

Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas

Agustín Sánchez Pastor
Universidad Autónoma de Guerrero

José M. Sigarreta Almira
Universidad Autónoma de Guerrero

Recibido Jun. 21, 2011

Aceptado Sep. 18, 2011

Abstract

This article provides on one hand, elements for analysis of historical development of the foundations of mathematics around the third scientific revolution of mathematics, particularly the historical development of the foundations of geometry during the period: the third century BC until the first half of the nineteenth century AD, when the math becomes an abstract science in the sense that it not only describes the physical world and concrete, as was believed until the early nineteenth century, but the objects of mathematics, now considered abstract by the mathematical community, can represent any object of reality with the only requirement that the conditions set out in a set of axioms. In this process of transformation and consolidation, experience caused by the third revolution: the acceptance of the role of existence theorems and formal consideration of the axiomatic method through the grounds of non-Euclidean spaces and other abstract structures in the first half nineteenth century. On the other hand, describes the epistemological obstacles that from our perspective can be identified in the fields of philosophy, logic and methodology during the development of non-Euclidean geometry.

Keywords: Epistemological obstacle, Mathematics, Non-Euclidean geometry.

MSC(2000): MSC(2000): Primary: 97C30, Secondary: 97C80

Resumen

El presente artículo ofrece, por una parte, elementos para el análisis del desarrollo histórico de los fundamentos de la matemática en torno de la tercera revolución científica de la matemática; particularmente el desarrollo histórico de los fundamentos de la geometría durante el período: Siglo III a.n.e. hasta la primera mitad del Siglo XIX d.n.e., en el que la matemática se transforma en una ciencia abstracta en el sentido de que ya no sólo describe al mundo físico y concreto, como se creía hasta principios del Siglo XIX, sino que los objetos de la matemática, ahora, considerados abstractos por la comunidad matemática, pueden representar a cualquier objeto de la realidad con el único requisito de que cumplan las condiciones establecidas en un conjunto de axiomas. En ese proceso de transformación y consolidación, experimenta la tercera revolución ocasionada por: la aceptación del papel de los teoremas de existencia y de la consideración formal del método axiomático a través de la fundamentación de los espacios no euclidianos y otras estructuras abstractas en la primera mitad del siglo XIX. Por otra parte, describe los Obstáculos Epistemológicos (OE) que desde nuestra perspectiva pueden ser identificados, en los campos filosófico, lógico y metodológico durante el proceso de constitución de las geometrías no-euclidianas.

Palabras y frases claves: Obstáculo Epistemológico, Matemáticas, Geometrías no euclidianas.

1 Introducción

Los estudios epistemológicos de la matemática permiten comprender algunos aspectos de la evolución del conocimiento matemático (cómo se origina, desarrolla y cómo está estructurado dicho conocimiento). Además, permiten identificar los OE que surgen en el desarrollo del conocimiento en general.

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, los estudios epistemológicos pueden desempeñar una función de vigilancia. Ésta consiste, por una parte, en la toma de conciencia de la diferencia que hay entre el desarrollo histórico del conocimiento matemático y la forma que éste circula en la escolaridad después de haberse sometido a un proceso de transposición didáctica. Por otra parte, en identificar los OE relativos al desarrollo del “segmento” del conocimiento matemático que ha sido transpuesto como saber a enseñar; con el fin de diferenciar estos obstáculos de las otras dificultades (obstáculos cognitivos y obstáculos didácticos) que se pueden presentar en la enseñanza de las matemáticas.

Se ha decidido mostrar un estudio epistemológico de las geometrías no euclidianas, el cual, en forma explícita presente los OE relativos al desarrollo de esta disciplina. La metodología empleada en este estudio permite analizar trabajos matemáticos en los que la identificación de OE se hace a partir de las ideas de Bachelard, quien establece que un OE es un conocimiento previo que se identifica como causa que provoca estancamientos, regresiones o inercias en el desarrollo del conocimiento matemático. Tomando esto en consideración, se ha encontrado una forma metodológica para la determinación de los OE. Consiste en identificar los estancamientos, regresiones e inercias (efectos) que se hayan presentado a lo largo del proceso de construcción del conocimiento en estudio, y, enseguida, identificar las posibles causas; éstas serán los OE del saber en estudio. Así, se estudian los OE a partir de los elementos filosófico, metodológico y lógico.

1.1 Antes de la revolución

Se presenta la manera en que distintos matemáticos de distintas épocas y culturas (griegos, árabes, del renacimiento y hasta el Siglo XVIII), plantearon la “demostración” del V postulado de Euclides. Sobre esta base, se analizan las causas que originaron el proceso de transformación de la matemática que describe a la realidad (hasta principios del Siglo XIX), hasta convertirse en una ciencia abstracta (Siglo XX). De este breve análisis, surgen los elementos para argumentar las respuestas de historiadores de la matemática a cuestiones como ¿Qué motivó el nacimiento de las geometrías no euclidianas?

