



**Un proceso de modelación en el contexto de la actividad artesanal de recolección de
piangua a través de la función por tramos**

Nidia Marcela Caicedo Murillo´

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática

2022



**Un proceso de modelación en el contexto de la actividad artesanal de recolección de
piangua a través de la función por tramos**

Nidia Marcela Caicedo Murillo´

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Magister en
Educación con énfasis em Educación en Matemática

Directora:

Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática

2022

DEDICATORIA

Este proyecto de investigación se lo dedico a mi pequeño Ian Ángel Valderrama Caicedo, quien es mi motivación día a día desde su llegada a nuestro hogar, mi fuerza y mi razón de perseverar cada día. Gracias a Dios por ti, por regalarnos la oportunidad de tenerte en nuestras vidas. En ti se refleja la misericordia de Dios para con nosotros. Te amamos.

AGRADECIMIENTOS

En primer momento, agradezco a Dios por permitirme alcanzar este logro, darme fuerzas cada día para continuar perseverante y por su misericordia inconmensurable para conmigo.

Agradezco a mi esposo, por el apoyo, por confiar y creer en mis habilidades, por las largas horas de trabajo, por las frases de aliento en los momentos de debilidad.

A mi madre hermosa, por sus orientaciones en el camino de la vida que han permitido ser quien soy, porque es la primera en creer en mí y apoyar mis sueños, siendo este uno de ellos.

A cada una de las personas que contribuyeron en gran manera en el proceso para que este proyecto se llevara a cabo.

A mi tutora Ligia Amparo Torres Rengifo, por el acompañamiento, las enseñanzas que me deja a raíz de este proceso, por su voz de motivación y apoyo constante, por creer en mí y en este proyecto.

A los evaluadores Armando Alex Aroca Araujo y Cristian Andrés Hurtado Moreno, por sus comentarios que contribuyeron de manera significativa en el perfeccionamiento de este trabajo de investigación, aportando en mi formación académica.

RESUMEN

La presente investigación parte del reconocimiento de la importancia de los procesos de modelación a partir de contextos cotidianos para lograr el desarrollo de pensamiento matemático, específicamente el pensamiento variacional, donde se emplea la función por tramos como medio para modelar el contexto artesanal de recolección de pianguas, de forma que se movilice en los estudiantes los niveles de modelación y del razonamiento covariacional, logrando el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional. Para ello, se diseña una secuencia didáctica que contempla los diferentes aportes de las perspectivas abordadas para el desarrollo de este trabajo, perspectiva didáctica, curricular y matemática. Posterior a la implementación de la propuesta de aula con los estudiantes de grado noveno y el análisis de los mismos a partir de la matriz de análisis que articula la covariación, los niveles de modelación, los niveles de razonamiento covariacional y el contenido matemático, los resultados permiten concluir que la modelación como principal fin del pensamiento variacional permite que los estudiantes comprendan el estudio de la covariación, reconozcan la función como relación de dependencia y adquieran apropiación de conceptos matemáticos, para este caso la función por tramos y sus componente, así como el alcance de los niveles de modelación y de razonamiento covariacional.

Palabras claves: covariación, razonamiento covariacional, modelación, función por tramos, pensamiento variacional.

ABSTRACT

This research is based on the recognition of the importance of modeling processes from everyday contexts to achieve the development of mathematical thinking, specifically variational thinking, where the function by sections is used as a means to model the artisanal context of collecting pianguas, so that the levels of modeling and covariational reasoning are mobilized in students, achieving the development of some aspects of variational thinking. For this, a didactic sequence is designed that contemplates the different contributions of the perspectives addressed for the development of this work, didactic, curricular and mathematical perspective. After the implementation of the classroom proposal with the ninth grade students and their analysis based on the analysis matrix that articulates the covariation, the modeling levels, the covariational reasoning levels and the mathematical content, the results allow us to conclude that modeling as the main purpose of variational thinking allows students to understand the study of covariation, recognize the function as a dependency relationship and acquire appropriation of mathematical concepts, in this case the function by sections and its components, as well as the scope of the levels of modeling and covariational reasoning.

Keywords: covariation, covariational reasoning, modeling, piecewise function, variational thinking.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	19
CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN.....	23
1.1. Planteamiento y formulación del problema	24
1.1.2. Planteamiento del problema	24
1.2. Objetivos	33
1.2.1. Objetivo general	33
1.2.3. Objetivos específicos.....	33
1.3. Justificación.....	34
1.4. Antecedentes	39
1.4.1. Antecedentes de la investigación.....	39
1.4.2. Algunas investigaciones con relación a la función por tramos	39
1.4.3. Antecedentes relacionados con la modelación matemática.....	44
1.4.4. Antecedentes relacionados con la modelación con función por tramos	49
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL.....	53
2.1. Perspectiva curricular	53
2.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas	53
2.1.2. Estándares Básicos De Competencias de Matemáticas.....	58
2.1.3. Derechos básicos de aprendizaje de Matemáticas.....	62
2.2. Perspectiva didáctica	67
2.2.1. Educación matemática realista (EMR)	67
2.2.2. Principios fundamentales de la Educación Matemática Realista	68

2.2.3. Procesos de modelación en la enseñanza de las matemáticas	73
2.2.4. La Modelación desde la Educación Matemática Realista.	79
2.2.5. Razonamiento covariacional.....	80
2.2.6. Dificultades relacionadas con el aprendizaje de la función por tramos.	85
2.2.7. Secuencia Didáctica como propuesta en la actividad matemática de aula	87
2.3. Perspectiva matemática	91
2.3.1. Algunos aspectos históricos del concepto de función	92
2.3.2 Definición matemática de una función por tramos.....	97
2.4. Articulación de los referentes curriculares.....	98
CAPÍTULO 3. LA FUNCIÓN POR TRAMOS EN LA ESCUELA	101
3.1 Sobre el diseño de la secuencia didáctica.....	101
3.1.1. sobre el diseño de las situaciones y actividades	102
3.1.2. La secuencia didáctica	104
3.2. Sobre la implementación.....	124
3.2.1. sobre el contexto de desarrollo	124
3.2.2 Sobre la Metodología de implementación	126
3.3. Resultados y análisis de los resultados.....	128
3.3.1. Resultado y análisis de resultados de la situación 1	132
3.3.2 Análisis de resultado de la situación 2.....	210
CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES GENERALES	278
4.1. Conclusiones	278
REFERENCIAS.....	284
ANEXOS	292

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1 Rectángulos en una Tabla de 3x3	66
Tabla 2 Perspectivas de la Modelación	74
Tabla 3 Razonamiento Covariacional.....	81
Tabla 4 Principales Componentes de una Secuencia Didáctica por Competencias	89
Tabla 5 Situaciones, Contenido Matemático y Desempeño.....	103
Tabla 6 Docenas de Pianguas por Día	108
Tabla 7 Ingreso por Día.....	108
Tabla 8 Registro de Docenas de Piangua de 3.0 cm a 4.5 cm.....	111
Tabla 9 Registro de Docenas de Piangua de 5.0 cm a 9.0 cm.....	111
Tabla 10 Docenas de Piangua con Diámetro de 3.0 cm a 4.5 cm	115
Tabla 11 Docenas de Piangua con Diámetro de 5.0 cm a 6.5 cm	116
Tabla 12 Docenas de Piangua con Diámetro de 7.0 cm a 9.0 cm	116
Tabla 13 Piangueros Transportados en una Semana	118
Tabla 14 Definición de función por tramos	120
Tabla 15 Matriz de Análisis	130
Tabla 16 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 1a (S1T1P1a).....	132
Tabla 17 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 1b (S1T1P1b).....	133
Tabla 18 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 2a (S1T1P2a).....	133
Tabla 19 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 2b (S1T1P2b).....	134
Tabla 20 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 3a (S1T1P3a).....	136
Tabla 21 Situación 1, Tarea 1, Pregunta 3b (S1T1P3b).....	137

Tabla 22 Docenas de Pianguas por Día	140
Tabla 23 Ingreso por Día.....	140
Tabla 24 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 1 S1T2P1	141
Tabla 25 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2a (S1T2P2a).....	143
Tabla 26 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2b (S1T2P2b).....	144
Tabla 27 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2c (S1T2P2c)	146
Tabla 28 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2d (S1T2P2d).....	147
Tabla 29 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2e (S1T2P2e)	149
Tabla 30 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3a (S1T2P3a).....	150
Tabla 31 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3b (S1T2P3b).....	152
Tabla 32 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3c (S1T2P3c)	153
Tabla 33 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 4a (S1T2P4a).....	155
Tabla 34 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 4b (S1T2P4b).....	156
Tabla 35 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 5a (S1T2P5a).....	157
Tabla 36 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 5B (S1T2P5b)	158
Tabla 37 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6a (S1T2P6a).....	160
Tabla 38 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6b (S1T2P6b).....	161
Tabla 39 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6c (S1T2P6c)	162
Tabla 40 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7a(S1T2P7a).....	164
Tabla 41 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7b (S1T2P7b).....	164
Tabla 42 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7c (S1T2P7c)	165
Tabla 43 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 8a (S1T2P8a).....	168
Tabla 44 Situación 1, tarea 2, pregunta 8b (S1T2P8b)	168

Tabla 45 Situación 1, Tarea 2, Pregunta 8c (S1T2P8c)	169
Tabla 46 Registro de Docena de Piangua con Medidas de 3.0 cm a 4.5 cm.....	170
Tabla 47 Registro de Docena de Piangua con Medidas de 5.0 cm a 9.0 cm.....	170
Tabla 48 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 1 (S1T3P1).....	171
Tabla 49 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2a).....	172
Tabla 50 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2b).....	174
Tabla 51 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2c).....	175
Tabla 52 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3 (S1T3P3).....	177
Tabla 53 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3a (S1T3P3a).....	178
Tabla 54 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P3b).....	179
Tabla 55 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3c (S1T3P3c)	181
Tabla 56 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4 (S1T3P4a).....	183
Tabla 57 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4 (S1T3P4b).....	184
Tabla 58 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5a).....	186
Tabla 59 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1t3p5b)	189
Tabla 60 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5c).....	190
Tabla 61 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5d).....	191
Tabla 62 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5e).....	192
Tabla 63 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5f).....	194
Tabla 64 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5g).....	195
Tabla 65 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1a (S1T4P1a).....	196
Tabla 66 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1b (S1T4P1b).....	197
Tabla 67 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c (S1T4P1c)	198

Tabla 68 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1d (S1T4P1d).....	201
Tabla 69 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2a (S1T4P2a).....	203
Tabla 70 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b (S1T4P2b).....	205
Tabla 71 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2c (S1T4P2c)	207
Tabla 72 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2d (S1T4P2d).....	208
Tabla 73 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1a (S2T1P1a).....	210
Tabla 74 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1b (S2T1P1b).....	211
Tabla 75 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1c (S2t1p1c).....	213
Tabla 76 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1d (S2t1p1d)	214
Tabla 77 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a (S2T1P2a).....	215
Tabla 78 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b(S2T1P2b).....	216
Tabla 79 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2c(S2T1P2c)	218
Tabla 80 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2d(S2T1P2d).....	219
Tabla 81 Piangüeros Transportados en una Semana	221
Tabla 82 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1a (S2T2P1a).....	221
Tabla 83 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1b (S2T2P1b).....	222
Tabla 84 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1c (S2T2P1c)	223
Tabla 85 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2a (S2T2P2a).....	225
Tabla 86 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2b (S2T2P2b).....	225
Tabla 87 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3a (S2T2P3a).....	227
Tabla 88 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3b (S2T2P3b).....	228
Tabla 89 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4a (S2T2P4a).....	230
Tabla 90 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4b (S2T2P4b).....	231

Tabla 91 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5a).....	233
Tabla 92 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5b).....	234
Tabla 93 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5c).....	235
Tabla 94 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6a (S2T2P6a).....	236
Tabla 95 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6b (S2T2P6b).....	237
Tabla 96 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6c (S2T2P6c)	240
Tabla 97 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 7 (S2T2P7).....	241
Tabla 98 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1a (S2T3P1a).....	242
Tabla 99 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b (S2T3P1b).....	245
Tabla 100 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1c (S2T3P1c)	247
Tabla 101 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1d (S2T3P1d).....	249
Tabla 102 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1e (S2T3P1e)	250
Tabla 103 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2a (S2T3P2a).....	252
Tabla 104 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2b (S2T3P2b).....	254
Tabla 105 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2c (S2T3P2c)	256
Tabla 106 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2d (S2T3P2d).....	257
Tabla 107 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e (S2T3P2e)	259
Tabla 108 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a(S2T3P3a).....	262
Tabla 109 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a(S2T3P3b).....	264
Tabla 110 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3c(S2T3P3c)	266
Tabla 111 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4a(S2T3P4a).....	268
Tabla 112 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4b (S2T3P4b).....	270
Tabla 113 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4c (S2T3P4c)	270

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1 Elementos básicos de la construcción de modelos.....	57
Figura 2 Coherencia Vertical y Horizontal relacionado con el pensamiento variacional.....	61
Figura 3 Ejemplificación caja cubica	64
Figura 4 Tablero 8 x 8.....	65
Figura 5 Niveles de Matematización Según Freudenthal	71
Figura 6 Componentes de una Secuencia Didáctica desde el Enfoque Socioformativo de las Competencias.....	89
Figura 7 Función Propuesta por Euler	95
Figura 8 Ejemplo Propuesto por Cauchy	95
Figura 9 Ejemplo1 Función Definida por Tramos.....	97
Figura 10 Ejemplo 2 Función Definida por Tramos.....	97
Figura 11 Ejemplo Grafica de una Función Definida por Tramos	98
Figura 12 Síntesis de las perspectivas que aporta al diseño de la propuesta de aula.....	100
Figura 13 Pianguas Recolectadas en Canasta	106
Figura 14 Piangua con Medida de 4.0 cm	106
Figura 15 Piangua con Medida de 6.5 cm	107
Figura 16 Cantidad de Docenas Sacadas por Ana Durante 24 Días	113
Figura 17 Cantidad de Camisetas Fabricadas por Pedido	123
Figura 18 Situación 1, Tarea1, Pregunta 1a, 1b, 2a, 2b, Estudiante 1 (S1T1P1P2E1).....	136
Figura 19 Situación 1, Tarea1, Pregunta 3a, Estudiante 4 (S1T1P3AE4)	138
Figura 20 Situación 1, Tarea1, Pregunta 3b, Estudiante 1 (S1T1P3BE1)	138

Figura 21	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 1, Estudiante 1 (S1T2P1E1).....</i>	<i>142</i>
Figura 22	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 2a, 2b, Estudiante 1 (S1T2P2A2BE1).....</i>	<i>145</i>
Figura 23	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 2c, Estudiante 2 (S1T2P2CE1)</i>	<i>147</i>
Figura 24	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 2d, Estudiante 4 (S1T2P2DE4).....</i>	<i>148</i>
Figura 25	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 2e, Estudiante 1 (S1T2P2E1).....</i>	<i>150</i>
Figura 26	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 2e, Estudiante 3(S1T2P2EE3)</i>	<i>150</i>
Figura 27	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 3a, Estudiante 5(S1T2P3AE5)</i>	<i>151</i>
Figura 28	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 3b, Estudiante 5(S1T2P3BE5)</i>	<i>153</i>
Figura 29	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 3c, Estudiante 5(S1T2P3CE5)</i>	<i>155</i>
Figura 30	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 4a, 4b, Estudiante 5 (S1T2P4A,4BE5).....</i>	<i>157</i>
Figura 31	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 5b, Estudiante 1 (S1T2P5BE1)</i>	<i>159</i>
Figura 32	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 5a Estudiante 1(S1T2P5AE1</i>	<i>160</i>
Figura 33	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 6a, Estudiante 1(S1T2P6AE1)</i>	<i>163</i>
Figura 34	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 6c, Estudiante 5(S1T2P6CE5)</i>	<i>163</i>
Figura 35	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 7c, Estudiante 5(S1T2P7CE5)</i>	<i>166</i>
Figura 36	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 7c Estudiante 3(S1T2P7A7B7CE3)</i>	<i>167</i>
Figura 37	<i>Situación 1, Tarea2, Pregunta 8c Estudiante 4(S1T2P8CE4)</i>	<i>170</i>
Figura 38	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 1 Estudiante 4(S1T3P1E4).....</i>	<i>172</i>
Figura 39	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2a Estudiante 3(S1T3P2AE3)</i>	<i>173</i>
Figura 40	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2b Estudiante 1(S1T3P2BE1)</i>	<i>175</i>
Figura 41	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2c Estudiante 1(S1T3P2cE1)</i>	<i>176</i>
Figura 42	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2c Estudiante 1(S1T3P2BE2)</i>	<i>177</i>
Figura 43	<i>Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3a, 3b Estudiante 1(S1T3P3E1).....</i>	<i>180</i>

Figura 44 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3 Estudiante 1(S1T3P3E1).....	180
Figura 45 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3c Estudiante 1(S1T3P3CE1)	182
Figura 46 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4a, 4b Estudiante 4(S1T3P4E4).....	185
Figura 47 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5a Estudiante 1(S1T3P5E1).....	188
Figura 48 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5a Estudiante 2(S1T3P5E2).....	188
Figura 49 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5c, 5d Estudiante 1(S1T3P5E1).....	192
Figura 50 Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5e, Estudiante 4(S1T3P5E4).....	193
Figura 51 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1a,1b, Estudiante 2(S1T4P1BE2)	198
Figura 52 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c, Estudiante 1(S1T4P1CE1)	200
Figura 53 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c, Estudiante 4(S1T4P1CE4)	201
Figura 54 Situación 1, tarea 4, pregunta 1d, Estudiante 2 (S1T4P1DE2)	203
Figura 55 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2a, Estudiante (S1T4P2AE4)	205
Figura 56 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S1T4P2BE1)	206
Figura 57 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b, Estudiante 3 (S1T4P2BE3)	207
Figura 58 Situación 1, tarea 4, pregunta 2c, Estudiante 3(S1T4P2CE3).....	208
Figura 59 Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2d, Estudiante 4(S1T4P2DE4).....	210
Figura 60 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1a, Estudiante 1 (S2T1P1E1).....	213
Figura 61 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a, Estudiante 2 (S2T1P2E2).....	217
Figura 62 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a, Estudiante 5 (S2T1P2E5).....	217
Figura 63 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S2T1P2E1).....	218
Figura 64 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S2T1P2E1).....	218
Figura 65 Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2c, 2d, Estudiante 4 (S2T1P2E4).....	220
Figura 66 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1a, Estudiante 1 (S2T2P1E1).....	223

Figura 67 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2a, Estudiante 4(S2T2P2E4).....	227
Figura 68 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3a, 3b, Estudiante 4(S2T2P3E4).....	230
Figura 69 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4a, 4b, Estudiante 4 (S2T2P4E4).....	232
Figura 70 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5c, Estudiante 1(S2T2P5E1).....	236
Figura 71 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6b, Estudiante 1(S2T2P6E1).....	239
Figura 72 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6a, Estudiante 3(S2T2P6E3).....	239
Figura 73 Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6c, Estudiante 3(S2T2P6E3).....	242
Figura 74 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1a, Estudiante 1(S2T3P1E1).....	244
Figura 75 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b, Estudiante 1(S2T3P1E1).....	246
Figura 76 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b, Estudiante 4(S2T3P1E4).....	246
Figura 77 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1c, Estudiante 2(S2T3P1E2).....	249
Figura 78 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1d, Estudiante 2(S2T3P1E2).....	250
Figura 79 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2a, Estudiante 4(S2T3P2E4).....	254
Figura 80 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2b, Estudiante 2(S2T3P2E2).....	255
Figura 81 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2c, Estudiante 1(S2T3P2E1).....	259
Figura 82 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e, Estudiante 4 (S2T3P2E4).....	261
Figura 83 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e, Estudiante 3(S2T3P2E3).....	261
Figura 84 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a, Estudiante 2(S2T3P3E2).....	263
Figura 85 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3b, Estudiante 4(S2T3P3E4).....	265
Figura 86 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3b, Estudiante 4(S2T3P3E4).....	265
Figura 87 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3c, Estudiante 5(S2T3P3E5).....	267
Figura 88 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4a, Estudiante 5(S2T3P4E5).....	269
Figura 89 Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4c,4b Estudiante 4(S2T3P4E4).....	272

ANEXOS

	Pág.
Anexo A <i>Proceso De Conservación Del Molusco Piangua</i>	292
Anexo B <i>Marcación de Manglares</i>	295
Anexo C <i>Control y Monitoreo</i>	295

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de esta investigación se enmarca en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) con el propósito de favorecer el desarrollo del pensamiento variacional desde la modelación matemática en un contexto real, de manera que, a través de los niveles establecidos en los principios de niveles de la EMR se logre la comprensión de la función por tramos desde la modelación de fenómenos en el contexto artesanal de recolección de pianguas, colocando al estudiante como principal participante de la construcción del conocimiento. En esta dirección, este trabajo se ubica en la línea de investigación de didáctica de las matemáticas de la maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática.

Ahora bien, desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes es fundamental, puesto que permite adquirir habilidades para comprender situaciones cotidianas que involucren variación y cambio, es importante reconocer que este pensamiento coloca en juego todo el demás pensamiento matemáticos en su proceso de construcción. En esta dirección, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) establecen los procesos de modelación como pilar fundamental en la formación de pensamiento variacional, involucrando el contexto donde se desarrolla el estudiante, de manera que se evidencien las principales características de este pensamiento.

Es importante resaltar que algunos autores de la literatura internacional se refieren a la modelación como matematización o modelización. Para efecto de este trabajado, se utilizará el término modelación, el cual es usado en Colombia para designar los procesos que se relacionan con el paso de fenómenos a un modelo matemático, “como el método que permite al estudiante aprender las matemáticas de una manera aplicada, además de mejorar la capacidad para leer,

formular, interpretar y solucionar diferentes situaciones problemas (Biembengut y Hein, 2004. p. 105).

En este sentido, para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo a través de una propuesta de aula que integra procesos de modelación con la función por tramos, en el contexto artesanal de la recolección de pianguas, se pueden desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional a través del razonamiento covariacional en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña? se propone el diseño de una secuencia didáctica compuesta por dos situaciones, la primer situación relaciona la recolección y comercialización de pianguas, con la cual se buscaba que los estudiantes identificaran las magnitudes involucradas en el contexto, las relaciones de dependencia existente entre ellas, además de realizar diferentes representaciones y comprensión de las mismas, a su vez, reconocieran las variaciones y cambios presentes como un primer acercamiento al estudio de la covariación. La segunda situación, en la tarea 1 y 2 se enfatiza en el transporte para la recolección de pianguas, en la tarea 3 se aborda el estudio de la función por tramos en diferentes contextos. Esta situación además de fortalecer los aspectos trabajados en la situación 1, trabaja el estudio de la continuidad y discontinuidad en la recta numérica y enfatiza en la caracterización de la función por tramos, objeto matemático en estudio. A continuación, se describe la organización del contenido que soporta esta investigación.

En el primer capítulo, se presentan los aspectos generales de la propuesta de investigación, iniciando con el planteamiento del problema soportado con investigaciones que se enfocan en el interés de la problemática expuesta, la pregunta problematizadora y los objetivos que guían el desarrollo del trabajo y lo que se espera lograr. Posteriormente, se aborda la justificación desde una perspectiva curricular y algunas investigaciones que dan cuenta de la

pertinencia de este proyecto, en este capítulo se encuentran también los antecedentes alrededor de la función por tramos y los procesos de modelación.

En el segundo capítulo, se aborda el marco de referencia conceptual el cual se divide en tres partes: perspectiva curricular, perspectiva didáctica y perspectiva matemática. En la perspectiva curricular se presentan los documentos que direccionan los procesos de enseñanza en Colombia y la postura de estos en relación al desarrollo del pensamiento variacional, la perspectiva didáctica hace especial énfasis en los principales componentes comprendidos en la investigación como lo es la Educación Matemática Realista (EMR) y los principios que esta fundamenta, la modelación desde la EMR, el razonamiento covariacional, las dificultades presentes en el aprendizaje de la función por tramos y la definición de secuencia didáctica que se tendrá en cuenta en el trabajo. Finalmente, se presenta una articulación de los aspectos relevantes de cada una de las perspectivas que aportan a la construcción de la secuencia didáctica.

En relación al capítulo tres, en este se presentan los aspectos relacionados con el diseño de la secuencia didáctica como propuesta de aula, se describen cada una de las situaciones que la componen, se especifican los desempeños involucrados, así como los conceptos matemáticos abordados. También, se presenta la metodología de aplicación y los resultados y análisis de resultados de la investigación.

Finalmente, en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones obtenidas a partir de la implementación de la secuencia didáctica, la cuales se realizan en base al objetivo general y objetivos específicos planteados en la investigación.

Es necesario mencionar, posterior al diseño y aplicación de la situación 1 (S1) y la situación 2 (S2), el trabajo conjunto de este territorio del pacifico colombiano por mantener la conservación del recurso piangua como sustento económico, no tenerlo en cuenta desmeritaría los

esfuerzos y podría mal interpretarse y entenderse que en estas comunidades no se respeta la norma establecida por el INPA en la resolución 539 del 2000, donde establece que solo se permite la extracción de la piangua con medida de 5.0 cm con el fin de conservar este molusco. Por lo cual, se resalta que a pesar de que algunos habitantes aun sacan las pianguas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm se observa gran avance por conservar este recurso, pues la piangua que se encuentra entre estas medidas es recolectada y vendida muy poco por parte de las piangueras desde comienzo del año 2015. Además, para el año 2019 se creó la asociación RAICES PIANGUERAS, la cual realiza control y monitoreo para vigilar que no se extraiga del manglar las pianguas hasta no encontrarse con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm aptas para su consumo y venta. Del mismo modo, realizan campañas de concientización con la comunidad en general, específicamente con los adolescentes y jóvenes que son los que más recolectan pianguas por fuera de la medida permitida, con el fin de educar y preservar este recurso.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales de la propuesta de investigación, inicialmente se aborda la presentación del problema basada en las dificultades presentes en el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional en los estudiantes, con sus principales causas en la enseñanza tradicional y no reconocer el papel del contexto en las aulas de clase, así como el poco énfasis que se hace en las funciones por tramos. Además, se presenta en este capítulo el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación. De igual manera, se encuentra la justificación, la cual da cuenta de la importancia del desarrollo del presente trabajo como aporte al desarrollo del pensamiento variacional. Finalmente, se presentan los antecedentes que dejan en evidencia la necesidad de abordar el concepto de función por tramos, la modelación matemática y estrategias didácticas que estimulen el desarrollo del pensamiento variacional.

1.1. Planteamiento y formulación del problema

1.1.2. Planteamiento del problema

En el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas específicamente del álgebra escolar, se presentan dificultades de diversa naturaleza. En relación a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Carrillo (2009) las clasifica en tres bloques, las dificultades provocadas por la propia naturaleza de las matemáticas, las producidas por las circunstancias, tales como el profesorado, su metodología y la organización, y aquellas producidas por la falta de comprensión del alumno, pudiendo estar generadas por varios y diversos motivos. El primer bloque se relaciona con la complejidad de los conceptos, la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, el carácter lógico y el lenguaje matemático, el segundo hace referencia a la enseñanza inadecuada, alejada del entorno y la experiencia de los estudiantes, donde se pueden identificar dificultades en la ausencia de conocimientos previos, nivel de abstracción, ausencia de habilidades y la exposición inadecuada del contenido, el último bloque involucra las creencias y aptitudes sobre las matemáticas, dificultades relacionadas con los procesos del desarrollo cognitivo, la adquisición de las nociones básicas y principios numéricos, dificultades con el manejo de la numeración y la resolución de problemas.

Respecto al aprendizaje del álgebra escolar, Castro (2012) manifiesta que las dificultades y obstáculos presentes se vinculan con la construcción de expresiones algebraicas, la jerarquía de las operaciones, el uso de paréntesis, la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, procesos que carecen de sentido para los estudiantes a los cuales no le encuentran justificación.

Por otro lado, Wagner y Parker (s.f.) clasifican las dificultades y obstáculos del álgebra en tres tipos: la primera se relaciona con el tema en sí, la segunda está estrechamente relacionada con el alumno, la tercera son consecuencia de las técnicas de enseñanza, la cual refiere a las técnicas de enseñanza tradicional, en este sentido, Breiteig y Grevholm (s.f.) expresan que la primera se relaciona con la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, el uso de las variables, los elementos que la componen y las reglas que la rigen, la segunda son las dificultades inherentes al sujeto, referentes a la complejidad que supone la abstracción y la generalización, acciones que desempeñan un papel destacado en el álgebra, considerándose como una de las razones que obstaculizan el aprendizaje de esta materia.

Las dificultades relacionadas con el tipo enseñanza que reciben los estudiantes del álgebra ha sido de interés para diversos investigadores Blanton y Kaput (2005); Booth (1999); Carpenter, Franke y Levi (2003); Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006); Fujii, (2003) estos expresan que la enseñanza tradicional hace que cuando se piense en álgebra inmediatamente se relacione con ecuaciones, factorización de polinomios, funciones y gráficas, muchos estudiantes consideran que el álgebra fue el punto donde las matemáticas dejaron de tener conexión con el mundo real.

En este sentido, la enseñanza tradicional de las matemáticas como un modelo transmisivo -receptivo donde el profesor elabora contenidos que el alumno recibe pasivamente (Torres, 2014) desarticula las matemáticas del contexto donde se desarrollan los estudiantes, factor que los lleva a pensar que las matemáticas no tienen conexión con su realidad generando dificultades en el aprendizaje, lo que hace necesario involucrar el contexto en el aula. Díaz, Arguedas & Porras (2012) manifiestan que muchos estudiantes presentan dificultades para relacionar las

matemáticas con su cotidianidad y a menudo se preguntan sobre la utilidad de lo que aprenden en el contexto escolar, por lo que es evidente la necesidad de trascender metodologías desligadas de la realidad del estudiante hacia nuevas opciones didácticas que valoren la matemática, su razonamiento y aplicación, desde su contexto sociocultural. En este mismo sentido, Arrieta (2003) sostiene que:

La matemática no es “neutra”, depende del contexto social en donde se aborda. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad matemática. (pág. 3)

De acuerdo con Arrieta (2003), las clases de matemáticas deben generar en el estudiante la capacidad de intuición, razonamiento, comunicación y resolución de problemas, procesos que presentan dificultad, pues se hace hincapié en la resolución de problemas rutinarios fuera del contexto, lo que impide vivenciar en el estudiante las aplicaciones de esta área en la vida real. En esta dirección, Torres (2014) manifiesta que es necesario presentar a los estudiantes un contexto socio cultural en situaciones de aprendizaje matemático que despierte su atención e interés para abordar las actividades y fomenta la motivación por el aprendizaje.

En efecto, el papel del contexto es fundamental en la construcción de significado para que los objetos matemáticos tengan sentido, investigadores como Diaz, Arguedas, Porras (2012), Bravo (2015), Arrieta (2003), Torres (2014) resaltan el papel del contexto en la actividad matemática considerando que las matemáticas cobran vida en actividades contextuales, donde a través de la cultura y sus elementos podrán observar, comprender, intuir y aprender lo que pasa a su alrededor. Las reflexiones de los estudiantes en este tipo de actividades promueven el

desarrollo del pensamiento abstracto, mejora sus procesos motivacionales. Además, las situaciones matemáticas contextualizadas favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos.

En esta misma dirección, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) rescatan el papel del contexto cuando introducen que es fundamentales integrar los pensamientos matemáticos con los procesos de modelación, como herramienta en el aprendizaje de las matemáticas que permite a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos de forma significativa, favoreciendo la resolución de problemas y un mejor aprendizaje a partir de la realidad (situaciones, fenómenos, acciones problemas), colocando en evidencia el rol de las matemáticas en la cotidianidad.

En relación con lo anterior, autores como Blomhøj (2008), Blum (1993), Ortiz & Dos Santos (2011), Biembengut (2007) consideran que la conexión entre la modelización y el contexto contribuye con la comprensión de los estudiantes. Por lo cual, la aplicación de procesos de modelización favorece este propósito en la medida que los estudiantes logren plantear y resolver situaciones problemas en su entorno sociocultural, además, motiva los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desarrollando en los estudiantes la capacidad de establecer raíces cognitivas sobre los cuales construir conceptos matemáticos, disminuyendo así la manipulación mecánica de símbolos. En esta dirección, la modelación contribuye para dar significado a las matemáticas reduciendo la idea de que carecen de sentido y ausencia de significado fortaleciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

En consecuencia, la modelación matemática crea en los estudiantes capacidades y habilidades necesarias para la solución de posibles problemas prácticos al abordar problemas cotidianos, del entorno social y cultural, logrando una re significación de la realidad de manera

tal que, le posibilite asumir una actitud crítica frente a las diversas situaciones. En relación con el pensamiento variacional el cual es el interés en esta investigación, la modelación favorece el desarrollo de actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático etc. Además, aporta al aprendizaje del álgebra, en tanto que, permite a partir de la interacción con el contexto esquematizar la situación a través de modelos algebraicos logrando la generalización de la situación, así como la comprensión de conceptos matemáticos y procedimientos.

Gómez (2013) expresa que el estudio del pensamiento variacional en la escuela debe surgir a partir de las tareas sobre la noción de variación, cambio y procesos de modelación, buscando desarrollar la comprensión y no como un estudio formal de conceptos. De igual manera manifiesta que los procesos de modelación están relacionados directamente con la cuantificación del cambio y estudio de la variación.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) proponen para el estudio del pensamiento variacional comprende que se planteen actividades que involucren fenómenos que coloquen en manifiesto los dos elementos importantes que lo caracterizan como lo es la variación y el cambio, además de situaciones del entorno que ayuden a su desarrollo.

Así mismo, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) presentan que el pensamiento variacional tiene que ver con la percepción, reconocimiento, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos registros simbólicos, ya sean verbales icónicos gráficos o algebraicos. Por tanto, como lo plantea Vasco (s.f) el principal papel del pensamiento variacional es la modelación matemática, argumentando que no es un tema de resolución de problemas, ni de ejercicios, más bien, los mejores problemas y ejercicios deberían

ser desafíos o modelar algún proceso donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problema, esto no se lleva a cabo sin activar el pensamiento variacional.

En consecuencia, el trabajo en contexto que promueva el uso de modelación, es más factible cuando el objeto matemático en estudio en la situación problema ha sido conceptualizado a partir del mundo físico como lo es el caso de la función. Sosa & Aparicio (2009) definen la modelación como una herramienta matemática que permite entender, describir y explicar fenómenos de la ciencia y la cotidianidad, por lo que es fundamental para el desarrollo de procesos de modelación matemática, gracias a la presencia de variación y cambio de las cantidades que la componen.

En ese mismo sentido, el MEN (1998) establece que si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos. Si, por el contrario, se estudian las funciones a partir de la modelación de situaciones de cambio los estudiantes desarrollaran habilidades para establecer relaciones funcionales entre los mundos que cambian, proporcionando significado a la variación y cambio a partir de las situaciones problemáticas de la vida real.

Dentro de este orden de ideas, frente a la necesidad de establecer una conexión entre lo que el docente aborda dentro del aula de clase y el contexto particular en el cual se desarrollan los estudiantes para que las matemáticas cobren sentido, se presentan alternativas teóricas como la Educación Matemática Realista (EMR), desde la cual se busca integrar la actividad matemática con los contextos a través de los procesos de modelación. Por otro lado, como referente teórico que permita analizar las diferentes variaciones, cambios, variables, las relaciones entre las variables en una situación dada en un contexto particular se toma en cuenta el

razonamiento covariacional, el cual al permitir el análisis de cada uno de estos eventos genera una estrecha relación con la modelación.

Ahora bien, reconociendo el papel del contexto en el aprendizaje de las matemáticas, fundamentalmente en el desarrollo del pensamiento variacional, en esta investigación se considera importante el contexto donde se desarrollan diariamente los estudiantes participantes, por lo cual se selecciona como contexto la actividad artesanal de recolección de piangua en articulación con el estudio de la función por tramos.

En cuanto al contexto artesanal de recolección de pianguas, se le llama así a la faena de recoger las pianguas en los manglares para sustento económico y consumo de los habitantes de Bahía Málaga. De acuerdo con el Plan de Bienestar Étnico territorial del Consejo Comunitario de las Comunidades Negras de la Plata – Bahía Málaga (2019-2028), esta es de las actividades económicas más relevantes de esta región y por ello es la actividad que más afectaciones a los ecosistemas está generando. Tradicionalmente la recolección de pianguas era realizada por las mujeres, aunque hoy también puede verse a cargo de hombre y niños. (pág.48)

En relación a la conservación de los ecosistemas establecen en el Plan de Bienestar Étnico territorial del Consejo Comunitario de las Comunidades Negras de la Plata – Bahía Málaga (2019-2028) que uno de los grandes avances frente a la práctica de recolección de pianguas es la concertación de época de vedas y restricción sobre el tamaño mínimo que debe tener la concha para poder ser extraída. De ser menor a 5 centímetros las personas deberán devolverla a su hábitat. Con esto se evidencia que se ha generado una conciencia ambiental frente al tema, y se sabe que estos moluscos ya han cumplido su etapa reproductiva luego de superar el tamaño mínimo, lo cual permite el repoblamiento y evita una posible extinción de tan preciado ser vivo. (pág.49).

En relación al contenido matemático, para el desarrollo de esta propuesta de investigación se abordó la función por tramos como se ha mencionado anteriormente, función que de acuerdo con Rojas (2019) se ha venido presentando a los estudiantes solo como una representación algebraica, lo cual podría ser una de las principales dificultades de aprendizaje en los estudiantes por no presentar esta función mediante otro tipo de representación, como por ejemplo la representación gráfica, donde se evidencien características especiales de esta función. Del mismo modo, evidenció que los estudiantes presentan dificultades para determinar el dominio y rango de una función por tramos, pues no emplean la relación de correspondencia apropiada según los subdominios que representa la función, Breidenbach, Hawks y Nichols (1992) mencionan que muchos estudiantes creen que todas las funciones deberían definirse con una única expresión algebraica, es decir, no contemplarían como tales las funciones definidas por tramos (como se citó en Garijo, 2014).

En consecuencia, aludiendo a las dificultades expuestas en el aprendizaje del concepto de función por tramos y el papel significativo del contexto, en esta investigación se articula el contexto artesanal de recolección de pianguas con este contenido matemático, puesto que en la cotidianidad se presentan constantemente situaciones condicionadas como la hora de salir a una fiesta, de ir a un lugar, de realizar un trabajo, en el descuento o incremento económico de algún producto etc. Situaciones que pueden ser modeladas por funciones a trozos (Caro, 2013). De igual manera, existen problemas matemáticos donde por sus condiciones en ocasiones es necesario plantear más de una función que determina que valores debe tomar la variable, como lo es el caso de la comercialización de la piangua en las comunidades de Bahía Málaga la Plata, donde se permite el desarrollo de un proceso de modelación desde la función por tramos debido a

que las pianguas presentan diferentes medidas y diferentes precios que pueden agruparse en dominios diferentes.

Finalmente, es importante mencionar que el abordaje de la función por tramos permite integrar los conceptos de función lineal, afín, cuadrática etc., lo cual aporta a la identificación del dominio, rango, la pendiente como razón de cambio y la relación entre las magnitudes involucradas.

De acuerdo con lo expuesto en el planteamiento del problema, este trabajo busca responder al siguiente interrogante:

¿Cómo a través de una propuesta de aula que integra procesos de modelación con la función por tramos, en el contexto artesanal de recolección de pianguas, se pueden desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional a través del razonamiento covariacional en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña a través de la modelación de fenómenos en un contexto artesanal de la recolección de piangua, mediante la función por tramos.

1.2.3. Objetivos específicos

- Fundamentar conceptual y de forma procedimental la problemática desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática.
- Articular en una propuesta de aula los resultados de la fundamentación de la problemática en la cual se privilegie los procesos de modelación en el contexto artesanal de recolección de pianguas.
- Caracterizar los aspectos de pensamiento variacional que se movilizan en estudiantes de grado noveno mediante la implementación de la propuesta de aula (logros y dificultades).

1.3. Justificación

El desarrollo de esta propuesta de investigación es importante porque busca contribuir con la superación de la enseñanza tradicional de las matemáticas, la cual desarticula el contexto real en el que se desarrollan los estudiantes de los aprendizajes adquiridos en el aula. Por tanto, tiene como objetivo articular el concepto matemático función por tramos con los procesos de modelación en el contexto artesanal de recolección de pianguas, en aras de permitir un buen desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional que permita la comprensión de los procesos de variación y cambio. Además, de acuerdo con Xavier (2017) son muy pocas las investigaciones que relacionan el concepto de función por tramos, en su mayoría enfatizan en la función lineal y la función cuadrática, lo que indica la necesidad de estudiar las funciones con un comportamiento diferente como lo es esta función, la cual es muy relevante y al no tener un conocimiento adecuado de la misma puede convertirse en un obstáculo en el aprendizaje de nuevos conocimientos en el ámbito del cálculo.

