, de la evidencia de que, en la historia de las matemáticas, la conformación del objeto matemático *función* siempre estuvo relacionado con distintos procesos de modelación que daban cuenta de problemáticas de distintos contextos en cada época y de que el estudio de la función que predominó en cierto momento de la historia se derivó del análisis de fenómenos dinámicos.

Para el respectivo estudio de los desempeños de los estudiantes al resolver la propuesta de aula, se presenta a continuación la siguiente rejilla de fundamentación y análisis.

Tabla 5
 Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula

Modelación según la EMR		El Razonamiento Covariacional			Propuesta de Aula	
		Acciones Mentales		Niveles de Razonamiento Covariacional		
Matematización horizontal	Nivel situacional: Los estudiantes acuden a sus conocimientos informales para atender los primeros acercamientos a la situación, posteriormente identificar las matemáticas en el contexto para luego visualizarlas, esquematizarlas, reformularlas y descubrir regularidades.				Situación 1.	Situación 2.
Matematización vertical	Nivel referencial: Aparecen y se emplean modelos gráficos, materiales o notacionales de la situación trabajada. Los modelos se consideran <i>modelos de</i>, en cuanto a que hacen parte de una situación particular.	AM1: <i>Coordinación del valor</i> de una variable con los cambios de otra. AM2: <i>Coordinación de la dirección</i> del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Comportamiento: <i>Designación</i> de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. Comportamiento: <i>Construcción</i> de una línea recta creciente. <i>Verbalización</i> de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	N1. Coordinación: Las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable. N2. Dirección: Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.	Tarea 1. Tarea 2.	Tarea 1.
	Nivel general: Se acentúa más la reflexión y se pasa a preocuparse sobre los procesos empleados, conceptos, estrategias, modelos, con el propósito de llegar a la generalización de tal	AM3: <i>Coordinación de la cantidad</i> de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Comportamiento: <i>Localización</i> de puntos/<i>construcción</i> de rectas secantes. <i>Verbalización</i> de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	N3. Coordinación cuantitativa: Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.	Tarea 3.	Tarea 1.
					Tarea 3.	Tarea 1. Tarea 2
					Tarea 4.	Tarea 2. Tarea 3.

forma que se puedan considerar formas de tratamiento adecuadas para situaciones con características idénticas. En este nivel los modelos se constituyen en *modelos para*, al relacionarse con casos que sean parecidos donde se pueden emplear estos modelos.

Nivel Formal: Hay mayor comprensión de conceptos, procedimientos y notaciones convencionales de las matemáticas y a su vez estos se emplean en el trabajo de más situaciones.

AM4: *Coordinación de la razón de cambio promedio* de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

AM4: *Coordinación de la razón de cambio promedio* de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

AM5: *Coordinación de la razón de cambio instantánea* de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Comportamiento: *Construcción* de rectas secantes contiguas para el dominio.

Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.

Comportamiento: *Construcción* de rectas secantes contiguas para el dominio.

Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.

Comportamiento: *Construcción* de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de la concavidad.

Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y las concavidades son correctos).

N4. Coordinación: Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

N4: Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

N5: Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tarea 3.
Tarea 4.

Tarea 3.
Tarea 4.

La vinculación de los marcos teóricos deriva en la manera como están constituidas la primera y la segunda situación, las tareas que conforman cada una y las preguntas correspondientes a cada tarea. De acuerdo con la tabla anterior, durante el proceso de modelación conocido como *Matematización Horizontal – Nivel Situacional*, las tareas 1 y 2 de la primera situación y la tarea 1 de la segunda situación son oportunas para que los estudiantes lleven a cabo acercamientos informales a los elementos que la componen, en donde pongan a prueba sus conocimientos e ideas previas, para así identificar las matemáticas presentes y realizar algunos esquemas, identificación de regularidades y de propiedades presentes. En este nivel se determinó que no hay una manifestación clara de algunas acciones del razonamiento covariacional, de acuerdo con la descripción de las acciones mentales relacionadas con este tipo de razonamiento.

En la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* se ubican la tarea 3, de la primera situación, y las tareas 1 y 2, de la segunda situación, ya que se avanza en la comprensión de los elementos que la componen a partir de un ejercicio en el que los estudiantes podrán trabajar de manera informal con los datos suministrados y a su vez con *modelos de* o modelos gráficos y notacionales. Dicha actividad de trabajo facilita la movilización de AM1 y AM2, porque se puede llevar a cabo la coordinación de los valores de una variable con los valores de otra y posteriormente determinar la dirección de esos cambios; estas acciones son indispensables para determinar N1 y N2 de razonamiento covariacional de los estudiantes que las desarrollen apropiadamente.

De acuerdo con el aumento en el nivel de complejidad, en la *Matematización Vertical – Nivel General* se ubican la tarea 4, de la primera situación, y las tareas 2, 3 y 4, de la segunda situación, esto, teniendo en cuenta que es posible analizar y llevar a cabo reflexiones de los modelos de la situación en cada tarea con el propósito de que puedan

generalizarse estos modelos y relacionarlos con situaciones que cumplan con características similares a las presentadas e identificar y establecer *modelos para* tratar actividades y procedimientos con las mismas condiciones. Además de lo anterior, las tareas enunciadas favorecen la movilización de AM3 y AM4 ya que no solo se coordinan los valores de una variable con los valores de otra y posteriormente se determina la dirección de esos cambios, sino también porque es posible cuantificar el cambio y coordinar las cantidades de los cambios en la variables para poder llegar a coordinar la razón de cambio promedio al considerar cambios uniformes en la variable de entrada. Realizando estas acciones con los comportamientos descritos es posible que los estudiantes que cumplan las condiciones descritas puedan establecer un N3 y N4 de razonamiento covariacional.

Por último, en la *Matematización Vertical – Nivel Formal* se encuentran las tareas 3 y 4 de la segunda situación, en las cuales se espera que los estudiantes puedan llevar a cabo la reflexión de los modelos propuestos y elaborados, así como trabajarlos en otras situaciones con características similares. Para este caso, se espera que los estudiantes desarrollen AM4 y AM5, cumpliendo con la debida evidencia de las anteriores (AM1, AM2 y AM3), y lleguen a coordinar la razón de cambio promedio, al considerar cambios uniformes en la variable de entrada, y la razón de cambio instantánea, al considerar cambios uniformes en la variable independiente para el dominio de la función trabajada. Estas condiciones de las acciones mentales con los debidos comportamientos descritos son la manifestación de N4 y N5 de razonamiento covariacional en los estudiantes que las cumplan.

La ejecución de las tareas propuestas, de acuerdo con la rejilla estructurada, posibilita identificar y analizar aspectos característicos del razonamiento covariacional y establecer los niveles alcanzados por los estudiantes al respecto del mismo; a su vez, al

momento de modelar y trabajar con los modelos propuestos de las situaciones, se puede determinar niveles de modelación evidenciados en relación a la función cuadrática.

3.2. Acerca de la experimentación

3.2.1. Contexto de desarrollo

la Institución Educativa el Hormiguero se encuentra ubicada en el sector rural del corregimiento El Hormiguero, Vereda Cascajal (a 20 minutos de Cali). A la fecha, la institución se encuentra capacitada para cubrir los niveles de primaria, secundaria y media técnica, a la vez que para trabajar con metodologías flexibles. Su enfoque técnico es de carácter ambiental, y a este tienen acceso los estudiantes principalmente en el bachillerato, etapa en la que se profundiza en la media técnica (Grados 10° y 11°).

La forma en que se distribuyen los docentes de matemáticas en la institución es la siguiente: para el caso de la primaria, por el modo en que se encuentra organizada la educación pública en Colombia, los docentes tienen la función de cubrir todo el ciclo de saberes, es decir que quien enseña matemáticas, enseña a su vez todas las materias que correspondan a cada grado. El nivel de bachillerato es cubierto por tres profesores, cada uno de ellos con formación específica en matemáticas y en algunos casos con posgrados asociados a la misma.

La institución ha alcanzado un desempeño que la ubica en posiciones muy alejadas de las primeras en la lista de resultados de pruebas saber e índice sintético de calidad, lo que ha generado que se empiecen a ejecutar planes de mejoramiento en todas las gestiones institucionales para posicionarse mejor en evaluaciones posteriores. En este punto entra nuestra propuesta.

Bajo el objetivo de fortalecer el área, específicamente los procesos concernientes al grado 9º, se desarrollaron actividades (4 horas semanales) de acuerdo con la planeación del área de matemáticas entre los meses de marzo y junio de 2019, tiempo que corresponde al primer período académico del año escolar.

En un primer momento, uno de los objetivos de implementar estas actividades fue poder analizar con los estudiantes algunos aspectos característicos del razonamiento covariacional para, entre otras cosas, obtener un diagnóstico del estado de la situación de los mismos en cuanto a la adquisición y el nivel de apropiación de los conocimientos necesarios para adentrarse en la materia. Luego de analizar los resultados de dicha actividad, se encontró que en una buena medida los estudiantes presentaban dificultades en lo que correspondía al dominio de diferentes conceptos relativos a la asignatura de álgebra, y que, en teoría, debían haber sido superados en el año anterior, es decir en grado 8º.

3.2.2. Aspectos del desarrollo de la implementación

Teniendo en cuenta las características, potencialidades y limitaciones del grupo, para la primera situación las actividades se llevaron a cabo de forma individual y para la segunda, dada la carencia de las herramientas tecnológicas (trabajo con el software Geogebra) suficientes, en grupos; además, en ambos casos se contó con el apoyo del docente investigador quien, entre otras actividades, contribuyó con la mediación y orientación sobre la discusión de las respuestas a las preguntas de cada situación. Posterior a la plenaria, los estudiantes continuaban en la siguiente tarea, organizados de acuerdo con cada situación, dando continuidad al desarrollo de la actividad y con la información recibida de la plenaria, la cual tenía como otro de sus propósitos facilitar la comprensión de las nuevas preguntas.

Las dos situaciones se presentaron por tareas, haciendo uso, por un lado, de guías impresas en las cuales se mostraban las preguntas a analizar y resolver y, por el otro, de recursos virtuales como gráficas interactivas elaboradas en el programa Geogebra, necesarias para el desarrollo de algunas tareas de la situación 2, que podían ser visualizadas en tabletas y ser proyectadas en video beam.

En lo que corresponde a la primera situación, se trabajaron las tareas 1 y 2, indispensables para identificar las condiciones iniciales de la misma, y posteriormente se llevó a cabo la primera plenaria orientada por el docente investigador, actividad en la que fue posible escuchar respuestas, comentarios y aclarar dudas, posibilitando, a través del dialogo y la discusión, que se afianzaran los saberes adquiridos individualmente. En la segunda parte de la situación 1, se desarrollaron las tareas 3 y 4 y posteriormente se llevó a cabo la plenaria correspondiente, en el salón de clases habitual, y la grabación de un video para el análisis postrero.

Para el abordaje de la segunda situación, en primer lugar, se llevó a cabo la tarea 1, para la cual se precisó de material físico como impresiones, y recursos tecnológicos (tabletas) que le permitieran al estudiante interactuar con gráficos relacionados con las preguntas. La tarea correspondiente a este primer momento fue de gran exigencia en tanto que, al tener un contexto geométrico, precisaba de la introducción a la noción de continuidad, la cual no se podía apreciar en las cantidades tratadas en las tareas de la primera situación. Posteriormente, se efectuó la plenaria y grabación de esta en video. La tarea 2 también se desarrolló haciendo uso del material físico y tecnológico (tabletas y video beam), este último para la proyección de las gráficas en geogebra.

Por último, los estudiantes resolvieron las tareas 3 y 4, sin embargo, de estas tareas no se efectuó la respectiva plenaria y grabación en video por imprevistos en la institución

respecto del calendario académico escolar, ya que por las fechas de finalización de la implementación se realizaron varias actividades curriculares y extracurriculares que no se habían llevado a cabo o que no estaban programadas con anterioridad.

Posterior a la implementación se procedió a la tipificación de las respuestas dadas por los estudiantes. Para llevar a cabo la tipificación se consideran los registros escritos de los estudiantes y para su análisis se ponderan, además, las observaciones del docente investigador, plenarias y videos; este se hace a la luz del marco teórico y la rejilla de análisis presentada con anterioridad.

3.3. Resultados y análisis de resultados

A continuación, se presentan los resultados de la implementación de la situación 1 de la propuesta de aula. Para esto, se incluye el enunciado inicial de la situación y las preguntas que componen cada tarea, luego, una tabla por cada pregunta donde aparecen tipificadas las respuestas suministradas por los estudiantes, de la forma Rn , donde n representa los distintos tipos de respuesta en los que están agrupadas de acuerdo con los procedimientos y argumentos dados. La *frecuencia absoluta* corresponde a la cantidad de estudiantes que cumplen con las características de un tipo de respuesta y la *frecuencia relativa* es el porcentaje que corresponde a ese tipo de respuesta respecto al grupo de estudiantes que desarrollaron la tarea.

Luego de la tipificación de las respuestas, se desarrolla el análisis que se hizo del conjunto de respuestas a una pregunta o de las respuestas a varias preguntas con características similares. Para el análisis de resultados de la situación 2 se efectúa el mismo protocolo que en la situación 1, de tal forma que al final se consideran las respuestas de acuerdo con la rejilla de análisis para describir los aspectos del razonamiento covariacional

evidenciados y de esta manera determinar los alcances en el proceso de modelación y comprensión de las propiedades de la función cuadrática.

3.3.1. Análisis de resultados de la situación 1

(S1) Situación 1: introduciendo la covariación en la modelación de una situación que implica una decisión de orden financiero

¿Los ingresos del gimnasio aumentan o disminuyen?

El gimnasio *Hércules* cuenta con 150 socios inscritos. Cada uno paga por su membresía una cuota mensual de \$60.000. Michael, el dueño del gimnasio, desea incrementar sus ingresos, por lo que ordena un estudio de mercado cuyo resultado recomienda reducir la mensualidad, ya que por cada \$1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios.

¿Cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio *Hércules* puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?

(T1) Tarea 1: comprendiendo la situación

De los 28 estudiantes, solo uno (1) no realizó la tarea.

(P1) Pregunta 1: Calcula la cantidad de dinero que ingresa al gimnasio *Hércules* según la cantidad de socios inscritos y el valor de la mensualidad actual.

Tabla 6
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 1 (S1T1P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que calcularon el ingreso total al gimnasio (\$9.000.000). Efectuaron una multiplicación entre los valores de las cantidades relacionadas (la cantidad de socios inscritos (150) y el valor actual de la mensualidad (\$60.000)) y escribieron una conclusión de los ingresos.	20	74,1%

R2	Estudiantes que calcularon el ingreso total al gimnasio (\$9.000.000). Efectuaron una multiplicación entre los valores de las cantidades relacionadas (la cantidad de socios inscritos y el valor actual de la mensualidad)	5	18,5%
R3	Estudiantes que escribieron un valor que no corresponde al ingreso total.	2	7,4%

(P2) Pregunta 2: Si se disminuye la mensualidad en \$1.000, escribe el número de socios que se espera ingresen adicionalmente.

Tabla 7

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 2 (S1T1P2)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron en forma acertada la cantidad de socios nuevos (5) y argumentaron su respuesta de acuerdo con el enunciado de la situación.	6	22,2%
R2	Estudiantes que escribieron en forma acertada la cantidad de socios nuevos (5), sin justificar la respuesta.	16	59,3%
R3	Estudiantes que escribieron como respuesta un intervalo en el cual se hallaba la cantidad de socios nuevos.	3	11,1%
R4	Estudiantes que escribieron un valor que no corresponde a la cantidad de socios nuevos.	2	7,4%

En la *Tabla 6* se observa que el 92,6% de los estudiantes que resolvieron la tarea calcularon en forma acertada los ingresos totales al gimnasio. De estos, el 74,1% realizaron la multiplicación entre el valor de la mensualidad y el número de socios, justificando el procedimiento llevado a cabo, mientras que el 18,5% escribió la multiplicación entre las cantidades sin describir o justificar el resultado obtenido. El 7,4% de los estudiantes escribieron valores que no correspondían al total de ingresos sin expresar argumento alguno en relación a su respuesta.

De acuerdo con la *Tabla 7*, el 81,5% de los estudiantes escribieron acertadamente la cantidad solicitada en la pregunta. El 22,2% argumentaron su respuesta a partir de la

información dada en el enunciado de la situación 1, que “por cada \$1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios”, mientras que el 59,3% escribieron la cantidad de socios nuevos que se esperaba que ingresaran sin describir ninguna relación con el enunciado u otra justificación. El 11,1% no especificaron un valor, sino que dieron como respuesta un intervalo que incluía la cantidad correcta, mientras que el 7,4% de los estudiantes escribieron una cantidad que no correspondía a la respuesta esperada para la pregunta 2.

A partir de los tipos de respuesta para *S1T1P1* y *S1T1P2* se puede afirmar que la mayoría de estudiantes comprendieron aspectos básicos de la situación al captar que los ingresos totales al gimnasio dependen de la relación (producto) entre la mensualidad y el número de socios; también, que la mayoría de estudiantes refirieron acertadamente la cantidad de socios nuevos, expresando la relación existente entre la cantidad de rebajas y el valor de la rebaja realizada. Lo anterior da cuenta de la forma como los estudiantes inician el proceso de *Modelación Horizontal*, en el *Nivel Situacional*, empleando sus conocimientos informarles para acercarse a la situación.

En la plenaria, se corroboró que los estudiantes cumplieron con la iniciación a la situación, la cual comprendía que a partir de la información se pudiera identificar y reflexionar acerca de aspectos básicos de esta, al manifestar, por ejemplo, que los ingresos totales se debían a la cantidad de socios y al valor de la mensualidad.

- (P3) Pregunta 3:** Si se inscriben 25 nuevos socios,
- a.** Indica en cuánto se redujo la cuota mensual.
 - b.** Explica cómo lo calculaste.

Tabla 8
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 3 (S1T1P3)

Tipos de respuesta	Descripción	F. A.	F. R.	Explicación	F. A.	F. R.
R1				Estudiantes que explicaron su respuesta a partir de la información en el enunciado inicial, “si por \$1000 entran 5, por \$5000 entran 25”.	10	37%
	Estudiantes que escribieron el valor total de la rebaja (\$5000) de acuerdo con los 25 nuevos socios, justificando su respuesta.	13	48,1%	Estudiantes que explicaron su respuesta con razones, $\frac{1000}{5} = \frac{5000}{25}$.	1	3,7%
				Estudiantes que explicaron su respuesta expresando que la relación de dependencia entre la cantidad de rebajas y la cantidad de socios nuevos de forma inversa, esto es, que valor de las rebajas dependía de la cantidad de socios nuevos.	2	7,5%
R2	Estudiantes que escribieron el valor total de la rebaja (\$5000) de acuerdo con los 25 nuevos socios, sin justificar su respuesta o presentando inconsistencias.	12	44,4%	Estudiantes que explicaron su respuesta en forma incompleta o no la explicaron.	3	11,1%
				Estudiantes que explicaron su respuesta evidenciando errores en los cálculos o inconsistencias.	9	33,3%
R3	Estudiantes que no escribieron el valor total de la rebaja (\$5000)	2	7,5%	Estudiantes que explicaron su respuesta evidenciando errores en los cálculos o inconsistencias.	2	7,5%

De acuerdo con la *Tabla 8*, el 92,5% de los estudiantes escribieron acertadamente el valor total de la rebaja de acuerdo con el número de socios nuevos indicado. De este porcentaje de estudiantes se tiene que el 48,1% justificó su respuesta con base en la información inicial del estudio de mercado, acudiendo en algunos casos a la escritura de

expresiones que permitían identificar regularidades y trabajar con las primeras relaciones de dependencia como en el caso del siguiente estudiante:

$R_{3//} =$
 $q = 5.000$
 $b =$ Calculando que por 1.000 entran 5 por 2.000 entran 10 por 3.000 entran 15 por 4.000 entran 20 que por 5.000 entran 25.

Ilustración 15. S1T1P3R1

O como en el caso de otro estudiante que acude a razones:

a. La cuota mensual se redujo en 5.000 \$ la mensualidad. $\frac{1000}{5} = 200$
 $\frac{5000}{25} = 200$
 b. Con Razones. Razones. $\frac{1000}{5} = \frac{5000}{25}$

Ilustración 16. S1T1P3R1

Del 44,4% de los estudiantes que también acertaron en las respuestas, el 11,1% expresaron justificaciones incompletas o no las presentaron y el 33,3% presentaba una argumentación con incoherencias de acuerdo con la pregunta planteada. Por último, el 7,5% de los estudiantes no acertaron con el valor de la rebaja y la justificación de la respuesta evidenciaba que no había claridad sobre una respuesta válida.

De acuerdo con los tipos de respuesta para S1T1P3 se puede afirmar que en esta pregunta la mayoría de los estudiantes identificaron las primeras relaciones entre la cantidad de rebajas, el valor total de la rebaja y el número de socios nuevos, sin embargo más de la mitad de los estudiantes argumentaron con imprecisiones, de manera parcial o evidenciaban incoherencias en los procedimientos y explicaciones, situación que permite inferir un bajo dominio de la forma como se relacionan estas cantidades en la situación. Lo evidenciado por los estudiantes, por un lado, da cuenta de la forma como empiezan a analizar y dar cuenta de la variación presente, además, es característico del proceso de

Modelación Horizontal, en el *Nivel Situacional*, en el cual emplean procedimientos acordes a sus ideas previas y al reconocimiento de las primeras relaciones, describiendo de diferentes maneras las relaciones presentes.

En la plenaria dos estudiantes mostraron dificultades al argumentar el por qué la cuota se redujo en \$5000, corroborando lo escrito respectivamente, a diferencia de otra estudiante que respondió: “si por cada 1.000 entran 5 por 5000 entran 25000”, y que en su participación arguyó que empleó la información de la respuesta a la pregunta 2 para hacer la 3, demostrando cierta comprensión de las primeras relaciones.

(P4) Pregunta 4: Un amigo de Michael afirma que cuando la cuota se reduce en \$5.000, el monto total de ingresos es de \$9.000.000. Explica la validez de esta afirmación.

Tabla 9
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 4 (S1T1P4)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que la afirmación es falsa o no tiene validez porque los ingresos sobrepasan los \$9.000.000, al alcanzar un total de \$9.625.000. En su respuesta realizan la multiplicación entre \$55.000 y 175 para llegar a la conclusión.	12	44,4%
R2	Estudiantes que explicaron que la afirmación es falsa o no tiene validez, pero su justificación es incompleta o presenta incoherencias.	7	25,9%
R3	Estudiantes que no explicaron si la afirmación es falsa o verdadera. Realizaron una multiplicación entre \$55.000 y 175 para determinar que esa era la “validez” de la afirmación.	7	25,9%
R4	Estudiantes que no explicaron si la afirmación es falsa o verdadera y presentaron inconsistencias en la respuesta.	1	3,8%

De acuerdo con la *Tabla 9*, se puede observar que el 70,3% de los estudiantes que resolvieron la tarea respondieron que la afirmación no tenía validez de acuerdo con la

información suministrada. De este porcentaje, el 44,4% argumentaron y escribieron una multiplicación entre el valor de la mensualidad después de la rebaja y el número total de socios de acuerdo con el estudio de mercado, tal como se puede apreciar en la siguiente respuesta de uno de los estudiantes:

R411 = No tiene validez porque se sobrepasa de los 9.000.000

$$\begin{array}{r}
 55.000 \\
 \times 175 \\
 \hline
 275000 \\
 385000 \\
 55000 \\
 \hline
 9.625.000
 \end{array}$$

Ilustración 17. S1T1P4R1

Por otro lado, el 25,9%, aunque acertaron el valor total de los ingresos, argumentaron de manera incompleta, imprecisa o con expresiones que no justificaban correctamente el procedimiento escrito. El 29,7% no determinaron verbalmente la validez de la afirmación, sin embargo, de ellos el 25,9% desarrollaron una multiplicación en forma correcta entre el valor de la mensualidad y el número total de socios, después de la rebaja, mientras que el 3,8% no indicaron la validez de la afirmación en su respuesta ni realizaron cálculos.

De acuerdo con los resultados de las respuestas para S1T1P4 es posible afirmar que menos de la mitad del grupo de estudiantes comprendieron los tipos de relaciones que se trabajaron inicialmente en la situación, es decir que frente al caso hipotético expuesto, el cual contenía una afirmación falsa, no lograron presentar argumentos claros para demostrar el error en la afirmación, o cálculos aritméticos que permitieran ilustrarlo. Por otro lado, el porcentaje restante de estudiantes identificó ciertas cantidades y relaciones en la situación, pero no explicaron con claridad estas, además, se les dificultó emplear procedimientos, descubrir regularidades y argumentar su respuesta.

Lo evidenciado en las respuestas da cuenta de que, al analizar la variación presente respecto a socios nuevos, reducción de la cuota e ingresos, es posible que los estudiantes tengan una idea de los cambios que sufre cada cantidad, e incluso la forma como estas están relacionadas, sin embargo, la posibilidad de comprender de dónde proviene el valor de ingresos dado solo fue desarrollada por menos de la mitad de estudiantes. Por otro lado, en el proceso de *Modelación Horizontal*, en el *Nivel Situacional*, el 44,4% emplearon procedimientos acordes a sus ideas previas y al reconocimiento de las primeras relaciones: así se evidencia la comprensión y esquematización de la forma como se relacionan las cantidades de acuerdo con las condiciones de la situación, las matemáticas en el contexto.

En la plenaria la mayoría de estudiantes comentaron que la afirmación era falsa, expresando que al hacer la rebaja en el valor de la mensualidad y de acuerdo con el aumento del número total de socios, entonces el valor de los ingresos totales sería superior a la cifra indicada en la pregunta.

(P5) Pregunta 5: Escribe las cantidades que intervienen en la situación dada.

Tabla 10
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 1 y pregunta 5 (S1T1P5)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron el nombre de cuatro o más cantidades relacionadas en la situación.	7	25,9%
R2	Estudiantes que escribieron cuatro o más nombres y valores numéricos representativos de las cantidades en la situación (Mensualidad= \$60.000, descuento=\$1000, entre otros)	7	25,9%
R3	Estudiantes que escribieron el nombre o valores numéricos de menos de cuatro cantidades.	13	48,2%

De acuerdo con la *Tabla 10* el 51,8% de los estudiantes que resolvieron la tarea identificaron la mayoría de cantidades que intervienen en la situación. Del porcentaje indicado, el 25,9% hicieron referencia al tipo de cantidad de que se trata y le asignaron un nombre, que por lo general corresponde a las expresiones presentadas en el enunciado inicial y en las preguntas anteriores, como se puede observar en lo anotado por el siguiente estudiante:

5 H/ ingresos - Mensualidad - Rebajas
- # de socios inscritos - Cantidad de
Dinero.

Ilustración 18. S1T1P5R1

Por otro lado, el 25,9% asociaron al nombre de la cantidad valores numéricos identificados y trabajados previamente, tal como se observa a continuación:

Se es un gimnasio que cuenta con 150
socios.
Con una mensualidad de 60.000.
Y le han recomendado reducir la mensualidad
ya que por cada 1000 que disminuya
se inscriban cinco socios nuevos

Ilustración 19. S1T1P5R2

El 48,2% restante del total de estudiantes identificaron y escribieron algunas de las cantidades que intervienen en la situación o no respondieron.

De acuerdo con las respuestas para *S1T1P5* es posible asegurar que la mitad de los estudiantes reconocieron las cantidades relacionadas en el contexto, guardando coherencia con los tipos de respuesta para *S1T1P3* y *S1T1P4*, donde un porcentaje similar de estudiantes evidenciaba la comprensión de relaciones entre las cantidades presentes.

Lo evidenciado en las respuestas da cuenta de que los estudiantes identificaron las cantidades que cambian, las que no y algunas regularidades como parte del estudio de la variación. Por otro lado, en el proceso de *Modelación Horizontal*, en el *Nivel Situacional*, la posibilidad de discriminar las cantidades presentes en la situación constituye un paso clave en el estudio de las relaciones entre ellas.

En la plenaria, un estudiante con un tipo de respuesta *S1T1P5R1* corroboró lo escrito y mencionó las cantidades con los valores correspondientes a la situación planteada, mientras que otra estudiante mencionó la cantidad “\$1.000” haciendo alusión al valor de cada rebaja y confirmando su respuesta donde centra su atención en el valor numérico de la cantidad constante. Otros compañeros hicieron aportes de manera similar.

En relación con la tarea 1, respecto al estudio de la variación, los estudiantes, de acuerdo con los resultados, pudieron identificar las cantidades y las regularidades que algunas de estas presentaban cuando cambiaban, describir esas regularidades e incluso esquematizarlas o argumentar cuando se requería, algo que es muy importante y puede considerarse como la primera forma de coordinar los cambios de las variables. Respecto al proceso de modelación, se llevó a cabo la introducción a la situación al analizar, identificar y representar relaciones presentes, de acuerdo con la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional*.

(T2) Tarea 2: Analizando las cantidades en registros tabulares

26 de los 28 estudiantes realizaron la tarea.

(P1) Pregunta 1: Completa la información en la Tabla 1.

Tabla 1*Relación entre el valor de la mensualidad y el número de socios.*

Valor de la mensualidad en pesos	60.000	59.000	58.000			46.000
Número de socios	150			165	180	

Tabla 11

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completaron todos los valores de la tabla y los escribieron de manera acertada.	12	46,2%
R2	Estudiantes que completaron todos los valores de la tabla y escribieron de manera acertada la mayoría de ellos.	14	53,8%

De acuerdo con la *Tabla 11*, el 46,2% de los estudiantes completaron en forma acertada todos los valores faltantes en la tabla, el otro 53,8% completaron todos los valores, pero algunos no eran correctos.

De acuerdo con las respuestas para *S1T2P1* se puede inferir que, respecto al estudio de la variación en un registro tabular, cerca de la mitad del grupo de estudiantes que resolvió la tarea pudo identificar algunas regularidades en los valores de cada cantidad, incluso, llegar a la *coordinación* de los cambios de una cantidad (número de socios) a medida que cambiaba en relación con otra (valor de la mensualidad), como algunos de los primeros indicios de la atención a la covariación. Por otro lado, un poco más de la mitad de los estudiantes no identificó los cambios de los valores en la tabla, posiblemente al no identificar cómo y cuánto cambian las cantidades, y al no coordinar correctamente los cambios en el número de socios mientras cambiaba el valor de la mensualidad. Se resalta en esta pregunta la posibilidad que tuvieron los estudiantes de analizar el registro tabular de dos cantidades vinculadas en la situación, como otra forma de visualizar las matemáticas

presentes en otro tipo de representación, como parte del proceso de *Modelación Horizontal* en el *Nivel Situacional*.

En la plenaria el docente investigador fue indicando algunas casillas para completar en la pregunta y los estudiantes explicaron que para llenar los valores en la tabla consideraron la información que se había dado en el enunciado inicial respecto a la conclusión del estudio de mercado. En algunas de las respuestas aportadas por los estudiantes al respecto de la forma como llenaron la tabla, puede notarse que algunos expresaron que para llenar el número de socios tuvieron en cuenta que aumentaban de cinco en cinco y que esto estaba relacionado con la rebaja de \$1.000 que se le realizaba a la mensualidad.

(P2) Pregunta 2: Explica la forma como afecta la cantidad de veces que se hacen rebajas al valor de la mensualidad y el número de socios.

Tabla 12
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P2)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que la cantidad de veces que se hacen rebajas ocasiona que la mensualidad disminuya y por esto la cantidad de socios aumenta.	11	42,3%
R2	Estudiantes que explicaron que las rebajas hacen que entren más socios y por esto la mensualidad disminuya. Invirtieron el orden de la dependencia (rebaja del valor de la mensualidad – ingreso de nuevos socios) expresada en el enunciado inicial.	11	42,3%
R3	Estudiantes que explicaron que por cada \$1000 que se rebaje ingresarán 5 nuevos socios.	2	7,7%
R4	Estudiantes que explicaron que el valor de la mensualidad va disminuyendo.	2	7,7%

De acuerdo con la *Tabla 12*, el 42,3% de los estudiantes explicaron que la cantidad de veces que se hacen rebajas incide en la forma en que el valor de la mensualidad disminuye y el valor de socios aumenta. Comprender esta relación de dependencia es clave en el proceso de estudio de la situación, tal como lo muestra el siguiente estudiante:

2211 lo afecta en mermark lo mensualidad pero le ayudo a que nuevos socios se inscriban

Ilustración 20. S1T2P2R1

Por otro lado, un 42,3%, aunque identificaron que la cantidad de socios aumenta y el valor de la mensualidad disminuye, manifestaron que la mensualidad disminuía como consecuencia del ingreso de nuevos socios, evidenciando dificultad en la comprensión de la relación de dependencia, tal como se puede evidenciar en la respuesta del siguiente estudiante:

2211/Disminuye la mensualidad por que entran mas socios.

Ilustración 21. S1T2P2R2

El 7,7% solo tuvieron en cuenta que por cada \$1000 que se rebaje ingresarán 5 nuevos socios. El restante 7,7% expresaron respuestas que no confirmaban la comprensión sobre la forma en que se relacionan las cantidades indicadas.

En relación con las respuestas para *S1T2P2*, es posible aseverar que, en el proceso de estudio de la variación, cuando se trata de la identificación de regularidades, cambios y relaciones de dependencia entre las cantidades, menos de la mitad de los estudiantes justificaron que el valor de la mensualidad dependía del número de rebajas efectuadas y a su vez permitía el ingreso de socios nuevos; algo que a su vez es coherente con las respuestas dadas sobre *S1T2P1*. La identificación de esta relación de dependencia es

fundamental porque facilita el análisis de la covariación entre cantidades, comprender la forma en que ambas cambian y en este proceso poder construir modelos de las relaciones funcionales presentes, en la *Modelación Horizontal, Nivel Situacional*.

En la plenaria una estudiante manifestó que la cantidad de rebajas no afecta la mensualidad, sino que antes hace que los ingresos aumenten más y también los socios; al parecer, la estudiante consideró que “afectar” estaba relacionado directamente con algo malo. Otra estudiante, por su parte, afirmó que el número de socios aumenta, además, expresó que la mensualidad rebaja y aumentan los ingresos, ratificando la comprensión y claridad de su respuesta escrita *S1T2P2R1*.

(P3) Pregunta 3: De acuerdo con la tabla anterior,
(P3a) Pregunta 3a: Indica cómo estableciste los valores que faltan de la mensualidad.

Tabla 13
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P3a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que describieron que para completar los valores de la mensualidad se debe considerar que el valor de la mensualidad se hace menor “merma”, “disminuye”, “disminuye \$1000” y que el número de socios se hace mayor “aumenta”.	13	50%
R2	Estudiantes que describieron que para completar los valores de la mensualidad se deben considerar las rebajas de \$1.000 que se realicen.	3	11,5%
R3	Estudiantes que presentaron incoherencias en la respuesta.	10	38,5%

(P3b) Pregunta 3b: Explica la forma como determinaste los valores que faltan en el número de socios.

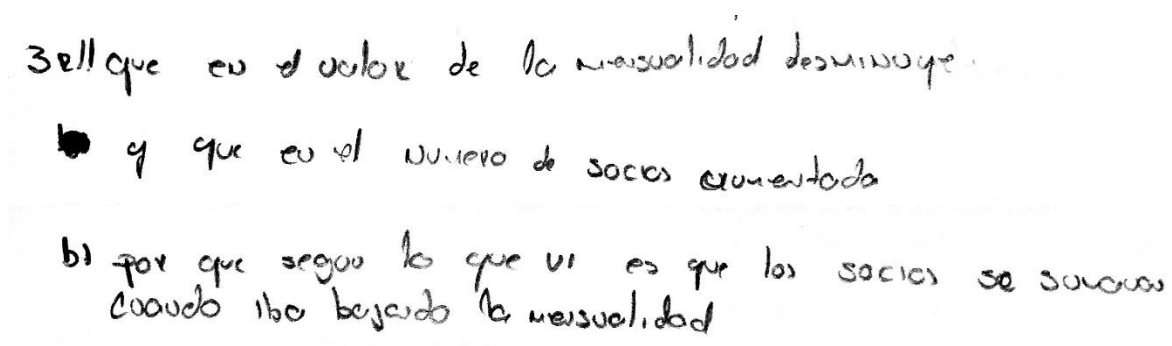
Tabla 14
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P3b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que se “sumaban”, “aumentaban”, “aumentaban 5” socios a partir de la disminución del valor de la mensualidad.	12	46,2%
R2	Estudiantes que explicaron que para completar la tabla en la parte de los socios se va sumando de cinco en cinco de acuerdo con la cantidad inicial.	2	7,6%
R3	Estudiantes que explicaron procedimientos no apropiados para los valores faltantes, argumentos que tenían información no relacionada con la pregunta o no respondieron. Entre los procedimientos argumentados se explicaba que para completar la parte de los socios se debía multiplicar por 5.	12	46,2%

De acuerdo con la *Tabla 13*, el 50% de los estudiantes que realizaron la tarea argumentaron la regularidad acerca de que el valor de la mensualidad disminuye \$1.000 mientras que el número de socios aumenta. Un 11,5% argumentó que para completar la tabla era importante considerar la rebaja de \$1.000 que se iba presentando en la mensualidad. Por otra parte, el 38,5% no argumentaron con claridad la forma como completaron los valores faltantes, haciendo uso de expresiones que no estaban relacionadas con la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 14*, el 46,2% de los estudiantes argumentaron la regularidad de que el número de socios aumentaba de cinco en cinco a partir de la cantidad inicial y como consecuencia de la disminución de la mensualidad en \$1.000. Un 7,6% argumentó que la cantidad de socios aumentaba de cinco en cinco. Por otra parte, el 46,2% no argumentaron con claridad la forma como completaron los valores faltantes, evidenciando incoherencias en sus expresiones escritas.

En el siguiente caso, se aprecia una forma de describir cómo se daban los cambios en las cantidades relacionadas, aunque no se mencionan los valores específicos del cambio (cuánto cambian).



3er que en el valor de la mensualidad disminuye
 y que en el número de socios aumentada
 bi por que segun lo que vi es que los socios se sumaron cuando iba bajando la mensualidad

Ilustración 22. S1T1P3aR1 y S1T1P3bR1

De acuerdo con las respuestas sobre *S1T2P3a* y *S1T2P3b* se puede afirmar que, en el estudio de la variación y la posibilidad de identificar las regularidades en los cambios de las cantidades relacionadas (valor de la mensualidad Vs número de socios), la mitad de los estudiantes comprende la dependencia entre dichas cantidades, la correlación directa y a su vez las primeras coordinaciones, entre una y otra cantidad, de los cambios que van presentando los valores en la tabla. Además, como parte del *Nivel Situacional* de modelación, estos estudiantes reconocen los cambios de las cantidades y los describen a partir de un registro de representación tabular propuesto. Por otra parte, cerca de la mitad del grupo de estudiantes evidencia dificultades al momento de identificar las regularidades en los cambios de las cantidades y posteriormente de las coordinaciones entre los cambios, dando cuenta de pocos avances en esta relación más profunda entre las cantidades en cuestión.

En la plenaria, respecto al valor de la mensualidad en la tabla, una estudiante expresó que tuvo en cuenta las rebajas, ya que se iba rebajando de a \$1.000. Respecto al

número de socios en la tabla, la estudiante contestó que para completar sumó de cinco en cinco para obtener los resultados de la tabla; aunque la respuesta escrita de esta estudiante no fue la apropiada, en la plenaria explicó acertadamente la forma como se debían llenar los valores en la tabla.

(P4) Pregunta 4: Escribe de qué depende la cantidad de socios del gimnasio Hércules después de haberse realizado el estudio.

Tabla 15

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 4 (S1T2P4)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la cantidad de socios del gimnasio depende de las rebajas que se vayan llevando a cabo; de la cantidad de rebajas.	6	23,1%
R2	Estudiantes que escribieron que depende de las rebajas que se le vayan realizando a la mensualidad aumentarán los socios; del valor de la mensualidad.	18	69,2%
R3	Estudiantes que no expresaron su idea en forma clara.	2	7,7%

(P5) Pregunta 5: Para cada caso, calcula el número total de socios que tendría el gimnasio cuando la mensualidad rebaje:

- a. \$3.000
- b. \$6.000
- c. \$9.000

Tabla 16

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 5 (S1T2P5)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron en forma acertada el total de socios (165, 180, 195) para cada uno de los tres casos de rebaja. En algunos casos escribieron que a la cantidad inicial de socios (150) se le sumaban los socios nuevos (15, 30, 45) respectivamente.	12	46,2%

R2	Estudiantes que escribieron (15, 30, 45). En algunos casos se antepone la letra “N” para dar a entender que son socios nuevos.	11	42,3%
R3	Estudiantes que escribieron cantidades que no corresponden al total de socios para cada caso.	3	11,5%

De acuerdo con la *Tabla 15*, el 92,3% argumentaron que la cantidad total de socios depende de otros factores o cantidades. De estos, el 23,1% expresaron que la dependencia es de la cantidad de rebajas que se lleven a cabo y que afectan a la mensualidad y el 69,2% de la manera en que la mensualidad va disminuyendo en \$1.000. Un 7,7% no argumentaron con claridad de qué dependía la cantidad total de socios, evidenciando incoherencias en sus expresiones escritas.

De acuerdo con la *Tabla 16*, el 46,2% de los estudiantes tuvo en cuenta las relaciones de dependencia de la cantidad de veces que se hacían rebajas y la manera como esto, de acuerdo con el estudio de mercado, afectaba el número total de socios, y en consecuencia respondieron en forma correcta para cada caso propuesto. Un 42,3% escribieron el total de socios nuevos para cada caso, pero la pregunta correspondía al total de socios. Por otra parte, el 11,5% no escribieron los valores esperados para cada caso.

Un estudiante expresó la cantidad que en la situación corresponde a la variable independiente y que desempeña un papel fundamental en la comprensión de la situación, además, a partir de esta expresa de manera cuantitativa nuevos valores para cantidades dependientes en la situación, evidenciando comprensión respecto a cuánto cambian las cantidades:

4 Depende de el numero de rebajas
 5 a) 3000 - 165 Men socios b) 6000 - 180 Men socios c) 9000 - 195 Men socios

Ilustración 23. S1T2P4R1 y S1T2P5R1

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T2P4* y *S1T2P5* se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes comprendieron que la cantidad total de socios, después del estudio, dependía de las rebajas que se le iban efectuando a la mensualidad, permitiendo llevar a cabo algunos cálculos para casos particulares, lo cual da cuenta del desempeño de los mismos en el *Nivel Situacional* de modelación al poder esquematizar relaciones de dependencia presentes e incluso justificar sus respuestas con ciertos procedimientos válidos y ajustados a la cuestión planteada. Sin embargo, de este grupo menos de la mitad tuvieron dificultad al expresar el número total de socios al no considerar la cantidad inicial (150). Por otra parte, pocos estudiantes presentaron dificultades al momento de identificar la dependencia con la cual se relaciona el número total de socios y al calcular una cantidad de socios en casos particulares; los anteriores desempeños, además de responder al proceso de modelación, estuvieron ajustados de manera directa a la comprensión de la variación presente.