1.2 La revolución

Se analiza el surgimiento de la tercera revolución interna de la matemática, representada por: la aceptación del papel de los teoremas de existencia y de la consideración formal del método axiomático a través de la fundamentación de los espacios no euclidianos y otras estructuras abstractas en la primera mitad del siglo XIX. Teniendo como trasfondo ideológico en el campo de la filosofía, las concepciones kantianas relativas a la naturaleza de los objetos matemáticos. Asimismo, se destaca la participación, entre otros, de Gauss, Lobachevsky

y Riemann, quienes haciendo uso de los estudios de Saccheri por un lado y la equivalencia de Playfair del V postulado de Euclides por el otro, plantean la existencia de nuevos sistemas geométricos, que aunque en ese momento no se podían comprobar experimentalmente, existía en ellos, una deducción lógica coherente (Consistencia).

1.3 Superación de la revolución

Una vez que Gauss y Lobachevsky han elaborado, cada uno por separado, sistemas geométricos lógicamente coherentes, se concluye que:

- El V postulado de Euclides, no puede ser probado, porque es, efectivamente, un axioma de la geometría.
- Cambiando, en el sistema axiomático de la geometría euclidiana, el V postulado, se pueden desarrollar geometrías lógicamente consistentes.
- Una geometría lógicamente concebible debe ser desarrollada no sólo como un esquema lógico arbitrario, sino como una teoría que abra nuevos caminos y métodos para las teorías físicas.

La revolución queda totalmente superada cuando utilizando modelos finitos (y además relativos), se demuestra que los sistemas geométricos de Euclides, Lobachevsky y Riemann son consistentes. Esta consistencia es demostrada basándose en la propuesta formalista de D. Hilbert, sobre la geometría plana de Euclides.

2 Teoría euclidiana de las paralelas

A pesar de que, desde el punto de vista moderno, hay ciertas inconsistencias en los Elementos de Euclides, éstas no se comentan en el presente artículo- para profundizar en esta dirección ver Sigarreta (2004)-, dejando algunas de ellas para ser consideradas posteriormente. La definición de Rectas Paralelas juega un papel muy importante en el análisis del estudio de la teoría de las paralelas y en particular, el V postulado de Euclides como factor principal para el descubrimiento de las nuevas teorías geométricas¹. La Teoría de las Paralelas de Euclides comprende (además de la definición de rectas paralelas, las proposiciones de la 27 a la 33):

- La definición de Paralelas: Son las que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran [Def. XXIII.I]².

¹Las hoy llamadas geometrías no-euclidianas a partir de la segunda mitad del Siglo XIX.

²Siempre que en este trabajo aparezca una referencia de este tipo se debe interpretar de la siguiente manera: Def significa definición; XXIII el número de ubicación, en este caso 23; I, el Libro I de los *Elementos* de Euclides. Así, [Def.XXIII.I] se lee: definición 23 del Libro I de los *Elementos* de Euclides.

- El V postulado de Euclides del Libro I de sus *Elementos*: Si una recta al incidir sobre otras dos forma del mismo lado dos ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas, prolongadas al infinito, se encontrarán del lado en que dichos ángulos es menor que dos rectos.
- Las propiedades de las Paralelas:
 - Existencia. Por un punto dado trazar una recta paralela a otra recta dada. [P.XXXI.I].
 - Unicidad. Por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.
 - Reflexividad. Toda recta es paralela a sí misma.
 - Simetría. Si a es paralela a b , b es paralela a a .
 - Transitividad. Las rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí [P.XXX.I].

Euclides tenía buenas razones para enunciar su V postulado en la forma señalada más arriba. Podría haber afirmado, en su lugar, que si la suma de los ángulos de un mismo lado de la transversal es $2R$ (dos ángulos rectos), entonces las rectas jamás se encontrarán, es decir, serían paralelas. Ciertamente, no garantiza el comportamiento de líneas rectas infinitas, en tanto que se suponía que los axiomas eran verdades evidentes por sí mismas asociadas a un contexto matemático. Euclides probó la existencia de rectas paralelas sobre la base de su axioma de las paralelas y los demás axiomas.

Se puede decir que la teoría de las paralelas y en particular, los estudios del V postulado de Euclides como se sabe ahora, fueron los que determinaron a lo largo de aproximadamente veintidós siglos (desde 300 a. n. e. hasta mediados del siglo XIX), el origen de las nuevas teorías geométricas llamadas geometrías no euclidianas.