En relación con lo anterior, aunque en la actualidad de acuerdo a lo establecido por el Ministerio De Educación Nacional se espera que la enseñanza de las matemáticas no sea de manera tradicional donde los alumnos están aprendiendo matemáticas formales, abstractas y descontextualizadas alejada del contexto donde se desarrollan, olvidando que cada conocimiento debe adaptarse a una situación específica, esta se sigue enseñando lejos de la realidad que los rodea, de acuerdo con Torres (2014) en las clases se hace hincapié en la resolución de problemas rutinarios y fuera de contexto, que impiden vivenciar en el estudiante las aplicaciones de esta área de conocimiento en la vida real. Es así como el desarrollo de las matemáticas a través de situaciones problemas procedentes de la vida diaria es el contexto más enriquecido para poner en práctica el aprendizaje adquirido y desarrollar cada uno de los pensamientos matemáticos. En lo

que al pensamiento variacional se refiere, se hace necesario abordarlo en situaciones de variación y cambio, lo cual permite el desarrollo de esta propuesta de investigación desde la actividad artesanal de recolección de pianguas.

En esta dirección, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) orientan a superar la enseñanza de contenidos fragmentados y compartimentalizados involucrando conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas, donde la variación se encuentre como sustrato de ellas entendida como la dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varia, con el fin de lograr el desarrollo del pensamiento variacional.

En ese mismo sentido, en la vida práctica se encuentran situaciones de variación que permiten al estudiante desarrollar actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático, así que, la variación puede establecerse a partir de situaciones problemáticas relacionadas con fenómenos de cambio. Ahora bien, esta se desarrolla mediante la articulación de procesos de modelación, pues es una herramienta potente en la consideración del contexto logrando modelos matemáticos significativos. Por otro lado, cabe mencionar que los procesos de modelación desde un contexto que presentan situaciones de covariación se conexionan con las acciones mentales expuestas en el razonamiento covariacional de Carsol et al., (2003), en tanto que deja observar los diferentes comportamientos de los estudiantes cuando abordan situaciones que covariación.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998) presentan la modelización como la relación entre el mundo real y las matemáticas, además de ser un proceso que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir

conceptos matemáticos significativos, manifiestan la importancia de la modelización para formar estudiantes productivos para el mundo afirmando que “se aprende matemáticas haciendo matemáticas” por lo que es esencial que en el aula de clase se trabaje la resolución de problemas contextualizados.

Es importante resaltar que, aunque se habla de la relevancia del contexto en las clases de matemáticas, este no puede separarse de una situación matemática real, es un juego entre la situación original y el mundo real, es aquí donde la teoría de la Educación Matemática Realista es importante en esta investigación, porque permite desde la modelación de un contexto articular un contenido matemático y que a partir de los niveles de matematización el estudiante vaya logrando una comprensión mediante la interacción con la situación real dada. Es necesario mencionar que, no todos los modelos matemáticos son satisfactorios para la resolución de un problema planteado, se requiere que este sea validado mediante ejemplos concretos trasladados al mundo real de modo que de ser necesario se realicen modificaciones o dado el caso se cambie el modelo.

Desde la experiencia de la autora, ha evidenciado en las secuencias didácticas de los libros de texto, que en su mayoría traen consigo en relación con el estudio de la función una estructura donde se presenta la definición del objeto matemático, una serie de ejemplos y posteriormente una secuencia de ejercicios mecánicos para que el estudiante los desarrolle y uno que otro ejercicio problema. Por lo cual es posible mencionar, que se está haciendo caso omiso a lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional en relación a la enseñanza de las matemáticas, pues cualquiera que sea la guía educativa que se elija traen la misma estructura de desarrollo y los docentes no son conscientes de ello y siguen basándose linealmente en esas secuencias sin realizar ajuste alguno que mejore el aprendizaje, hasta el punto de darle a los

estudiantes las guía para que trabajen ellos solos de acuerdo al desarrollo de los ejemplos, es decir, que sigan las secuencias. Partiendo de ello, se puede decir que no se está dando una enseñanza consciente de las matemáticas, en este caso específicamente las funciones, por lo que se hace necesario acudir a propuestas que involucren procesos de modelación que permitan el desarrollo del pensamiento variacional.

En esta dirección, el diseño de la secuencia didáctica que se propone en esta investigación como metodología para el estudio de la función por tramos relacionando el contexto artesanal de recolección de pianguas, es una apuesta significativa, pues se hace de manera integral, donde se asume una situación contextual como medio para el desarrollo del pensamiento variacional, articulando las dificultades y errores que se han detectado en la investigación alrededor del aprendizaje de la función como guía para la construcción de las actividades. Es importante mencionar que el diseño de la secuencia se abordara desde un enfoque socio formativo en el cual el contexto donde se desarrollan diariamente los estudiantes juega un papel significativo.

En relación con lo anterior, la secuencia didáctica se diseña desde la actividad artesanal de recolección de pianguas la cual como se mencionó anteriormente es una actividad de sustento económico y consumo de las familias de la comunidad negra de Bahía Málaga la Plata, abordar este contexto para el estudio de la función por tramos es significativo porque permite a los estudiantes una mejor comprensión de esta función, desarrollar la capacidad de realizar diversas representaciones desde su realidad social y colocar en evidencia la importancia de estas en el contexto que les rodea, lo cual a su vez permite el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional.

En este mismo sentido, este contexto artesanal permite a los estudiantes observar las diferentes variaciones que presentan las pianguas, logrando comprender el comportamiento que se presenta en relación a las diferentes variables involucradas, así como una mejor comprensión de lo que son intervalos, en tanto que de acuerdo al diámetro de la piangua así mismo se relaciona su intervalo de medida y precio, esto a su vez es un acercamiento al trabajo con dominios y rangos.

1.4. Antecedentes

1.4.1. Antecedentes de la investigación

A continuación, se presentan diferentes investigaciones concernientes al estudio de esta propuesta de investigación, algunas relacionadas con el objeto matemático de interés función por tramos, otras enfatizan en los procesos de modelación matemática, así mismo, se presentan investigaciones que colocan en evidencia el papel de la modelación en el aprendizaje de la función por tramos.

1.4.2. Algunas investigaciones con relación a la función por tramos

A continuación, se describen cuatro investigaciones que abordan el estudio de la función por tramos, dichas investigaciones son tanto a nivel local como internacional, la de Saa & Trochez (2013), es una investigación nacional de la Universidad del Valle, la de Chumpitaz (2013) y la de Rojas (2019) fueron desarrolladas en la Pontifica Universidad Católica Del Perú en Lima- Perú, finalmente se presenta la de Xavier (2015), la cual es de la Pontificia Universidade Católica de São Paulo.

En el trabajo de Saa & Trochez (2013) diseñan e implementan una secuencia de situaciones didácticas con el objetivo de contribuir con el proceso de enseñanza de la función por tramos en contextos matemáticos, por medio de los diferentes registros de representación semiótica, la integración de Geogebra y recortes de periódico, en las que se evidenciaban representaciones graficas utilizadas para ilustrar temas de la actualidad o de la comunidad que sirven de apoyo para introducir el concepto de función por tramos. La secuencia didáctica se desarrolló con veintitrés estudiantes de noveno grado del colegio Bennett en Santiago de Cali, Colombia, enmarcada al contexto de la tarifa de los taxis, donde se busca determinar las

variables involucradas en las situaciones problemas, así como interpretación de las representaciones dadas.

La investigación realizada por Saa & Trochez se apoya en referentes teóricos como la teoría de las situaciones didáctica de Brousseau (2007), las teorías de las representaciones semióticas de Duval (1999), las representaciones ejecutables de Moreno (2002) y la transposición computacional de Balacheff (1988), para el análisis se consideró el proceso experimental de la micro ingeniería didáctica de Artigue (1995) para validar las respuestas por parte de los estudiantes en el análisis a posteriores y el análisis a priori hecho por los investigadores.

De la implementación y análisis de los resultados, los autores concluyen que los estudiantes presentan dificultades para pasar de un registro grafico a un registro algebraico, por lo que consideran que es necesario promover situaciones de variación y cambio en contextos reales que involucren procesos de modelación, con situaciones donde los estudiantes identifiquen las variables involucradas, de manera que se potencialice el razonamiento matemático. Además, afirman que las actividades tuvieron una buena acogida por parte de los estudiantes al presentarse en un contexto reconocido y vivido por ellos, como lo es el cobro de la carrera de un taxi y las variables que influyen en esta, situaciones que llevan a los estudiantes a la formulación de conjeturas.

Por otro lado, Chumpitaz (2013) realizó una investigación en la que analizó las acciones de seis estudiantes en los cursos de Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola del Perú, durante el desarrollo de una secuencia de aprendizaje diseñada de la función definida por tramos mediada por el GeoGebra, en la cual los estudiantes debían identificar el dominio, el rango, las reglas de correspondencia, los intervalos

de monotonía, además de realizar transformaciones a la función por tramos. Para el desarrollo de la investigación los autores tuvieron como referencia el Enfoque de Instrumental de Rabardel (2011) y se apoyaron en la metodológico de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Basándose en el Enfoque Instrumental de Rabardel, Chumpitaz pudo estudiar las acciones presentes en las interacciones estudiantes-GeoGebra y estudiante- función definida por tramos el proceso de instrumentalización de la Génesis Instrumental de un artefacto, evidenciando que los estudiantes hicieron uso de los conocimientos nuevos adquiridos, así como de los conocimientos ya existentes que permitieron minimizar las dificultades en la secuencia de aprendizaje.

En cuanto al análisis de los resultado, el autor confirma desde el enfoque de Rabardel que los estudiantes presentan dificultades en movilizar algunos esquemas en sus acciones en la secuencia de aprendizaje, lo cual le permite asegurar que el esquema de instrumentalización de la función definida por tramos fue local, es decir, un aprendizaje momentáneo, pues presentan dificultades para determinar el dominio, el rango, realizar transformaciones de funciones, dificultades en el aprendizaje de la función por tramos como consecuencia del aspecto gráfico de la misma.

Otra investigación que se considera para el desarrollo de este trabajo es la realizada por Xavier (2015) relacionada con el proceso de génesis instrumental del artefacto función real de una variable real por tramos, donde abordaron como referencia la teoría de la instrumentalización de Rabardel (2011), la cual es su mayoría se ha trabajado con software digitales tales como GeoGebra, Cabri 3D o calculadoras, donde estas se toman como artefactos, de ahí que Xavier decidió trabajar fuera del ambiente tecnológico y proponen como artefacto simbólico la función real de una variable real por tramos, para ello el autor presenta una secuencia con dos

actividades, la primera se relaciona con la geometría plana y la segunda es en un contexto cotidiano la factura de la luz, donde se les pidió a los estudiantes identificar la función por tramos y construir la gráfica que representa cada situación.

La metodología empleada en la investigación fue la Ingeniería Didáctica de Artigue la cual permitió al autor concebir, realizar, observar y analizar la secuencia de enseñanza propuesta a quince estudiantes del tercer y segundo año de la escuela de secundaria en Brasil, los cuales fueron divididos en seis parejas y un grupo de tres, siendo los sujetos de análisis estos últimos.

Con el desarrollo de las actividades el autor pudo concluir que se puede transformar el artefacto función variable real por tramos en instrumento, aportando al desarrollo cognitivo y aprendizaje de los alumnos, lo cual se da cuando resuelven de manera individual o colectiva las actividades propuestas a través de la movilización de esquemas de uso, acción instrumental y acción colectiva instrumentado, caracterizando así el fenómeno del Génesis Instrumental.

Del mismo modo, manifiestan que hubo estudiantes que tuvieron una instrumentalización continua al utilizar la función adquirida para resolver otro tipo de problemas, otros no tuvieron una instrumentalización permanente colocando en evidencia las dificultades para movilizar las propiedades inherentes al artefacto (función real de una variable real por tramos), dificultades para establecer una tabla que relacione las variables existentes y dificultades para pasar de la representación algebraica al gráfico.

Por otra parte, Rojas (2019) en sus tesis de maestría aborda la función a través de una secuencia didáctica mediada por GeoGebra, con la cual buscaba que los estudiantes realizaran conversión entre la representación gráfica y algebraica haciendo uso de situaciones modeladas por medio de una función definida por tramos, para finalmente identificar si un estudiante que

interpreta o realiza dicha transformación en una función de dos tramos, conlleve a que tenga éxito en realizar la misma transformación en una función de tres o más tramos.

Para el desarrollo de la tesis Rojas emplea como marco teórico la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2004), en cuanto a la parte metodología al ser de carácter cualitativo se basa en describir lo realizado por los sujetos de la investigación conformado por dos estudiantes, basándose en los fundamentos de Creswell (2010) donde se emplean preguntas abiertas, imagen y entrevistas para la recolección de datos a través de la documentación y observación, dándole importancia al significado que los participantes adquieren sobre el problema.

En relación con el desarrollo de la secuencia, el autor manifiesta que se presentaron dificultades relacionadas con el método de enseñanza que utilizó el cual estuvo mediado por las TIC, como fue el caso de Selenia una de las participantes de la investigación la cual al estar repitiendo el curso por segunda vez, donde en anteriores ocasiones las actividades habían sido desarrolladas de forma tradicional, presento dificultades para identificar las funciones por tramos presentes en las representaciones gráficas y algebraicas al desarrollar las actividades desde este método, pues lo más seguro es que esperara que todo fue de forma mecánica, lo cual la llevo también a presentar dificultades en los procesos de conversión, puesto que dependen de la identificación de la expresión algebraica adecuada para cada tramo. Finalmente, el autor expresa que es necesario tener en cuenta que estas funciones no necesariamente están conformadas por dos tramos, sino que también presenten más de dos tramos e inclusive, es importante trabajar con funciones que no necesariamente tengan un tramo lineal o cuadrático.

Los anteriores antecedentes relacionadas con la función por tramos aportan al desarrollo de esta propuesta de investigación, puesto que resaltan las dificultades que presentan los

estudiantes en el aprendizaje de este tipo de funciones, destacando además la importancia de considerar situaciones de variación y cambio en contextos reales que involucren procesos de modelación, pese a la importancia que ha tomado el contexto en la enseñanza de las matemáticas, se puede observar que solo una investigación que relaciona la función por tramos es abordada desde un contexto, esto hace significativo el diseño de la propuesta de aula en el contexto sociocultural de la actividad artesanal de recolección de pianguas de la comunidad negra de La Plata Bahía Málaga.

1.4.3. Antecedentes relacionados con la modelación matemática

Relacionados con la modelación matemática se seleccionaron tres investigaciones nacionales, como lo son la de Henao & Vanegas (2012) y la de Santacruz (2016) ambas de la Universidad de Valle, así como la de Herrera & Muñoz (2014) de la Universidad Pedagógica Nacional. Además, seleccionó una investigación internacional desarrollada por Reíd, Gareis, Hernández & Roldán (2012) de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina.

En relación a la investigación de Henao & Vanegas (2012) en su tesis buscan caracterizar el proceso de modelación matemática desde los principios teóricos y metodológicos de la Educación Matemática Realista, en un grupo de estudiantes de educación media 10 ° y 11°, para el desarrollo de la propuesta abordaron el diseño y gestión de tareas vinculadas al trabajo con modelos cuadráticos desde un estudio de caso descriptivo con estudiantes del programa de formación semilleros matemáticas de la Universidad del Valle, Cali, Colombia, donde tuvieron como principal referente teórico el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) con sus fundamentos acerca de la introducción de conceptos matemáticos mediante contextos realistas o situaciones que los estudiantes pueden manejar fácilmente y que son razonables dentro de lo que ellos conocen.

A partir de los resultados obtenidos los autores manifiestan, que las actividades que involucran procesos de modelación dan un lugar central a los estudiantes como sujetos activos promoviendo la exploración, el planteamiento de conjeturas, generalizaciones, acciones que permite la construcción de la matemática mediante herramientas que se basan en consideraciones propias que paulatinamente se desarrollan y evolucionan, además favorece la motivación, interacción y reflexión entre los estudiantes dando lugar a la creación de diversos modelos con niveles de abstracción diferentes.

Por otra parte, Santacruz (2016) desarrolla una investigación asociada al escaso énfasis que se hace en los procesos de enseñanza aprendizaje de la trigonometría, especialmente de las funciones seno y coseno en relación con la variación y dependencia periódica, para ello realiza el diseño e implementación de una propuesta enmarcada en el enfoque de la Educación Matemática Realista EMR entorno a la identificación y modelación de fenómenos periódicos cotidianos. La implementación y análisis de la propuesta se realizó con un grupo de estudiantes de grado decimo de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón de la ciudad de Cali- Colombia.

La propuesta didáctica está compuesta de tres situaciones, la primer situación busca favorecer el acercamiento de los estudiantes a los fenómenos periódicos a través de la experiencia con situaciones problemáticas naturales de su entorno, la situación dos tiene como propósito reconocer una función periódica a través de sus diferentes representaciones tabular, gráfica y analítica, finalmente una situación tres donde se busca que los estudiantes reconozcan las funciones seno y coseno como casos particulares de variación periódica.

A partir del desarrollo de la secuencia didáctica el autor pudo concluir que el principio de actividad y el principio de realidad proporcionan un escenario para la caracterización y

modelación de fenómenos de naturaleza periódica, en tanto que permite un acercamiento de los estudiantes a fenómenos de variación periódica cercanos a su cotidianidad. Además, el principio de interacción durante la fase de implementación, promueve en los estudiantes el trabajo en equipo, la socialización y discusión alrededor de los diversos procedimientos y soluciones durante el desarrollo de las tareas, así como la plenaria al finalizar cada situación, todo esto favoreciendo las interacciones de tipo social docente – estudiante y estudiante-estudiante alrededor de la actividad matemática en el aula potencializando la comunicación, la predicción, argumentación verbal, la refutación y la validación de las estrategias y herramientas matemáticas, habilidades asociadas al paso entre los niveles de comprensión con respecto a las situaciones de variación periódica y contexto.

Por otro lado, Santacruz evidencio que los estudiantes tienen la idea de periodo vinculada a su cotidianidad como la duración de una etapa o fase del fenómeno, más no aun patrón regular de tiempo que permite a un fenómeno repetirse, de igual manera, no hay una formalización del concepto de función periódica, en tanto hay una designación inadecuada para el dominio y rango, del mismo modo, no hay una identificación y validación de la ecuación que captura la variación periódica entre variables, los estudiantes no logran designar como periodo la dependencia entre longitudes de arco y parejas de números reales, por tanto, se les dificulta reconocer las funciones seno y coseno como casos particulares de variación periódica.

Para efecto de este trabajo se aborda también la investigación de Reid, Gareis, Hernandez & Roldán (2012) donde describen y analizan una experiencia con el estudio de las funciones a partir de la modelización matemática como estrategia pedagógica en el aula de clase con alumnos de 14 y 15 años, la cual tuvo como intención ofrecer estrategias a los alumnos para enfrentar los desafíos del mundo a través de la modelización. Para su desarrollo emplearon como

metodología actividades abiertas y creativas, provocando la mayor cantidad y variedad de respuestas escolares sobre la noción de función y su representación.

Los resultados de la experiencia les permitieron a los autores observar que cuando el alumno soluciona problemas en contexto real se involucra de manera directa en la búsqueda de la solución asumiendo un rol más activo, donde interpretan y representan la información en términos matemático, identificando las constantes y las variables relevantes, así como la correspondiente representación gráfica. Del mismo modo, expresan que la elección de una actividad de modelización no es una tarea sencilla, esta debe lograr motivar e interesar al alumno, pues este tipo de actividad dan pie a la posibilidad de que los estudiantes verbalicen su razonamiento y retroalimenten sus conocimientos a través del intercambio de ideas, fortaleciendo su capacidad de argumentación, logrando por medio de un proceso de modelización que los alumnos formen solidas raíces cognitivas para el aprendizaje del concepto de función y de las diferentes representaciones conectadas al gráfico de la recta.

Otra investigación que aporta al desarrollo de esta investigación es la de Herrera & Muñoz (2014), quienes presentan una propuesta didáctica la cual tiene como objetivo abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática y el pensamiento variacional. Para el desarrollo de la investigación emplearon procedimientos metodológicos de tipo cualitativo, donde exploraron y caracterizaron las respuestas de los estudiantes de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Inicialmente los autores realizan un recorrido histórico que les permitió conocer las formas de representación y algunos tipos de situaciones que motivaron al estudio de la función a lo largo de la historia, posteriormente elaboraron, aplicaron y analizaron un cuestionario, donde evidenciaron que los estudiantes tiene una concepción estática del concepto de función, ya que

presenta dificultades para solucionar y desenvolverse en situaciones sujetas al cambio y a la variación, finalmente elaboraron una propuesta didáctica para abordar el concepto de función en las cuales se enfatiza en situaciones de variación, cambio y dependencia, ligadas a la modelización, donde inicialmente abordan situaciones de conceptualización, luego actividades teniendo en cuenta los periodos de la historia, los que al mismo tiempo utilizan como potencial modelizador de las funciones para crear modelos de diferentes contextos.

Los autores presentan la modelación como un proceso que está relacionado directamente con el pensamiento variacional y permite la realización de actividades en las cuales identificar elementos importantes de la función, como las variables independientes y dependientes, las relaciones entre estas, la obtención de un modelo que se representa de manera verbal, grafica, tabular, algebraica u otras. Así mismo, evidencia que los estudiantes abordan el concepto de función desde la enseñanza tradicional, es decir establecer relaciones entre conjuntos, proponer expresiones algebraicas, luego se realizan tablas que permitan graficar la función y finalmente aplicación, por ello les cuesta solucionar y desenvolverse en situaciones sujetas al cambio y a la variación, esta forma de enseñar el concepto deja de lado los aspectos fundamentales de la función como lo son la variación y el cambio y su potencial modelizador por lo que se evidencia la necesidad de que se planteen actividades que las relacione.

Las anteriores investigaciones presentadas dan cuenta de la importancia de los procesos de modelación para el desarrollar del pensamiento variacional, puesto que permite al estudiante mantenerse activo en su proceso de formación matemática. Por otro lado, se evidencian dificultades relacionadas con el método de enseñanza tradicional, lo cual dificulta el trabajo de los estudiantes en el manejo de situaciones contextuales que involucren variación y cambio,

colocando en evidencia la necesidad de promover actividades que desarrollen habilidades para solucionar problemas de variación y cambio en el aula desde contextos reales.

1.4.4. Antecedentes relacionados con la modelación con función por tramos

Por lo que respecta a este caso se encontró una sola investigación a nivel nacional e internacional que relaciona la modelación con las funciones por tramos, la cual es desarrollada por Caro (2013) de la Universidad Nacional de Colombia.

En esta investigación, Caro (2013) presenta una propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto, la cual tuvo como finalidad elaborar, aplicar y evaluar una unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS) en los estudiantes de grado undécimo de la Unidad Educativa San Marcos de Envigado en Medellín, Colombia. Para el desarrollo de la propuesta abordó las reglas para plantear y resolver problemas de Pólya (1984) como estrategia que permitiera la modelación de la función por tramos.

La propuesta aborda la teoría del aprendizaje significativo, donde se pretende que los estudiantes cuando se encuentren un problema de funciones con condiciones específicas identifiquen el modelo que representa el problema como una expresión algebraica. Además, esta investigación se apoya en la psicología cognitiva e instrucción de Bruning, Gregory, Royce (2002), el aprendizaje significativo: Teoría y práctica, Moreira (2000), unidades de enseñanza potencialmente significativas-UPES Moreira (s.f.), como plantear y resolver problemas Pólya (1984).

La propuesta es desarrollada en diferentes etapas, inicialmente Caro realiza una prueba diagnóstica que contiene problemas relacionados con las funciones por tramos (lineal, cuadrática, parte entera), cada problema presenta grados de dificultad diferentes, algunas con dos tramos,

otros con tres tramos, esto con el propósito de identificar las dificultades de los estudiantes sobre la modelación de la función por tramos y conocer sus estrategias de solución, posteriormente una actividad introductoria de las reglas de Pólya para la solución de problemas y realizar modelos de funciones, donde se presentaron diferentes ejemplos, seguido de problemas de modelación de funciones por tramos, finalmente una prueba cuyo propósito es aplicar el aprendizaje significativo alcanzado a partir de las actividades desarrolladas que con problemas de modelación de funciones por tramos, donde los estudiantes deben realizar el modelo que representa la situación problema, donde a partir de un patrón identificarán la expresión algebraicas que determina el modelo.

A partir de la prueba diagnóstica el autor pudo determinar que los estudiantes no tienen mucha seguridad con el manejo de las funciones, lo que dificulta trabajar los ejercicios, además se evidencio que presentan dificultades para modelar funciones por tramos. En cuanto a la prueba final el Caro manifiesta que la actividad desarrollada previamente les permitió adquirir seguridad en el desarrollo de la actividad, aunque uno que otro estudiante aun no superaba del todo sus temores, el porcentaje de estudiantes que lograron modelar funciones fue relativamente alto en relación a los resultados de la prueba diagnóstica. Las actividades que se desarrollaron en la unidad de enseñanza potencialmente significativa UEPS ayudaron a conseguir mejores resultados en la prueba final con respecto a la prueba diagnóstica, donde se consiguió un porcentaje de aprobación de 52,8% incrementando en un 37,6% con respecto la prueba diagnóstica en donde se obtuvo un 15,2% de aprobación.

De acuerdo con los porcentajes arrojados Caro considera que el avance fue significativo, donde se puede observar cómo los estudiantes mejoraron en toda clase de problemas de modelación de funciones por tramos, además de resaltar que perdieron el miedo a los problemas

matemáticos, la propuesta permitió que durante todas las actividades los estudiantes se encontraran motivados, ya que no era una enseñanza tradicional, con esto se puede afirmar que las actividades se ajustan a la realidad personal, social y cultural del estudiante despierta en ellos una participación activa, lo que favorece y motiva el aprendizaje y que los estudiantes valoren el saber matemático y sus logros personales.

También manifiesta, que este tipo de propuesta permite al docente la posibilidad de encontrar una metodología donde los estudiantes son partícipes de su proceso de aprendizaje y formación, donde a partir de un trabajo colaborativo no solo consiguen logros académicos, sino también sociales y personales. Además, si los docentes colocan a prueba la curiosidad de los estudiantes al plantearles preguntas y problemas cercanos a su cotidianidad, pueden despertar el gusto por el pensamiento independiente proporcionándoles elementos para enfrentar la vida y la toma de decisiones.

Ahora bien, esta investigación relacionada con el estudio de la función por tramos a través de la modelación, permite dar cuenta de la necesidad que existe de involucrar los procesos de modelación en la enseñanza de las matemáticas para superar las dificultades presentes en la apropiación de los conceptos matemáticos, para este caso el concepto de función por tramos, siendo una forma de reducir la barreras existentes para lograr el aprendizaje, así como también se logra la motivación por parte de los estudiantes y le da sentido a las matemáticas en el contexto.

Cabe mencionar además que, esta investigación también resalta la importancia de los procesos de modelación matemática para lograr que los estudiantes pierdan el miedo a las matemáticas y se arriesguen a modelar situaciones cotidianas, sin embargo, no aborda un contexto sociocultural donde se desarrollen los estudiantes. Por lo cual, se puede decir que a pesar de haber un registro de investigaciones relacionadas con la función por tramos no se

encuentran investigación que relación el contexto, la modelación y función por tramos, por tanto, esto hace significativo el desarrollo de esta propuesta de investigación, la cual involucra estos tres aspectos.

Finalmente, los anteriores antecedentes dejan ver la importancia de trabajar el desarrollo del pensamiento variacional a través de procesos de modelación mediados por la función por tramos, en el contexto artesanal de recolección de piangua, ya que, establecen que el trabajo desde un contexto que involucre situaciones de variación y cambio ayuda a reducir las dificultades relacionadas con la enseñanza tradicional y el estudio de funciones, específicamente el estudio de la función por tramos, por consecuente, para efectos de este trabajo abordarlo desde este contexto aportó de manera significativa al desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional y a la comprensión de la función por tramos, en tanto que, los procesos de modelación permiten que los estudiantes se mantengan activos en la construcción del conocimiento.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En esta sección se presentan los elementos conceptuales de referencias curricular, didáctico y matemáticos necesarios para fundamentar el desarrollo de la propuesta de investigación; primero se presenta la perspectiva curricular nacional que son los que establecen las directrices de la educación en Colombia, posteriormente se aborda la perspectiva didáctica desarrollada en tres direcciones: las dificultades en el aprendizaje de las funciones, la Educación Matemática Realista y los procesos de modelación; finalmente los aspectos fundamentales de una secuencia didáctica.

2.1. Perspectiva curricular

Para el desarrollo de esta propuesta de investigación se toma como referentes los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998), los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN 2006), y los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA v.2 (MEN 2016), puesto que son los que direccionan en Colombia la manera de abordar la educación matemática en las aulas de clase para la formación de pensamiento matemático, organizando la estructura curricular en tres aspectos esenciales: conocimientos básicos, los procesos generales y el contexto, aspectos a tener en cuenta en la planeación académica para lograr que los alumnos desarrollen pensamiento matemático y adquieran un conjunto de herramientas para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla.

2.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) establecen un eje de conocimientos básicos para la estructuración de las propuestas curriculares, los cuales se refieren a los pensamientos y los sistemas, para el desarrollo de este trabajo se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, puesto que esta

investigación busca aportar al alcance del pensamiento variacional centrando la atención en el sistema de las funciones.

En esta dirección, el MEN (1998) resalta el pensamiento variacional como uno de los cinco tipos de pensamiento matemáticos, el cual se relaciona con el estudio de los procesos de variación y cambio buscando superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, procurando hacer énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos inter estructurados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad practica donde se desarrollan los estudiantes como de las ciencias, conservando una estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemáticos, resaltando que el pensamiento variacional estudia los cambios a través del análisis de los fenómenos de variación.

Los fenómenos de variación se encuentran en contextos referidos a situaciones de cambio y variación de la vida práctica, donde se presenta la dependencia entre variables o en contextos donde una cantidad varía. Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático. Las situaciones de variación se representan por diferentes sistemas de representación como verbales, representaciones tabulares, gráficas tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas (MEN, 1998).

El MEN (1998) establece que el estudio de la variación puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional mediante la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, la comprensión de la variable y de las fórmulas, esto de acuerdo al grado de escolaridad, además la organización de la variación en tablas se constituye como un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de la función presentada numéricamente, por lo que es importante además de enfatizar en la variación numérica discreta hacerlo también con la variación numérica continua, así mismo, involucrar las

gráficas cartesianas las cuales tienen como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, dando inicio a la noción de función como dependencia y modelos de función.

En este sentido, los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional, por lo cual es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica (MEN, 1998).

En esta misma dirección, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), consideran esencial para el desarrollo del pensamiento variacional el estudio de las funciones polinómicas, la función por tramos a pesar de no estar explícita en los Lineamientos, pero dado el concepto mismo de esta la cual esta compuestas por dos o más funciones tiene una estrecha relación con estas, lo cual la hace importante para desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes.

Ahora bien, los pensamientos matemáticos tienen unos procesos generales para el desarrollo de la actividad matemática que tiene que ver con la resolución de problemas y el planteamiento del problema, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, para efectos de este trabajo asumimos los procesos de modelación y resolución de problemas. De acuerdo con Lineamientos Curriculares de Matemáticas, existe una estrecha relación entre la modelación y el contexto. Para efectos de esta investigación, el contexto abordado es la actividad artesanal de recolección de pianguas, la cual permite abordar la resolución de problemas como eje central del currículo de las

matemáticas desde situaciones concretas permitiendo el desarrollo de una aptitud mental en los estudiantes.

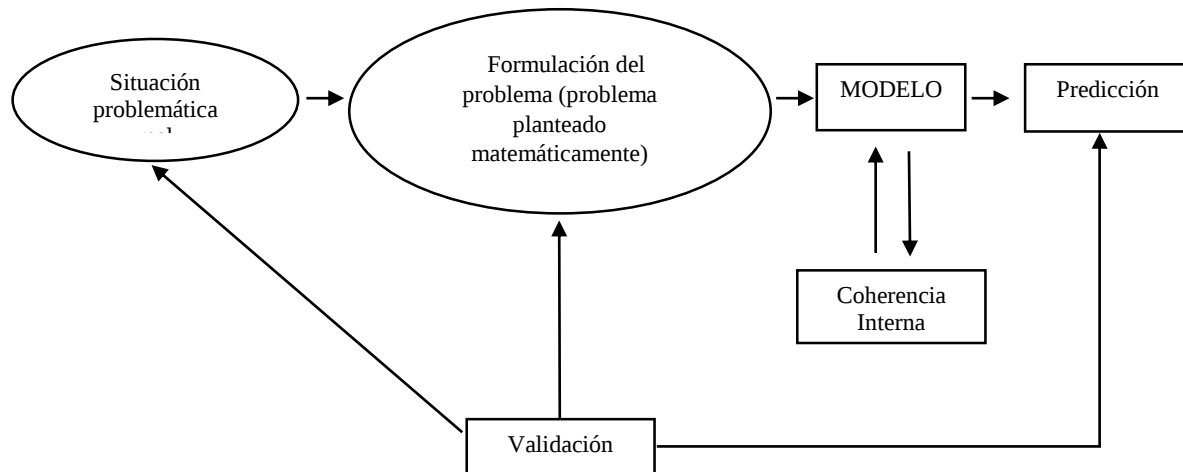
De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998), la resolución de problemas al ser una actividad importante para aprender matemáticas, debe ser prioridad en el currículo de las matemáticas, ya que en la medida que los estudiantes resuelven problemas adquieren confianza con el uso de las matemáticas, de la misma manera que van desarrollando pensamiento matemático y adquiriendo la capacidad de comunicarse matemáticamente, por lo que es necesario que se consideren aspectos de formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollo y aplicación de diferentes estrategias para resolver problemas, verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original, generalización de soluciones y estrategias para la solución de nuevas situaciones problema.

Del mismo modo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998) describen la modelación como la relación entre el mundo real y las matemáticas, como un proceso que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos significativos, siendo de gran importancia para formar estudiantes productivos, afirmando que se aprende matemáticas haciendo matemáticas. Por lo que se hace esencial involucrar la resolución de problemas de la vida diaria en el aula de clase, lo que implica que se involucren problemas relacionados con el contexto de los estudiantes, considerando la resolución de problemas en conexión con la aplicación y la modelación.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas abordan la modelación desde los elementos básicos de la construcción de modelos presentados por el holandés Hans Freudenthal.

Figura 1

Elementos básicos de la construcción de modelos



Nota. Figura tomada de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998).

De acuerdo con la Figura 1, el punto de partida de la modelación es una situación problemática real, la cual debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse de acuerdo con los intereses. Esto conduce a una formulación del problema, el cual contiene las características esenciales de la situación original, y por otra parte está ya tan esquematizada que permite una aproximación con medios matemáticos.

En cuanto a los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente, estos deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta de ciertos objetos matemáticos.

En relación al proceso de resolución de problemas, este continua mediante el trabajo de sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplica métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollando otros nuevos. Estos resultados tienen que

ser validados, es decir, se tienen que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera, el que resuelve el problema también válido el modelo, si se justifica usarlo para el propósito que fue construido.

Es importante mencionar que, estos elementos básicos de la construcción de modelos tienen una estrecha relación con la postura de la Educación Matemática Realista (EMR) en relación a la modelación, la cual se ampliara más adelante.

2.1.2. Estándares Básicos De Competencias de Matemáticas

Al igual que los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas MEN (2006) consideran necesario desarrollar el pensamiento variacional a través de fenómenos de variación, que puedan ser representados en gráficas y tablas, permitiendo el desarrollar del pensamiento variacional y un acercamiento al concepto de función, entendida no como una relación de correspondencia sino como una relación de dependencia. El pensamiento variacional cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentado en el estudio de la variación y el cambio, la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas” (MEN, 2006, pág. 66).

De acuerdo con ello, el MEN (2006) propone unos Estándares Básicos De Competencia para el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas analíticos en los grados octavos a noveno, para efectos de este trabajo se seleccionan los siguientes:

- Modelo situaciones de variación en funciones polinómicas
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas

- Analizo en representaciones graficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones especificas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Ahora bien, es importante resaltar la relación existente de los anteriores estándares del pensamiento variacional de grado octavo-noveno con los estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grado a través de la coherencia vertical(ver Figura 2), además es importante mencionar que la coherencia vertical permite observar que en todos los grados de escolaridad se plantea trabajar los procesos de modelación matemática, aunque con un grado de profundidad diferente a medida que avanza el nivel de escolaridad. En la Figura 2 podemos también evidenciar la relación existente del pensamiento variacional con los demás pensamientos matemáticos a partir de la coherencia horizontal, donde se puede corroborar que este pensamiento no está desligado de los demás pensamientos.

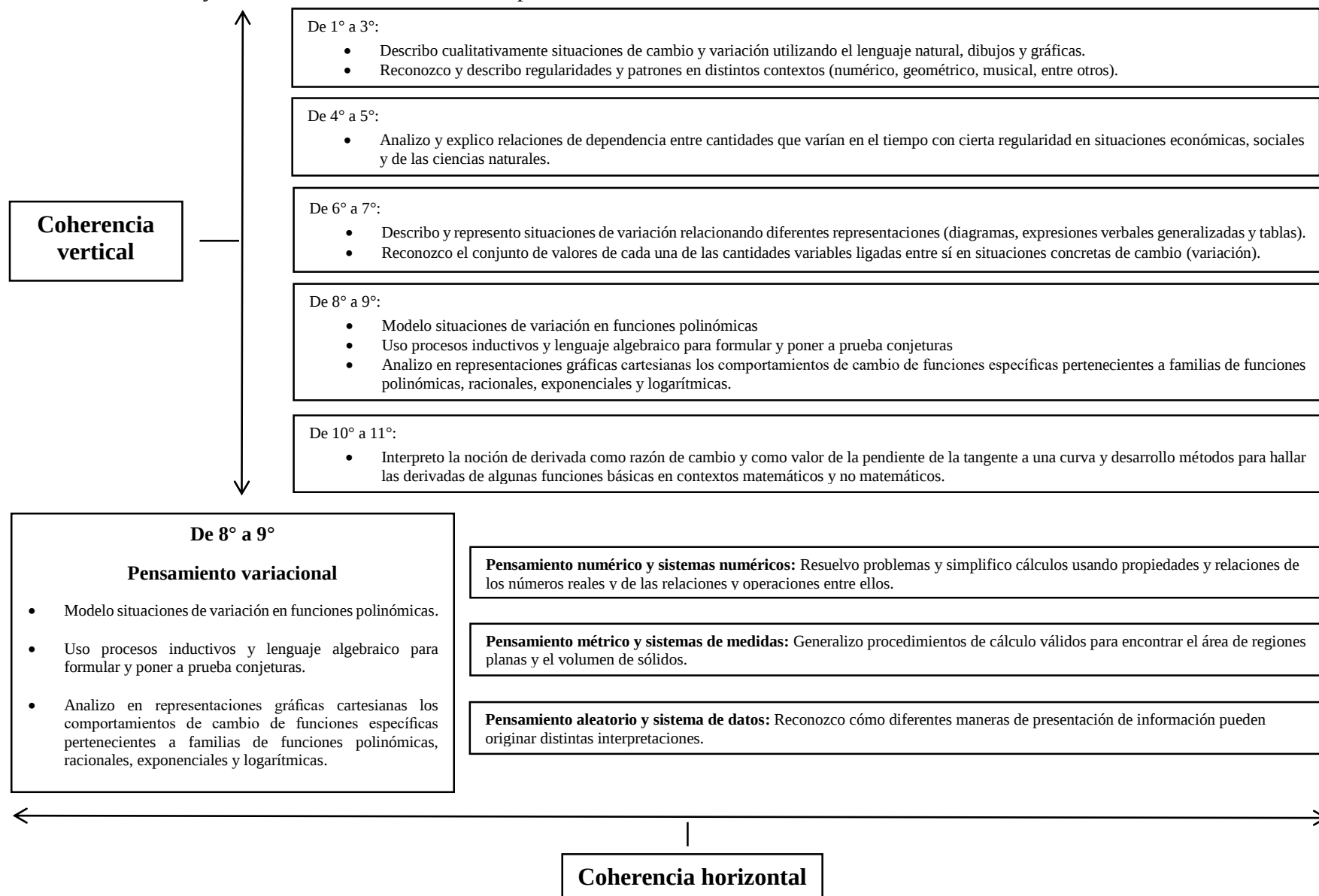
En este mismo sentido, la coherencia vertical y horizontal da cuenta de la importancia de articular a través de propuestas de aula las diferentes habilidades y procesos que debe ir adquiriendo el estudiante en la medida que avance un grado de escolaridad en relación a un saber determinado, permite además reconocer la relación existente en el desarrollo de un estándar con los diferentes pensamientos matemáticos. En la figura 2, se puede observar que los estándares seleccionados en este trabajo requieren de estándares del pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas y sistemas de datos

Es necesario mencionar que, para esta investigación se seleccionaron los anteriores Estándares Básicos De Competencia porque corresponden al objetivo de esta investigación, el cual es favorecer el desarrollo del pensamiento variacional a través de la modelación de

fenómenos en el contexto artesanal de recolección de pianguas mediante la función por tramos, en tanto que enfatizan en la modelación de situaciones que presenten variaciones y que estas a su vez sean representadas mediante expresiones algebraicas, gráficas y tabulares que permitan evidenciar el comportamiento de la misma, logrando de este modo que los estudiantes modelen situaciones reales alcanzando la comprensión del concepto matemático en estudio y a su vez desarrollen algunos aspectos del pensamiento variacional.