En la plenaria, una estudiante, respecto a *S1T2P4*, expresó que la cantidad de socios depende de la rebaja en la mensualidad porque por cada \$1.000 de rebaja van ingresando más socios, mientras que otra manifestó que depende de las rebajas ya que, si le rebajan a la mensualidad, entonces entran más socios. Un tercer estudiante respondió que depende de las rebajas a la mensualidad y otro le complementó manifestando que por cada \$1.000 aumentan cinco socios.

Respecto a *S1T2P5*, un estudiante expresó que cuando se rebaje \$3.000 habría 15 socios, con lo cual se evidenció que solo tuvo en cuenta los socios nuevos, además, no respondió acertadamente el valor total de socios de la pregunta. Otras dos estudiantes afirmaron que es 165 porque se debe tener en cuenta el número inicial de socios. Para completar las respuestas b y c de la pregunta 3 los estudiantes indican los valores totales de socios para cada caso.

(P6) Pregunta 6: De acuerdo con el estudio de mercado,
(P6a) Pregunta 6a: Explica cómo se comportan los ingresos si se inscriben más socios.

Tabla 17

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 6a (S1T2P6a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que se adquieren más ingresos por la rebaja en la mensualidad y el ingreso de socios nuevos.	15	57,7%
R2	Estudiantes que escribieron que los ingresos aumentan.	4	15,4%
R3	Estudiantes que escribieron que los ingresos “bajarían” o “mermarían” debido a la inscripción de nuevos socios.	7	26,9%

(P6b) Pregunta 6b: Describe cómo se comportan los ingresos al gimnasio si se reduce la cuota de la mensualidad.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que respondieron que los ingresos aumentan debido a la rebaja de la mensualidad.	4	15,4%
R2	Estudiantes que respondieron que los ingresos aumentan debido a la cantidad de socios nuevos que permite esto.	1	3,8%
R3	Estudiantes que respondieron que los ingresos aumentan.	10	38,5%

R4	Estudiantes que no explicitaron el comportamiento de los ingresos, sino que se enfocaron en el ingreso de nuevos socios con la rebaja en la mensualidad “pues que llegan más socios por la rebaja de los \$1000”. Estudiantes que expresaron su respuesta de una manera que no era clara.	11	42,3%
----	--	----	-------

Tabla 18

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 2 y pregunta 6b (S1T2P6b)

De acuerdo con la *Tabla 17*, el 73,1% de los estudiantes que resolvieron la tarea argumentaron que los ingresos totales aumentaban al ingresar más socios. De estos el 57,7% expresaron que esto no solo se debe al aumento de socios, sino también a la rebaja de la mensualidad, que produjo un ingreso de nuevos socios; y el otro 15,4% expresó únicamente que los ingresos aumentaban. Un 26,9% expresaron que los ingresos disminuirían, dando una respuesta que no era correcta de acuerdo con la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 18*, el 57,7% argumentaron que los ingresos totales aumentaban al ingresar más socios. De estos el 15,4% expresaron que esto se debe a la rebaja de la mensualidad, el 3,8% que los socios nuevos eran la causa del aumento de ingresos y el 38,5% expresaron únicamente que los ingresos aumentaban. Un 42,3% no expresaron con claridad el comportamiento de los ingresos, al centrarse en el número de socios y el valor de la mensualidad y no especificar qué sucedía con los ingresos totales.

Un estudiante expresó en su respuesta la complejidad que se va presentando entre las relaciones de las cantidades, a medida que se van realizando rebajas y se empiezan a vislumbrar las primeras características de la función a estudiar en la situación 1 y se sigue expresando cómo cambian las cantidades:

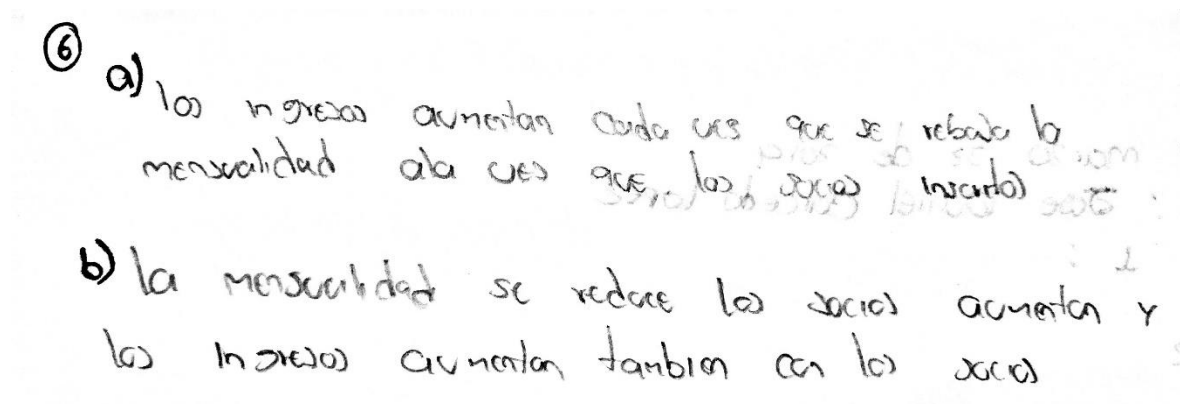


Ilustración 24. S1T2P6aR1 y S1T2P6bR1

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T2P6a* y *S1T2P6b*, respecto al proceso de modelación en el *Nivel Situacional*, se puede observar un aumento en la comprensión de las relaciones cuando se indaga considerando distintas maneras de relaciones entre las cantidades, de tal manera que es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes vislumbraron que los ingresos totales aumentaban y que dependían de las rebajas, del valor de la mensualidad y del número de socios. Sin embargo, no todos comprendieron todas las relaciones de dependencia indicadas, de tal manera que más de la mitad explicaron que la cantidad de socios era afectada por el valor de la mensualidad en las respuestas sobre *S1T2P6a*, pero muy pocos lo reafirmaron en las respuestas sobre *S1T2P6b*.

Por otra parte, pocos estudiantes mostraron dificultades al momento de identificar el comportamiento de los ingresos totales en las respuestas acerca de *S1T2P6a*, pero la cantidad aumentó al momento de responder *S1T2P6b*, lo que da cuenta de que no hay una completa apropiación de todas las relaciones de dependencia contenidas y que presentan mayores niveles de complejidad. Aunque lo anterior es parte clave en el proceso de modelación desarrollado, como se mencionó con anterioridad, este análisis está ajustado a la comprensión de la covariación entre las cantidades indicadas; por tanto, es posible que

posteriormente en el proceso de atención y coordinación de los cambios simultáneos entre las cantidades, no se perciba y entienda con facilidad las relaciones presentes.

En la plenaria, una estudiante expresó que los ingresos aumentarían si se inscriben más socios. Otra, dijo que “cada vez que rebaje van a entrar cinco socios más” y que esto afectará el valor de la mensualidad. También hicieron mención a que si la mensualidad rebaja mucho puede que mermen los ingresos. Ante esta respuesta los compañeros expresaron que es posible, pero que ninguno había pensado antes o respondido de esa manera la pregunta.

Respecto a la *S1T2P6b*, una estudiante expresó que si se reduce la cuota de la mensualidad entonces habría menos ingresos; otra, que los ingresos aumentan en este caso, un tercer estudiante los ingresos disminuyen y otros que la rebaja hace que los ingresos aumenten.

En relación con la tarea 2, de acuerdo con la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional*, al estudiar el registro tabular algunos estudiantes pudieron identificar cantidades, regularidades que algunas de estas presentaban cuando cambiaban, describir esas regularidades e incluso esquematizarlas o argumentar cuando se requería, algo que es muy importante y puede considerarse como AM1, la primera forma de coordinar los cambios de las variables; sin embargo, cuando se preguntaba por las relaciones de dependencia, fueron muchas las dificultades mostradas por parte de varios estudiantes al momento de describir los cambios sobre los cuales se indagaba, incluso algunos mostraron comportamientos *pseudo – analíticos* cuando aparentemente comprendían los cambios, pero al momento de solicitárseles la argumentación debida no la presentaron de la mejor manera, lo que permitió concluir que esta primera aproximación y ejercicio del

razonamiento covariacional tuvo tropiezos, los cuales se espera que se superen en el desarrollo de las siguientes tareas.

(T3) Tarea 3: Analizando cómo cambian las cantidades a partir de registros

tabulares

Esta tarea fue realizada por 27 de los 28 estudiantes del grupo.

(P1) Pregunta 1: Completa la Tabla 2 donde se relaciona cantidad de rebajas, valor de cada rebaja, valor de la mensualidad, cantidad de socios e ingresos al gimnasio.

Tabla 2

Relaciones entre cantidades que determinan el ingreso total.

Cantidad de rebajas	Valor de la rebaja (en pesos)	Valor total de cada rebaja (en pesos)	Valor inicial de la mensualidad (en pesos)	Valor de la mensualidad según rebajas (en pesos)	Cantidad inicial de socios	Cantidad de socios nuevos	cantidad total de socios según cantidad de rebajas	Ingreso total inicial (en pesos)	Ingreso total según mensualidad y número de socios (en pesos)
0	1.000	0	60.000	60.000	150	0	150	9.000.000	9.000.000
1	1.000	1.000	60.000	59.000	150	5	155	9.000.000	9.145.000
2	1.000	2.000	60.000	58.000	150	10	160	9.000.000	9.280.000
3									
4		4.000			150		170		
5						25			
	1.000	15.000			150		225		
⋮									
x		$1000x$							

Tabla 19

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 1 (S1T3P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que aunque completaron todos los valores en la tabla, escribieron algunos que no corresponden a las cantidades correctas.	1	3,8%

R2	Estudiantes que completaron la mayoría de los valores en la tabla, pero escribieron algunos que no corresponden a las cantidades correctas en las casillas.	26	96,2%
----	---	----	-------

De acuerdo con la *Tabla 19*, el 3,8% de los estudiantes que resolvieron la tarea 3 completaron todos los valores faltantes en la tabla, pero algunos de ellos eran incorrectos, mientras que el 96,2% no completaron la tabla en su totalidad y otros suministraron valores errados y que no correspondían a los esperados en la tabla.

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T3P1* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes muestra comportamientos asociados a AM1 al coordinar los cambios de los valores de las cantidades, además, un nivel básico de dominio de la información de la situación, de la variación y de relaciones funcionales presentes, ubicándolos en un N1 de razonamiento covariacional. Como parte del paso del *Nivel Situacional* de modelación al *Nivel Referencial*, analizando *modelos de* la situación de tal forma que la mayoría pudo completar casi todos los valores numéricos faltantes en la tabla, pero ahora con mayor nivel de complejidad en la presentación del registro tabular; solo un pequeño porcentaje del grupo no respondió la pregunta. Esta tarea era importante porque presentaba de manera más clara las cantidades que cambian (variables) y las que no lo hacen (constantes), como propiedades y elementos fundamentales de una relación funcional.

En la plenaria, una estudiante con respuesta *S1T3P1R2* dijo que, para llenar la tabla, por ejemplo, en la columna de valor de la rebaja puso \$1.000 porque ese valor era el mismo, en cambio en la columna de valor total de cada rebaja se iba aumentando de a \$1.000. En la columna de valor inicial de la mensualidad se colocaba \$60.000 en todas las casillas, pero en el valor de la mensualidad según rebajas “iba bajando un punto”, o sea que

la mensualidad iba quedando en \$57.000, luego en \$56.000 teniendo en cuenta también los socios que iban entrando. Posteriormente, se indagó acerca de la forma como llenaron la columna de los ingresos totales y cuando el ingreso era de \$9.405.000; otra estudiante expresó que ese valor lo obtuvo multiplicando el valor que de esa fila estaba en la columna de valor de la mensualidad según rebajas (\$57.000) con el número total de socios (165).

(P2) Pregunta 2: Indica las cantidades constantes de la situación según la tabla y explica por qué lo son.

Tabla 20

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 2 (S1T3P2)

Tipos de respuesta	Descripción	F. A.	F. R.	Explicación	F. A.	F. R.
R1	Estudiantes que escribieron todas las cantidades constantes presentes en la tabla.	12	44,4%	Estudiantes que argumentaron que las cantidades son constantes debido a lo repetitivo que se presentan en la tabla.	2	7,4%
				Estudiantes que escribieron el nombre de las cantidades constantes sin justificar su selección.	10	37%
R2	Estudiantes que escribieron todas las cantidades constantes presentes en la tabla y también escribieron los valores numéricos asociados a estas.	14	51,9%	Estudiantes que argumentaron que las cantidades son constantes debido a lo repetitivo que se presentan en la tabla.	1	3,7%
				Estudiantes que escribieron el nombre de las cantidades constantes sin justificar su selección.	13	48,2%
R3	Estudiantes que escribieron algunas de las cantidades constantes.	1	3,7%	Estudiantes que argumentaron que las cantidades son constantes por la manera repetitiva en que se encuentran en la tabla.	1	3,7%

De acuerdo con la *Tabla 20*, el 44,4% identificaron las cantidades constantes que hacían parte de la tabla. De estos, el 7,4% justificaron la selección de las cantidades de acuerdo con la manera repetitiva en que se encuentran en la tabla, como lo muestra un estudiante de respuesta *S1T3P2R1*:

2. valor de la rebaja / valor inicial de la mensualidad / cantidad inicial de socios / Ingreso total inicial
Por que Los valores y las cantidades son Los numeros que se repiten

Ilustración 25. S1T3P2R1

El 37% no justificó las cantidades escritas en su respuesta. El 51,9% de los estudiantes del grupo, además de escribir el nombre de la cantidad, asociaron a cada nombre el valor representativo en la tabla que lo permitía identificar como constante. Por último, el 3,7% indicaron algunas de las cantidades constantes.

De acuerdo con las respuestas sobre *S1T3P2* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes pudo identificar las cantidades constantes e incluso relacionaron estas de forma exitosa en el cálculo de valores faltantes de la tabla y que hacían parte de *S1T3P1*. Este proceso es fundamental en el *Nivel Referencial*, ya que hace parte de la comprensión de las características de las relaciones funcionales en el proceso de modelación, respecto a la identificación de las cantidades constantes (parámetros) y las que varían (variables) de acuerdo con las condiciones dadas. Por otra parte, también es muy importante que los estudiantes comprendan la noción de constante, en lo correspondiente al estudio de la covariación, ya que es punto de referencia y una de las características de la variación de la función lineal.

En la plenaria una estudiante de respuesta *S1T3P2R2* dijo el nombre de las cantidades constantes en la tabla, argumentando con otros compañeros que estas tenían valores que no cambiaban; la estudiante mencionó todas las cantidades constantes de la tabla.

(P3) Pregunta 3: Respecto a las rebajas,
(P3a) Pregunta 3a: Indica de qué depende el *valor total de cada rebaja*.

Tabla 21

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3a (S1T3P3a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que el valor total de cada rebaja depende de la cantidad de rebajas y el valor de la rebaja.	13	48,2%
R2	Estudiantes que explicaron que el valor de cada rebaja depende de la cantidad de rebajas o del valor de la rebaja. Se especifica una de las dos cantidades.	9	33,3%
R3	Estudiantes que escribieron cantidades y procedimientos que no corresponden a las cantidades consultadas.	5	18,5%

(P3b) Pregunta 3b: Escribe la manera como calculaste el *valor total de cada rebaja*.

Tabla 22

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3b (S1T3P3b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que para obtener el valor total de cada rebaja realizaron una multiplicación entre la cantidad de rebajas y el valor de la rebaja.	10	37%
R2	Estudiantes que escribieron que para obtener el valor solicitado realizaron una multiplicación, ej.: “1000 x 2 y así sucesivamente”. En algunos casos la argumentación estaba relacionada con ejemplos de cálculos numéricos.	6	22,2%

R3	Estudiantes que su respuesta estaba incompleta, presentaron inconsistencias en el procedimiento o cantidades, o no respondieron.	11	40,8%
----	--	----	-------

(P3c) Pregunta 3c: Escribe una expresión que permita calcular el **valor total de cada rebaja** según una cantidad de veces (x)

Tabla 23

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3c (S1T3P3c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $x \cdot 1000$ o $1000 \cdot x$ y explican lo que representan x y 1000 .	5	18,5%
R2	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $x \cdot 1000$ o $1000 \cdot x$	21	77,8%
R3	Estudiantes que no escribieron una expresión para calcular el valor indicado.	1	3,7%

(P3d) Pregunta 3d: Explica cómo cambia el **valor total de cada rebaja** si la cantidad de rebajas aumenta.

Tabla 24

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 3d (S1T3P3d)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que el valor de cada rebaja va aumentando de 1000 en 1000. En algunos casos se explica con multiplicaciones “ 1000×2 , 1000×3 ”.	5	18,5%
R2	Estudiantes que escribieron que el valor de cada rebaja va aumentando. En la mayoría de casos se especifica que esto se debe a la cantidad de rebajas.	18	66,7%
R3	Estudiantes que no especificaron como cambia la cantidad de rebajas, que indicaron cantidades o procedimientos no relacionados con la respuesta.	4	14,8%

De acuerdo con la *Tabla 21*, el 81,5% evidenció una relación de dependencia del valor total de la rebaja de otra(s) cantidad(es). De estos, el 48,2% identificaron que el valor

total de la rebaja dependía de la cantidad de rebajas y el valor de la rebaja (\$1.000). Un 33,3% identificaron una de las dos cantidades que determinaban el valor total de la rebaja, pero no ambas, mientras que el 18,5% restante evidenció dificultades para determinar en forma correcta la relación de dependencia para el valor total de la rebaja.

De acuerdo con la *Tabla 22*, el 59,2% explicaron que es necesario realizar una multiplicación entre cantidades para obtener el valor total de la rebaja. De estos el 37% expresaron la necesidad de llevar a cabo una multiplicación entre la cantidad de rebajas y el valor de cada rebaja. Otro 22,2% de los estudiantes respondieron que se debe efectuar una multiplicación y apoyaron su respuesta mostrando un caso particular. Por último, el 40,8% no evidenció consistencia y claridad en los procedimientos apropiados para obtener distintos valores del valor total de la rebaja.

De acuerdo con la *Tabla 23*, el 96,3% de los estudiantes escribieron una expresión algebraica aceptable $x \cdot 1000$ o $1000 \cdot x$. De estos, el 18,5% argumentaron el significado de (x) la cantidad de rebajas y (\$1.000) como el valor que disminuye en cada rebaja, mientras que el 77,8% escribieron la expresión esperada. Por último, el 7,2% no escribieron la expresión esperada.

De acuerdo con la *Tabla 24*, el 85,2% expresaron que el valor total de las rebajas aumenta si hacen más cantidad de rebajas. De estos, el 18,5% justificaron que el aumento se iba presentando de \$1.000 en \$1.000, mientras que el 66,7% solo describieron que aumentaba el valor total de las rebajas. Por último, el 14,8% no definieron en forma clara el comportamiento del valor total de las rebajas de acuerdo con las condiciones dadas.

Un estudiante evidencia una buena comprensión de las relaciones presentes y los primeros procesos de modelación en la situación:

- 8 A El valor total de cada rebaja depende de la cantidad de rebajas y el valor de la rebaja en pesos.
- B lo calcula por la multiplicación de cantidad de rebajas y el valor de cada rebaja en pesos
- C la expresión es $(1000 \times)$
- D que el valor de las rebajas va aumentando de la siguiente manera hasta que aumente más
- $$1000 \times 2 = 2000$$
- $$1000 \times 3 = 3000$$

Ilustración 26. S1T3P3aR1-S1T3P3bR1-S1T3P3cR1-S1T3P3dR1

Otra estudiante escribe otra manera de la expresión algebraica dada en algunas respuestas y su justificación:

C: $\times 1.000$ porque es la cantidad de rebajas.

de El Valor de cada rebaja aumenta por el número de veces que se rebaja.

Ilustración 27. S1T3R3cR1 y S1T3R3dR2

De acuerdo con las respuestas sobre S1T3P3d, es posible afirmar que la mayoría de estudiantes comprende la forma como se comporta el valor total de las rebajas (aumenta) a medida que se hacen rebajas, posibilitando la coordinación de los cambios de los valores de una variable con los cambios de otra (AM1), con algunos indicios de AM2 al coordinar la dirección del cambio, y de esta manera N1 y N2 de razonamiento covariacional. También, como se muestra en las respuestas sobre S1T3P3a y sobre S1T3P3b, la mayoría comprendió la dependencia entre las cantidades (cantidad de rebajas y valor de cada rebaja) de tal forma que en las respuestas sobre S1T3P3c se ve reflejado la construcción de la expresión algebraica que corresponde para el valor total de la rebaja, dando cuenta de un

Nivel Referencial en la *Modelación Vertical*, al construir modelos notacionales de las relaciones funcionales presentes a partir de las cantidades constantes y las que varían.

En la plenaria, respecto a *S1T3P3a*, un estudiante con respuesta *S1T3P3aR2* expresó que el valor total de cada rebaja “depende de la cantidad de las rebajas que se hacen por el valor inicial”. Respecto a *S1T3P3b*, una estudiante con respuesta *S1T3P3bR1* expresó que se debía “multiplicar la cantidad de rebajas por el valor de la rebaja en pesos”. Respecto a *S1T3P3c* la estudiante con respuesta *S1T3P3cR1* dijo que la expresión era “equis mil” y luego afirmó “equis por mil” y luego otro expresó que se podía escribir también “mil equis”, aunque varios compañeros expresaron que no era lo mismo.

Respecto a *S1T3P3d*, una estudiante con respuesta *S1T3P3dR1* señaló que el valor total de la rebaja va aumentando de \$1.000 en \$1.000; en principio algunos compañeros dudaron acerca de esta respuesta, pero después de discutir algunos ejemplos relacionados comprobaron y confirmaron su respuesta y que el comportamiento de la rebaja era de aumento.

(P4) Pregunta 4: Respecto a la mensualidad,
(P4a) Pregunta 4a: Explica de qué depende el *valor de la mensualidad* después de realizado el estudio.

Tabla 25
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4a (S1T3P4a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que argumentaron que el valor de la mensualidad depende del valor inicial de la mensualidad y el valor de cada rebaja.	13	48,2%
R2	Estudiantes que argumentaron que el valor de la mensualidad depende de las rebajas.	8	29,6%

R3	Estudiantes que argumentaron procedimientos o cantidades que no corresponden a la identificación de la forma de calcular el valor de la mensualidad, o no respondieron la pregunta.	6	22,2%
----	---	---	-------

(P4b) Pregunta 4b: Escribe la forma como calculaste el **valor de la mensualidad** según el número de rebajas.

Tabla 26

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4b (S1T3P4b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron con una resta la forma como se podía obtener el valor de la mensualidad. En algunos casos especificaron las cantidades que intervienen (valor inicial de la mensualidad y valor total de cada rebaja) y un ejemplo con valores numéricos.	9	33,3%
R2	Estudiantes que argumentaron que se debe realizar una resta. No se especificaron las cantidades que intervienen (valor inicial de la mensualidad y valor total de cada rebaja)	6	22,2%
R3	Estudiantes que no indicaron un procedimiento de la forma de calcular el valor de la mensualidad. Escribieron procedimientos que no son claros o que no corresponden, o no respondieron la pregunta.	12	44,5%

(P4c) Pregunta 4c: Escribe una expresión que permita calcular el **valor de la mensualidad** según el valor total de la rebaja.

Tabla 27

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4c (S1T3P4c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $60000 - 1000.x$ y justificaron las cantidades que conforman la expresión. Argumentaron que 60000 es el valor inicial de la mensualidad y que $1000.x$ es el valor total de cada rebaja.	1	3,7%
R2	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $60000 - 1000.x$	18	66,7%

R3	Estudiantes que escribieron una expresión incompleta, por ej.: $1000x$, $60.000 - x$ o que no corresponde a la expresión solicitada, o no respondieron la pregunta.	8	29,6%
----	--	---	-------

(P4d) Pregunta 4d: Explica cómo cambia el *valor de la mensualidad* si se hacen cinco rebajas.

Tabla 28

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 4d (S1T3P4d)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que el valor de la mensualidad disminuye en \$5000 ocasionando que quede en \$55000.	15	55,6%
R2	Estudiantes que escribieron que el costo de la mensualidad disminuiría \$5000.	4	14,8%
R3	Estudiantes que escribieron que el costo final de la mensualidad quedaría en \$55000.	6	22,2%
R4	Estudiantes que escribieron que el valor de la mensualidad se reduciría, pero no especifica valores numéricos, o no responde.	2	7,4%

De acuerdo con la *Tabla 25*, el 77,8% de los estudiantes identificaron y explicaron la relación de dependencia del valor de la mensualidad de otra(s) cantidad(es). De estos, el 48,2% explicaron que el valor de la mensualidad dependía del valor inicial de la mensualidad y el valor de la rebaja, como lo muestra el siguiente estudiante:

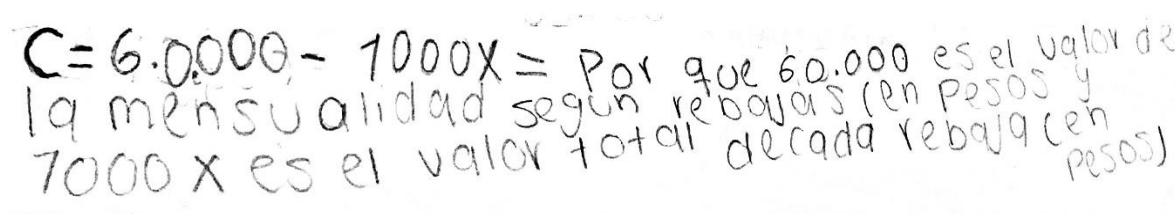
4- A-Depende del valor actual con la cantidad de cada rebaja

Ilustración 28. S1T3P4aR1

Por otro lado, el 29,6% escribieron que depende de las rebajas que se realicen. Por último, el 22,2% restante evidenció dificultad o inconsistencia para determinar en forma correcta la relación de dependencia para el valor de la mensualidad.

De acuerdo con la *Tabla 26*, el 55,5% explicaron que es necesario llevar a cabo una resta entre cantidades para obtener el valor de la mensualidad. De estos, el 33,3% expresaron la necesidad de llevar a cabo una resta y en algunos casos especificaron que debía ser entre el valor inicial de la mensualidad y el valor total de cada rebaja, mostrando algunos casos numéricos, mientras que el 22,2% de los estudiantes respondieron que se debe realizar una resta sin especificar detalles sobre las cantidades. Por último, el 44,5% no evidenció coherencia y claridad en los procedimientos apropiados para obtener distintos valores del valor total de la rebaja, o no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 27*, el 70,4% de los estudiantes escribieron una expresión algebraica de la forma $60000 - 1000 \cdot x$. De estos, el 3,7% argumentaron el significado de 60000 como el valor inicial de la mensualidad y $1000 \cdot x$ como el valor total de la rebaja, como lo muestra el único estudiante que argumentó qué significaba cada parte de la expresión modelada:



$$C = 60.000 - 1000x =$$

Por que 60.000 es el valor de la mensualidad segun rebajas (en pesos y 1000 x es el valor total de cada rebaja (en pesos)

Ilustración 29. S1T3P4cR1

El 66,7% también escribieron la expresión válida para el caso. Por último, el 29,6% no escribieron la expresión esperada de manera completa o no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 28*, el 92,6% de los estudiantes expresaron que el valor de la mensualidad disminuye si se hacen las rebajas indicadas. De estos, el 55,6% expresaron que el valor de la mensualidad disminuiría \$5.000, quedando en \$55.000; el 14,8% manifestaron que el valor de la mensualidad se disminuiría en \$5.000, mientras que el

22,2% describieron que el valor de la mensualidad quedaría en \$55.000. Por último, el 7,4% explicaron la disminución en el valor de la mensualidad, pero sin definir ningún otro valor o no respondieron la pregunta.

De acuerdo con las respuestas a las preguntas sobre *S1T3P4d* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes comprende la forma como se comporta el valor total de la mensualidad (disminuye) a medida que al valor inicial de la mensualidad se le hacen rebajas, lo cual da cuenta de AM1 y AM2, también, como se muestra en las respuestas sobre la tabla *S1T3P4a*, *S1T3P4b* y *S1T3P4c*, más de la mitad de estudiantes evidencia tener una comprensión de la dependencia entre las cantidades (valor inicial de la mensualidad y valor total de la rebaja), posibilitando la coordinación de los cambios de los valores de una variable con los cambios de otra, lo que determina para los casos indicados N1 y N2 de razonamiento covariacional. También en las respuestas sobre *S1T3P4c* se ve reflejado el uso de un modelo ya trabajado en la pregunta anterior *S1T3P3c* y la construcción de un nuevo modelo que corresponde para el valor total de la rebaja, dando cuenta de un *Nivel Referencial* de modelación; se destaca que el porcentaje de éxito evidenciado en la construcción de la expresión algebraica en la *Tabla 27* (70,4%) es menor al evidenciado en la *Tabla 23* (96,3%) donde se infiere que la comprensión y construcción por parte de los estudiantes es mejor posiblemente por su conformación menos elaborada.

En la plenaria, respecto a *S1T3P4a*, una estudiante con respuesta *S1T3P4dR1* expresó que el valor de mensualidad dependía del valor total de cada rebaja en pesos y el valor inicial de la mensualidad en pesos. Al respecto, algunos compañeros afirmaron que la respuesta era correcta. Respecto a *S1T3P4b* la misma estudiante indicó que con las cantidades mencionadas se debía hacer una resta, los compañeros indicaron que hicieron lo mismo. Respecto a *S1T3P4c* una estudiante con respuesta *S1T3P4cR2* indicó que escribió

la expresión $60000 - 1000 \cdot x$; en el caso de *S1T3P4d* una estudiante con respuesta *S1T3P4dR1* explicó que a \$60.000 se le debe restar \$5.000 y queda en \$55.000; con la pregunta del docente la estudiante indicó que el valor disminuye.

(P5) Pregunta 5: Respecto a los socios,
(P5a) Pregunta 5a: Explica de qué depende la *cantidad de socios nuevos*.

Tabla 29
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5a (S1T3P5a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que la cantidad de socios nuevos depende de las rebajas que se le hagan a la mensualidad del gimnasio.	19	74,1%
R2	Estudiantes que explicaron que la cantidad de socios nuevos depende de la cantidad de rebajas que se vayan a hacer.	4	14,8%
R3	Estudiantes que explicaron que la cantidad de socios nuevos depende de cantidades diferentes a las rebajas a la mensualidad (ej.: rebaja de socios) o no respondieron la pregunta.	3	11,1%

(P5b) Pregunta 5b: Escribe la forma como se puede calcular una *cantidad de socios nuevos*.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que se debe llevar a cabo una multiplicación entre 5 y el número de rebajas que se indique. Algunos estudiantes respondieron que se podía calcular multiplicando 5 por x .	12	44,5%
R2	Estudiantes que expresaron que se debe llevar a cabo una multiplicación y citan el ejemplo: $5 \cdot 6 = 30$.	5	18,5%
R3	Estudiantes que expresaron que: “por cada \$1000 que se rebaje dan 5 nuevos socios $\frac{1000}{5} = 5x$ ”.	7	25,9%

R4	Estudiantes que expresaron que se debe llevar a cabo una multiplicación, pero no especificaron las cantidades correspondientes ni ejemplos, o no respondieron la pregunta.	3	11,1%
----	--	---	-------

Tabla 30

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5b (S1T3P5b)

(P5c) Pregunta 5c: Escribe una expresión que permita calcular la *cantidad de socios nuevos* según el número de rebajas (x)

Tabla 31

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 5c (S1T3P5c)

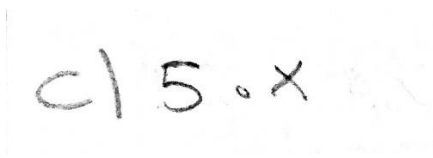
Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $5 \cdot x$ o $x \cdot 5$. En algunos casos se especifica que x es el número de rebajas y 5 es la cantidad de socios nuevos.	23	85,2%
R2	Estudiantes que escribieron una expresión que no correspondía con la cantidad de socios nuevos o que no respondieron la pregunta.	4	14,8%

De acuerdo con la *Tabla 29*, el 88,9% de estudiantes que respondieron la tarea explicaron una relación de dependencia de la cantidad de socios nuevos principalmente del número de rebajas. De estos, el 74,1% expresaron que la cantidad de socios nuevos dependía de la cantidad de rebajas y la forma como esta afecta al valor de la mensualidad y el otro 14,8% expresaron que la cantidad de rebajas posibilita el ingreso de nuevos socios. Por último, el 11,1% restante evidenció dificultades para determinar en forma correcta la relación de dependencia para la cantidad de socios nuevos y otros estudiantes no respondieron.

De acuerdo con la *Tabla 30*, el 63% explicaron que es necesario llevar a cabo una multiplicación entre cantidades para obtener la cantidad de socios nuevos. De estos, el 44,5% expresaron la necesidad de realizar una multiplicación entre 5 y la cantidad de

rebajas que se estén efectuando; el otro 18,5% de los estudiantes respondieron que se debe realizar una multiplicación y apoyaron su respuesta mostrando un caso particular. Un 25,9% acudieron a explicar su respuesta a partir del enunciado inicial y emplearon una expresión algebraica que incluía una razón y la expresión esperada como respuesta ($5x$). Por último, el 11,1% expresaron la idea de una multiplicación, pero no explicaron las cantidades, o no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 31*, el 85,2% de los estudiantes escribieron una expresión algebraica correcta de la forma $x \cdot 5$ o $5 \cdot x$. Algunos de ellos explicaron el significado de la x y el 5. Por último, el 14,8% no escribieron la expresión esperada o no respondieron la pregunta. Un estudiante escribe la expresión correcta así:



A photograph of a student's handwritten work on a piece of paper. The student has written 'c | 5 \cdot x' in dark ink. The 'c' is on the left, followed by a vertical line, then '5' and a dot, and finally 'x'. There are some faint, illegible markings to the right of the expression.

Ilustración 30. S1T3P5cR1

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T3P5a*, *S1T3P5b* y *S1T3P5c*, se puede inferir que la mayoría de los estudiantes comprendieron la dependencia de la cantidad de socios nuevos de la cantidad de rebajas y la cantidad de socios que ingresan por cada rebaja (5), posibilitando la coordinación de los cambios de los valores de una variable con los cambios de otra, como parte de las AM1 y AM2, determinando N1 y N2 de razonamiento covariacional en los casos correspondientes. También, esto permite, como se observa en la *Tabla 31*, la construcción de un modelo que corresponde a la cantidad de socios nuevos, donde la mayoría de los estudiantes desarrolla una expresión apropiada para el caso, mostrando un *Nivel Referencial* de modelación.

En la plenaria, un estudiante expresó que respecto a *S1T3P5a* la cantidad de socios nuevos “no depende de las rebajas de la mensualidad”, aunque su respuesta escrita fue del tipo R1, pudo observarse que tuvo dificultad al compartir su respuesta. Algunos de sus compañeros manifestaron que estos sí dependen de las rebajas de la mensualidad, otra estudiante con respuesta *S1T3P5aR1* expresó: “Porque si se rebajan entran más socios”, apoyándose con ayuda del docente en el enunciado inicial “por cada \$1.000 entraban cinco socios nuevos”. Al preguntar al final, otro estudiante aseveró que sí depende de las rebajas.

Respecto a *S1T3P5b* una estudiante con respuesta *R1* expresó que esto se puede calcular “multiplicando el número de rebajas por el número de socios nuevos”. Respecto a *S1T3P5c*, una estudiante con respuesta *R1* expresó que la expresión era $5x$, aunque no supo justificar el por qué de esta expresión, mientras otra expresó que “el cinco representa el número de socios nuevos como decía al principio...”, además, entre varios comentaron que la x representaba un número cualquiera en relación a las rebajas.

(P6) Pregunta 6: Para el total de socios,
(P6a) Pregunta 6a: Explica de qué depende la *cantidad total de socios*, después de realizado el estudio.

Tabla 32

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6a (S1T3P6a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que la cantidad total de socios depende de los socios iniciales y los nuevos socios, estos últimos relacionados con la cantidad de rebajas que se realicen.	16	59,3%
R2	Estudiantes que explicaron que la cantidad total de socios depende de la cantidad de rebajas o de la cantidad de nuevos socios.	7	25,9%

R3	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	4	14,8%
----	--	---	-------

(P6b) Pregunta 6b: Explica la manera como calculaste la *cantidad total de socios* de acuerdo con la cantidad de socios nuevos.

Tabla 33

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6b (S1T3P6b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que para calcular la cantidad total de socios se debe sumar la cantidad de socios iniciales (150) y la cantidad de socios nuevos (5) por las rebajas de \$1.000 que se hagan. En algunos casos se especificó que los socios nuevos dependen del número de rebajas.	17	63%
R2	Estudiantes que explicaron que para calcular la cantidad total de socios se debe realizar una suma, pero no se indicaron entre qué cantidades. En algunos casos se utilizó el ejemplo $(150+5)$ para justificar la acción a realizar.	4	14,8%
R3	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	6	22,2%

(P6c) Pregunta 6c: Escribe una expresión que permita calcular la *cantidad total de socios* de acuerdo con la cantidad de rebajas (x)

Tabla 34

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 6c (S1T3P6c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $5 \cdot x + 150$, $x \cdot 5 + 150$ o $150 + 5x$ para calcular la cantidad total de socios.	21	77,8%
R2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	6	22,2%

De acuerdo con la *Tabla 32*, el 85,2% de estudiantes que respondieron la tarea expresaron una relación de dependencia de la cantidad total de socios de otra(s) cantidad(es). De estos, el 59,3% identificaron que la cantidad total de socios dependía de la cantidad inicial de socios y la cantidad de socios nuevos, considerando la cantidad de

rebajas que lleven a cabo, mientras que el 25,9% identificaron una de las dos cantidades que determinaban la cantidad total de socios, pero no ambas. Por último, el 14,8% restante no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 33*, el 77,8% explicaron que es necesario llevar a cabo una suma entre cantidades para obtener el valor total de la rebaja. De estos, el 63% expresaron la necesidad de realizar la suma entre la cantidad inicial de socios y la cantidad de socios nuevos por la cantidad de rebajas de \$1.000, como lo muestra el siguiente estudiante:

Sumando los 150 socios iniciales mas los 5 que entran nuevos por la rebaja de 1.000

Ilustración 31. S1T3P6bR1

Por otro lado, el otro 14,8% indicaron la necesidad de sumar, pero no especificaron las cantidades necesarias. Por último, el 22,2% no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 34*, el 77,8% de los estudiantes escribieron una expresión algebraica correcta de la forma $5x + 150$, $x \cdot 5 + 150$ o $150 + 5x$, como en el siguiente caso:

$C = 150 + 5x$

Ilustración 32. S1T3P6cR1

Por último, el 22,2% no respondieron la pregunta.

De acuerdo con las respuestas sobre *S1T3P6a*, *S1T3P6b* y *S1T3P6c* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes comprende la dependencia entre las cantidades (cantidad inicial de socios y cantidad de socios nuevos) y, como se observa en la *Tabla 34*, el uso de un modelo ya trabajado en las respuestas de la *Tabla 31* para la construcción de un nuevo modelo notacional que representa la cantidad total de socios. Se destaca que el

porcentaje de éxito evidenciado en la construcción de la expresión algébrica $(150 + 5x)$ en la *Tabla 34* (77,8%) es mayor al reflejado en la construcción del modelo $(60000 - 1000x)$ en la *Tabla 27* (70,4%), lo que permite afirmar que la comprensión de las cantidades relacionadas y la construcción de modelos mejoró en esta pregunta, dando cuenta del afianzamiento en el *Nivel Referencial* por parte de la mayoría de estudiantes.

En la plenaria, respecto a *S1T3P6a* una estudiante con respuesta *R1* expresó que depende “de los socios iniciales que son 150 y de los socios nuevos” y otra manifestó que depende “de la cantidad inicial de socios y la cantidad de socios nuevos, dependiendo del número de rebajas que se hagan”. Respecto a *S1T3P6b* contestó que “sumando la cantidad inicial de socios que en el caso era 150 con la cantidad de socios nuevos”. Respecto a *S1T3P6c*, una estudiante con respuesta *R1* contestó que la expresión era $(150 + 5x)$, además otros respondieron que en la expresión el 150 era los socios iniciales y la otra parte, $5x$ representaba los socios nuevos.

(P7) Pregunta 7: En relación al ingreso total al gimnasio,
(P7a) Pregunta 7a: Explica de qué dependen los *ingresos totales al gimnasio*.

Tabla 35
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7a (S1T3P7a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que los ingresos totales dependen del número de socios y la mensualidad de acuerdo con las rebajas.	6	22,2%
R2	Estudiantes que escribieron que los ingresos totales dependen del número inicial de socios y la mensualidad de acuerdo con las rebajas.	6	22,2%
R3	Estudiantes que escribieron que depende de una de las cantidades apropiadas (valor de la mensualidad o socios nuevos), ej: “depende de la mensualidad con respectiva	9	33,4%

rebaja”. Algunas respuestas estaban incompletas o presentaban incoherencias.

R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	6	22,2%
----	--	---	-------

(P7b) Pregunta 7b: Escribe la manera como calculaste los *ingresos totales al gimnasio*.

Tabla 36

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7b (S1T3P7b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que realizaron una multiplicación entre el valor de la mensualidad y la cantidad total de socios, de acuerdo con las rebajas.	9	33,3%
R2	Estudiantes que explicaron que realizaron una multiplicación entre el valor de la mensualidad y la cantidad de socios.	10	37,1%
R3	Estudiantes que presentaron una respuesta incompleta o no respondieron la pregunta.	8	29,6%

(P7c) Pregunta 7c: Escribe una expresión que permita calcular los *ingresos totales al gimnasio* según la cantidad de rebajas (x).

Tabla 37

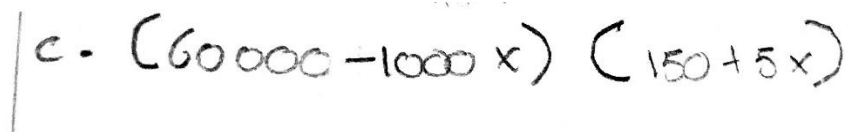
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 7c (S1T3P7c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $(60000 - 1000x)(150 + 5x)$ para calcular los ingresos totales al gimnasio.	12	44,5%
R2	Estudiantes que escribieron una expresión incompleta, que no corresponde con lo necesario para determinar los ingresos totales al gimnasio.	9	33,3%
R3	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	6	22,2%

De acuerdo con la *Tabla 35*, el 77,8% expresaron una relación de dependencia de los ingresos totales de otra(s) cantidad(es). De estos, el 22,2% explicaron que los ingresos totales dependían del número de socios y la mensualidad de acuerdo con las rebajas que se le hayan realizado; otro 22,2% expresaron que los ingresos totales dependían del número – inicial – de socios y la mensualidad de acuerdo con las rebajas y los últimos del grupo, el 33,4% expresaron que los ingresos totales dependían de otras cantidades, pero identificaron una de las cantidades que determinaban los ingresos totales al gimnasio. Por último, el 22,2% restante no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 36*, el 70,4% explicaron que era necesario llevar a cabo una multiplicación entre cantidades para obtener el valor total de la rebaja. De estos el 33,3% expresaron la necesidad de realizar la multiplicación entre la cantidad total de socios y el valor de la mensualidad y el otro 37,1% indicaron la necesidad de multiplicar el valor de la mensualidad y la cantidad de socios, pero no especificaron si era la cantidad total o la de nuevos socios. Por último, el 29,6% presentaron una respuesta no acorde con la pregunta o no respondieron.