3 Investigaciones del V postulado de Euclides utilizando el método directo de demostración (desde Euclides hasta el Siglo XVII)

La definición de paralelismo euclidiano, siempre fue cuestionada en lo que respecta a las nociones prolongar indefinidamente (para más información sobre el tema ver *Los Elementos* traducidos por María Luisa Puertas Castellano (1991)) y no se encuentran. Por esto, con el fin de remplazar la definición negativa de rectas paralelas por otra equivalente que no presentara dicha forma, Proclo (410-485) en su comentario al libro I de los Elementos de Euclides³ presenta aspectos significativos acerca de ciertas tentativas hechas con este propósito. Refiere por ejemplo,

³Todo lo que se refiere al texto de Proclo está basado en la edición dirigida por G. Friedlein. Procli diadoshi in primum Euclidis elementorum librum commentaris (Leipzig, Teubner, 1878).

que Posidonio (siglo I a. n. e.) había propuesto que se llamaran paralelas a dos rectas coplanarias y equidistante.

Debido al hecho de que los griegos sólo concebían el infinito como algo sin fin (*infinito potencial*), y a pesar de que contaban con un procedimiento que mostraba que dos rectas paralelas euclidianas no se cortaban para cualquier prolongación finita, siempre quedaba la duda sobre lo que podía pasar con las rectas cuando se prolongan indefinidamente.

Las definiciones de Posidonio y de Euclides sobre el paralelismo corresponden, sin embargo, a dos hechos que pueden considerarse separadamente: la equidistancia y la asintoticidad de las rectas paralelas. Proclo refiriéndose a un trabajo de Gemino (siglo I a. n. e.), aduce a este propósito los ejemplos de la hipérbola⁴ y de la conoide y de su posición con las respectivas asíntotas, para mostrar que podría haber líneas y sin embargo, no paralelas en el sentido de Posidonio, esto es, no equidistantes. Aquí el término línea se usa como concepto más general de recta; en las geometrias no-euclidianas las rectas son líneas en éste sentido. paralelas en el sentido euclídeo, esto es, líneas que prolongadas hasta el infinito no se encuentran.

Con esta controversia sobre el paralelismo, la noción de recta también provocó otra dificultad. Mientras que Euclides y posidonio la conciben como aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella [Def.IV.I], Gemino se refiere a la recta como una línea y, en este sentido, la noción de recta de Gemino es más amplia que la de Euclides. Por eso Gemino, al decir de Proclo, se refiere a la hipérbola y la conoide como rectas paralelas en el sentido euclídeo (coplanarias y no se encuentran por más que se prolonguen) pero no en el sentido de Posidonio (coplanarias y equidistantes). Es importante observar que en esta definición de recta, implícitamente se adopta la idea de que la recta entre dos puntos es la línea de menor longitud, como ya aparece en Arquímedes.

Del análisis de la definición de rectas paralelas dada por Euclides en sus *Elementos*, se ponen de manifiesto los siguientes efectos:

- *Estancamientos* identificados por:
 - La controversia respecto a la naturaleza de la recta: Euclides Vs Gemino. La forma euclidiana de concebir a la recta vs. La forma de Gemino de concebir a la recta.
 - La controversia respecto a la naturaleza de las rectas paralelas: equidistantes (Posidonio) o asintóticas (Euclides/Gemino). Como se verá más adelante (Sección 6), la definición del paralelismo euclidiano, abarca la definición más amplia del paralelismo (asintótico) y la definición de

⁴Apolonio de Perga (vivió durante los últimos años del siglo III y principios del siglo II a. n. e.) hizo un estudio de las cónicas aproximadamente un siglo después que euclides presentó sus *Elementos* y Gemino vivió aproximadamente un siglo después de que Apolonio presentó sus estudios sobre las *Cónicas*.

paralelismo equidistante (Posidonio) resulta ser sólo un caso particular.

- *Obstáculos epistemológicos* (causas) que consideramos fueron los que originaron los anteriores efectos:
- *Área filosófica*
 1. Considerar que la recta euclidiana representa a un objeto de la realidad empírica
 2. Considerar a la recta como un segmento de la recta completa
 3. El infinito potencial
 4. La concepción parcial de línea recta: Asintóticas vs equidistantes
 5. La falta de precisión respecto a la naturaleza de las rectas paralelas euclidianas
 6. La concepción predominante de que las rectas paralelas son equidistantes
- *Área metodológica*
 1. La prolongación de la recta euclidiana
 2. La utilización del infinito potencial

Se analizará ahora el V postulado del Libro I de los Elementos de Euclides. El cual está formulado de la siguiente manera:

[Post.V.I]. *Si una recta al incidir sobre otras dos forma del mismo lado dos ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas, prolongadas al infinito, se encontrarán del lado en que dichos ángulos sea menor que dos rectos.*

Evidentemente, como ya se señaló líneas más arriba, en la definición de paralelas de Euclides, las nociones prolongar al infinito y no se encuentran provocaron serias dificultades y fueron al parecer, entre otras, la razón por la cual el postulado de las paralelas ocupaba incluso, en los Elementos de Euclides un lugar especial. Además, en vista de la complicada naturaleza del V postulado de Euclides es muy natural el deseo de querer prescindir de él, por tal motivo fue objeto de discusiones e investigaciones hasta la primera mitad del S. XIX d. n. e.