Figura 2

Coherencia Vertical y Horizontal relacionado con el pensamiento variacional



Nota. Adaptado de los Estándares Básicos de Competencia Matemáticas (MEN 2006).

2.1.3. Derechos básicos de aprendizaje de Matemáticas

El Ministerio De Educación Nacional con la finalidad de alcanzar un buen desarrollo del pensamiento variacional y en aras de lograr el alcance de los anteriores estándares, creo los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (2016), el cual está conformado por un enunciado que referencia el aprendizaje estructurante del área, evidencias que indican a los docentes si se está alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado y finalmente ejemplos que complementa las evidencias de aprendizaje.

Es importante resaltar que los DBA son una propuesta del Ministerio De Educación Nacional que contiene una serie de actividades como guía para el desarrollo de cada uno de los pensamientos. Para tener como referencia en este trabajo se seleccionan los siguientes enunciados, evidencias de aprendizaje y ejemplos de los Derechos Básicos de Aprendizaje correspondientes a los grados octavo - noveno con relación al pensamiento variacional. Pero es importante aclarar, que estas no son suficientes para lograr el pleno desarrollo del pensamiento variacional, sin embargo, son una orientación del tipo de actividades que se pueden diseñar para desarrollar este pensamiento en los estudiantes.

Enunciado:

- Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

Evidencia de aprendizaje

- Relaciona un cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente.

- Reconoce y representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto

Ejemplo.

Escribe una expresión que relacione el cambio que ocurre en el valor del volumen del cono circular recto cuando el radio cambia de r a $r + \Delta r$ (Δr representa un incremento en el valor de r) y la altura permanece constante. Calcula el cambio en el volumen para algunos incrementos del radio. Representa por medio de una gráfica la relación entre volumen cuando la altura del cono y el radio de su base son iguales y la utiliza para averiguar el valor del radio para que el volumen sea igual a 20 u³ (u es la unidad de medida). Encuentra los valores enteros del volumen a partir de los valores del radio.

Enunciado

- Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante graficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos)

Evidencias de aprendizaje.

- Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.
- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

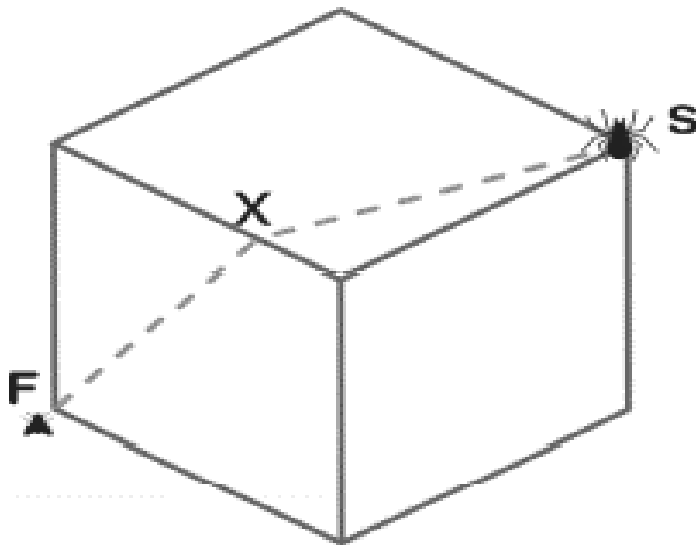
Ejemplo.

Una araña ubicada en una esquina quiere cazar a una mosca que está ubicada en la esquina inferior izquierda de una caja cúbica cuyo lado mide un metro. La araña usará un camino recto pasando por dos caras del cubo y atravesando una de sus aristas por un punto X como se

muestra en la línea punteada de la figura. Determina la posición del punto X para que el camino seguido por la mosca sea el más corto. Encuentra el camino más corto que ha de seguir la araña para llegar hasta la mosca.

Figura 3

Ejemplificación caja cubica



Nota. Figura tomada de los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

Utiliza el teorema de Pitágoras para obtener la distancia de la línea punteada. Explora numéricamente una solución y elabora un modelo algebraico de las longitudes de las rutas posibles.

Enunciado

- Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

Evidencias de aprendizaje:

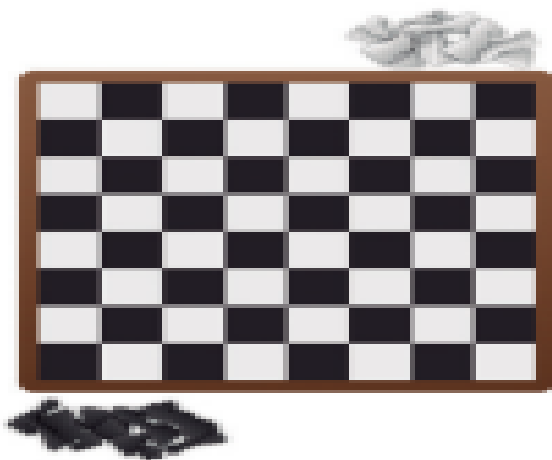
- Efectúa exploraciones, organiza los resultados de las mismas y propone patrones de comportamiento.
- Propone conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y las expresa verbal o simbólicamente.
- Valida las conjeturas y explica sus conclusiones.
- Interpreta expresiones numéricas y toma decisiones con base en su interpretación.

Ejemplo.

Encuentra de manera sistemática el número total de rectángulos que se pueden formar en un tablero de 8 x 8 como el de la figura, considerando que los cuadrados son casos particulares de rectángulos. Tomar como referencia la tabla de rectángulos en una tabla de 3 x 3. Registra la información en una tabla, encuentra la expresión general para hallar el número de rectángulos en un cuadrado de $n \times n$.

Figura 4

Tablero 8 x 8



Nota. Figura tomada de los Derechos básicos de aprendizaje (2016).

Tabla 1

Rectángulos en una Tabla de 3x3

Número de rectángulos	Número de rectángulos verticales	Número de rectángulos horizontales	Total	Patrón Observado
3x3	1	0	1	$1^3=1$
2x3	2x1=2	2x1=2	4	$2^3=8$
2x2	4	0	4	
1x3	3x1=3	3x1	6	$3^3=27$
1x2	3x2=6	3x2=6	12	
1x1	9	0	9	
total	25	11	36	36

Nota. Tabla tomada de los Derechos básicos de aprendizaje (2016).

Los anteriores enunciados y evidencias de aprendizaje son tomado como guía para abordar el estudio del pensamiento variacional a partir de las diferentes representaciones de la función por tramos en situaciones de modelación, como lo es el caso del contexto de recolección de pianguas, donde el estudiante analice el comportamiento de los cambios de una variable con relación a los cambios de la otra y finalmente logre reconocer las características de la función en estudio, así como la apropiación de algunos aspectos del pensamiento variacional, todo esto a través de un proceso de modelación.

En relación con lo expuesto en este apartado del trabajo, cada uno de los aspectos mencionados, orienta el desarrollo de esta propuesta de investigación, la cual se propone atender las directrices establecidas por Ministerio de Educación Nacional a partir de los Lineamientos Curriculares De Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas y Los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas en relación a la caracterización del pensamiento variacional, donde el proceso de modelación juega un papel fundamental en el desarrollo de este pensamiento, así como el reconocimiento de contexto cotidianos

fundamentales en los procesos de modelación, por lo cual se desarrolla esta investigación a través de un proceso de modelación de fenómenos en un contexto artesanal de la recolección de pianguas, mediante la función por tramos para lograr el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional.

2.2. Perspectiva didáctica

En esta perspectiva se presentan los principales contenidos didácticos en los que se enfatiza el desarrollo de esta investigación, la cual se basa en los procesos de modelación matemática, por consiguiente, se considera como principal referente el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista (EMR), puesto que permite establecer la relación entre contexto y los conceptos matemáticos. También se presentan el razonamiento covariacional desde la postura de Carlson et al. (2003) así como algunas dificultades evidenciadas en los estudiantes en relación al aprendizaje de las funciones, específicamente la función a tramos.

2.2.1. Educación Matemática Realista (EMR)

Es una corriente didáctica desarrollada por Hans Freudenthal desde los finales de los años 60, la cual surge por la necesidad de superar la enseñanza mecánica de las matemáticas, partiendo de la idea de que esta debe estar conectada con la realidad donde se desarrollan los estudiantes, de modo que sea un aprendizaje relevante.

En esa dirección, la Educación Matemática Realista (EMR) resalta la importancia del desarrollo de actividades que permitan una conexión de los estudiantes con el objeto matemático y el papel de este en la vida real, Freudenthal (1991) expresa que la enseñanza debe basarse en situaciones del entorno natural y social, por lo que propone el uso del contexto y problemáticas reales que genere la actividad matemática, además es necesaria la utilización de modelos que surgen de la propia actividad matemática de los alumnos para trasladar las situaciones

contextuales a la matemática formal, para Freudenthal (1991) el modelo es un intermediario a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal.

La EMR reconoce en la enseñanza de las matemáticas al docente como guía y organizador de la interacción en el aula de clase, permitiendo el intercambio y la apropiación de ideas por parte del estudiante, siendo el mediador para la construcción de conceptos formales, rescata además, la relación e integración de las unidades curriculares de matemáticas, es decir, no se puede separar la resolución de problemas realistas de los ejes curriculares, con la finalidad de que exista coherencia en la enseñanza del conocimiento formal al informal, basado en ello, la Educación Matemática Realista establece unos principios fundamentales para el desarrollo de la matemática en el aula.

2.2.2. Principios fundamentales de la Educación Matemática Realista

Los principios son aquellos establecidos por la EMR como guía para lograr el desarrollo de un aprendizaje valioso en los estudiantes, donde el contexto y los procesos de modelación juegan un papel fundamental para el alcance del aprendizaje de las matemáticas, así como también el papel activo del estudiante, estos principios son:

2.2.2.1. Principio de actividad

Desde este principio, la matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas deben acceder y de la cual se logra un mejor desempeño si se aprende matemáticas haciendo matemáticas. Freudenthal (1991) considera que es fundamental que los estudiantes desarrollen habilidades para matematizar, es decir, que aprendan hacer matemáticas y adquieran un papel activo en la construcción del conocimiento, mediante este proceso todos los estudiantes pueden acceder al conocimiento matemático, en palabras de Freudenthal se logra una

matemática para todos desde situaciones cotidianas, ya que hacer matemáticas posibilita la adquisición de destrezas mediante situaciones problemas que generan la necesidad de emplear herramientas matemáticas para su organización y solución.

Freudenthal (1991) afirma que la imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad, de acuerdo con ello, la matemática no puede pensarse fuera de la realidad contextual donde se desarrollan diariamente los estudiantes.

En este sentido el principio de actividad se interesa por desarrollar en los estudiantes actitud matemática desde temprana edad, con el fin de lograr el alcance de habilidades para la solución de situaciones reales desde conceptos propiamente matemáticos.

2.2.2.2. Principio de realidad

La enseñanza- aprendizaje basada en el principio de realidad parte de la consideración de que la construcción del conocimiento debe partir de contextos y situaciones realistas, con el ánimo de que los estudiantes despierten la necesidad de hacer un proceso de matematización, es decir, es necesario presentar problemas a los estudiantes de manera que ellos se planteen interrogantes y a partir de ahí poner en juego los procedimientos matemáticos que mejor permitan organizar la situación, en esta dirección, desde la EMR el uso del contexto es significativo para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que promueve el uso del sentido común y la utilización de estrategias informales. Es importante destacar de acuerdo con Bressan, Gallego, Pérez & Zolkower (2016) que un contexto realista despende de la experiencia de los alumnos y su capacidad para imaginarlo o visualizarlos.

2.2.2.3. Principio de reinención

Como lo expresa Freudenthal (1991) la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común solo que más organizada, para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Es por ello que la educación matemática debe brindar a los alumnos la oportunidad de tener la participación en su proceso de aprendizaje, sin olvidar que el papel del docente es el de guiar el proceso permitiendo que se reinventen modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas, donde el docente es el intermediario entre el alumno y las situaciones problemas, entre las producciones informales y las herramientas formales de la matemática como disciplina.

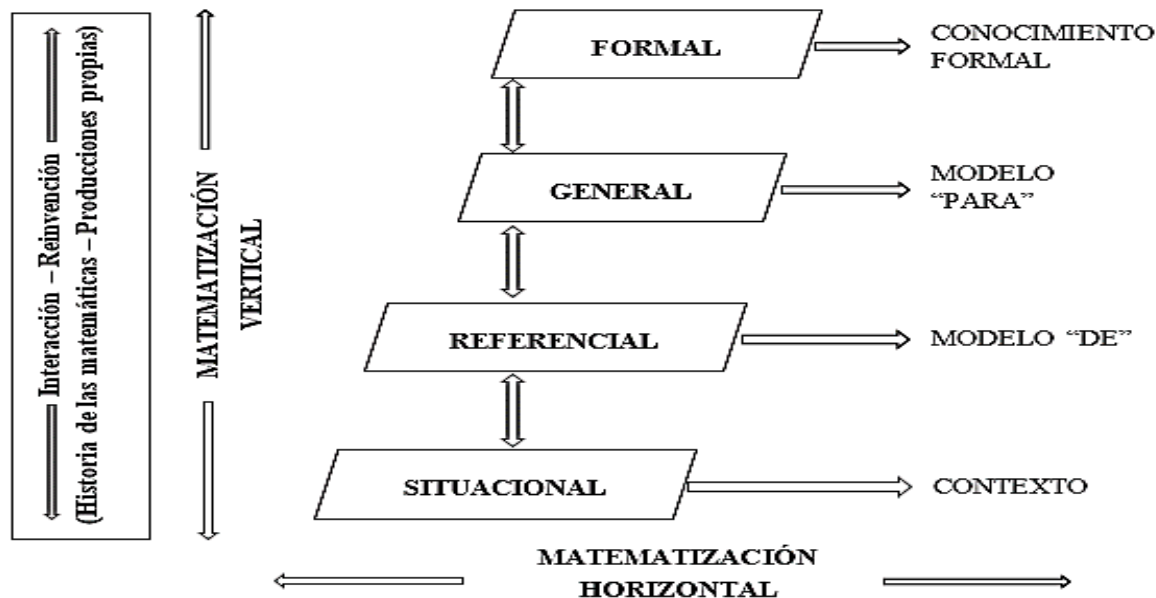
Es importante tener en cuenta, que para lograr una buena orientación del proceso educativo el docente debe desarrollar habilidades de observación, de anticipación y reflexión frente al aprendizaje de los estudiantes, de manera que le permita conocer las diferentes formas de comprensión que poseen, esto con el fin de organizar el desarrollo de la clase permitiendo la reinención, y así lograr una mejor comprensión y adquisición del conocimiento.

2.2.2.4. Principios de niveles

Este principio hace referencia a los niveles de comprensión que van adquiriendo los estudiantes de las matemáticas a partir de la práctica basada en un contenido de la realidad y el posterior análisis desde los procesos matemáticos, así como de los procesos de modelización. En otras palabras, refiere al paso de la matemática informal a la matemática formal. Freudenthal (1991) expresa que el aprendizaje de las matemáticas debe basarse en convertir un problema o situación contextual en un problema matemático donde el estudiante pueda reflexionar, generalizar pruebas, aplicar la simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayor nivel de formalización matemática.

Figura 5

Niveles de Matematzación Según Freudenthal



Nota. Figura tomada de Educación Matemática Realista. Bressan et al. (2016).

La Figura 5 permite visualizar los niveles de comprensión, Van - Panhuizen (2003) los define como la capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto, a la creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones, a la adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias. Por tanto, es importante permitir en el aula el desarrollo de cada uno de los niveles en los estudiantes, de ahí, la necesidad del desarrollo de actividades que coloquen en juego la construcción de modelos que permitan la relación del conocimiento informal a partir de la situación en contexto con la matemática formal. Freudenthal (1973) (1991); Gravemeijer (1994) (2004) (citados en Bressan et al., 2016) expresan que en este proceso de matematzación progresiva la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de

actividades mentales y lingüísticas. Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, no constituyendo una jerarquía estrictamente ordenada. Es necesario reconocer en que enfatizan cada uno de los niveles:

Nivel situacional: se relaciona con los conocimientos informales utilizado por los estudiantes, para acercarse a la situación y hacer uso de estrategias que le permita dar con la solución y en esta medida identificar las matemáticas en el contexto logrando el desarrollo de un proceso de matematización horizontal.

Nivel referencial: este nivel se relaciona con el proceso de matematización vertical, donde el estudiante hace uso de modelos, descripción de la situación, la identificación de los conceptos y procesos involucrados que permiten la esquematización del problema en contexto.

Nivel general: enfatiza en la reflexión de los procesos realizados en la matematización horizontal y en la matematización vertical con el objetivo de que estos sean generalizados, logrando la creación de modelos que permitan la solución de situaciones similares.

Nivel formal: en este nivel se ha logrado una mejor comprensión de conceptos matemáticos, de manera que se pueden emplear en la solución de diversas situaciones.

El desarrollo de los niveles en los estudiantes no necesariamente se da de manera lineal, puesto que, “un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o aspectos de un mismo contenido” (Bressan et al., 2016, pág. 8).

Reconocer cada uno de los principios de la EMR es fundamental para el desarrollo de esta propuesta, la cual reconoce que la enseñanza de los conceptos matemáticos deben conectar con la realidad de los estudiantes y colocar en juego el papel que esta cumple en el desarrollo de las actividades en el contexto, así mismo, esta teoría válida la importancia del uso de los

modelos matemáticos, el cual es el interés de este proyecto al abordar el concepto de función por tramos desde el contexto artesanal de recolección de pianguas. Además, el reconocimiento de esta teoría orienta la construcción de la secuencia didáctica para que esta no quede estructurada de forma mecánica, por el contrario, conserve una estructura que permita un desarrollo secuencial y coherente que aporte de manera significativa al aprendizaje, donde el estudiante sea activo en la construcción del conocimiento, permitiendo que relacione el papel de las matemáticas en la cotidianidad, de manera que, se logre la comprensión de algunos aspectos del pensamiento variacional y de la función por tramos a partir de la modelación del contexto de recolección de pianguas, siendo este el interés de la investigación.

2.2.3. Procesos de modelación en la enseñanza de las matemáticas

La modelación ha cobrado gran relevancia en la educación, con especial énfasis en la enseñanza de las matemáticas en todos los grados de escolaridad, puesto que permite que el alumno no solo aprenda conceptos, sino que adquiera habilidades para relacionar los objetos matemáticos con las situaciones problemas reales, la modelación en los procesos de enseñanza de la matemática cobra gran sentido al permitir la relación de las matemáticas y el mundo real permitiendo el desarrollo de habilidades para la resolución de situaciones del entorno. Diversos autores han mostrado gran interés por estudiar la modelación matemática Kaiser & Sriraman (2006), Kaiser & Schwarz (2010), Blomhoj (2004), Blum (1993), Biembegut & Hein (2004), manifestando que los diversos cambios de la sociedad muestran la necesidad de ser creativos para lograr un mejor desarrollo del conocimiento, puesto que no basta solo tener conocimiento y transmitirlo, sino que además es necesario desarrollar habilidades y estrategias para la transmisión del conocimiento, para esto la modelación matemática se considera como un método idóneo de enseñanza.

En esta perspectiva, Biembegut & Hein (2004) consideran la modelación matemática como un proceso para la obtención de un modelo matemático, entendiendo modelo matemático de un fenómeno o situación problema como un conjunto de relaciones matemáticas que representan de alguna manera el fenómeno en cuestión, permitiendo no solo obtener solución para una situación en particular, sino que esta puede ser empleada en otras aplicaciones. En este sentido la modelación matemática de acuerdo con Bassanezi (2002) (citado en Biembegut & Hein, 2004, pág. 107) permite que el estudiante se convierta en principal participante en la construcción del conocimiento, siendo el docente un orientar que guía el proceso de enseñanza. En esta dirección, Blomhoj (2009) expresa que las reformas curriculares en muchos países, en especial en la educación secundaria, han hecho especial énfasis en la modelación matemática como elemento fundamental para prepararse para la educación superior.

Por otro lado, Kaiser & Sriraman (2006) presentan una investigación donde abordan diferentes perspectivas sobre la modelación en educación matemática y una descripción de los objetivos de cada una de ellas.

Tabla 2

Perspectivas de la Modelación

Perspectivas de la modelación	
Nombre de la perspectiva	Objetivos centrales
Modelado realista o aplicado	Metas pragmático-utilitarias, es decir: resolver problemas del mundo real, comprender posición del mundo real, promoción de competencias de modelado.
Modelado Contextual	La resolución de problemas modelados a partir del contexto

Modelado educativo; diferenciado en a) modelado didáctico. b) modelado conceptual.	Pedagógico y temático metas: a) Estructuración de procesos de aprendizaje y su promoción b) Introducción al concepto y desarrollo
Modelado Socio crítico	Metas pedagógicas como críticas comprensión del entorno mundo
Modelado epistemológico o teórico	Metas orientadas a la teoría, es decir, promoción del desarrollo de la teoría
Modelado Cognitivo	Objetivos de la investigación: a) análisis de procesos cognitivos que tiene lugar durante el modelado procesos y comprensión de estos procesos cognitivos Metas psicológicas b) promoción de las matemáticas procesos de pensamiento utilizando modelos como imágenes mentales o incluso físicas imágenes o enfatizando el modelado como proceso mental como la abstracción o generalización

Nota. Adaptado de Kaiser & Sriraman (2006)

En relación a las perspectivas presentadas por Kaiser & Sriraman a continuación se presenta una descripción de cada una de ella basado en Blomhoj (2009).

La perspectiva realista.

La perspectiva realista de la modelación matemática se fundamenta en la resolución de problemas contextuales aplicados a la vida real, donde a partir de estos los estudiantes desarrollan capacidades asociadas a la producción de modelos para su posterior formación profesional.

Los procesos de modelación y los resultados del modelado, deben ser validados a través de situaciones reales, por tanto, es importante estudiar a profundidad los procesos de modelado

matemáticos en diferentes profesiones y áreas de aplicaciones que den lugar a la construcción de modelos matemáticos, puesto que su finalidad es enseñar el modelado lo más realista posible.

La perspectiva realista toma la aplicación de matemáticas muy en serio, y, de hecho, en esta perspectiva, se ve como una actividad interdisciplinaria de resolución de problemas en la que, por supuesto, las matemáticas juegan un papel muy importante.

Perspectiva contextual

La perspectiva contextual resalta la importancia del contexto para la resolución de problemas modelados. Esta perspectiva de investigación se centra en desarrollar y probar diseños para la modelación, entendida como una actividad de solución de problemas que son guiados, de acuerdo con Lesh & Doerr (2003) (citado en Blomhoj 2009, pág. 5) por seis principios.

1. Principio de construcción de la realidad: la situación debe ser significativa para los estudiantes, además de conectarlos con experiencias anteriores.

2. Principio de construcción de modelos: La situación debe crear la necesidad de que los estudiantes desarrollen importantes construcciones matemáticas

3. Principio de autoevaluación: la situación debe permitir a los estudiantes evaluar sus propios modelos.

4. Principio de documentación: la situación y el contexto requieren que los estudiantes expresen sus ideas acerca de la solución del problema.

5. Principio de generalización de construcción: debe ser posible generalizar el modelo como solución a otras situaciones similares.

6. Principio de simplicidad: la situación problema debe ser simple.

Desde esta perspectiva se aborda el enfoque del diseño didáctico para contribuir al aprendizaje de los estudiantes a través de la modelación matemática, entendida como un tipo especial de resolución de problemas.

De acuerdo con Blomhoj (2009) dentro de esta perspectiva, es necesario considerar los aspectos psicológicos asociados a la resolución de problemas, los cuales actúan como base para comprender las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelación matemática y la enseñanza de modelos matemáticos.

Perspectiva educativa sobre la modelación matemática.

Esta perspectiva enfatiza en los procesos de aprendizaje y en la construcción de conceptos matemáticos a través de la modelación matemática como una competencia importante a desarrollar, por medio de actividades que relacionen la cultura de los estudiantes y la práctica docente. En relación, Hofe (TSG21) (citado en Blomhoj 2009, pág. 7) manifiesta que la modelación matemática es vista como estrategia para desarrollar la comprensión matemática de los estudiantes, por tanto, es considera objetivo educativo.

Perspectiva socio-crítica.

Esta se relaciona con los aspectos socioculturales, haciendo énfasis en el papel que desempeñan las matemáticas en los avances y la construcción de la sociedad. Puesto que los modelos matemáticos se emplean para definir y describir la desigualdad social y económica. Por tanto, la educación matemática, y especialmente la enseñanza de modelos y aplicaciones matemáticas posee un potencial para empoderar a los estudiantes para que se formen como ciudadanos autónomos e independientes en la sociedad. En este sentido, esta perspectiva se enfatiza en la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las matemáticas en

la sociedad, el rol y la naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática en la sociedad. (Kaiser & Sriraman, 2006)

La comprensión del papel y la función de la modelación en la enseñanza de las matemáticas pueden generar una motivación para el aprendizaje de las matemáticas, donde le permite a los estudiantes capacitarse en la utilización de modelos matemáticos para reflexionar críticamente en problemas de la sociedad.

Perspectiva cognitiva.

Su principal interés es comprender las funciones cognitivas que se activan en los estudiantes en el trabajo con la modelación matemática, su objetivo es identificar las barreras presentes en el proceso de modelado. Esta perspectiva tiene una estrecha relación con la perspectiva educativa y el objetivo de desarrollar procesos matemáticos.

Perspectiva epistemológica.

Esta perspectiva de modelación se fundamenta en las teorías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como la Educación Matemática Realista EMR y la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), entre otras. Uno de los objetivos que persigue esta perspectiva, es lograr que los contenidos fundamentales de la matemática sean abordados desde el trabajo de la modelización de fenómenos reales, sin desligarse de la epistemología de los conceptos.

Las anteriores perspectivas se presentan con el fin de reconocer que existen diferentes miradas en relación a la modelación. Pero, para el desarrollo de esta propuesta la cual enfatiza en un proceso de modelación desde el contexto artesanal de recolección de pianguas a través de la función por tramos, se tomará la perspectiva de la modelación como la entiende la Educación Matemática Realista, como la teoría que permite entender los procesos de enseñanza –

aprendizaje, además de entender como es un proceso de modelación en el aula en la enseñanza de las matemáticas.

2.2.4. La Modelación desde la Educación Matemática Realista.

En el enfoque de la EMR los procesos de modelación ocupan un papel importante, pues son un instrumento fundamental al pensar y formular situaciones contextuales realistas, permitiendo la relación de las matemáticas y la realidad contextual. Entendiendo que para EMR “los modelos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarla” (Bressan, s.f., p. 4).

En relación a los modelos Bressan (s.f.) expresa que en la EMR no son solo pensados como representaciones, sino también como objetos de trabajo y reflexión, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones, se visualizan, explican, comparan , contrastan , comprueban relaciones, para ello, estos modelos deben satisfacer varias condiciones importantes, tales como una estrechamente relación con contextos realistas, a su vez tener suficiente flexibilidad para ser aplicados en nivel más avanzado o más general, esto implica que el modelo debería apoyar la progresión en la matematización vertical. Además, los modelos deben ser viables y fácilmente adaptados a otras situaciones.

Ahora bien, de acuerdo con la EMR existen unos principios que vinculan la actividad de modelación con el aprendizaje de las matemáticas.

Principio de entrelazamiento: “este principio establece que no es posible separar en ejes distintos de aprendizaje o por capítulo las matemáticas” (Heuvel - Panhuizen, 2008, p. 30).

En la resolución de situaciones problemas se requiere del uso de todos los pensamientos y procesos matemáticos, por tanto, no es posible pensarse uno separado del otro, puesto que “la del

principio de entrelazamiento reside en que confiere coherencia al currículo” (Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 31).

Principio de Interacción: “la educación debe ofrecer a los estudiantes oportunidades para darse a conocer unos a otros sus estrategias e invento” (Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 31), es decir, debe permitir el intercambio de ideas para una mejora de las estrategias utilizadas por cada uno de los estudiantes, puesto que les permite reflexionar y alcanzar un nivel más elevado de reflexión.

Principio de orientación: este principio se basa en el papel que tienen los docentes y los programas educativos en la adquisición del conocimiento por parte de los estudiantes “unos de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que ésta debe dar a los estudiantes una oportunidad orientada de reinventar *las matemáticas*”.

En el desarrollo de esta propuesta la cual enfatiza en un proceso de modelación desde el contexto artesanal de recolección de pianguas a través de la función por tramos se abordan desde la perspectiva de modelación de la EMR, puesto que se realiza desde un contexto real resaltando la importancia del uso del contexto para la resolución de problemas modelados, destacando que se puede lograr un mejor aprendizaje de los conceptos matemáticos si se abordan desde la modelación matemática, considerándola como una competencia importante a desarrollar, este proceso involucra el contexto sociocultural en el cual se desarrollan los estudiantes, donde finalmente a partir de las actividades desarrolladas se podrán alcanzar aspectos propios del pensamiento variacional.

2.2.5. Razonamiento covariacional

El desarrollo de este trabajo tiene como finalidad desarrollar actividades que involucren situaciones de covariación, con el fin de identificar el nivel de apropiación de los estudiantes con

el concepto de función, específicamente la función por tramos, la cual se concibe como una relación de variación, es decir la relación entre dos magnitudes que cambian, donde a partir del análisis del comportamiento de dichas magnitudes se aporta al desarrollo del razonamiento covariacional; de acuerdo con Saldanha & Thompson (1998) (citados en Carlson, 2003) se entiende la comprensión de la covariación como la forma de mantener la mente, de manera simultánea una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes), es decir la capacidad de involucrar la coordinación de dos cantidades, de hacer el seguimiento de una cantidad y darse cuenta que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante. En este sentido este trabajo se apoya en el razonamiento covariacional propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) quienes relacionan la covariación con el razonamiento covariacional, entendiendo razonamiento covariacional como una “actividad cognitiva implicada en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 130).

Carlson et al. (2003) en el siguiente cuadro propone un marco conceptual asociado a las acciones mentales y a los comportamientos relacionado con el nivel de comprensión y abstracción que se puede ver en los estudiantes cuando se involucran tareas de covariación.

Tabla 3

Razonamiento Covariacional

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos	Niveles del razonamiento covariacional
----------------------	--	------------------------	---

AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).	Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.	Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.	Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1
AM5	Coordinación de la razón de cambio	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de	

instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).	hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
		Nivel 5 (N5). Razón instantánea
		En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota. Tomado de (Carsol et al., 2003).

De acuerdo con la tabla anterior Carlson et al, (2003) menciona que cada acción mental y la descripción del comportamiento corresponde a lo identificado en los estudiantes de pregrado de ingeniería en ciencias de la Universidad Industrial de Santander en el desarrollo de la investigación, es así como las acciones mentales propuestas en el marco conceptual son elementos básicos para clasificar el comportamiento de los estudiantes cuando resuelven situaciones de covariación y reconocen las acciones desarrolladas en relación a la covariación.

Las acciones mentales propuestas por Carlson et al, (2003) se relacionan con cinco niveles de razonamiento covariacional el cual permite conocer el alcance de desarrollo que tiene el estudiante en relación con el razonamiento covariacional, además expresa que cada nivel

corresponde a la acción mental, por ejemplo, si un estudiante se ubica en el nivel tres, es porque logra los tres comportamientos que describe cada uno de estos tres niveles, es decir a logrado las acciones mentales AM1, AM2 y AM3.

Es importante resaltar que de acuerdo con Carlson et al, (2003) un estudiante se clasifica en un determinado nivel de razonamiento covariacional de acuerdo con sus acciones mentales que manifiesta en el desarrollo de una actividad que involucre el uso de la covariación para determinar la solución.

Carlson et al, (2003) expresan la importancia de enseñar el concepto de función en el currículo en los diferentes grados de escolaridad, puesto que a los estudiantes en los grados superiores y en su formación profesional presentan dificultades para razonar frente a los procesos de covariación. Además, es importante la apropiación del razonamiento covariacional, puesto que le permite interpretar y representar funciones.

Ahora bien, la propuesta de razonamiento covariacional que establecen Carlson et al, (2003) en el desarrollo de este trabajo se aborda como uno de los referentes para analizar el alcance de la situación didáctica en relación a el desarrollo del pensamiento variacional y los avances en los niveles de razonamiento covariacional de los estudiantes. Esto a su vez, en relación con los procesos de modelación permite observar cómo a partir del reconocimiento y la comprensión que hacen los estudiantes del comportamiento de las variables involucrada logran esquematizar la situación a través de modelos que permiten la generalización y formalización de conceptos matemáticos, específicamente, la comprensión de la función por tramos y sus componentes, logrando la apropiación de algunos aspectos del pensamiento variacional.

Finalmente, es necesario mencionar que en esta investigación se asume el pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio en una situación determinada, el cual es

transversal a otros pensamientos. En lo que refiere al razonamiento covariacional, este involucra las acciones de razonamiento que realizan los sujetos a partir de la interacción con la variación, cambio, identificación de las variables, las variaciones entre variables etc. Por tanto, se establece una articulación entre estos dos aspectos con el fin de analizar las acciones presentes en los estudiantes en el avance del desarrollo del pensamiento variacional.

2.2.6. Dificultades relacionadas con el aprendizaje de la función por tramos

En relación con el aprendizaje de las funciones, Azcárate & Deulofeu, (1996) manifiestan que la comprensión de un concepto depende en gran manera de la capacidad de interpretar su representación, presenta que los dos niveles de mayor abstracción y más difíciles de interpretar son la gráfica y la fórmula de la expresión algebraica. La grafica permite ver las características globales de la función como lo es la variación y periodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, periodicidad etc. También estos se pueden determinar a partir de la ecuación, pero es mucho más difícil de interpretar pues requiere un conocimiento amplio del significado de los símbolos.

Retomando un poco la idea de la enseñanza tradicional como dificultad en el aprendizaje, y en particular el de la función Azcárate & Deulofeu (1996, p.63), plantean que en su mayoría se aplican en el aula solo dos procedimientos, el de construir la tabla de valores de la función dada y construir la gráfica de la función, dejando un aprendizaje mecánico y poco interpretativo. Estos procesos reducidos llevan a los alumnos a mecanizar sin alcanzar ninguna comprensión, sin despertar su capacidad de interpretar al respecto el significado de la gráfica y de alguna manera el papel de las funciones en los distintos fenómenos.

Así mismo, los estudiantes presentan dificultades de interpretación de graficas cartesianas tales como: errores en la graduación de los ejes, inversión en el orden de las coordenadas, errores

en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales, concepción discreta de los puntos de una recta o de un segmento. Estas dificultades pueden reducir si se trabaja en aula actividades desde los primeros grados que aporten al reconocimiento de aspectos del álgebra.

En relación con lo anterior, Carlson, et al, (2003) expresan que el aprendizaje específicamente de las funciones en el aula de clase presenta dificultades porque no han sido trabajadas a profundización en los currículos matemáticos, por lo cual desarrollar el tema de funciones desde muy temprano, apoya que se promueva el pensamiento conceptual acerca de las funciones.

Ahora bien, en cuanto a las dificultades presentes en el aprendizaje de la función por tramos autores como Yam & Aparicio (2009), Chumpitaz (2013), Rojas (2019) señalan que los estudiantes presentan diferentes problemas en el trabajo de las funciones por tramos algunas relacionadas con la presentación grafica de la función por tramos, además existen dificultades para determinar el dominio y el rango de las funciones por tramos y realizar trasformaciones de estas funciones, del mismo modo, expresan que cuando se les presenta el grafico de una función por tramos a los estudiantes se les dificulta hacer el análisis de cada tramo y determinar su respectivo dominio y rango lo que dificulta establecer reglas de correspondencias apropiadas, según los subdominios que presente cada función. Otras dificultades son ocasionadas porque generalmente se les presenta a los estudiantes la función por tramos solo desde la representación algebraica y es necesario presentar esta función a través de otros medios como la representación gráfica. Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols (s.f.) (citados en Rojas, 2009) comenta que los estudiantes asocian la regla de correspondencia de una función por medio de una solo expresión algebraica, lo que hace difícil que reconozcan como función a una que este definida por tramos.

En cuanto a las dificultades en el aprendizaje de la función por tramos, para el desarrollo de la secuencia didáctica, reconocer los obstáculos que se evidencian en el estudio de este tipo de funciones especialmente alrededor de la representación, permite reconocer la importancia de presentar este tipo de funciones a partir de varias representaciones que faciliten a los estudiantes la visualización de las características de la misma.

Para concluir, en el desarrollo en este apartado del trabajo, podemos dar cuenta de la relación existente entre las directrices establecida por el MEN y la Educación Matemática Realista, puesto que ambos apunta al desarrollo de los procesos de modelación para un mejor alcance del pensamiento variacional a través de situaciones de modelación que involucren situaciones de covariación, y que estas a su vez permitan en los estudiantes el desarrollo del razonamiento covariacional, de este modo reducir las dificultades presentes en el estudio de la función, para efectos de nuestro trabajo el estudio de la función por tramos.

2.2.7. Secuencia Didáctica como propuesta en la actividad matemática de aula

La actividad matemática de aula se desarrolla a través de diferentes acciones que permiten el desarrollo de habilidades en los estudiantes para enfrentarse al cambio social de la actualidad y los cambios a futuro, esto exigen a los docentes hacer especial énfasis en la planificación de las clases que conlleven situaciones significativas, con el fin de los estudiantes adquieran las capacidades necesarias para su desarrollo en la sociedad, es decir, la educación en el aula debe orientarse acorde a las necesidades sociales. Esto requiere que el docente reconozca las problemáticas del contexto donde se desarrolla el estudiante, así como apropiarse de los contenidos disciplinares, de manera que pueda guiar o servir de mediador en el proceso de aprendizaje y a su vez refuerce las habilidades alcanzadas por los estudiantes, todo esto desde los saberes previos y el uso de estrategias didácticas. Para efecto de este trabajo, el cual tiene como

fin desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional, a través de la modelación matemática y mediante el objeto matemático función por tramos, abordaremos la secuencia didáctica como propuesta de aula para lograr los objetivos planteados.

Por lo anterior, es importante reconocer que las secuencias didácticas “son una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje en el marco del aprendizaje o refuerzo de competencias” (Tobón, Pimienta & García, 2010, pág. 20). Por tanto, es necesario retomar las principales características de las secuencias didácticas, como son las situaciones didácticas, actividades pertinentes y evaluación formativa para lograr una mejor comprensión de las matemáticas en el aula de clase.

Tobón, Pimienta & García (2010) manifiestan que las secuencias didácticas son un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, a partir de la mediación brindada por el docente busca lograr determinadas metas educativas considerando una serie de recursos. Su aplicación en la práctica deja como resultado mejoras sustanciales en la formación de los estudiantes, puesto que reduce la enseñanza del aprendizaje fragmentado, enfocándose en las competencias que se deben alcanzar, es decir, ya no se trata de que los estudiantes aprendan contenidos, sino que desarrollen habilidades para desenvolverse en la vida.

Ahora bien, son muchas las metodologías para abordar las secuencias didácticas, entre ella las secuencias didácticas desde el enfoque socio formativo, la cual de acuerdo con Tobón et al. (2010) se caracteriza por un marcado énfasis en la socioformación integral y el proyecto ético de la vida, la resolución de problemas significativos situados, la articulación de las actividades entorno a esos problemas, el proceso meta cognitivo y la evaluación por medio de niveles de dominio (pág. 21).

En este sentido, Tobón et al. (2010) indican que una secuencia didáctica desde un enfoque socio formativo está compuesto por los siguientes componentes. (ver figura 6).

Figura 6

Componentes de una Secuencia Didáctica desde el Enfoque Socioformativo de las Competencias



Nota. Figura tomada de Tobón et al. (2010).

A continuación, se describen cada uno de los componentes de la secuencia didáctica. Mencionados por Tobón et al. (2010).

Tabla 4

Principales Componentes de una Secuencia Didáctica por Competencias

Principales componentes de una secuencia didáctica por competencias	
Situación problema del contexto.	Problema relevante del contexto por medio del cual se busca la formación.
Competencias formar	a Se describe la competencia o competencias que se pretende formar.