De acuerdo con la *Tabla 37*, el 44,5% de los estudiantes escribieron una expresión algebraica correcta de la forma $(60000 - 1000x)(150 + 5x)$, como la presenta la siguiente estudiante:

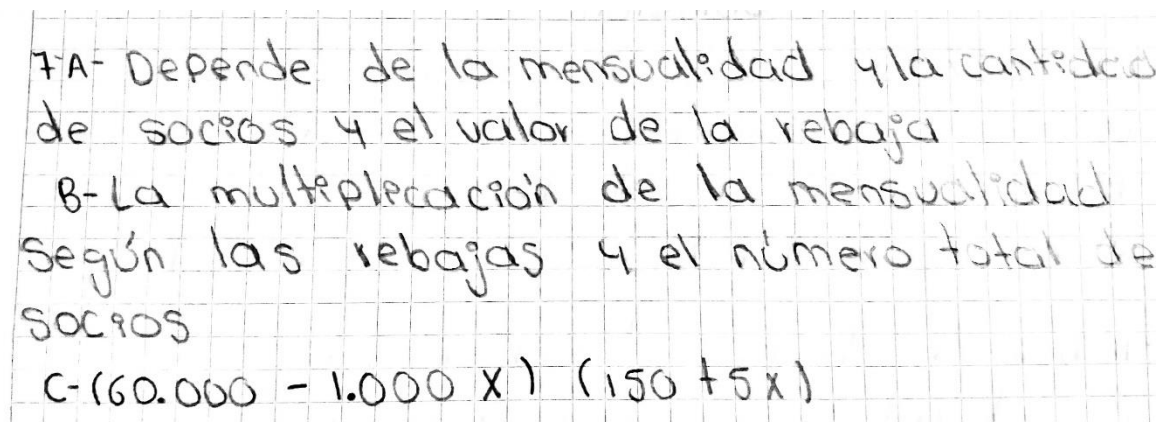


A handwritten algebraic expression on lined paper. The expression is written as $c = (60000 - 1000x)(150 + 5x)$. The 'c' is at the start of a line, followed by an equals sign, then the two factors in parentheses. The numbers are written with some zeros that look like 'o's. The variable 'x' is used in both terms.

Ilustración 33. S1T3P7cR1

Por otra parte, el 33,3% no presentó una expresión completa o coherente de acuerdo con lo esperado y el 22,2% restante no respondieron la pregunta.

Una estudiante explicó las relaciones presentes en la situación, concernientes a los ingresos totales, así:



A- Depende de la mensualidad y la cantidad de socios y el valor de la rebaja
 B- La multiplicación de la mensualidad según las rebajas y el número total de socios
 C- $(60.000 - 1.000x)(150 + 5x)$

Ilustración 34. S1T3P7aR1-S1T3P7bR1-S1T3P7cR1

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T1P7a*, *S1T1P7b* y *S1T1P7c* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes comprende la relación de dependencia entre cantidades propias de la situación y que intervienen en los ingresos totales, posibilitando la coordinación de los cambios de los valores de una variable con los cambios de otra como muestra de AM1 y AM2, determinando N1 y N2 en los casos correspondientes, sin embargo, de acuerdo con los datos en la *Tabla 37* se ve reflejado que menos de la mitad de los estudiantes del grupo escribió acertadamente el modelo correspondiente a los ingresos totales, posiblemente por la mayor complejidad que este comprendía. Se aclara que este grupo de estudiantes elaboró y explicó modelos más sencillos trabajados en preguntas anteriores para así formular el modelo general de los ingresos, como parte del *Nivel Referencial* de modelación, sin embargo, fue más difícil desarrollar un modelo de la forma $(60000 - 1000x)(150 + 5x)$ acerca de la situación, posiblemente por las nuevas relaciones entre modelos trabajados, tal como se observa en las respuestas de la *Tabla 37* al obtenerse un porcentaje de éxito del 44,5%, en comparación con el porcentaje de éxito evidenciado en la construcción de la expresión algebraica $(150 + 5x)$ en la *Tabla 34*

(77,8%) y de la expresión $(60000 + 1000x)$ en la *Tabla 27* (70,4%), lo que permite confirmar las dificultades evidenciadas en múltiples investigaciones al momento de llevar a cabo procesos de modelación de relaciones funcionales en situaciones en contexto, cuando el número de relaciones y el nivel de complejidad aumenta como parte del avance a niveles mayores de generalización, como en este caso el propósito de construir un modelo de la *función cuadrática* que modela la situación.

En la plenaria, respecto a *S1T1P7a* una estudiante con respuesta *R2* expresó que “depende de la mensualidad, el número inicial de socios y de las rebajas”, mientras que otra compañera expresó que “depende de la mensualidad, con su respectiva rebaja y también de la cantidad de socios que ingresaron nuevos”. Respecto a *S1T1P7b* la misma estudiante expresó que escribió $(60000 - 1000x)(150 + 5x)$, dando una explicación correcta del significado de cada parte de la expresión; de acuerdo con una pregunta realizada por el docente detalló que escribió $(60000 - 1000x)$ porque estaba representando la parte de la mensualidad y $(150 + 5x)$ que correspondía a los socios y que esto significaba que los resultados se debían multiplicar. Respecto a *S1T1P7c* una estudiante con respuesta *R1* ratificó la expresión que ya se había mencionado con anterioridad, aunque no manifestó seguridad cuando se le preguntó qué operación se debía efectuar entre los dos paréntesis. Finalmente, una estudiante con respuesta *R2* indicó una expresión incompleta y que presentaba algunos errores.

(P8) Pregunta 8: Michael afirma que pudo calcular el ingreso total al gimnasio después del estudio mediante la expresión: $\text{Ingreso total} = (60000 - 1000x)(150 + 5x)$, donde x es la cantidad de rebajas.

(P8a) Pregunta 8a: Escribe si estás de acuerdo con Michael e indica por qué.

Tabla 38

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que manifestaron estar de acuerdo con la expresión indicada por Michael, porque se está multiplicando el valor de la mensualidad y el número total de socios.	3	11,1%
R2	Estudiantes que manifestaron estar de acuerdo con la expresión indicada por Michael y para definir esto tuvieron en cuenta lo respondido en puntos anteriores. Algunos se refirieron a lo trabajado en S1T3P4c y S1T3P6c, al tener cosas en común.	6	22,3%
R3	Estudiantes que manifestaron estar de acuerdo con la expresión indicada por Michael argumentando que la expresión tenía partes “comunes” a las ya trabajadas en puntos anteriores.	9	33,3%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	9	33,3%

(P8b) Pregunta 8b: Para los valores de $x = 3, 15, 20$, utiliza la fórmula de Michael y calcula los ingresos al gimnasio para cada caso.

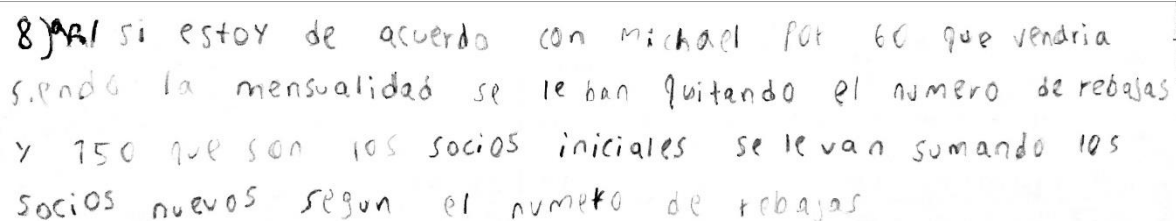
Tabla 39

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que emplearon la expresión indicada por Michael $\text{Ingreso total} = (60000 - 1000x)(150 + 5x)$ y calcularon en forma correcta los ingresos al gimnasio para cada caso, obteniendo como resultado \$ 9.405.000, \$10.125.000 y \$10.000.000 respectivamente.	4	14,8%
R2	Estudiantes que emplearon la expresión indicada por Michael $\text{Ingreso total} = (60000 - 1000x)(150 + 5x)$ pero presentaron errores en los procedimientos para calcular los ingresos al gimnasio, lo que los condujo a valores que no corresponden.	8	29,7%
R3	Estudiantes que no emplearon la expresión indicada por Michael $\text{Ingreso total} = (60000 - 1000x)(150 + 5x)$ y desarrollaron expresiones o procedimientos que no son	15	55,5%

apropiados para determinar los ingresos al gimnasio o no responde.

De acuerdo con la *Tabla 38*, el 66,7% de los estudiantes que resolvieron la tarea 3 manifestaron estar de acuerdo con la afirmación hecha por Michael. De estos, el 11,1% manifestaron que esta expresión mostraba la multiplicación del valor de la mensualidad con el número total de socios, como lo argumenta a continuación un estudiante:



8) SI SI ESTOY DE ACUERDO CON MICHAEL POR 60 QUE VENDRIA
 SIENDO LA MENSUALIDAD SE LE VAN QUITANDO EL NUMERO DE REBAJAS
 Y 750 QUE SON LOS SOCIOS INICIALES SE LE VAN SUMANDO LOS
 SOCIOS NUEVOS SEGUN EL NUMERO DE REBAJAS

Ilustración 35. S1T3P8aR1

Un 22,3% expresaron que las partes de esta expresión coincidían con algunas ya trabajadas en las respuestas de las preguntas *S1T3P4c* y *S1T3P6c*, mientras que el 33,3% expresaron que algunas expresiones que componían la expresión de Michael ya habían sido trabajadas, pero no explicitaron en qué parte. Por último, el 33,3% restante no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 39*, el 14,8% emplearon apropiadamente la expresión indicada para determinar los ingresos de manera acertada en cada caso (\$ 9.405.000, \$10.125.000 y \$10.000.000 respectivamente). Un 29,7% hicieron uso de la expresión algébrica dada por Michael, pero en sus cálculos presentaron muchos errores, mostrando como resultado valores que no correspondían a la respuesta. Por último, el 55,5% no emplearon la expresión dada y presentaron como resultado valores que no correspondían a los valores esperados; de este grupo varios no respondieron la pregunta.

De acuerdo con las respuestas sobre *S1T1P8a* y *S1T1P8b* es posible afirmar que la mayoría de estudiantes tiene dificultades para trabajar con *modelos de* la situación dados, con un nivel mayor de complejidad. Más de la mitad de los estudiantes no trabajaron con el modelo y aproximadamente la séptima parte de los estudiantes del grupo lo emplearon de manera satisfactoria, dando cuenta de un *Nivel Referencial* de modelación en cuanto a los modelos usados. El porcentaje de estudiantes que emplearon de manera incorrecta el modelo y los que no lo emplearon también permite confirmar las dificultades y el poco dominio de algunas nociones aritméticas y algebraicas que tienen la mayoría de estudiantes del grupo, necesarias para un uso adecuado de modelos algebraicos.

En la plenaria, respecto a *S1T1P8a*, una estudiante de respuesta *R1* respondió que sí porque correspondía a la multiplicación entre las cantidades relacionadas, después de rebajas. Respecto a *S1T1P8b* la misma estudiante ratificó su respuesta *R1* de los valores correctos de los ingresos cuando la cantidad de rebajas era 3, 15 y 20. Un estudiante de respuesta *R3*, al preguntársele, indicó unos valores que no correspondían a los ingresos para los casos indicados, corroborando las dificultades que tuvo en el registro de las respuestas de la tarea.

Respecto a la pregunta central de la situación “¿cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio Hércules puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?”, se volvió a reflexionar al respecto y los estudiantes respondieron que el máximo ingreso era cuando se hacían 15 rebajas y el ingreso logrado sería de \$10.125.000, para esto, la mensualidad quedaría con un costo de \$45.000 y el número de socios sería de 225. De acuerdo con esto, se alcanzó uno de los objetivos de la Situación 1, el cual era determinar el máximo que se puede obtener de ingresos económicos, dadas las condiciones y recomendaciones propuestas por el estudio de mercadeo llevado a cabo.

En relación con la tarea 3, de acuerdo con la *Matematización Vertical – Nivel Referencial*, al estudiar el registro tabular algunos estudiantes pudieron identificar, esquematizar y argumentar las relaciones funcionales presentes e indicadas en las preguntas. Los procesos de modelación cada vez iban presentando mayor complejidad conforme avanzaban las preguntas, por tanto, las dificultades para la construcción de modelos se notaron de manera más clara en las últimas preguntas, pues cuando se solicitaron modelos sencillos de relaciones entre cantidades, los estudiantes dieron cuenta de estos, sin embargo, cuando se requería construir el *modelo de* la función cuadrática presente, muy pocos lo desarrollaron.

Como parte de AM1 y AM2, los estudiantes coordinaron los cambios de unas variables en relación con las otras variables, sin embargo, en el caso de la argumentación de relaciones de dependencia más complejas respecto a la situación, fueron muchas las dificultades mostradas por parte de varios estudiantes al momento de describir los cambios sobre los cuales se indagaba, incluso algunos mostrando comportamientos *pseudo – analíticos*, lo que permitió registrar AM1 y algunas AM2 y en relación con estos, N1 y N2 de razonamiento covariacional.

(T4) Tarea 4: Analizando los cambios de las cantidades a partir de registros gráficos

Esta tarea fue realizada por 24 estudiantes de los 28 del grupo.

Instrucción:

En la Gráfica 1 se muestra la forma como se comportan los ingresos totales a medida que se van realizando cantidades de rebajas, según la situación inicial.

(P1) Pregunta 1: Determina cual magnitud va en cada eje. Ten en cuenta la información y expresiones trabajadas anteriormente.

Gráfica 1. Comportamiento de cantidad de rebajas vs ingresos totales.

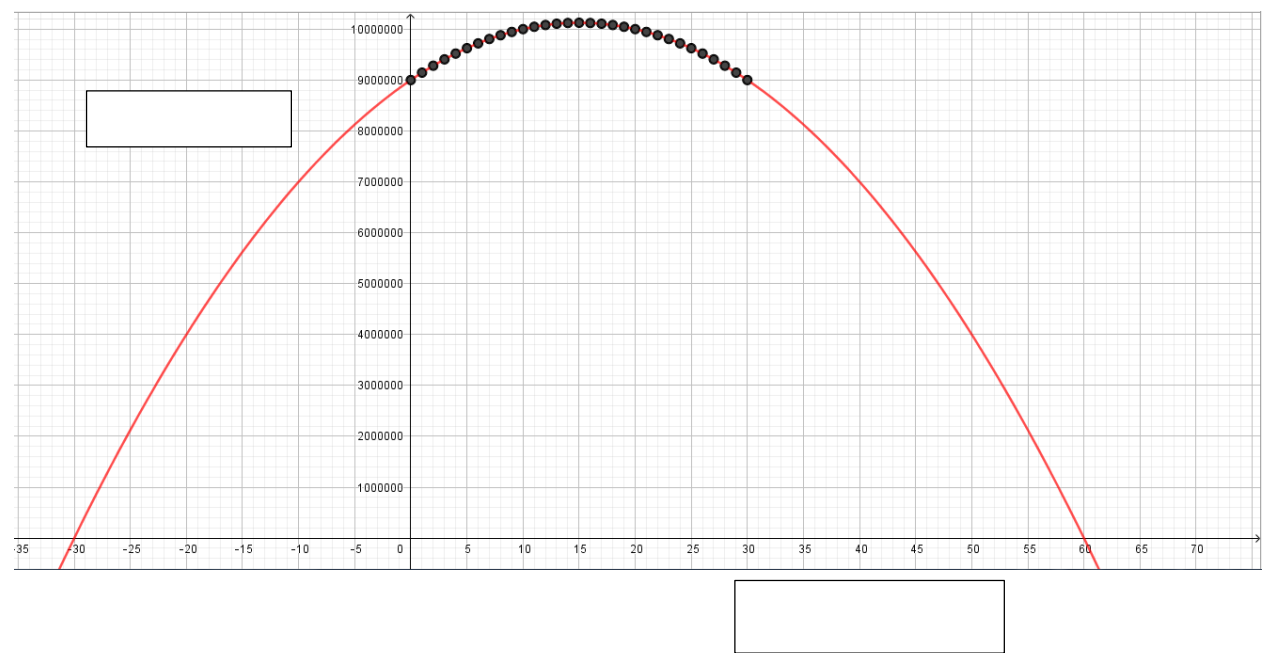


Tabla 40
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 1 (S1T4P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron cantidad de rebajas en el eje horizontal (x) e ingresos totales en el eje vertical (y)	24	100%

De acuerdo con la *Tabla 40*, el 100% de los estudiantes escribieron en forma correcta la cantidad de rebajas de la cantidad de ingresos totales sobre el eje correspondiente para cada caso.

Respecto a las respuestas sobre *S1T4P1*, es posible afirmar que los estudiantes comprendieron aspectos básicos de la representación gráfica de situación como aproximación al *Nivel General* de modelación, a partir de la cual se promovió la reflexión sobre las propiedades de la parábola como representación de la función cuadrática. Respecto al razonamiento covariacional, la pregunta estaba encaminada a facilitar la

designación de cada eje con el nombre correspondiente de las cantidades indicadas al inicio de la pregunta, un aspecto fundamental en la comprensión de las relaciones de dependencia propias de la situación y que constituye un factor importante al momento del estudio de la covariación entre las cantidades representadas, como parte de AM1 y AM2, determinándose N1 y N2 de razonamiento covariacional en los casos correspondientes.

En la plenaria, cuando el docente investigador recordó la pregunta, los estudiantes respondieron que en el eje x iba la cantidad de rebajas y en el eje y los ingresos totales.

(P2) Pregunta 2: De acuerdo con la gráfica,

(P2a) Pregunta 2a: Describe cómo cambian los ingresos totales (y) a medida que se realiza una mayor cantidad de rebajas (x)

Tabla 41
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2a (S1T4P2a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que describieron que los ingresos totales aumentan hasta “un punto” y después de ese punto empiezan a disminuir. En algunos casos especificaron que los ingresos aumentan hasta el punto 15 y después disminuyen llegando al punto 30.	8	29,6%
R2	Estudiantes que describieron que los ingresos totales cambian a medida que aumentan las rebajas, no siempre aumentan pues algunas veces disminuyen.	9	41,2%
R3	Estudiantes que describieron la forma en que los ingresos totales van aumentando mientras las rebajas siguen bajando.	3	12,5%
R4	Estudiantes que describieron que los ingresos empiezan a disminuirse a medida que la cantidad de rebajas aumenta y se disminuye en 15.	4	16,7%

(P2b) Pregunta 2b: Escribe para que valor de x (cantidad de rebajas), y (ingresos totales) toma su mayor valor.

Tabla 42

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2b (S1T4P2b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que cuando x vale 15 se obtiene su mayor valor. Algunos estudiantes especificaron que en este punto se obtiene el mayor valor de los ingresos.	16	66,7%
R2	Estudiantes que escribieron que el mayor valor de x es 15, pero el complemento de su respuesta presenta incoherencias.	2	8,3%
R3	Estudiantes que no especificaron el valor de x para el cual se obtienen los mayores ingresos o estudiantes que no respondieron.	6	25%

(P2c) Pregunta 2c: Explica qué cambios en la gráfica se muestran a partir de este punto.

Tabla 43

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 2c (S1T4P2c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que a partir del punto los ingresos disminuyen “merman”. En algunos casos se especifica que también las rebajas aumentan.	13	54,2%
R2	Estudiantes que escribieron que al llegar “al punto 15 comienza a bajar a un punto determinado”.	5	20,8%
R3	Estudiantes que respondieron que aumentan o disminuyen, o estudiantes que no respondieron la pregunta.	6	25%

De acuerdo con la *Tabla 41*, el 70,8% de los estudiantes que resolvieron la tarea 4 escribieron que los ingresos algunas veces aumentaban y otras disminuían mientras se iban efectuando determinada cantidad de rebajas. De estos, el 29,6% explicaron que los ingresos aumentaban hasta un punto determinado y luego empezaban a disminuir, estableciendo en

15 el número tope de rebajas que daban lugar al incremento de los ingresos, luego de lo cual los mismos empezaban a disminuir, mientras que el 41,2% comentaron que los ingresos algunas veces subían y otras no, pero no especificaron más detalles. Otro 29,2% identificaron cambios parciales en la cantidad de ingresos a medida que se hacen más rebajas, de tal manera que el 12,5% argumentaron que los ingresos aumentaban al haber más rebajas y el 16,7% explicaron que los ingresos disminuían al realizarse más rebajas.

De acuerdo con la *Tabla 42*, el 75% de los estudiantes escribieron que cuando x vale 15 es cuando mayores ingresos recibe el gimnasio. De estos, el 66,7% argumentaron que cuando x vale 15 es que se obtienen más ingresos y el 8,3% indicaron que cuando x vale 15, sin especificar más detalles. El 25% restante se dividió entre quienes presentaron dificultades para especificar el valor de x , que cumple las condiciones de la pregunta, y quienes no respondieron.

De acuerdo con la *Tabla 43*, el 75% de los estudiantes respondieron que a partir del punto máximo para x y y los ingresos disminuían o “merman” hasta cierto punto. De estos el 54,2% explicaron que los ingresos empezaban a mermar y la cantidad de rebajas seguía aumentando, el porcentaje restante de estudiantes argumentó que los ingresos comenzaban a bajar a un punto determinado. Por último, el 25% indicaron que aumentaban o disminuían los ingresos, sin especificar más detalles, o no respondieron la pregunta.

El siguiente estudiante hace una explicación de cómo van cambiando los ingresos a medida que se van haciendo distintas rebajas, con lo cual se evidenció algunos rasgos de la coordinación de los cambios de las dos cantidades relacionadas en la pregunta y la identificación del punto máximo, esencial para identificar cambios en el comportamiento de los ingresos:

 R2=
 a: Los ingresos aumentan hasta el punto 15 después empiezan a disminuir llegando al punto 30 donde vuelve a tener los mismos ingresos del inicio.
 b: Emplea su mayor valor en 15 porque son donde hay mas ingresos.
 c: Que después del 15 comienza a disminuir los ingresos.

Ilustración 36. S1T4P2aR1-S1T4P2bR1-S1T4P2cR1

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S1T4P2a*, *S1T4P2b* y *S1T4P2c* se puede observar la coordinación de los cambios de una variable en relación a otra en una gráfica, en relación con AM1 y AM2, y de acuerdo con esto afirmar que más de la mitad de los estudiantes comprendieron y explicaron que los ingresos totales en una parte de la gráfica aumentaban y en otra disminuían en relación con el comportamiento de la cantidad de rebajas, dando una descripción cualitativa de estas acciones y verificando N1 y N2 de razonamiento covariacional en los casos correspondientes. Además, de acuerdo con las respuestas es posible afirmar que los estudiantes identificaron el punto máximo sobre la curva, característica de algunos casos de funciones cuadráticas, y la manera en que dicho punto está relacionado con cambios en el comportamiento en las cantidades relacionadas; lo que está directamente relacionado con características del nivel general de modelación, en el cual se reflexiona acerca de los modelos de la situación, como el gráfico en este caso, para comprender propiedades de la función cuadrática en este registro.

En la plenaria, respecto a *S1T4P2a*, una estudiante de respuesta *R4* respondió que “los ingresos totales comienzan a disminuirse a medida que la cantidad de rebajas aumenta y se disminuye en 15”, mientras que otra expresó que “los ingresos totales comienzan a

disminuir y a medida... de cantidad de rebajas aumentan y se disminuyen”. Una estudiante de respuesta *R2* expresó que “los ingresos totales cambian a medida que se hacen rebajas, pero no siempre aumentan, algunas veces disminuyen”. Por otra parte, una estudiante de respuesta *R1* expresó que “los ingresos aumentan hasta el punto 15 y después empiezan a disminuir llegando al punto 30 donde vuelvan a tener en cuenta el punto del inicio”, mientras que otra partiendo de que su respuesta estaba mala, luego formuló que “antes de 15 rebajas los ingresos aumentan pero si ya se hacen 20 rebajas los ingresos van a disminuir”, dudando de la descripción de su respuesta, evidenciando rasgos de un *comportamiento pseudo – analítico*.

Respecto a *S1T4P2b*, una estudiante de respuesta *R1* manifestó que “si se hacen 15 rebajas” y posteriormente ella y otra estudiante, al repetirse la pregunta, reafirmaron que 15 es el mayor valor para x . En relación con *S1T4P2c*, al preguntarse acerca de lo que sucede después del punto máximo, una estudiante de respuesta *R1* manifestó que “empiezan a... empiezan a disminuir los ingresos”.

(P3) Pregunta 3: En relación con las cantidades,
(P3a) Pregunta 3a: Escribe qué le sucede a los valores de x (cantidad de rebajas) cuando los valores de y (ingresos totales) se hacen mayores.

Tabla 44
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 3a (S1T4P3a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que cuando los ingresos totales son mayores, la cantidad de rebajas también aumenta.	9	37,5%
R2	Estudiantes que escribieron que cuando los ingresos van aumentando, la cantidad de rebajas aumenta hasta 15.	6	25%

R3	Estudiantes que escribieron que la cantidad de rebajas empiezan a disminuir hasta un punto determinado.	5	20,8%
R4	Estudiantes que escribieron una respuesta que no es clara, coherente o no respondieron.	4	16,7%

(P3b) Pregunta 3b: Explica cómo cambian los ingresos totales cuando el número de rebajas está entre 0 y 15.

Tabla 45

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 3b (S1T4P3b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que los ingresos totales aumentan cuando la cantidad de rebajas está entre 0 y 15.	14	58,3%
R2	Estudiantes que escribieron que los ingresos totales disminuyen o rebajan si la cantidad de rebajas se mantiene entre 15. No se identifica el intervalo en forma exacta.	4	16,7%
R3	Estudiantes que no escribieron de manera clara el comportamiento de los ingresos totales en este intervalo de cantidad de rebajas o no respondieron.	6	25%

De acuerdo con la *Tabla 44*, del 62,5% de los estudiantes que resolvieron la tarea 4 explicaron que los valores de x aumentan. De estos el 37,5% expresaron que cuando los ingresos se van haciendo mayores la cantidad de rebajas está aumentando, mientras que el 25% argumentaron que mientras los ingresos están aumentando la cantidad de rebajas aumenta hasta el 15. Por otra parte, el 20,8% explicaron que la cantidad de rebajas empieza a disminuir y el 16,7% dieron una respuesta que presenta incoherencias o no respondieron.

De acuerdo con la *Tabla 45*, el 58,3% de los estudiantes explicaron que en el intervalo indicado de la cantidad de rebajas (entre 0 y 15) los ingresos totales aumentan, mientras que el 16,7% explicaron que los ingresos disminuyen o bajan. Por último, el 25%

no describieron con claridad el comportamiento de los ingresos en este intervalo o no respondieron.

En relación con el comportamiento de los ingresos totales y el número de rebajas, un estudiante argumentó qué va sucediendo con los cambios en ciertos intervalos de la gráfica:

3a lo que le sucede a la cantidad de rebajas cuando los ingresos totales se hacen mayores es que aumentan hasta un punto.

b los ingresos totales van aumentando hasta el 15.

Ilustración 37. S1T4P3aR1 y S1T4P3bR1

En relación con los tipos de respuesta sobre *S1T4P3a* y *S1T4P3b* es posible afirmar que más de la mitad de los estudiantes identificaron y describieron a partir de la representación gráfica el comportamiento de los ingresos totales a medida que se llevaban a cabo determinadas cantidades de rebajas, realizando una coordinación de las cantidades en determinados instantes o momentos de la gráfica en relación a la situación, mostrando AM1 y AM2 de razonamiento covariacional, al coordinar la dirección del cambio; además, como parte del proceso de modelación en el *Nivel General*, estas reflexiones sobre la gráfica se constituyen en parte fundamental del reconocimiento y comprensión de las propiedades de la función cuadrática.

En la plenaria, respecto a *S1T4P3a* una estudiante de respuesta *R1* contestó que cuando los valores de y se hacen mayores, los de x “aumentan hasta un punto”. Luego, a la pregunta sobre hasta qué punto, contestó que “hasta el 15”. Otra estudiante de respuesta *R3* contestó que “en la x la cantidad de rebajas sucede que comienza a bajar hasta un punto

determinado, los ingresos totales se hacen mayores porque se comienzan a multiplicarse y así mismo van teniendo un mayor resultado y ganancia en sí mismo”, luego cuando se le vuelve a preguntar ¿Qué sucede con los valores de x ?, ella contesta: “pues que van aumentando”, y al preguntársele hasta dónde, ella contesta que hasta el 15.

Respecto a *S1T4P3b*, que estaba muy relacionada con la pregunta anterior, una estudiante de respuesta *R1* expresó que “los ingresos totales aumentan” en la condición indicada. En ese instante el docente investigador preguntó sobre el comportamiento de los ingresos dado el caso en que se hicieran dos o tres rebajas, a lo que los estudiantes respondieron que los ingresos aumentarían hasta cuando se llegara a 15 rebajas, luego de ello empezarían a disminuir.

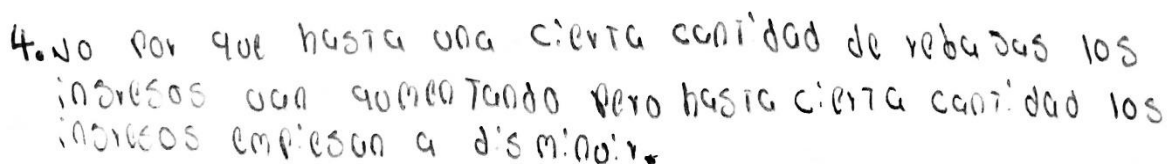
(P4) Pregunta 4: Es posible afirmar que “siempre que los valores de x (cantidad de rebajas) aumentan, los valores de y (ingresos totales) también aumentan”. Explica tu respuesta.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que no estaban de acuerdo porque hasta una cierta cantidad de rebajas los ingresos van aumentando hasta un punto y después de ese punto empiezan a disminuir.	4	16,7%
R2	Estudiantes que escribieron que no estaban de acuerdo porque cuando aumentan la cantidad de rebajas, los ingresos totales disminuyen.	7	29,2%
R3	Estudiantes que escribieron que si estaban de acuerdo porque al hacer más rebajas entra más gente y se obtiene más ganancia y por tanto no van a disminuir los ingresos totales.	5	20,8%
R4	Estudiantes que escribieron que no estaban de acuerdo, pero su argumentación no es clara y coherente o no respondieron. En algunos casos se expresó que las rebajas y los ingresos disminuyen a la vez.	8	33,3%

Tabla 46

Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 4 (S1T4P4)

De acuerdo con la *Tabla 46*, el 45,9% de los estudiantes que resolvieron la tarea 4 expresaron no estar de acuerdo con la afirmación y señalaron que los ingresos también aumentaban. De estos, el 16,7% explicaron que los ingresos en un momento aumentaban hasta cierto punto y después disminuían, como lo desarrolló el siguiente estudiante:



4. No por que hasta una cierta cantidad de rebajas los ingresos van aumentando pero hasta cierta cantidad los ingresos empiezan a disminuir.

Ilustración 38. S1T4P4R1

El 29,2% argumentaron que cuando las rebajas aumentan los ingresos disminuyen, pero no especificaron algún punto o momento donde se vea esto. El 20,8% escribieron que sí estaban de acuerdo, argumentando algunas características de la situación, por ejemplo, que entre más rebajas se otorguen es posible que ingresen más personas y haya más ingresos. Por último, el 33,3% no respondieron de manera clara si estaban de acuerdo o no y sus argumentos no eran coherentes, o no respondieron.

A partir de las respuestas sobre *S1T4P4*, se puede observar una disminución en el porcentaje de acierto de descripción de la situación, ya que solo el 45,9% explicaron que hay aumento y disminución de los ingresos debido al aumento de rebajas, en comparación con las respuestas suministradas en la *Tabla 44* y *Tabla 45* donde más del 50% de los estudiantes explicaron acertadamente el comportamiento de los ingresos. De lo anterior, es posible aseverar que menos de la mitad de los estudiantes comprendieron con claridad y apropiación el comportamiento de los ingresos, mostrando AM1 y AM2, de acuerdo con las condiciones de la situación, por tanto, tienen la posibilidad de afirmar o refutar

afirmaciones en torno a la misma situación y que impliquen la coordinación cualitativa de los cambios de las cantidades relacionadas. Por otro lado, en varios casos se registraron comportamientos *pseudo – analíticos*, esto es así en tanto que al tratarse de preguntas previas los estudiantes logran describir los cambios de las cantidades de manera acertada, lo que no sucede con sus argumentaciones, en la cuales se evidencia la falta de claridad al respecto de la forma como se relacionan las cantidades en todo el dominio de la función. Finalmente, con respecto al proceso de modelación, los casos de argumentación apropiada afirman el *Nivel General*.

En la plenaria, respecto a *S1T4P4*, donde se quería mirar de manera más amplia el comportamiento de la gráfica a medida que se hacían más rebajas, en relación con la afirmación, una estudiante de respuesta *R2* expresó que “no porque el valor x ...no porque el valor de x empieza a aumentar y los de la y disminuyen” y al volvérselo a preguntar si siempre aumentan o disminuyen ella contestó que “(los valores de y) aumentan hasta el 15 ... y desde el 15 comienzan a disminuir”; esto permitió identificar y aclarar la respuesta escrita de la estudiante. A la misma afirmación, un estudiante con respuesta *R1* contestó que “no porque hasta una cierta cantidad de rebajas los ingresos van aumentando y hasta cierta cantidad los ingresos empiezan a disminuir”.

(P5) Pregunta 5: Escribe el significado, en relación a la situación, de los puntos de corte de la gráfica con el eje y :

a. $(-30, 0)$
b. $(60, 0)$

Tabla 47

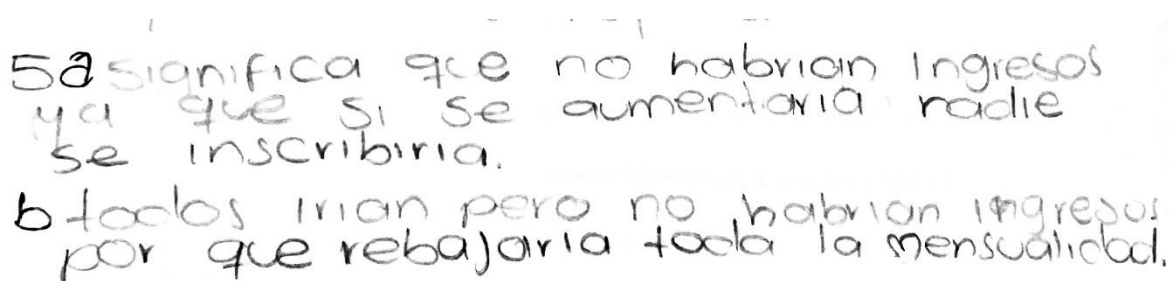
Tipos de respuesta a la situación 1, tarea 4 y pregunta 5 (S1T4P5)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
--------------------	-------------	---------------------	---------------------

R1	Estudiantes que escribieron que el punto (-30, 0) indica que no habría ingresos porque se aumentó demasiado la mensualidad y que el punto (60, 0) significa que tampoco hay ingresos porque ya quedó muy baja, gratis.	3	12,5%
R2	Estudiantes que escribieron que el punto (-30, 0) indica que no se inscribiría nadie y que el punto (60, 0) significa que no hay mensualidad ni ingresos al gimnasio.	14	58,3%
R3	Estudiantes que no escribieron en forma clara y completa el significado de cada punto de corte o no respondieron la pregunta.	7	29,2%

De acuerdo con la *Tabla 47*, el 12,5% explicaron que el punto de corte (-30, 0) significaba que no habría ingresos si se aumenta mucho la mensualidad y el punto (60, 0) significa que tampoco habría ingresos porque de esta manera quedaría muy baja o gratis. El 58,3% de los estudiantes escribieron que el primer punto indicaba que no se inscribiría nadie y el segundo que no habría ingresos al gimnasio porque no habría mensualidad. Por último, el 29,2% no explicaron en forma clara el significado de los puntos indicados.

El siguiente estudiante explicó el significado de los puntos de corte de la curva con el eje x:



5a significa que no habrían ingresos ya que si se aumentaría nadie se inscribiría.
 b todos irían pero no habrían ingresos por que rebajaría toda la mensualidad.

Ilustración 39. S1T4P5aR1 y S1T4P5bR1

En relación con las respuestas sobre *S1T4P5*, es posible afirmar que más de la mitad de los estudiantes comprende el significado de los puntos de corte con el eje x y de esta manera hacen apreciaciones correctas sobre las condiciones propias de cada punto. Analizar

estos puntos es fundamental en el estudio de la función cuadrática en relación con situaciones en contextos específicos, además, da cuenta de una parte importante en el *Nivel General* de modelación al promover la apropiación de las propiedades de las parábolas y su significado en las situaciones estudiadas, además, constituye uno de los momentos de la relación de los cambios entre la cantidades vinculadas; por tanto, en esta pregunta se registraron otras acciones asociadas a AM1 y AM2 en N1 y N2 de razonamiento covariacional.

En la plenaria, respecto a los puntos de corte, para el primero $(-30, 0)$, una estudiante de respuesta *R1* contestó que “significa que no habría ingresos ya que aumentaría y nadie se inscribiría al gimnasio”. Para el segundo punto $(60, 0)$, luego de que el docente comentara algunos aspectos en relación al primer punto y el resultado si se aumentara el valor de la mensualidad 30 veces, los estudiantes no supieron dar una explicación clara sobre qué pasaba con las rebajas y el valor de la mensualidad.

Análisis de la primera situación

Como resultado de la implementación de la primera situación, respecto a la tarea 1, basándose en la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula* (Tabla 5), en la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* de modelación, se concluye que la tarea permitió a los estudiantes, mediante cuestiones, afirmaciones y cálculos planteados, un primer acercamiento a partir de aspectos propios de la situación como las cantidades presentes y las relaciones entre las cantidades y los conocimientos previos del estudiante, de tal forma que la mitad de los participantes de la actividad pudieron sacar conclusiones de forma acertada sobre características y condiciones que no eran explícitas en los primeros tratamientos en la tarea, descubrir regularidades y llevar a cabo los primeros esquemas o

modelos de la situación; la otra mitad experimentó problemas en el acercamiento a la situación, posiblemente por dificultades en la comprensión lectora o dudas en la comprensión de la forma de relaciones propias de las cantidades vinculadas.

Cumplir el alcance del *Nivel Situacional* en la tarea 1 es fundamental para luego hacer trabajos más complejos de las relaciones, modelación y trabajos con modelos, como parte de la relación de procesos de modelación y acciones de razonamiento covariacional planteados en esta investigación; sin embargo, aunque en la estructura de la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula* no se considera que para esta tarea haya un trabajo o manifestación del razonamiento covariacional de acuerdo con las características de las acciones y niveles de este. Si se analiza de manera más detallada la identificación y comprensión de las relaciones entre cantidades independientes y dependientes de la situación se puede considerar como una etapa previa y necesaria para un estudio razonable de la covariación.

Respecto a la tarea 2, se proponen las primeras cuestiones para movilizar acciones del razonamiento covariacional a través de las cuales los estudiantes pudieron avanzar en la comprensión de relaciones de dependencia presentes; así, aunque el porcentaje de estudiantes que no entendieron completamente las relaciones entre cantidades se mantuvo, se debe aclarar que las preguntas de la tarea indagaban sobre aspectos más profundos de los cambios de las cantidades a partir del registro tabular. En igual sentido, cabe destacar que, aunque en las AM1 se evidencia la coordinación por parte de los estudiantes de los cambios sobre la gráfica cartesiana de la situación, también es posible llevar a cabo una coordinación de los cambios de los valores de las cantidades en tablas, lo cual pudo registrarse en respuestas dadas a las cuestiones de la tarea. Al respecto, se considera que casi la mitad de los estudiantes desarrollaron AM1 a partir de un registro tabular, al

coordinar cambios entre las cantidades de la tabla inicial de la tarea, mientras que la otra mitad tuvo dificultades a ese respecto, e incluso en algunos casos se presentaron comportamientos *pseudo – analíticos* AM1, aspecto que se hace evidente en el desfase que hay entre el modo en que se manifiesta la apropiación en la coordinación de los cambios entre las cantidades, y los argumentos que dan cuenta de dicha apropiación, lo que puede ser explicado por el poco desarrollo de la comprensión de las regularidades implícitas y las relaciones propias de la situación trabajadas en la tarea 1.

Además de las acciones mentales evidenciadas en la tarea 2, respecto a los niveles de *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* y *Matematización Vertical – Nivel Referencial* de modelación se evidencia la forma como la mitad de estudiantes emplean distintos conocimientos previos informales para descubrir regularidades en la tabla, describir y representar mediante modelos algebraicos las regularidades básicas e incluso trabajar con estas primeras representaciones, como parte del proceso de modelación que cada vez presenta un mayor nivel de complejidad. La otra mitad, posiblemente por las dificultades con identificación de regularidades y añadiendo las dificultades de comprensión de variable que la notación algebraica exige, presentaron problemas para representar las regularidades mediante los modelos básicos que surgen de las preguntas propuestas y en varios casos trabajar con los mismos modelos – *modelos de*.

Respecto a la tarea 3, en la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* de modelación, los estudiantes emplearon distintos modelos gráficos y notacionales que se iban desarrollando en la progresión de las preguntas con niveles de mayor complejidad. Emplear *modelos de* la situación contextualizada es esencial en el proceso de modelación que se está desarrollando, ya que posibilita la identificación y el trabajo con las variables independiente y dependiente de las relaciones funcionales presentes, además, comprender

los distintos niveles de relaciones que se presentan en el modelo de la función correspondiente a los ingresos totales al gimnasio, algo en lo que la mayoría de los estudiantes fue mostrando mayor dificultad conforme avanzaban las preguntas de la tarea y la complejidad del modelo de la función de la situación. Solo una pequeña parte del grupo de estudiantes pudo llevar a cabo toda la tarea, lo que confirma las dificultades y vacíos conceptuales respecto a nociones aritméticas y algebraicas que tienen los estudiantes del grupo, necesarias para la comprensión, formulación y uso adecuado de modelos algebraicos.

En los niveles de razonamiento covariacional esperados en el desarrollo de las cuestiones de la tarea 3, las acciones mentales desarrolladas respondieron a AM1 principalmente, por la coordinación que se realizó de los cambios de las cantidades relacionadas sobre las que se iba indagando en el transcurso de la tarea, además, se destaca que estas acciones mentales se pudieron evidenciar en el estudio realizado sobre la tabla y en las justificaciones de la construcción de los modelos en cada pregunta, sin embargo, hubo muchos casos donde fueron manifiestos comportamientos *pseudo – analíticos* de AM1 al aparentemente manifestar apropiación en la coordinación de los cambios entre las cantidades, pero con dificultades para argumentar la misma; no se evidenció AM2 de manera clara en las respuestas suministradas por los estudiantes en esta tarea.