3.1 El postulado de las paralelas entre los griegos

Proclo no sólo presenta las controversias relacionadas con la naturaleza de la recta, la naturaleza de las rectas paralelas y el V postulado de Euclides, sino que también hace sus propias contribuciones a la tarea de demostrar dicho postulado. Él por ejemplo, rehúsa considerar al V postulado de Euclides entre los postulados,

observando que su inversa [P.XVII.I]⁸ es un teorema demostrado por el mismo Euclides, no pareciéndole que una proposición cuyo recíproco es demostrable no sea también demostrable.

3.2 El postulado de las paralelas entre los árabes

Los árabes, sucesores de los griegos en la supremacía de las Matemáticas, se ocuparon también de la demostración del V postulado, una de ellas referida en el comentario árabe de Al-Nirizi (siglo IX), llegada hasta nosotros a través de la traducción latina de Gerardo de Cremona (siglo XII)⁹, es atribuida a Aganis.

Nasir-Eddín (1201-1274), aunque ¿demuestra? el V postulado de Euclides adaptándose al criterio seguido por Aganis, merece ser recordado por la idea original de demostrar explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento¹⁰

3.3 El postulado de las paralelas en el renacimiento y en el siglo XVII

Las primeras versiones de los Elementos, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos árabes, así como las sucesivas, redactadas sobre los textos griegos a fines del siglo XV y en la primera mitad del Siglo XVI, no llevan, en general, ninguna observación crítica al V postulado de Euclides, como ya se mostró en las dos secciones anteriores.

J. Wallis (1616-1708). Da una ¿nueva demostración? del V postulado de Euclides, fundamentándola en la noción común: De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria. He aquí, rápidamente, como procede Wallis.

Giordano Vitale (1633-1711), volviendo al concepto de equidistancia formulado por Posidonio e igual que Proclo, plantea la necesidad de rechazar que las paralelas de Euclides pueden comportarse de un modo asintótico. A este fin define las paralelas como dos rectas equidistantes.

Giordano vuelve a la equidistancia de las rectas paralelas. Wallis ya había abandonado esta forma de abordar la ¿demostración? del V postulado de Euclides.

En las diferentes “demostraciones” del V postulado de Euclides presentada desde Proclo hasta Giordano, según nuestro análisis, se identifican los siguientes efectos:

- *Inercias* identificadas por considerar al V postulado de Euclides como un teorema (griegos, árabes, Wallis, Giordano).

⁸[P.XVII.I]. La suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.

⁹R. O. Besthorn y J. L. Heiberg. Codes Leidensis, 399, I. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdscha-dsch oxm commentaris Al-Nirisi (Copenhague, F. Hegel, 1893-97).

¹⁰Euclidis Elementorum libri XII Studio Nassiredini (Roma, 1594). Esta obra, escrita en árabe, fue reproducida en 1657 y 1801. No existe ninguna traducción de ella en otra lengua.

- *Estancamientos* identificados por no dar cabida a la idea de rectas asintóticas (Giordano).
- *Retrocesos* identificados por:
 1. Pensar en la asintoticidad de las paralelas y rechazar esta forma de concebirlas (Giordano).
 2. La evidente situación de volver a la equidistancia de las paralelas. Wallis ya había abandonado esta forma de ?demostrar? el V postulado de Euclides; aunque claro, este abandono era solo aparente, pues, finalmente como ya se vio, no solo utilizó este principio sino que además, utilizó (al igual que los matemáticos anteriores a él) otros principios equivalentes también al V postulado de Euclides.
- *Obstáculos epistemológicos*, causas que consideramos fueron el motivo de los anteriores efectos:
- *Área filosófica*: pensar que la asintoticidad de las rectas no corresponde con la realidad.
- *Área lógica*
 1. La redacción original del V postulado de Euclides.
 2. Haber utilizado implícitamente en la ?demostración? los siguientes principios equivalentes al V postulado de Euclides (Griegos, árabes, Wallis, Giordano):
 - La equidistancia de las paralelas
 - La semejanza de triángulos
 - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos

4 Investigaciones del V postulado de Euclides utilizando el método indirecto de demostración (siglo XVIII d.n.e.)

A pesar de todos los intentos frustrados para la demostración del V postulado de Euclides, hasta principios del Siglo XVIII, se habían ya alcanzado según Wussing H. (1998), dos resultados fundamentales:

1. En cuanto a la construcción de la geometría euclídea, el postulado de las paralelas es equivalente a otras proposiciones matemáticas.
2. El recíproco del postulado de las paralelas (V postulado de Euclides) es demostrable: [P.XVII.I]. La suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.