Actividades de aprendizaje y evaluación	de y	Se indican las actividades con el docente y las actividades de aprendizaje autónomo de los estudia.
Evaluación		Se establecen los criterios y evidencias para orientar la evaluación del aprendizaje, así como la ponderación respectiva. Se anexan las matrices de evaluación.
Recursos		Se establecen los materiales educativos requeridos para la secuencia didáctica, así como los espacios físicos y los equipos.
Proceso cognitivo	meta	Se describen las principales sugerencias para que el estudiante reflexione y se autorregule en el proceso de aprendizaje.

Nota. Tomado de Tobón et al. (2010).

Es importante resaltar que el contexto juega un papel significativo en las secuencias didácticas, puesto que es necesario que la educación no solo forme, sino que también sea un escenario donde se pueda contribuir y resolver los problemas del contexto, es por ello que el papel de la secuencia didáctica es determinar el problema que se va abordar, una de las características del desarrollo de procesos en los estudiantes para abordar problemas reales con sentido. De esta manera, el trabajo con las secuencias didácticas permite el desarrollo de diferentes habilidades en los estudiantes, así como una mejor actitud para aprender, el alcance de destrezas, una mejor adquisición de los conceptos, además se logra una mejor eficacia de los objetivos propuesto consiguiendo un mejor aprendizaje.

Por otro lado, el diseño de las secuencias didácticas debe conservar una concatenación de forma que las actividades estén organizadas sistemáticamente, y que haya dependencia entre ellas de manera que se logre la resolución del problema planteado. Por ello se buscan que las secuencias estén organizadas por momentos: un primer momento donde haya una entrada o inicio, un desarrollo, una terminación, salida o conclusiones. Luego se deben determinar las actividades donde el docente realizara un acompañamiento. Del mismo modo, se identifican las

actividades que desarrollara el estudiante de manera autónoma, finalmente se establece la duración de cada una de las actividades.

En esa misma dirección, es importante crear estrategias que permitan el logro de las metas propuestas. En cuanto a la evaluación, en las secuencias didácticas es un proceso continuo que se realiza en la medida que se va desarrollando las actividades, debe ser un proceso planificado paralelamente al desarrollo de las mismas. Los procesos meta cognitivos van de la mano con la evaluación, y tiene como finalidad orientar al estudiante en su desempeño con el fin de mejorar los resultados, es un proceso que se realiza previamente al desarrollo de las actividades y posterior a ellas.

Teniendo en cuenta el aporte de las secuencias didácticas en los procesos de aprendizaje, para este trabajo se diseñara una secuencia didáctica que tendrán en cuenta aspectos establecido por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en relación a la importancia del contexto en el aprendizaje, ya que, abordar los conceptos matemáticos desde situaciones reales permite una mejor comprensión del mismo, logrando una mejor apropiación por parte del estudiante de manera que pueda aplicar lo aprendido en el aula en su cotidianidad, del mismo modo, se tendrá en cuenta los procesos de modelación, reconociendo que es una herramienta potente para trabajar situaciones contextuales para lograr modelos matemáticos significativos. Por tanto, se diseñarán actividades que involucren estos aspectos con el fin de desarrollar pensamiento variacional a partir de la movilización de los niveles de razonamiento covariacional, todo esto a través de un acercamiento al concepto de función por tramos, sus características y propiedades.

2.3. Perspectiva matemática

En esta perspectiva se aborda el concepto de función por tramo el cual es el contenido matemático de interés en la presente propuesta de investigación, es importante destacar que

algunos libros la nombran como función definida por partes, función definida por secciones y función definida por tramos. En el desarrollo de este trabajo, se designará como función definida por tramos. Antes de abordar la definición de función por tramos se presentan algunos aspectos históricos de la construcción del concepto de función, aspectos que son necesarios reconocer en el aprendizaje de las funciones.

2.3.1. Algunos aspectos históricos del concepto de función

El estudio del concepto de función en el aula de clase presenta algunas dificultades que hacen que el estudiante no logre alcanzar una buena apropiación del concepto, sin embargo, es claro que el concepto de función es importante en el desarrollo del mundo, pero a su vez es un concepto muy abstracto. Ruiz (1994) expresa que “el concepto de función, tal como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años” (pág. 147). Son muchos los investigadores que se han interesado en indagar la historia del concepto de función, entre ellos Azcarate & Deulofeu (1996) y Ruiz (1994) los cuales presentan en su investigación un análisis de la evolución histórica de la noción de función donde abordan algunos momentos que contribuyeron en el desarrollo de este concepto.

A continuación, se presentan algunos aspectos relevantes de las diferentes etapas identificadas por Azcarate & Deulofeu (1996) y Ruiz (1994) en algunos momentos de la historia de la noción de función.

En primer momento, de acuerdo Azcarate & Deulofeu (1996) y Ruiz (1994) en la etapa de la antigüedad se desarrollaban diversos estudios que involucraban la dependencia entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo, no se logró definir la noción de cantidad variable y función. Los campos donde se evidenciaba mayor interés con la noción de función

radica en los cálculos astronómicos, donde existía una idea primitiva de lo que es una función en las nociones de cambio y relación entre dos magnitudes variables que se evidenciaba en los intentos por predecir acontecimientos a partir de las observaciones sistemáticas de diversos fenómenos que se repetían periódicamente, los cuales enlazaban a través de relaciones aritméticas, dejando en evidencia un gran dominio de la aritmética, es importante resaltar que, las tabulaciones hechas por los babilónicos y el uso de las interpolaciones, extrapolaciones y la búsqueda de regularidades permitieron el avance para la construcción del concepto de función.

En la etapa de la edad media la cultura árabe no realizó algún aporte nuevo en relación a la funcionalidad, pero si resalta la separación del álgebra y la trigonometría dentro de las matemáticas, puesto que dieron introducción al estudio de los triángulos planos y esféricos a partir de la astronomía. Esta época se caracteriza de acuerdo con Ruiz (1994), porque se aborda el pensamiento la idea de explicitación racional de los fenómenos en particular fenómenos sujetos al cambio y movimiento a raíz de ello “empiezan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función” (Azcarate & Deulofeu, 1996, pág. 44).

En esta época se realizaron dos métodos para expresar las relaciones funcionales: la primera realizaba las generalizaciones utilizando letras del alfabeto y la segunda a través de gráficos. A pesar de ello, de acuerdo con Azcarate & Deulofeu no se logró avanzar más debido a la desproporción entre el nivel de abstracción de las teorías abordadas y la falta de un correcto aparato matemático para su desarrollo, así como la falta de simbolismo matemático adecuado.

Por otro lado, en el siglo XV y XVI se logra un perfeccionamiento del simbolismo algebraico, la introducción de signos para diversas operaciones y la formación de la

trigonometría como una rama particular, direcciones que benefician el desarrollo del concepto de función, la primera en relación a la simbolización de funciones y la segunda respecto al estudio de las funciones trigonométricas. Del mismo modo se logra reconocer la diferencia entre variable e incógnita, la primera hace referencia a una función y la segunda a una ecuación.

En el siglo XVII Fermat (1601-1665) y Descartes (1586-1650) descubrieron las representaciones analíticas. De acuerdo con Boyer (s.f.) (citado en Ruiz, 1994, pág. 165) esto permitió imaginar figuras que se pudieran definir a través de la expresión $p = (x, y) = 0$ y así mismo convertir cualquier problema geométrico en uno algebraico. “No obstante en esta época la idea de función era aún restringida, pues se reducida a las funciones analíticas, primero las que se pueden expresarse mediante una ecuación algebraica y poco después las desarrolladas en series de potencias” (Azcarate & Deulofeu 1996, pág. 37) siendo el método analítico el que revolucionó las matemáticas y, por su gran eficacia, aseguró más tarde un lugar privilegiado al concepto de función dentro de las matemáticas

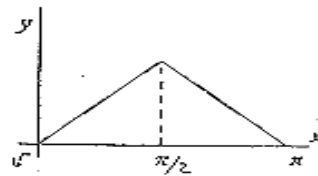
En el siglo XVIII etapa donde aparece el concepto de Función de Bernoulli el cual es sugerido como una expresión analítica, donde no se deja clara la manera de formar las funciones a partir de las variables independientes. En esta época Euler fue el primero en introducir $f(x)$ el cual hace referencia al concepto de función, además, Euler establece la noción de función que está relacionada con la noción de curva, puesto que menciona la existencia de dos clases: curvas continuas y discontinuas o mixtas. Del mismo modo, Euler define nociones iniciales, constante como una cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado, y variable, cantidad indeterminada, definiendo “la función de una cantidad variable como una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes” (Azcarate & Deulofeu, 1996, pág. 50)

Euler en esta época realizó un análisis de la vibración de una cuerda sonora lo que hizo la necesidad de tener en cuenta las “funciones más generales que las funciones analíticas. Las funciones arbitrarias” (Ruiz, 1994, pág. 178). Euler estableció para dicha situación una función compuesta por trozos como la de la figura 7.

Figura 7

Función Propuesta por Euler

$$\begin{aligned} y &= x && \text{en } [0, \pi/2] \\ y &= \pi - x && \text{en } [\pi/2, \pi] \end{aligned}$$



Nota. Figura tomada de Ruíz (1994).

Este acercamiento que Euler presenta de una función mixta, fue más tarde criticado por Charles, quien mencionó que hay algunas expresiones representadas en intervalos diferentes que a su vez se pueden representar en una sola expresión. Es así que, en el siglo XIX, Cauchy propuso en el sentido de Charles una función que puede ser representado por una sola expresión $\sqrt{x}$ para los valores reales de x , donde la regla de correspondencia correspondiente se puede observar en la figura 8.

Figura 8

Ejemplo Propuesto por Cauchy

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Nota. Figura tomada de Ruiz (1994).

Dirichlet propuso una definición más general de función si una variable está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuye un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (Ruiz, 1994, pág. 183).

A lo largo del siglo XIX desde la teoría de conjuntos se propone la definición de función en términos conjuntista así, dado dos conjuntos arbitrarios A y B una función de A en B es una ley que a cada elemento x de A corresponde un solo elemento y de B , o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano $A \times B$ tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces $y = z$. (Azcarate & Deulofeu, 1996, pág. 53)

Finalmente, en el siglo XX la definición que se abordan de función es la propuesta por Dirichlet, resaltando que de alguna manera son importantes todas las ideas aportadas en las diferentes etapas para lograr dicha definición.

En este recorrido histórico presentado por Azcarate & Deulofeu y Ruiz en la construcción del concepto de función, de cómo este fue evolucionando, se puede observar que en el ejercicio de querer formalizar la definición de función fue necesario tener en cuenta la función mixta, la cual hoy se reconoce como la función por tramos. Además, se puede evidenciar que no se observa un concepto claro de función por tramos, esto deja ver que no existe una claridad de la epistemología de dicho concepto, lo cual puede tener sus efectos en la construcción del concepto de función por tramos en el aula de clase, puesto que solo se tiene la idea de que una función es aquella formada por una sola expresión.

Finalmente, es importante mencionar que para el desarrollo de este trabajo se tendrá en cuenta el concepto de función como relación de dependencia sin desconocer las propiedades determinadas por la teoría de conjunto.

2.3.2 Definición matemática de una función por tramos

Zill & Wright (2011) en su libro de matemáticas 1 calculo diferencial, menciona que “una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de f . Una función definida de esta manera se denomina función definida por tramos”. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 9.

Figura 9

Ejemplo1 Función Definida por Tramos

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Nota. Figura tomada de Zill & Wright (2011).

No son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números reales no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, puesto que $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número: $f(-4) = (-4)^2 = 16$; por otra parte, puesto que se suma 1 al número: $f(6) = 6 + 1 = 7$.

Ahora bien, Zill & Wright presentan la gráfica de una función definida por tramos. Considera la función definida por tramos (ver Figura 10).

Figura 10

Ejemplo 2 Función Definida por Tramos

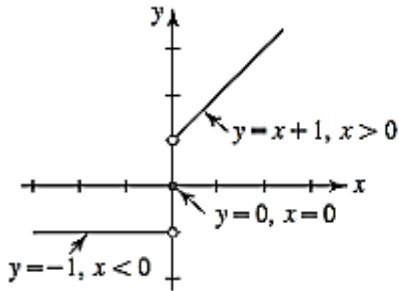
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Nota. Figura tomada de Zill & Wright (2011).

Aunque el dominio de f consta de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función está definida sobre una parte diferente de su dominio. (Ver Figura 11).

Figura 11

Ejemplo Grafica de una Función Definida por Tramos



- La recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- El punto $(0, 0)$ para $x = 0$
- La recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

Nota. Figura tomada de Zill & Wright (2011)

Es importante mencionar de acuerdo con Zill & Wright (2011) que, una función puede denotar por una letra f , g o h . Entonces podemos representar una función f de un conjunto X en un conjunto Y por medio de la notación $f: X \rightarrow Y$. El conjunto X se llama dominio de f . El conjunto de elementos correspondientes y en el conjunto Y se denomina rango de la función. El único elemento y en el rango que corresponde a un elemento selecto en el dominio X se denomina valor de la función en x , o imagen de x y se escribe $f(x)$. Esta expresión se lee f de x o f en x , y se escribe $y = f(x)$

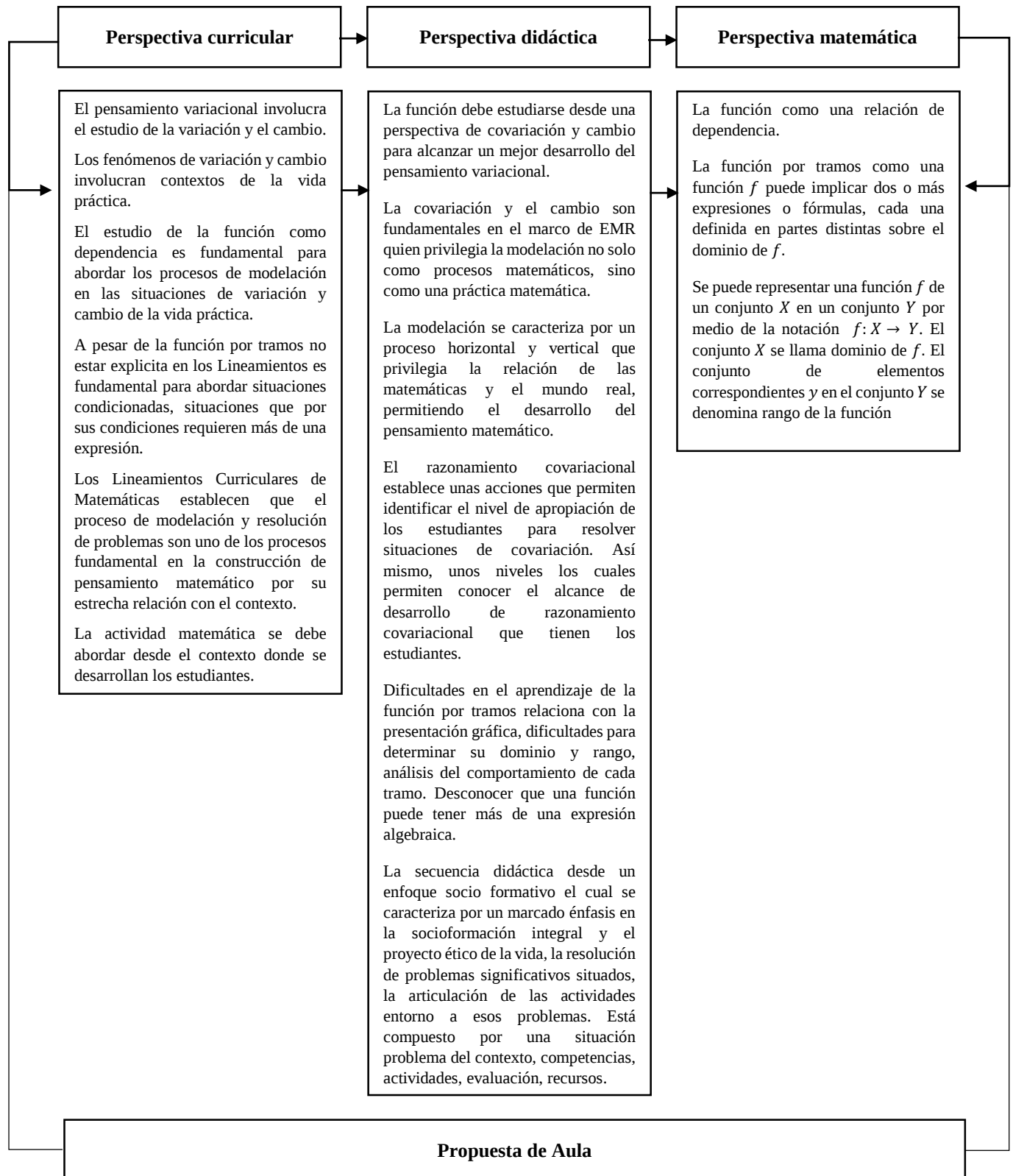
2.4. Articulación de los referentes curriculares

En la figura 12 se relacionan los aspectos que aportan en el diseño de la propuesta de aula desde cada una de las perspectivas desarrolladas. Desde la perspectiva curricular y didáctica se tiene en cuenta la importancia de abordar el estudio del pensamiento variacional desde situaciones de variación y cambio que involucre contextos de la vida práctica, donde además se estudie la función como dependencia para el desarrollo del pensamiento variacional a partir de

los procesos de modelación. Además, desde la perspectiva didáctica se tienen en cuenta algunos niveles del razonamiento covariacional en la construcción de la secuencia, en tanto que contribuyen con el alcance de algunos aspectos del pensamiento variacional por parte de los estudiantes. Así pues, desde la perspectiva matemática la función se aborda como una relación de dependencia.

Figura 12

Síntesis de las perspectivas que aporta al diseño de la propuesta de aula.



CAPÍTULO 3. LA FUNCIÓN POR TRAMOS EN LA ESCUELA

En este capítulo, se presentan los aspectos relacionados con el diseño de la secuencia didáctica como propuesta de aula, donde se evidencian cada uno de los aspectos que aportan las diferentes perspectivas que se desarrollaron en el marco de referencia conceptual. Además, se describen cada una de las situaciones desarrolladas, los desempeños involucrados, así como los conceptos matemáticos abordados. Por otro lado, se presenta el contexto y la caracterización de los participantes, así como la metodología de implementación. Finalmente, se encuentran los resultados y análisis de los resultados.

3.1 Sobre el diseño de la secuencia didáctica

En el diseño de la secuencia didáctica como propuesta de aula, se retoman los aspectos desarrollados en el marco teórico de referencia conceptual, donde se entrelazan los elementos planteados en la articulación de las diferentes perspectivas, curricular, didáctica y matemática, que orientan la construcción de la secuencia didáctica para lograr los objetivos propuestos en esta investigación, cuya finalidad, es desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional a través de la modelación de fenómenos presentes en el contexto artesanal de recolección de pianguas, mediante la función por tramos, en el cual se evidencien situaciones de variación y cambio que permitan el análisis de relaciones funcionales, como relación de dependencia.

La estructuración de la secuencia didáctica se aborda desde el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), el cual privilegia la modelación no solo como proceso matemático sino como práctica matemática, haciendo especial énfasis en cada uno de los niveles. También se aborda el razonamiento covariacional propuesto por Carlson et.al (2003), el cual permite identificar el nivel de apropiación y razonamiento de los estudiantes para enfrentarse a

situaciones que involucran variación y cambio, donde la función por tramos es el principal objeto matemático, entendiendo la función como dependencia.

3.1.1. Sobre el diseño de las situaciones y actividades

Teniendo en cuenta los aspectos teóricos abordados en las diferentes perspectivas, se diseña la secuencia didáctica conformada por dos situaciones, la primera situación titulada *el concepto de función por tramos, la recolección y comercialización de piangua en Bahía Málaga*, está compuesta por cuatro tareas, esta situación aborda aspectos relacionados con la recolección y venta de las pianguas. La segunda situación tiene como nombre *la covariación en el contexto artesanal de recolección de pianguas*, en la cual se toma como contexto en la tarea uno y dos el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, en esta se relaciona la cantidad de docenas de pianguas que debe cancelar cada persona al transportista según el número de personas que utilicen el transporte por día. En cuanto a la tarea tres, se desarrollan preguntas que relacionan diferentes contextos que se pueden representar a través de una función por tramos, con el fin de que los participantes evidencien la presencia de este tipo de funciones en diferentes situaciones cotidianas.

Ahora bien, de manera general, en las tareas que involucra cada una de las situaciones se busca trabajar contenidos matemáticos como lo son: la relación de dependencia entre magnitudes, la variación y el cambio, la covariación, variaciones lineales, razón y cambio etc. De manera específica y como se ha mencionado en principio en esta investigación, se tiene como principal objetivo desarrollar aspectos del pensamiento variacional a través de la modelación de función por tramos, en el contexto de recolección de pianguas, logrando la comprensión y caracterización de este tipo de funciones y su papel en diversos contextos cotidianos. En este sentido, el diseño de esta secuencia didáctica surge por la necesidad de aportar al desarrollo del

pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno, además de mitigar las dificultades que algunos investigadores han encontrado alrededor del estudio de la función por tramos en la escuela. Por ello, la secuencia didáctica se articula con los desempeños que los estudiantes deben alcanzar al culminar el grado noveno.

Tabla 5

Situaciones, Contenido Matemático y Desempeño que se relacionan en las situaciones.

Situaciones	No. Tareas	No. Preguntas	Contenidos matemáticos	Desempeño
Situación 1 El concepto de función por tramos, la recolección y comercialización de pianguas.	Tarea 1. Comprendiendo la situación.	3	• Relación de dependencia entre magnitudes.	• Reconoce, claramente, el concepto de función y lo relaciona con situaciones de la vida real.
	Tarea 2. Relación entre magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.	8	• Variación y cambio. • Covariación. • Variaciones lineales	• Identifica la variación y el cambio presentes en una situación dada.
	Tarea 3. Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas	5	• Pendiente y ecuación en la recta. • Concepto de función por tramos.	• Representa funciones por tramos gráficamente.
	Tarea 4. Función por tramos en el control y recolección de pianguas	2	• Modelación de funciones por tramos	• Determina las expresiones algebraicas de una función por tramos.
Situación 2 La covariación en el contexto artesanal de recolección de pianguas	Tarea 1. Comprendiendo la situación.	2		• Define situaciones que pueden ser modeladas a través de una función por tramos.
	Tarea 2. Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.	7		

Tarea 3.
funciones por
tramos en
diferentes
contextos.

4

- Caracteriza funciones por tramos

3.1.2. La secuencia didáctica

En este apartado se presenta la secuencia didáctica diseñada para favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional, mediante la modelación de función por tramos, además de lograr una mejor comprensión de este tipo de funciones, la cual por su representación algebraica y comportamiento grafico genera dificultades de aprendizaje en los estudiantes.

Propósito de la situación 1

La situación 1 se enfoca en la actividad de recolección y comercialización de pianguas, con la cual se busca que los estudiantes reconozcan las magnitudes involucradas y las relaciones de dependencia existente entre ellas. Además, se espera que realicen representaciones tabulares, algebraicas y graficas de la situación, y a su vez describan el comportamiento que se evidencia, así como la identificación de la variación y cambio como un acercamiento al estudio de la covariación. Todo esto como un primer acercamiento a la función por tramos.

Propósito de la situación 2

La situación 2 está relacionada con el transporte de los piangueros a la zona de los manglares para realizar la recolección de pianguas. Con esta situación, al igual que en la situación 1 se busca que los estudiantes reconozcan las cantidades involucradas, las variaciones y las relaciones de dependencia. Además, se espera que realicen diferentes representaciones de la situación donde se pueda llevar a cabo el estudio de la continuidad y discontinuidad a partir de la

situación dada. En esta situación se enfatiza en la caracterización de la función por tramos a partir del trabajo con diferentes contextos que dejan en evidencia la importancia del contexto, la cual es el objeto matemático en estudio de la investigación.

Finalmente, es significativo mencionar que, para efectos de este trabajo el termino diámetro refiere a la longitud más amplia que hay de un extremo a otro de la piangua. (ver Figura 14 y 15)

Situación 1: El concepto de función por tramos, la recolección y comercialización de pianguas en Bahía Málaga

En las comunidades del consejo comunitario de la Plata Bahía Málaga, una de las actividades principales para la sostenibilidad económica de sus habitantes es la recolección de pianguas. Para desarrollar esta actividad, las personas se deben desplazar a las zonas de manglares, donde tardan alrededor de tres horas de trabajo. El costo de la docena de pianguas depende de la longitud de su diámetro, la cual se determina por un instrumento de medida llamado piangüimetro. Si la piangua mide entre 3.0 cm a 4.5 cm, su costo por docena es de \$1.000; si mide entre 5.0cm a 9.0 cm, su costo por docena es de \$2.000. En las siguientes figuras se puede observar en una canasta algunas docenas de pianguas recolectadas, el registro de medida de una piangua de 4.0 cm y el registro de medida de una piangua de 6.5 cm realizado con el piangüimetro.

Figura 13

Pianguas Recolectadas en Canasta



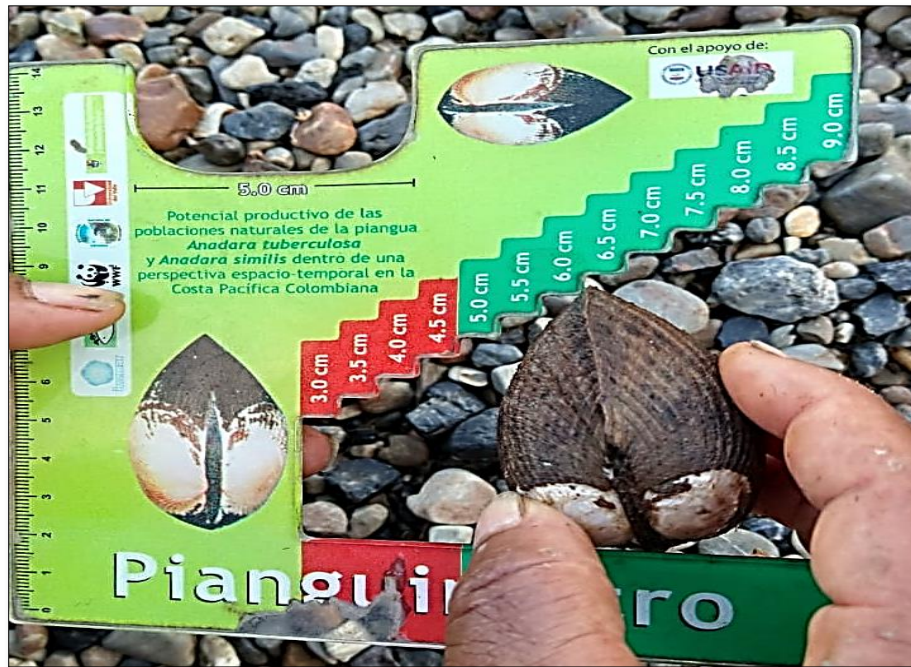
Figura 14

Piangua con Medida de 4.0 cm



Figura 15

Piangua con Medida de 6.5 cm



Tarea 1: Comprendiendo la situación.

1. Si una persona recolecta por día 2, 3 y 5 docenas de pianguas que miden entre 3.0 cm a 4.5 cm.
 - a. Indique el ingreso obtenido por día
 - b. Escriba el ingreso total obtenido por la recolección de pianguas.
2. Si una persona recolecta por día 10, 15, 14 docenas de pianguas que miden entre 5.0cm a 9.0 cm.
 - a. Indique el ingreso obtenido por día.
 - b. Escriba el ingreso total obtenido por la recolección de pianguas.
3. Teniendo en cuenta lo anterior.
 - a. Indica las magnitudes que intervienen en cada caso

b. Escribe de qué depende la cantidad de dinero que recibe una persona por las docenas de piangua que saca en el día.

Tarea 2. Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

Lina de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, perteneciente al consejo comunitario de la Plata Bahía Málaga, en la semana de receso escolar sacó 138 docenas de pianguas en cinco días. Lina necesita saber, cuánto será su ingreso si vende el total de pianguas que recolecto teniendo en cuenta sus medidas. En la siguiente tabla se relaciona la cantidad total de docenas recolectadas por día, distribuidas en cantidad de docenas según sus medidas.

Tabla 6

Docenas de Pianguas por Día

Día	Total de docenas por día.	Cantidad de docenas con medidas de 3.0cm a 4.5cm	Cantidad de docenas con medidas de 5.0cm a 9.0cm
Lunes	27	7	20
Martes	21	4	17
Miércoles	35	6	29
Jueves	25	5	20
Viernes	30	8	22

1. A partir de los datos suministrados en la tabla anterior, calcula el ingreso de Lina por día durante los cinco días de recolección de pianguas, y regístralos en la siguiente tabla.

Tabla 7

Ingreso por Día.

Día	Total docenas por día	Ingreso por día de docenas con medidas de 3.0cm a 4.5cm	Ingreso por día de docenas con medidas de 5.0cm a 9.0cm	Total ingreso por día
Lunes	27			

Martes	21
Miércoles	35
Jueves	25
Viernes	30
Total	

2. De acuerdo con los datos registrados en la tabla.
 - a. Calcular el ingreso que obtiene Lina el día miércoles por las seis docenas de pianguas que recolectó, si tres docenas son de 3.5 cm, dos de 4.0 cm y una de 4.5 cm.
 - b. Calcular el ingreso que obtiene Lina por las 29 docenas de pianguas que recolecto el día miércoles, si 10 docenas son de 5.0 cm, 8 docenas son de 7.0 cm y 11 docenas son de 6.0 cm.
 - c. Escribir como realizó los cálculos para obtener la respuesta del literal a y b.
 - d. Explicar por qué el valor por docenas de las seis docenas de pianguas recolectadas el día miércoles es el mismo.
 - e. Calcular cual es el ingreso que tiene Lina por todas las docenas de pianguas que recolecto el día miércoles.
3. Analiza y responde las siguientes preguntas.
 - a. Explica de qué depende la cantidad de dinero que recibe Lina el día miércoles.
 - b. Indica de qué depende el precio de las docenas de piangua que saco Lina.
 - c. Explica de qué dependen el ingreso total de Lina por las docenas de piangua que recolecto en la semana de receso.
4. Cuando calculó el dinero que recibe Lina cada día por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm y las docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm.
 - a. Indica que cantidades considera que se mantienen constantes.
 - b. Indica que cantidades considera que varían.

5. Lina tuvo una semana de receso adicional y logro reunir \$380.000 por las docenas de pianguas que recolecto.

a. Si todas las docenas de pianguas fueran de medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm, indica cuántas docenas de pianguas logro sacar Lina.

b. Si todas las docenas de pianguas fueran con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm, indica cuántas docenas de pianguas logro sacar Lina.

6. Si Lina de los \$380.000 que ganó en la semana de receso recibió \$94.000 por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.

a. Calcula cuántas docenas de pianguas vendió con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm

b. Calcula cuánto dinero recibió por las docenas de pianguas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm.

c. Calcula cuántas docenas de pianguas vendió con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm

7. Si X representa cualquier cantidad de docenas de pianguas, escribe la expresión que corresponde a cada situación.

a. Una expresión que permita calcular el ingreso por la venta de docenas de pianguas recolectadas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.

b. Una expresión que permita calcular el ingreso por la venta de docenas de pianguas recolectadas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm.

c. Determina la expresión para calcular el ingreso total cuando Lina vende cualquier cantidad de docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5cm y medidas entre 5.0cm a 9.0cm

8. Teniendo en cuenta la expresión obtenida en el punto 7, literal a y b calcule la pregunta a y b:

- a. El ingreso obtenido por un recolector de piangua que sacó 32 docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.
- b. El ingreso obtenido por un recolector de piangua que sacó 54 docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm.
- c. Lina el día jueves sacó 25 docenas de piangua, 5 docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm, 20 docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm. Ayuda a Lina a calcular el ingreso total obtenido haciendo uso de la expresión ingreso total.

$$f(x) = \begin{cases} 1000x, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000x, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$$

Tarea 3. Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

La persona encargada del control y monitoreo de la extracción de pianguas del manglar, le solicitó a Lina realizar el registro de las docenas de piangua que sacó durante la semana de receso de acuerdo a su medida. En las siguientes tablas se puede observar el registro.

Tabla 8

Registro de Docenas de Piangua de 3.0 cm a 4.5 cm

Diámetro	Cantidad de docenas	Precio por docena	Ingreso total
3.0	4		
3.5	7		
4.0	9		
4.5	10		

Tabla 9

Registro de Docenas de Piangua de 5.0 cm a 9.0 cm

Diámetro	Cantidad de docenas	Precio por docena	Ingreso total
5.0	15		
5.5	20		
6.0	15		

6.5	11
7.0	12
7.5	14
8.0	12
8.5	9
9.0	0

1. Completa la columna de precio por docena y la columna ingreso total. Recuerda utilizar la expresión algebraica encontrada anteriormente para completar la columna de ingreso total.

2. Observa la tabla anterior y responde:

a. Indica los valores que se mantienen constantes y los valores que varían.

b. Representar en el plano cartesiano una gráfica del diámetro y el número de docenas, teniendo en cuenta que en el eje x se ubica el diámetro y en el eje y el número de docenas.

c. A partir de la gráfica escribe alguna conclusión con relación al comportamiento que observa en la misma.

Nota: cuando se habla del comportamiento se hace referencia al análisis que se puede hacer de la gráfica cuando esta aumenta, disminuye o se mantiene de manera constante, es decir las diferentes variaciones que se pueden observar.

3. Realiza una gráfica en el plano cartesiano donde la variable independiente sea el diámetro y la variable dependiente sea el precio por docena, luego observa la gráfica y responde.

a. Indica el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm con relación al diámetro.

b. Indica el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm con relación al diámetro

c. Indica una expresión donde se represente el precio por docena en función del diámetro.

4. El comportamiento de la gráfica del precio por docena se puede representar en una expresión algebraica de la siguiente manera.

$$f(x) = \begin{cases} 1000, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la expresión algebraica responde:

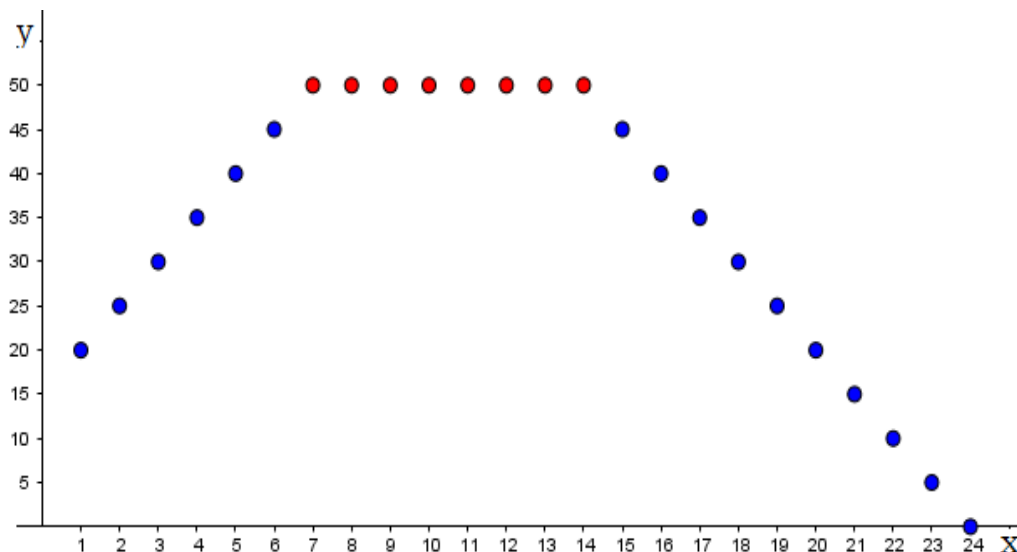
a. Si x tiene un diámetro de 3.0 cm que valor toma y =

b. Si x tiene un diámetro de 9.0 cm que valor toma y =

5. Ana comenzó a sacar pianguas el día lunes, ese día logro sacar 20 docenas; el día martes, 25 docenas; el día miércoles, 30 docenas; y así sucesivamente aumento de cinco docenas cada día hasta completar la semana. A partir de ahí, la cantidad de docenas se mantuvo constante durante la siguiente semana. Finalmente, hubo cambio de marea (quiebra) y la cantidad de docenas que sacaba Ana comenzó a disminuir de manera progresiva hasta llegar al día 10.

Figura 16

Cantidad de Docenas Sacadas por Ana Durante 24 Días



La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde las siguientes preguntas:

- a. Describe cómo varía el comportamiento de la gráfica en cada tramo.
- b. Indica cuál fue la cantidad de docenas que se mantuvo constante durante la segunda semana
- c. Determina los valores que toma la variable independiente (x) en cada tramo.
- d. Determina los valores que toma la variable dependiente (y) en cada tramo.
- e. Representa de manera algebraica la situación.
- f. Explica si de acuerdo a la situación de recolección de pianguas es pertinente unir los puntos y por qué.
- g. Indica si es pertinente unir los puntos que van desde el día uno (1) hasta el día siete (7) y por qué.

Tarea 4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.

Función por tramos.

Una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de f . Una función definida de esta manera se denomina función definida por tramos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

No son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes.

1. Con el fin de controlar la recolección de pianguas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm del manglar, las personas encargadas del control y monitoreo establecieron las siguientes tarifas a cobrar a quienes extraigan pianguas de dicha medida. Las personas que recolecten las primeras

50 docenas pagaran 2.000 por docena, para los que recolecten 100 pagaran 3.000 pesos por docenas y de ahí en adelante pagaran 6.000 pesos por docenas. La siguiente expresión $f(x)$ representa la función por tramos correspondiente a la situación.

$$f(x) = \begin{cases} 2000x, & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 3000x - 50000, & \text{si } 50 < x \leq 100 \\ 6000x - 200000, & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

Si x representa cualquier cantidad de docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm, calcula:

- a. El valor a pagar por un recolector de pianguas que extrajo 70 docenas con medidas entre 3.0cm a 4.5 cm.
- b. El valor a pagar por un recolector de pianguas que extrajo 150 docenas con medidas entre de 3.0cm a 4.5 cm.
- c. Representa gráficamente la situación en el plano cartesiano.
- d. Determina el dominio y rango de cada una de las expresiones que conforman la función por tramos

2. Ana, Claudia y Heidi fueron tres días a recolectar piangua, ya que necesitan reunir fondos para la despedida de fin de año, la condición que establecieron fue que, cada una colocara la misma cantidad de docenas de acuerdo a su diámetro. Las siguientes tablas registran las docenas según el diámetro.

Tabla 10

Docenas de Piangua con Diámetro de 3.0 cm a 4.5 cm

Docenas	Diámetro (cm)
6	3.0
6	3.5
6	4.0
6	4.5

Tabla 11

Docenas de Piangua con Diámetro de 5.0 cm a 6.5 cm

Docenas	Diámetro (cm)
9	5.0
12	5.5
15	6.0
18	6.5

Tabla 12

Docenas de Piangua con Diámetro de 7.0 cm a 9.0 cm

Docenas	Diámetro (cm)
4	7.0
3	7.5
2	8.0
1	8.5
0	9.0

- Realiza una representación gráfica de los datos registrados en las tablas, donde la variable independiente sea el diámetro y la variable dependiente el número de docenas.
- Describe el comportamiento que evidencia en la gráfica.
- Determina el dominio y rango de la función.
- Indica una función que represente la situación.

Situación 2. La covariación en el contexto artesanal de recolección de pianguas.

En la comunidad de Miramar, hay personas que realizan el transporte de los piangueros a la zona de los manglares para realizar la faena de recolección de piangua, las tarifas están establecidas de acuerdo a la cantidad de personas que hagan uso del servicio, para grupos con menos de diez (10) personas cada uno deberá dar seis (6) docenas de piangua, y para un grupo de diez (10) a veinte (20) personas, deberán pagar cuatro docenas de pianguas al transportista. Todas las pianguas deben ser con medidas entre 5.0 y 9.0 cm, las cuales tienen un costo de \$2.000.

Tarea 1. Comprendiendo la situación.

1. Si una persona se dedica a realizar el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, determina:

a. La cantidad total de docenas adquiridas si transporta el día lunes 6 personas, el martes 9, el miércoles 12, jueves 15 y el viernes 17.

b. El ingreso total adquirido en una semana si transporta el día lunes 6 personas, el martes 9, el miércoles 12, jueves 15 y el viernes 17.

c. Indica cómo calculaste la cantidad de docenas recibidas.

d. Indica cómo calculaste el ingreso total obtenido.

2. Analiza y responde:

a. La cantidad de piangueros que se debe transportar para tener un ingreso de \$84.000 pesos en un día.

b. La cantidad de piangueros que se debe transportar para tener un ingreso de \$152.000

c. Escribe de qué depende la cantidad de docenas de pianguas que recibe el transportista.

d. Escribe de qué depende la cantidad de dinero que recibe el transportista.

Tarea 2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

La siguiente tabla relaciona la cantidad de piangueros que transporta el señor José cada día durante una semana. Completa la tabla.