Respecto a la tarea 4, en lo que corresponde al razonamiento covariacional se observaron AM1 y AM2, *coordinación de los cambios de una variable con los cambios de otra y coordinación de la dirección del cambio*, por parte de más de la mitad de estudiantes, teniendo en cuenta que la mayoría de preguntas se centraban en el análisis de la gráfica cartesiana de la situación, al coordinar los cambios entre el número de rebajas y los ingresos totales de acuerdo con las condiciones de la situación para luego poder llevar a

cabo la coordinación de *cómo cambian* las cantidades entre si e identificar y describir los cambios de una variable con los cambios de otra, alcanzando un N2 de razonamiento covariacional, además, detallando en este proceso el significado de los puntos de corte de la curva con el plano cartesiano, el punto máximo de la curva y su significado en relación a la pregunta inicial de la situación y el comportamiento de los ingresos para determinados intervalos de la cantidad de rebajas en la gráfica. En conclusión, no se alcanzaron a desarrollar AM3 de acuerdo con la propuesta en la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula*.

Respecto a la *Matematización Vertical – Nivel general*, los estudiantes siguieron empleando modelos gráficos de la situación para determinar aspectos del razonamiento covariacional propios del *Nivel referencial*, pero sin avanzar notablemente en el nivel general de modelación, además, las cuestiones tratadas en esta tarea no estaban centradas en el proceso de modelación y posiblemente esta condición no permitió un avance en el proceso de modelación a partir de la tarea.

Las respuestas de los estudiantes a partir del desarrollo y trabajo de las tareas 1 a 4, correspondientes a la primera situación, posibilitaron el avance del proceso de modelación hasta la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* por parte de un grupo de los estudiantes que desarrollaron el proceso de modelación de acuerdo con las características descritas por Freudenthal, mientras que a más de la mitad se les dificultó este proceso conforme avanzaba el nivel de complejidad en cada tarea; de acuerdo con esto, se dio cumplimiento, por parte de un grupo de estudiantes, a los propósitos esperados para la misma situación en relación con la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula*, sin embargo, en términos generales no fue posible un avance hacia el *Nivel General* en el proceso de modelación.

Por otra parte, de acuerdo con la estructura de las tareas, se esperaba que el estudio de los ejercicios que hacen parte de la primera situación promovieran AM1, AM2 y AM3 de razonamiento covariacional, sin embargo, las evidencias encontradas en las respuestas dan buena cuenta de avances en AM1 y AM2 por parte de la mitad de estudiantes, mientras que, en varios casos, en el otro grupo de estudiantes se hicieron notorios comportamientos *pseudo – analíticos* de AM1 y AM2, lo que fue confirmado a partir de los argumentos dados.

La primera situación estaba planteada como aquella que permitiera hacer los primeros avances en el proceso de modelación de funciones cuadráticas en un contexto cotidiano, donde el estudio de los ingresos al gimnasio y las condiciones dadas fueran aspectos para realizar el análisis de la variación y covariación presentes mientras se desarrollaba el trabajo con los modelos propuestos, para llegar a la comprensión de aspectos y propiedades básicas de la función cuadrática. De acuerdo con esto, primeramente se concluye que se dio cumplimiento en buena parte a los propósitos esperados en relación con el planteamiento en la rejilla y que el trabajo de esta situación se constituye en trabajo clave para avanzar en estudios más avanzados de la covariación y poder comprender y apropiarse del concepto de función cuadrática a partir de las propiedades y características que lo componen y de las cuales se abordan en la segunda situación.

Como segunda conclusión se espera que hayan mayores dificultades en el estudio del razonamiento covariacional y el proceso de modelación, por parte de los estudiantes que en esta situación, ya que el contexto y las tareas trabajadas en la siguiente situación presentan un mayor nivel de complejidad.

3.3.2. Análisis de resultados de la situación 2

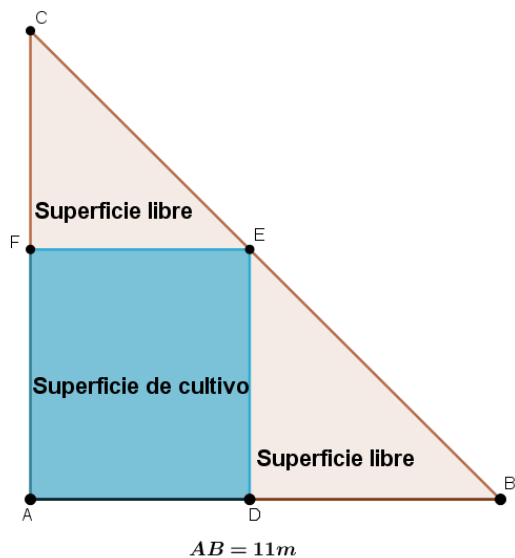
(S2) Situación 2: Analizando la covariación en la modelación de una situación en contexto geométrico

La mayor superficie rectangular posible

La profesora Lina, encargada del proyecto ambiental en la Institución Educativa Hormiguero, tiene a disposición un espacio (terreno) en una de las sedes para llevar a cabo un cultivo de legumbres. Por especificaciones de este, debe plantarse en una superficie de forma rectangular. El espacio disponible para cultivar tiene forma de triángulo isósceles con catetos que miden 11 m y está ubicado en una esquina de la sede. La profesora debe considerar todas las superficies rectangulares posibles que pueden organizarse en dicho espacio, dada la medida $\overline{AD}$, pero necesita identificar y preparar la mayor superficie para tener una mayor producción de legumbres.

Una representación de una superficie de cultivo posible se presenta en la *Gráfica 2*.

Gráfica 2. Representación de una superficie de cultivo.



De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál es la mayor superficie rectangular de cultivo que se puede obtener en el terreno disponible?

Ayudemos a la profesora a encontrar las superficies rectangulares posibles en dicha región triangular, a partir de las características de la situación.

(T1) Tarea 1: Explorando superficies rectangulares y analizando relaciones de dependencia (Geogebra).

Esta tarea fue realizada por 26 estudiantes de los 28 del grupo.

*A continuación, abre el archivo denominado **Tarea 1a** en el cual se presenta una ilustración de la situación. Elige y mueve con el cursor el punto D (representa los valores posibles para $\overline{AD}$) y contesta:*

(P1) Pregunta 1: Explica si el rectángulo que aparece es siempre el mismo.

Tabla 48

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 1 (S2T1P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que no siempre es el mismo rectángulo cuando se mueve. Algunos expresaron que va cambiando la forma y otros que van cambiando las medidas.	11	42,4%
R2	Estudiantes que escribieron que no siempre es el mismo rectángulo cuando se mueve. Sin embargo, su justificación refiere a que “van cambiando los puntos que tiene cada figura”, pero no se especificaron ni los puntos o la figura.	5	19,2%
R3	Estudiantes que escribieron que no siempre es el mismo rectángulo cuando se mueve, sin embargo, justificaron a partir de la figura en la fotocopia escribiendo “no porque en la hoja es cuadrado y ella necesita un rectángulo” o no justificaron.	9	34,6%
R3	Estudiantes que escribieron que siempre es el mismo rectángulo cuando se mueve, argumentando que “siempre es el mismo así se mueva las puntas solo cambiaban la superficie de cultivo”.	1	3,8%

En la *Tabla 48* se observa que el 96,2% de los estudiantes que resolvieron la tarea escribieron que el rectángulo que aparece no siempre es el mismo. En este porcentaje varían las argumentaciones en las diferencias encontradas en los rectángulos posibles. El 3,8% restante expresaron que es siempre el mismo rectángulo y que sólo cambiaba la superficie de cultivo.

De acuerdo con los tipos de respuesta para *S2T1P1*, con la posibilidad de la aproximación interactiva que permitió movimientos del punto D en la gráfica de Geogebra y las múltiples ubicaciones de algunos puntos, se puede asegurar que la mayoría de estudiantes identificaron y refirieron distintos rectángulos considerando aspectos como sus dimensiones, formas y tamaños; esta acción es fundamental para la identificación de la dependencia entre cantidades como el ancho del rectángulo y su área, como parte de la modelación en los *Niveles situacional y Referencial*, además, representó para lo estudiante una nueva manera de experimentar la noción de covariación, posibilitando el estudio de las áreas, los cambios posibles en estas y un inicio para determinar el área máxima.

Al momento de realizarse la plenaria, un estudiante de respuesta *R1* explica que al realizarse el movimiento del punto D en la gráfica de Geogebra la forma del rectángulo cambiaba, que disminuía o aumentaba. Respecto a esta respuesta, algunos compañeros complementaron que cambiaba la superficie de cultivo.

(P2) Pregunta 2: De acuerdo con la gráfica:

(P2a) Pregunta 2a: Escribe las cantidades que intervienen en la situación.

Tabla 49

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 2a (S2T1P2a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron AB , AD y AF dando algunos valores particulares para cada una.	8	30,8%
R2	Estudiantes que escribieron superficie libre, superficie cultivable, ancho y largo.	3	11,5%
R3	Estudiantes que escribieron superficie libre y superficie de cultivo. En algunos casos se dieron valores específicos de estas cantidades.	13	50%

R4	Estudiantes que cantidades como metros, lados ángulos, superficies.	2	7,7%
----	---	---	------

(P2b) Pregunta 2b: Explica de qué depende la variación de la medida del área rectangular.

Tabla 50

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 2b (S2T1P2b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que depende de mover el punto D que pertenece al lado AD .	3	11,5%
R2	Estudiantes que escribieron que depende de la superficie de cultivo o de cómo se mueva la superficie de cultivo.	14	53,9%
R3	Estudiantes que escribieron cantidades que no correspondían a valores relacionados con la pregunta o que expresaron una respuesta que no era clara y presentaba inconsistencias.	9	34,6%

En la *Tabla 49* se observa que el 42,3% de los estudiantes que resolvieron la pregunta escribieron la mayoría de cantidades que estaban relacionadas en la misma. De manera muy general, el 50% hicieron mención a la superficie libre y superficie de cultivo, pero no especificaron más cantidades y el 7,7% indicaron metros, lados ángulos, superficies, pero no hicieron especificaciones.

De acuerdo con la *Tabla 50*, el 11, 5% de los estudiantes escribieron que la variación dependía del movimiento del punto D en la gráfica de Geogebra. El 53,9% escribieron que depende de la superficie de cultivo o de cómo se mueva la superficie de cultivo, mientras que el 34,6% restante escribieron cantidades o expresiones con inconsistencias y que no daban cuenta de qué dependía la variación de la medida del área rectangular.

En relación con los tipos de respuesta para *S2T1P2a* y *S2T1P2b*, en los primeros acercamientos al reconocimiento de las cantidades y relaciones funcionales como parte del *Nivel Situacional* de modelación se puede inferir que la mayoría de estudiantes presentaron dificultades para identificar todas las cantidades: como se observa en la *Tabla 49*, la mayoría de los estudiantes daban cuenta de algunas y no precisamente las más relevantes para el estudio de la función cuadrática, lo cual también se vio reflejado como dificultad en las respuestas acerca de *S2T1P2b*, en la cual se preguntaba acerca de la relación de dependencia entre cantidades relevantes en la situación a partir de los cambios en el ancho y la variación de la medida del área rectangular en la gráfica Geogebra, esto en relación con AM1 de razonamiento covariacional. El siguiente estudiante expresa en su respuesta la dependencia entre el movimiento del punto D y la variación de la medida del área:

26. depende de mover el punto D que pertenece al lado AB

Ilustración 40. S2T1P2bR1

Esta descripción es fundamental en el análisis de las relaciones de dependencia y la posibilidad del estudio de la covariación de las cantidades vinculadas, como evidencia de AM1.

Al momento de realizarse la plenaria, el mismo estudiante ratificó su respuesta dada para *S2T1P2a*, al igual que otra compañera participante, los cuales escribieron los tipos de cantidad que se trataban en la gráfica. Respecto a *S2T1P2b*, una estudiante de respuesta *R1* expresó que “depende del movimiento del punto D, que al moverlo el ancho afecta al rectángulo, pues a veces aumenta y otras disminuye”. Ante algunas dudas, con todos se

hizo la aclaración acerca de la importancia del movimiento del punto D y la forma como este afectaba las otras cantidades.

(P3) Pregunta 3: Completa la *Tabla 3* donde se relacionan algunas medidas del ancho ($\overline{AD}$), el largo ($\overline{AF}$) y el área del rectángulo, según la situación.

Tabla 3. Tabla de medidas de la superficie rectangular.

Ancho ($\overline{AD}$) (m)	Largo ($\overline{AF}$) (m)	Área (m ²)
1	10	10
2	9	18
3		24
	7	28
5	6	
6		
7		28
8	3	
	2	18
10	1	
11		

Tabla 51

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 3 (S2T1P3)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron y completaron en forma acertada todos los valores faltantes en la tabla.	20	77%
R2	Estudiantes que escribieron y completaron en forma acertada la mayoría de valores faltantes en la tabla.	6	23%

De acuerdo con la *Tabla 51*, el 77% de los estudiantes completaron en forma acertada la totalidad de los valores faltantes en la tabla. El 23% restante completaron la mayoría de los valores faltantes.

En relación con las respuestas para *S2T1P3*, a partir del *Nivel Referencial* de modelación en el cual se completó un registro tabular de la situación, se puede observar que los estudiantes consideraron las cantidades registradas, los distintos valores presentes y los cambios anotados; por tanto, es posible aseverar que la mayoría de estudiantes tuvo un avance en la comprensión de las relaciones de dependencia entre el largo, el ancho y el área en la situación como parte de otra forma de aproximarse a la covariación entre las cantidades indicadas, dando cuenta de AM1 de razonamiento covariacional.

En la plenaria, una estudiante de respuesta *R1* expresó las medidas con las cuales había completado los valores faltantes en la tabla y otros estudiantes comentaron que la habían completado de la misma manera.

(P4) Pregunta 4: A partir de la información en la tabla:
(P4a) Pregunta 4a: Describe cómo cambia la medida del ancho $\overline{AD}$

Tabla 52
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 4a (S2T1P4a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que describieron que la medida del ancho $\overline{AD}$ que va aumentando “un centímetro”, “sumando de uno en uno” o “cada vez una más”.	12	46,1%
R2	Estudiantes que describieron que la medida del ancho “ $\overline{AD}$ se puede hacer más grande” o “va aumentando cada vez más”.	6	23,1%
R3	Estudiantes que describieron que “cada vez que se mueve el punto D ”.	2	7,7%

R4	Estudiantes que en su descripción no expresaron con claridad y coherencia el cambio de $\overline{AD}$.	6	23,1%
----	--	---	-------

(P4b) Pregunta 4b: Describe la forma como cambia el área.

Tabla 53

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 4b (S2T1P4b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que describieron que el área primero aumenta y luego disminuye, especificando que los aumentos se van reduciendo de a $2m^2$ hasta llegar a $30m^2$ y en las reducciones se hacen cada vez mayores en la misma medida.	2	7,7%
R2	Estudiantes que describieron que el área aumenta, debido al ancho, hasta cierto punto, pero después empieza a mermar o disminuir.	6	23%
R3	Estudiantes que describieron que “cada vez que se aumenta se restan 2”.	2	7,7%
R4	Estudiantes que describieron que parte de los cambios del área es que aumenta y disminuye. Algunos acuden a expresiones en relación a la gráfica de geogebra, como “cada vez que se va anchando forma un cuadrado”, “el área cambia de largo y de ancho cuando el ángulo $\overline{AD}$ se mueve”.	16	61,6%

De acuerdo con la *Tabla 52*, se puede observar que el 69,2% identificaron y expresaron el aumento del ancho $\overline{AD}$. El 7,7% tuvieron en cuenta los movimientos del punto D en Geogebra para encontrar una relación con los cambios del ancho en la tabla y el 23,1% presentaron inconsistencias en la explicación de los cambios de la cantidad en cuestión.

En la *Tabla 53*, el 30,7% de los estudiantes realizaron una descripción apropiada de los cambios de la medida del área. Un 7,7% solo hizo referencia a los aumentos del área y la forma como el cambio de su medida se reduce en dos, mientras que el restante 61,6%

acudió a describir cambios de aumento y reducción del área, pero sin especificar orden alguno, el momento en que se presenta el cambio o empleando algunas expresiones que no son claras.

Una de las respuestas de tipo *R1* para *S2T1P4a*, da cuenta del sentido y la cantidad del cambio del ancho:

④ La medida del ancho $\overline{AD}$ va aumentando en 1 en 1

Ilustración 41. S2T1P4aR1

A partir de esta respuesta se evidenció la continuidad del trabajo por parte de algunos estudiantes, el análisis del cambio llevado a cabo en la situación 1 –y que en esta situación se refleja en los primeros análisis de distintos registros en forma simultánea (tabular y gráfico)–, la identificación de la cantidad dependiente e independiente, las regularidades y la variación, todo esto como parte del *Nivel Referencial* de modelación. De acuerdo con los resultados de las respuestas para *S2T1P4a* y *S2T1P4b* es posible afirmar que más de la mitad de los estudiantes describió con facilidad los cambios –aumentos– que se iban presentando en el ancho $\overline{AD}$ pero no sucedió lo mismo en la descripción del cambio de la medida del área donde menos de la mitad de los estudiantes tuvo una mejor comprensión del cambio presente al describir el aumento y disminución del área en relación con el cambio del ancho; estas acciones son indispensables y permiten registrar algunos casos de AM1 al desarrollar la pregunta.

En la plenaria, en relación con *S2T1P4a*, una estudiante de respuesta *R1* expresó que la medida iba de “1 en 1” y otro estudiante de respuesta *R2* le complementa diciendo que “iba aumentando”. En relación con esto el docente les preguntó que si en la gráfica se podía hacer disminuir la medida y ellos respondieron en forma afirmativa. Respecto a

S2T1P4b, un estudiante de respuesta R4 expresó que “cambia con respecto a cómo se mueve el AD , midiendo bien se puede sacar un buen espacio o al contrario hacer el área más pequeña”. El docente interviene preguntando si “el área siempre iba aumentando o de lo contrario iba disminuyendo”, ante lo que varios estudiantes contestan que las dos cosas y un estudiante de respuesta R2 explicó que “el área va aumentando hasta cierto punto y de ahí ya va disminuyendo”.

(P5) Pregunta 5: De acuerdo con los datos en la tabla:
(P5a) Pregunta 5a: Representa en un plano cartesiano la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie.

Tabla 54

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5a (S2T1P5a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que representaron los puntos de acuerdo con las coordenadas a partir de la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie en el plano cartesiano y trazaron una curva suave que pasa por los puntos. Esta representación fue aceptable respecto a las escalas en el plano cartesiano.	2	7,7%
R2	Estudiantes que representaron los puntos de acuerdo con las coordenadas de la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie en el plano cartesiano y trazaron una curva suave que pasa por los puntos. Esta representación presentó algunas dificultades relacionadas con las escalas en el plano.	1	3,8%
R3	Estudiantes que representaron los puntos en el plano cartesiano de acuerdo con las coordenadas de la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie. Esta representación conservó aspectos aceptables relacionados con las escalas en el plano.	4	15,4%
R4	Estudiantes que representaron los puntos en el plano cartesiano de acuerdo con las coordenadas de la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie. Esta representación presentó varias dificultades relacionadas con las escalas	19	73,1%

en el plano y que afectaban notablemente la forma y percepción de la gráfica.

(P5b) Pregunta 5b: Explica la forma de la gráfica que dibujaste.

Tabla 55

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5a (S2T1P5b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que la forma es como una curva.	4	15,4%
R2	Estudiantes que explicaron que la forma “es un triángulo”, “una montaña” o “una pirámide”.	14	53,8%
R3	Estudiantes que escribieron que la forma de la gráfica era “como una escalera”.	6	23,1%
R4	Estudiantes que no especificaron la forma de la gráfica de manera clara y coherente.	2	7,7%

(P5c) Pregunta 5c: Escribe las medidas del ancho $\overline{AD}$ o dominio, con las que sean posibles superficies rectangulares.

Tabla 56

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 5c (S2T1P5c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que las medidas del ancho para que se den superficies son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.	24	92, 3%
R2	Estudiantes que escribieron que las medidas del ancho para que se den superficies son algunos como lo valores pares o “del 1 al 5 y del 7 al 10”.	2	7,7%

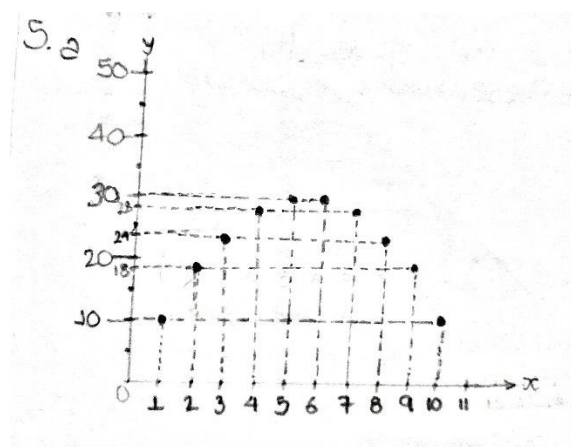
De acuerdo con la *Tabla 54* el 11,5% de los estudiantes realizaron una representación de los puntos en el plano, de acuerdo con la información en la tabla, y trazaron una curva suave que pasaba por los puntos. El 88,5% hicieron una representación únicamente de los puntos, sin efectuar el trazo suave de la curva; de estos el 15,4% graficó

de manera aceptable las escalas en el plano y el otro 73,1% presentó dificultades en este aspecto.

En la *Tabla 55*, el 15,4% manifestaron que la gráfica obtenida a partir de los puntos representados en el plano cartesiano era como una curva, el 53,8% expresaron que tenía forma de pirámide, triángulo o montaña. El resto de estudiantes expresaron formas que distaban de la gráfica correspondiente.

De acuerdo con la *Tabla 56*, el 92,3% de los estudiantes indicaron valores enteros del dominio como 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 1°, y que es posible obtener una superficie de cultivo mientras que el 7,7% indicaron algunos intervalos o casos particulares de la medida del ancho.

Respecto a la graficación y las descripciones, una estudiante con respuesta *R1* para *S2T1P5b*, a pesar de no haber dibujado una línea curva suave, obteniendo una respuesta *R3* para *S2T1P5a*, realiza una descripción que asemeja esta forma de acuerdo con la ubicación de los puntos, como se observa en la gráfica dibujada:



B. La forma de la grafica que Dibuje Fue una curva que va de un extremo al otro.

Ilustración 42. S2T1P5aR3 y S2T1P5bR1

De otro lado, un estudiante que dio respuestas de tipo *R1* para *S2T1P5a*, *S2T1P5b* y *S2T1P5c*, da cuenta de avances importantes en la graficación covariacional, considerando las cantidades relacionadas:

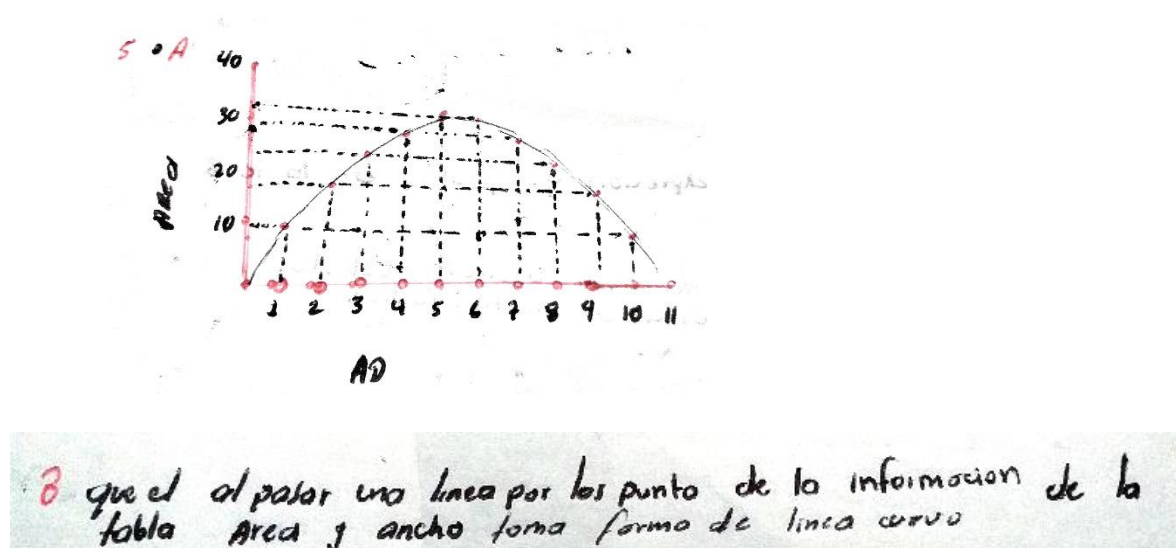


Ilustración 43. *S2T1P5aR1* y *S2T1P5bR1*

En el *Nivel Referencial* del proceso de modelación, de acuerdo con las respuestas para *S2T1P5a*, en las primeras aproximaciones a la representación gráfica de la relación entre el ancho y el área de la superficie de cultivo, se evidencia que los estudiantes se encontraron con dificultades para realizar una representación en el plano de la relación, para ubicar puntos a partir de sus coordenadas y, en un orden mayor, la posibilidad de llegar a trazar una curva suave que pasara por los puntos, como parte de AM1 de razonamiento covariacional en el nivel N1. En las respuestas para *S2T1P5b* se mantuvo la dificultad para identificar la forma curva que podía trazar a partir del orden de los puntos y por eso se presentó tanta diversidad de apreciaciones y respuestas, registrándose solo algunas en relación con AM1 y alejándose en la mayoría de ellas de la forma “curva” de la parábola en cuestión, como parte fundamental del reconocimiento de las propiedades de la función cuadrática presente. Por último, a partir de las respuestas para *S2T1P5c* es también

posible aseverar que, aunque hubo dificultades para precisar la curva, la mayoría de estudiantes identificaron suficientes valores del dominio que daban la posibilidad de una superficie de cultivo y, en relación con esto, identificar cuales no permitían una superficie de cultivo, como parte del reconocimiento de las propiedades de la función en cuestión y la justificación de algunos comportamientos asociados a AM1 y AM2 de razonamiento covariacional.

En la plenaria, en relación con *S2T1P5a*, el docente hizo énfasis en dialogar y preguntar a los estudiantes acerca de cómo eran los cambios que se iban presentando en la gráfica cartesiana, a lo que respondieron algunos estudiantes que en el gráfico el ancho iba aumentando y que el área aumentaba hasta cierto punto y posteriormente disminuía. Respecto a *S2T1P5b*, un estudiante con respuesta *R2* ratificó que la forma que le dio era un triángulo, mientras que una estudiante con respuesta *R3* expresó que se le formó una escalera y con un gesto de las manos explicó que iba como una escala; otra compañera expresó que también obtuvo como una escalera, mientras que un estudiante con respuesta *R4* explicó que le dio como una curva, haciendo un gesto de curva sobre la copia donde estaba la gráfica, distando del tipo de respuesta que había registrado en forma escrita.

*Ahora abre el archivo denominado **Tarea 1b** en el cual se presenta y se relacionan una gráfica cartesiana y una ilustración de la situación. Ten en cuenta la información para desarrollar los siguientes puntos.*

(P6) Pregunta 6: Elige y mueve con el cursor el punto D_2 (representa los valores posibles para $\overline{AD}$) de tal manera que se generen distintas medidas. Atendiendo la gráfica responde:

(P6a) Pregunta 6a: Indica cómo varía $\overline{AF}$ cuando $\overline{AD}$ aumenta o disminuye su valor

Tabla 57

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 6a (S2T1P6a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que cuando $\overline{AD}$ aumenta $\overline{AF}$ disminuye y si $\overline{AD}$ disminuye, entonces $\overline{AF}$ aumenta.	7	26,9%
R2	Estudiantes que escribieron que “cuando el ancho de la figura aumenta el largo disminuye cada vez que se mueve el ancho”.	1	3,8%
R3	Estudiantes que escribieron que “cambia de área cada vez cuando $\overline{AF}$ disminuye si el ancho $\overline{AD}$ aumenta en el área pero $\overline{AF}$ va disminuyendo de 1 en 1”.	3	11,5%
R4	Estudiantes que escribieron que cuando $\overline{AD}$ aumenta $\overline{AF}$ disminuye y si $\overline{AF}$ aumenta, entonces $\overline{AD}$ disminuye.	15	57,8%

(P6b) Pregunta 6b: Explica por qué a rectángulos con dimensiones distintas (largo y ancho) corresponden áreas iguales.

Tabla 58

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 6b (S2T1P6b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron “porque a la medida que el ancho o largo disminuye el contrario aumenta lo que se disminuyó en la otra medida por eso da la misma área”.	1	3,8%
R2	Estudiantes que escribieron que se multiplica el largo por el ancho, pero siempre da el mismo resultado.	10	38,5%
R3	Estudiantes que escribieron un caso específico, por ejemplo que cuando $\overline{AF}$ está en 7 y $\overline{AD}$ está en 4 y lo mismo sería si $\overline{AD}$ está en 7 y $\overline{AF}$ está en 4. No se especifica más en la argumentación.	6	23,1%
R4	Estudiantes que escribieron respuestas incompletas, que no responden el asunto de áreas iguales o que presentan inconsistencias.	9	34,6%

(P7) Pregunta 7: Explica cómo se relacionan las medidas de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ y el área de la superficie rectangular.

Tabla 59
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P7)

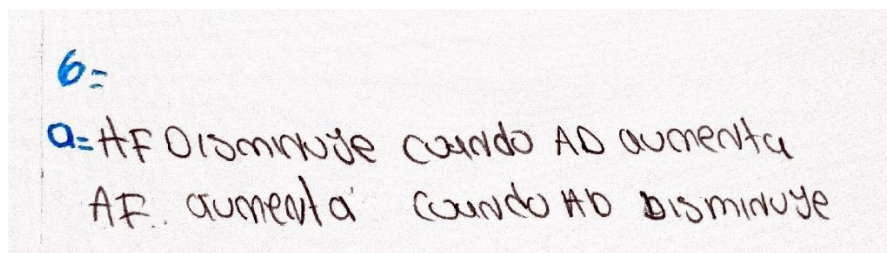
Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la medida de $\overline{AF}$ disminuye cuando $\overline{AD}$ aumenta y el área aumenta.	1	3,8%
R2	Estudiantes que escribieron que $\overline{AF}$ disminuye cuando $\overline{AD}$ aumenta o si $\overline{AD}$ disminuía entonces $\overline{AF}$ aumentaba y en relación a esto el área unas veces aumentaba y otras disminuía o que el área unas veces se volvía pequeña y otras veces grande.	5	19,2%
R3	Estudiantes que escribieron que cuando se multiplican el ancho y el largo se puede obtener la medida del área.	5	19,2%
R4	Estudiantes que escribieron que cuando $\overline{AF}$ disminuye entonces $\overline{AD}$ aumenta o $\overline{AD}$ disminuye cuando $\overline{AF}$ aumenta. No se especifica la relación con el área de la superficie de cultivo.	7	26,9%
R5	Estudiantes que escribieron formas de relacionarse que no eran claras o coherentes con la pregunta.	8	30,9%

De acuerdo con la *Tabla 57* el 42,2% identificaron una relación de dependencia entre $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$. El 57,8% restante al principio parecía que comprendían la dependencia pero en el complemento de su respuesta no se evidenció tal cosa, expresando que cuando $\overline{AD}$ aumenta $\overline{AF}$ disminuye y si $\overline{AF}$ aumenta, entonces $\overline{AD}$ disminuye.

En la *Tabla 58* el 65,4% de los estudiantes respuestas aceptables para *S2T1P6b*. De estos, el 3,8% expresaron que a la medida que el ancho o largo disminuye el contrario aumenta lo que se disminuyó en la otra medida, el 38,5% enunciaron que se multiplica el largo por el ancho, pero siempre da el mismo resultado y el 23,1% acudiendo a un caso particular: Cuando $\overline{AF}$ está en 7 y $\overline{AD}$ está en 4 y lo mismo sería si $\overline{AD}$ está en 7 y $\overline{AF}$ está en 4. El 34,6% restante no explicaron de manera clara la relación entre las dos cantidades o presentaron inconsistencias en sus respuestas.

De acuerdo con la *Tabla 59*, el 42,2% de los estudiantes relacionaron las tres cantidades en cuestión. De estos, el 3,8% expresó que $\overline{AF}$ disminuye cuando $\overline{AD}$ aumenta y el área aumenta, mientras que el 19,2% manifestó que $\overline{AF}$ disminuye cuando $\overline{AD}$ aumenta o si $\overline{AD}$ disminuía entonces $\overline{AF}$ aumentaba y en relación a esto el área unas veces aumentaba y otras disminuía; el 19,2% restante hizo énfasis en el procedimiento para realizar el cálculo, expresando que cuando se multiplican el ancho y el largo se puede obtener la medida del área. El 26,9% consideró solo la medida del ancho para la comparación y el 30,9% expresó respuestas que presentaban inconsistencias o no eran claras.

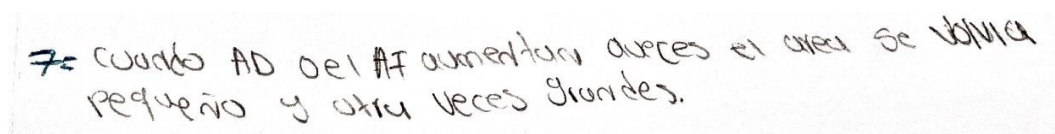
Respecto a *S2T1P6a*, una estudiante expresó de manera apropiada la relación de dependencia entre $\overline{AF}$ y $\overline{AD}$:



6=
 AF disminuye cuando AD aumenta
 AF aumenta cuando AD disminuye

Ilustración 44. S2T1P6aR1

Posteriormente, la respuesta para *S2T1P7* de la misma estudiante, fue la siguiente:



7= cuando AD o el AF aumentan a veces el area se vuelve pequeño y otras veces grandes.

Ilustración 45. S2T1P7R2

De esta respuesta se puede inferir la comprensión de la relación de dependencia entre $\overline{AF}$ y $\overline{AD}$ y el área, pero falta especificar aspectos relacionados con las partes del dominio en donde el área se “volvía pequeña” o “grande”. En relación con las respuestas sobre *S2T1P6a*, *S2T1P6b* y *S2T1P7*, se puede inferir que más de la mitad de los estudiantes

exhibe dificultades considerables para establecer con claridad la relación entre el ancho $\overline{AD}$, el largo $\overline{AF}$ y el área de la superficie rectangular (superficie de cultivo), como parte de la evidencia de AM1 y AM2 de razonamiento covariacional, en el *Nivel Referencial* de modelación. En las respuestas sobre *S2T1P6a* menos de la mitad de estudiantes dieron cuenta de manera aceptable de la relación entre $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$, pero cuando en *S2T1P6b* se preguntó sobre la situación específica de áreas de igual medida con medidas diferentes de sus lados, dieron buena cuenta cuando la mayoría respondió de manera válida el porqué de la situación; sin embargo, en las respuestas para *S2T1P7*, donde se solicita analizar las relaciones de las medidas entre las tres cantidades, la mayoría de estudiantes muestra no comprender la relación de manera clara, lo cual registra la ausencia de claridad en AM2.

En la plenaria, en relación con *S2T1P6a*, una estudiante de respuesta *R1* expresó que “ $\overline{AF}$ disminuye cuando $\overline{AD}$ aumenta y $\overline{AF}$ aumenta cuando $\overline{AD}$ disminuye”, mientras que otra estudiante de respuesta *R4* expresó que “varía cuando $\overline{AD}$ disminuye y $\overline{AF}$ aumenta y cuando $\overline{AF}$ disminuye el $\overline{AD}$ aumenta”. Ante estas respuestas se aclaró que quien cambiaba de primero era la medida de $\overline{AD}$ y no como mencionaban algunos que era $\overline{AF}$, con el propósito de ir identificando la variable independiente y las dependientes. Respecto a *S2T1P6b*, un estudiante de respuesta *R2* expresó que “se multiplica el ancho por el largo, pero da el mismo resultado”, mientras que otra de respuesta *R3* respondió con un caso particular, en el cual se mostraba que cambiaba las medidas del ancho y largo y daba la misma medida del área. Para *S2T1P7*, una estudiante de respuesta *R3* expresó que “multiplicando el $\overline{AD}$ y el $\overline{AF}$ se sacan las medidas del área”, posteriormente el docente hace énfasis en preguntar cómo son los cambios en las tres cantidades, a lo cual un estudiante de respuesta *R2* respondió que “cuando la medida de $\overline{AF}$ disminuye, la medida

de $\overline{AD}$ aumenta. Ningún otro estudiante expresó el cambio relacionado de las tres cantidades.

(P8) Pregunta 8: Con la ayuda de las gráficas de Geogebra, Ana y su compañera Karen, estudiantes de un grado superior, discuten acerca del área máxima posible. Ana plantea que esta se obtiene cuando $\overline{AD} = 6m$, mientras que Karen asegura que es cuando $\overline{AF} = 6m$. Indica un proceso mediante cual podrías demostrar quién tiene la razón.

Tabla 60

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P8)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron ninguna tiene la razón porque el área máxima – punto máximo del área o área mayor se obtiene cuando $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$ son iguales, cuando miden 5,5 m cada uno. Algunos expresaron que se obtiene el “área total”.	11	42,3%
R2	Estudiantes que escribieron el área máxima se obtiene cuando $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$ tienen las mismas medidas, cuando miden 5,5 m cada uno.	4	15,4%
R3	Estudiantes que escribieron que ninguna de las dos tiene la razón, pero su argumentación no es clara y presenta inconsistencias.	8	30,8%
R4	Estudiantes que escribieron que Ana tiene la razón, pero su argumentación no es clara y coherente.	3	11,5%

De acuerdo con la *Tabla 60*, el 57,7% de los estudiantes identificaron y escribieron la medida exacta de $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$ para obtener el área máxima. El 30,8% manifestó que ninguna de las dos tiene la razón, pero su argumentación presenta inconsistencias y no es clara y el restante 11,5% expresó que Ana tiene la razón.

Al respecto, una estudiante expresó que solo se obtenía el área máxima o “grado mayor” cuando se presentan las condiciones:

*R0 = Ni Ana ni Karen tienen la razón porque cuando $\overline{AF}$ está en 6m no tiene un grado superior y cuando $\overline{AD}$ está en 6m no tiene un grado superior. Se obtiene un grado mayor cuando $\overline{AF}$ y $\overline{AD}$ están iguales. Por ejemplo:
 $\overline{AF}$ 5.5
 $\overline{AD}$ 5.5 Su Área es 30.35*

Ilustración 46. S2T1P8R1

De acuerdo con estos tipos de respuesta para S2T1P8, más de la mitad de los estudiantes respondieron que ninguna tenía razón, además, indicaron las medidas exactas de $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$ para obtener el área máxima (vértice), por tanto, se puede afirmar que la mayoría identificaron y registraron las medidas de $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$, requisito para alcanzar el área máxima, y aspecto clave en esta situación problema de optimización cuya pregunta central plantea este interrogante como propósito de estudio y en el reconocimiento de las propiedades de la parábola en relación con la situación estudiada, como parte del *Nivel Referencial* de modelación.

En la plenaria, una estudiante de respuesta R1 expresó que ninguna tiene la razón, porque cuando ubicaron en la gráfica $\overline{AF} = 6$ no obtuvieron un “grado superior”, tampoco cuando ubicaron $\overline{AD} = 6$ obtuvieron un grado superior. Al indagársele a si se refería con “grado superior” al área máxima, ella respondió afirmativamente; expresó que el área máxima solo se obtenía cuando $\overline{AF} = 5,5$ ya que se obtenía un área de $30,25 \text{ m}^2$.

(P9) Pregunta 9: Atendiendo la gráfica cartesiana,

(P9a) Pregunta 9a: Escribe cómo cambian los valores en el eje y cuando cambian los valores en el eje x antes del punto máximo de la curva.

Tabla 61
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 9a (S2T1P9a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que los valores en el eje y van aumentando y en el eje x también hasta llegar al punto máximo, luego los valores en el eje y empiezan a disminuir y en el eje x siguen aumentando.	9	34,6%
R2	Estudiantes que escribieron que los valores en el eje y van aumentando y en el eje x también hasta llegar al punto máximo, luego los valores en el eje x van disminuyendo.	1	3,8%
R3	Estudiantes que escribieron que los valores en el eje y van aumentando cuando en el eje x van disminuyendo.	9	34,6%
R4	Estudiantes que escribieron que cuando el eje x aumenta el eje y va mermando.	7	27%

(P9b) Pregunta 9b: Escribe cómo cambian los valores en el eje y cuando cambian los valores en el eje x después del punto máximo de la curva.

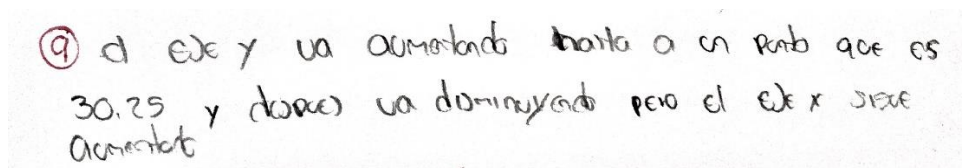
Tabla 62
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 9b (S2T1P9b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que los valores del eje y van disminuyendo cuando los valores del eje x van aumentando.	11	42,3%
R2	Estudiantes que escribieron que los valores del eje y van disminuyendo, pero el complemento de su respuesta presentaba inconsistencias.	1	3,8%
R3	Estudiantes que escribieron que los valores cambian, pero la argumentación sobre los cambios presenta inconsistencias o no es clara, o no respondieron la pregunta.	14	53,9%

De acuerdo con la *Tabla 61*, el 73% describieron de manera acertada el aumento de los valores en el eje y cuando cambian los valores en el eje x antes del punto máximo. El 34,6% manifestó que los valores en el eje y van aumentando cuando en el eje x van disminuyendo. El 27% expresaron que cuando el eje x aumenta el eje y va mermando.

De acuerdo con la *Tabla 62*, el 46,1% describieron la disminución de los valores en el eje y y cuando cambian los valores en el eje x después del punto máximo. El 53,9% escribieron que había un cambio en los valores en el eje y pero su argumentación presentaba inconsistencias.

El estudiante realizó una descripción general del comportamiento de las cantidades, como se observa a continuación:



a) el eje y va aumentando hasta a un punto que es 30.25 y después va disminuyendo pero el eje x sigue aumentando

Ilustración 47. S2T1P9aR1

En la respuesta para *S2T1P9a* se observa que el estudiante expresa el sentido de los cambios e incluso identifica el punto máximo, pero al parecer no refleja apropiadamente en su respuesta la dependencia entre las cantidades.