Estas dos ideas condujeron hacia un cambio de enfoque metodológico. En lugar de tratar de probar el V postulado por métodos directos, como se hizo hasta el Siglo XVII. En el Siglo XVIII y principios del XIX se intentó la demostración de manera indirecta a través del Método de demostración por Reducción al Absurdo; es decir, si el V postulado es verdadero, entonces cuando se suponga su negación necesariamente debe llegarse a una contradicción. Como se muestra en seguida, en esta dirección trabajaron Saccheri, Lambert y Legendre.

Gerolamo Saccheri (1667-1733). La idea directriz de las investigaciones geométricas de Saccheri se encuentran en su *Lógica Demostrativa* (Turín, 1697).

En ella, Saccheri toma como datos de partida las veintiséis primeras proposiciones del Libro I de los Elementos de Euclides y, supuesta como hipótesis la falsedad del V Postulado, busca, entre las consecuencias de esta hipótesis, una proposición contradictoria que lo faculte para afirmar la verdad del postulado mismo.

La figura fundamental de Saccheri es el cuadrilátero birrectángulo isósceles¹¹ (cuadrilátero de Saccheri). Es decir, El cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base. De este cuadrilátero obtiene tres hipótesis: Hipótesis del Ángulo Recto (HAR), Hipótesis del Ángulo Obtuso (HAO) y la Hipótesis del Ángulo Agudo (HAA).

Johann Heinrich Lambert (1728-1777). La figura fundamental de Lambert es un cuadrilátero trirrectángulo¹², y se exponen las tres hipótesis sobre la naturaleza del cuarto ángulo D. La primera es la hipótesis del ángulo Recto (HAR); la segunda, la hipótesis del ángulo obtuso (HAO); y la tercera, la hipótesis del ángulo agudo (HAA). También en la manera de tratar estas hipótesis el autor se acerca al método saccheriano.

Lambert dejó, pues, la cuestión en suspenso; antes bien, el no haber publicado sus investigaciones hace suponer que había entrevisto algún horizonte nuevo.

Adriano María Legendre (1752-1833). Legendre desde el principio descarta la HAO y plantea teoremas que solo incluyen las HAR y la HAA, considerando así, al V postulado como un teorema. Con esta obra Legendre creyó, al fin resuelta, la dificultad escondida en el principio de la geometría. En sustancia, sin embargo, no añade nada de verdaderamente nuevo al material y a las convicciones ganadas por sus predecesores. Su mayor mérito está en la forma sencilla y elegante que supo dar a alguna de sus investigaciones, por la que éstas alcanzaron aquella difusión que tanto contribuyó a ensanchar el círculo de los cultivadores de las nuevas ideas, que entonces se estaban formando.

En las diferentes “demostraciones” del V postulado de Euclides utilizando reducción al absurdo, presentadas por Saccheri, Lambert y Legendre, según nuestro análisis, se identifican los siguientes efectos:

¹¹Recordemos que Giordano Vitale ya lo introdujo en su intento por demostrar el V postulado de Euclides.

¹²Saccheri hace uso de este cuadrilátero en [P.III.LD].

- *Inercias* identificadas por considerar al V postulado de Euclides como un teorema.
- *Área metodológica*: el no asumir el método de reducción al absurdo como un método demostrativo.
- *Área lógica*: considerar al V postulado de Euclides como un teorema. El hecho de que se conoce que varias proposiciones y su recíproco son demostrables, lo cual no implica contradicciones.

5 Reconocimiento de nuevos sistemas geométricos (S. XIX)

Toda la dificultad para penetrar en el nuevo orden de ideas aparece manifiesta a quien, reflexiona en las concepciones entonces dominantes de la filosofía kantiana¹³. Pues éste, formulaba de que los axiomas de Euclides son inherentes a la mente humana y por lo tanto, tienen una validez objetiva para el espacio real; esta creencia en los axiomas de la geometría euclidiana como verdades inalterables que pertenecen a los dominios de la intuición pura fue uno de los pilares básicos de la filosofía kantiana.

Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss tenía una visión clara de una geometría independiente del V postulado, visión que durante unos cincuenta años permaneció encerrada en la mente del ilustre geómetra y que dio a luz solamente después de las obras del ruso Lobachevsky.