Tabla 13

Piangueros Transportados en una Semana

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad de piangueros transportados	7	6	12	12	15	5
Cantidad de docenas Ingreso por día						

Luego de completar la tabla:

a. Indica cómo calculaste la cantidad de docenas de pianguas recibidas cada día por el transportista.

b. Indica cómo calculaste el ingreso obtenido por día por el transportista.

c. Indica la cantidad que se mantiene constante y la cantidad varía al calcular los datos faltantes.

2. Analiza y responde

a. Explica por qué si el día martes don José transporto seis (6) personas y el día jueves doce (12) personas no obtuvo el doble de docenas que el día martes.

b. Explica por qué el día viernes no recibió el triple de docenas que el día sábado.

3. Si x representa la cantidad de docenas de pianguas que recibe un transportista por un determinado número de personas que transporta, determina:

a. Una expresión que permita calcular la cantidad de docenas obtenidas al transporta de una (1) a nueve (9) personas.

b. Una expresión que permita calcular la cantidad de docenas obtenidas al transporta grupos de 10 a 20 personas.

4. Teniendo en cuenta la expresión obtenida en punto tres, literal a y b, calcule:
- La cantidad total de docenas obtenidas por un transportista cuando transporta el día lunes 4 piangueros, el martes 5, el miércoles 7 y el jueves 9.
 - La cantidad total de docenas obtenidas por un transportista cuando transporta el día lunes 11 piangueros, el martes 12, el miércoles 14 y el jueves 17.
5. Don José después de realizar el transporte de muchos piangueros, ha determinado que para calcular la cantidad de docenas de pianguas que recibe por cada grupo que transporta lo puede hacer de la siguiente manera: $6x$ para cuando transporta de uno (1) a nueve (9) piangueros y $4x$ para cuando transporta de diez (10) a veinte (20) piangueros. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & \text{si } 1 \leq x \leq 9, \quad x \in \mathbb{N} \\ 4x, & \text{si } 10 \leq x \leq 20, \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Escribe la validez de las expresiones que ha determinado don José
 - Indica que valores puede tomar la variable x .
 - Indica que valores puede tomar $f(x)$ o la variable y .
6. Teniendo en cuenta la función anterior:
- Realiza una representación en el plano cartesiano.
 - Escribe una conclusión con relación a la gráfica.
 - Indica si es pertinente unir los puntos de la gráfica, por qué.
7. Utiliza la expresión de don José para calcular la cantidad de docenas obtenidas si transporta el lunes 7 personas, el martes 12, el miércoles 15 y el viernes 5, luego calcula la cantidad de dinero adquirido.

Tabla 14

Definición de función por tramos

Las expresiones que se desarrollaron en la situación 1 y en la situación 2 se conocen desde el punto de vista matemático como funciones definidas por tramos.

$$f(x) = \begin{cases} 1000x, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000x, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1000, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2000x, & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 3000x - 50000, & \text{si } 50 < x \leq 100 \\ 6000x - 200000, & \text{si } x > 100 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 6x, & \text{si } 1 \leq x \leq 9 \\ 4x, & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

Una función puede implicar dos o más expresiones, cada una definida en tramos distintos sobre el dominio de f . Una función con estas características se denomina función definida por tramos. No son dos, tres o más funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en varias partes. Ejemplo:

Antonio ha escrito un libro sobre la historia del fútbol y quiere imprimirlo para regalarlo a sus familiares y a sus amigos en su cumpleaños. Una empresa editorial le ha dado un presupuesto que dice lo siguiente: El costo inicial para iniciar la impresión del libro es de \$63.000 y el precio de impresión de cada libro asciende a \$21.000 si se imprimen hasta 30 unidades y a \$12.600 si se imprimen más.

La solución a esta situación sería:

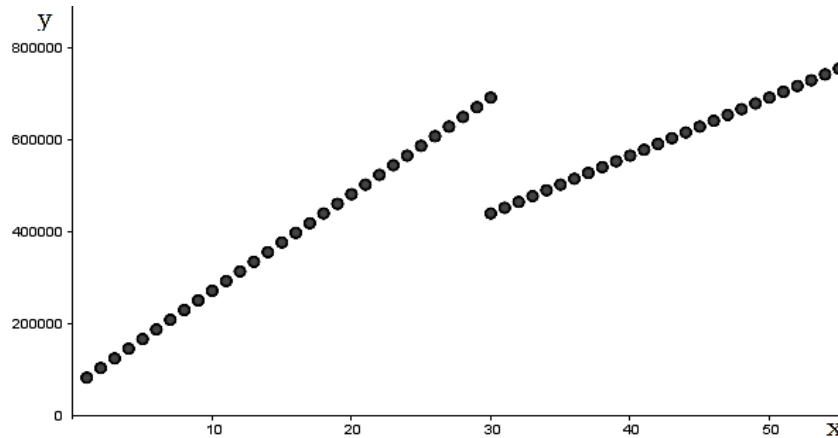
Si la cantidad de libros a imprimir es menor o igual que 30, $0 < x \leq 30$, el costo de cada libro es de \$21.000 y, por tanto, el costo total es:

$$f(x) = 63.000 + 21.000 * x$$

Sin embargo, si el número de libros es mayor que 30 ($x > 30$), el precio por cada libro es de \$12.600, así que el costo total es:

$$f(x) = 63.000 + 12.600 * x$$

Por lo tanto, su representación gráfica es:



Por consiguiente, la representación algebraica que corresponde a la situación es:

$$f(x) = \begin{cases} 63.000 + 21000x, & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 63.000 + 12.600x, & x > 30 \end{cases}$$

En esta dirección, esta situación se modela a través de una función por tramos cuyo dominio es: $]0,30] \cup]30, \infty)$, con un rango de $]0, \infty)$.

Teniendo en cuenta la función anterior responde:

- a. En dicha empresa, ¿es más barato imprimir 25 libros o imprimir 40? Razonar la respuesta y relacionarla con la gráfica de f .

Si se imprimen 25 libros, el costo total es 588.000: $f(25) = 63.000 + 21.000(25) = 588.000$

Mientras que si se imprimen 40 libros el coste total es 567.000: $f(40) = 63.000 + 12.600(40) = 567.000$

Por tanto, es más barato imprimir 40 libros que imprimir 25. Observando la gráfica, la función toma valores mayores que $f(30)$ a partir de $x=55$. Por tanto, es más barato imprimir 31 libros que imprimir 25 ó 30.

Nota: la función es de variable discreta, puesto que no toma ningún valor entre los valores consecutivos, teniendo en cuenta el contexto de desarrollo.

Tarea 3. funciones por tramos en diferentes contextos.

Las funciones por tramos definidas anteriormente también se presentan en diferentes situaciones distintas al contexto de la recolección de pianguas estudiado.

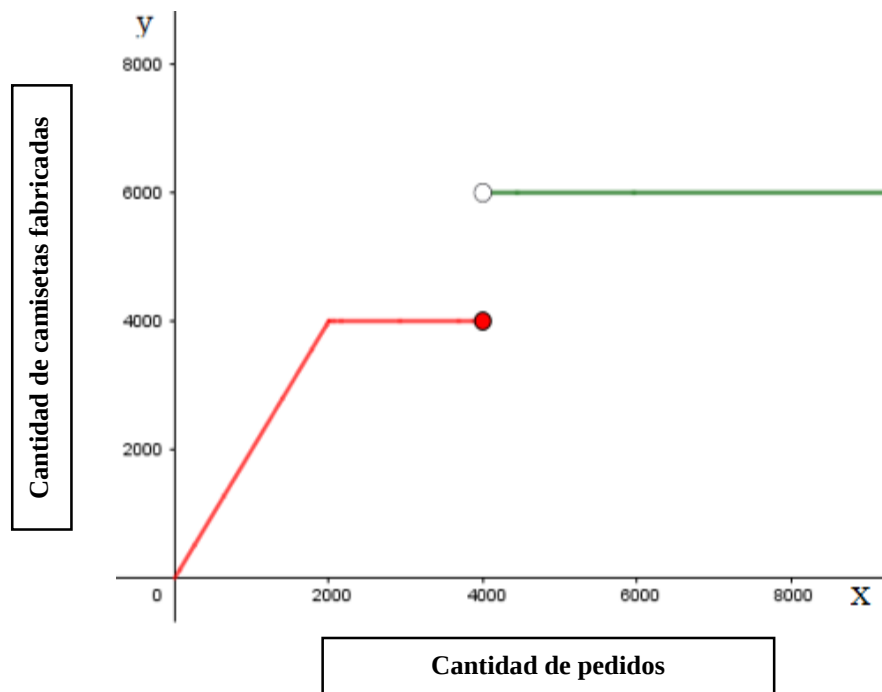
1. El precio de una llamada a una línea telefónica fija nacional se descompone en dos conceptos: el primero es el precio fijo y el otro es el costo de la duración de la llamada en minutos. El costo fijo de la llamada es de \$840 y el costo de un minuto de llamada es de \$210 el minuto durante los primeros 60 minutos y de \$2.100 minuto a partir del minuto 60.

- a) Indica la función que representa el costo total de una llamada.
- b) Representa la función en el plano cartesiano
- c) Indica si esta función representa una función por tramos y por qué.
- d) Calcula el precio de una llamada de 20 minutos y el de una llamada de 75 minutos.
- e) Indica los valores que puede tomar la variable x y la variable y , explica a qué conjunto numérico pertenece y por qué.

2. Las personas encargadas de la publicidad de un equipo de fútbol español fabrican diariamente camisetas para suplir en totalidad los pedidos de las tiendas. La gráfica de la función que proporciona la cantidad diaria de camisetas a fabricar en función del número de pedidos es la siguiente.

Figura 17

Cantidad de Camisetas Fabricadas por Pedido



- a. Indica si la gráfica representa la situación.
 - b. Es posible que se puedan producir camisetas entre 0 y 1, entre 2 y 3, y entre 7 y 11.
 - c. Indica cuántas camisetas se fabrican si la cantidad de pedidos es 2.500, si es 4.000, si es mayor que 5.000, y si es 1.000
 - d. Indica cuántos pedidos deben recibirse para que se fabriquen 4.000 camisetas, y 6.000, y 2.500
 - e. Determinar las expresiones algebraicas de la función a tramos.
3. Observa la siguiente expresión algebraica.

$$f(x) = \begin{cases} 33.600x, & \text{si } 0 < x \leq 100 \\ 25.200x, & 100 < x < 300 \\ 16.800x, & x \geq 300 \end{cases}$$

- a. Define una situación que pueda ser modelada a partir de la función dada.
 - b. Para cada tramo indica cuál es la situación particular.
 - c. Indica los posibles valores que puede tomar la variable x y la variable y , determina el conjunto numérico al que pertenece.
4. teniendo en cuenta las tareas desarrolladas en la situación 1 y situación 2:
- a. Explica con tus propias palabras cómo entiendes qué es una función por tramos.
 - b. Describe a que hace referencia los valores que toma la variable x en distintas situaciones.
 - c. Describe a que hace referencia los valores que toma la variable y en distintas situaciones.

3.2. Sobre la implementación

En este apartado se describe el contexto de desarrollo de la investigación y la metodología abordada para la implementación de la secuencia didáctica.

3.2.1. sobre el contexto de desarrollo

La propuesta de investigación se desarrolló en la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, sede Cocalito, Institución de carácter público, ubicada en el departamento del Valle del Cauca, en la zona rural del Distrito Especial de Buenaventura, en el corregimiento No. 3 sobre el océano pacifico colombiano, Consejo Comunitario de Bahía Málaga la plata. Esta institución cuenta con un promedio de 75 alumnos afrodescendientes con un estrato socioeconómico nivel 1, los cuales están dispersos en cuatro (4) comunidades diferentes, Mangaña, la Sierpe, la Plata y la comunidad donde está ubicada la sede Cocalito, Miramar.

Las comunidades mencionadas se encuentran dispersas dentro del consejo comunitario, por lo cual los alumnos deben transporte vía marítima a través de una lancha nativa que realiza la

ruta desde las 5:50 de la mañana, llegando a la sede Cocalito a las 6:50 de la mañana (este horario puede cambiar de acuerdo a las variaciones de la marea). Actualmente, la sede Cocalito ofrece educación en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media en la jornada diurna y nocturna, bajo la modalidad de escuela nueva, su planta personal está compuesta por siete (7) docentes. En el momento la sede no cuenta con una planta física, ni con cobertura de red móvil e internet.

La misión de la Institución educativa Rosa Zarate de Peña, es ofrecer una educación integral y contextualizada, orientada a través del desarrollo de los programas curriculares con énfasis en Ecoturismo. Implementando estrategias que posibiliten orientar el comportamiento de los estamentos de la comunidad hacia el crecimiento; con base en una convivencia de respeto, tolerancia, compromiso, reciprocidad de derechos y deberes, donde se fomente el pensamiento crítico, los valores éticos, espirituales y morales; enmarcados dentro de un Modelo Pedagógico Constructivista que conlleve a la búsqueda de una mejor calidad de vida de esta población costera. (PEI, 2021)

Por otra parte, su visión para el año 2025 es ser una de las instituciones educativas con mayor proyección en el área de Ecoturismo y Medio Ambiente, con el propósito de convertirse en una de las más sobresalientes del occidente Colombiano, por la prestación del servicio educativo de calidad a través del cual se pretende lograr el desarrollo de potencialidades, capacidades, valores y actitudes de sus educandos, destacándose por su liderazgo, su capacidad de gestión y contribuyendo de esta manera significativa al bienestar de su comunidad. (PEI, 2021)

Ahora bien, la investigación se desarrollará con los estudiantes de la básica secundaria, específicamente del grado noveno, con edades que oscilan entre los 14 y 18 años, quienes viven

en comunidades dispersas a la Institución. Son alumnos que día a día se enfrentan a muchas adversidades en el esfuerzo de culminar su formación académica, entre ellas, estar listos cada mañana desde las 5:50 Am, a la espera del transporte que los lleva hasta la comunidad de Miramar, comunidad donde está ubicada la sede Cocalito, muchos de ellos sin desayunar, expuestos a la lluvia, al sol, al mal tiempo de las mareas, debido a que su transporte es marítimo, también en su mayoría deben trabajar en la pesca, turismo y la actividad de recolección de pianguas, contexto de interés para la investigación.

3.2.2 Sobre la Metodología de implementación

En primer momento es necesario mencionar que esta investigación se aborda desde una metodología de investigación cualitativa, la cual busca describir, analizar e interpretar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes a través del razonamiento covariacional a partir de la modelación de la función por tramos en el contexto artesanal de recolección de pianguas. En esta dirección, esta investigación es cualitativa descriptiva en tanto que enfatiza en un aspecto cultural y forma de sustento económico.

Camacho (2008), argumenta que este tipo de investigación coloca su interés en la solución de un problema determinado, basado en la interpretación y referida al individuo. Del mismo modo, indica que, la investigación cualitativa se divide en cuatro fases: la primera fase es la recolección de datos, la segunda fase es la interpretación, tercer fase integración de los resultados y significado de los resultados, donde se emplean técnica de recolección de datos tipo cuestionario.

En el desarrollo de esta investigación la primera fase fue la fundamentación de la problemática desde las diferentes perspectivas que la sustentan para construcción de la secuencia

didáctica y su posterior aplicación, la segunda fase enfatizó en la tabulación de los datos.

Finalmente, la tercera fase basada en el análisis de los datos desde la rejilla de análisis diseñada.

En relación a la aplicación de la secuencia didáctica, esta se llevó a cabo en la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, sede Cocalito, con los cinco estudiantes de grado noveno, con edades entre 15 y 18 años. En principio, se le dio a conocer a los participantes el propósito del desarrollo de la secuencia didáctica, aclarando que esta no tendría ninguna implicación en el desarrollo del plan de área de matemáticas, por tanto, no sería evaluado. Cabe mencionar, que todas las tareas diseñadas se aplicaron de manera individual.

En primer momento, se aplicó la situación 1, titulada *El concepto de función por tramos, la recolección y comercialización de pianguas en Bahía Málaga*, la cual está conformada por cuatro tareas que se aplicaron en tres secciones de la siguiente manera: el día martes, 8 de febrero de 2022, los estudiantes desarrollaron la tarea 1 y 2 en un tiempo aproximado de 2 horas con 15 minutos, el día martes, 15 de febrero de 2022, se desarrolló la tarea 3 y el día jueves, 17 de febrero de 2022, se llevó a cabo la aplicación de la tarea cuatro, ambas con un tiempo aproximado de 2 horas con 30 minutos.

En cuanto a la situación 2, titulada *La covariación en el contexto artesanal de recolección de pianguas*, el día miércoles, 9 de marzo de 2022, se aplicó la tarea 1 y 2, los estudiantes tardaron alrededor de 2 horas y 30 minutos; para el día miércoles, 16 de mayo de 2022, se aplicó la tarea 3, con la cual los estudiantes tardaron un tiempo de aproximadamente de 3 horas para su desarrollo.

Ahora bien, posterior al desarrollo de cada una de las tareas hubo un espacio de aproximadamente 25 minutos para desarrollar una plenaria donde los estudiantes compartieron cada una de las respuestas registradas, esto con el fin de fomentar la comprensión de la tarea

planteada a través de un espacio de intercambio de ideas, que permitiera un aprendizaje conjunto a partir de las diferentes estrategias utilizadas por cada uno para el desarrollo de la actividad.

Es importante mencionar que, para la implementación de cada una de las tareas se hizo entrega a los estudiantes del material impreso con las correspondientes actividades, la cual debían leer de manera detallada y desarrollar cada una de las preguntas. Del mismo modo, se entregaron las hojas en blanco donde registraron la respuesta.

3.3. Resultados y análisis de los resultados

En este apartado del documento, se presentan la organización de las respuestas a las preguntas diseñadas en la secuencia didáctica registradas por los estudiantes del grado noveno, de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, sede cocalito. Como se ha mencionado anteriormente la propuesta de aula está compuesta por dos situaciones didácticas. La situación 1 (S1) la conforman cuatro tareas denotadas como T1, T2, T3, T4, en cuanto a la situación dos (S2), esta cuenta con tres tareas nombradas de la misma forma T1, T2, T3.

Ahora bien, posterior a la aplicación de cada una de las situaciones diseñadas, se realiza la organización de los datos de forma tabular a partir de las respuestas obtenidas de los estudiantes en los registros. Las tablas contienen la siguiente codificación:

Tipo de respuesta: se denota como R1, R2, R3, R4, R5 y refiere a las diferentes respuestas dada por los estudiantes para una determinada pregunta.

Descripción: en esta columna se describen la respuesta del estudiante y los procesos que realizó para obtener dicho resultado.

Cantidad de estudiantes: en esta columna se cuantifica la cantidad de estudiantes que realizan determinado tipo de repuestas. Es importante mencionar, que en esta investigación los estudiantes que participaron fueron cinco, los cuales se denotan como E1, E2, E3, E4, E5.

En cuanto a la descripción y análisis de las situaciones, se escribe el enunciado principal de la situación y luego una tabla por cada pregunta donde se registra la tabulación ya mencionada. Ahora bien, la descripción de las actividades se realiza a partir de lo que se evidencia en el desarrollo de cada pregunta por parte de los estudiantes. En cuanto al análisis, este se aborda desde las diferentes perspectivas desarrolladas en la investigación, perspectiva curricular, perspectiva didáctica y la perspectiva matemática. En este sentido, se hará especial énfasis en los aspectos tales como el estudio de la covariación, los niveles de modelación, el razonamiento covariacional y el contenido matemático. Como se ha mencionado anteriormente, esta investigación hace especial énfasis en la modelación desde la EMR. A continuación, se consolida en una matriz de análisis cada uno de los aspectos que permitieron conocer el alcance de la investigación, teniendo como principales categorías los aspectos del pensamiento variacional y el contenido matemático función por tramos. Desde el pensamiento variacional fue posible identificar la apropiación que tienen los estudiantes en el estudio de la covariación, el nivel de modelación alcanzado en el desarrollo de las preguntas relacionadas en cada tarea, así como el nivel de razonamiento en el que se ubican los estudiantes en relación a la coordinación entre dos magnitudes que varían. En cuanto al contenido matemático, en esta categoría se identifica la comprensión de los estudiantes de la función como dependencia, los componentes que la componen, los sistemas de representación y la definición que logran de la función por tramos desde el contexto artesanal de recolección de pianguas.

Tabla 15

Matriz de Análisis

Categoría	Subcategoría	Descripción	Criterios
Aspectos del pensamiento variacional	Covariación: refiere a una relación de dependencia entre dos magnitudes, la covariación, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. (Carlson, 2003).	Esta subcategoría consiste analizar si los estudiantes comprenden en el contexto artesanal de recolección de pianguas los cambios que ocurren en las magnitudes involucradas.	Relaciones de dependencia, identificación de las variables que involucra la situación, identificación de valores constante y variables, cuantificación de los cambios. Etc.
	Modelación: refiere a la relación entre el mundo real y las matemáticas, como un proceso que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos significativos. (MEN, 1998)	Esta subcategoría tiene como fin, analizar desde los diferentes niveles de modelación la compresión de la función por tramos desde el contexto artesanal de recolección de pianguas. Nivel situacional: el estudiante hace uso de sus conocimientos informales para resolver la situación. Nivel referencial: el estudiante esquematiza la situación particular a través de modelos. Nivel general: el estudiante realiza una reflexión y generalización para la creación de modelos que permitan la solución de situaciones similares. Nivel formal: estudiante logra una mejor comprensión de conceptos matemáticos y procedimientos, que pueden ser empleados en la solución de diversas situaciones.	Las operaciones básicas, representación cartesiana, relación de dependencia entre magnitudes, expresiones algebraicas, lo constante y lo variable, razón de cambio, interpretación de gráficas, diseño de situaciones a partir de expresiones algebraicas, representación de funciones, modelos de

función por tramos.
Etc.

Razonamiento covariacional: refiere a las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003)

En esta subcategoría se analizan los diferentes niveles de razonamiento covariacional.

N1. Coordinación: coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.

N2. Dirección: coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.

N3. Coordinación cuantitativa: coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable.

N4. Coordinación: coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable.

N5: coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada.

Relaciones de dependencia, reconocimiento de magnitudes, formas de representación, variable dependiente y variable independiente, razón de cambio promedio, cuantificación de los cambios de una variable.

Definición de función desde las relaciones de dependencia.

Esta subcategoría consiste en observar si los estudiantes comprenden la función como una relación de dependencia.

Contenido matemático
Función por tramos

Componentes de la función (variables independientes, variables dependientes, dominio, rango)

La comprensión que tienen los estudiantes de los componentes de la función
Identificación del dominio y rango, identificación de la variable independiente y la variable dependiente.

Sistemas de representación (verbal, tabular algebraico, gráfico)

Representación de la función por tramos en los diferentes sistemas, verbal, tabular, algebraico y gráfico.

Comprensión de las relaciones de dependencia, determinar el dominio y el rango, representación gráfica, representación tabular, representación verbal, representación algebraica, definición de función por tramos.

Definición de función por tramos.

Comprensión de la función por tramos desde el contexto artesanal de recolección de pianguas.

3.3.1. Resultado y análisis de resultados de la situación 1

Situación 1: El concepto de función por tramos, la recolección y comercialización de pianguas en Bahía Málaga.

En las comunidades del consejo comunitario de la Plata Bahía Málaga, una de las actividades principales para la sostenibilidad económica de sus habitantes es la recolección de pianguas. Para desarrollar esta actividad, las personas se deben desplazar a las zonas de manglares, donde tardan alrededor de tres horas de trabajo. El costo de la docena de pianguas depende de la longitud de su diámetro, la cual se determina por un instrumento de medida llamado piangüimetro. Si la piangua mide entre 3.0cm a 4.5 cm, su costo por docena es de \$1.000; si mide entre 5.0cm a 9.0 cm, su costo por docena es de \$2.000.

Tabla 16

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 1a (S1T1P1a)

Situación 1, tarea 1, pregunta 1a (S1T1P1a)		
T1: comprendiendo la situación.		
P1: Si una persona recolecta por día 2, 3 y 5 docenas de pianguas que miden entre 3.0 a 4.5 cm.		
a. Indique el ingreso obtenido por día.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que obtiene la respuesta manera acertada \$2.000, \$3.000, \$5.000 e incluye las operaciones de producto entre la cantidad de docenas de pianguas recolectadas por día y su valor por docena de acuerdo a su medida.	Dos estudiantes de cinco E1 E2.
R2	Estudiantes que obtiene la respuesta de manera acertada \$2.000, \$3.000, \$5.000 pero no hace procedimiento para obtener estos resultados.	Tres estudiantes de cinco E3, E4, E5

Tabla 17

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 1b (S1T1P1b)

Situación 1, tarea 1, pregunta 1b (S1T1P1b)		
T1: comprendiendo la situación.		
P1b: Si una persona recolecta por día 2, 3 y 5 docenas de pianguas que miden entre 3.0 cm a 4.5 cm.		
b. Escriba el ingreso total obtenido por la recolección de pianguas		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que obtienen la respuesta de manera acertada \$10.000 adicionando el ingreso obtenido cada día.	Dos estudiantes de cinco E1, E2
R2	Estudiantes que responden de manera acertada \$10.000 pero no hace procedimiento para obtener el resultado.	Dos estudiantes de cinco E3, E4
R3	Estudiantes que determinan el ingreso de manera incorrecta, puesto que asume la misma cantidad de docenas para todos los días de la semana.	Un estudiante de cinco. E5

Tabla 18

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 2a (S1T1P2a)

Situación 1, tarea 1, pregunta 2a (S1T1P2a)	
T1: comprendiendo la situación.	
P2a: Si una persona recolecta por día 10, 15, 14 docenas de pianguas que miden entre 5.0 y 9.0 cm.	
a. Indique el ingreso obtenido por día.	

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que obtienen la respuesta de manera acertada \$20.000, \$30.000, 28.000 e incluye las operaciones de producto entre la cantidad de docenas de pianguas recolectadas por día y su valor por docena de acuerdo a su medida.	Dos estudiantes de cinco E1, E2
R2	Estudiantes que obtienen la respuesta de manera acertada \$20.000, \$30.000, \$28.000, pero no hace procedimiento para obtener estos resultados.	Tres estudiantes de cinco. E3, E4, E5

Tabla 19

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 2b (S1T1P2b)

Situación 1, tarea 1, pregunta 2b (S1T1P2b)		
T1: comprendiendo la situación.		
P2b: Si una persona recolecta por día 10, 15, 14 docenas de pianguas que miden entre 5.0 y 9.0 cm.		
b. Escriba el ingreso total obtenido por la recolección de pianguas.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que obtienen la respuesta de manera acertada \$78.000 adicionando el ingreso obtenido cada día.	Un estudiante de cinco. E2
R2	Estudiantes que responden de manera acertada \$78.000 pero no realiza procedimiento para obtener el resultado.	Tres estudiantes de cinco E1, E3, E4

R3	Estudiantes que determinan el ingreso total obtenido de forma incorrecta, puesto que asume la misma cantidad de docenas para todos los días de la semana.	Un estudiante de cinco E5.
-----------	---	----------------------------

En relación a lo registrado en la Tabla 16, 17, 18 y 19, los estudiantes en la S1T1P1 y S1T1P2 comprenden la situación presentada, puesto que determinan de manera acertada el ingreso por día y el ingreso total obtenido de acuerdo a la cantidad de pianguas recolectadas y de acuerdo a su precio por docena dependiendo de su medida, lo cual deja en evidencia que reconocen la relación existente entre el costo de la docena de pianguas y su medida, puesto que, de acuerdo a la medida relacionan el valor por docena, como se puede observar en la Figura 18, en la cual se evidencia que los estudiantes calculan el ingreso diario y el ingreso total obtenido aplicando sus conocimientos previos y haciendo uso de sus propias estrategias para determinar la respuesta. En este sentido, hacen un acercamiento al nivel situacional de la modelación, empleando sus conocimientos informales para determinar la respuesta logrando el desarrollo del proceso de matematización horizontal. Además, se observa un acercamiento a las relaciones de dependencia como parte del estudio de la covariación, en tanto que reconocen las magnitudes a emplear para calcular dicho valor.

Figura 18

Situación 1, Tarea1, Pregunta 1a, 1b, 2a, 2b, Estudiante 1 (S1T1P1P2E1)

1)

a) El ingreso por doc de esta persona es de 2000, 3000 y 5000
 $2(1000) = 2000$ } $3(1000) = 3000$ } $5(1000) = 5000$

b) El ingreso total obtenido por la recolección de piangua de esta persona es de 10.000
 $2000 + 3000 + 5000 = 10.000$

2)

a) El ingreso por doc de esta persona es de, 20000, 30.000 y 28.000.
 $10(2000) = 20000$ } $15(2000) = 30.000$ } $14(2000) = 28.000$

b) El ingreso total obtenido por la recolección de piangua es de, 78.000

Tabla 20

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 3a (S1T1P3a)

Situación 1, tarea 1, pregunta 3a (S1T1P3a)

T1: comprendiendo la situación.

P3: Teniendo en cuenta lo anterior.

a. Indica las magnitudes que intervienen en cada caso.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que identifican las magnitudes que intervienen en cada caso, cantidad de docenas de piangua, precio por docena, diámetro de la piangua (longitud).	Tres estudiantes de cinco E1, E2, E3

R2	Estudiantes que identifican una de las magnitudes que intervienen en cada caso, precio por docena y expresa la magnitud diámetro de la piangua en unidad de cm.	Un estudiante de cinco E4
R3	Estudiantes que identifican una de las magnitudes que intervienen en cada caso, diámetro de la piangua (longitud)	Un estudiante de cinco E5

Tabla 21

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 3b (S1T1P3b)

Situación 1, tarea 1, pregunta 3b (S1T1P3b)

T1: comprendiendo la situación.

P3: Teniendo en cuenta lo anterior.

b. Escribe de qué depende la cantidad de dinero que recibe una persona por las docenas de piangua que saca en el día.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que reconocen la dependencia entre la cantidad de dinero que recibe una persona por docena y la cantidad de docenas que saca por día teniendo en cuenta su medida, cantidad de docenas, diámetro de la piangua (longitud)	Cuatro estudiantes de cinco E1, E2, E3, E4
R2	Estudiantes que no reconoce la dependencia entre la cantidad de dinero que recibe una persona por docena y la cantidad de docenas que saca por día teniendo en cuenta su medida, suma y variedad en su longitud	Un estudiante de cinco E5

A partir de los datos registrados en las Tablas 20 y 21, se puede decir que la mayoría de los estudiantes identificaron las magnitudes que intervienen en la situación, sin embargo, es necesario mencionar que un estudiante identifica sin dificultad la magnitud de precio por docena, pero presenta una confusión entre la magnitud diámetro de la piangua y su unidad de medida, puesto que indica la magnitud en cm, como se puede observar en la Figura 19.

Figura 19

Situación 1, Tarea1, Pregunta 3a, Estudiante 4 (S1T1P3AE4)

a. Las magnitudes que intervienen son lps (cm) y su (precio) /

En cuanto a la pregunta 3, literal b, cuatro estudiantes de cinco identifican la dependencia existente entre las magnitudes involucradas, reconocen que la cantidad de dinero que recibe una persona depende de la cantidad de docenas de pianguas recolectada por día teniendo en cuenta su diámetro como se puede ver en la Figura 20. El estudiante faltante no lo hace de forma precisa, pues indica que dependen de la suma y variedad en su longitud.

Figura 20

Situación 1, Tarea1, Pregunta 3b, Estudiante 1 (S1T1P3BE1)

b.) la cantidad de dinero que recibe una persona depende de la cantidad de piangua que saque y de su medida. El
Si saca 3 docenas entre las medidas 3,0 y 4,5 y 5 entre las medidas 5,0 y 9,0 ella obtendrá un valor de \$13.000. Porque
 $3 \times 1000 = 3.000$ y $5 \times 2000 = 10.000$
$$\begin{array}{r} 3.000 \\ 10.000 \\ \hline 13.000 \end{array}$$

En relación a los datos registrados en la pregunta S1T1P3a y la pregunta S1T1P3b se puede decir que los participantes están haciendo un acercamiento a las variables que intervienen en la situación y reconocen la relación de dependencia presente entre ellas. Además, se evidencia que comprenden que de acuerdo a la variación de la medida de la piangua su precio por docena varia, lo cual puede indicar que reconocen las cantidades que cambian. Todos estos aspectos llevan a pensar que se está haciendo una aproximación al pensamiento variacional, en cuanto que identifican las magnitudes presentes en el contexto y reconocen sus variaciones. Por otro lado, al reconocer las magnitudes involucradas en la situación es posible decir que se encuentran en un nivel situacional de la modelación logrando a través de las diferentes estrategias utilizadas el desarrollo de la matematización horizontal para visualizar las matemáticas en el contexto. Ahora bien, al identificar las relaciones de dependencia se da un paso al nivel referencial de la modelación, puesto que es un factor importante al momento de determinar un modelo funcional en un contexto determinado.

Finalmente, en la plenaria desarrollada posterior a la aplicación de la Tarea 1, la mayoría de los estudiantes manifiestan no haber presentado dificultad para su resolución, pues son procesos que hacen a diario a partir de la recolección de pianguas, contexto donde se desarrollan. En esta dirección, se corresponde a los principios establecidos por la EMR, tales como el principio de actividad, el principio de realidad y el principio de niveles en el nivel situacional los cuales indican que desarrollar actividades matemáticas desde situaciones cotidianas favorece el desarrollo de destreza en los estudiantes, permitiendo hacer uso de sus conocimientos previos para organizar y dar solución a la situación planteada desde los procedimientos matemáticos que mejor respondan la situación.

Tarea 2. Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

Lina de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, perteneciente al consejo comunitario de la Plata Bahía Málaga, en la semana de receso escolar sacó 138 docenas de pianguas en cinco días. Lina necesita saber, cuánto será su ingreso si vende el total de pianguas que recolecto teniendo en cuenta sus medidas. En la siguiente tabla se relaciona la cantidad total de docenas recolectadas por día, distribuidas en cantidad de docenas según sus medidas.

Tabla 22

Docenas de Pianguas por Día

Día	Total de docenas por día.	Cantidad de docenas con medidas de 3.0cm a 4.5cm	Cantidad de docenas con medidas de 5.0cm a 9.0cm
Lunes	27	7	20
Martes	21	4	17
Miércoles	35	6	29
Jueves	25	5	20
Viernes	30	8	22

A partir de los datos suministrados en la tabla anterior, calcula el ingreso de Lina por día durante los cinco días de recolección de pianguas, y regístralos en la siguiente tabla.

Tabla 23

Ingreso por Día

Día	Total docenas por día	Ingreso por día de docenas con medidas de 3.0cm a 4.5cm	Ingreso por día de docenas con medidas de 5.0cm a 9.0cm	Total ingreso por día
Lunes	27			
Martes	21			
Miércoles	35			
Jueves	25			
Viernes	30			
Total				

Tabla 24

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 1 S1T2P1

Situación 1, tarea 2, pregunta 1 S1T2P1		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas. P1 A partir de los datos suministrados en la tabla anterior, calcula el ingreso de Lina por día durante los cinco días de recolección de pianguas, y regístralos en la siguiente tabla.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que completaron todos los valores de la columna 3 y 4 realizando un producto entre la cantidad de docenas de pianguas y el valor por docena según su longitud. Además, realizaron una adicción entre las filas de la columna 3 y 4 para calcular el ingreso total por día. Pero no completo la fila de valor total.	Un estudiante de cinco E1
R2	Estudiantes que completaron todos los valores de la tabla, pero no escribieron los procedimientos que realizaron para obtener dicha respuesta.	Tres estudiantes de cinco E2, E3, E4
R3	Estudiantes que completaron todos los valores de la tabla, pero solo escribieron la adicción realizada entre las filas de la columna 3 y 4 para determinar el ingreso total por día.	Un estudiante de cinco. E5

En relación con los resultados arrojado en la S1T2P1, se puede decir que los estudiantes comprenden que cuando cambia el intervalo de medida de las docenas de pianguas también cambia su valor por docena, lo cual es un indicio de la presencia implícita del nivel de coordinación del razonamiento covariacional. De acuerdo con las respuestas es posible decir que

los estudiantes comprenden que cuando cambia una magnitud (diámetro) la otra también cambia (precio), por tanto, es a su vez un acercamiento a la comprensión de la covariación como se puede ver en la Figura 21, donde el estudiante de acuerdo al intervalo de medida en el que se encuentre la docena de piangua elige su costo por docena.

Figura 21

Situación 1, Tarea2, Pregunta 1, Estudiante 1 (S1T2P1E1)

a. ingreso por día de docenas con medida de 3.0 a 4.5		
$7 \times 1000 = 7.000$	$4 \times 1000 = 4.000$	$6 \times 1000 = 6.000$
$5 \times 1000 = 5.000$	$8 \times 1000 = 8.000$	
Total:		
b. ingreso por día de docenas con medida de 5.0 a 9.0		
$20 \times 2000 = 40.000$	$17 \times 2000 = 34.000$	$29 \times 2000 = 58.000$
$20 \times 2000 = 40.000$	$22 \times 2000 = 44.000$	

Por otro lado, en el desarrollo de la pregunta se evidencia un trabajo desde el nivel situacional de la modelación, teniendo en cuenta que los estudiantes completan cada valor faltante desde sus propias estrategias, pero a su vez, está involucrado el nivel referencial, en tanto que reconocen las magnitudes a emplear para determinar el ingreso de acuerdo a la medida de las pianguas, lo cual es un factor importante al momento de realizar modelos de una situación determinada.

Tabla 25

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2a (S1T2P2a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 2a (S1T2P2a)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P2: De acuerdo con los datos registrados en la tabla.		
a. Calcular el ingreso que obtiene Lina el día miércoles por las seis docenas de pianguas que recolecto, si tres docenas son de 3.5 cm, dos de 4.0 cm y una de 4.5 cm.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que responden de manera acertada e incluyen las operaciones de producto entre la cantidad de docenas de pianguas y el precio por docena de acuerdo a su medida, además escriben la adicción realizada para calcular el ingreso.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que responden manera acertada e incluyen la adicción de las docenas recolectadas de cada medida y luego realizan un producto de la cantidad de docenas totales por el precio por docena de acuerdo a su medida.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que responden de manera acertada y solo escriben la adicción realizada para calcular el ingreso.	Tres estudiantes de cinco E3, E4, E5

Tabla 26

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2b (S1T2P2b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 2b (S1T2P2b)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P2: De acuerdo con los datos registrados en la tabla.		
b. Calcular el ingreso que obtiene Lina por las 29 docenas de pianguas que recolecto el día miércoles, si 10 docenas son de 5.0 cm, 8 docenas son de 7.0 cm y 11 docenas son de 6.0 cm		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que responden de manera acertada e incluyen las operaciones de producto entre la cantidad de docenas de pianguas y el precio de acuerdo a su medida, además escriben la adicción realizada para calcular el ingreso total.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiante que responde de manera correcta y solo escribe la adicción realizada para calcular el ingreso.	Tres estudiantes de cinco. E3, E4, E5
R3	Estudiantes que responden de manera acertada pero no escriben el procedimiento.	Un estudiante de cinco. E2

En relación con los resultados de la S1T2P2a y S1T2P2b, se puede decir que la mayoría de los estudiantes comprenden el enunciado, puesto que responden de acuerdo a lo esperado. Además, se puede decir que los participantes reconocen las magnitudes que se mantienen

constante y las que varían, ya que al calcular el ingreso de las docenas de pianguas, pese a que las medidas cambian son conscientes de que el precio sigue siendo el mismo, puesto que reconocen que el cambio se da dentro del mismo intervalo de longitud, es decir, de 3.0 cm a 4.5 cm, esto de acuerdo a los procedimientos y respuestas registradas, ocurre el mismo caso para las veintinueve docenas de pianguas, las cuales presentan variaciones de medidas dentro del intervalo de longitud de 5.0 cm a 9.0 cm, como se observa en la Figura 22

Figura 22

Situación 1, Tarea2, Pregunta 2a, 2b, Estudiante 1 (S1T2P2A2BE1)

2.a) Ingreso de Lima el día Miércoles		
3 docenas de 3,5cm	=	$3 \times 1000 = 3000$
2 docenas de 4,0cm	=	$2 \times 1000 = 2000$
1 docena de 4,5cm	=	$1 \times 1000 = 1000$
Total ingreso		<u>6000</u>
b.) ingreso de Lima el miércoles		
10 docenas de 5,0cm	$10 \times 2000 =$	20.000
8 docenas de 7,0cm	$8 \times 2000 =$	16.000
11 docenas de 6,0cm	$11 \times 2000 =$	22.000
Total		<u>58.000</u>

En esta dirección, los estudiantes desarrollan aspectos relacionados con el pensamiento variacional, al reconocer las relaciones de dependencia presente entre el precio de la docena de piangua y su longitud, así como las variaciones de los precios de un intervalo de longitud a otro, lo cual deja ver un primer acercamiento a los niveles de coordinación y dirección del razonamiento covariacional. A su vez, se da un trabajo desde nivel referencial de la modelación en tanto que estos aspectos son características fundamentales para la creación de modelos

funcionales. Además, al determinar los valores faltantes desde los conocimientos adquiridos en su propio contexto de desarrollo, basado en su sentido común, se evidencia la presencia del nivel situacional de la modelación.