En el *Nivel Referencial* del proceso de modelación desarrollado hasta el momento y de acuerdo con estos tipos de respuesta para *S2T1P9a*, se puede inferir que más de la mitad de los estudiantes describieron de manera acertada el comportamiento del cambio de los valores en el eje y antes del punto máximo, sin embargo, en cuanto a la coordinación simultánea de los cambios de los valores en el eje y y en el eje x se observan imprecisiones y menos de la mitad de los estudiantes describen de manera congruente la covariación de las cantidades analizadas en la pregunta, como parte de AM1 y AM2 de razonamiento covariacional. Para el caso de *S2T1P9b*, el porcentaje de la comprensión del cambio de los valores en el eje y después del punto máximo es menor que en *S2T1P9a* y hay mayor dificultad para precisar en la descripción correcta de la covariación señalada en la pregunta;

lo anterior da cuenta de solo algunos registros de AM1 y AM2 en el análisis de la covariación presente en gráficas de la situación.

En la plenaria, respecto a *S2T1P9a*, una estudiante de respuesta R3 expresó que “los valores del eje y van aumentando cuando el eje x va disminuyendo”. Ante la anterior afirmación se les preguntó a todos cómo era el movimiento, a lo que algunos estudiantes respondieron con incertidumbre respecto al cambio de x , pues expresaban que los valores iban disminuyendo. Al preguntárseles si “aumentaban los dos”, varios estudiantes respondieron que no. En relación con *S2T1P9b*, una estudiante de respuesta R3 manifestó “que cuando y aumentaba hasta el punto máximo que era 30, después comenzaba a disminuir, mientras que x seguía aumentando”.

(P10) Pregunta 10: Si x representa cualquier valor que puede tomar $\overline{AD}$,

(P10a) Pregunta 10a: Escribe una expresión que permita calcular la medida de $\overline{AF}$ en relación con $\overline{AD}$ (x).

Tabla 63

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10a (S2T1P10a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron la expresión $11 - x$	25	96,2%
R2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	1	3,8%

(P10b) Pregunta 10b: Utiliza la expresión encontrada anteriormente para calcular el largo del rectángulo si $x = 2.5$.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que sustituyeron el valor de $x = 2,5$ en la expresión obtenida en la pregunta anterior, de la siguiente manera: $11 - 2,5 = 8,5$	24	92,3%

R2	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	2	7,7%
----	--	---	------

Tabla 64

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10b (S2T1P10b)

(P10c) Pregunta 10c: Escribe una expresión que permita calcular el área de cualquier superficie rectangular en la situación, en relación con $\overline{AD}$ (x).

Tabla 65

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 10c (S2T1P10c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $x \cdot 11 - x$	6	23,1%
R2	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $x \cdot 11$	5	19,2%
R3	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $11 - x$	10	38,5%
R4	Estudiantes que escribieron una expresión de la forma $11 \cdot x - x$ o no respondieron la pregunta.	5	19,2%

De acuerdo con la *Tabla 63*, el 96,2% de los estudiantes escribieron acertadamente la expresión algebraica $11 - x$ que permitía calcular la medida de $\overline{AF}$ en relación con $\overline{AD}$ (x). El 3,8% no respondió la pregunta.

En relación con la *Tabla 64*, el 92,3% emplearon correctamente la expresión $11 - x$ escrita en *S2T1P10a* para calcular el largo para el valor de x indicado en la pregunta. El 7,7% no respondió la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 65*, el 23,1% escribieron una expresión de la forma $x \cdot 11 - x$. El 57,7% escribieron una expresión relacionada con la forma correcta, pero estaba incompleta y el 19,2% registraron expresiones que no correspondían a lo solicitado, o no respondieron la pregunta.

La siguiente estudiante expresó respuestas *R1* – modelos y procedimientos para *S2T1P10a*, *S2T1P10b* y *S2T1P10c*, de la siguiente manera:

$$10 \checkmark R = (11 - x)$$

$$B \checkmark \text{ seria } (11 - 2,5) = 8,5 \text{ de largo}$$

$$C \checkmark x. 11 - x$$

Ilustración 48. *S2T1P10a*, *S2T1P10b* y *S2T1P10c*

De acuerdo con estos tipos de respuesta para *S2T1P10a* se puede constatar el proceso de modelación, en el *Nivel Referencial*, de una expresión útil para determinar el largo (y), dado el ancho (x), mostrando cierta comprensión de la variable independiente y de la dependiente, además, en *S2T1P10b* se trabaja con el modelo en un caso particular. Para el caso de las respuestas sobre *S2T1P10c* la situación es diferente ya que menos de la mitad de los estudiantes desarrolló el *modelo de la situación*, considerando la mayor complejidad que este tenía, proceso en el cual se registraron dificultades similares para obtener el modelo de la función cuadrática en la situación 1, que para este caso permite calcular la medida del área de cultivo dado un ancho para $0 < x < 11$.

En la plenaria, respecto a *S2T1P10a*, un estudiante de respuesta *R1* indicó que escribió la expresión $11 - x$, argumentando que 11 es la medida total del largo y x puede representar cualquier número para calcular. La mayoría de estudiantes levantó la mano cuando se les consultó si también habían escrito esta expresión. En relación con *S2T1P10b*, un estudiante de respuesta *R1* respondió que con el valor llevó a cabo una resta $11 - 2,5$, dando como resultado $8,5m$. Para las respuestas de *S2T1P10c*, una estudiante de respuesta *R2* manifestó que escribió la expresión $x. 11$, algunos compañeros expresaron que habían escrito lo mismo. Una estudiante de respuesta *R1* expresó que había escrito $x. 11 - x$, mientras que otra de respuesta *R3* expresó que había escrito $11 - x$. En esta respuesta se

observaron distintos tipos de respuesta y poca claridad respecto a la forma final de la expresión.

(P11) Pregunta 11: Camila y Pedro son estudiantes que participan en el proyecto. Camila afirma que el área de la superficie rectangular se puede calcular a partir de la expresión $x(11 - x)$, por su parte Pedro afirma que el cálculo de dicha área se puede calcular a partir de la expresión $11x - x^2$. Analiza la validez de estas afirmaciones para identificar quién tiene la razón y explica por qué.

Tabla 66

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 11 (S2T1P11)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que estaban de acuerdo con Camila, argumentando que esa expresión sirve para calcular una superficie rectangular y la x sería cualquier medida en los $11m$ de la figura.	18	69,2%
R2	Estudiantes que escribieron que Camila no tenía razón y emplean un caso particular se demostración “ $x(11 - x) = 4(11 - 4) = 40$ ”, pero que Pedro si la tiene “ $11x - x^2 = 11.5 - (5)^2 = 30$ ”	6	23,1%
R3	Estudiantes que no escribieron quien tenía la razón y estudiantes que no respondieron la pregunta.	2	7,7%

De acuerdo con la *Tabla 66*, al trabajar con el modelo de la situación expresado de dos maneras, el 69,2% de los estudiantes escribieron que la razón la tenía el modelo presentado por Camila “ $x(11 - x)$ ”. El 23,1% expresó, por lo contrario, que la razón la tenía Pedro “ $11x - x^2$ ”. El 7,7% no especificó quien tenía la razón o no respondieron.

En relación con los tipos de respuesta para *S2T1P11* se puede afirmar que el grupo de estudiantes mostró dificultades respecto a una parte importante del proceso de modelación en el *Nivel Referencial* en el trabajo con el *modelo de*, al no argumentar con claridad para indicar que los dos modelos presentados corresponden al mismo proceso en diferentes etapas, lo que es coherente con los resultados evidenciados en *S2T1P10c* en los

cuales hubo dificultades para desarrollar el modelo principal para calcular el área de la superficie rectangular.

En la plenaria, una estudiante de respuesta *R2* expresó que Pedro tenía la razón, argumentando que al hacer el resultado con Pedro si les dio un resultado correcto después de sustituir, mientras que con la expresión de Camila no obtuvieron el valor correcto después de sustituir. En su respuesta se observaron errores en el procedimiento. Por el contrario, una estudiante de respuesta *R1* manifestó que Camila tenía la razón, pero al preguntársele indicó que no llevó a cabo ningún cálculo para verificar. Otro estudiante manifestó que Pedro tenía la razón, pero tampoco llevó a cabo ningún procedimiento o cálculo. Al indagarse al grupo solo pocos estudiantes llevaron a cabo un cálculo y de acuerdo con esto el docente les indicó la necesidad de que en estos casos se cumpla con el procedimiento del cálculo.

(P12) Pregunta 12: Si el ancho de uno de los rectángulos es $x = 7$ y el de otro es $x = 4$,

(P12a) Pregunta 12a: Emplea las expresiones anteriores y calcula el largo para cada caso.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que si $x = 7$, entonces $y = 4$ y si $x = 4$, entonces $y = 7$. Para ello realizaron cálculos al respecto.	2	7,7%
R2	Estudiantes que escribieron que da la misma medida que $x = 7$ y $x = 4$ por $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$. No escribieron ningún cálculo al respecto.	15	57,7%
R3	Estudiantes que realizaron procedimientos que no desarrollaron apropiadamente o que no correspondían a la respuesta y estudiantes que no respondieron la pregunta.	9	34,6%

Tabla 67

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 12a (S2T1P12a)

(P12b) Pregunta 12b: Escribe una reflexión sobre las respuestas obtenidas.

Tabla 68

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 1 y pregunta 12b (S2T1P12b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la tabla de medidas ya trabajada ya había dado a conocer las medidas de la superficie rectangular que representaba x .	13	50%
R2	Estudiantes que escribieron que Pedro tenía la expresión correcta y Camila no.	1	3,8%
R3	Estudiantes que escribieron que se debía hacer una resta o multiplicación.	1	3,8%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	11	42,4%

De acuerdo con la *Tabla 67*, el 7,7 % de los estudiantes escribieron que si $x = 7$, entonces $y = 4$ y si $x = 4$, entonces $y = 7$, realizando cálculos al respecto. El 57,7% escribieron que da la misma medida que $x = 7$ y $x = 4$ por $\overline{AD}$ y $\overline{AF}$; el 34,6% restante llevaron a cabo procedimientos que no tenían relación con la respuesta o no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 68*, el 50% expresó que la tabla de medidas ya trabajada había dado a conocer las medidas del ancho, el largo y el área de las superficies rectangulares posibles relacionadas con x . El 3,8% manifestó que Pedro tenía la expresión correcta y Camila no, y otro 3,8% escribieron que se debía hacer una resta o multiplicación, pero no especificaron en qué parte se debía realizar. El restante 42,4% no respondió la pregunta.

En el *Nivel Referencial* de modelación y en relación con los tipos de respuesta para *S2T1P12a* y *S2T1P12b*, se puede afirmar que la mayoría de estudiantes mantiene la dificultad al trabajar con el modelo algebraico de la situación para valores específicos de la variable independiente; de igual modo se puede notar que el manejo del *modelo* de la función cuadrática asociado a la situación no cumple el propósito deseado para todos los estudiantes, por tanto, las conclusiones que se podían obtener respecto a la situación no eran precisas de acuerdo con las condiciones iniciales.

En la plenaria, respecto a *S2T1P12a*, solo algunos estudiantes levantaron la mano al indagárseles al respecto de si habían realizado cálculos. Un estudiante de respuesta *R2* no supo qué contestar cuando se le cuestionó acerca de la pregunta, una estudiante de respuesta *R1* indicó que habían realizado un cálculo, pero que no les había dado; en esta pregunta el grupo no mostró claridad al momento de responder. Respecto a *S2T1P12b*, un estudiante de respuesta *R3* ratificó su respuesta dada, mientras que un estudiante de respuesta *R4* manifestó que no habían alcanzado a responder la pregunta. Un estudiante de respuesta *R1* indicó que la tabla les dio casi todas las respuestas.

Respecto a la tarea 1 de la segunda situación, de acuerdo con la *Matematización Vertical – Nivel Referencial*, al estudiar los registros tabular, gráfico y notacional, apoyados en el recurso de Geogebra, algunos estudiantes pudieron identificar, modelar y argumentar relaciones funcionales entre las cantidades presentes, identificando en ciertos casos las variables dependientes e independientes según se requería. Los procesos de modelación cada vez iban presentando mayor complejidad conforme avanzaban las preguntas, por tanto, las dificultades para construcción de modelos fueron más notables en las últimas preguntas, pues cuando se solicitaron modelos sencillos de relaciones entre cantidades, los estudiantes dieron cuenta de estos, pero cuando se requería construir el *modelo* de la

función cuadrática presente, muy pocos lo desarrollaron, dificultándose este importante paso en el estudio de la variación de la situación estudiada.

Como parte de AM1 y AM2, los estudiantes alcanzaron a coordinar los cambios de unas variables en relación con otras y la dirección del cambio, apoyados en los distintos registros de representación, sin embargo, en el caso de la argumentación de relaciones de dependencia más complejas fueron muchas las dificultades mostradas por parte de varios estudiantes al momento de describir los cambios sobre los cuales se indagaba, incluso algunos mostraron comportamientos *pseudo – analíticos*, lo que permitió registrar con dificultad AM1 y algunas AM2 y, en relación con estos, N1 y N2 de razonamiento covariacional.

(T2) Tarea 2: Analizando cambios de las cantidades de la situación en diferentes registros de representación

Esta tarea fue realizada por 27 de los 28 estudiantes del grupo.

A continuación, abre el archivo denominado Tarea 2 en el cual se presentan una gráfica cartesiana de puntos cuyas coordenadas corresponden a la relación Ancho ($\overline{AD}$) vs área de la superficie rectangular. Elige y mueve con el cursor el punto D (lo cual determina valores del área del rectángulo a partir de valores posibles de la longitud del segmento $\overline{AD}$) y observa los cambios.

(P1) Pregunta 1: Moviendo el punto D de tal manera que coincida primero con el punto en la coordenada (3,24) y luego con el punto en la coordenada (4,28), responde:

(P1a) Pregunta 1a: Explica qué relación se presenta entre la longitud de $\overline{AD}$ de acuerdo con cada caso.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que el resultado termina en metros y que aumenta un metro.	11	40,7%

R2	Estudiantes que escribieron que cuando estaba en (3,24) la longitud es 3 y cuando estaba en (4, 28) la longitud es 4.	11	40,7%
R3	Estudiantes que expresaron que la longitud de $\overline{AD}$ cambia y que al mover el punto D coincide con las coordenadas y que las medidas terminan en metros.	4	14,9%
R4	Estudiantes que escribieron que la en los dos termina en metros y que también aumentaban en obtener la coordenada.	1	3,7%

Tabla 69

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 1a (S2T2P1a)

(P1b) Pregunta 1b: Determina si hay alguna diferencia entre la longitud del segmento punteado (paralelo al eje y) que representa la medida del área para cada caso. Si es afirmativo, explica tu respuesta.

Tabla 70

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 1b (S2T2P1b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que si hay diferencia de longitud, ya que cuando se hace el movimiento en el computador de la coordenada (3,24) hacia (4,28) el aumento del segmento punteado es de $4m^2$.	8	29,6%
R2	Estudiantes que escribieron que la diferencia entre la longitud del segmento punteado paralelo al eje y , en la coordenada (3,24) su longitud es menor y la longitud del segmento en (4,28) es mayor.	11	40,8%
R3	Estudiantes que escribieron que si hay diferencia y que el segmento de (3,24) a (4,28) aumenta.	6	22,2%
R4	Estudiantes que escribieron que aumenta la longitud del segmento punteado, pero escribe valores que no corresponden al aumento real en la medida del mismo.	2	7,4 %

De acuerdo con la *Tabla 69*, el 40,7% expresó con más claridad la relación de los dos momentos del segmento $\overline{AD}$, argumentando que aumenta un metro, el 40,7% indicó la medida de $\overline{AD}$ en cada caso, pero no especificó la relación entre los dos casos. El 14,9% expresó que había sucedido un cambio pero no especificaron dicho cambio, y el restante 3,7% indicó la medida en metros del segmento $\overline{AD}$ en los dos casos.

En las respuestas registradas en la *Tabla 70*, el 100% expresaron que sí había diferencia entre las longitudes de los segmentos relacionados con el área para cada caso. El 29,6% argumentaron que cuando se hace el movimiento en el computador de la coordenada (3,24) hacia (4,28) el aumento del segmento punteado es de $4m^2$. El 40,8% expresaron que en la coordenada (3,24) su longitud es menor y la longitud del segmento en (4,28) es mayor y el 22,2% expresaron que sí hay diferencia y que el segmento de (3,24) a (4,28) aumenta. El restante 7,4% expresan que hay un aumento, pero el argumento del aumento no corresponde con la gráfica.

De acuerdo con las respuestas para *S2T2P1a* se puede inferir que la mayoría de estudiantes compararon, identificaron y describieron los cambios en la longitud de $\overline{AD}$ en relación con las coordenadas indicadas, a partir de la representación gráfica interactiva facilitada en el proceso de modelación en el *Nivel Referencial* y como parte de una aproximación al *Nivel General*, al igual que en el caso de lo evidenciado en las respuestas para *S2T2P1b* en las cuales la totalidad de estudiantes indicaron diferencias entre las longitudes de los segmentos que se relacionan con el área. Lo anterior permitió otra forma de explorar las relaciones funcionales en forma gráfica, como otra manera de visualizar la covariación entre la variable independiente y la dependiente.

En la plenaria el docente investigador empezó recapitulando lo trabajado hasta el momento y también mostró una proyección de la gráfica trabajada en Geogebra respecto a la tarea 2. De acuerdo con las respuestas para *S2T2P1a*, al hablarse de la pregunta del caso, dos estudiantes con respuesta *R1* expresaron que la relación que se presenta es que sus resultados terminan en metros y también que se aumenta un metro. Cuando el docente hace énfasis en indagar sobre qué pasa con la longitud de $\overline{AD}$, uno de los estudiantes respondió que “cambia”, posteriormente el docente pregunta “¿Cómo cambia?” y al escuchar varios aportes, algunos estudiantes responden “aumenta”. Respecto a *S2T2P1b*, y haciendo uso de la gráfica en Geogebra, el docente investigador realiza la ubicación en las dos coordenadas nuevamente y ahora pregunta: ¿Qué pasa con la medida del área?, ¿hay alguna diferencia?, frente a lo cual algunos estudiantes primero contestaron que aumenta $4m$ pero al recordárseles que es el área entonces algunos indicaron nuevamente que $4m^2$.

(P2) Pregunta 2: Selecciona dos puntos seguidos de la curva, diferentes a los del punto 1, escribe sus coordenadas y responde.

(P2a) Pregunta 2a: Compara y explica la relación entre las longitudes de $\overline{AD}$ (valores en x) en los dos casos.

Tabla 71

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 2a (S1T2P2a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron las coordenadas de dos puntos seguidos en la gráfica y explicaron que es igual al movimiento del primer punto, aumenta la longitud un metro en el eje x . En el caso de un estudiante se especifica que es la longitud $\overline{AD}$.	5	18,5%
R2	Estudiantes que explicaron que la relación entre las longitudes $\overline{AD}$ aumentaba del punto 2 al punto 3 (Haciendo referencia a los puntos con coordenadas (2,18) y (3,24)).	2	7,4%

R3	Estudiantes que escribieron las coordenadas (1,10) y (2,18) y explicaron que siempre aumenta 8.	1	3,7%
R4	Estudiantes que escribieron las coordenadas de dos puntos seguidos pero la explicación de la relación no es clara y presenta inconsistencias. Otros estudiantes solo escribieron las coordenadas de dos puntos seguidos, pero no explicaron la relación entre las longitudes de $\overline{AD}$.	15	55,6%
R5	Estudiantes que escribieron coordenadas de puntos que no correspondían a la gráfica trabajada.	4	14,8%

(P2b) Pregunta 2b: Explica qué puedes concluir sobre la diferencia entre las medidas del área (valores en y).

Tabla 72

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 2b (S1T2P2b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la diferencia es que aumenta. Se da el ejemplo de que el punto (2,18) y el punto (3,24), respecto a 18 y 24, se llevan 6 de diferencia.	6	22,3%
R2	Estudiantes que escribieron valores numéricos en la respuesta. Escribieron que la diferencia que tienen es de 1,8 (las coordenadas de puntos escogidas en la pregunta anterior fueron (1,10) y (2,18)).	5	18,5%
R3	Estudiantes que expresaron que la diferencia es que cuando el área aumenta, entonces $\overline{AD}$ disminuye y viceversa.	8	29,6%
R4	Estudiantes que describieron diferencias que presentaban inconsistencias y no correspondían a lo que se preguntaba.	8	29,6%

De acuerdo con la *Tabla 71*, el 25,9% de los estudiantes escribieron dos coordenadas de puntos seguidos y explicaron el aumento de la relación de la longitud de $\overline{AD}$; el 3,7% escribió las coordenadas, pero explicaron el cambio correspondiente a la medida del área; el 55,6% indicó dos coordenadas de puntos, pero su explicación del cambio presentaba inconsistencias y el restante 14,4% escribieron coordenadas que no correspondían a la gráfica.

En relación con la *Tabla 72*, el 22,3% expresaron que la medida del área aumenta, acudiendo a argumentar con un caso particular entre dos coordenadas de puntos. El 18,5% expresaron que la diferencia que tienen es de 1,8, esto, de acuerdo con las coordenadas escritas que fueron (1,10) y (2,18). El 29,6% expresaron una relación que no correspondía a la dependencia entre las cantidades relacionadas en la gráfica, expresando que cuando el área aumenta entonces $\overline{AD}$ disminuye y viceversa. Las respuestas del restante 29,6% presentaban inconsistencias y no eran claras.

El estudiante con respuesta *R1* sobre *S2T2P2a* expresa con claridad el aumento de la longitud, de cómo plantea “el eje x ”:

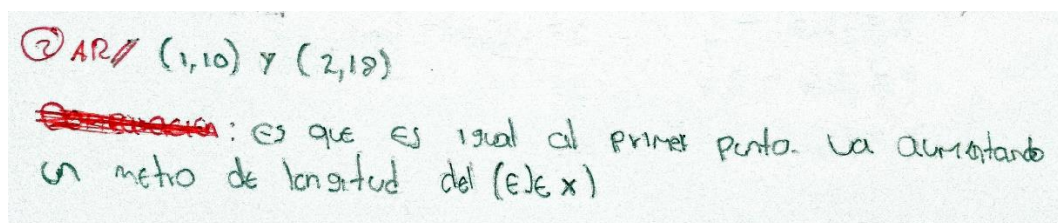


Ilustración 49. S2T2P2aR1

Sin embargo, en relación a las respuestas para *S2T2P2a* se observa una disminución en el porcentaje de aciertos en cuanto a las descripciones del cambio de la longitud de $\overline{AD}$, respecto a las respuestas para *S2T2P1a*, en el que se les había solicitado lo mismo para un caso indicado. En las respuestas para *S2T2P2b* también hay una disminución en el porcentaje de acierto; de acuerdo con esto se puede asegurar que la mayoría de estudiantes presenta dificultades en aspectos relacionados con describir *cómo cambia* y *cuánto cambia* una cantidad en relación con otra en la situación, analizando su respectiva representación gráfica; esta acción corresponde a AM1 y AM2 y es fundamental en el desarrollo del razonamiento covariacional.

En la plenaria, respecto a *S2T2P2a* una estudiante con respuesta *R1* mencionó que había escogido las coordenadas (2,18) y (1,10). De acuerdo con estas coordenadas, la estudiante complementó que sería igual al primer punto y va aumentando la longitud un metro del eje x . Respecto a las mismas coordenadas, una estudiante con respuesta *R3* expresó que la relación encontrada es que “hablando de las coordenadas siempre aumenta 8... y el $\overline{AD}$ siempre aumenta un metro”. En relación con *S2T2P2b*, una estudiante con respuesta *R3* expresó que “cuando el área disminuye $\overline{AD}$ aumenta – mientras hace movimientos con las manos – y cuando disminuye $\overline{AD}$ aumenta el área”. Respecto a esta respuesta el docente aclara que, en la gráfica de Geogebra, el primer movimiento que se realiza es el movimiento de $\overline{AD}$ y después sucede el cambio del área.

(P3) Pregunta 3: De acuerdo con la gráfica:
(P3a) Pregunta 3a: Indica la longitud que debe tener $\overline{AD}$ para que el área sea máxima. Explica tu respuesta.

Tabla 73

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 3a (S2T2P3a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la longitud que debe tener $\overline{AD}$ es 5,53 para el área máxima 30,25.	3	11,1%
R2	Estudiantes que describieron debe tener a longitud $\overline{AD} = 5,53$ porque ese es el punto máximo.	2	7,4%
R3	Estudiantes que escribieron que la longitud que debe tener $\overline{AD}$ es de 5,53.	16	63%
R4	Estudiantes que escribieron cantidades que no corresponden a la longitud de $\overline{AD}$ de acuerdo con la pregunta.	5	18,5%

(P3b) Pregunta 3b: Determina para cuál medida de $\overline{AD}$ se cumple que el área es de $29,25 \text{ m}^2$.

Tabla 74
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 3b (S2T2P3b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que para la medida de 4,55 se cumple $29,25 \text{ m}^2$.	22	81,5%
R2	Estudiantes que expresaron que se cumple $29,25 \text{ m}^2$ para la medida de $\overline{AD}$ 6,5 m.	5	18,5%

De acuerdo con la *Tabla 73*, el 81,5% indicaron que la medida que debía tener $\overline{AD}$ para obtener el punto máximo es 5,53 m (el valor exacto era 5,5 m pero la gráfica en Geogebra no mostraba el registro exacto). De este porcentaje el 11,1% expresó que esta medida servía para alcanzar la medida del área $30,25 \text{ m}^2$, el 7,4% expresó que dicha medida era el punto máximo y el 63% indicaron que esa era la medida. El restante 18,5% escribieron valores para $\overline{AD}$ que no correspondían a la medida para alcanzar el área máxima.

En relación con la *Tabla 74*, el 81,5% de los estudiantes escribió de manera acertada que el valor de $\overline{AD}$ debería ser de 4,55 m. Un 18,5% argumentó que el valor de $\overline{AD}$ debería ser de 6,5 m.

De acuerdo con las respuestas sobre *S2T2P3a* y *S2T2P3b* se puede afirmar que la mayoría de estudiantes identificaron de manera precisa el valor para $\overline{AD}$, en el cual se puede obtener el área máxima y otros casos particulares, aspecto clave en el proceso de estudio del modelo gráfico en el *Nivel Referencial*, además, fortalecer el entendimiento de la relación de dependencia entre dichas cantidades para profundizar en el análisis de la covariación entre los valores de una y otra cantidad a medida que sufren los cambios registrados en la gráfica, una característica de las AM1 y AM2.

En la plenaria, respecto a las respuestas para *S2T2P3a* algunos estudiantes indicaron que la medida que debe tener $\overline{AD}$ es 5,5, mientras otros indicaron que 5,53; ante este último valor se les aclaró que debido a asuntos como el movimiento del mouse del computador podía obtenerse un valor como 5,53, sin embargo, la respuesta correcta era 5,5. Respecto a *S2T2P3b*, dos estudiantes con respuesta *R1* indicaron que la medida que debe tener $\overline{AD}$ para obtener el valor indicado es 4,55.

(P4) Pregunta 4: Escribe las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola con los ejes cartesianos y responde:

(P4a) Pregunta 4a: Escribe para qué valores de x el valor de $y = 0$.

Tabla 75

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4a (S2T2P4a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron “ $x = 0$ y $y = 0$ y $x = 11$ y $y = 0$ ”. Dos estudiantes expresaron en lenguaje natural los valores que cumplen las condiciones.	9	33,3%
R2	Estudiantes que escribieron que cuando x vale 11, y vale 0 y cuando y vale 0, x vale 0.	6	22,2%
R3	Estudiantes que escribieron las coordenadas de este caso (0,0)(11,0), la de (0,0) es del punto 0 y (11,0) es del punto 11.	10	37,1%
R4	Estudiantes que indicaron valores de x que no correspondían a los puntos de intersección de los cuales se preguntaba.	2	7,4%

(P4b) Pregunta 4b: Explica el significado de estos puntos de intersección de acuerdo con la situación.

Tabla 76

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4b (S2T2P4b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
--------------------	-------------	---------------------	---------------------

R1	Estudiantes que escribieron que cuando x está en 0 el resultado de y está en 0 y que cuando x está en 11 el resultado de y está en 0. No se especifica otro significado respecto de la situación.	10	37%
R2	Estudiantes que escribieron las coordenadas (0,0)(11,0).	2	7,4%
R3	Estudiantes que escribieron las coordenadas (0,0)(11,0) y explicaron que el primer punto “es el área de superficie de cultivo” y que el segundo “es la curva del área de la superficie de cultivo”.	5	18,6%
R4	Estudiantes que no describieron el significado de los puntos y su respuesta presenta inconsistencias.	10	37%

De acuerdo con la *Tabla 75*, el 92,6% identificaron los puntos de corte. El 33,3% escribió que “ $x = 0$ y $y = 0$ y $x = 11$ y $y = 0$ ”; el 22,2% escribió que cuándo x vale 11, y vale 0 y cuando y vale 0, x vale 0 y el 37,1% escribió que las coordenadas de este caso (0,0)(11,0), la de (0,0) es del punto 0 y (11,0) es del punto 11. El 7,4% indicaron valores de x , los cuales no cumplen con ser las coordenadas de los puntos de corte.

En relación con la *Tabla 76*, el 37% escribieron que cuando x está en 0 el resultado de y está en 0 y que cuando x está en 11 el resultado de y está en 0. El 7,4% escribieron las coordenadas (0,0)(11,0), el 18,6% escribieron las coordenadas y argumentaron que el primer punto “es el área de superficie de cultivo” y que el segundo “es la curva del área de la superficie de cultivo”. El restante 37% presentaron respuestas con inconsistencias.

De acuerdo con las respuestas para *S2T2P4a* se puede inferir que casi todos los estudiantes identifican los puntos de corte de la curva con los ejes e indican correctamente sus coordenadas, como parte del proceso de modelación en el *Nivel Referencial*, sin embargo, también es posible afirmar que de acuerdo con las respuestas para *S2T2P4b*, ninguno comprende con claridad el significado de estos puntos respecto al contexto planteado, lo cual es un aspecto a fortalecer en el proceso de estudio. Por otra parte, estos

puntos son casos particulares que se van presentando en la covariación entre las cantidades relacionadas y con un significado especial en la misma covariación, pues para valores distintos de la variable independiente hay dos instantes en que la variable dependiente es igual a cero (0) a pesar de la variación presentes para $0 < x < 11$.

En la plenaria, en relación con *S2T2P4a*, una estudiante de respuesta *R1* expresó que “cuando x está en $(0,0)$ no hay valor de área”. Cuando se les preguntó a todos para qué otro valor de x el valor de y vale cero, dos estudiantes contestaron: once. Se preguntó además si había otros casos donde se cumpliera lo mismo y algunos manifestaron que no. En el caso de *S2T2P4b*, una estudiante de respuesta *R3* indicó las coordenadas de los puntos de intersección y contestó que “es un área de superficie de cultivo y es curva del área de superficie de cultivo”. Finalmente, ningún estudiante respondió correctamente y con claridad acerca del significado de los puntos de intersección y ante esto el docente explicó que de acuerdo con las medidas del ancho y largo para cada caso no era posible obtener una superficie de cultivo.

(P5) Pregunta 5: Escribe para cuáles valores de x es posible que y tenga valores diferentes a cero y sea una superficie de cultivo posible.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que para cuando xn está después de 0 y antes del 11 es posible que y tenga valores a 0 y que tenga una superficie de cultivo posible. En las respuestas especificaron que “ xn es una fórmula para dar números de diferentes valores después de 0 y antes de 11”.	7	25,9%
R2	Estudiantes que escribieron que “hay muchos valores que y no dé 0 como lo es desde 0,1 hasta más o menos 10,86”. Un estudiante indicó que los valores de x van hasta 10,99 y que los valores de y serían desde 0,12 y hasta 30,25.	6	22,2%

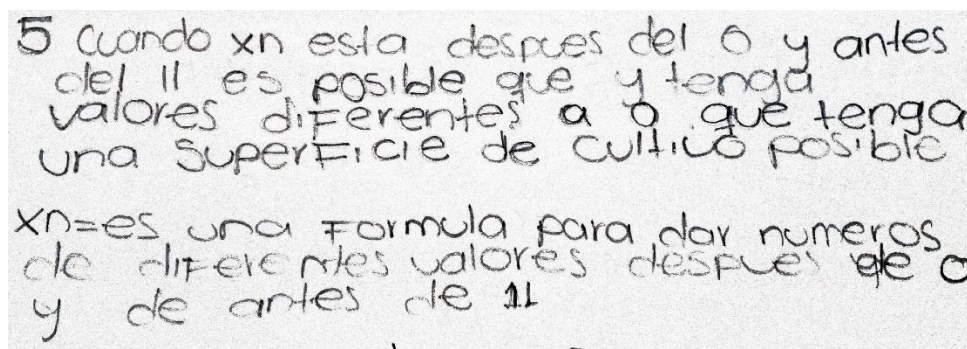
R3	Estudiantes que escribieron algunos casos particulares de valores numéricos que cumplen la condición, enteros y decimales.	2	7,4%
R4	Estudiantes que escribieron valores que no cumplían con la condición indicada en la pregunta. Estudiantes que respondieron que no había muchos valores y estudiantes que no respondieron la pregunta.	13	44,5%

Tabla 77

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 5 (S2T2P5)

De acuerdo con la *Tabla 77*, el 48,1% expresaron el dominio de la función en términos que permiten acercarse a valores continuos. Un 7,4% indicó valores particulares del dominio y el restante 44,5% no explicaron con claridad el dominio o no respondieron la pregunta.

Una estudiante con respuesta *R1* expresó:



5 Cuando x_n esta despues del 0 y antes del 11 es posible que y tenga valores diferentes a 0 que tenga una Superficie de cultivo posible

x_n = es una formula para dar numeros de diferentes valores despues de 0 y de antes de 11

Ilustración 50.S2T2P5R1

La anterior respuesta evidencia, en el proceso de modelación en el *Nivel Referencial*, la forma como se trabaja y reconoce el dominio de la función trabajada en la situación mediante una expresión o símbolo que la estudiante y otro grupo de estudiantes consideraron apropiado. Sin embargo, de acuerdo con otras respuestas sobre *S2T2P5* se puede afirmar que menos de la mitad de estudiantes se acercan a las nociones de continuidad en los valores del dominio de la función trabajada, para expresar un intervalo

que cumple con las condiciones de la situación. Este porcentaje es menor comparado con las respuestas en la *Tabla 56*, en la cual el 92,3% de los estudiantes expresaron de manera apropiada valores discretos del dominio de acuerdo con la tabla relacionada para dicha pregunta.

En la plenaria, un estudiante de respuesta *R2* expresó que “en el lado de la x comienza en 0.1 hasta terminar en 10,99, y en el lado de la y comienza en el 0.12 hasta terminar en 30.25”. Un estudiante de respuesta *R4* expresó que servía el valor 11.50, un valor que no cumplía con las condiciones, pero luego indicó también el valor de 10,50, aunque estaba dubitativo al respecto de los valores expresados. Ante la misma pregunta, el docente investigador preguntó por algunos casos particulares de x para ver si era posible obtener el área, para lo cual los estudiantes contestaron de manera afirmativa. Ante esto, el docente preguntó cómo se hace para expresar esa cantidad de números sin escribirlos todos, para lo que una estudiante de respuesta *R1* manifestó que expresó una fórmula, la que escribió como xn , “es una fórmula para dar números con diferentes valores después de 0 y antes de 11,..., cuando xn está después del 0 y antes del 11 es posible que y tenga valores diferentes a 0 y que haya una superficie de cultivo posible”.

(P6) Pregunta 6: Camila afirma que la expresión para determinar el área de la superficie de cultivo es $y = 11x - x^2$. Completa la *Tabla 5* para cuando x toma los valores indicados.

Tabla 5. Tabla de medidas del área para algunos valores de x .

x (Longitud de $\overline{AD}$)	Área ($y = 11x - x^2$)
2	18
3,5	26,25
5	
5,5	
6	

6,5	
7	28

Compara los resultados en las medidas del área con los valores registrados en la gráfica de la *Tarea 2* y responde:
(P6a) Pregunta 6a: Indica la validez de la afirmación de Camila y explica por qué.

Tabla 78

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 6a (S2T2P6a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completaron los valores faltantes en la tabla de forma acertada y expresaron que la afirmación era “cierta” o “válida”. Además, realizaron las sustituciones y los cálculos correspondientes.	14	48,1%
R2	Estudiantes que completaron los valores faltantes en la tabla de forma acertada y realizaron las sustituciones y los cálculos correspondientes. No indicaron si la afirmación era válida o no.	3	11,1%
R3	Estudiantes que completaron los valores faltantes en la tabla y expresaron que la afirmación era “afirmativa” y realizaron las sustituciones y los cálculos correspondientes, pero presentaron inconsistencias en la justificación de la validez o escriben valores que no corresponden en la tabla.	3	11,1%
R4	Estudiantes que completaron los valores faltantes en la tabla y realizaron las sustituciones y los cálculos correspondientes, pero no indicaron si la afirmación era válida y presentaron inconsistencias en los cálculos y valores a escribir en la tabla.	7	25,9%

(P6b) Pregunta 6b: Escribe las coordenadas del punto máximo de la curva. Explica el significado de este punto respecto a la situación.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron la coordenada (5.5 , 30.25) y explicaron que es la mayor área de la superficie de cultivo.	3	11,1%

R2	Estudiantes que escribieron la coordenada (5.5 , 30.25) y explicaron que es “la parte más alta de la superficie de cultivo” o “la mayor parte de la superficie de cultivo”.	6	22,2%
R3	Estudiantes que presentaron inconsistencias al escribir la coordenada del punto máximo y en el significado de este en la situación.	11	40,8%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	7	25,9%

Tabla 79

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 6b (S2T2P6b)

De acuerdo con la *Tabla 78*, el 59,2% de los estudiantes completaron todos los valores de forma acertada, llevando a cabo los procedimientos correspondientes con la expresión indicada. Un 11,1% presentaron inconsistencias en sus respuestas habiendo expresado la validez de la afirmación y realizado los cálculos, mientras que el restante 25,9% completaron los valores de la tabla, pero presentaron inconsistencias en cálculos y en expresar la validez de la afirmación.

De acuerdo con la *Tabla 79*, el 33,3% escribieron las coordenadas del punto máximo en forma correcta y explicaron de manera aceptable el significado de este punto en la situación. Un 40,8% presentaron inconsistencias en la coordenada y/o en el significado del punto y el restante 25,9% no respondieron la pregunta.

En relación con los tipos de respuesta sobre *S2T2P6a* en el *Nivel Referencial*, es posible afirmar que hay avances en la comprensión y uso del *modelo de* la situación, de acuerdo con esto, más de la mitad de los estudiantes emplearon el mismo para completar la tabla y afirmar la validez del modelo indicado, mientras que en las respuestas para *S1T2P6b* se puede observar que la mayoría no comprende el significado del punto máximo respecto a la situación planteada, evidenciando también dificultades para identificar sus coordenadas con precisión.

En la plenaria, respecto a completar la tabla, un estudiante expresó que utilizó la expresión dada para calcular los valores que faltaban. Al preguntar cuántos estudiantes habían realizado el mismo procedimiento, nueve estudiantes levantaron la mano. El resto de estudiantes no indicaron cómo respondieron la pregunta. En relación con *S2T2P6a*, algunos estudiantes contestaron que era correcta la afirmación dada por Camila. Respecto a *S2T2P6b*, un estudiante con respuesta *R2* expresó la coordenada como (50.30, 25), mientras que otro de respuesta *R3* escribió 5,5, y una de respuesta *R1* expresó que había escrito (5.5, 30. 25).

(P7) Pregunta 7: En las columnas centrales de la *Tabla 6*, a continuación, se presentan valores para x ($\overline{AD}$) y valores para y (área), y a la izquierda y la derecha los cambios en y y los cambios en x a medida que $\overline{AD}$ varía de manera uniforme. Completa la tabla.

Tabla 6. Tabla de valores de Δx y Δy para valores de x y y indicados.

Δx ($x_2 - x_1$)	x ($\overline{AD}$)	y (Área)	Δy ($y_2 - y_1$)
	0	0	
	1	10	$10 - 0 = 10$
$2 - 1 = 1$	2	18	$18 - 10 = 8$
$3 - 2 = 1$	3	24	$24 - 18 = 6$
$4 - 3 = 1$	4	28	
	5	30	
$6 - 5 = 1$	6	30	$30 - 30 = 0$
	7	28	$28 - 30 = -2$
$8 - 7 = 1$	8	24	$24 - 28 = -4$
$9 - 8 = 1$	9	18	
	10	10	$10 - 18 = -8$

	11	0	

Tabla 80

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 7 (S2T2P7)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron en forma acertada todas las cantidades y relaciones en la tabla.	14	51,9%
R2	Estudiantes que escribieron en forma acertada la mayoría de las cantidades y relaciones en la tabla.	13	48,1%

De acuerdo con la *Tabla 80*, el 51,9% completaron en forma acertada todos los valores de la tabla, mientras que el 48,1% completaron la mayoría de los valores faltantes.

En relación con el proceso de modelación del *Nivel Referencial* y los tipos de respuesta sobre *S2T2P7*, se puede aseverar que la mayoría de los estudiantes realizaron de manera efectiva AM1 y AM2 mientras se estudia la tabla empleada para identificar la cantidad de cambio, llevando a cabo las primeras aproximaciones a AM3. En la actividad, la mayoría desarrollaron el procedimiento necesario para identificar y establecer los valores para Δx y Δy – *Cuánto cambia* – de acuerdo con la guía propuesta en la *Tabla 6* de la situación 2, como parte del proceso siguiente de analizar y cuantificar la forma como covarían las cantidades, promoviendo que los estudiantes alcancen un N3 de razonamiento covariacional.

En la plenaria, un estudiante de respuesta *R1* expresó que tuvo en cuenta que debía realizar las diferencias expresadas para cada caso.

(P8) Pregunta 8: Respecto a las diferencias registradas en la *Tabla 6*,

(P8a) Pregunta 8a: Escribe cuánto cambian las cantidades de y cuando x toma valores de 1, 2, 3, 4 y 5.

Tabla 81

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 8a (S2T2P8a)

Tipos de respuesta	Descripción	F. A.	F. R.	Explicación	F. A.	F. R.
R1	Estudiantes que escribieron que las cantidades aumentaban.	14	51,9%	Estudiantes que escribieron que x cambia de valores 1 – 5 y aumenta el área. Estos cambios son iguales a 10, 18, 24, 28 y 30.	5	18,5%
				Estudiantes que escribieron que los valores de y 1, 2, 3, 4 y 5 van aumentando de 2 en 2.	3	11,1%
				Estudiantes que escribieron que la cantidad y va aumentando cuando x toma valores de 1, 2, 3, 4 y 5. Aumenta hasta el punto máximo que es 30. Un estudiante expresó que se debe tener en cuenta la tabla de la anterior tarea.	6	22,3%
R2	Estudiantes que escribieron que las cantidades cambian, que van restando o disminuyendo.	12	44,4%	Estudiantes que respondieron que las cantidades cambian de 2 en 2 restando de (10, 8, 6, 4, 2, 0).	4	14,8%
				Estudiantes que escribieron que van disminuyendo de 2 en 2.	4	14,8%
				Estudiantes que escribieron que disminuyen las medidas de $10 - 0 = 10$ hasta $30 - 28 = 2$.	4	14,8%
R3	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	1	3,7%	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	1	3,7%

(P8b) Pregunta 8b: Escribe cuánto cambian las cantidades del área cuando el ancho mide más de 6 metros.