Sin embargo, Gauss no dejó traslucir nada de estas ideas por el temor de no ser comprendido, sólo a algunos amigos íntimos confió algo de sus investigaciones, y cuando por necesidad se ve obligado a escribir a Taurinus (1824), le ruega que guarde el silencio sobre las comunicaciones que le hace.

Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856). En 1815, Lobachevsky se ocupaba ya de las paralelas, y en un manuscrito suyo relativo a las lecciones de 1815-17, se encuentran algunas tentativas para la demostración del V postulado e investigaciones semejantes a las de Legendre. Pero sólo después de 1823 concibió la Geometría imaginaria. Esto se lee en un tratado suyo manuscrito sobre geometría elemental, donde dice que no se posee demostración alguna del V postulado, pero que tal demostración no debe ser imposible.

La falta de demostraciones de sus predecesores, o la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-17), indujeron a Lobachevsky, como antes a Gauss, a pensar que la dificultad para superarlas tuviese un fundamento diverso del supuesto hasta entonces.

Lobachevsky tiene una concepción filosófica del espacio diferente a la kantiana, que entonces gozaba del fervor máximo. La doctrina kantiana considera al espacio como una intuición subjetiva, necesario presupuesto de toda experiencia; la de

¹³Immanuel Kant (1724-1804). Filósofo alemán más influyente en este período.

Lobachevski, enlazándose más bien con el sensualismo y la corriente empirista, hace entrar a la Geometría en el campo de las ciencias experimentales¹⁴.

6 Una geometría sin paralelas

La antigua cuestión de las paralelas, a la cual las investigaciones de Saccheri, Lambert y Legendre, parecían haber quitado todo interés, atrajo todavía, y bajo un aspecto completamente nuevo, la atención de los geómetras y filósofos, haciéndose centro de un vastísimo campo de indagaciones. Las precedentes investigaciones excluían desde el principio la infinitud de la recta. Este sistema es conocido con el nombre de su fundador y corresponde a la *hipótesis del ángulo obtuso* de Saccheri, Lambert y Legendre ya vistas líneas más arriba.

Bernhard Riemann (1826-1866). El primero en notar la existencia de un sistema geométrico compatible con la hipótesis del ángulo obtuso fue Riemann, porque fue el primero en sustituir la hipótesis de la recta infinita, con la otra más general de recta ilimitada. Riemann hace la distinción entre infinito e ilimitado considerándola de importancia fundamental.

El postulado que atribuye a la recta una longitud infinita, sobreentendido en las investigaciones de los precedentes geómetras, no es para Riemann menos discutible que el de las paralelas; lo que Riemann considera indiscutible es la ilimitación del espacio, propiedad compatible tanto con la hipótesis de la recta infinita (abierta) como con la de la recta finita (cerrada). Los efectos son:

- *Estancamientos* identificados por la filosofía kantiana y la representación Visual geométrica.
- *Área metodológica*: la representación visual de las rectas paralelas
- *Área lógica*: la contradicción entre la posibilidad lógica y la representación visual

7 Replanteamiento de la teoría de las paralelas

Los conceptos y métodos matemáticos en general, no son el producto de una o dos mentes aisladas. Varios científicos aportaron sus resultados creando un terreno fértil para dar pasos más decisivos y ambiciosos. Ahí estaban Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Lobachevski, Bolyai, Klugel, Kastner, D'Alembert, Lagrange, L. N. M. Carnot, Laplace, J. B. Fourier, G. Monge y muchos otros que durante siglos trabajaron el postulado de las paralelas para buscar una mejor comprensión de la geometría.

Gauss concibe una geometría (un modelo del espacio) en la que no se cumple el V postulado de Euclides, pero no publica su descubrimiento. Lobachevsky, de manera independiente publica una geometría distinta en la que no se verifica

¹⁴Cfr. El discurso de A. Vasiliev sobre Lobachevsky (Kazán, 1893).

tampoco el V postulado, planteando que existen al menos dos rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada y Riemann planteó un postulado contrario al quinto de Euclides en el que acepta que por un punto exterior a una recta dada, no pasa ninguna paralela a ella.

Lo sorprendente es que no se llega a contradicción alguna, lo cual quiere decir dos cosas (Nagel, E. (1994)):

1. El V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro. Es decir, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado. Esto significa que, puede demostrarse la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones dentro de un determinado sistema¹⁵.
2. Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, por un punto que no esté en una cierta recta no pasa una única recta paralela a la dada. Esto es tremendamente antiintuitivo, pues no se puede concebir tal cosa, no se puede imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta, plano, etc. Es decir, la solución de la cuestión planteada por el axioma de las paralelas obligó a admitir que Euclides no había dicho la última palabra acerca de la geometría, ya que pueden construirse nuevos sistemas de geometría utilizando cierto número de axiomas distintos de los adoptados por Euclides e incompatibles con ellos.