Tabla 27

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2c (S1T2P2c)

Situación 1, tarea 2, pregunta 2c (S1T2P2c)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P2: De acuerdo con los datos registrados en la tabla.

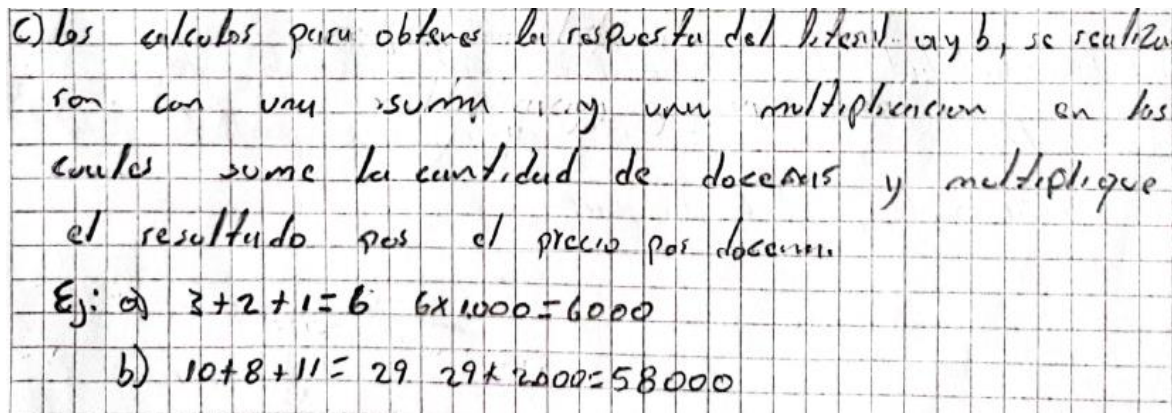
c. Escribir como realizó los cálculos para obtener la respuesta del literal a y b.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R2	Estudiantes que justifican que realizaron una suma y una multiplicación, indicando que sumaron la cantidad de docenas y multiplicaron el resultado por el precio por docenas. También incluyen ejemplo del procedimiento realizado.	Un estudiante de cinco E2
R3	Estudiantes que indican que multiplicaron las 6 docenas por \$1000 y las 29 docenas por \$2000.	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indican que multiplicaron el valor de las docenas por la cantidad equivalente de cm y la suma total, pero no ejemplifica.	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiantes que indican que realizaron una suma de valor total de cada docena de piangua según su longitud, pero no ejemplifica.	Un estudiante de cinco. E5

A partir de los datos registrados en la Tabla 27, es posible decir que la mayoría de los participantes se ubican en el nivel referencial, porque comprenden las magnitudes involucradas y las relaciones de dependencia entre ellas para determinar el ingreso obtenido por la recolección de pianguas, destacando además el nivel situacional presente para calcular los ingresos, como se observa en la Figura 23.

Figura 23

Situación 1, Tarea2, Pregunta 2c, Estudiante 2 (S1T2P2CE1)



c) los calculos para obtener la respuesta del literal a y b, se realizan con una suma y una multiplicacion en los cuales sume la cantidad de docenas y multiplique el resultado por el precio por docena.

Ej: a) $3+2+1=6$ $6 \times 1000=6000$

b) $10+8+11=29$ $29 \times 2000=58000$

Tabla 28

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2d (S1T2P2d)

Situación 1, tarea 2, pregunta 2d (S1T2P2d)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P2: de acuerdo con los datos registrados en la tabla.

d. Explica porque el valor por docenas de las seis docenas de piangua recolectadas el día miércoles es el mismo.

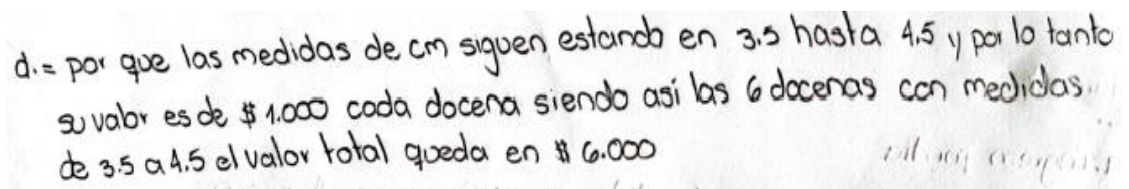
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
-------------------	-------------	-------------------------

R1	Estudiantes que argumentan que el valor es el mismo porque están en el rango de medidas de 3.0 cm a 4.5 cm para las cuales el valor es de \$1.000 por docena	Tres estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4,
R2	Estudiante que argumenta que el valor es el mismo porque cumple con los requisitos de la longitud de diámetro para sostener X valor.	Un estudiante de cinco. E5

A partir de la Tabla 28 es posible decir que los participantes reconocen que el valor de la docena de piangua depende del intervalo de medida en el que esta se encuentre, por tanto, se puede decir que identifican características importantes para la creación de modelos en el contexto de recolección de pianguas, lo cual los ubica en el nivel referencial, como se puede ver en la Figura 24.

Figura 24

Situación 1, Tarea2, Pregunta 2d, Estudiante 4 (S1T2P2DE4)



d. = por que las medidas de cm siguen estando en 3.5 hasta 4.5 y por lo tanto su valor es de \$ 1.000 cada docena siendo así los 6 docenas con medidas de 3.5 a 4.5 el valor total queda en \$ 6.000

Además, desde el razonamiento covariacional existe una coordinación del cambio de una variable con los cambios de otra, en tanto que comprenden que, si el diámetro cambia de intervalo, entonces, el valor de la docena de piangua también cambia. Del mismo modo, si el diámetro de la docena de piangua permanece dentro del mismo rango entonces el precio sigue siendo el mismo, lo cual indica que hay una comprensión implícita de la dirección del cambio por parte los estudiantes.

En la plenaria un estudiante indica que el precio de las 6 docenas de pianguas es el mismo porque ambas están dentro del rango de 3.0cm a 4.5 cm, entonces tienen un valor de \$1000.

Tabla 29

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 2e (S1T2P2e)

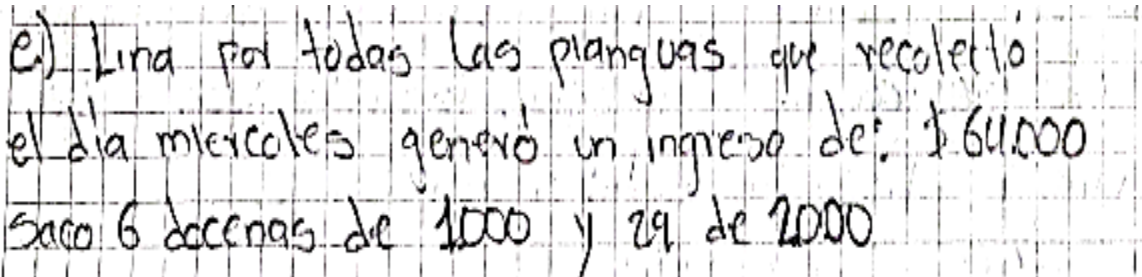
Situación 1, tarea 2, pregunta 2e (S1T2P2e)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P2: de acuerdo con los datos registrados en la tabla.		
e. Calcular cual es el ingreso que tiene Lina por todas las docenas de pianguas que recolectó el día miércoles.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que responden de manera acertada realizando una adicción del ingreso obtenido por las docenas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm y el ingreso obtenido por las docenas con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm.	Cuatro estudiantes de cinco. E2, E3, E4, E5
R2	Estudiantes que responden de manera acertada pero no escriben el procedimiento realizado para calcular dicho valor.	Un estudiante de cinco. E1

Para el desarrollar esta pregunta, los estudiantes se basan en el conocimiento adquirido dentro del contexto de recolección de pianguas en el que se desarrollan, lo cual desde la modelación se reconoce como nivel situacional. Además, se evidencia la presencia de la covariación, en tanto que reconocen la relación de dependencia entre el ingreso adquirido por las docenas de piangua en cada intervalo de longitud y el ingreso adquirido por la cantidad total de

docenas recolectada como se observa en la Figura 25 y 26. Cabe mencionar que, el reconocimiento de estos aspectos da un paso al nivel referencial para la creación de modelos funcionales que permitan más adelante modelar la situación.

Figura 25

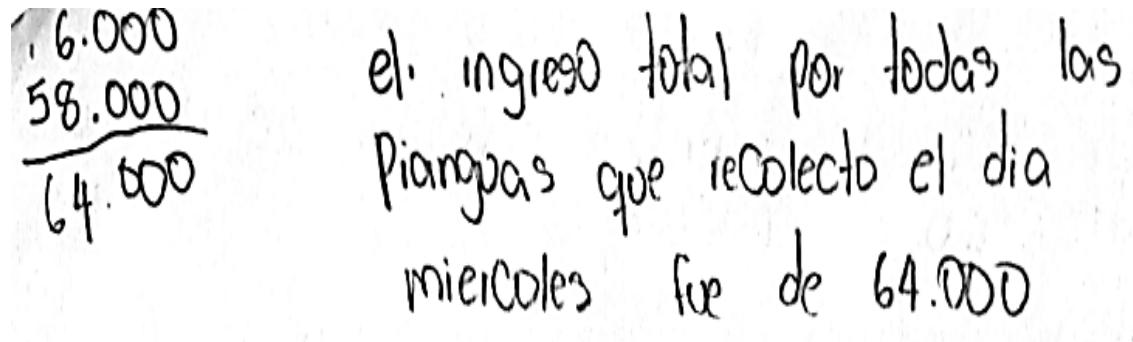
Situación 1, Tarea2, Pregunta 2e, Estudiante 1 (S1T2P2E1)



e) Lina por todas las pianguas que recolectó el día miércoles generó un ingreso de: \$64.000
Saco 6 docenas de 1000 y 29 de 2000

Figura 26

Situación 1, Tarea2, Pregunta 2e, Estudiante 3(S1T2P2EE3)



6.000
58.000

64.000

el ingreso total por todas las
pianguas que recolectó el día
miércoles fue de 64.000

Tabla 30

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3a (S1T2P3a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 3a (S1T2P3a)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P3: Analiza y responde las siguientes preguntas.

- a. Explica de qué depende la cantidad de dinero que recibe Lina el día miércoles.

R1	Estudiantes que comprenden la relación existente entre la cantidad de dinero recibido, la cantidad de docenas y la longitud.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5
-----------	--	--

En la Tabla 30 se puede observar que hay un buen desempeño en el nivel referencial de la modelación por parte de los estudiantes, al poder identificar sin dificultad las relaciones de dependencia presentes al momento de determinar la cantidad de dinero adquirido por el total de docenas de pianguas recolectadas, como se puede ver en la Figura 27.

Figura 27

Situación 1, Tarea2, Pregunta 3a, Estudiante 5(S1T2P3AE5)

3) 1. La Cantidad de dinero que recibe Lina el Miércoles depende de las 30 docenas de Pianguas que Varían en su longitud y tiene dos tarifas de precio que son 1000. y 2000

En la plenaria un estudiante indica, todo dependen del tamaño de pianguas que saquemos y depende de la cantidad de docenas que saquemos. Por tanto, se puede decir que los participantes reconocen las magnitudes involucradas como se ha venido mencionando anteriormente, lo cual favorece el desarrollo del pensamiento variacional desde el contexto artesanal de recolección de pianguas, en tanto que identifican las diferentes relaciones de dependencia entre magnitudes y la covariación existente entre ellas.

Tabla 31

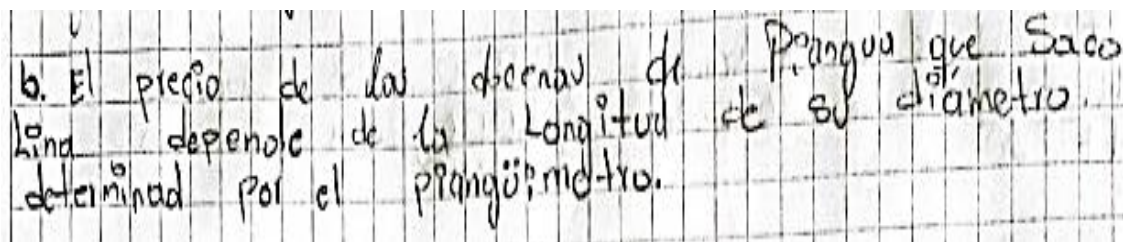
Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3b (S1T2P3b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 3b (S1T2P3b)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P3: Analiza y responde las siguientes preguntas.		
b. Indica de qué depende el precio de las docenas de piangua que sacó Lina.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que reconoce la dependencia existente entre el precio y medida de la docena de piangua.	Tres estudiantes de cinco E1, E2, E3, E5
R2	Estudiante que no reconoce la dependencia existente entre el precio y medida de la docena de piangua	Un estudiante de cinco. E4

En la tabla 31 se puede ver que los participantes reconocen desde el contexto artesanal de recolección de pianguas, que el precio de las docenas de pianguas depende de la medida en la que estas se encuentren, como se observa en la Figura 28. En el desarrollo de la planaria un estudiante indico que básicamente depende de su medida.

Figura 28

Situación 1, Tarea2, Pregunta 3b, Estudiante 5(S1T2P3BE5)



Esto da cuenta del desarrollo del nivel referencia de la modelación, ya que el reconocimiento de las relaciones de dependencia en un determinado contexto favorece la creación de modelos. Además, hay una comprensión de la covariación en tanto que reconocen la dependencia entre el precio de las docenas de pianguas y su longitud.

Tabla 32

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 3c (S1T2P3c)

Situación 1, tarea 2, pregunta 3c (S1T2P3c)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P3: Analiza y responde las siguientes preguntas.

- c. Explica de que depende el ingreso total de Lina por las docenas de piangua que recolecto en la semana de receso.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que responden que dependen de la cantidad de docenas recolectadas y la medida de las pianguas.	Dos estudiantes de cinco. E1, E2, E4
R2	Estudiantes que respondes que depende de los cinco días que saco pianguas, de las docenas y de las longitudes	Un estudiante de cinco. E3

R3

Estudiantes que responden que depende de todas las docenas que saco teniendo en cuenta la variabilidad de su longitud y su variabilidad de precio.

Un estudiante de cinco.
E5

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 32, se puede observar que la mayoría de los estudiantes reconocen que el ingreso total depende de la cantidad de docena de pianguas recolectadas y de su medida. Además, es importante mencionar que, aunque cada estudiante argumenta de forma diferente todos coinciden con las magnitudes involucradas en la relación de dependencia.

En el desarrollo de la plenaria un estudiante argumenta que el total de dinero que se hizo Lina en la semana de receso depende de la medida de la piangua y de la cantidad, por ejemplo, si son 5 docenas de pianguas entre 3.0 cm a 4.5 cm, la señora que compra las pianguas las paga a \$1000, serian \$5.000, así mismo si son 10 docenas de pianguas de medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm, la señora que compra las pianguas las va a pagar a \$2.000 por cada docena, entonces es más dinero.

A partir de lo anterior, se puede decir que, los estudiantes hacen uso de sus conocimientos informales que involucra la actividad de recolección de piangua para identificar las relaciones de dependencia, lo cual permite dar un salto al nivel referencial de la modelación para la creación de posibles modelos. También, se puede evidenciar indirectamente desde el razonamiento covariacional el nivel de coordinación y el nivel de dirección de las variables, en tanto que, de acuerdo con las respuestas los participantes comprenden que la longitud de la

piangua determina el precio, el cual puede aumentar o disminuir según su tamaño. Esto también es un indicio de un acercamiento a la comprensión de la covariación desde este contexto particular. (ver Figura 29)

Figura 29

Situación 1, Tarea2, Pregunta 3c, Estudiante 5(S1T2P3CE5)

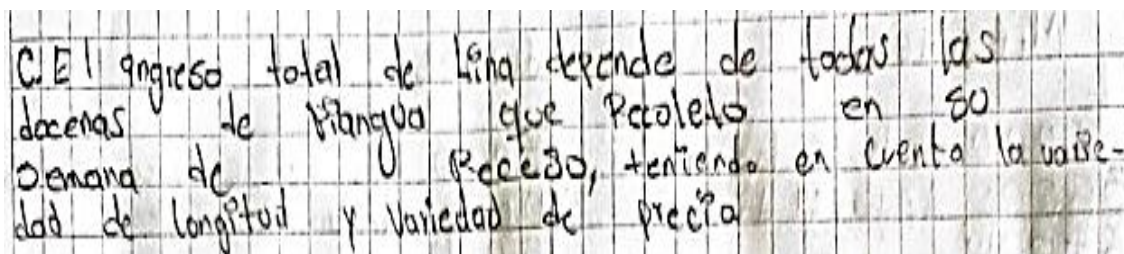


Tabla 33

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 4a (S1T2P4a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 4a (S1T2P4a)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P4: Cuando calculó el dinero que recibe Lina cada día por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0cm a 4.5 cm y las docenas con medidas entre 5.0cm a 9.0 cm.		
a. Indica que cantidades considera que se mantienen constantes.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que las cantidades que se mantienen constante es el precios o valor de las docenas de pianguas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm y el precio o valor de las docenas de pianguas con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm.	Un estudiante de cinco. E1, E2, E4, E5

R2	Estudiantes que indican que las cantidades que se mantienen constante son las 20 docenas del día jueves y el día lunes y los precios por docena \$2.000 y \$1.000.	Un estudiante de cinco. E3
-----------	--	-------------------------------

Tabla 34

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 4b (S1T2P4b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 4b (S1T2P4b)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P4: Cuando calculó el dinero que recibe Lina cada día por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm y las docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm.

b. Indica que cantidades considera que varían.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que las cantidades que varían son las que saca cada día.	Dos estudiantes de cinco E2, E4
R2	Estudiantes que indican que las cantidades que varían son la cantidad de pianguas, el valor de la docena entre 3.0 cm a 4.5 cm y 5.0 cm a 9.0 cm, las medidas.	Un estudiante de cinco. E1
R3	Estudiantes que indica que las cantidades que varían son las 17,29 y 22 docenas y los diámetros	Un estudiante de cinco E3
R4	Estudiantes que indican que las cantidades que varían son la longitud en diámetro de las pianguas.	Un estudiante de cinco. E5

La identificación de lo constante y lo variable es uno de los aspectos necesarios que los estudiantes deben reconocer desde el pensamiento variacional, lo cual se relaciona con el estudio de la covariación y la modelación en el nivel referencial, ya que son una de las características de las relaciones funcionales importantes para el desarrollo de la esquematización de la situación y la creación de modelos de funciones en contextos particulares. En este sentido, en relación con los resultados registrados en la Tabla 33 y 34 se puede notar poco desempeño en el estudio de la covariación y en el nivel referencial, ya que la mayoría reconoce lo constante, pero hay dificultad para reconocer lo variable en la situación. (ver Figura 30)

Figura 30

Situación 1, Tarea2, Pregunta 4a, 4b, Estudiante 5 (S1T2P4A,4BE5)

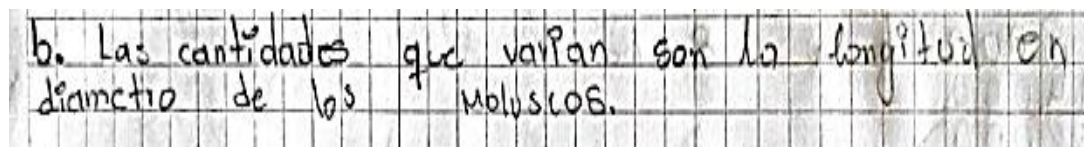


Tabla 35

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 5a (S1T2P5a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 5a (S1T2P5a)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P5: Lina tuvo una semana de receso adicional y logro reunir \$380.000 por las docenas de pianguas que recolecto.

- a. Si todas las docenas de pianguas fueran de medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm, indica cuántas docenas de pianguas logro sacar Lina.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que si las pianguas fueran todas de medidas de 3.0 cm a 4.5 cm, entonces sacó	Dos estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E5

380 docenas de pianguas, ya que las docenas de piangua de esta medida cuestan \$1000, pero no realizo el procedimiento para dicha respuesta.

R2	Estudiantes que responden que Lina por día logro sacar 76 docenas de medidas de 3.0 cm a 4.5 cm que en total serian 380, pero no realizo procedimiento.	Un estudiante de cinco. E4
-----------	---	-------------------------------

Tabla 36

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 5B (S1T2P5b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 5b (S1T2P5b)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P5: Lina tuvo una semana de receso adicional y logro reunir \$380.000 por las docenas de pianguas que recolecto.

- b. Si todas las docenas de pianguas fueran con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm, indica cuántas docenas de pianguas logro sacar Lina.

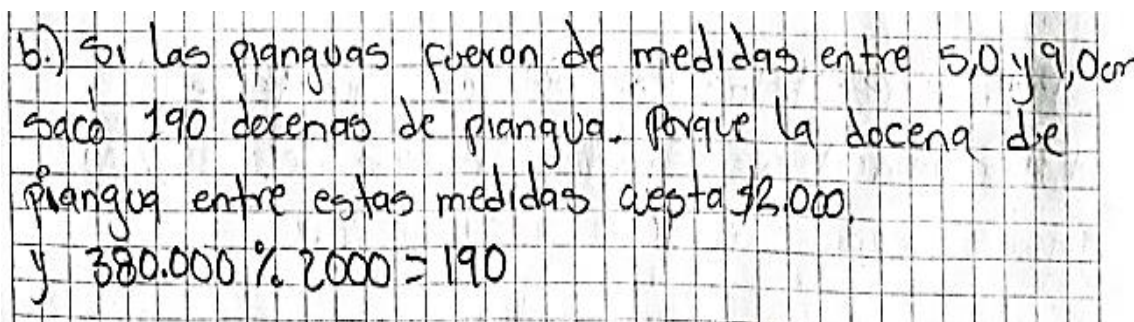
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que si las pianguas fueron todas de medidas de 5.0 cm a 9.0 cm, entonces saco 190 docenas de pianguas, ya que las docenas de piangua de esta medida cuestan \$2000, realizo una división de 380.000 entre 2.000	Dos estudiantes de cinco. E1
R2	Estudiantes que responden que si todas son con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm Lina habría sacado 190	Un estudiante de cinco. E5

	docenas de pianguas. Realiza un producto de 190 por \$2000.	
R3	Estudiantes que responden que según la medida las docenas que recolecto fueron 190 porque cada una cuesta \$2.000, no indica procedimiento.	Dos estudiantes de cinco. E2, E3
R4	Estudiantes que responden que Lina por día logro sacar 38 docenas de medidas de 5.0 cm a 9.0 cm que en total serian 190, no indica procedimiento.	Un estudiante de cinco. E4

De acuerdo a lo que se observa en la Tabla 35 y 36, para determinar la cantidad de docenas que sacó Lina, los estudiantes emplearon sus propias estrategias relacionadas con la experiencia adquirida en la recolección de pianguas, por tanto, se presenta una estrecha relación con el nivel situacional de la modelación, desde el cual se da respuesta a los interrogantes planteados y se reconoce la matemática inmersa en el contexto, como se puede observar en la Figura 31, el estudiante utilizó sus conocimientos previo que le permitieron dar solución a la pregunta.

Figura 31

Situación 1, Tarea2, Pregunta 5b, Estudiante 1 (S1T2P5BE1)



b.) Si las pianguas fueron de medidas entre 5,0 y 9,0 cm
sacó 190 docenas de piangua. Porque la docena de
piangua entre estas medidas cuesta \$2.000.
y $380.000 \div 2000 = 190$

Además, desde la covariación y el nivel de coordinación de razonamiento covariacional, los estudiantes reconocen que al cambiar la magnitud de la piangua el precio también cambia,

bien sea que aumente o disminuya, dando paso al nivel de dirección del razonamiento covariacional (ver Figura 32).

Figura 32

Situación 1, Tarea2, Pregunta 5a Estudiante 1(S1T2P5AE1

5. a. si las pianguas fueron de medidas entre 3,0 y 4,5cm sacó 380 docenas de piangua ya que las docenas de 77 piangua de esta medida cuestan \$1.000.

Tabla 37

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6a (S1T2P6a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 6a (S1T2P6a)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P6: Si Lina de los \$380.000 que ganó en la semana de receso recibió \$94.000 por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.

a. Calcula cuántas docenas de pianguas vendió con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada cuántas docenas vendió Lina con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm (94 docenas) y realizan una división entre 94.000 y \$1000.	Dos estudiantes de cinco. E1, E5
R2	Estudiantes que indican de manera acertada cuantas docenas vendió Lina con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm (94 docenas) pero no realizan procedimiento	Tres estudiantes de cinco. E2, E3, E4

Tabla 38

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6b (S1T2P6b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 6b (S1T2P6b)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P6: Si Lina de los \$380.000 que ganó en la semana de receso recibió \$94.000 por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.		
b. Calcula cuánto dinero recibió por las docenas de pianguas con medidas entre 5.0 cm y 9.0 cm.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calculan de manera acertada cuánto dinero recibe Lina por las docenas de piangua de 5.0 cm a 9.0cm (\$286.000) y realizan una resta entre \$380. 000 y \$94.000	Dos estudiantes de cinco E2, E5
R2	Estudiantes que calculan de manera acertada cuánto dinero recibe Lina por las docenas de piangua de 5.0 cm a 9.0cm (\$286.000) y realizan un producto entre 143 y \$2000	Un estudiante de cinco E4.
R3	Estudiantes que determina de manera acertada cuánto dinero recibe Lina por las docenas de piangua de 5.0 cm a 9.0cm (\$286.000) pero no realizan procedimiento	Un estudiante de cinco. E1
R4	Estudiantes que no calcula de manera acertada cuánto dinero recibe Lina por las docenas de piangua de 5.0 cm a 9.0cm.	Un estudiante de cinco. E3.

Tabla 39

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 6c (S1T2P6c)

Situación 1, tarea 2, pregunta 6c (S1T2P6c)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P6: Si Lina de los \$380.000 que ganó en la semana de receso recibió \$94.000 por las docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.		
c. Calcula cuántas docenas de pianguas vendió con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que responden de manera acertada la cantidad de docenas de pianguas que vendió Lina con medidas de 5.0 cm a 9.0cm (143 docenas) y realizaron una división entre \$286.000 y \$2000	Dos estudiantes de cinco. E1, E5.
R2	Estudiantes que responden de manera acertada la cantidad de docenas de pianguas que vendió Lina con medidas de 5.0 cm a 9.0cm (143 docenas) pero no realizaron procedimiento.	Dos estudiantes de cinco. E2, E4
R3	Estudiantes que no responden de manera acertada la cantidad de docenas de pianguas que vendió Lina con medidas de 5.0 cm a 9.0cm.	Un estudiante de cinco. E3

Para determinar la respuesta a las preguntas del numeral seis, literal a, b y c, los estudiantes hicieron uso de sus conocimientos matemáticos previos, apoyándose en la experiencia, donde cada estudiante emplea su propia estrategia.

En relación, la autonomía por parte de los estudiantes para desarrollar cada respuesta se da en gran parte por el hecho de ser una situación asociada al contexto de recolección de pianguas, contexto en el que se desarrollan diariamente, en esta dirección, se observa que los estudiantes trabajan desde el nivel situacional de la modelación. Ahora bien, a partir de los procedimientos que registran algunos estudiantes, se puede evidenciar que reconocen las variables involucradas y sus variaciones, puesto que identifican que, si la longitud cambia, cambia el precio (ver Figura 33 y 34), esto deja ver la presencia del estudio de la covariación, así como del nivel de coordinación del razonamiento covariacional.

Figura 33

Situación 1, Tarea2, Pregunta 6a, Estudiante 1(S1T2P6AE1)

a.) Lina recibió \$94.000 por las docenas de piangua con medidas entre 3,0 y 4,5. Entonces vendió 94 docenas de piangua. Cada docena con la medida dada cuesta 1.000 entonces $94.000 \% 1.000 = \underline{94}$

Figura 34

Situación 1, Tarea2, Pregunta 6c, Estudiante 5(S1T2P6CE5)

C. \$286.000 ÷ 2.000 = 143
Lina vendió 143 docenas con medidas de 5,0 a 9,0 cm.

Tabla 40

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7a(S1T2P7a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 7a (S1T2P7a)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P7: Si X representa cualquier cantidad de docenas de pianguas, escribe la expresión que corresponde a cada situación.		
a. Una expresión que permita calcular el ingreso por la venta de docenas de pianguas recolectadas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $(X)(V1)$, donde x es a cantidad de docenas de pianguas y V es el precio por docena.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $(X)(Y)$, donde X es la cantidad de docenas de pianguas y Y es el precio por docena.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $1.000(X)$ o de la forma $(X) (1000)$, donde X es la cantidad de docenas de pianguas y 1.000 es el precio por docena.	Tres estudiantes de cinco. E3, E4, E5

Tabla 41

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7b (S1T2P7b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 7b (S1T2P7b)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P7: Si X representa cualquier cantidad de docenas de pianguas, escribe la expresión que corresponde a cada situación.		
b. Una expresión que permita calcular el ingreso por la venta de docenas de pianguas recolectadas con medidas entre 5.0 cm y 9.0 cm.		

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $(X)(V2)$, donde X es la cantidad de docenas de pianguas y V es el precio por docena.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $(X)(Y)$, donde X es la cantidad de docenas de pianguas y Y es el precio por docena.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $2.000(X)$ o de la forma $(X)(2.000)$, donde X es la cantidad de docenas de pianguas y 2.000 es el precio por docena.	Un estudiante de cinco. E3, E4, E5

Tabla 42

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 7c (S1T2P7c)

Situación 1, tarea 2, pregunta 7c (S1T2P7c)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

P7: Si X representa cualquier cantidad de docenas de pianguas, escribe la expresión que corresponde a cada situación.

- c. Determina la expresión para calcular el ingreso total cuando Lina vende cualquier cantidad de docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5cm y medidas entre 5.0 a 9.0cm.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan una expresión de la forma ingreso = $(X)(V1) + (X)(V2)$, donde X es	Un estudiante de cinco.

	la cantidad de docenas de piangua y V es el valor según el diámetro (\$1.000, \$2.000)	E1
R2	Estudiantes que determinan una expresión de la forma $f(x) = \begin{cases} 1000x, & \text{si la medida es de 3.0 a 4.5 cm} \\ 2000x, & \text{si la medida es de 5.0 a 9.0 cm} \end{cases}$	Dos estudiantes de cinco. E3, E4
R3	Estudiantes que determinan en lenguaje natural una expresión para calcular el ingreso total indicando que, Lina para calcular el ingreso total por cualquier cantidad de docenas de pianguas debe seleccionar las docenas de 3.0 cm a 4.5 cm y las docenas de 5.0 a 9.0 cm luego multiplicarlas por el valor correspondiente y sumar los dos totales.	Un estudiante de cinco. E5
R4	Estudiantes que no determinan una expresión para calcular el ingreso total.	Un estudiante de cinco. E2

La información registrada en la Tabla 40 ,41, 42 corrobora que los estudiantes comprenden las relaciones de dependencia entre el ingreso, la cantidad de docenas de pianguas y su precio por docena de acuerdo a su medida, como se puede observar en la Figura 35.

Figura 35

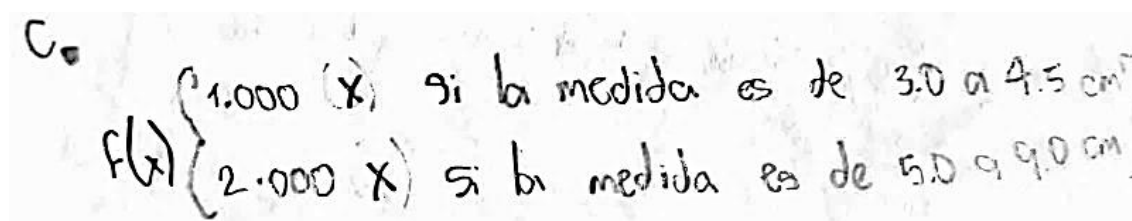
Situación 1, Tarea2, Pregunta 7c, Estudiante 5(S1T2P7CE5)

C. Lina para calcular el ingreso que obtiene por cualquier cantidad de docenas de piangua debe seleccionar las docenas de 3.0 a 4.5 cm y las docenas de 5.0 a 9.0 cm, luego multiplicar por el valor correspondiente y sumar los dos totales.

Esto además deja en evidencia la existencia del nivel de coordinación y el nivel de dirección del razonamiento covariacional, por tanto, la presencia del estudio de la covariación, en tanto que reconocen que, para cada expresión, así como cambia la longitud cambia el precio como se puede ver en la Figura 36.

Figura 36

Situación 1, Tarea2, Pregunta 7c Estudiante 3(S1T2P7A7B7CE3)



The image shows a handwritten piecewise function on a piece of paper. The function is labeled 'C.' and 'f(x)'. It consists of two parts: the first part is '1.000 (x) si la medida es de 3.0 a 4.5 cm' and the second part is '2.000 (x) si la medida es de 5.0 a 9.0 cm'.

$$C. \quad f(x) \begin{cases} 1.000 (x) & \text{si la medida es de } 3.0 \text{ a } 4.5 \text{ cm} \\ 2.000 (x) & \text{si la medida es de } 5.0 \text{ a } 9.0 \text{ cm} \end{cases}$$

En consecuencia, definir una expresión algebraica como modelo para determinar el ingreso obtenido por la venta de docenas de pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm y medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm, así como una expresión para calcular el ingreso total obtenido por todas las docenas de pianguas vendidas, permite ubicar a los estudiantes en el nivel referencial de la modelación, puesto que han esquematizado la situación a través de modelos.

Ahora bien, podría mencionarse que los estudiantes hacen un primer acercamiento a la representación de la función por tramos desde una representación algebraica y una representación verbal, así como el reconocimiento de las variables dependientes e independientes.

Tabla 43

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 8a (S1T2P8a)

Situación 1, tarea 2, pregunta 8a(S1T2P8a)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P8: Teniendo en cuenta la expresión obtenida en el punto 7, literal a y b calcule:		
a. El ingreso obtenido por un recolector de piangua que sacó 32 docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan de manera acertada el ingreso obtenido por las 32 docenas de pianguas y hace uso de la expresión obtenida.	Cinco estudiantes de cinco E1, E2, E3, E4, E5

Tabla 44

Situación 1, tarea 2, pregunta 8b (S1T2P8b)

Situación 1, tarea 2, pregunta 8b (S1T2P8b)		
T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.		
P8: Teniendo en cuenta la expresión obtenida en el punto 7, literal a y b calcule:		
b. El ingreso obtenido por un recolector de piangua que sacó 32 docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan de manera acertada el ingreso obtenido por las 54 docenas de	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

pianguas y hace uso de la
expresión obtenida.

Tabla 45

Situación 1, Tarea 2, Pregunta 8c (S1T2P8c)

Situación 1, tarea 2, pregunta 8c (S1T2P8c)

T2: Relación entre cantidades y magnitudes en el contexto de recolección de pianguas.

- c. Lina el día jueves sacó 25 docenas de piangua, 5 docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm, 20 docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm. Ayuda a Lina a calcular el ingreso total obtenido haciendo uso de la expresión ingreso total.

$$f(x) = \begin{cases} 1000x, & \text{si } 3.0\text{cm} \geq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000x, & \text{si } 5.0\text{ cm} \geq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$$

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que emplean la expresión ingreso total y determina de manera acertada el ingreso obtenido por las docenas de pianguas con medidas de 3.0cm a 4.5 cm y las docenas de pianguas con medidas de 5.0cm a 9.0cm.	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

A partir de los datos registrados en la Tabla 43, 44 Y 45 se puede decir que los estudiantes hacen buen uso de las expresiones algebraicas que determinaron en el numeral 7, literal a y b, para calcular el ingreso por la venta de las pianguas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm y las docenas de pianguas con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm, puesto que responden de manera acertada.

En este sentido, es posible mencionar que la mayoría de los estudiantes parecen tener facilidad para trabajar con las expresiones algebraicas inmersas en la situación de recolección de

pianguas, además hacen buen uso de modelos creados dentro de este contexto, lo cual evidencia el desarrollo del nivel referencial de la modelación (ver Figura 37). Cabe mencionar que, el modelo utilizado en la pregunta 8, literal c, corresponde a una función por tramos, lo cual es un acercamiento al trabajo con este tipo de funciones.

Figura 37

Situación 1, Tarea2, Pregunta 8c Estudiante 4(S1T2P8CE4)

$$f(x) \begin{cases} 1000(15) \\ 2000(20) \end{cases} = \begin{matrix} 5.000 \\ 40.000 \\ \hline 45.000 \end{matrix}$$

Tarea 3. Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

La persona encargada del control y monitoreo de la extracción de pianguas del manglar, le solicitó a Lina realizar el registro de las docenas de piangua que sacó durante la semana de receso de acuerdo a su medida. En las siguientes tablas se puede observar el registro.

Tabla 46

Registro de Docena de Piangua con Medidas de 3.0 cm a 4.5 cm

Diámetro	Cantidad de docenas	Precio por docena	Ingreso total
3.0	4		
3.5	7		
4.0	9		
4.5	10		

Tabla 47

Registro de Docena de Piangua con Medidas de 5.0 cm a 9.0 cm

Diámetro	Cantidad de docenas	Precio por docena	Ingreso total
5.0	15		
5.5	20		
6.0	15		

6.5	11
7.0	12
7.5	14
8.0	12
8.5	9
9.0	0

Tabla 48

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 1 (S1T3P1)

Situación 1, tarea 3, pregunta 1 (S1T3P1)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas		
P1: Completa la columna de precio por docena y la columna ingreso total. Recuerda utilizar la expresión algebraica encontrada anteriormente para completar la columna de ingreso total.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que completan la tabla en su totalidad de manera acertada haciendo uso de la expresión determinada.	Dos estudiantes de cinco. E1, E2, E4
R2	Estudiantes que completan todos los datos de la tabla de manera acertada pero no escribe el procedimiento que realizaron para calcular los valores	Dos estudiantes de cinco E3, E5

A partir de las respuestas registradas en la Tabla 48, se corrobora que la mayoría de los estudiantes tienen facilidad para hacer uso de los modelos creados por ellos mismos entorno a la situación de recolección de pianguas, esto da cuenta de la presencia del nivel referencial de la modelación. También se evidencia el estudio de la covariación y el nivel de coordinación del

razonamiento covariacional, en tanto que identifican que expresión utilizar según el diámetro de las docenas de piangua (ver Figura 38).

Figura 38

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 1 Estudiante 4(S1T3P1E4)

$f(x) \{1000(4)\} = 4.000$	$F(x) \{2000(15)\} = 30.000$
$f(x) \{1000(7)\} = 7.000$	$F(x) \{2000(20)\} = 40.000$
$f(x) \{1000(9)\} = 9.000$	$F(x) \{2000(17)\} = 32.000$
$f(x) \{1000(10)\} = 10.000$	$F(x) \{2000(12)\} = 24.000$
	$F(x) \{2000(14)\} = 28.000$
	$F(x) \{2000(9)\} = 18.000$

Tabla 49

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2a)

Situación 1, tarea 3, pregunta 2 (S1T3P2a)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P2: Observa la tabla anterior y responde:

a. Indica los valores que se mantienen constantes y los valores que varían.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que identifican los valores que se mantienen constantes (precio por docena) y los valores que varían (cantidad de docenas, diámetro e ingreso total)	Dos estudiantes de cinco. E3, E4
R2	Estudiantes que identifican de manera acertada los valores que se mantienen constantes (precio por docena) y al menos dos de los	Dos estudiantes de cinco E1, E5

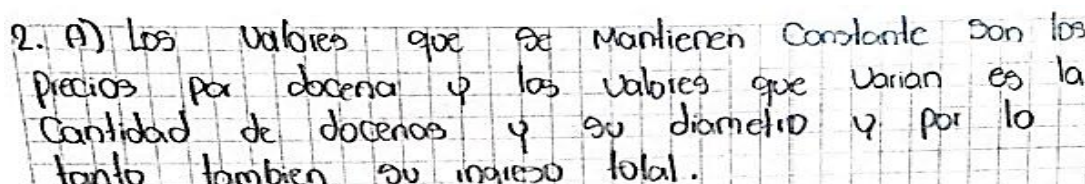
	valores que varían (diámetro, ingreso total).	
R3	Estudiantes que identifican los valores que se mantienen constante (precio por docena) y al menos un valor de los que varían (ingresos totales).	Un estudiante de cinco. E2

Además de lo que se evidencia en la Tabla 49, en la plenaria un estudiante argumenta que en la primera tabla el valor que considera constante es el precio de las docenas de pianguas del rango de 3.0 cm a 4.5 cm, porque si la docena se encuentre entre 3.5 cm o 4.0 cm todas tienen un valor de \$1.000, lo variante es la cantidad de docenas porque todos los días no sacaba la misma cantidad, también el diámetro porque todas no tenían los mismos centímetros, en la segunda tabla lo constante son los \$2.000 y lo variante son las docenas de pianguas y los diámetro, porque sacó medidas diferentes, también varia el total de ingreso.