Tabla 82

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 4b (S2T2P8b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que el área empieza a disminuir de 2 en 2.	8	29,6%
R2	Estudiantes que expresaron que empieza a aumentar de 2 en 2 pero en negativo (0, -2, -4, -6, -8, -10)	5	18,5%
R3	Estudiantes que expresaron que vuelven a tener las mismas cantidades que tenían cuando median 1, 2, 3, 4 y 5. Otros estudiantes expresaron: “pues relativamente no cambian mucho, son las mismas en viceversa”.	9	33,4%
R4	Estudiantes que presentaron inconsistencias en la explicación de cuánto cambian las cantidades del área respecto a la pregunta y estudiantes que no respondieron.	5	18,5%

(P8c) Pregunta 8c: De acuerdo con los cambios uniformes en x , explica cómo son los cambios en y .

Tabla 83

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 2 y pregunta 8c (S2T2P8c)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que “el cambio en x se restan y el resultado siempre es el mismo (1), ej. $2 - 1 = 1$, $3 - 2 = 1$. El cambio en y se restan 2 en 2 hasta 0, ej. $10 - 0 = 10$, $18 - 10 = 8$, $18 - 24 = 6$ ”.	1	3,7%
R2	Estudiantes que escribieron que y va disminuyendo hasta cierto punto que es el ancho 6 y de ahí empieza a aumentar en negativo de 2 en 2.	6	22,2%
R3	Estudiantes que escribieron que en y cambian los resultados positivos o negativos, cuando x ($\overline{AD}$) mide 6 o menos y negativo cuando x ($\overline{AD}$) mide más de 6.	4	14,8%
R4	Estudiantes que escribieron que en y aumentan hasta el punto máximo cuando x está en 5, después vuelven a tener las mismas cantidades de lo anterior.	6	22,2%

R5	Estudiantes que presentaron respuestas con inconsistencias y no describían en forma clara el comportamiento de las cantidades y estudiantes que no respondieron la pregunta.	10	37,1%
----	--	----	-------

De acuerdo con la *Tabla 81*, el 51,9% expresaron que las cantidades aumentaban. De estos, el 11,1% escribieron que los valores de y 1, 2, 3, 4 y 5 van aumentando de 2 en 2, el 18,5% escribieron que x cambia de valores 1 – 5 y aumenta el área. Estos cambios son iguales a 10, 18, 24, 28 y 30, y el 22,3% escribieron que la cantidad y va aumentando cuando x toma valores de 1, 2, 3, 4 y 5; aumenta hasta el punto máximo que es 30. Por otra parte, el 44,4% expresaron que las cantidades disminuían, de tal forma que el 14,8% respondieron que las cantidades cambian de 2 en 2 restando de (10, 8, 6, 4, 2, 0), un 14,2% escribieron que van disminuyendo de 2 en 2 y el otro 14,2% escribieron que disminuyen las medidas de $10 - 0 = 10$ hasta $30 - 28 = 2$; el restante 3,7% no respondieron la pregunta.

De acuerdo con la *Tabla 82*, el 29,6% escribieron que el área empieza a disminuir de 2 en 2, el 18,5% expresaron que empieza a aumentar de 2 en 2 pero en negativo (0, -2, -4, -6, -8, -10). El 33,4% expresaron que vuelven a tener las mismas cantidades que tenían cuando median 1, 2, 3, 4 y 5 y el restante 18,5% presentaron inconsistencias en su respuesta.

En relación con la *Tabla 83*, el 3,7% escribieron que “el cambio en x se resta y el resultado siempre es el mismo (1), ej. $2 - 1 = 1$, $3 - 2 = 1$. El cambio en y se resta de 2 en 2 hasta 0, ej. $10 - 0 = 10$, $18 - 10 = 8$, $18 - 24 = 6$ ”. El 22,2% escribieron que y va disminuyendo hasta cierto punto que es el ancho 6 y de ahí empieza a aumentar en negativo de 2 en 2. El 14,8% escribieron que en y cambian los resultados positivos o negativos, cuando x ($\overline{AD}$) mide 6 o menos y negativo cuando x ($\overline{AD}$) mide más de 6, el 22,2% escribieron que en y aumentan hasta el punto máximo cuando x está en 5, después vuelven

a tener las mismas cantidades de lo anterior y el restante 37,1% presentaron inconsistencias en sus respuestas.

La respuesta de un estudiante para *S2T2P8a* da cuenta del análisis cuantitativo de la cantidad área, como se muestra a continuación:

⑤ a) Pienso que x cambia de valores del 1-5 aumenta el área. estas cambian así = 10, 18, 24, 28 y 30.

Ilustración 51. S2T2P8aR1

Sin embargo, en la pregunta se solicitaba hacer un énfasis especial en cuantificar el cambio y no del área, algo que (teniendo en cuenta los cambios de y 10, 8, 6, 4, 2, 0 para cambios uniformes de x) aparentemente consideraron otros estudiantes como, pero que no refirieron como el cambio sino como “los valores de y ” para valores de x indicados:

⑧ a) Pienso que los valores de y 1, 2, 3, 4 y 5 va aumentando en 2 en 2.

Ilustración 52. S2T2P8aR1

De acuerdo con las respuestas para *S2T2P8a*, se puede inferir que la mayoría de estudiantes presenta dificultades para referir cuánto cambian las cantidades de manera simultánea y solo algunos pudieron identificar y describir los cambios en los valores del área, antes del punto máximo, a medida que cambian de manera uniforme los valores del ancho de la superficie rectangular (AM1, AM2 y AM3); estos estudiantes tuvieron un acercamiento al razonamiento covariacional.

Respecto a las respuestas para *S2T2P8b*, se evidencia cómo la mayoría de estudiantes muestra dificultades para describir cuánto cambian los valores en el área, después del punto máximo, a medida que los valores de x varían de manera uniforme (AM1, AM2 y AM3). En relación con esto sólo un pequeño porcentaje del grupo describió

de manera apropiada la cuantificación del cambio, dando cuenta de un N3 de razonamiento covariacional.

Las descripciones de los cambios en y en las respuestas para S2T2P8c por parte de la mayoría de estudiante no evidencian con claridad la comprensión de la covariación presente, sin embargo, algunas dan cuenta de un análisis cercano a la cuantificación del cambio – *cuánto cambia* – como se observa:

Handwritten student response for S2T2P8c:

el cambio en (x) se restan y el resultado siempre es el mismo (1)
 $2-1=1$ $2-3=1$ $3-4=1$

el cambio en (y) se restan (2) en (2) hasta (0)
 $10-0=10$ $18-10=8$ $18-24=4$ $30-28=2$ $30-30=0$

Ilustración 53. S2T2P8cR1

En esta respuesta se puede inferir la identificación del cambio uniforme en x , pero la variación constante del cambio no se especifica sino que se indica como el “cambio en y ”.

Respecto a las respuestas sobre S2T2P8c, se evidencia continuidad en los porcentajes de poca comprensión y dificultad de los estudiantes para describir los cambios, registrados en S2T2P8a y S2T2P8b, a diferencia de que en esta pregunta se analizan los cambios registrados en todo el dominio de la gráfica, situación de la cual se puede asegurar que solo un grupo minoritario de estudiantes describió en forma aceptable cuánto son los cambios en el área (y), considerando los cambios uniformes en el ancho (x) y manifestado AM1, AM2 y AM3 como parte del avance hacia un N3 de razonamiento covariacional en un proceso de modelación que alcanzó el *Nivel General*.

En la plenaria, respecto a *S2T2P8a*, una estudiante con respuesta *R2* expresó que “cambian las cantidades de dos en dos restando de 10, 8, 6, 4, 2, 0”. Al preguntársele en qué sentido cambian ella contesta: “disminuyendo”. Respecto a *S2T2P8b*, un estudiante con respuesta *R2* expresó que “el área va disminuyendo cuando el ancho pasa de 6 metros”, pero no especificó cuánto cambia el área, aunque en su respuesta escrita se había indicado. Posteriormente el docente se detuvo a analizar con los estudiantes las cantidades y el sentido de los cambios antes y después del punto máximo. Respecto a *S2T2P8c*, una estudiante de respuesta *R4* manifestó que “en el informe se muestra que cuando x tiene medidas de 1 hasta 6 va aumentando, y cuando pasa del 6 empieza el área a disminuir”. Esta respuesta carece de algunos detalles que permitan definir mejor la covariación.

Respecto a la tarea 2 de la segunda situación, de acuerdo con la *Matematización Vertical – Nivel Referencial y Nivel General*, al estudiar los registros tabular, gráfico y notacional, apoyados en el recurso de Geogebra, algunos estudiantes pudieron argumentar sobre relaciones funcionales entre las cantidades presentes, identificando en ciertos casos las variables dependientes e independientes según se requería. Las preguntas sobre la covariación representada en los registros iban presentando mayor complejidad conforme se avanzaba en el ejercicio, por tanto, las dificultades para describir *cómo cambia* y *cuánto cambia* fueron más notables en las últimas preguntas, posiblemente al emplearse gráficas interactivas y tablas, dificultando el estudio de la variación de la situación estudiada.

Como parte de AM1 y AM2, los estudiantes alcanzaron a coordinar los cambios de unas variables en relación con otras las variables y la dirección del cambio, apoyados en los distintos registros de representación, sin embargo, en el caso de la argumentación de relaciones de dependencia más complejas fueron muchas las dificultades mostradas por parte de varios estudiantes al momento de describir los cambios sobre los cuales se

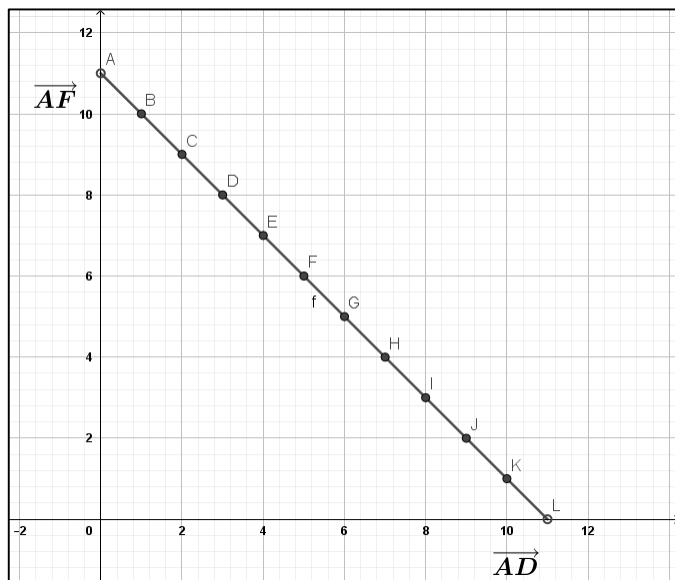
indagaba, incluso algunos mostraron comportamientos *pseudo – analíticos*, lo que permitió registrar con dificultad AM1 y algunas AM2 y en relación con estos, N1 y N2 de razonamiento covariacional. En el caso de AM3 solo algunos estudiantes expresaron en sus respuestas este tipo de acciones, lo que permitió identificar en esos casos N3 de razonamiento.

(T3) Tarea 3: Caracterización de la función cuadrática de la situación

Esta tarea fue realizada por 24 de los 28 estudiantes.

(P1) Pregunta 1: En la *Gráfica 4* se presenta la relación entre el ancho del rectángulo ($\overrightarrow{AD}$) y el largo del rectángulo ($\overrightarrow{AF}$) de la superficie rectangular.

Gráfica 4. Relación entre $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AF}$



De acuerdo con la gráfica selecciona tres parejas de coordenadas de puntos seguidos y:

(P1a) Pregunta 1a: Calcula las diferencias que se van presentando en x (abcisas). Explica cómo lo realizaste.

Tabla 84

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 1a (S2T3P1a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que explicaron que “la diferencia va a aumentar en un metro desde A hasta L”. No realizaron ningún cálculo o procedimiento.	1	4,2%
R2	Estudiantes que explicaron que “a medida que se va ubicando en cada coordenada, va aumentando un punto...” o también “antes de la coma va aumentando de a uno...”. No realizaron ningún cálculo o procedimiento.	4	16,7%
R3	Estudiantes que escribieron coordenadas de algunos puntos y escribieron que “cada vez que va bajando para llegar al punto L va aumentando” o que “se va presentando la diferencia en que el ancho x aumenta con su punto y que y solamente queda con la medida igual...”. No realizaron ningún cálculo o procedimiento.	13	54,1%
R4	Estudiantes que escribieron algunas coordenadas de puntos, pero no realizaron ninguna explicación ni desarrollaron cálculos o procedimientos.	6	25%

(P1b) Pregunta 1b: Calcula las diferencias que se van presentando en y (ordenadas). Explica cómo lo realizaste.

Tabla 85

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 1b (S2T3P1b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que la medida x disminuye o va disminuyendo. No realizaron ningún cálculo o procedimiento.	3	12,5%
R2	Estudiantes que escribieron explicaciones que presentaban inconsistencias respecto a la pregunta. Algunas respuestas eran que “la diferencia se va presentando en y que las coordenadas van tomando con el eje x ”, otras que “que cuando en x va aumentando y cuando está en y va disminuyendo y viceversa” y otras relacionadas con que “el área va aumentando”. En este grupo también están los estudiantes que no respondieron la pregunta.	21	87,5%

De acuerdo con la *Tabla 84*, ninguno de los estudiantes llevó a cabo los cálculos requeridos. En relación a la pregunta, los estudiantes llevaron a cabo descripciones de lo que consideraron como la diferencia entre las abscisas, pero distaron del objetivo de la pregunta.

En relación con la *Tabla 85*, ninguno de los estudiantes llevó a cabo cálculos. Para este caso, y como en la pregunta anterior, también se hicieron algunas descripciones del cambio, pero no era lo solicitado en la pregunta.

A partir de los tipos de respuesta sobre *S2T3P1a* y *S2T3P1b* se evidencia un *Nivel General* de modelación, sin embargo, también se registraron dificultades para determinar las diferencias sobre las que se preguntaba, por tanto, es posible afirmar que el grupo de estudiantes mostró dificultades con la comprensión acerca del cálculo de las diferencias para identificar *cuánto cambia* una o varias cantidades y a su vez relacionar cómo cambia una en relación a la otra, como parte de AM3, sin considerar un apoyo gráfico o de otro tipo que suministre pautas del procedimiento, incluso en muchos casos se presentaron comportamientos *pseudo – analíticos* de la covariación presente.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P2) Pregunta 2: Completa la *Tabla 7* de acuerdo con la información de la *Gráfica 4* donde se relacionan las diferencias de los cambios en x y y , a partir del cociente entre estas.

Tabla 7. Tabla de valores de Δx y Δy cociente entre diferencias de la recta.

Coordenadas de parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δy)	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Razón de cambio)

(5,6) y (6,5)	$6 - 5 = 1$	$5 - 6 = -1$	$\frac{5 - 6}{6 - 5} = -1$
(6,5) y (7,4)			$\frac{4 - 5}{7 - 6} = -1$
(7,4) y (8,3)	$8 - 7 = 1$		
(8,3) y (9,2)		$2 - 3 = -1$	
(9,2) y (10,1)			

Tabla 86

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 2 (S2T3P2)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completaron en forma correcta la totalidad de los valores y relaciones faltantes en la tabla, de acuerdo con los datos suministrados.	10	41,7%
R2	Estudiantes que presentaron valores faltantes e inconsistencias en los valores o relaciones faltantes en la tabla, de acuerdo con los datos suministrados.	13	54,1%
R3	Estudiantes que no completaron ningún valor faltante en la tabla.	1	4,2%

De acuerdo con la *Tabla 86*, el 41,7% completaron en forma correcta todos los valores faltantes en la tabla, mientras que el 54,1% completaron parcialmente la tabla o con algunas inconsistencias en los procedimientos y resultados obtenidos. Por último, el 4,2% no completaron la tabla.

Uno de los estudiantes completó satisfactoriamente la tabla indicada, como se muestra a continuación:

2. Completa la *Tabla 7* de acuerdo a la información de la *Gráfica 4* donde se relacionan las diferencias de los cambios en x y y , a partir del cociente entre estas.

Tabla 7. Tabla de valores de Δx y Δy cociente entre diferencias de la recta.

Coordenadas de parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δy)	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Razón de cambio)
(5,6) y (6,5)	$6 - 5 = 1$	$5 - 6 = -1$	$\frac{5-6}{6-5} = -1$
(6,5) y (7,4)	$7 - 6 = 1$	$4 - 5 = -1$	$\frac{4-5}{7-6} = -1$
(7,4) y (8,3)	$8 - 7 = 1$	$3 - 4 = -1$	$\frac{3-4}{8-7} = -1$
(8,3) y (9,2)	$9 - 8 = 1$	$2 - 3 = -1$	$\frac{2-3}{9-8} = -1$
(9,2) y (10,1)	$10 - 9 = 1$	$1 - 2 = -1$	$\frac{1-2}{10-9} = -1$

Ilustración 54. S2T3P2R1

El apoyo de las guías en la tabla fue fundamental para algunos estudiantes que recordaron el proceso que ya se había llevado a cabo en preguntas anteriores apoyados en el registro gráfico.

De acuerdo con las respuestas sobre S2T3P2, se puede inferir que menos de la mitad de los estudiantes se orientó con el procedimiento para efectuar el cálculo de las diferencias (Δx y Δy) y los cocientes (razón de cambio), basados en los ejemplos propuestos para algunos casos, como parte del *Nivel General* de modelación y el desarrollo de AM1, AM2 y AM3 de razonamiento en relación a la posibilidad de llevar a cabo las primeros aproximaciones a la razón de cambio promedio. Por otra parte, más de la mitad de los estudiantes, aun teniendo una guía para los procedimientos, no cumplió de manera satisfactoria con completar toda la tabla.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P3) Pregunta 3: De acuerdo con la información registrada en la *Tabla 7*:

(P3a) Pregunta 3a: Describe cómo son los cambios que se van presentando en Δy a medida que se van presentando los cambios en Δx .

Tabla 87

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 3a (S2T3P3a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que las ordenadas Δy son negativas y las abscisas Δx son números positivos.	18	75%
R2	Estudiantes que escribieron que una parte de los números van disminuyendo y en otra parte van aumentando.	1	4,2%
R3	Estudiantes que explicaron que “los cambios son de que dieron el mismo resultado, son positivos o negativos.	1	4,2%
R4	Estudiantes que sus respuestas presentaron inconsistencias y no eran claras respecto a la pregunta indicada.	4	16,6%

(P3b) Pregunta 3b: Describe cómo son los cambios de las cantidades de la columna de los cocientes, a medida que se relacionan diferentes parejas de puntos.

Tabla 88

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 3b (S2T3P3b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que “los cambios son de que los Δx van debajo de los Δy pero igualmente da el mismo resultado”.	1	4,2%
R2	Estudiantes que escribieron que “...que el resultado es siempre negativo ya que se relacionan las diferencias de las abscisas y las diferencias de las ordenadas...”.	3	12,5%
R3	Estudiantes que escribieron que las coordenadas siempre aumentan y también disminuyen.	17	70,8%
R4	Estudiantes que sus respuestas presentaron inconsistencias y no eran claras respecto a la pregunta indicada.	3	12,5%

De acuerdo con la *Tabla 87*, el 75% expresaron que las ordenadas Δy son negativas y las abscisas Δx son números positivos, mientras que el 4,2% escribieron que una parte de

los números van disminuyendo y en otra parte van aumentando. Un 4,2% explicaron que los cambios son de que dieron el mismo resultado, son positivos o negativos y el restante 16,6% presentaron inconsistencias en sus respuestas.

En relación con la *Tabla 88*, el 4,2% explicaron que “los cambios son de que los Δx van debajo de los Δy pero igualmente da el mismo resultado”, mientras que el 12,5% expresaron “...que el resultado es siempre negativo ya que se relacionan las diferencias de las abscisas y las diferencias de las ordenadas...”. El 70,8% de los estudiantes escribieron que las coordenadas siempre aumentan y también disminuyen y el restante 12,5% presentaron respuestas con inconsistencias.

De acuerdo con las respuestas sobre *S2T3P3a*, es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes no comprende y de esta manera no logra describir apropiadamente la covariación de las cantidades en el nivel de *cuánto cambian* (AM3) y solo expresan algunas características de *cómo cambian* (AM2) los valores de dichas cantidades, considerando en estas preguntas la revisión de un registro tabular en el *Nivel General* de modelación. En relación con *S2T3P3b* se infiere que los estudiantes centraron su atención en los valores de las coordenadas que relacionaron al momento de calcular la cantidad de cambio y por tanto no identificaron la constante negativa del caso.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P4) Pregunta 4: De acuerdo con los cambios de las cantidades de la columna de los cocientes (razón de cambio), explica cómo varía la razón de cambio de una relación funcional lineal.

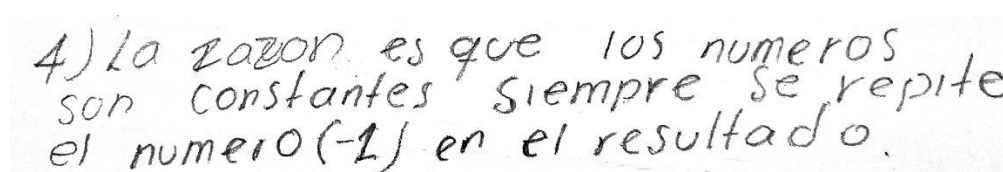
Tabla 89

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 4 (S1T3P4)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que los números son constantes, siempre se repite el número -1 en el resultado dado.	3	12,5%
R2	Estudiantes que expresaron que el lado x y el lado y aumentan por lados distintos, por eso uno de los valores aumenta y otro disminuye, aunque coinciden al algún punto.	17	70,8%
R3	Estudiantes que sus respuestas presentaron inconsistencias y no eran claras respecto a la pregunta indicada.	4	16,7%

De acuerdo con la *Tabla 89*, el 12,5% expresaron que los números son constantes, siempre se repite el número -1 en el resultado dado. El 70,8% expresaron que el lado x y el lado y aumentan por lados distintos, por eso uno de los valores aumenta y otro disminuye, aunque coinciden en algún punto y el restante 16,7% presentaron inconsistencias y falta de claridad en sus respuestas.

Una estudiante describió la constante de cambio de la siguiente manera:



4) La razon es que los numeros son constantes siempre se repite el numero (-1) en el resultado.

Ilustración 55. S2T3P4R1

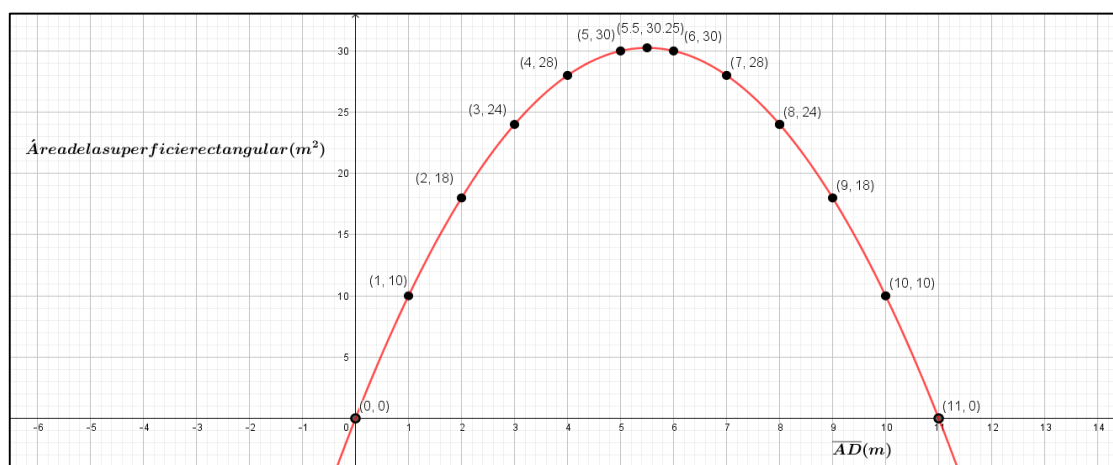
Este aspecto identificado es fundamental para la caracterización de la razón de cambio de una función lineal, además, es una condición relevante en la caracterización del cambio de la función cuadrática propia de la situación tratada y como base para la generalización y la evidencia de AM1, AM2 y AM3 en el alcance de N3 de razonamiento. De acuerdo con las respuestas sobre S2T3P4 es posible afirmar que solo un pequeño porcentaje del grupo de estudiantes evidenció la constancia en el cambio, mientras que la

mayoría de los estudiantes centró su atención en los distintos valores de x y y de las coordenadas, relacionados mediante el cociente de la razón de cambio.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

Ahora analizaremos la relación entre los cambios del ancho ($\overline{AD}$) y el área de la superficie rectangular, a partir de la Gráfica 5.

Gráfica 5. Curva del área de la superficie rectangular



(P5) Pregunta 5: Con ayuda de la *Gráfica 5* completa la *Tabla 8* para determinar la razón de cambio entre parejas de puntos continuos según la gráfica.

Tabla 8. Tabla de valores de Δx y Δy cociente entre diferencias de la curva.

Coordenadas de parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δy)	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
(0,0) y (1,10)			
(1,10) y (2,18)			
(2,18) y (3,24)			
(3,24) y (4,28)			

(4,28) y (5,30)			
(5,30) y (6,30)			
(6,30) y (7,28)			
(7,28) y (8,24)			
(8,24) y (9,18)			
(9,18) y (10,10)			
(10,10) y (11,0)			

Tabla 90

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 5 (S2T3P5)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completaron en forma correcta todos los valores y relaciones faltantes en la tabla.	3	12,5%
R2	Estudiantes que completaron los valores y relaciones faltantes en la tabla, pero presentaban algunas inconsistencias o valores que no correspondían a las casillas.	19	79,2%
R3	Estudiantes que completaron los valores de forma parcial o no respondieron la pregunta.	2	8,3%

De acuerdo con la *Tabla 90*, el 12,5% de estudiantes completaron en forma correcta todos los valores de la tabla. El 79,2% completaron todos los valores y relaciones faltantes, pero algunos presentaban inconsistencias, mientras que el restante 8,3% completaron la tabla parcialmente.

En relación con los tipos de respuesta sobre *S2T3P5*, se puede inferir que pocos estudiantes comprendieron y desarrollaron las diferencias entre los valores de x (Δx) y de y (Δy) para establecer los cambios y la relación a través del cociente entre los cambios, mientras que la mayoría de estudiantes evidenciaron dudas en algún instante de los procedimientos solicitados. Lo anterior da cuenta de AM1, AM2 y AM3, aunque el trabajo

con modelos para determinar la razón de cambio fue un factor determinante que afectó el avance hacia AM4 de razonamiento covariacional.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P6) Pregunta 6: De acuerdo con la información registrada en la *Tabla 8*:
(P6a) Pregunta 6a: Describe cómo son los cambios que se van presentando en los Δy a medida que los Δx presentan un cambio uniforme (aumentan en una unidad).

Tabla 91

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 6a (S2T3P6a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que de 10 a 0 va disminuyendo y desde 0 a 10 empieza a aumentar de a 2 pero en forma negativa. Algunos estudiantes explicitaron que Δx siempre es 1 y es positivo.	6	25%
R2	Estudiantes que explicaron que “los cambios que se van presentando en Δy son que hasta cierta parte disminuye y después aumenta mientras que Δx siempre aumenta y da el mismo resultado.	1	4,2%
R3	Estudiantes que expresaron que cuando los Δx mide más de 6 los Δy se vuelven negativos, pero si miden menos de 6 entonces son positivos.	11	45,8%
R4	Estudiantes que respondieron parcialmente la pregunta o no respondieron la pregunta.	6	25%

(P6b) Pregunta 6b: Escribe todas las cantidades en que varía la razón de cambio, a medida que se relacionan diferentes parejas de puntos continuos.

Tabla 92

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 6b (S2T3P6b)

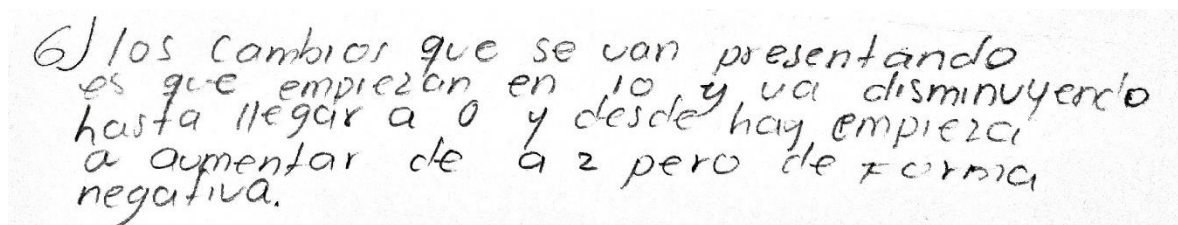
Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron todas las cantidades en que varía la razón de cambio en la tabla, esto es 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4 - 6 - 8 - 10.	5	20,8%

R2	Estudiantes que escribieron la mayoría de cantidades en que varía la razón de cambio en la tabla.	1	4,2%
R3	Estudiantes que escribieron expresiones que no correspondían a las cantidades de los cambios en que varía la razón de cambio en la tabla y estudiantes que no respondieron la pregunta.	18	75%

De acuerdo con la *Tabla 91*, el 25% de estudiantes respondieron “que de 10 a 0 va disminuyendo y desde 0 a 10 empieza a aumentar de a 2 pero en forma negativa”, mientras que el 4,2% explicaron que “los cambios que se van presentando en Δy son que hasta cierta parte disminuye y después aumenta mientras que Δx siempre aumenta y da el mismo resultado. El 45,8% expresaron que cuando los Δx miden más de 6 los Δy se vuelven negativos, pero si miden menos de 6 entonces son positivos. Por último, el 25% respondieron parcialmente la pregunta.

En relación con la *Tabla 92*, el 20,8% escribieron todos los valores en que varía la razón de cambio en la tabla, esto es 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2 , -4 , -6 , -8 , -10 . El 4,2% escribieron la mayoría de los valores en que varía la razón de cambio y el restante 75%, o no respondieron, o escribieron expresiones que no correspondían a las cantidades de los cambios en que varía la razón de cambio en la tabla.

Al centrar las preguntas en la atención en cuantificar los cambios, una estudiante expresó:



6) Los cambios que se van presentando es que empiezan en 10 y va disminuyendo hasta llegar a 0 y desde ahí empieza a aumentar de a 2 pero de forma negativa.

La pregunta generó en los estudiantes la posibilidad de enfocarse en la cuantificación del cambio y como se observó anteriormente, poder llevar a cabo descripciones cercanas a la variación del mismo de manera un poco más detallada que en preguntas anteriores.

De acuerdo con las respuestas sobre *S2T3P6a* y *S2T3P6b* es posible afirmar que algunos estudiantes comprendieron y expresaron en forma acertada la descripción y cuantificación de la forma como van cambiando los cocientes entre las diferencias a desarrollar en la tabla (AM1, AM2 y AM3), como parte fundamental del análisis de la razón de cambio de la función cuadrática que expresa el área de cultivo de acuerdo con las condiciones dadas en la situación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P7) Pregunta 7: De acuerdo con la *Gráfica 5* y la *Tabla 8*, Ana una estudiante afirma que: “Para valores de x mayores a 0 y menores que 5, y está disminuyendo y cada vez disminuye menos; mientras que para valores de x mayores a 6 y menores que 11, y está aumentando y cada vez aumenta más. Explica la validez de esta afirmación.

Tabla 93
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 7 (*S2T3P7*)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que la afirmación era cierta, manifestando que “cuando uno de los puntos de x o y alguno de los dos aumentan o tienen que disminuir”.	20	83,3%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	4	16,7%

De acuerdo con la *Tabla 93*, el 83,3% expresaron que la afirmación era cierta, manifestando que “cuando uno de los puntos de x o y alguno de los dos aumentan o tienen

que disminuir”, algo que contradice la forma como cambia y . Por otro lado, el 16,7% restante no respondieron la pregunta.

En relación con los tipos de respuesta sobre *S2T3P7* es posible afirmar que, por un lado, la mayoría de estudiantes muestra dificultades con la semántica de las descripciones y afirmaciones que se puedan realizar acerca de la covariación entre el ancho (x) y el área (y) de la superficie de cultivo, expresada en una tabla y una gráfica cartesiana. Por otro lado, también es posible afirmar que, aunque los estudiantes identifiquen aspectos relacionados con cómo y cuánto cambian las cantidades y la misma razón de cambio, se les dificulta percibir y describir con coherencia, consistencia y precisión la covariación en distintas representaciones de la situación, sean gráficas, tablas o expresiones en lenguaje natural, conforme avanza el nivel de complejidad para constatar AM1, AM2 y AM3 de razonamiento covariacional como las registradas hasta el momento en el *Nivel General* de modelación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P8) Pregunta 8: Utilizando la información anterior, completa la *Tabla 9* en la cual se relacionan los cambios en los cocientes (razón de cambio) a medida que x varía uniformemente en una unidad:

Tabla 9

Tabla de relación entre valores de x y los cambios del cociente entre diferencias de la curva.

x	Cambios en el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	10
2	8

3	6
4	
5	2
6	
7	- 2
8	
9	
10	
11	

Tabla 94
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completaron en forma correcta todos los valores faltantes correspondientes al cambio que se va presentando en los cocientes indicados en la tabla 9.	21	87,5%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	3	12,5%

De acuerdo con la *Tabla 94*, el 87,5% completaron en forma correcta todos los valores faltantes correspondientes al cambio que se va presentando en los cocientes indicados en la *Tabla 9*. Por otro lado, el 12,5% no respondieron la pregunta.

En relación con las respuestas sobre *S2T3P8* se corrobora que la mayoría de estudiantes identifican aspectos relacionados a *cuánto cambia* la razón de cambio (AM1, AM2 y AM3), considerando cambios uniformes del ancho (x), y posteriormente la constante de cambio para el caso propuesto a partir de los datos en la tabla. Sin embargo, los resultados obtenidos pueden estar asociados a la forma como se presentó la información en la tabla, a este respecto queda la pregunta de si se hubiera obtenido el mismo resultado en otro registro de representación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P9) Pregunta 9: De acuerdo con la *Tabla 9*:
(P9a) Pregunta 9a: Emplea las cantidades relacionadas y elabora una gráfica en un plano cartesiano.

Tabla 95
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 9a (S2T3P9a)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que representaron todos los puntos de acuerdo con las cantidades indicadas que correspondían a las coordenadas. Una estudiante además de los puntos trazó una línea a mano alzada que unía los puntos.	6	25%
R2	Estudiantes que representaron algunos puntos de acuerdo con las cantidades indicadas que correspondían a las coordenadas, sin embargo, otros puntos no correspondían a las coordenadas indicadas.	9	37,5%
R3	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	9	37,5%

(P9b) Pregunta 9b: Explica la forma de la gráfica resultante.

Tabla 96
Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 9b (S2T3P9b)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que “tiene forma de línea recta descendente”.	3	12,5%
R2	Estudiantes que escribieron que “tiene forma de línea” o “forma lineal”.	12	50%
R3	Estudiantes que escribieron una respuesta que presentaba inconsistencias respecto a la pregunta y estudiantes que no contestaron la pregunta.	9	37,5%

De acuerdo con la *Tabla 95*, el 25% de los estudiantes representaron todos los puntos de acuerdo con las cantidades indicadas que correspondían a las coordenadas. El 37,5% representaron la mayoría de puntos posibles y el restante 37,5% no respondieron la pregunta.

En relación con la *Tabla 96*, respecto a la gráfica obtenida, el 12,5% escribieron que “tiene forma de línea recta descendente”. El 50% escribieron que tiene forma de recta o forma lineal y el restante 37,5% no respondieron la pregunta.

Ante las preguntas, una estudiante respondió de la siguiente manera:

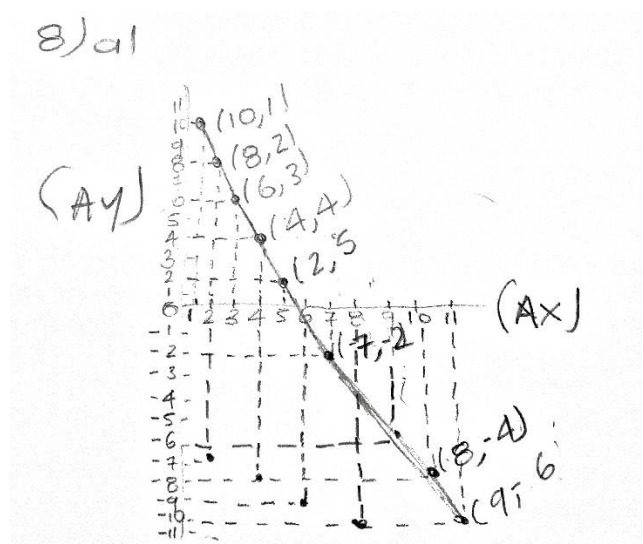


Ilustración 57. S2T3P9aR1

Aunque se presenten errores en la ubicación de algunos puntos de acuerdo con sus coordenadas, se aprecia la representación de la razón de cambio registrada gráficamente y sus argumentos:

b) tiene forma de línea recta descendente.

Ilustración 58. S2T3P9bR1

De acuerdo con las respuestas sobre *S2T3P9a* y *S2T3P9b*, en el *Nivel General* del proceso de modelación es posible asegurar que, a pesar de las dificultades evidenciadas en algunos casos para representar puntos en el plano cartesiano a partir de sus coordenadas, la mayoría de estudiantes pudo identificar alguna relación gráfica entre los puntos representados, esto es, describir una forma lineal o línea recta que se puede visualizar, descrita en algunos casos como una línea recta descendente, dando cuenta de AM1, AM2 y AM3, además, favoreciendo la aproximación a una de las propiedades fundamentales de la función cuadrática: su derivada corresponde a una función polinómica de primer grado – función lineal.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P10) Pregunta 10: De acuerdo con la gráfica que dibujaste, describe cómo son los cambios de los cambios, a medida que x varía uniformemente.

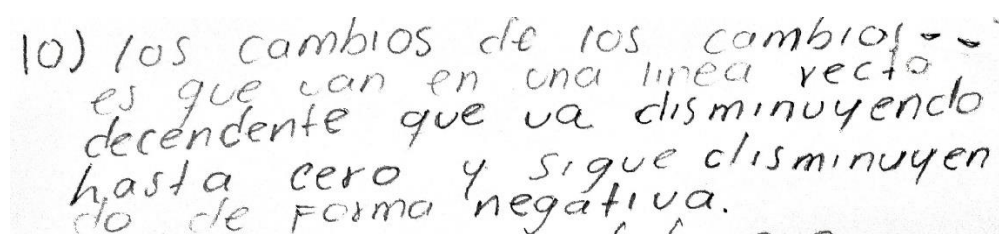
Tabla 97

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 7 (S2T3P10)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escribieron que “los cambios de los cambios es que van en una línea recta descendente que va disminuyendo hasta cero y sigue disminuyendo de forma negativa”.	2	8,3%
R2	Estudiantes que escribieron que “mientras aumenta de 1 a 5 disminuye el cociente de dos en dos y cuando x es de 7 a 11 el cociente pasa a ser números negativos, pero aumentando los valores de dos en dos.	1	4,2%
R3	Estudiantes que expresaron que la gráfica lineal va disminuyendo. Una estudiante expresó que “va disminuyendo de forma lineal”.	11	45,8%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	10	41,7%

De acuerdo con los tipos de respuesta sobre *S2T3P10*, el 8,3% de los estudiantes escribieron que “los cambios de los cambios es que van en una línea recta descendente que va disminuyendo hasta cero y sigue disminuyendo de forma negativa”. El 4,2% escribieron que “mientras aumenta de 1 a 5 disminuye el cociente de dos en dos y cuando x es de 7 a 11 el cociente pasa a ser números negativos, pero aumentando los valores de dos en dos”. Un 45,8% expresaron que la gráfica lineal va disminuyendo y el 41,7% restante no respondieron la pregunta.

En relación con la pregunta, una estudiante de respuesta *R1* realizó una descripción del cambio de los cambios:



10) los cambios de los cambios es que van en una línea recta descendente que va disminuyendo hasta cero y sigue disminuyendo de forma negativa.

Ilustración 59. *S2T3P10R1*

Tal descripción permite inferir una comprensión de la linealidad de los cambios de una función cuadrática. De acuerdo con la *Tabla 97* es posible afirmar que algunos estudiantes logran referir y asociar la representación gráfica realizada por ellos en *S2T3P9a* con las características fundamentales de la razón de cambio de una función cuadrática, como muestra de AM1, AM2 y AM3, e incluso con ciertos rasgos de AM4. Estas descripciones están asociadas a la presencia y desarrollo del razonamiento covariacional que se manifiesta al analizar el comportamiento de las cantidades respectivas de la situación. Cerca de la mitad de los estudiantes percibe la linealidad del cambio, pero no explicita su relación con los cambios, por otra parte, un porcentaje similar de estudiantes da

muestra de las dificultades y poca comprensión de esta propiedad en las funciones cuadráticas.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P11) Pregunta 11: De acuerdo con la graficación de variación de la razón de cambio a medida que el ancho variaba uniformemente, Explica cómo varía la razón de cambio de una función cuadrática.

Tabla 98

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 3 y pregunta 11 (S2T3P11)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que “... en una función cuadrática, cuando x (ancho) varía uniformemente, forma una línea recta”.	1	4,2%
R2	Estudiantes que escribieron que “va a variar de forma lineal”.	11	45,8%
R3	Estudiantes que escribieron que “... que a medida que va disminuyendo da forma de una línea recta”.	2	8,3%
R4	Estudiantes que no respondieron la pregunta.	10	41,7%

De acuerdo con la *Tabla 98*, el 50% expresaron una variación de tipo lineal en la razón de cambio de una función cuadrática. De estos, el 4,2% expresaron que “... en una función cuadrática, cuando x (ancho) varía uniformemente, forma una línea recta”, mientras que el 45,8% expresaron que varía en forma lineal. El 8,3% escribieron que “a medida que va disminuyendo da forma de una línea recta” y el 41,7% restante no respondieron la pregunta.

El estudiante de respuesta *R1* realizó una descripción de los cambios de la siguiente manera:

11. P/V: Cambios tiene un numero centro (medio) que en este caso es 0, el ancho aumenta de uno en uno y cambio despues que $x(\text{ancho})$ vale 7, 8, 9, 10 o 11, pasa a negativo y cuando $x(\text{ancho})$ vale 5, 4, 3, 2 o 1 son positivos. El punto medio es $x(\text{ancho}) \text{ val} = 0$ que es el cambio centro que es "0". En la función cuadrática, cuando $x(\text{ancho})$ varia uniformemente, forma una linea recta.