De los trabajos de Gauss y Lobachevsky se puede replantear la teoría de las paralelas de la siguiente manera:

- Definición de Paralelas: Existe una recta a y un punto A que no le pertenece, tal que por A pasa al menos una recta que no corta a a y está en un mismo plano con ella.
- Postulado alterno al de Euclides: Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna o al menos una paralela. Si pasa al menos una, entonces se sigue con las siguientes:
- Propiedades de las Paralelas:
 - Existencia. Por un punto dado trazar al menos una recta paralela a otra recta dada.
 - Reflexividad. Toda recta es paralela a sí misma.
 - Simetría. Si a es paralela a b , b es paralela a a .

¹⁵Esto tiene que ver con la consistencia y la completitud de un conjunto de axiomas. El trabajo de Gödel es una demostración de la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones importantes de la aritmética.

- Transitividad. Si la recta a es paralela a la recta b y b es paralela a la recta c , la recta a es paralela a la recta c .

El enunciado de Playfair resalta las dos cualidades inherentes del paralelismo euclidiano: la existencia de una paralela a una recta dada por un punto exterior a ella, y la unicidad de dicha paralela. Entonces es claro que hay dos formas de negar el Axioma de Playfair (y por lo tanto, el postulado de las paralelas de Euclides):

1. Negando la existencia. Por un punto exterior a una recta no existe paralela alguna. Es el caso de la geometría elíptica de Riemann.
2. Negando la unicidad. Por un punto exterior a una recta existe al menos una paralela:
 - Si existe una y sólo una paralela se tiene el caso de la geometría parabólica de Euclides.
 - Si existen al menos dos rectas paralelas se tiene el caso de la geometría hiperbólica de Lobachevsky

8 Consistencia de las geometrías de Euclides, Lobachevsky y Riemann

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas junto con un conjunto de tensiones teóricas como la emergencia de las paradojas y la discusión respecto a la fundamentación de las matemáticas, son elementos que dieron lugar a un estudio más profundo y a un refinamiento del Método Axiomático que, a partir de la Axiomática Material Griega produjo por evolución, la Axiomática Formal Moderna; la primera fase del desarrollo de las geometrías no euclidianas culminó con los trabajos de Gauss, Lobachevsky y Riemann. Un hecho muy importante de la segunda fase fue la publicación, en 1868, por el geómetra italiano Eugenio Beltrami (1835 - 1900), de un artículo que dio una respuesta definitiva al problema de la consistencia de las nuevas geometrías (de Lobachevski y Riemann). Se recordará que Saccheri estaba convencido de que la hipótesis del ángulo agudo que dio origen a la geometría de Lobachevsky, debía conducir a una contradicción lógica, y que al no ser capaz de “establecerla”, rechazó dicha hipótesis, más por razones estéticas que por razones lógicas, como “repugnante a la naturaleza de la línea recta”. Ninguno de ellos había logrado resolver la inquietante cuestión de la consistencia lógica.

El trabajo de Beltrami interpretaba la geometría no euclidiana de Lobachevski como una geometría sobre ciertas clases de superficies en el espacio euclídeo tridimensional. Por tanto, las propiedades paradójicas de la nueva geometría se dan de hecho en esas superficies y así una inconsistencia en la nueva geometría representaba también una inconsistencia en la geometría euclidiana. La nueva geometría

es, por todo esto, tan consistente como la antigua, y euclides quedó por fin, liberado de todo error¹⁶; la demostración de la consistencia de las tres geometrías se puede hacer con la propuesta axiomática de Hilbert (1862- 1943) y también sobre la base de que la aritmética es consistente¹⁷.

Así, la independencia real del V postulado de Euclides de los demás postulados de la geometría euclidiana no fue incuestionablemente establecida sino hasta que fueron proporcionadas las demostraciones de consistencia de las hipótesis del ángulo agudo y obtuso. Esto es, de la geometría de Lobachevski y de Riemann respectivamente. Ahora, estaban ya reconocidas oficialmente y de manera definitiva por el mundo matemático, las tres geometrías: de Euclides, de Lobachevski y de Riemann.

Fue solamente en el Siglo XIX, principalmente por la obra de Gauss, Lobachevski y Riemann, cuando se demostró la imposibilidad de deducir de otros axiomas el axioma de las paralelas. Este resultado tuvo una importancia intelectual extraordinaria:

- En primer lugar, llamó la atención hacia el hecho de que puede demostrarse la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones dentro de un determinado sistema¹⁸.
- En segundo lugar, la resolución de la cuestión planteada por el axioma de las paralelas obligó a admitir que Euclides no había dicho la última palabra acerca de la geometría, ya que pueden construirse nuevos sistemas de geometría utilizando cierto número de axiomas distintos de los adoptados por Euclides e incompatibles con ellos.