En relación, es posible decir que la mayoría de los estudiantes identifican lo constante y lo variable en el contexto de recolección de pianguas como se observa en la Figura 39.

Figura 39

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2a Estudiante 3(S1T3P2AE3)



2. A) Los valores que se mantienen constante son los precios por docena y los valores que varían es la cantidad de docenas y su diámetro y por lo tanto también su ingreso total.

Esto deja ver la presencia del nivel referencial, en tanto que reconocen características de las relaciones funcionales en el proceso de modelación, para este caso las cantidades constantes y las cantidades variables de acuerdo a la situación dada, componentes fundamentales para la creación de modelos. En esta misma dirección, es muy importante la comprensión por parte de

los estudiantes de los constante y lo variable, ya que permite reconocer las relaciones de dependencia presentes entre las magnitudes involucradas siendo un aspecto esencial del estudio de la covariación.

Tabla 50

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2b)

Situación 1, tarea 3, pregunta 2 (S1T3P2b)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas P2: Observa la tabla anterior y responde:		
b. Representar en el plano cartesiano una gráfica del diámetro y el número de docenas, teniendo en cuenta que en el eje x se ubica el diámetro y en el eje y el número de docenas		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representa de manera acertada en el plano cartesiano, teniendo en cuenta que en el eje x se ubica el diámetro y en el eje y el número de docenas. No unifican los puntos.	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

De acuerdo con los datos de la tabla 50, los cinco estudiantes participantes realizaron la representación acertada en el plano cartesiano según los datos registrados en la tabla, permitiendo que estos se ubiquen en el nivel referencial de la modelación al ser este un modelo gráfico de la situación dada. Además, se evidencia una apropiación de los estudiantes para ubicar puntos en el plano cartesiano e identificación de los ejes como se puede observar en la Figura 40, lo cual favorece al momento de realizar representaciones graficas de una función.

Figura 40

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2b Estudiante 1(S1T3P2BE1)

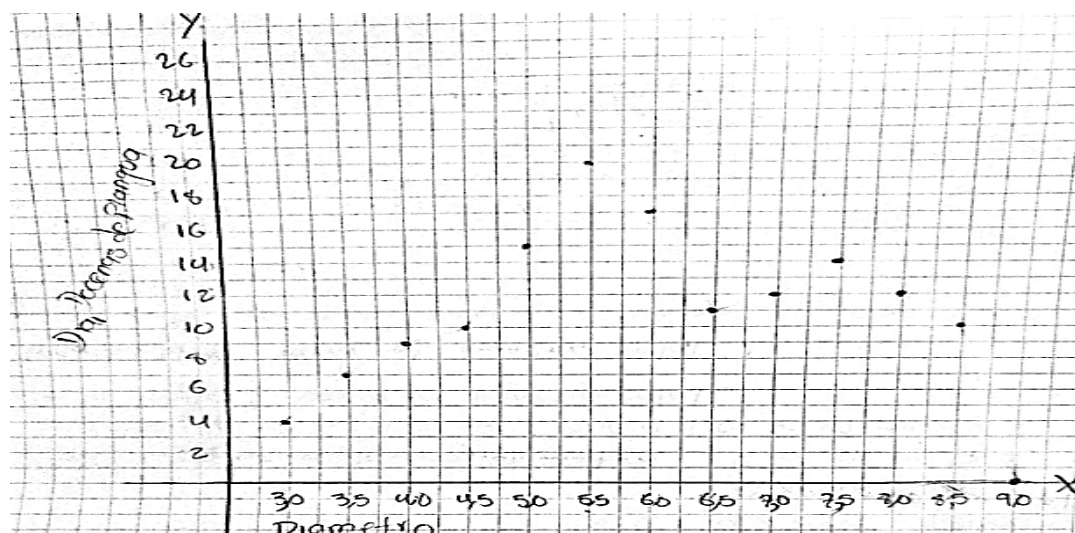


Tabla 51

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2c)

Situación 1, tarea 3, pregunta 2 (S1T3P2c)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P2: Observa la tabla anterior y responde:

- d. A partir de la gráfica escribe alguna conclusión con relación al comportamiento que observa en la misma.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que Lina sacó más cantidad de pianguas con medida de 5.0 cm a 6.0 cm, lo que quiere decir que su ingreso es alto, además, sacó menos cantidad de pianguas de 3.0 cm a 4.5 cm y como el costo es menor su ingreso es menor.	Un estudiante de cinco E1,
R2	Estudiantes que indican que si el diámetro aumenta también la cantidad	Un estudiante de cinco. E2

	de docenas hasta llegar al diámetro 5.5 cm, después de ese punto de puede apreciar la disminución en las cantidades recolectada, y en el punto 7.0 cm vuelve a subir hasta el punto 7.5, ya después decrece hasta llegar a cero.	
R3	Estudiantes que no es claro con su conclusión, puesto que manifiestan que de 3.0cm a 5.0 cm está bajando y de 6.0 cm a 9.0 comenzó a bajar	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que manifiestan que de 3.0 cm a 5.5 cm está subiendo y de 6.0 cm a 9.0 comienza a bajar.	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiantes que indica que de acuerdo al comportamiento de la gráfica se observa que tanto el diámetro como la cantidad de docenas son variantes	Un estudiante de cinco. E5

De acuerdo con la Tabla 51 se puede decir que la mayoría de los estudiantes identificaron y describieron comportamientos en la gráfica, en el cual se evidencia un acercamiento al estudio de la covariación y al nivel de coordinación, en tanto que, sus argumentos establecen como cambia una magnitud con relación a los cambios de la otra, específicamente como se comportan los ingresos si el intervalo de diámetro cambia (ver Figura 41)

Figura 41

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2c Estudiante 1(S1T3P2cE1)

C.) A partir de la grafica se puede decir que, Lina sacó mas cantidad de piangua de medidas entre 5,0 y 6,0cm lo que quiere decir que su ingreso es alto. Por otro lado, Lina sacó menos cantidad de piangua de medidas entre 3,0 y 4,5 cm, y como el costo de estas es menor el ingreso es menos.

Además, atiende al nivel de dirección del razonamiento covariacional, ya que describen en que puntos la gráfica aumenta o disminuye como parte de la dirección del cambio de una variable con los cambios de la otra (ver Figura 42). Todo esto a su vez, es parte del proceso del nivel referencial de la modelación, ya que se basa en un modelo grafico creado a partir de la situación dada.

Figura 42

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2c Estudiante 1(S1T3P2BE2)

Se puede observar en el comportamiento de la grafica que una recolectora mas pianguas segun su diametro es decir que si el diametro aumenta tambien la cantidad hasta llegar al diametro (5,5), despues de ese punto se puede apreciar la disminucion en las cantidades recolectadas y en el punto (7,0) vuelve a subir las cantidades hasta el punto (7,5), ya des pues decrece hasta llegar a

Tabla 52

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3 (S1T3P3)

Situación 1, tarea 3, pregunta 3 (S1T3P3)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P3: Realiza una gráfica en el plano cartesiano donde la variable independiente sea el diámetro y la variable dependiente sea el precio por docena, luego observa la gráfica y responde.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representan de manera acertada en un mismo plano	Cuatro estudiantes de cinco.

	cartesiano la gráfica, teniendo en cuenta que la variable independiente es el diámetro y la variable dependiente es el precio por docena.	E1, E2, E3, E5
R2	Estudiantes que representan de manera acertada en diferentes planos cartesiano la gráfica, teniendo en cuenta que la variable independiente es el diámetro y la variable dependiente es el precio por docena	Un estudiante de cinco. E4

Tabla 53

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3a (S1T3P3a)

Situación 1, tarea 3, pregunta 3a (S1T3P3a)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P3a. Indica el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm con relación al diámetro.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que de acuerdo al comportamiento de la gráfica el precio por docenas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm se mantiene, es decir que ni sube ni baja.	Dos estudiantes de cinco. E1, E2, E5
R2	Estudiante que no es claro con su argumento, escribe que el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 3.0 cm a 4.5 cm con relación al diámetro es de \$1000	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiante que no indica ningún comportamiento	Un estudiante de cinco E4

Tabla 54

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P3b)

Situación 1, tarea 3, pregunta 2 (S1T3P3b)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas		
P3b: Indica el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 5.0 cm y 9.0 cm con relación al diámetro		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que de acuerdo al comportamiento de la gráfica el precio por docenas con medidas de 5.0 cm a 9.0 cm se mantiene, es decir no cambia.	Tres estudiantes de cinco. E1, E2, E5.
R2	Estudiante que no es claro con su argumento, escribe que el comportamiento del precio por docenas con medidas entre 5.0 cm a 9.0 cm con relación al diámetro es de \$2000	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiante que no indica ningún comportamiento	Un estudiante de cinco. E4

En cuanto a las Tablas 53 y 54, desde el razonamiento covariacional se evidencia el alcance del nivel de coordinación y el nivel de dirección, pues los estudiantes reconocen los cambios que ocurren en el precio en tanto cambia el intervalo de diámetro, así como la dirección en la que este cambia, al reconocer que este se mantiene constante, ni sube, ni baja o no cambia, (ver Figura 43).

Figura 43

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3a, 3b Estudiante 1(S1T3P3E1)

a.) Según la gráfica el precio por docena de medallas entre 3,0 y 4,5 se mantiene, ni sube ni baja.

b.) Según la gráfica el precio por docena de medallas entre 5,0 y 9,0 es constante, es decir no cambia.

En relación, a partir de lo registrado en la S1T3P3, se puede observar desde el nivel referencial de la modelación y el contenido matemático, un acercamiento a la representación gráfica de una función por tramos que relaciona el diámetro y el precio por docena, así como el trabajo con la representación tabular y gráfica. (ver Figura 44)

Figura 44

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3 Estudiante 1(S1T3P3E1)

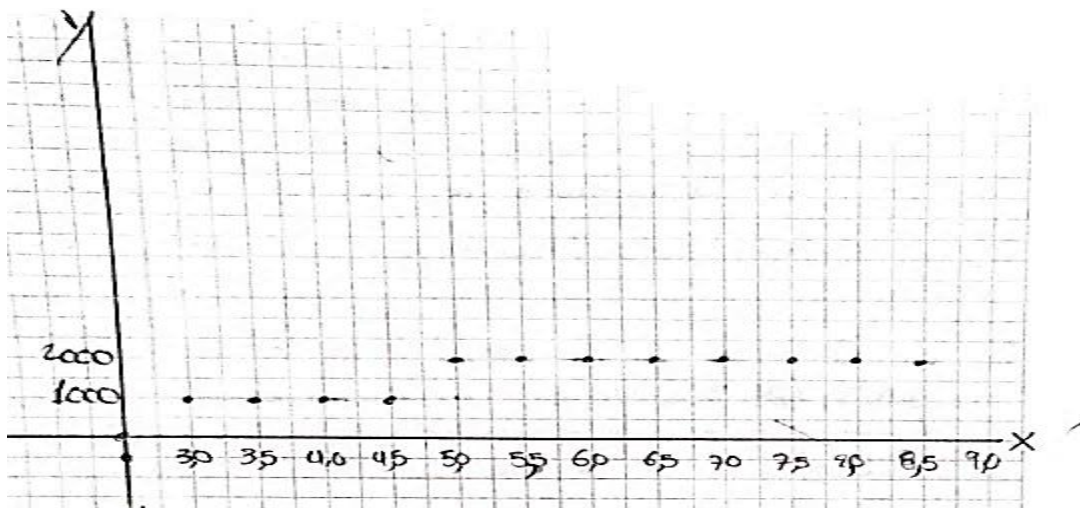


Tabla 55

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3c (S1T3P3c)

Situación 1, tarea 3, pregunta 3c (S1T3P3c)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas		
P3c: Indica una expresión donde se represente el precio por docena en función del diámetro.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican una expresión de la forma: $v1 = d1 = \text{si } 3.0\text{ cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm}$ $1000 = \text{si } 3.0\text{ cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm}$	Un estudiante de cinco. E1
	$v2 = d2 = \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm}$ $2000 = \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm}$	Un estudiante de cinco. E2
R2	Estudiantes que indican una expresión de la forma: $1000 = \text{si } 3.0\text{ cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm}$ $2000 = \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm}$	Dos estudiantes de cinco. E3, E4
R3	Estudiantes que indican una expresión de la forma, $1000(X)$ y $2000(X)$, donde X representa la cantidad de docenas de pianguas.	Un estudiante de cinco E5
R4	Estudiantes que indican una expresión de la forma: diámetro 3.0 cm a 4.5 cm igual a 1000 diámetro de 5.0 a 9.0 cm es igual a 2000	

Lo registrado en la Tabla 55, permite ver que los estudiantes comprenden las relaciones de dependencia presentes entre el precio por docena y el diámetro de las pianguas, lo cual refleja

el desarrollo del nivel de coordinación y el nivel de dirección del razonamiento covariacional, así como al estudio de la covariación. En tanto que reconocen que, si el intervalo de medida cambia, cambia el precio, el cual aumenta o disminuye de acuerdo a la medida de la piangua. (ver Figura 45)

Figura 45

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 3c Estudiante 1(S1T3P3CE1)

C).

$$V_1 = \text{Precio} \times \text{docena}$$

$$d_1 = \text{Diametro de la piangua de medida entre } 3,0 \text{ y } 4,5$$

$$V_1 = d_1 = \text{si } 3,0\text{cm} \leq x \leq 4,5\text{cm}$$

$$1000 = \text{si } 3,0\text{cm} \leq x \leq 4,5\text{cm}$$

$$V_2 = \text{Precio} \times \text{docena}$$

$$d_2 = \text{Diametro de la piangua de medida entre } 5,0 \text{ y } 9,0$$

$$V_2 \times d_2 = \text{si } 5,0\text{cm} \leq x \leq 9,0\text{cm}$$

$$2000 = \text{si } 5,0\text{cm} \leq x \leq 9,0\text{cm}$$

Por otro lado, los estudiantes trabajan desde el nivel referencial de la modelación, puesto que crean un modelo a partir del contexto de recolección de pianguas que representa el precio por docena de acuerdo a su diámetro. Además, podría mencionarse, desde el contenido matemático, que los participantes tienen un acercamiento a la representación algebraica y verbal de una función por tramos, a su vez una comprensión de la variable independiente y dependiente que la componen.

Tabla 56

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4 (S1T3P4a)

Situación 1, tarea 3, pregunta 4 (S1T3P4a)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas P4: El comportamiento de la gráfica del precio por docena en función del diámetro se puede representar en una expresión algebraica de la siguiente manera. $f(x) = \begin{cases} 1000, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$ Teniendo en cuenta la expresión algebraica responde: a. Si x tiene un diámetro de 3.0 cm qué valor toma y =		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada que y toma un valor de 1.000 si x tiene un valor de 3.0 cm, sin justificar	Tres estudiantes de cinco E1, E2, E5
R2	Estudiantes que justifica de manera acertada que y toma un valor de 1.000 si x tiene un valor de 3.0 cm porque el precio por docena de 3.0 cm a 4.5 cm es de 1.000	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiantes que justifican de manera acertada que y toma un valor de 1.000 si x es igual a 3.0 cm porque ese es su valor por el diámetro.	Un estudiante de cinco. E4

Tabla 57

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4 (S1T3P4b)

Situación 1, tarea 3, pregunta 4 (S1T3P4b)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas P4: El comportamiento de la gráfica del precio por docena en función del diámetro se puede representar en una expresión algebraica de la siguiente manera. $f(x) = \begin{cases} 1000, & \text{si } 3.0\text{cm} \leq x \leq 4.5\text{ cm} \\ 2000, & \text{si } 5.0\text{ cm} \leq x \leq 9.0\text{ cm} \end{cases}$ Teniendo en cuenta la expresión algebraica responde: a. Si x tiene un diámetro de 9.0 cm que valor toma y=		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada que y toma un valor de 2.000 si x tiene un valor de 9.0 cm, sin justificar	Tres estudiantes de cinco. E1, E2, E5
R2	Estudiantes que justifica de manera acertada que y toma un valor de 2.000 si x tiene un valor de 9.0 cm porque el precio por docena de 5.0 cm a 9.0 cm es de 2.000	Un estudiante de cinco E3
R3	Estudiantes que justifican de manera acertada que y toma un valor de 2.000 si x es igual a 9.0 cm porque ese es su valor por el diámetro.	Un estudiante de cinco. E4

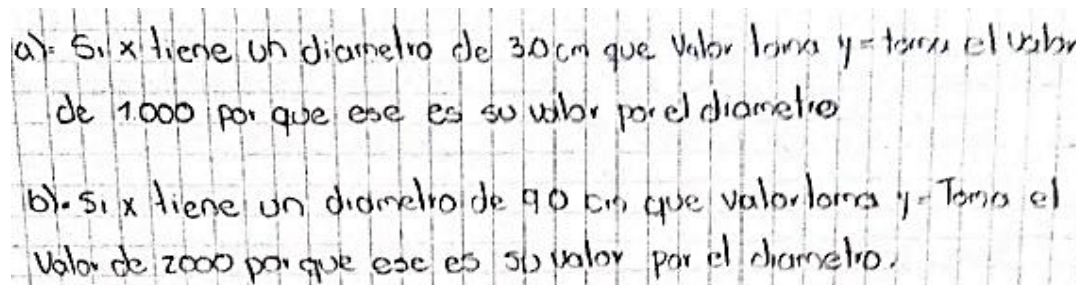
A partir de los datos registrados en la Tabla 56 y 57, se puede decir que los estudiantes comprendieron la pregunta, ya que respondieron de manera acertada. De los cinco estudiantes, tres responden sin justificar su respuesta y dos responden con argumentos.

En la plenaria la mayoría coincide en que si la medida es de 3.0 cm, Y va a tomar un valor de \$1.000, y si X toma un diámetro de 9.0 cm, Y toma un valor de \$2000, porque \$1.000 y \$2.000 corresponde al valor según su diámetro.

En relación, se puede evidenciar en el desarrollo de la pregunta el estudio de la covariación, en tanto que, los participantes comprender que el valor de la docena de piangua depende de su diámetro, de igual manera, existe la presencia del nivel de coordinación y de dirección, puesto que identifican como cambia el precio en relación con el diámetro y a su vez la dirección en la que este cambia, esto de forma implícita. (ver Figura 46)

Figura 46

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 4a, 4b Estudiante 4(S1T3P4E4)



a) Si x tiene un diámetro de 3.0 cm que valor toma y = Toma el valor de 1.000 por que ese es su valor por el diámetro

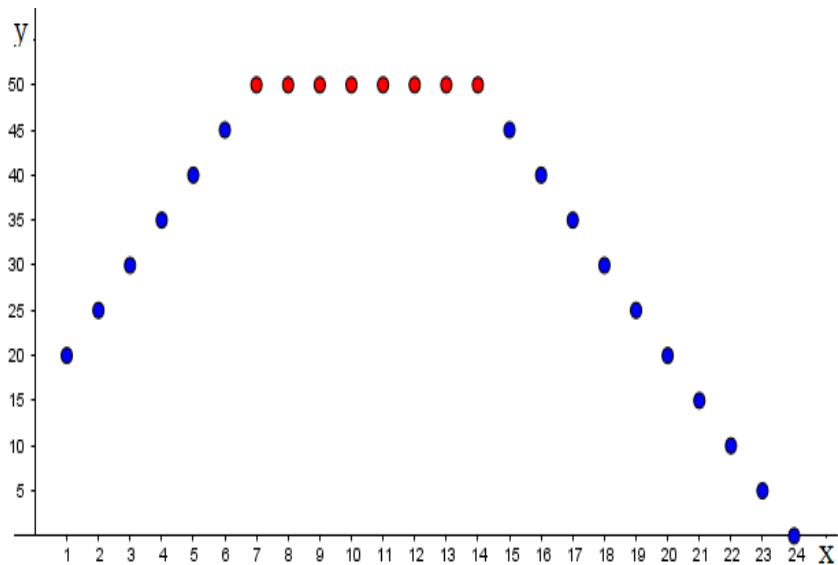
b) Si x tiene un diámetro de 9.0 cm que valor toma y = Toma el valor de 2.000 por que ese es su valor por el diámetro.

Además, podría mencionarse desde el nivel referencial un acercamiento al nivel general de la modelación, ya que los estudiantes reflexionan a partir de la función por tramos que representa una situación particular del contexto de recolección de pianguas para la creación de modelos similares.

Tabla 58

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5a)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5a)
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de piangua Ana comenzó a sacar pianguas el día lunes, ese día logro sacar 20 docenas; el día martes, 25 docenas; el día miércoles, 30 docenas; y así sucesivamente aumento de cinco docenas cada día hasta completar la semana. A partir de ahí, la cantidad de docenas se mantuvo constante durante la siguiente semana. Finalmente, hubo cambio de marea (quiebra) y la cantidad de docenas que sacaba Ana comenzó a disminuir de manera progresiva hasta llegar al día 10.



P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta:

a. Describe como varia el comportamiento de la gráfica en cada tramo.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que en la primera semana hubo aumento en	Un estudiante de cinco. E1

	la cantidad de pianguas, por una semana se mantuvo constante la cantidad de docenas y luego comenzó a disminuir.	
R2	Estudiantes que indican que la primera semana aumento de cinco en cinco cada día, en la segunda semana se mantuvo constante y en los últimos 10 días decreció de cinco en cinco.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que indican que del día uno al siete comenzó a subir, de ahí hasta el día catorce se mantuvo y desde el día quince hasta el veinticuatro fue a quiebra.	Dos estudiantes de cinco. E3, E4
R4	Estudiantes que indican que el comportamiento de la gráfica varia constantemente durante una semana, durante la próxima tiene un comportamiento constante y en la última semana vuelve y toma la variación constante	Un estudiante de cinco. E5

Basado en los datos de la Tabla 58, se puede observar un acercamiento al nivel general de la modelación, en el cual se analiza y reflexiona alrededor de los modelos de una situación dada, para este caso una representación gráfica, donde los estudiantes identificaron el comportamiento de la misma, representación que está directamente relacionado con la una función por tramos. Por otro lado, desde el razonamiento covariacional se evidencia el nivel de dirección de estos cambios, teniendo en cuenta que la mayoría de los estudiantes argumentaron el comportamiento de cada uno de los tramos, indicando donde aumenta, disminuye y cual tramo tiene un comportamiento constante, como se puede ver en la Figura 47.

Figura 47

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5a Estudiante 1(S1T3P5E1)

4) La primera semana hubo un aumento en la cantidad de piangua que sacaba Ana, por una semana se mantuvo en la cantidad de docenas que sacaba, y luego comenzó a disminuir la cantidad de docenas que sacaba.

Es importante mencionar que, un estudiante puntualizó que el primer tramo aumentaba de cinco en cinco, y el último decrecía de cinco en cinco, lo cual es un patrón importante para la construcción de funciones (ver Figura 48).

Figura 48

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5a Estudiante 2(S1T3P5E2)

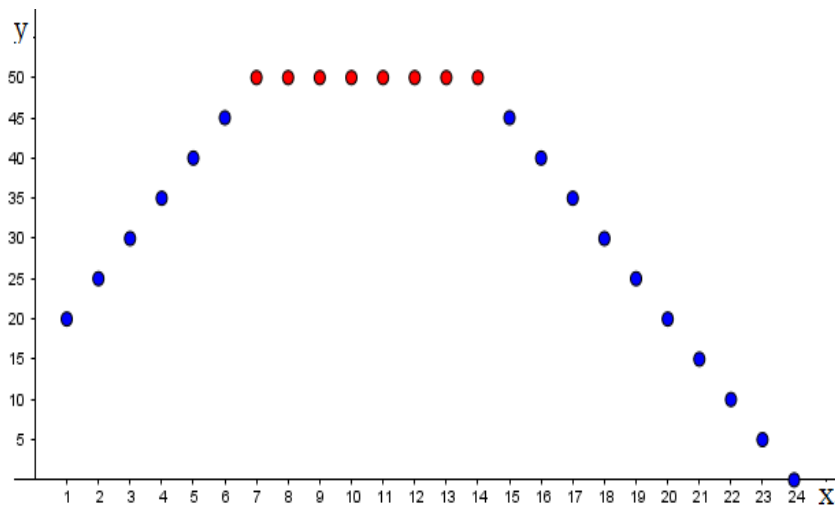
5) a) $15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 210$
Según la gráfica se puede observar el aumento de 5 docenas por día con respecto al día anterior.
b) El comportamiento de la gráfica en cada tramo, es el aumento de 5 en 5, es, la primera semana, cada día en la segunda semana se mantuvo constante y en los últimos 10 días decreció de 5 en 5.

Tabla 59

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1t3p5b)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5b)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas



P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta:

- b. Indica cual fue la cantidad de docenas que se mantuvo constante durante la segunda semana.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada la cantidad de docenas que se mantiene constante (50 docenas)	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

En la Tabla 59, se puede observar que los estudiantes participantes indicaron de forma acertada la cantidad de docenas de pianguas que se mantienen constante durante la segunda

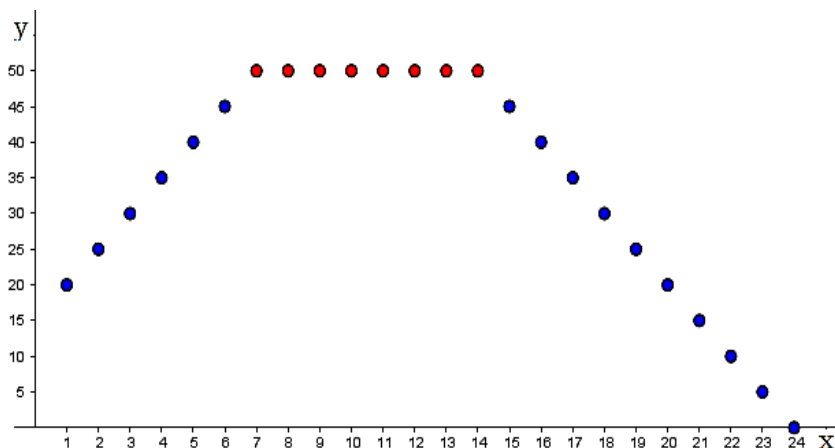
semana, esto deja en evidencia que no hay mucha dificultad en los estudiantes para comprender representaciones gráficas, todo esto como aproximación al nivel general. Cabe mencionar desde el razonamiento covariacional en el nivel de dirección, la comprensión de la dirección del cambio de una variable con los cambios de la otra al reconocer lo constante, es decir lo que permanece igual.

Tabla 60

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5c)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5c)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas



P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta:

c. Determina los valores que toma la variable independiente (x) en cada tramo.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada los valores que toma la variable x en cada tramo.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E2, E4, E5

R2	Estudiantes que no indican de manera acertada los valores que toma la variable x en cada tramo.	Un estudiante de cinco. E3
-----------	---	-------------------------------

Tabla 61

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5d)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5d)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta:

d. Determina los valores que toma la variable dependiente (y) en cada tramo.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican de manera acertada todos los valores que toma la variable y en cada tramo	Dos estudiantes de cinco. E1, E4,
R2	Estudiante que indican de manera acertada los valores que toma la variable y en el tramo 1 y 2, pero no completa de manera correcta los valores que toma en el tercer tramo	Dos estudiantes de cinco. E2, E3, E5

De acuerdo con los datos de la Tabla 60, se puede observar que de los cinco estudiantes solo uno no indica los valores que toma la variable X , en cuanto a la Tabla 61, dos estudiantes indicaron todos los valores que toma la variable Y en cada tramo, tres estudiantes indican los valores que toma la variable Y en el tramo uno y dos, pero no indican los valores del tramo tres.

En relación, es posible decir que los estudiantes hacen una aproximación al contenido matemático en correspondencia con el dominio y rango de una función por tramos desde la representación gráfica de la situación, además, esto da cuenta de un trabajo desde el nivel general

de la modelación al promover la comprensión de los componentes de la función por tramos como se observa en la Figura 49.

Figura 49

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5c, 5d Estudiante 1(S1T3P5E1)

c) En el tramo 1 la variable x toma el valor de
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
En el tramo 2 la variable x toma los valores (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) días
En el tramo 3 la variable x toma los valores (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24) días
d) En cada tramo la variable y toma el valor de.
En el tramo 1 $y =$ Aumento (20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)
En el tramo 2 $y =$ Constante (50)
En el tramo 3 $y =$ Disminución (45, 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0)

Tabla 62

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5e)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5e)

T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas

P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde las siguientes preguntas:

e. Representa de manera algebraica la situación.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representan de manera acertada las expresiones algebraicas correspondientes a cada tramo calculando la pendiente y la ecuación en la recta.	Dos estudiantes de cinco. E1, E4,
R2	Estudiantes que representan de manera acertada la expresión algebraica de los dos primeros	Tres estudiantes de cinco. E2, E3, E5

tramos, la tercera expresión la determina de forma incorrecta. No justifica el procedimiento utilizado para determinar cada expresión.

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 62, se evidencia un nivel referencial de modelación, en tanto que los estudiantes determinan las expresiones algebraicas a partir de un modelo dado. Además, es posible decir que, al estar la representación gráfica se facilita la creación del modelo que representa la situación. En esta dirección, se da un avance al nivel general, puesto que a partir de la gráfica el estudiante analiza y reflexiona para la creación de modelos de expresiones algebraicas en situaciones similares. En cuanto al razonamiento covariacional, se puede dar cuenta del nivel de coordinación cuantitativa, ya que algunos estudiantes determinaron la razón de cambio para hallar la expresión que representa el tramo uno y el tres de la función como se puede ver en la Figura 50.

Figura 50

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5e, Estudiante 4(S1T3P5E4)

e.	Primer tramo	Tercer tramo
	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{30 - 20}{3 - 1}$ $m = \frac{10}{2} = 5$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{10 - 30}{22 - 18}$ $m = \frac{-20}{4} = -5$
	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 20 = 5(x - 1)$ $y - 20 = 5x - 5$ $y = 5x - 5 + 20$ $y = 5x + 15$	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 30 = -5(x - 18)$ $y - 30 = -5x + 90$ $y = -5x + 90 + 30$ $y = -5x + 120$

Ahora bien, desde el enfoque matemático, se evidencia la presencia de las variables dependientes e independientes, así como el sistema de representación algebraico de una función por tramos.

Tabla 63

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5f)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5f)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta: f. Explica si de acuerdo a la situación de recolección de pianguas es pertinente unir los puntos y por qué.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que no es pertinente unir los puntos porque cada cantidad de pianguas es independiente, ya que son sacadas en días diferentes.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que indica que, si se puede unir, ya que la gráfica representa como varia el comportamiento de la recolección de pianguas.	Dos estudiantes de cinco. E2, E3
R3	Estudiantes que indica que no se podrían unir porque son números exactos.	Un estudiante de cinco. E4
R4	Estudiante que indica que no se puede unir porque hay tramos constantes y otros que son variables.	Un estudiante de cinco. E5

Tabla 64

Situación 1, Tarea 3, Pregunta 5 (S1T3P5g)

Situación 1, tarea 3, pregunta 5 (S1T3P5g)		
T3: Representación de función por tramos y la comercialización de pianguas		
P5. La anterior grafica representa el proceso de recolección de pianguas de Ana durante veinticuatro (24) días. Obsérvala y responde la siguiente pregunta:		
g. Indica si es pertinente unir los puntos que van desde el día uno (1) hasta el día siete (7) y por qué.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que es pertinente unir los puntos si se pretende mostrar solo el aumento de las pianguas sacadas en varios días, ya que muestra claro el aumento y disminución, pero para representar la cantidad de pianguas que se saca cada día no porque fácilmente se mira la cantidad sacada.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiante que indica que no, pero no justifica	Un estudiante de cinco E2
R3	Estudiantes que indica que sí, porque en esa semana comenzó a subir.	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indica que no se podría unir porque la cantidad de docenas son correctas y van aumentando de acuerdo al día.	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiantes que indica que no se podrían unir porque son docenas diferentes.	Un estudiante de cinco E5

De acuerdo con los datos registrados en las Tablas 63 y 64, los estudiantes no responden de manera acertada si es o no pertinente unir los puntos en la representación gráfica, lo cual evidencia que no existe una clara comprensión de que el significado de unir o no los puntos en una recta numérica se relaciona estrechamente con la continuidad numérica, en este caso en relación a la cantidad de docenas de pianguas. En este sentido, se evidencia dificultad en la apropiación de los conceptos de continuidad y discontinua en la recta, lo cual no permite pasar al nivel formal en el cual trabaja la comprensión de conceptos matemáticos.

Tarea 4: función por tramos en el control y recolección de pianguas

Con el fin de controlar la recolección de pianguas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm del manglar, las personas encargadas del control y monitoreo establecieron las siguientes tarifas a cobrar a quienes extraigan pianguas de dicha medida. Las personas que recolecten las primeras 50 docenas pagaran 2.000 por docena, para los que recolecten 100 pagaran 3.000 pesos por docenas y de ahí en adelante pagaran 6.000 pesos por docenas. La siguiente expresión $f(x)$ representa la función por tramos correspondiente a la situación.

$$f(x) = \begin{cases} 2000x, & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 3000x - 50000, & \text{si } 50 < x \leq 100 \\ 6000x - 200000, & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

Tabla 65

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1a (S1T4P1a)

Situación 1, tarea 4, pregunta 1a (S1T4P1a)

T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.

P1a: El valor a pagar por un recolector de pianguas que extrajo 70 docenas con medidas entre 3.0cm a 4.5 cm.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calculan de forma acertada el valor a pagar si se extraen 70 docenas de pianguas entre 3.0 cm a 4.5 cm, haciendo uso de la función dada.	Cinco estudiantes de cinco E1, E2, E3, E4, E5

Tabla 66

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1b (S1T4P1b)

Situación 1, tarea 4, pregunta 1b (S1T4P1b)		
T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.		
P1b: El valor a pagar por un recolector de pianguas que extrajo 150 docenas con medidas entre de 3.0cm a 4.5 cm.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calculan de forma correcta el valor a pagar si se extraen 150 docenas de pianguas entre 3.0 cm a 4.5 cm, haciendo uso de la función dada.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4.
R2	Estudiantes que calculan de forma correcta el valor a pagar si se extraen 150 docenas de pianguas entre 3.0 cm a 4.5 cm, pero no escribe el procedimiento realizado para determinar dicho valor.	Un estudiante de cinco. E1

En Tabla 65, se puede observar que los cinco estudiantes participantes determinaron de manera acertada el valor a pagar por la recolección de 70 docenas de pianguas con medidas de 3.0 cm a 4.5 cm haciendo uso de la función dada. En cuanto a la Tabla 66, los cinco estudiantes responden de forma acertada, solo uno no registra el procedimiento realizado.

En el desarrollo de la plenaria un estudiante explica que lo que hizo fue ver en que expresión se encontraba el 70 y en que expresión se encontraba el 150, luego reemplazó y calculó el valor total a pagar.

En relación, se puede evidenciar desde el nivel referencial de la modelación que los estudiantes en su mayoría hacen buen uso de modelos diseñados desde el contexto artesanal de recolección de pianguas, puesto que relacionan la expresión algebraica que deben emplear para calcular la respuesta (ver Figura 51). Además, se puede observarse el trabajo con las funciones por tramos desde la representación algebraica.

Figura 51

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1a,1b, Estudiante 2(S1T4P1BE2)

Handwritten work on grid paper showing piecewise functions and calculations for two cases:

a) $3000x - 50000$, si $50 \leq x \leq 100$

Calculation for $x = 70$:

$$3000 \cdot 70 - 50000 = 210000 - 50000 = 160000$$

El valor a pagar por un recolector de piangua que extrae 70 docenas con medidas entre 3,0 y 4,5 cm, es de 160.000

b) $6000x - 200000$, si $150 > x$

Calculation for $x = 150$:

$$6000 \cdot 150 - 200000 = 900000 - 200000 = 700000$$

Tabla 67

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c (S1T4P1c)

Situación 1, tarea 4, pregunta 1c (S1T4P1c)		
T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.		
P1c: Representa gráficamente la situación en el plano cartesiano.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes

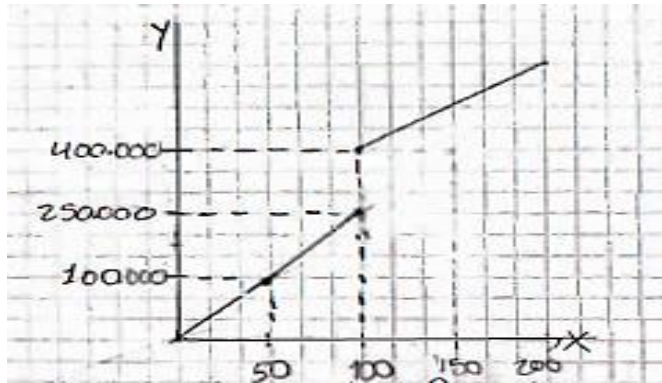
R1	Estudiantes que representan gráficamente las expresiones de la situación mediante líneas continuas sin determinar extremo	Cuatro de cinco. E1, E2, E3, E5
R2	Estudiantes que representan gráficamente la situación mediante graficas continuas, pero determina los extremos	Uno de cinco. E4

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 67, todos los participantes realizaron una representación de la función en el plano cartesiano, cuatro estudiantes representan la función y unen las líneas de las expresiones uno y dos, visualmente parece que el intervalo es cerrado, lo cual indicaría que tanto la expresión uno como la dos incluyen el 50, del mismo modo que la segunda y la tercera expresión incluyen el 100. El estudiante faltante representa la función sin unir la representación gráfica de las expresiones, indicando que de 1 a 50 se da un pago de \$2.000 a \$100.000, de 51 a 100 se paga de \$153.000 a \$250.000, de 100 en adelante se paga de \$400.000 hacia arriba, aunque en el tercer tramo si X toma un valor de 101 el valor de y no sería \$400.000, ya que este valor corresponde al pago por 100 docenas. Sin embargo, esta representación deja ver la idea de intervalo abierto o cerrado de parte del estudiante.

En relación, desde el nivel referencial, a partir de la representación realizada por los estudiantes, se evidencia un modelo de representación gráfica de una función por tramos, donde se observa que los estudiantes en su mayoría presentan dificultad para establecer desde la gráfica los puntos donde esta es cerrada o abierta, no se evidencia una conciencia de cuando se incluye o no el ultimo valor de una expresión en la siguiente como se observa en la Figura 52 , así como no es claro que la situación se desarrolla dentro del conjunto de los números naturales, en tanto que no es posible recolectar una piangua y media, por lo cual no puede ser continuo.

Figura 52

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c, Estudiante 1(S1T4P1CE1)



Es importante resaltar que un estudiante reconoce en que punto termina una expresión y en qué punto comienza la siguiente, lo cual es un indicio de que existe una comprensión de intervalo cerrado y abierto (ver Figura 53). Por otro lado, desde el contenido matemático, se da una identificación de la variable independiente y dependiente al momento de representar la gráfica, así como un avance a la representación gráfica de una función por tramos.

Figura 53

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1c, Estudiante 4(S1T4P1CE4)

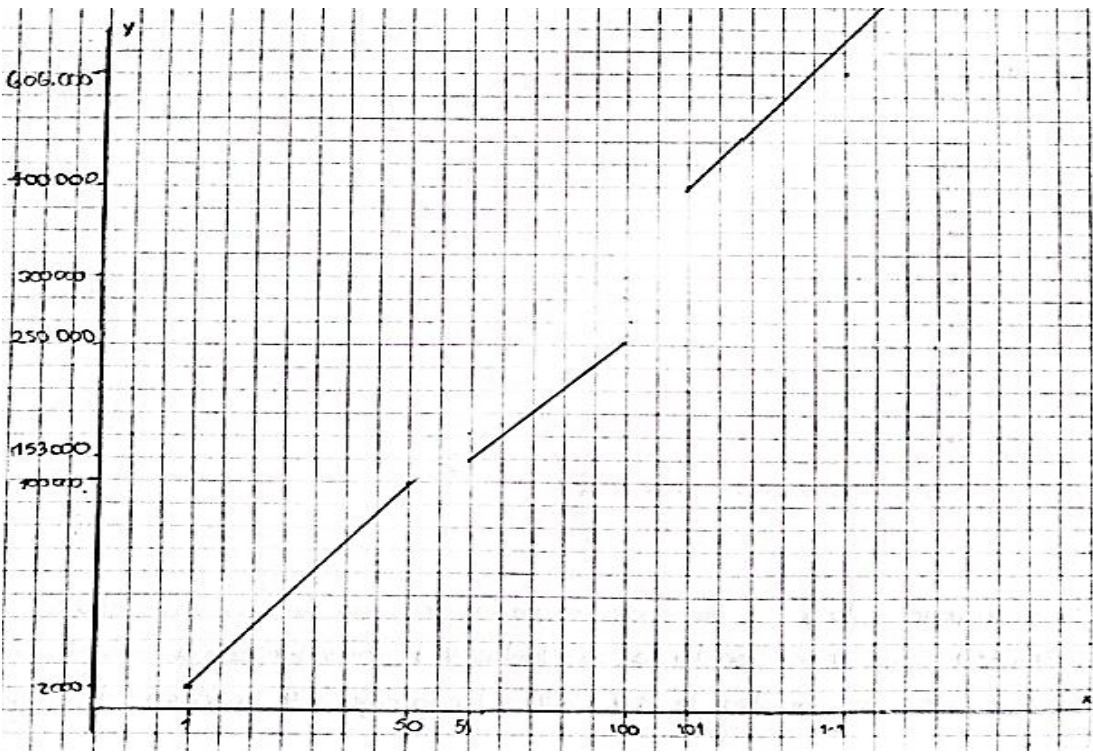


Tabla 68

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 1d (S1T4P1d)

Situación 1, tarea 4, pregunta 1d (S1T4P1d)		
T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.		
P1d: Determina el dominio y rango de cada una de las expresiones que conforman la función por tramos		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan el dominio de forma verbal sin dejar claro donde es abierto o cerrado. Determina el rango de cada una de	Dos estudiantes de cinco. E1

	las expresiones y establece donde es cerrado de forma verbal.	
R2	Estudiantes que determinan el dominio y rango de cada una de las expresiones en lenguaje natural y deja claro donde es abierto o cerrado.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que determinan el dominio y el rango, pero no establece donde el intervalo es cerrado o abierto	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que presentan inconsistencia en los valores que corresponden al dominio y al rango	Dos estudiantes de cinco. E4, E5

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 68, la mayoría de los estudiantes determino el dominio y el rango de la función por tramos de forma verbal, pero solo un estudiante especifica donde el dominio y el rango es cerrado y donde es abierto, pese a presentar inconsistencias en el tramo tres. Otro estudiante determina los valores del dominio, pero no deja claro si es cerrado o abierto, si específica para el rango, igualmente presenta inconsistencia con el rango en el tramo 3, un estudiante indica dominio y rango, pero no establece los extremos.