Ilustración 60. S2T3P11R1

La respuesta anterior evidencia la comprensión de aspectos y características claves de la variación de la función cuadrática y es una muestra de una descripción del cambio de los cambios presentes en la situación. De acuerdo con los tipos de respuesta sobre S2T3P11 es posible afirmar que aproximadamente la mitad de los estudiantes evidencia algunos aspectos de la generalización de la variación lineal de la razón de cambio de una función cuadrática (AM1, AM2, AM3 y AM4) como una de las propiedades de todas las funciones cuadráticas. Por otra parte, la mitad del grupo de estudiantes no alcanza a desarrollar este nivel de comprensión en consideraciones de la caracterización de las funciones de este tipo.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

Respecto a la tarea 3 de la segunda situación, de acuerdo con la *Matematización Vertical – Nivel General*, al estudiar los registros tabular, gráfico y notacional, algunos estudiantes pudieron argumentar sobre relaciones funcionales entre las cantidades presentes, identificando las variables dependientes e independientes. Las preguntas sobre la covariación iban presentando mayor complejidad conforme avanzaban las preguntas, por tanto, las dificultades para describir *cómo cambia* y *cuánto cambia* fueron más notables en las últimas preguntas, posiblemente al emplearse gráficas, tablas y modelos, dificultando el estudio de la variación de la situación estudiada, porque debían emplear otros modelos

como el caso del cociente entre los cambios en las variables dependiente e independiente para completar tablas y justificar su respuesta.

Como parte de AM1, AM2, AM3 y AM4, aproximadamente la mitad de los estudiantes alcanzaron a coordinar los cambios de la razón de cambio en relación con los cambios uniformes de la variable independiente, apoyados en los distintos registros de representación, sin embargo, en todas las formas en que se solicitó argumentación de la coordinación de los cambios de las cantidades fueron muchas las dificultades mostradas por parte de la mayoría de estudiantes, incluso algunos mostraron, como en casos anteriores, comportamientos *pseudo – analíticos*, lo que permitió registrar con dificultad AM1, AM2, AM3 y algunas AM4 y en relación con estos, N1, N2 y N3 de razonamiento covariacional. En el caso de AM4, solo algunos estudiantes expresaron en sus respuestas este tipo de acciones, sin embargo no se registraron la mayoría de acciones correspondientes a N4 para determinar a algún estudiante en este nivel.

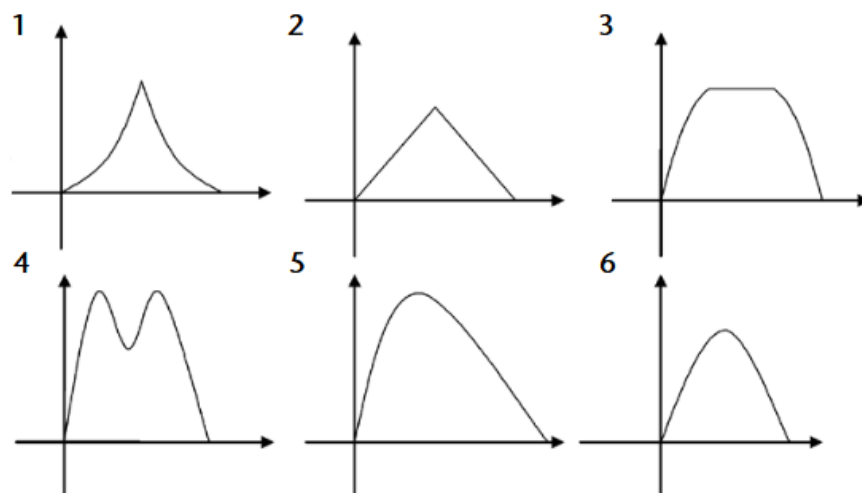
(T4) Tarea 4: Analizando gráficos de funciones

Esta tarea fue realizada por 23 de los 28 estudiantes.

Instrucción:

De acuerdo con lo trabajado en las tareas 1, 2 y 3, desarrolla las preguntas propuestas a partir del siguiente grupo de gráficas de seis casos de funciones.

Gráfica 6. Algunos casos de funciones.



(P1) Pregunta 1: Explica para cada caso si corresponde o no a la representación de la función cuadrática en relación a la variación de la medida del área de la superficie de un rectángulo en función de la variación de la medida de longitud de su base, cumpliendo las condiciones planteadas en la situación 2.

Tabla 99

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 1 (S2T4P1)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que la gráfica 6 era la que correspondía a una función cuadrática. Algunas de las descripciones fueron que “aumenta lo mismo que disminuye”, “cumple con la variación de las medidas y longitudes”, “tiene la curva exacta a las dimensiones de la planeación del cultivo”, “tiene la variación del área de la superficie correspondiente a la longitud de su base”. De las otras gráficas (1 a 5) expresaron que no correspondían a la función cuadrática.	7	30,4%
R2	Estudiantes que expresaron que las gráficas 5 y 6 eran las que correspondían a una función cuadrática. De la gráfica 5 hay descripciones como que “es similar a la de la situación dos, pero aumenta más y disminuye más”, “aumenta muy poco y disminuye de gran manera”, “aumenta un poquito recta y luego disminuye rectamente”. De la gráfica 6 hay descripciones como “coinciden mucho en las medidas a la función de la variación de la medida de longitud de su base”, “aumenta demasiado y llega hasta un punto máximo”. De las otras gráficas expresaron que no correspondía a una función cuadrática.	8	34,8%

R3	Estudiantes que describieron las seis gráficas pero no indicaron si había alguna que correspondía o no a una función cuadrática.	8	34,8%
----	--	---	-------

De acuerdo con la *Tabla 99*, el 30,4% expresaron que la gráfica 6 era la que correspondía a una función cuadrática, manifestando diferentes argumentos al respecto. El 34,8% expresaron que las gráficas 5 y 6 eran las que correspondían a una función cuadrática, mientras que el restante 34,8% no indicaron de manera específica cual gráfica era la que correspondía a una función cuadrática.

En relación con las respuestas sobre *S2T4P1* aproximadamente la tercera parte de los estudiantes identifica en representaciones gráficas las características fundamentales de las funciones cuadráticas, mientras que a la otra tercera parte del grupo se le dificulta identificar la simetría característica de la parábola, asociada a la forma como cambian las cantidades relacionadas. Otro importante grupo de estudiantes evidenció problemas para identificar de manera apropiada características básicas de la función cuadrática. Lo anterior da cuenta de las dificultades para la aproximación al *Nivel Formal* de modelación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P2) Pregunta 2: Compara las gráficas de los casos 1 y 5 y describe cómo cambian los valores de y a medida que cambian los valores de x en cada una, antes y después del punto máximo.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que describieron que en el caso 1 al principio aumenta poco pero después aumenta más y después disminuye demasiado al comienzo y a lo último merma poco,	9	39,1%

	mientras que en el caso 5 al principio aumenta “harto” y después merma más parejo.		
R2	Estudiantes que describieron que el cambio de los valores de y en la figura 1 aumenta mucho y después da un “bajón” igual repentinamente y en el caso de la figura 5 aumenta mucho y muy rápido y en la curva de la bajada disminuye más parejo.	1	4,3%
R3	Estudiantes que describieron que en el caso de la figura 1 aumenta hasta cierto punto y de ahí disminuye y en el caso de la figura 5 aumenta muy poco y de ahí disminuye en gran cantidad.	1	4,3%
R4	Estudiantes que describieron que en la figura 1 se puede mirar que al principio hay un aumento despacio hasta un punto y desde allí hay un aumento continuo hasta el punto máximo y en la figura 5 empieza un aumento pequeño y después un aumento continuo hasta el punto máximo y desde allí se ve una disminución del punto máximo hasta el final de la curva.	1	4,3%
R5	Estudiantes que hicieron la comparación y descripciones de forma parcial o incompleta y estudiantes que presentaron incoherencias en sus descripciones y no eran claras al momento de llevar a cabo la comparación.	11	48%

Tabla 100

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 2 (S2T4P2)

De acuerdo con la *Tabla 100*, el 39,1% describieron que en el caso 1 al principio aumenta poco pero después aumenta más y después disminuye demasiado al comienzo y a lo último merma poco, mientras que en el caso 5 al principio aumenta “harto” y después merma más parejo, mientras que el 4,3% describieron que el cambio de los valores de y en la figura 1 aumenta mucho y después da un “bajón” igual repentinamente y en el caso de la figura 5 aumenta mucho y muy rápido y en la curva de la bajada disminuye más parejo. Un 4,3% describieron que en el caso de la figura 1 aumenta hasta cierto punto y de ahí disminuye y en el caso de la figura 5 aumenta muy poco y de ahí disminuye en gran cantidad y otro 4,3% describieron que en la figura 1 se puede mirar que al principio hay un

aumento despacio hasta un punto y desde allí hay un aumento continuo hasta el punto máximo y en la figura 5 empieza un aumento pequeño y después un aumento continuo hasta el punto máximo y desde allí se ve una disminución del punto máximo hasta el final de la curva. El restante 48% hicieron la comparación y descripciones de forma parcial o incompleta y estudiantes que presentaron incoherencias en sus descripciones y no eran claras al momento de llevar a cabo la comparación.

En relación con los tipos de respuesta sobre *S2T4P2*, es posible asegurar que menos de la mitad de los estudiantes describe de manera aceptable la covariación que van presentando las cantidades en gráficas con distintas características –*cómo cambia*–, dando continuidad al porcentaje observado en *S2T4P1* acerca del acierto en las descripciones de los cambios de funciones cuadráticas y no cuadráticas (AM1, AM2 y AM3). Por otro lado, persisten las dificultades para avanzar al *Nivel Formal* de modelación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P3) Pregunta 3: Carlos, un estudiante de un grado superior, afirma que en el caso 2: “Para valores de x mayores a 0 y antes del punto máximo, y está disminuyendo y cada vez disminuye menos; mientras que para valores de x posteriores al punto máximo y hasta el punto de intersección con el eje x , y está aumentando y cada vez aumenta más”. Explica la validez de esta afirmación.

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que expresaron que la afirmación no corresponde o está mala ya que “...aumenta y merma parejo”.	7	30,4%

R2	Estudiantes que expresaron que la afirmación es falsa porque los valores antes del punto máximo aumentan y después del punto máximo disminuyen.	3	13%
R3	Estudiantes que expresaron que no es válida porque “eso no me parece que no da y está mala” o “no concuerda con la gráfica”.	8	34,9%
R4	Estudiantes que expresaron que la afirmación si era válida.	5	21,7%

Tabla 101

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 3 (S2T4P3)

De acuerdo con la *Tabla 101*, el 30,4% de los estudiantes expresaron que la afirmación no corresponde o está mala ya que “...aumenta y merma parejo”. El 13% expresaron que la afirmación es falsa porque los valores antes del punto máximo aumentan y después del punto máximo disminuyen, no especificaron más detalles, mientras que el 34,9% expresaron que no es válida porque “eso no me parece que no da y está mala” o “no concuerda con la gráfica”. Por otra parte, el 21,7% manifestaron que la expresión sí era válida.

En relación con los tipos de respuesta sobre *S2T4P3* es posible aseverar que se evidencia continuidad en el porcentaje de estudiantes que describieron el comportamiento de los cambios en las gráficas (AM1, AM2 y AM3), incluso varios son consistentes en sus respuestas en *S2T4P1* y *S2T4P2*, manifestando la comprensión de estas características de los cambios en una función cuadrática y otros tipos de funciones, en el *Nivel General* de modelación.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

(P4) Pregunta 4: Selecciona uno de los casos de las gráficas y escribe una situación para la cual esa sea una representación posible.

Tabla 102

Tipos de respuesta a la situación 2, tarea 4 y pregunta 4 (S2T4P4)

Tipos de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que seleccionaron una gráfica y plantearon una situación que podía ser representada con la gráfica seleccionada, pero la descripción de la situación carece de detalles claves que explican los cambios indicados en la gráfica.	4	17,4%
R2	Estudiantes que seleccionaron una gráfica y plantearon una situación en la cual se identificaban cambios, pero la relación de los cambios especificados con la gráfica seleccionada no era coherente.	12	52,2%
R3	Estudiantes que no seleccionaron gráficas y/o describieron situaciones que no evidenciaban claridad respecto a los posibles cambios. Algunos estudiantes no respondieron la pregunta.	7	30,4%

De acuerdo con la *Tabla 102*, el 17,4% de los estudiantes seleccionaron una de las gráficas y plantearon una situación, sin embargo, en la descripción faltó especificar detalles fundamentales correspondientes a la descripción de la variación, mientras que el 52,2% seleccionaron una gráfica y plantearon una situación, pero la relación entre estas no era clara y evidenciaba incoherencia entre ambas. Por último, el 30,4% de los estudiantes se les dificultó seleccionar una de las gráficas y llevar a cabo el planteamiento de una situación acorde a la gráfica y que evidenciara cambios en su desarrollo.

En relación con las respuestas dadas para *S2T4P4* por parte de los estudiantes, es posible afirmar que los estudiantes continúan con la dificultad para llevar a cabo procesos de generalización de los modelos gráficos trabajados en un *Nivel Formal*, por otro lado, se mantiene la continuidad respecto a la disminución en la comprensión y apropiación de las características de la covariación cuando se presentan procesos más complejos, que implican

proponer o identificar diversas situaciones con características similares y la puesta en práctica de modelos y acciones ya trabajadas en nuevos contextos.

La plenaria de esta tarea no se pudo llevar a cabo por compromisos institucionales de los estudiantes del grupo.

Análisis de la segunda situación

Como conclusión de la implementación de la segunda situación y basándose en la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula* (Tabla 5), en la tarea 1 se trabajó la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* y *Matematización Vertical – Nivel Referencial* de modelación. De acuerdo con esto, se comprobó mediante distintas preguntas, representaciones, afirmaciones y expresiones planteadas, que la tarea propició que los estudiantes exploraran un contexto físico como un terreno de cultivo en el cual se empleaban propiedades geométricas, a la vez que se puso en práctica diversos conocimientos previos del estudiante que posibilitaban analizar aspectos característicos de la situación como cantidades presentes, cambios y relaciones entre estos.

Sin embargo, y teniendo en cuenta el uso del programa Geogebra, los porcentajes de acierto y comprensión de las preguntas variaron de acuerdo con el tipo de pregunta, por ejemplo, en las preguntas donde se proponía identificar patrones, cantidades, cambios (preguntas como *S2T1P1*, *S2T1P3*, *S2T1P4a*, *S2T1P5c*), se observó que aproximadamente la mitad de los estudiantes tuvieron facilidad para dar cuenta y responder las preguntas de manera correcta, no así en el caso de las preguntas en las cuales se pedía argumentar algunas afirmaciones sobre modelos de la situación (preguntas como *S2T1P2a*, *S2T1P2b*, *S2T1P4b*, *S2T1P5b*, *S2T1P6a*, *S2T1P6b*, *S2T1P7*, *S2T1P8*, *S2T1P9a*, *S2T19b*, *S2T1P12a*), ya que en estos casos menos de la mitad de los estudiantes realizó una aproximación

satisfactoria a elementos de la situación, al igual que en preguntas donde se solicitaba trabajar con modelos gráficos o notacionales – *modelos de* – o incluso proponer algunos para verificar o refutar afirmaciones, una característica propia del *Nivel referencial* (preguntas como *S2T1P5a*, *S2T1P10a*, *S2T1P10b*, *S2T1P10c*), de lo que se deduce que la mayoría de estudiantes evidenció problemas en la comprensión y en las respuestas dadas, probablemente por las formas geométricas y sus propiedades, tipos de medidas y relaciones presentes en el contexto de la situación del proyecto de cultivo de la situación, además, por la posibilidad de observación y trabajo con infinitos valores de las cantidades implicadas, dado el apoyo con Geogebra, y los cambios en los valores de las medidas que se pueden visualizar en el programa. De acuerdo con los resultados, en esta situación las dificultades en estos niveles de modelación fueron mayores comparados con la primera situación y esto se constituyó en un virtual y no menor obstáculo para el avance hacia los siguientes niveles de modelación.

Respecto al razonamiento covariacional en la tarea 1, se esperaba que los estudiantes llevaran a cabo la coordinación de los cambios de los valores de una variable con los cambios de otra y la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra, acciones mentales propias del N1 y N2 de Razonamiento covariacional, expresados en la *Rejilla de fundamentación y análisis de la propuesta de aula* (Tabla 5). De acuerdo con esto, se observó en respuestas a preguntas como *S2T1P2b*, *S2T1P4a*, *S2T1P4b*, *S2T1P6a*, *S2T1P6b*, *S2T1P7*, que la mayoría de los estudiantes evidenció poca claridad y acierto en las descripciones de los cambios de las cantidades indagadas, algo que había desarrollado con mayor eficacia en la primera situación, pero que en este caso no solo se debería a la dificultad en el contexto sino al no haberse hecho manifiestas por parte de la mayoría de estudiantes acciones mentales de este nivel (AM1).

Guardando relación con el coordinar los cambios en cantidades, se expresa la coordinación de la dirección del cambio y acciones mentales de este tipo (AM2). Para este tipo de acciones y guardando coherencia con las AM1 evidenciadas, en respuestas a preguntas como *S2T1P5a*, *S2T1P5b*, *S2T1P6a*, *S2T1P7*, *S2T1P9a*, *S2T1P9b*, se pudo observar que la mayoría de estudiantes tuvieron dificultad para hacer una representación gráfica acorde donde se pudiera evidenciar no solo los puntos indicados sino la comprensión de la continuidad y con esto la misma dirección del cambio, además, se presentó dificultad con la graficación, comprensión y argumentación de la curva suave y por último, dificultad para describir el cambio de una cantidad a medida que cambia otra en las gráficas propuestas; en algunos casos, ciertos estudiantes mostraron comportamientos *pseudo – analíticos* al manifestar una comprensión aparente de la dirección del cambio, pero poca o nula ampliación de su argumentación, lo que indica que las AM1 y AM2 no eran claras y no daba cuenta de la información requerida.

Las dificultades mostradas por los estudiantes en la coordinación de los cambios de dos cantidades y de la dirección del cambio antes descritas, se pueden asociar, por un lado, al poco trabajo con representaciones en el plano cartesiano en años escolares anteriores y, por otro, a la deficiencia en la identificación, representación y comprensión del conjunto de los *números reales*.

Respecto a la estructura de la tarea 2 de análisis de cambios de las cantidades de la situación en diferentes registros de representación, las preguntas propuestas cumplían con características de la *Matematización Vertical – Nivel Referencial y Nivel General de modelación*. De acuerdo con esto, se observó que, en relación a la mayoría de preguntas de la tarea y haciendo uso de las representaciones en Geogebra, menos de la mitad de los estudiantes expresaron respuestas y/o argumentaciones válidas al trabajar con modelos

gráficos, notacionales y tabulares de la situación –*modelos de*– para estudiar y comprender características básicas de las funciones cuadráticas, por ejemplo, las descripciones de los cambios de Δx y Δy , de manera individual y simultánea de acuerdo con su dependencia, la concavidad de la curva, el punto máximo con su respectivo significado en la situación, las relaciones entre Δx y Δy que determinan el punto máximo, los puntos de intersección de la curva con el plano, el dominio de la función, el trabajo o manipulación de la expresión algebraica o modelo para determinar múltiples valores de y , el cálculo de las diferencias de los cambios en x y en y a partir de registros tabulares, el comportamiento de los cambios antes y después del punto máximo, entre otras.

Los problemas reflejados en las respuestas en estas etapas del proceso de modelación, dan cuenta de algunos factores previos que posiblemente inciden en el avance del proceso. De lo anterior, es posible decir que las dificultades manifestadas por los estudiantes durante la experimentación, es decir, el poco o nulo trabajo previo con el plano cartesiano y tablas, repercutieron sobre el bajo nivel de avance de los estudiantes hacia la comprensión de las características mencionadas de las funciones cuadráticas, además de las problemáticas indicadas anteriormente acerca de la insuficiencia en el trabajo con el conjunto de *números reales* y la argumentación en las matemáticas escolares. A pesar de las notables dificultades, se destaca de manera positiva que el uso de Geogebra facilitó que los estudiantes trabajaran de manera interactiva y dinámica con representaciones y de esta manera pudieran acercarse un poco a identificar, analizar y discutir propiedades de las función en relación a la situación.

De acuerdo con lo anterior, en la tarea 2 menos de la mitad de los estudiantes alcanzó un *Nivel Referencial* de modelación, dadas las características de este nivel y las

dificultades mostradas, y una cantidad menor de estudiantes reflexionó satisfactoriamente sobre los procesos empleados, conceptos, estrategias y modelos, alcanzando un *Nivel General* de modelación.

Respecto al razonamiento covariacional en la tarea 2, de acuerdo con las respuestas para *S1T2P2a*, *S2T2P3a*, *S2T2P6b* y *S2T2P8c*, la mayoría de estudiantes mostraron dificultades notables en la forma como describían la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra, esto como consecuencia de las dificultades evidenciadas en la primera situación y en la tarea 1, dando cuenta de las dificultades en AM1, AM2 y AM3 al escribir, por ejemplo, coordenadas de ciertos puntos donde se relacionaban las cantidades, pero argumentando deficientemente las relaciones en los cambios de una cantidad a medida que cambiaba otra de la cual dependía y sin especificar los aumentos o disminuciones que se podían apreciar; en otros casos, esa misma carencia de argumentación no posibilitaba comprender que cuando los aumentos en y iban siendo cada vez menores a medida que cambiaba x , entonces se podía llegar a un punto máximo con un significado propio en la situación. Por último, la mayoría de estudiantes también mostró dificultades para explicar por qué los valores disminuían después del punto máximo a medida que seguía aumentando.

La misma situación se presentó en la coordinación de la cantidad del cambio, ya que la no comprensión de la dirección del cambio se erigió como una limitante a la hora de visualizar las regularidades en los valores de las cantidades, es decir, cuánto cambiaban las cantidades; solo en algunos de los casos en que las preguntas se apoyaban de un registro tabular era posible un mejor acercamiento a las regularidades y se lograba establecer algunos patrones, ejercitando esta acción mental (AM3).

De acuerdo con lo ya enunciado, solo en el caso de algunos estudiantes se evidenció AM1, AM2 y AM3, que daban cuenta de la coordinación de la dirección del cambio y de la cantidad del cambio (cómo cambia y cuánto cambia). También fue notable la repetición de comportamientos *pseudo – analíticos* en los que se repetía el siguiente patrón: el estudiante parece que identifica y comprende las regularidades, pero no tiene las herramientas para justificar y argumentarlas.

Respecto a la tarea 3, en la *Matematización Vertical – Nivel General y Nivel Formal* de modelación, los estudiantes emplearon distintos modelos gráficos, tabulares y notacionales que se iban presentando o desarrollando en la progresión de las preguntas con cada vez mayor nivel de complejidad. Los *modelos de* la situación contextualizada posibilitaron llevar a cabo distintos análisis y reflexiones a partir de las preguntas propuestas, los cuales se realizaron alrededor de los procesos empleados, conceptos, estrategias y modelos, centrando la atención en el análisis de la covariación, que será comentado a continuación.

Respecto al *Nivel Formal*, en las respuestas a S2T3P11, donde se hacía referencia a este nivel, la mayoría de estudiantes no respondieron con seguridad cómo varía la razón de cambio de una función cuadrática, por tanto, este nivel no se alcanzó por parte del grupo de estudiantes que desarrolló la propuesta de aula y esto como consecuencia de las dificultades en los avances en los niveles de modelación previos al *Nivel Formal*.

En los niveles de razonamiento covariacional esperados en el desarrollo de las cuestiones de la tarea 3, las acciones mentales manifestadas e identificadas en algunos de los estudiantes fueron principalmente del tipo AM1, AM2 y AM3, dificultad que es explicable si se tiene en cuenta los inconvenientes y resagos vistos en las tareas 1 y 2, lo que no es obstáculo así mismo para resaltar que muchos de los estudiantes que se enfrentaron a

las dificultades enunciadas lograron calcular las diferencias a partir de los valores en el eje de las abscisas y las diferencias de los valores en el eje de las ordenadas y relacionar los cambios para obtener y analizar características de la Razón de Cambio Promedio.

Por su parte, los estudiantes que alcanzaron a desarrollar AM4, no solo llegaron a la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con la cantidad de cambio en otra, sino que pudieron establecer relaciones entre los cambios que se iban presentando de manera simultánea entre las cantidades, a través de la razón de cambio promedio, de tal manera que algunos alcanzaron a determinar la razón de cambio a partir de un registro tabular (*S2T3P2*), sin embargo, al desarrollar las preguntas que profundizaban acerca de la comprensión del comportamiento de la razón de cambio promedio de una función cuadrática, las respuestas de estos –en general– no fueron claras, dado que al indagárseles sobre la coordinación de la razón de cambio con cambios uniformes en los valores de entrada, solo un estudiante expresó que esta relación variaba en forma lineal.

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta el Marco Conceptual del Razonamiento Covariacional, las dificultades previas respecto a: la coordinación de los cambios de una cantidad con los cambios de otra y la coordinación de la dirección del cambio de una variable respecto a los cambios de otra, ocasionaron que con dificultad se presentarán AM4 por parte de un estudiante. En este punto se reitera nuevamente que varios estudiantes reportaron comportamientos *pseudo – analíticos*, ya que en el desarrollo de algunas preguntas llegaron a hacer cálculos relacionados con la razón de cambio y en ocasiones parecía que llegaban a efectuar la coordinación entre la razón de cambio y los cambios uniformes en la variable de entrada, sin embargo, sus justificaciones en las últimas preguntas de la tarea dieron cuenta que no había claridad al respecto.

En relación con la tarea 4, en la *Matematización Vertical – Nivel General y Nivel Formal* de modelación, en las respuestas se evidenció que pocos estudiantes describieron con claridad las características de las gráficas correspondientes a funciones cuadráticas y las que representaban otro tipo de funciones, sin embargo sí consideraron el eje de simetría de la curva, analizaron la forma como los cambios en y se hacían menores antes del punto máximo a medida que los cambios en x aumentaban y que luego del punto máximo los cambios aumentaban en forma negativa; tuvieron en cuenta las relaciones entre las cantidades relacionadas, la constancia o la variación del cambio, entre otras, todo esto a partir de las gráficas e información propuestas.

Las deficiencias mostradas por casi todos los estudiantes en el *Nivel General* de modelación fueron causales para que el *Nivel Formal* no se demostrara en las respuestas y acciones realizadas por los estudiantes y de esta manera fuera posible poder llevar a cabo algunos planteamientos en relación a la función cuadrática, en situaciones en otros contextos pero que presentaran características similares y que facilitaran un posible estudio con los procedimientos empleados en la primera y segunda situación trabajadas.

Respecto al razonamiento covariacional, en la tarea 4 se esperaba que los estudiantes pudieran coordinar la razón de cambio promedio con incrementos uniformes en los valores de entrada, algo que ya habían trabajado en tareas anteriores en tablas y gráficas y que en esta tarea no se percibió de manera clara cuando los estudiantes llevaron a cabo las descripciones solicitadas en sus respuestas, por tal razón en esta tarea no se alcanzó a desarrollar AM4 que permitieran identificar a algunos estudiantes con un N4 de Razonamiento covariacional.

En cuanto a aspectos relacionados con los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y en general la perspectiva curricular, la

resolución de problemas, el análisis de patrones, el estudio de la variación y el cambio, el uso de contextos cotidianos, el proceso de modelación, el uso de distintos registros de representación, el estudio de la función como una relación de dependencia entre variables, fueron parámetros claves para el desarrollo y análisis de la propuesta. De acuerdo con esto, la posibilidad de que los estudiantes resolvieran la actividad en términos de una situación problema generó un escenario para que los estudiantes no solo se quedaran haciendo ejercicios de funciones cuadráticas, sino que pudieran poner en práctica varias habilidades y desarrollar procesos como identificar, comunicar, razonar, ejercitar, modelar y resolver en sí el problema; lo anterior se constituyó en una de las fortalezas de la estructura y trabajo de esta propuesta.

Además, fue evidente la ejercitación y constante análisis de patrones del cambio de las variables consideradas a partir de los distintos registros. A este respecto, debe decirse que la variedad de registros permitió que varios estudiantes, a pesar de ciertas deficiencias, pudieran avanzar a niveles considerables en el razonamiento covariacional, ya que no solo se quedaron en la etapa de identificar y formularse modelos mentales de los patrones de variación, sino que se progresó hacia el registro de esos modelos en distintos niveles de complejidad, válidos y coherentes con la situación de estudio, y que posteriormente fueron analizados a partir de diferentes cuestiones planteadas en cada tarea para así poder llegar a proponerse algunas nociones de su generalización a situaciones con características similares.

Con la segunda situación se pretendía posibilitar la profundización de los estudiantes al respecto del proceso de modelación de funciones cuadráticas en el contexto de un proyecto escolar con el apoyo de nociones geométricas, donde el estudio de las dimensiones de un área de cultivo y las condiciones asociadas fueran aspectos para realizar

el análisis de la variación y covariación presentes mientras se desarrollaba el trabajo con los modelos propuestos, desde algunos básicos hasta otros más complejos, para llegar a la comprensión de aspectos y propiedades básicas de la función cuadrática, la habilidad para generalizar estas propiedades y también para hacer uso o proponer nuevos espacios de aplicación (Generalización).

De acuerdo con lo anterior, en un primer lugar, se concluye que se dio cumplimiento de manera parcial a los propósitos de la tarea y que el trabajo de esta situación fue clave para profundizar en el análisis de la covariación, ya que no solo se consideraron de manera aislada los cambios en una variable, sino que las cuestiones expuestas traían consigo un análisis mayor de las relaciones que se iban presentando de manera simultánea entre los cambios de dos variables, lo que permitió a varios estudiantes la identificación, coordinación y descripción sobre cómo variaban los cambios, en mayor o menor medida, de acuerdo con condiciones propias del contexto, pero que permitían su registro en tablas y gráficos para así dar cuenta del comportamiento que tenían.

Los niveles de análisis y comprensión de la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea no fueron alcanzados de acuerdo con lo esperado, evidenciando múltiples factores que incidieron en esto, sin embargo, cabe destacar que se llevó a cabo un trabajo fuerte por parte de los estudiantes, lo cual posiblemente se constituya en un apoyo en estudios posteriores que aborden el análisis de situaciones relacionadas con funciones.

Capítulo IV. Conclusiones generales y reflexiones didácticas

En este capítulo se presentan las conclusiones considerando el objetivo general y los objetivos específicos, mediante la implementación de la propuesta de aula producto de la articulación entre los aportes teóricos identificados en las perspectivas curricular, didáctica y matemática, además, las reflexiones didácticas que se originan fruto de la práctica investigativa correspondiente a la interacción entre los saberes matemáticos, los resultados alcanzados por la comunidad de investigadores, el docente investigador y los estudiantes objeto investigación.

4.1. Conclusiones generales

En lo que respecta al objetivo específico: “identificación de aportes teóricos y metodológicos en la investigación en educación matemática, en torno a la modelación de fenómenos de variación, el estudio de la función como covariación, de acuerdo con la perspectiva curricular, didáctica y matemática” se puede establecer que:

- La riqueza metodológica expresada en las múltiples investigaciones de las tres perspectivas de referencia respecto al desarrollo del pensamiento variacional y el estudio de la variación y el cambio, vinculados con relaciones funcionales, muestran el panorama no solo de la profundidad y amplitud de estos objetos matemáticos asociados al pensamiento variacional, sino que también posibilitan el surgimiento de nuevas estrategias y metodologías que complementen y/o condensen diversos enfoques teóricos. De acuerdo con esto, la consideración de potenciar el pensamiento variacional a partir de actividades orientadas con este propósito no solo dinamizaron el estudio desarrollado por los estudiantes, sino

que permitieron acercarse a analizar la variación y el cambio de forma sistemática, además, impulsaron la comprensión de las propiedades de la función cuadrática como una dependencia entre variables, desarrollando diversos procesos congruentemente.

- Las investigaciones consideradas muestran que el estudio de la variación y el cambio en el enfoque covariacional visibiliza y facilita la puesta en práctica de diversas acciones y estrategias cognitivas por parte de los estudiantes, las cuales pueden llegar a ser registradas y catalogadas en un determinado marco conceptual con el fin de establecer avances en el estudio de las funciones. Acorde con nuestras búsquedas e intereses, el Marco Conceptual del Razonamiento Covariacional proporcionó categorías que orientaron la formulación de preguntas dirigidas a indagar y promover el pensamiento variacional, en el análisis de la covariación, para posteriormente caracterizar las respuestas, gestos, comportamientos y acciones expresadas por los estudiantes y de esta manera describir los avances o incluso las carencias o deficiencias vistas en el razonamiento covariacional.
- Las convergencias evidenciadas en los distintos referentes en el marco teórico como es el caso de objetos matemáticos como la función, referencias conceptuales, procesos como la modelación de relaciones funcionales, el desarrollo del pensamiento covariacional, el estudio de la variación y el cambio, el estudio de situaciones cotidianas y de la realidad que nos rodea, entre otras, posibilita que estos aspectos puedan ser considerados como potentes articuladores. Esta articulación es posible dado que sus características pueden relacionarse en torno al estudio de la función cuadrática a partir del enfoque

covariacional, considerando el proceso de modelación como un factor determinante para poder llegar a la construcción de la propuesta, además, constituir la rejilla de análisis que se empleó en la caracterización de las respuestas y el análisis final.

Al tratarse del objetivo específico relacionado con la “articulación de los aportes teóricos y metodológicos considerados a partir de las perspectivas curricular, didáctica y matemática”, se concluye que:

- En la propuesta de aula constituida y empleada para llevar a cabo el estudio con el grupo de estudiantes, los contextos planteados como el de un gimnasio y sus ingresos económicos, en la primera situación, y el contexto de un proyecto productivo que se desarrolla en la institución educativa donde se realizó la experimentación, en la segunda situación, respondían a situaciones cotidianas que a partir de las perspectivas consideradas eran propicias para favorecer un estudio conveniente de la variación y el cambio asociados a relaciones funcionales, en un enfoque covariacional.
- La estructura de las dos situaciones problema que componen la propuesta de aula, organizadas de tal manera que evidenciaran una articulación de los elementos claves definidos en los referentes teóricos a partir de las tres perspectivas consideradas en este trabajo, respecto al proceso de modelación y en el análisis de la covariación, permitió generar una nueva alternativa didáctica que podría ser, por un lado, empleada por los docentes de matemáticas en las aulas debido a su secuencialidad, y en tanto que representa una forma de abordar un objeto matemático complejo –la función cuadrática–; y el por otro, asumido en forma más accesible por los estudiantes que están en la etapa escolar. De

acuerdo con los antecedentes expuestos al inicio de esta investigación, en el sistema educativo colombiano, especialmente en la enseñanza escolar, no se registran avances articulados notables en la organización de estrategias o metodologías que favorezcan un estudio adecuado de las funciones y de la función cuadrática, en específico; por esta razón, teniendo en cuenta avances previos en la investigación, los cuales abordaron elementos teóricos y conceptuales pertinentes, se formuló la propuesta de aula, la cual se desarrolló como un recurso didáctico ajustado a los avances y necesidades en el estudio de la variación y el cambio para propiciar la consolidación de bases sólidas al respecto de las funciones cuadráticas y el estudio posterior del cálculo.

- La elaboración de la propuesta de aula y su aplicación con los estudiantes estuvo acorde con los principios en la EMR. Respecto al *principio de actividad*, el diseño y los recursos empleados para desarrollar la propuesta brindaban la posibilidad al estudiante de poder llevar a cabo razonamientos, interacciones y reconstrucciones de las matemáticas en la situación como parte del ejercicio de estudio de las situaciones propuestas ajustadas al *principio de realidad* y de acuerdo con los contextos, los cuales fueron planteados en relación con la modalidad de la institución educativa y el entorno social de los estudiantes. El *principio de nivel* se reflejó en los avances que iban presentando los estudiantes, a distintos ritmos de aprendizaje, sin embargo, fueron etapas sustanciales en la apropiación de los conocimientos observados en el contexto realista y orientados para lograr avances significativos de aproximaciones al trabajo en el nivel formal de las matemáticas, el cual, para esta propuesta, favorecía el *principio de entrelazamiento*, dada la posibilidad de emplear distintos tipos de conocimientos

como parte del pensamiento matemático, en términos de los lineamientos curriculares y estándares de competencias.

El *principio de interacción* se registró durante toda la implementación dada la posibilidad de intercambio que tenían los estudiantes durante el desarrollo de las tareas y plenarias, momentos en los cuales el intercambio de ideas permite que los estudiantes comprendan de mejor manera lo estudiado, además, este trabajo de los estudiantes siempre estuvo acompañado por el docente – investigador, dando cuenta del *principio orientador*, situación en la cual se establecieron pautas que fueran apoyo para promover el desarrollo del pensamiento variacional como parte de los propósitos de la investigación.

En concordancia con el objetivo específico relacionado con la “caracterización de aspectos del pensamiento variacional en estudiantes que desarrollan procesos de modelación de fenómenos que implican covariación a través de la función cuadrática”, se puede establecer que:

- El diseño de la propuesta de aula, ajustado a los aportes teóricos a partir de las perspectivas consideradas en el marco teórico, permitió no solo el trabajo activo de los estudiantes, al llevar a cabo procesos de modelación necesarios y análisis de la covariación presentes, sino que también facilitó la discriminación y caracterización de las respuestas suministradas por ellos en diferentes tipos según la situación, tarea y pregunta indicada, posibilitando identificar procesos, acciones mentales y comportamientos llevados a cabo, lo que permitió evidenciar la presencia de distintos niveles de razonamiento covariacional al modelar distintos procesos del fenómeno estudiado.
- De acuerdo con los niveles de modelación en la EMR considerados en la rejilla

de análisis se puede establecer que cuando los estudiantes estudiaron situaciones en contextos realistas cumplieron de manera válida respecto del *Nivel Situacional* de modelación al resolver preguntas que hacían énfasis en conocer las características del contexto de la situación. Posteriormente, las preguntas que promovían procesos de modelación en el *Nivel Referencial* fueron desarrolladas por la mayoría de estudiantes, mientras que las preguntas del *Nivel General* y del *Nivel Formal* fueron resueltas por pocos estudiantes debido a que la mayoría tenían un bagaje conceptual y técnico deficiente respecto de procedimientos aritméticos y algebraicos vistos en años escolares anteriores. Algunos conceptos y procedimientos básicos fueron abordados brevemente en los primeros niveles de modelación, sin embargo, el avance hacia la generalización y formalización en las últimas tareas implicaba procesos más complejos de análisis y comprensión del cambio, de la variación, de las variables, de las relaciones entre variables, de los distintos registros de representación y de todas aquellas propiedades de la función presentes en una situación problema que condujeran a identificar la similitud en estas características con otras posibles situaciones de aplicación de funciones cuadráticas, ello trajo consigo retos de alta complejidad durante el desarrollo de las tareas, lo que al final permitió establecer que la mayoría de estudiantes alcanzaron el Nivel Referencial según la EMR.

- De acuerdo con los niveles de razonamiento covariacional se pudo analizar la forma como el grupo de estudiantes llevó a cabo AM1 al coordinar simultáneamente los cambios en dos cantidades relacionadas en determinadas preguntas de las situaciones y de esta manera poder alcanzar un N1 de razonamiento covariacional. Además, la mayoría de estudiantes desarrollaron en

forma efectiva AM2 y expresaron la dirección del cambio en gráficas cartesianas, lo que representa así mismo un N2 de razonamiento covariacional, mientras que aproximadamente la mitad de los estudiantes desarrollaron AM3 al cuantificar los cambios en las cantidades que covarían. Por último, algunos estudiantes llevaron a cabo AM4, dado que, al tener que coordinar la razón de cambio con los cambios uniformes en la variable independiente, la mayoría con dificultad llegó a identificar la razón de cambio promedio y hacer algunos cálculos en registros tabulares, sin embargo, al momento de cuestionárseles en algunas preguntas sobre el significado de la razón de cambio respecto a la función cuadrática, la mayoría evidenció dificultades para explicar de manera clara el porqué de la variación lineal de la razón de cambio de una función cuadrática, lo que posibilitaba registrar un N4 de razonamiento covariacional. Posteriormente y, guardando coherencia con los comportamientos identificados hasta el momento, no se evidenció en las respuestas de los estudiantes AM5 con claridad, lo que da cuenta que para desarrollar estas acciones y alcanzar un N5 de razonamiento covariacional posiblemente era necesario mayor tiempo de trabajo y un complemento en las actividades que movilizara de forma notable los comportamientos asociados al nivel.

- Promover en los estudiantes el aprendizaje de la función cuadrática como una relación de dependencia en la cual se aborda el estudio de la covariación de las cantidades vinculadas en las relaciones funcionales propias de una situación, posibilitó una forma activa de analizar las diferentes condiciones de las situaciones 1 y 2 propuestas, las cuales permitían modelarse a través de la función cuadrática y de esta manera comprender distintas propiedades de sus

registros semióticos de representación. En este sentido, respecto a la expresión analítica se hizo énfasis en reconocer y representar las variables dependientes e independientes, parámetros y modelar expresiones algebraicas de la situación con distintos niveles de complejidad. Respecto a la representación cartesiana, la propuesta de aula facilitó la construcción y análisis de gráficas de relaciones funcionales de acuerdo con condiciones particulares en las tareas y posteriormente desarrollar análisis lógicos y coherentes de las cantidades relacionadas, los puntos que cumplían condiciones dadas y la identificación y análisis de la covariación, la concavidad, el cambio, la simetría, los puntos de inflexión y los puntos de corte como propiedades de la parábola; respecto a las representaciones tabulares, las preguntas desarrolladas posibilitaron la representación y estudio de los cambios a partir de otro punto de vista, la covariación y las relaciones entre cantidades dependientes e independientes. Los aspectos desarrollados y analizados por los estudiantes constituyen propiedades fundamentales de la función cuadrática, los cuales habían sido esquematizados en la figura 13.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo que plantea el objetivo general relacionado con “Identificar y caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional que se movilizan a través de la implementación de una propuesta de aula que involucra la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática como covariación, en estudiantes de grado noveno de la educación básica secundaria”, se concluye que la estructura de las situaciones que componían la propuesta de aula facilitaron, de acuerdo con el marco conceptual del razonamiento covariacional y la modelación en la EMR, la manifestación escrita y verbal de acciones mentales producto de analizar, describir y representar las condiciones presentes

en las situaciones planteadas, las cuales se derivaron en imágenes y modelos mentales de las distintas formas de relación detalladas en los registros de representación.

Por la estructura y propósito de la propuesta didáctica, los comportamientos, los procesos de modelación y las acciones que se registraron como parte de la actividad del pensamiento variacional en los estudiantes, se derivaron del análisis de la covariación característica de las situaciones planteadas. Respecto a los procesos de modelación, las imágenes y modelos mentales correspondían a la forma como los estudiantes captaron los cambios que iban presentando las representaciones de las cantidades en las gráficas y en las tablas, expresados por ejemplo palabras y construcciones como “aumenta”, “disminuye”, “aumenta y luego disminuye”, “aumenta de 1 en 1”, entre otras, que se registraron en forma de modelos con símbolos matemáticos, notación algebraica o afirmaciones escritas en lenguaje vernáculo.