En particular, como ya se mostró, se obtienen resultados extraordinariamente interesantes y fructíferos cuando se sustituye el axioma de las paralelas de Euclides por la hipótesis de que, por un punto dado, puede trazarse más de una paralela a una línea determinada, o, alternativamente, por la hipótesis de que no puede trazarse ninguna paralela. La creencia tradicional de que los axiomas de la geometría pueden ser establecidos como tales por su aparente auto evidencia fue así destruida en su misma base. Además, fue haciéndose cada vez más claro que la tarea propia del matemático puro es deducir teoremas a partir de hipótesis dadas, y que, como matemático, no le atañe la cuestión de decidir si los axiomas que acepta son verdaderos (en el sentido de que son contrastables con la realidad objetiva) sino que sólo le interesa que no haya en ellos contradicción. Estas modificaciones de la geometría ortodoxa estimularon la revisión y perfección de

¹⁶Es decir, que Euclides hizo bien en considerar al V postulado como un postulado.

¹⁷Este hecho es el que le da el carácter de modelo condicionado o relativo. Cabe señalar que la consistencia de la aritmética, a su vez, se supone de la consistencia de la lógica elemental.

¹⁸Como se sabe, el trabajo de Gödel es una demostración de la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones de la aritmética.

las bases axiomáticas de otros muchos sistemas matemáticos, como el álgebra, el análisis, etc.

Así, la existencia de varias geometrías igualmente satisfactorias lógicamente hizo necesario abandonar la concepción de la geometría como descripción del espacio físico, lo que condujo a replantear preguntas tales como ¿Qué es un objeto geométrico? ¿Qué es un espacio geométrico? ¿Qué es geometría? ¿Qué significa verdad en matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza de los postulados sobre los que descansa una geometría? E incluso ¿Cuál es la naturaleza de la verdad en matemáticas?

Referencias

- [1] Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [2] Bachelard, G. (1938). La Formación del Espíritu científico. Presses Universitaires de France, Paris.
- [3] Bonola, R. (1955) Non-Euclidean Geometry, Dover.
- [4] Boyer, C. (1968). Historia de la matemática. Alianza editorial. España.
- [5] Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques. 7(2), 33-115.
- [6] Díaz, M. (1999) Tesis de maestría. Fundamentos de la Matemática: Análisis de la Primera crisis.
- [7] Euclides. (1991). *Los Elementos*. Traducida por María Luisa Puertas Castaño. España: Editorial Grerods.
- [8] Hilbert, D. (1962). Foundations on Geometry, Open Court Publishing Co.
- [9] Kant, I. (1957). Crítica de la Razón Pura, Biblioteca Filosófica, Losada.
- [10] Kline, M. (1985). Matemáticas la Pérdida de la Certidumbre, Siglo XXI.
- [11] Kline, M. (1990). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press.
- [12] Kolmogorov, A. N. (1985), La matemática: su contenido, su método y significado, España. Alianza Universidad.
- [13] Lakatos, I. (1978). Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza Universidad.
- [14] Nagel, E. (1994). El Teorema de Gödel, Tecnos, S. A.

- [15] Poincaré, H. (1988). Filosofía de Ciencia, Nuestros Clásicos 32, U.N.A.M.
- [16] Ríbnikov, K. A. (1987), Historia de las matemáticas, Moscú: Editorial Mir.
- [17] Russell, B. (1956). An essay on the foundations of geometry. Dover publications, inc., N. Y.
- [18] Sánchez, C. (1987). Conferencias sobre problemas filosóficos y metodológicos de la matemática, Cuba: Universidad de la Habana.
- [19] Sigarreta, J. M. (2004). The evolution of geometry from a historical perspective. Bol. Aso. Mat. Ven. XI, 85 -95.
- [20] Vera, F. (1970). Científicos griegos. Madrid, España. Edit. Aguilar.
- [21] Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de la matemática. S XXI, española edictores, S. A.
- [22] Wolfe, H.E. (1945). Introduction to Non-Euclidean Geometry, Holt, Reinhert and Winston.

Dirección de los autores

Agustín Sánchez Pastor — Facultad de Ingeniería, Chilpancingo, Guerrero - México

e-mail: nitsugasp@hotmail.com

José M. Sigarreta Almira — Facultad de Matemáticas, Acapulco, Guerrero - México

e-mail: nitsugasp@hotmail.com