Respecto al análisis de la covariación a partir del razonamiento covariacional, en los estudiantes se evidenció comportamientos como la designación de los ejes en gráficas cartesianas para representar las cantidades que covarían; la coordinación de los cambios de las cantidades de manera individual y simultánea; la coordinación de la dirección del cambio, al construir líneas crecientes y decrecientes y verbalizar con conciencia la dirección; la coordinación de la cantidad del cambio de las cantidades que covarían, al representar y verbalizar los cambios de los valores de entrada y los de salida y la coordinación de la razón de cambio, al construir rectas y líneas suaves y verbalizar con conciencia la razón de cambio considerando los cambios uniformes en el valor de entrada. De acuerdo con los aspectos descritos se concluye que se logra contestar la pregunta de investigación.

En el desarrollo personal como investigador se puede concluir que se amplió y

profundizó la capacidad como docente que inicialmente estaba enfocado por una actividad pedagógica que carecía de múltiples recursos y estrategias para llevar a cabo de manera más eficiente procesos de enseñanza. Al respecto, mediante el trabajo de investigación se exploraron varias formas de documentación que comprendían la indagación, búsqueda virtual en repositorios, bibliotecas virtuales, entre otros, facilitando la conformación de una bibliografía acorde a los problemas y propósitos de la investigación.

Además, se pudo averiguar y consolidar formas de analizar y desarrollar estrategias para la observación de procesos, estrategias de organización y análisis de los datos obtenidos en la implementación de la propuesta de aula y ejecutar estrategias para inferir a partir de los datos las conclusiones que se derivan de una investigación.

4.2. Algunas reflexiones didácticas

A continuación, se presentan algunas reflexiones derivadas de la investigación a maestros en ejercicio:

- El estudio de la función cuadrática como una relación de dependencia entre variables constituye un enfoque potente en la educación básica escolar para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones. De la indagación, la concatenación de referentes y propuestas teóricas, la elaboración e implementación de la propuesta de aula y el análisis de resultados se pudo concluir que la enseñanza de la función como covariación posibilita el aprendizaje de una manera activa e integral, al considerar no solo el énfasis en la mecanización de expresiones algebraicas sino la identificación de patrones y regularidades, el análisis de cómo cambia una variable o dos de manera simultánea, el uso de diferentes registros de representación de una situación problema para el estudio de la

covariación de dos cantidades que puede ser expresada en términos de relaciones funcionales, la construcción/modelación de expresiones analíticas como una representación matemática de ciertos aspectos de una situación contextualizada.

- El diseño de la propuesta de aula en este trabajo puede ser una guía para el desarrollo de otras investigaciones, al considerar las dos situaciones propuestas, las tareas y la organización de las preguntas correspondientes al estudio de las funciones a partir del enfoque covariacional, analizando sus fortalezas respecto de otras perspectivas teóricas o, por lo contrario, las dificultades que puedan presentar al variar condiciones. Además, el diseño metodológico de esta propuesta en la que convergen la modelación en la EMR y el razonamiento covariacional, permite elaborar otros estudios acerca de la pertinencia o no de su articulación para la enseñanza de otro objeto matemático.
- El análisis y comprensión de las propiedades y aspectos que comprenden un objeto matemático, visto a través de diferentes perspectivas teóricas, enriquece el proceso de diseño e implementación de estrategias didácticas en el aula. La posibilidad de haber analizado lo correspondiente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones a partir de enfoques variados no solo enriqueció y fundamentó esta propuesta, sino que nos permite llegar a la reflexión de que la enseñanza de un objeto matemático no se debe limitar a una sola postura o documento de referencia para luego ser presentado en la escuela, sino que el docente debe inquirir en la literatura necesaria que presente, amplíe y se fundamente en relación a las matemáticas susceptibles de ser enseñadas.

- El proceso de modelación para el estudio de situaciones problema en diferentes contextos para los cuales se pueden asociar algunos objetos matemáticos, sobrepasa la mera ejercitación algorítmica y moviliza el aprendizaje de los estudiantes al considerarse diversos factores durante el mismo. La enseñanza de las matemáticas debe superar las barreras que por mucho tiempo se han impuesto, consciente o inconscientemente, en las clases a nivel escolar y de acuerdo con esto, el proceso de modelación desarrollado de manera acorde a una perspectiva teórica se constituye en un aspecto lo suficientemente amplio para abordar y razonar en torno a las propiedades y características de las matemáticas presentes en una situación.
- Es importante que en el ejercicio de su actividad pedagógica los profesores lleven a cabo procesos de sistematización de los registros de los estudiantes al momento de desarrollar actividades, proyectos y otras estrategias de enseñanza. Los registros de las actividades permiten evidenciar los alcances de los estudiantes en los procesos de aprendizaje que estén desarrollando y en relación con el seguimiento que se les lleve, poder tomar acciones pedagógicas que susciten mejor comprensión y apropiación de los saberes estudiados.
- El desarrollo del pensamiento variacional como uno de los rasgos del pensamiento matemático, debe potenciarse desde los primeros años de la educación escolar de una manera razonable y dinámica. Esto es, que a temprana edad los estudiantes puedan desarrollar actividades, por ejemplo, que les permita identificar patrones, analizar regularidades en situaciones en contexto, expresar de manera verbal y escrita los comportamientos que observa, analizar el cambio

en diferentes registros de representación, diferenciar qué cambia y qué se conserva, interactuar con recursos TIC que permitan captar información que difícilmente se perciba en un libro, entre otros.

El Marco Conceptual del Razonamiento Covariacional contiene categorías de análisis con diferentes potencialidades para la investigación, por ejemplo algunas de ellas pueden trabajarse y verse reflejadas a partir del estudio de situaciones problema en distintos niveles escolares previos al grado noveno de la EBS en Colombia donde comúnmente se enseñan las funciones, con el propósito de que el análisis de la variación y el cambio de una variable o de algunas relacionadas permita ejercitar acciones mentales que fortalezcan y refuercen el desarrollo del razonamiento covariacional como un rasgo fundamental del pensamiento variacional.

- La actividad investigativa en la IE El Hormiguero fue un ejercicio que enriqueció la actividad educativa de los estudiantes pertenecientes a dicha comunidad, dado que se implementó una metodología de trabajo de matemáticas ajustada a estándares teóricos de la educación matemática en la elaboración, contenido y puesta en marcha. En relación con lo anterior, se promovió la diversificación de formas de trabajo en las clases de matemáticas, la manifestación de comportamientos y acciones del pensamiento variacional, y su registro, lo cual no solo es importante para desarrollar este pensamiento, sino que se constituyen en conocimientos fundamentales para afrontar las matemáticas en los grados siguientes, incluso, en favor de las pruebas nacionales e internacionales que presentan los estudiantes, ya que hasta el momento los resultados en la institución han sido de una puntuación muy baja.

Referencias Bibliográficas

- Andrade, C (1998). *Dificultades en el aprendizaje de la Noción de variación*. Revista EMA, VOL. 3, N° 3, 241-253.
- Apóstol, T. (1984). *Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal*. Segunda Edición. Ed. Reverté. Barcelona.
- Azcárate, C., y Deulofeu J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid. España: Síntesis.
- Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577) III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)
- Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas. Disponible en: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf
- Briceño, O. A., & Buendía Ábalos, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 2(45), 65-83.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), 121-156.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

- Dolores, C., Salgado, G., (2009). *Elementos para la graficación covariacional*. Números, Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 72, diciembre de 2009, p. 63-74.
- García, F. J. (2008). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. In *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 71-92). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., Pinzón, A. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste*. Educ. Educ., 19(3), 315-338. DOI: 10.5294/edu.2016.19.3.1.
- Gómez, P., y Velazco, C. (2017). Complejidad y coherencia de los documentos curriculares colombianos. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 261-281.
- Gonzales, G. y Grueso, R. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela*. Tesis de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Henao, S. y Vanegas, J. (2013). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*. Actas del VII CIBEM. (pp. 2883-2890) Disponible en:
<https://pdfs.semanticscholar.org/da11/876ebc7e0edaee645271336c5e8bde21ba19.pdf>
- Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los países bajos: Un recorrido guiado. *Correo del maestro*, 149, 23-54. Traducción: Héctor Escalona. Disponible en:
http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2008_guided-tour.pdf

- Heuvel-Panhuizen, M. (2009a). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Primera parte. Correo del maestro, 160, 36-44. Traducción: Héctor Escalona. Disponible en: http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2009_CDM_didactical-use-of-model_part1.pdf
- Heuvel-Panhuizen, M. (2009b). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Segunda parte. Correo del maestro, 160, 36-44. Traducción: Héctor Escalona. Disponible en: http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2009_CDM_didactical-use-of-model_part2.pdf
- Hurtado, A. y Zúñiga, F. (2011). *La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Insuasti, E. (2014). *Modelización de situaciones para el estudio de la función cuadrática al integrar Tic: El caso de la plataforma PhET*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Insuasty, E. (2004). *Dificultades de estudiantes de educación media en relación con la familia de funciones cuadráticas*. Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Kilpatrick, J. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. *Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia. Bogotá: Una Empresa Docente e Universidad de los Andes*, 1-18.

- Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable- Novena Edición*. Ed. Mc Graw Hill. México.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN y Universidad de Antioquia. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mesa, Y. (2013). *El modelo matemático como noción, concepto y categoría. Reflexiones desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Palarea, M. y Socas, M. (1994). *Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico*. I Seminario Nacional sobre lenguaje y matemática. Disponible en: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf>
- Pedrreros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental*. Tesis de maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de maestría. Universidad del Antioquia, Medellín, Colombia.

- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. Revista EMA. Vol. 1, N° 1, 4 – 24.
- Rico, L. (1998). Concepto del currículum desde la educación matemática. Revista de estudios del Currículum, 4 (1), 7-42. Disponible en:
https://www.researchgate.net/publication/39150474_Concepto_de_Curriculum_des_de_la_Educacion_Matematica1
- Rojas, P.; Rodríguez, J.; Romero, J.; Castillo, E. y Mora, L. (1999). *La transición aritmética – álgebra*. Colección: Didáctica de las matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. ISBN: 958-96440-3-1
- Ruiz – Higuera, L. (1994). Concepciones de alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
- Ruiz Munzón, N; Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz–Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 677–702). Jaén, España: Universidad de Jaén
- Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. Revista EMA, VOL. 7, N° 2.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9). Disponible en http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Vasco, C. E., & Carlos, E. (2006). *Siete retos de la educación colombiana para el periodo de 2006 a 2019*. Disponible en:

<http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/RetosEducativos.pdf>

Villa-Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 21, págs. 245-254. México D. F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa- Comité Latinoamericano.

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9-25.

Anexo: La Propuesta de Aula

Instrucción:

Lee atentamente la situación 1 y soluciona cada una de las preguntas de la tarea 1.

Situación 1: Introducción a la covariación a través de un contexto cotidiano.

¿Los ingresos de un gimnasio aumentan o disminuyen?

El gimnasio *Hércules* cuenta con 150 socios inscritos los cuales pagan, cada uno, una mensualidad de \$60.000. Michael, el dueño del gimnasio, desea incrementar sus ingresos por lo que ordena un estudio de mercado cuyo resultado recomienda reducir la mensualidad, ya que por cada \$1.000 que disminuya se inscribirán cinco nuevos socios.

¿Cuál es el máximo ingreso económico que el gimnasio *Hércules* puede recibir si sigue las recomendaciones del estudio?

Vamos a ayudar a Michael con el propósito que tiene de conocer la forma de aumentar los ingresos del gimnasio Hércules a partir del estudio de mercado y todo lo relacionado en esta situación.

Tarea 1: Comprendiendo la situación.

Teniendo en cuenta la información dada, ayuda a Michael a analizar aspectos iniciales en dicho contexto.

1. Calcula la cantidad de dinero que ingresa al gimnasio *Hércules* según la cantidad de socios inscritos y el valor de la mensualidad actual.
2. Si se disminuye la mensualidad en \$1.000, escribe el número de socios que se espera ingresen adicionalmente.
3. Si se inscriben 25 nuevos socios,
 - c. Indica en cuánto se redujo la cuota mensual.
 - d. Explica cómo lo calculaste.
4. Un amigo de Michael afirma que cuando la cuota se reduce en \$5.000, el monto total de ingresos es de \$9.000.000. Explica la validez de esta afirmación.
5. Escribe las cantidades que intervienen en la situación dada.

Instrucción:

De acuerdo con la situación 1 desarrolla las preguntas de la tarea 2.

Tarea 2: Analizando las cantidades en registros tabulares.

1. Completa la información en la *Tabla 1*:

Tabla 1. Relación entre el valor de la mensualidad y el número de socios.

Valor de la mensualidad en pesos	60.000	59.000	58.000			46.000
Número de socios	150			165	180	

2. Explica la forma como afecta la *cantidad de veces que se hacen rebajas* al valor de la mensualidad y el número de socios.
3. De acuerdo con la tabla anterior,
 - a. Indica como estableciste los valores que faltan de la mensualidad.
 - b. Explica la forma como determinaste los valores que faltan en el número de socios.
4. Escribe de qué depende la cantidad de socios del gimnasio *Hércules* después de haberse realizado el estudio.
5. Para cada caso, calcula el número total de socios que tendría el gimnasio cuando la mensualidad rebaje:
 - a. \$3.000
 - b. \$6.000
 - c. \$9.000
6. De acuerdo con el estudio de mercado,
 - a. Explica cómo se comportan los ingresos si se inscriben más socios.
 - b. Describe cómo se comportan los ingresos al gimnasio si se reduce la cuota de la mensualidad.

Instrucción:

Desarrolla las preguntas de la tarea 3 a partir de la información en la tabla.

Tarea 3: Analizando cómo cambian las cantidades a partir de registros tabulares.

1. Completa la *Tabla 2* donde se relaciona cantidad de rebajas, valor de cada rebaja, valor de la mensualidad, cantidad de socios e ingresos al gimnasio.

Tabla 2. Relaciones entre cantidades que determinan el ingreso total.

Cantidad de rebajas	Valor de la rebaja (en pesos)	Valor total de cada rebaja (en pesos)	Valor inicial de la mensualidad (en pesos)	Valor de la mensualidad según rebajas (en pesos)	Cantidad inicial de socios	Cantidad de socios nuevos	cantidad total de socios según cantidad de rebajas	Ingreso total inicial (en pesos)	Ingreso total según mensualidad y número de socios (en pesos)
0	1.000	0	60.000	60.000	150	0	150	9.000.000	9.000.000
1	1.000	1.000	60.000	59.000	150	5	155	9.000.000	9.145.000
2	1.000	2.000	60.000	58.000	150	10	160	9.000.000	9.280.000
3									
4		4.000			150		170		
5						25			
	1.000	15.000			150		225		
⋮									
x		$1000x$							

2. Indica las cantidades constantes de la situación según la tabla y explica por qué lo son.
3. Respecto a las rebajas,
 - a. Indica de qué depende el **valor total de cada rebaja**.
 - b. Escribe la manera como calculaste el **valor total de cada rebaja**.
 - c. Escribe una expresión que permita calcular el **valor total de cada rebaja** según una cantidad de veces (x)
 - d. Explica cómo cambia el **valor total de cada rebaja** si la cantidad de rebajas aumenta.
4. Respecto a la mensualidad,
 - a. Explica de qué depende el **valor de la mensualidad** después de realizado el estudio.
 - b. Escribe la forma como calculaste el **valor de la mensualidad** según el número de rebajas.

- c. Escribe una expresión que permita calcular el **valor de la mensualidad** según el valor total de la rebaja.
 - d. Explica cómo cambia el **valor de la mensualidad** si se hacen cinco rebajas.
5. Respecto a los socios,
- a. Explica de qué depende la **cantidad de socios nuevos**.
 - b. Escribe la forma como se puede calcular una **cantidad de socios nuevos**.
 - c. Escribe una expresión que permita calcular la **cantidad de socios nuevos** según el número de rebajas (x).
6. Para el total de socios,
- a. Explica de qué depende la **cantidad total de socios**, después de realizado el estudio.
 - b. Explica la manera como calculaste la **cantidad total de socios** de acuerdo con la cantidad de socios nuevos.
 - c. Escribe una expresión que permita calcular la **cantidad total de socios** de acuerdo con la cantidad de rebajas (x).
7. En relación al ingreso total al gimnasio,
- a. Explica de qué dependen los **ingresos totales al gimnasio**.
 - b. Escribe la manera como calculaste los **ingresos totales al gimnasio**.
 - c. Escribe una expresión que permita calcular los **ingresos totales al gimnasio** según la cantidad de rebajas (x).
8. Michael afirma que pudo calcular el ingreso total al gimnasio después del estudio mediante la expresión:
- $\text{Ingreso total} = (60 - x)(150 + 5x)$** , donde x es la cantidad de rebajas.
- a. Escribe si estás de acuerdo con Michael e indica por qué.
 - b. Para los valores de $x = 3, 15, 20$, utiliza la fórmula de Michael y calcula los ingresos al gimnasio para cada caso.

Instrucción:

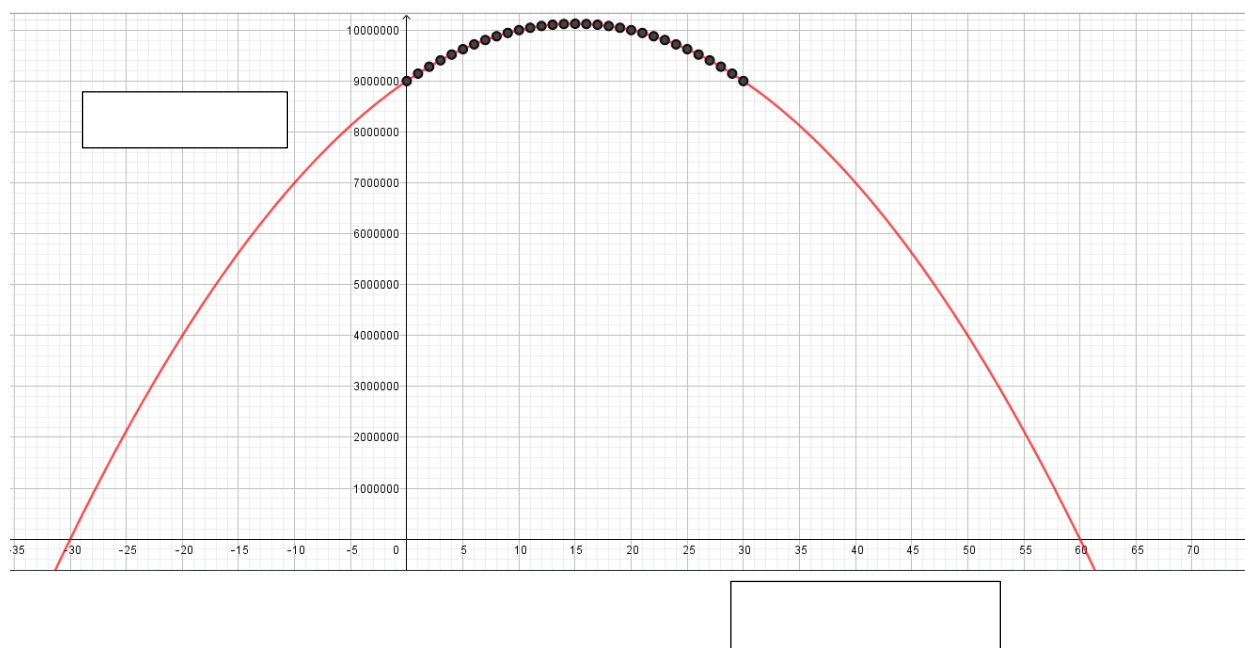
Desarrolla las preguntas de la tarea 4 a partir de la información en la gráfica.

Tarea 4: Analizando los cambios de las cantidades a partir de registros gráficos.

En la Gráfica 1 se muestra la forma como se comportan los ingresos totales a medida que se van realizando cantidades de rebajas, según la situación inicial.

1. Determina cual magnitud va en cada eje. Ten en cuenta la información y expresiones trabajadas anteriormente.

Gráfica 1. Comportamiento de cantidad de rebajas vs ingresos totales.



2. De acuerdo con la gráfica,
 - a. Describe cómo cambian los *ingresos totales* (y) a medida que se realiza una mayor *cantidad de rebajas* (x).
 - b. Escribe para que valor de x (*cantidad de rebajas*), y (*ingresos totales*) toma su mayor valor.
 - c. Explica qué cambios en la gráfica se muestran a partir de este punto.
3. En relación a las cantidades,
 - a. Escribe qué le sucede a los valores de x (*cantidad de rebajas*) cuando los valores de y (*ingresos totales*) se hacen mayores.
 - b. Explica cómo cambian los *ingresos totales* cuando el número de rebajas está entre 0 y 15.

4. Es posible afirmar que “siempre que los valores de x (*cantidad de rebajas*) aumentan, los valores de y (*ingresos totales*) también aumentan”. Explica tu respuesta.
5. Escribe el significado, en relación a la situación, de los puntos de corte de la gráfica con el eje y
 - a. $(-30, 0)$
 - b. $(60, 0)$

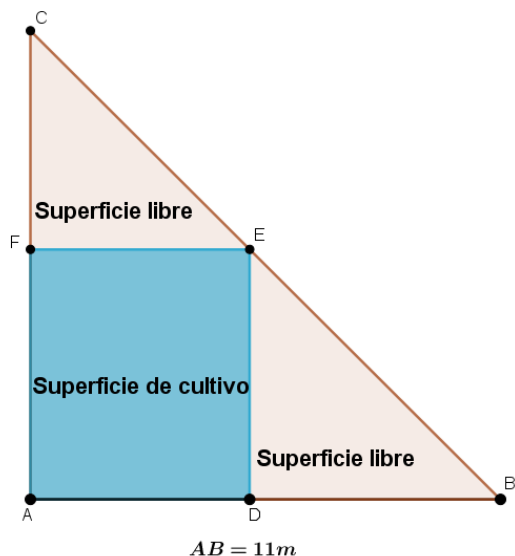
Situación 2: Estudio de la covariación a través de un contexto escolar.

La mayor superficie rectangular posible.

La profesora Lina, encargada del proyecto ambiental en la Institución Educativa El Hormiguero, tiene a disposición un espacio (terreno) en una de las sedes para llevar a cabo un cultivo de legumbres y por especificaciones de este debe plantarse en una superficie de forma rectangular. El espacio disponible para cultivar tiene forma de triángulo isósceles con catetos que miden 11 m y está ubicado en una esquina de la sede. La profesora debe considerar todas las superficies rectangulares posibles que pueden organizarse en dicho espacio, dada la medida de $\overline{AD}$, pero necesita identificar y preparar la mayor superficie para tener una mayor producción de legumbres.

Una representación de una superficie de cultivo posible se presenta en la *Gráfica 2*.

Gráfica 2. Representación de una superficie de cultivo.



De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál es la mayor superficie rectangular de cultivo que se puede obtener en el terreno disponible?

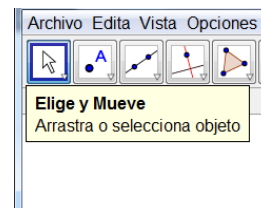
Instrucción:

Ayudemos a la profesora a encontrar las superficies rectangulares posibles en dicha región triangular, de acuerdo con las características de la situación.

Tarea 1: Explorando superficies rectangulares y analizando relaciones de dependencia (Geogebra).

A continuación, abre el archivo denominado **Tarea 1a** en el cual se presenta una ilustración de la situación. Elige y mueve con el cursor el punto D (representa los valores posibles para $\overline{AD}$) y contesta:

1. Explica si el rectángulo que aparece es siempre el mismo.
2. De acuerdo con la gráfica:
 - a. Escribe las cantidades que intervienen en la situación.
 - b. Explica de que depende la variación de la medida del área rectangular.



3. Completa la *Tabla 3* donde se relacionan algunas medidas del ancho ($\overline{AD}$), el largo ($\overline{AF}$) y el área del rectángulo, según la situación.

Tabla 3. Tabla de medidas de la superficie rectangular.

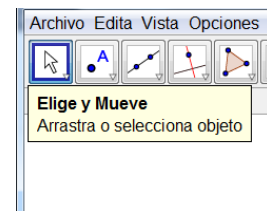
Ancho ($\overline{AD}$) (cm)	Largo ($\overline{AF}$) (cm)	Área (cm ²)
1	10	10
2	9	18
3		24
	7	28
5	6	
6		
7		28
8	3	
	2	18
10	1	
11		

4. A partir de la información en la tabla:
 - a. Describe cómo cambia la medida del ancho $\overline{AD}$.
 - b. Describe la forma como cambia el área.
5. De acuerdo con los datos en la tabla:
 - a. Representa en un plano cartesiano la relación ancho $\overline{AD}$ vs Área de la superficie.
 - b. Explica la forma de la gráfica que dibujaste.

- c. Escribe las medidas del ancho $\overline{AD}$ o dominio, con las que sean posibles superficies rectangulares.

Ahora abre el archivo denominado **Tarea 1b** en el cual se presenta y se relacionan una gráfica cartesiana y una ilustración de la situación. Ten en cuenta la información para desarrollar los siguientes puntos.

6. Elige y mueve con el cursor el punto D_2 (representa los valores posibles para $\overline{AD}$) de tal manera que se generen distintas medidas. Atendiendo la gráfica responde:
- Indica cómo varía $\overline{AF}$ cuando $\overline{AD}$ aumenta o disminuye su valor.
 - Explica por qué a rectángulos con dimensiones distintas (largo y ancho) corresponden áreas iguales.
7. Explica cómo se relacionan las medidas de $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ y el área de la superficie rectangular.
8. Con la ayuda de las gráficas de Geogebra, Ana y su compañera Karen, estudiantes de un grado superior, discuten acerca del área máxima posible. Ana plantea que esta se obtiene cuando $\overline{AD} = 6m$, mientras que Karen asegura que es cuando $\overline{AF} = 6m$. Indica un proceso mediante cual podrías demostrar quién tiene la razón.
9. Atendiendo la gráfica cartesiana,
- Escribe como cambian los valores en el eje y cuando cambian los valores en el eje x antes del punto máximo de la curva.
 - Escribe como cambian los valores en el eje y cuando cambian los valores en el eje x después del punto máximo de la curva.
10. Si x representa cualquier valor que puede tomar $\overline{AD}$,
- Escribe una expresión que permita calcular la medida de $\overline{AF}$ en relación con $\overline{AD}$ (x).
 - Utiliza la expresión encontrada anteriormente para calcular el largo del rectángulo si $x = 2.5$
 - Escribe una expresión que permita calcular el área de cualquier superficie rectangular en la situación, en relación con $\overline{AD}$ (x)
11. Camila y Pedro son estudiantes que participan en el proyecto. Camila afirma que el área de la superficie rectangular se puede calcular a partir de la expresión $x(11 - x)$, por su parte Pedro afirma que el cálculo de dicha área se puede calcular a partir de la expresión



$11x - x^2$ Analiza la validez de estas afirmaciones para identificar quien tiene la razón y explica por qué.

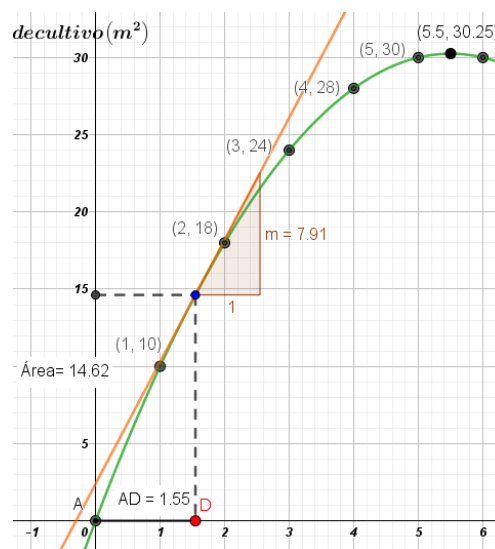
12. Si el ancho de uno de los rectángulos es $x = 7$ y el de otro es $x = 4$,
 - a. Emplea las expresiones anteriores y calcula el largo para cada caso.
 - b. Escribe una reflexión sobre las respuestas obtenidas.

Tarea 2: Analizando cambios de las cantidades de la situación en diferentes registros de representación.

A continuación, abre el archivo denominado Tarea 2 en el cual se presentan una gráfica cartesiana de puntos cuyas coordenadas corresponden a la relación Ancho ($\overline{AD}$) vs área de la superficie rectangular. Elige y mueve con el cursor el punto D (lo cual determina valores del área del rectángulo a partir de valores posibles de la longitud del segmento $\overline{AD}$) y observa los cambios.

1. Moviendo el punto D de tal manera que coincida primero con el punto en la coordenada (3,24) y luego con el punto en la coordenada (4,28), responde:

- a. Explica que relación se presenta entre la longitud de $\overline{AD}$ de acuerdo con cada caso.
- b. Determina si hay alguna diferencia entre la longitud del segmento punteado (paralelo al eje y) que representa la medida del área para cada caso. Si es afirmativo, explica tu respuesta.



Gráfica 3. Curva de la superficie de cultivo.

2. Selecciona dos puntos seguidos de la curva, diferentes a los del punto 1, escribe sus coordenadas y responde:
 - a. Compara y explica la relación entre las longitudes de $\overline{AD}$ (valores en x) en los dos casos.
 - b. Explica qué puedes concluir sobre la diferencia entre las medidas del área (valores en y).
3. De acuerdo con la gráfica:
 - a. Indica la longitud que debe tener $\overline{AD}$ para que el área sea máxima. Explica tu respuesta.
 - b. Determina para cual medida de $\overline{AD}$ se cumple que el área es de $29,25 \text{ m}^2$.
4. Escribe las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola con los ejes cartesianos y responde:
 - a. Escribe para qué valores de x el valor de $y = 0$.
 - b. Explica el significado de estos puntos de intersección de acuerdo con la situación.

5. Escribe para cuales valores de x es posible que y tenga valores diferentes a cero y sea una superficie de cultivo posible.
6. Camila afirma que la expresión para determinar el área de la superficie de cultivo es $y = 11x - x^2$. Completa la *Tabla 5* para cuando x toma los valores indicados.

Tabla 5. Tabla de medidas del área para algunos valores de x .

x (Longitud de $\overline{AD}$)	Área ($y = 11x - x^2$)
2	18
3,5	26,25
5	
5,5	
6	
6,5	
7	28

Compara los resultados en las medidas del área con los valores registrados en la gráfica de la *Tarea 2* y responde:

- Indica la validez de la afirmación de Camila y explica por qué.
 - Escribe las coordenadas del punto máximo de la curva. Explica el significado de este punto respecto a la situación.
7. En las columnas centrales de la *Tabla 6*, a continuación, se presentan valores para x ($\overline{AD}$) y valores para y (área), y a la izquierda y la derecha los cambios en y y los cambios en x a medida que $\overline{AD}$ varía de manera uniforme. Completa la tabla

Tabla 6. Tabla de valores de Δx y Δy para valores de x y y indicados.

Δx ($x_2 - x_1$)	x ($\overline{AD}$)	y (Área)	Δy ($y_2 - y_1$)
	0	0	
			$10 - 0 = 10$
$2 - 1 = 1$	1	10	$18 - 10 = 8$
$3 - 2 = 1$	2	18	$24 - 18 = 6$
$4 - 3 = 1$	3	24	
	4	28	
	5	30	$30 - 30 = 0$
$6 - 5 = 1$	6	30	$28 - 30 = -2$

	7	28	
$8 - 7 = 1$			$24 - 28 = -4$
$9 - 8 = 1$	8	24	
	9	18	
			$10 - 18 = -8$
	10	10	
	11	0	

La diferencia entre las abscisas se representa como Δx (Delta de x)

La diferencia entre las ordenadas se representa como Δy (Delta de y)

8. Respecto a las diferencias registras en la

tabla,

- Escribe cuanto cambian las cantidades de y cuando x mide toma valores de 1, 2, 3, 4 y 5.
- Escribe cuanto cambian las cantidades del área cuando el ancho mide más de 6 metros.
- De acuerdo con los cambios uniformes en x , explica cómo son los cambios en y .

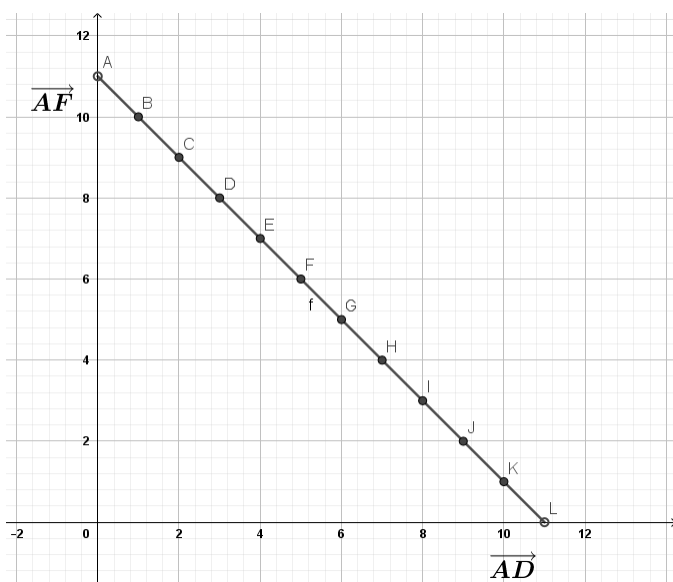
*A partir de los cambios de las cantidades en cuestión se puede establecer una relación conocida como la **razón de cambio**, determinada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$*

Tarea 3: Caracterización de la función cuadrática de la situación.

A partir de la información de la situación inicial, vamos a seguir estudiando las variaciones que caracterizan la función cuadrática.

1. En la Gráfica 4 se presenta la relación entre el ancho del rectángulo ($\overline{AD}$) y el largo del rectángulo ($\overline{AF}$) de la superficie rectangular.

Gráfica 4. Relación entre ($\overline{AD}$) y ($\overline{AF}$)



De acuerdo con la gráfica selecciona tres parejas de coordenadas de puntos seguidos y:

- a. Calcula las diferencias que se van presentando en x (abscisas). Explica cómo lo realizaste.
- b. Calcula las diferencias que se van presentando en y (ordenadas). Explica cómo lo realizaste.

Se llama **razón de cambio** al cociente entre los cambios en y y los cambios en x . Se calcula de la siguiente manera:

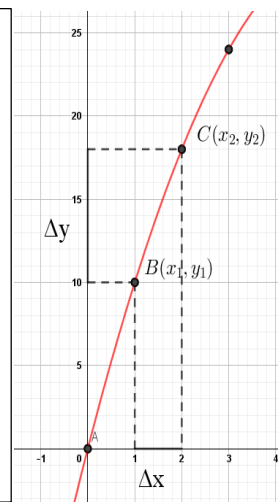
De acuerdo con los puntos $B(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_2)$, la razón de cambio se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por ejemplo para los puntos $A(1, 10)$ y $B(2, 18)$ la razón de cambio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18 - 10}{2 - 1} = 8$$

Es decir, por cada unidad que aumenta en el eje x , aumenta ocho unidades en el eje y .



2. Completa la *Tabla 7* de acuerdo con la información de la *Gráfica 4* donde se relacionan las diferencias de los cambios en x y y , a partir del cociente entre estas.

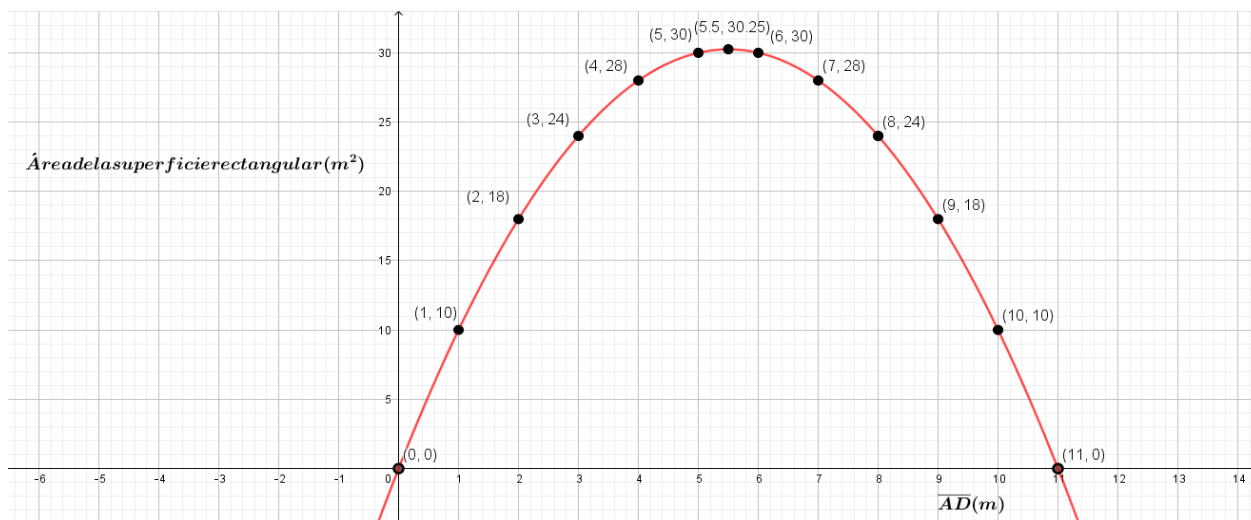
Tabla 7. Tabla de valores de Δx y Δy cociente entre diferencias de la recta.

Coordenadas de parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δy)	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Razón de cambio)
(5,6) y (6,5)	$6 - 5 = 1$	$5 - 6 = -1$	$\frac{5 - 6}{6 - 5} = -1$
(6,5) y (7,4)			$\frac{4 - 5}{7 - 6} = -1$
(7,4) y (8,3)	$8 - 7 = 1$		
(8,3) y (9,2)		$2 - 3 = -1$	
(9,2) y (10,1)			

3. De acuerdo con la información registrada en la tabla:
- Describe cómo son los cambios que se van presentando en Δy a medida que se van presentando los cambios en Δx .
 - Describe como son los cambios de las cantidades de la columna de los cocientes, a medida que se relacionan diferentes parejas de puntos.
4. De acuerdo con los cambios de las cantidades de la columna de los cocientes (Razón de cambio), Explica cómo varía la razón de cambio de una relación funcional lineal.

Ahora analizaremos la relación entre los cambios del ancho ($\overline{AD}$) y el área de la superficie rectangular, a partir de la Gráfica 5.

Gráfica 5. Curva del área de la superficie rectangular.



5. Con ayuda de la *Gráfica 5* completa la *Tabla 8* para determinar la razón de cambio entre parejas de puntos continuos según la gráfica.

Tabla 8. Tabla de valores de Δx y Δy cociente entre diferencias de la curva.

Coordenadas de parejas de puntos	Diferencia de abscisas (Δx)	Diferencia de ordenadas (Δy)	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
(0,0) y (1,10)			
(1,10) y (2,18)			
(2,18) y (3,24)			
(3,24) y (4,28)			
(4,28) y (5,30)			
(5,30) y (6,30)			
(6,30) y (7,28)			
(7,28) y (8,24)			
(8,24) y (9,18)			
(9,18) y (10,10)			
(10,10) y (11,0)			

6. De acuerdo con la información registrada en la tabla:
- Describe cómo son los cambios que se van presentando en los Δy a medida que los Δx presentan un cambio uniforme (Aumentan en una unidad).
 - Escribe todas las cantidades que varía la razón de cambio, a medida que se relacionan diferentes parejas de puntos continuos.

7. De acuerdo con la *Gráfica 5* y la *Tabla 8*, Ana una estudiante afirma que: “Para valores de x mayores a 0 y menores que 5, y está disminuyendo y cada vez disminuye menos; mientras que para valores de x mayores a 6 y menores que 11, y está aumentando y cada vez aumenta más. Explica la validez de esta afirmación.

Considerando la información anterior analicemos los cambios de los cambios en diferentes registros para su mejor comprensión.

8. Utilizando la información anterior, completa la *Tabla 9* en la cual se relacionan los cambios en los cocientes (razón de cambio) a medida que x varía uniformemente en una unidad:

Tabla 9. Tabla de relación entre valores de x y los cambios del cociente entre diferencias de la curva

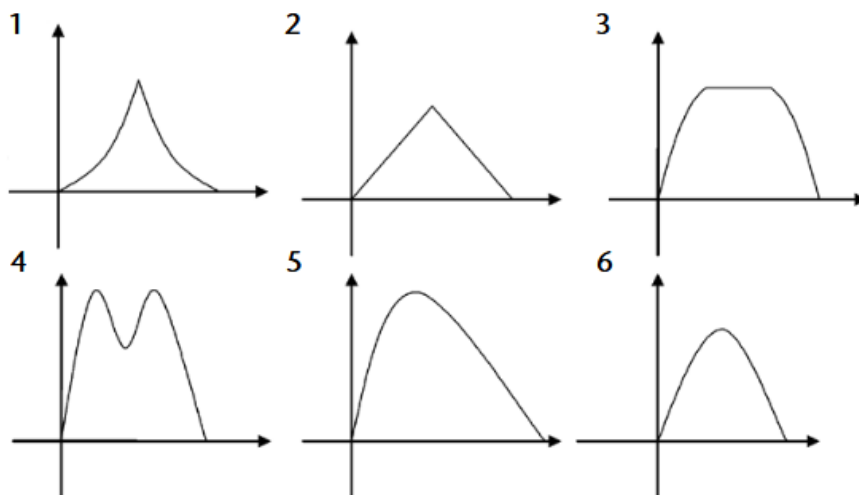
x	Cambios en el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	10
2	8
3	6
4	
5	2
6	
7	- 2
8	
9	
10	
11	

9. De acuerdo con la *Tabla 9*:
- Emplea las cantidades relacionadas y elabora una gráfica en un plano cartesiano.
 - Explica la forma de la gráfica resultante.
10. De acuerdo con la gráfica que dibujaste, describe cómo son los cambios de los cambios, a medida que x varía uniformemente.

11. De acuerdo a la graficación de variación de la razón de cambio a medida que el ancho variaba uniformemente, Explica cómo varía la razón de cambio de una función cuadrática.

Tarea 4: Analizando la covariación en otras funciones.

De acuerdo con lo trabajado en las tareas 1, 2 y 3, desarrolla las preguntas propuestas a partir del siguiente grupo de gráficas de seis casos de funciones.



1. Explica para cada caso si corresponde o no a la representación de la función cuadrática en relación a la variación de la medida del área de la superficie de un rectángulo en función de la variación de la medida de longitud de su base, cumpliendo las condiciones planteadas en la situación 2.
2. Compara las gráficas de los casos 1 y 5 y describe cómo cambian los valores de y a medida que cambian los valores de x en cada una, antes y después del punto máximo.
3. Carlos, un estudiante de un grado superior, afirma que en el caso 2: “Para valores de x mayores a 0 y antes del punto máximo, y está disminuyendo y cada vez disminuye menos; mientras que para valores de x posteriores al punto máximo y hasta el punto de intersección con el eje x , y está aumentando y cada vez aumenta más”. Explica la validez de esta afirmación.

Selecciona uno de los casos de las gráficas y escribe una situación para la cual esa sea una representación posible.