En relación, apoyado en el nivel general de la modelación y en los componentes de la función por tramos desde el contenido matemático, es posible decir que, los estudiantes realizan reflexiones en relación con conceptos matemáticos desde un modelo, en este caso lo que refiere al dominio y rango, lo cual facilita la comprensión de nuevos modelos en situaciones similares. Ahora bien, a pesar de la inconsistencia para definir los intervalos cerrados y abiertos, se evidencia que reconocen que el eje x representa el dominio y el eje y representa el rango al momento de establecer los valores, lo cual es un indicio de la conciencia de lo que significan

cada uno de estos componentes de la función (ver Figura 54), esto permite un acercamiento al nivel formal, en el cual se logra la comprensión de conceptos matemáticos.

Figura 54

Situación 1, tarea 4, pregunta 1d, Estudiante 2 (S1T4P1DE2)

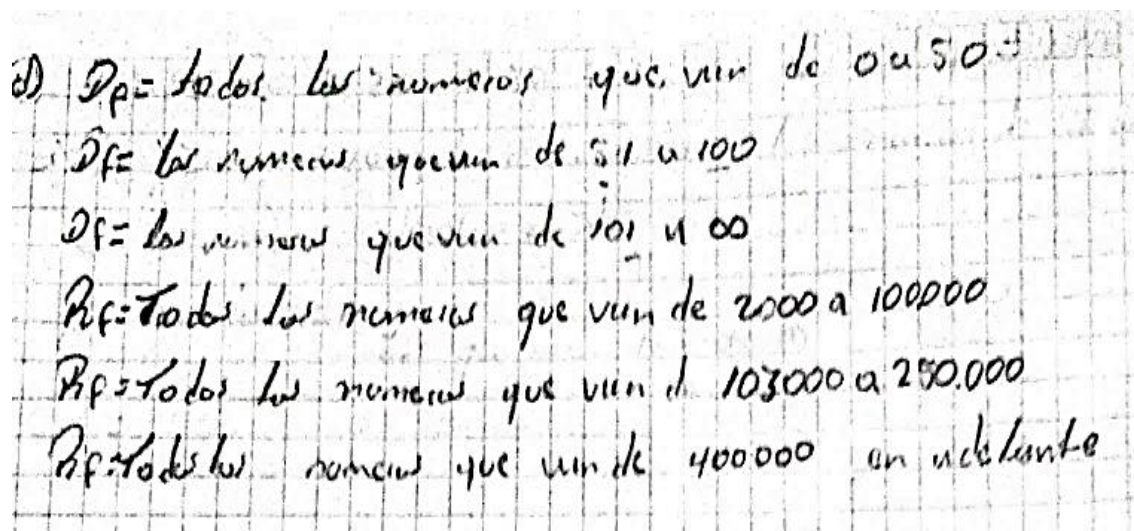


Tabla 69

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2a (S1T4P2a)

Situación 1, tarea 4, pregunta 2a (S1T4P2a)

T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.

Ana, Claudia y Heidi fueron tres días a recolectar piangua, ya que necesitan reunir fondos para la despedida de fin de año, la condición que establecieron es que, cada una colocara la misma cantidad de docenas de acuerdo a su diámetro. Las siguientes tablas registran las docenas según el diámetro.

Docenas	Diámetro (cm)
9	5.0
12	5.5
15	6.0

		18	6.5		
Docenas	Diámetro (cm)			Docenas	Diámetro (cm)
6	3.0			4	7.0
6	3.5			3	7.5
6	4.0			2	8.0
6	4.5			1	8.5
				0	9.0

P2a: Realiza una representación gráfica de los datos registrados en las tablas, donde la variable independiente sea el diámetro y la variable dependiente el número de docenas

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representan de forma correcta los datos en el plano cartesiano y no une los puntos.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E3, E4, E5
R2	Estudiantes que representan de forma correcta los datos en el plano cartesiano y une los puntos con líneas rectas.	Un estudiante de cinco. E2

En relación con los datos registrados en la Tabla 69, desde el nivel referencial se evidencia una comprensión de la creación de modelos gráficos dado un modelo tabular. Además, se observa una apropiación de los estudiantes para realizar representaciones graficas en el plano cartesiano como parte de los sistemas de representación de las funciones, específicamente función por tramos, así como la identificación de la variable independiente y la variable dependiente, lo cual se relaciona con los componentes del contenido matemático. Por otro lado, parece existir una conciencia de la continuidad y discontinuada en la recta numérica en relación al diámetro, en tanto que la mayoría no unifica los puntos (ver Figura 55).

Figura 55

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2a, Estudiante (S1T4P2AE4)

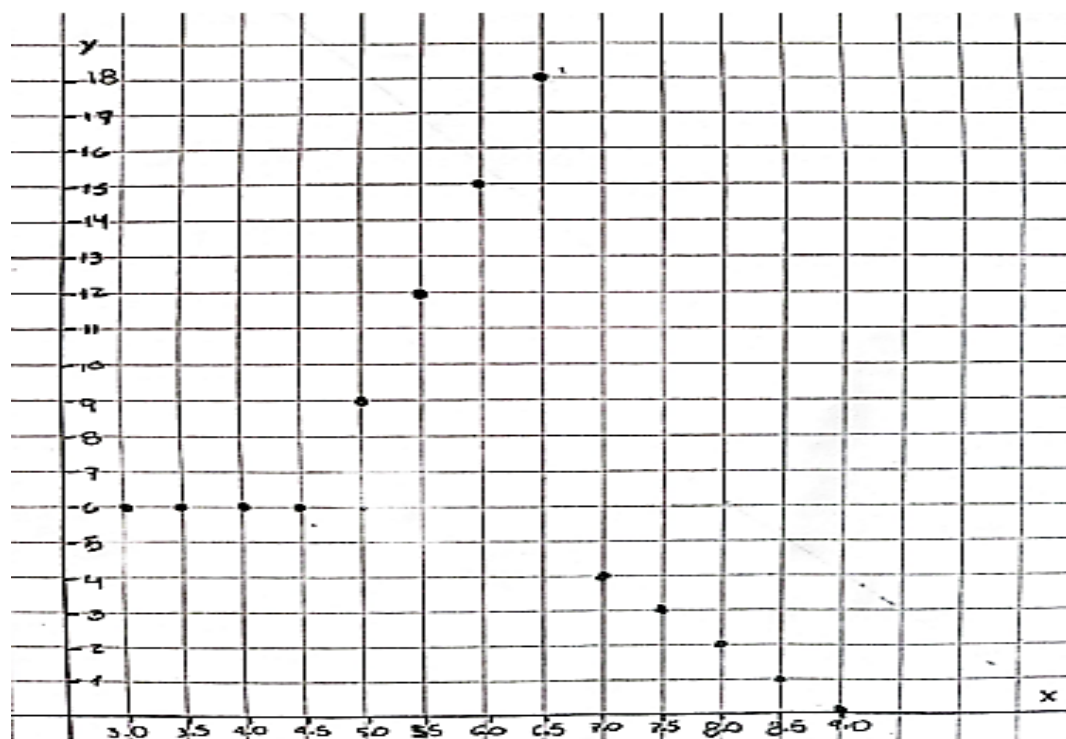


Tabla 70

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b (S1T4P2b)

Situación 1, tarea 4, pregunta 2b (S1T4P2b)

T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.

P2b: Describe el comportamiento que evidencia en la gráfica.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que escriben que se observa la misma cantidad de pianguas para las medidas de 3.0cm a 4.5 cm, las medidas de 5.0 cm a 6.5 por diámetro aumenta de 3 docenas y para los diámetros de 7.0 cm a 9.0 cm empieza en 4	Tres estudiantes de cinco. E1, E2, E4

	docenas de 7.0 cm y desciende de 1 docena hasta llegar a cero.	
R2	Estudiantes que argumentan que de 3.0 a 6.5 suben los fondos, y de 7.0 cm a 9.0 cm baja drásticamente	Un estudiante de cinco E3
R3	Estudiantes que escriben que se observa que el diámetro es variable y entre las docenas de pianguas se encuentra una cantidad constante.	Un estudiante de cinco E5

en la Tabla 70, en relación al nivel general de la modelación se puede observar que los estudiantes realizan reflexiones alrededor del comportamiento de una situación a partir de un modelo gráfico, lo cual aporta a la creación de nuevos modelos. Por otro lado, desde el razonamiento covariacional, los estudiantes trabajan desde un nivel de dirección, ya que los participantes indican en que puntos de la gráfica las docenas de pianguas aumenta, disminuyen o se mantienen constante (ver Figura 56). Del mismo modo, especifican en que puntos aumentan o disminuyen los ingresos de acuerdo a la cantidad de docenas de pianguas, aunque no está relacionado en la gráfica, lo cual se relaciona con el estudio de la covariación y el nivel de coordinación del razonamiento covariacional, en tanto que refieren a los cambios de una variable con relación a los cambios de la otra (ver Figura 57).

Figura 56

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S1T4P2BE1)

b) la misma cantidad de piangua para las medidas de 3,0 a 4,5 cm
de la medida 5,0 a 6,5 por diámetro aumenta 3 docenas. y para
los diámetros 7,0 y 9,0 cm. para 7,0 4 docenas y va en descenso de
1 docena.

Figura 57

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2b, Estudiante 3 (S1T4P2BE3)

b) de 30 a 6.5 sube los fondos (p) y de 7.0 a 9.0 baja drásticamente

Tabla 71

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2c (S1T4P2c)

Situación 1, tarea 4, pregunta 2c (S1T4P2c)		
T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.		
P2c: Determina el dominio y rango de la función.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan de forma acertada los valores que conforman el dominio y rango de la función.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E3, E4, E5
R2	Estudiantes que indican que el dominio son las medidas y el rango las cantidades recolectadas, pero no escribe los valores.	Un estudiante de cinco. E2

A partir de los datos registrados en la Tabla 71, cuatro estudiantes determinan de forma acertada el dominio y rango de la función y escriben cada uno de los valores que corresponden, un estudiante indica que el dominio son las medidas y el rango son las cantidades recolectadas, pero no escribe los valores, sin embargo, deja ver que reconoce que eje corresponde al dominio y que eje corresponde al rango.

De acuerdo con las respuestas registradas por los estudiantes, se puede decir que comprenden la definición de dominio y rango de una función, lo cual es propio del nivel formal de la modelación, ya que relacionan conceptos matemáticos involucrados en modelos de una situación. Además, desde el contenido matemático reconocen los componentes de la función por tramos, específicamente el dominio y rango (ver Figura 58).

Figura 58

Situación 1, tarea 4, pregunta 2c, Estudiante 3(S1T4P2CE3)

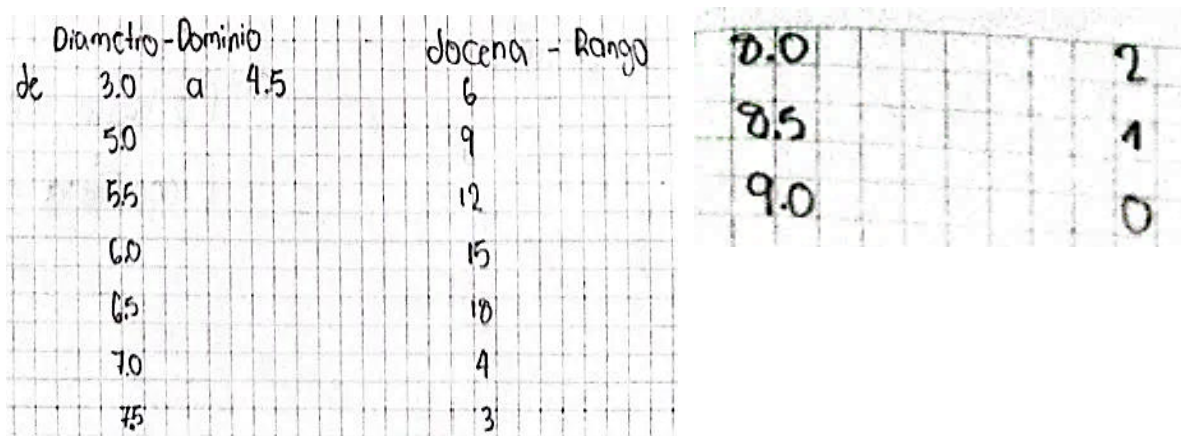


Tabla 72

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2d (S1T4P2d)

Situación 1, tarea 4, pregunta 2d (S1T4P2d)

T4: función por tramos en el control y recolección de pianguas.

P2d: Indica una función que represente la situación.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
-------------------	-------------	-------------------------

R1	Estudiantes que determinan cada una de las expresiones que representan la situación. Para hallar la expresión del tramo dos y tres calcularon la razón de cambio promedio y la ecuación en la recta.	Tres estudiantes de cinco. E1, E3, E4
R2	Estudiantes que no determina la expresión de forma correcta para ningún tramo.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que no determina las expresiones.	Un estudiante de cinco. E5

A partir de las respuestas registradas, es posible decir que la mayoría de los estudiantes se ubican en un nivel referencial de la modelación, en tanto que crean modelos algebraicos que representa una situación particular. Además, se da un avance al nivel general, puesto que a partir de la gráfica el estudiante analiza y reflexiona para la creación de modelos de expresiones algebraicas en situaciones similares. En cuanto al razonamiento covariacional, se puede dar cuenta del nivel de coordinación cuantitativa, ya que algunos estudiantes determinaron la razón de cambio para hallar la expresión que representa cada tramo, como se observa en la Figura 59.

Ahora bien, desde el enfoque matemático, se evidencia la comprensión de las variables dependientes e independientes, así como el sistema de representación algebraico de una función por tramos, ya que reconocen cada uno de los tramos para hallar su expresión.

Figura 59

Situación 1, Tarea 4, Pregunta 2d, Estudiante 4(S1T4P2DE4)

$$\begin{array}{l} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 9 = 6(x - 5.0) \\ y - 9 = 6x - 30 \\ y = 6x - 30 + 9 \\ y = 6x - 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 4 = -2(x - 7.0) \\ y - 4 = -2x + 14 \\ y = -2x + 14 + 4 \\ y = -2x + 18 \end{array}$$

3.3.2 Análisis de resultado de la situación 2

Situación 2. La covariación en el contexto artesanal de recolección de pianguas.

En la comunidad de Miramar, hay personas que realizan el transporte de los piangueros a la zona de los manglares para realizar la faena de recolección de piangua, las tarifas están establecidas de acuerdo a la cantidad de personas que hagan uso del servicio, para grupos con menos de diez (10) personas cada uno deberá dar seis (6) docenas de piangua, y para un grupo de diez (10) a veinte (20) personas, deberán pagar cuatro (4) docenas de pianguas al transportista. Todas las pianguas deben ser con medidas entre 5.0 y 9.0 cm, las cuales tienen un costo de \$2.000.

Tabla 73

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1a (S2T1P1a)

Situación 2, tarea 1, pregunta 1a (S2T1P1a)

T1: comprendiendo la situación.

P1: Si una persona se dedica a realizar el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, determina:

- a.** La cantidad total de docenas adquiridas si transporta el día lunes 6 personas, el martes 9, el miércoles 12, jueves 15 y el viernes 17.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que obtienen la respuesta acertada de la cantidad de docenas adquiridas por el transportista. Escribe procedimiento.	Tres estudiantes de cinco E1, E2, E3, E5
R2	Estudiantes que obtiene la respuesta correcta, pero solo registra el procedimiento para determinar la cantidad total.	Un estudiante de cinco. E5
R3	Estudiante que determina de forma acertada la cantidad total de pianguas recibidas por día, pero no determina la cantidad total recibida. No escribe el procedimiento	Un estudiante de cinco. E4

Tabla 74

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1b (S2T1P1b)

Situación 2, tarea 1, pregunta 1b (S2T1P1b)

T1: comprendiendo la situación.

P1: Si una persona se dedica a realizar el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, determina:

b. El ingreso total adquirido en una semana si trasporta el día lunes 6 personas, el martes 9, el miércoles 12, jueves 15 y el viernes 17.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
--------------------------	--------------------	--------------------------------

R1	Estudiantes que obtiene la respuesta correcta del ingreso total adquirido, realizando un producto entre la cantidad de personas transportadas y la cantidad de docenas a cancelar, luego suma y el total de docenas de pianguas lo multiplica por \$2.000.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiante que obtienen la respuesta acertada multiplicando la cantidad de docenas de pianguas adquiridas cada día por 2.000, luego suma los ingresos diarios para hallar el ingreso total obtenido.	Dos estudiantes de cinco. E2, E3
R3	Estudiante que obtiene la respuesta acertada pero no escribe el procedimiento realizado para determinar dicho valor.	Dos estudiantes de cinco. E4, E5

En relación con los resultados obtenidos en la Tabla 73 y 74, es posible decir que los estudiantes comprenden la situación planteada, ya que resuelven de manera acertada las respuestas apoyadas en sus propias estrategias y conocimiento, lo cual deja ver el desarrollo del nivel situacional de la modelación. Desde el razonamiento covariacional, teniendo en cuenta los procedimientos registrados por los estudiantes en la pregunta S2T1P1a se evidencia un trabajo en el nivel de coordinación, puesto que reconocen el cambio de una variable con los cambios de la otra, ya que al determinar la cantidad de docenas recolectadas por el transportista, reconocen que esta cambia si la cantidad de personas cambia de un intervalo a otro, si las personas transportadas es menor que diez la cantidad a pagar es de seis docenas y si es mayor que diez debe pagar cuatro docenas, esto a su vez permite ver un acercamiento al estudio de la covariación en relación a los cambios de una magnitud e relación con la otra, en este caso la cantidad de

docenas a pagar de acuerdo a la cantidad de personas transportadas, como se puede ver en la Figura 60.

Figura 60

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1a, Estudiante 1 (S2T1P1E1)

1. a) Lunes 6 personas; cada persona debe pagar 6 docenas de piangua. Entonces $6 \times 6 = 36$

* Martes 9 personas, cada persona debe pagar 6 docenas. Entonces $6 \times 9 = 54$

* Miércoles 12 personas - 4 docenas c/u. Entonces $12 \times 4 = 48$

* Jueves 15 per. 4 docenas c/u. $15 \times 4 = 60$

* Viernes 17 per. 4 docenas c/u. $17 \times 4 = 68$

Entonces $36 + 54 + 48 + 60 + 68 = 266$

cantidad de docenas adquiridas en la semana

Tabla 75

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1c (S2t1p1c)

Situación 2, tarea 1, pregunta 1c (S2T1P1c)

T1: comprendiendo la situación.

P1: Si una persona se dedica a realizar el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, determina:

c. Indica cómo calculaste la cantidad de docenas recibidas.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
-------------------	-------------	-------------------------

R1	Estudiantes que indican que calcularon la cantidad total de docenas recibidas, realizando una multiplicación entre la cantidad de pianguas correspondiente por la cantidad de personas.	Tres estudiantes de cinco. E1, E3, E4
R2	Estudiantes que indican que calcularon la cantidad total de docenas realizando una multiplicación entre la cantidad de personas transportadas por la cantidad de docenas que entrega cada uno y sumando el resultado.	Dos estudiantes de cinco. E2, E5

Tabla 76

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 1d (S2t1p1d)

Situación 2, tarea 1, pregunta 1d (S2T1P1d)

T1: comprendiendo la situación.

P1: Si una persona se dedica a realizar el transporte de los piangueros que van a la faena de recolección de pianguas, determina:

d. Indica cómo calculaste el ingreso total obtenido.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que calcularon la cantidad de docenas de pianguas que obtuvo por día, las sumo y luego las multiplico por el valor de la docena (\$2.000)	Dos estudiantes de cinco. E1, E4
R2	Estudiantes que indican que calcularon el ingreso multiplicando la cantidad de docenas obtenidas cada día por	Un estudiante de cinco. E2, E3.

	2.000 y sumo los resultados de cada día.	
		Un estudiante de cinco.
R3	Estudiantes que indican que el ingreso total obtenido lo calcularon multiplicando la cantidad de docenas de pianguas por el valor unitario (226 x2000)	E5

En la Tabla 75 y 76, se observa que la mayoría de los estudiantes argumentan con precisiones los procedimientos realizados para determinar la respuesta acertada a cada pregunta. Además, hicieron buen uso de la información suministrada en el enunciado principal de la situación, esto es un indicio de la identificación por parte de los estudiantes de las relaciones de dependencia presentes en la situación, lo cual corresponde al nivel referencial de la modelación. Además, se evidencia un buen manejo del nivel de coordinación del razonamiento covariacional al reconocer los cambios que ocurren en las magnitudes (cantidad de docenas de piangua, cantidad de personas) al momento de determinar la respuesta.

Tabla 77

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a (S2T1P2a)

Situación 2, tarea 1, pregunta 2a (S2T1P2a)

T1: comprendiendo la situación.

P2: Analiza y responde:

- a. La cantidad de piangueros que se debe transportar para tener un ingreso de \$84.000 pesos en un día.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
--------------------------	--------------------	--------------------------------

R1	Estudiantes que determina de forma correcta la cantidad de piangueros que se debe transportar para obtener un ingreso de \$84.000, registra procedimiento	Cuatro estudiantes de cinco E1, E2, E3, E5
R2	Estudiantes que determina la respuesta correcta, pero no indica el procedimiento realizado para hallar dicho valor.	Un estudiante de cinco E4

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 77, cuatro estudiantes responden de manera acertada y registran procedimiento, un estudiante responde de forma acertada, sin indicar procedimiento.

Tabla 78

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b(S2T1P2b)

Situación 2, tarea 1, pregunta 2b(S2T1P2b)		
T1: comprendiendo la situación.		
P2: Analiza y responde:		
b. La cantidad de piangueros que se debe transportar para tener un ingreso de \$152.000		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que determinan de forma correcta la cantidad de piangueros que se debe transportar para obtener un ingreso de \$152.000. indican procedimiento.	cuatro estudiantes de cinco E1, E2, E3, E5
R2	Estudiantes que determina la respuesta correcta, pero no indica el procedimiento realizado para hallar dicho valor	De los cinco estudiantes E4

En relación a los datos arrojados en la Tabla 77 y 78, se puede ver que de los cinco estudiantes solo uno responde y no registra procedimiento, los demás justifican su respuesta a través de operaciones matemáticas, lo cual deja ver de acuerdo con las evidencias, que los estudiantes emplean diferentes procedimientos para llegar a la respuesta acertada, esto en relación con el nivel situacional de la modelación como se puede ver en la Figura 61 y 62 en tanto que emplean sus propias estrategias para calcular las respuestas.

Figura 61

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a, Estudiante 2 (S2T1P2E2)

a) la cantidad de piangueros que se deben transportar son 7 para obtener un ingreso de 84.000.

$$\frac{84.000}{2000} = 42 \quad \frac{42}{6} = 7$$

Figura 62

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2a, Estudiante 5 (S2T1P2E5)

2.0. para obtener un ingreso de 84.000 debe transportar 7 personas. $(84.000 \div 6) = 14000 \div 2000 = (7)$

Por otro lado, se evidencia desde la covariación y el nivel de coordinación del razonamiento covariacional, que los estudiantes reconocen que cuando cambia la cantidad de personas de un intervalo a otro, cambia la cantidad de docenas a pagar, como se evidencia en las Figuras 63 y 64.

Figura 63

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S2T1P2E1)

2. a.) $84.000 \div 2.000 = 42$ docenas, y $7 \times 6 = 42$
tiene que transportar 7 personas, ya que cada
persona le entrega 6 docenas, lo que le da un
total de 42 docenas por persona, y esto es igual a 84.000
porque cada docena cuesta 2.000

Figura 64

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2b, Estudiante 1 (S2T1P2E1)

b.) $152.000 \div 2.000 = 76$ y $76 \div 4 = 19 = 19 \times 4 = 76$
Tiene que transportar a 19 piangueros, ya que
cada uno debe entregar 4 docenas de piangua.

Tabla 79

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2c(S2T1P2c)

Situación 2, tarea 1, pregunta 2c(S2T1P2c)

T1: comprendiendo la situación.

P2: Analiza y responde:

c. Escribe de qué depende la cantidad de pianguas que recibe el transportista.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que reconoce la relación de dependencia existente entre la cantidad de pianguas que recibe el transportista y la cantidad de personas transportadas.	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

Tabla 80

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2d(S2T1P2d)

Situación 2, tarea 1, pregunta 2d(S2T1P2d)		
T1: comprendiendo la situación.		
P2: Analiza y responde:		
d. Escribe de qué depende la cantidad de dinero que recibe el transportista		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que reconoce que la relación de dependencia existente entre la cantidad de dinero que recibe el transportista y la cantidad cantidad de docenas recolectadas.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E2, E4, E5
R2	Estudiante que no reconoce la relación de dependencia existente entre la cantidad de dinero que recibe el transportista y la cantidad de docenas de pianguas recolectadas.	Un estudiante de cinco. E3

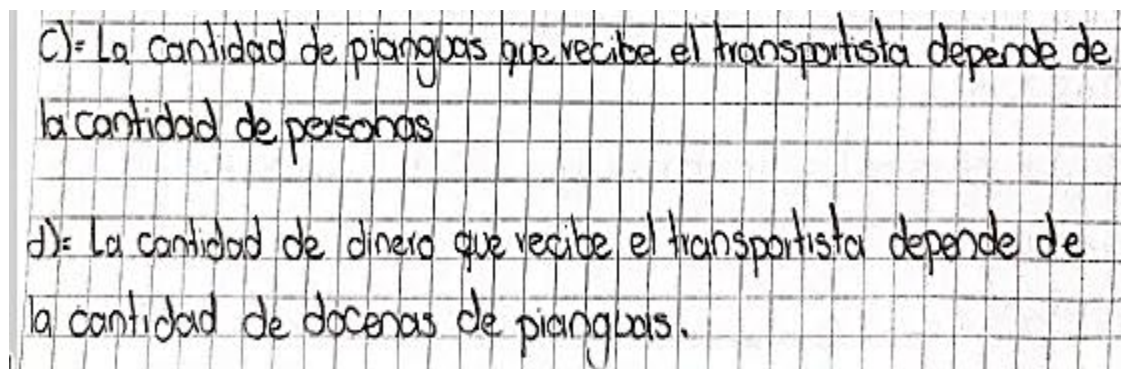
En la Tabla 79 y 80, se observa que la mayoría de los estudiantes reconocen la relación de dependencia entre la cantidad de personas y la cantidad de pianguas que recibe un transportista, solo un estudiante no reconoce la dependencia, ya que menciona que depende de la cantidad de docenas transportadas lo cual no es correcto, ya que todas las docenas de pianguas que transporta no corresponden a la cantidad que va a recibir.

En relación con los resultados, es posible decir desde el estudio de la covariación que, los estudiantes reconocen las relaciones de dependencia existentes entre la cantidad de docenas de pianguas que recibe un transportista y la cantidad de personas transportadas, así como la relación

presente entre la cantidad de dinero y la cantidad de docenas de pianguas recibidas como se puede ver en la Figura 65.

Figura 65

Situación 2, Tarea 1, Pregunta 2c, 2d, Estudiante 4 (S2T1P2E4)



Ahora bien, desde el razonamiento covariacional, reconocen la coordinación del cambio de una variable con los cambios de la otra, en tanto que identifican que cantidad de docenas debe pagar cada persona al transportista según el número de personas que transporte. Por otro lado, en relación con el nivel referencial de la modelación, se observa un indicio en la construcción de modelos que representen la situación, en tanto que, la identificación de las relaciones de dependencias es fundamental para la esquematización de una situación.

En el desarrollo de la plenaria de la tarea 1, los estudiantes manifestaron no presentar dificultades para su desarrollo, ya que es muy similar a la situación 1, tarea 1, lo cual les permitió comprender con mayor facilidad cada una de las preguntas.

Tarea 2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

La siguiente tabla relaciona la cantidad de piangueros que transporta el señor José cada día durante una semana. Completa la tabla.

Tabla 81

Piangüeros Transportados en una Semana

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad de piangueros transportados	7	6	12	12	15	5
Cantidad de docenas						
Ingreso por día						

Tabla 82

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1a (S2T2P1a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 1a (S2T2P1a)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P1: Luego de completar la tabla:

a. Indica cómo calculaste la cantidad de docenas de pianguas recibidas cada día por el transportista.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que completan de forma acertada los datos de la fila cantidad de docenas, realizaron un	Cuatro estudiantes de cinco E1, E2, E4, E5

producto entre la cantidad de
personas por la cantidad de docena
que deben entregar

R2	Estudiantes que completan de forma correcta los datos de la fila cantidad de docenas. No registra procedimiento.	Un estudiante de cinco. E3
-----------	--	-------------------------------

Tabla 83

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1b (S2T2P1b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 1b (S2T2P1b)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P1: Luego de completar la tabla:

b. Indica cómo calculaste el ingreso obtenido por día por el transportista.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que realizaron un producto entre la cantidad de docenas de piangua por el valor de la docena (\$2.000).	Cuatro estudiantes de cinco E1, E2, E4, E5
R2	Estudiantes que indican que calculo los datos dependiendo de las docenas de piangua y ejemplifica.	Un estudiante de cinco E3

En relación con los datos arrojado en la S2T2P1A y la S2T2P1B, es posible decir desde la covariación y el nivel de coordinación del razonamiento covariacional que, los estudiantes coordinan los cambios de una variable con los cambios de la otra, en tanto que reconocen que la

cantidad de docenas a pagar cambia, si cambia la cantidad de personas a transportar de un intervalo a otro, como se puede ver en la Figura 66.

Figura 66

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1a, Estudiante 1 (S2T2P1E1)

Tabla 1. piangueros transportados en una semana.

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Cantidad de piangueros transportados	7	6	12	12	15	5
Cantidad de docenas	$7 \times 6 = 42$	$6 \times 6 = 36$	$12 \times 4 = 48$	$12 \times 4 = 48$	$15 \times 4 = 60$	$5 \times 6 = 30$
Ingreso por día	$42 \times 2000 = 84000$	$36 \times 2000 = 72000$	$48 \times 2000 = 96000$	$48 \times 2000 = 96000$	$60 \times 2000 = 120000$	$30 \times 2000 = 60000$

En la plenaria un estudiante argumenta que lo que hizo fue multiplicar la cantidad de personas por las docenas correspondiente a pagar, bien sea 4 o 6, luego ese resultado lo multiplique por \$2.000.

Tabla 84

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 1c (S2T2P1c)

Situación 2, tarea 2, pregunta 1c (S2T2P1c)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P1: Luego de completar la tabla:

- Indica la cantidad que se mantiene constante y la cantidad que varía al calcular los datos faltantes

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que se mantiene constante el precio (\$2.000), la cantidad de docenas que recibe si transporta menos de 10 personas o de 10 a 20 personas. Varían la cantidad de personas, la cantidad de piangua.	Dos estudiantes de cinco. E1, E5
R2	Estudiantes que indican que se mantiene constante el valor de la docena de piangua y la cantidad que recibe en cada intervalo de personas. Varia la cantidad de personas transportadas por día.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que no indican lo constante y lo variable de forma acertada.	Un estudiante de cinco E3
R4	Estudiante que indica que se mantiene constante el precio por docena (2.000) y las 6y 4 docenas. Varia la cantidad de piangueros transportados, la cantidad de docenas por días y su ingreso por día.	Un estudiante de cinco E4

En relación con los datos de la Tabla 84, desde el nivel referencial de la modelación, se evidencia un acercamiento a la esquematización de la situación, ya que la identificación de lo constante y lo variable es fundamental para la construcción de modelos funcionales. Ahora bien, en cuanto al razonamiento covariacional desde el nivel de coordinación, se corrobora una vez más la comprensión de los estudiantes en relación a los cambios de una variable con los cambios de la otra, para este caso cantidad de personas y cantidad de docenas a pagar. Por otro lado, en cuanto al contenido matemático se da un reconocimiento de las variables dependientes e independientes.

Tabla 85

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2a (S2T2P2a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 2a (S2T2P2a)		
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.		
P2: Analiza y responde		
a. Explica por qué si el día martes don José transporto seis (6) personas y el día jueves doce (12) personas no obtuvo el doble de docenas que el día martes.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que don José no obtuvo el doble de pianguas el día jueves porque cuando lleva 6 personas recolecta 6 docenas por cada una, y si lleva 10 en adelante recolecta 4 docenas por personas, por eso el día martes reunió 36 y el jueves 48, por eso nunca podría duplicar la cantidad.	Cuatro estudiantes de cinco E1, E4, E2, E5
R2	Estudiante que indican que no obtuvo el doble porque entre menos personas transporte más cantidad de docenas lleva.	Un estudiante de cinco. E3

Tabla 86

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2b (S2T2P2b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 2b (S2T2P2b)	
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.	
P2: Analiza y responde	
b. explica por qué el día viernes no recibió el triple de docenas que el día sábado.	

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que don José no obtuvo el triple porque el día viernes llevó 15 personas y cada una entregaba 4 docenas, siendo estas 60, mientras que el día sábado llevo a 5 personas y cada una entrega 6 docenas para un total de 30 docenas, por eso no alcanzo para triplicar.	De los cinco estudiantes, E1, E2, E4
R2	Estudiantes que indica que don José no obtuvo el triple el día viernes porque llevo un número mayor de personas.	De los cinco estudiantes, uno E4.
R3	Estudiantes que indica que don José no obtuvo el triple el día viernes porque llevo más cantidad de personas, por tanto, cobra menos cantidad de docenas.	De los cinco estudiantes, uno E5.

En relación a los datos registrados en la Tabla 85 y 86, se puede observar que la mayoría de los estudiantes argumentan de forma coherente y acertada, dejando en evidencia la comprensión alrededor de la situación planteada, en tanto que reconocen, para las docenas de pianguas establecidas, que no es posible duplicar ni triplicar, puesto que de acuerdo al grupo de personas se pagan cantidades diferentes en docenas de pianguas, como se puede ver en la Figura 67.

Figura 67

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 2a, Estudiante 4(S2T2P2E4)

a) = Por que el día martes se recibe una cantidad de docenas (6) diferente al día Jueves (4)	
* 6 → Cantidad de personas	12 → Cantidad de Personas
x 6 → docenas por dejar	x 4 → docenas por dejar
36 → Cantidad de docenas en total	48 → Cantidad de docenas en total

En este sentido, desde el nivel de coordinación del razonamiento covariacional, se observa una conciencia por parte de los estudiantes en relación a los cambios de una variable a partir de los cambios de la otra. Por otro lado, en el nivel situacional de la modelación se pueden ver los argumentos de los estudiantes apoyados en sus estrategias de solución, los cuales dan paso al nivel referencial para la creación de modelos que surgen a partir del análisis de la situación permitiendo la esquematización de la misma.

Tabla 87

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3a (S2T2P3a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 3a (S2T2P3a)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P3: Si x representa la cantidad de docenas de pianguas que recibe un transportista por un determinado número de personas que transporta, determina:

- Una expresión que permita calcular la cantidad de docenas obtenidas al transporta de una (1) nueve (9) personas.

Tipo de respuesta

Descripción

**Cantidad de
estudiantes**

R1	Estudiantes que indican una expresión de la forma $(x)(y1)$, x es la cantidad de docenas que recibe por el transportista (6), $y1$ cantidad de personas (1 a 9) $1 \leq x \leq 9$	Un estudiante de cinco E1
R2	Estudiantes que indican una expresión de la forma $1 \leq x \leq 10 = 6x$, $(6)(4) = 24$	Un estudiante de cinco E2
R3	Estudiantes que indican una expresión de la forma $y = 6x$, x es personas.	Un estudiante de cinco E3
R4	Estudiantes que indican una expresión de la forma $f(x) = 6x$ si se transporta de 1 a 9 personas.	Un estudiante de cinco E4
R5	Estudiante que indica una expresión de la forma $y = (6)(N)$, donde 6 es la cantidad de docenas que recibe por personas, N es la cantidad de personas que lleva el señor de 1 a 9, Y es el resultado que arroja $(6 \times N)$	Un estudiante de cinco E5

Tabla 88

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3b (S2T2P3b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 3b (S2T2P3b)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P3: Si x representa la cantidad de docenas de pianguas que recibe un transportista por un determinado número de personas que transporta, determina:

- b. Una expresión que permita calcular la cantidad de docenas obtenidas al transporta grupos de 10 a 20 personas

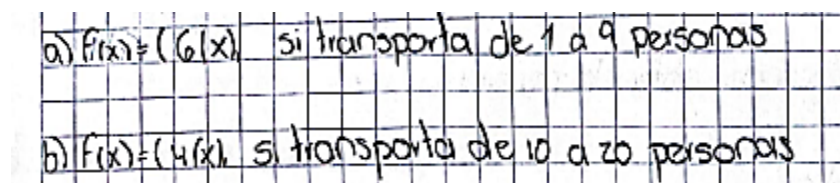
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican una expresión de la forma $(x)(y2)$, x es la cantidad de docenas que recibe el	Un estudiante de cinco. E1

	transportista (4), y1 cantidad de personas (10 a 20) $10 \leq x \leq 20$	
R2	Estudiantes que indican una expresión de la forma $10 \leq x \leq 20 = 4x$, $(4)(20) = 80$	Un estudiante de cinco E2
R3	Estudiantes que indican una expresión de la forma $y = 4x$, x es personas.	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indican una expresión de la forma $f(x) = 4x$ si se transporta de 10 a 20 personas.	Un estudiante de cinco E4
R5	Estudiante que indica una expresión de la forma $x = (4)(N)$, donde 4 es la cantidad de docenas que recibe por personas, N es la cantidad de personas que lleva el señor entre 10 a 20, x es el resultado.	Un estudiante de cinco. E5

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 87 y 88, desde el estudio de la covariación, es posible decir que los estudiantes reconocen las relaciones de dependencia existente entre la cantidad de docenas que recibe un transportista, la cantidad de personas transportadas y la cantidad de docenas a pagar, esto a su vez deja ver el alcance del nivel de coordinación del razonamiento covariacional y de forma implícita una idea de la dirección del cambio de una variable con los cambios de la otra, en tanto que reconocen que la cantidad de docenas cambia según la cantidad de personas a transportar, además comprenden que este cambio aumenta o disminuye de acuerdo a las personas transportadas, como se observa en la Figura 68.

Figura 68

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 3a, 3b, Estudiante 4(S2T2P3E4)



Ahora bien, esto da cuenta de la creación de modelos por parte de los estudiantes en una situación particular dada, lo cual es propio del nivel referencial de la modelación. Por otro lado, en relación al contenido matemático, se evidencian componentes de la función, como variable independiente, variable dependiente, así como una representación algebraica.

Tabla 89

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4a (S2T2P4a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 4a (S2T2P4a)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P4: Teniendo en cuenta la expresión obtenida en punto tres, literal a y b, calcule:

- a. La cantidad total de docenas obtenidas por un transportista cuando transporta el día lunes 4 piangueros, el martes 5, el miércoles 7 y el jueves 9.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calculan de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista cada día, haciendo uso adecuado de la expresión obtenida en el punto tres, literal a. No indica la cantidad total.	Dos estudiantes de cinco. E1, E4
R2	Estudiantes que calculan de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista, primero suma la cantidad de piangueros de cada día y el resultado total lo multiplica por la cantidad de	Un estudiante de cinco E2

	docenas que deben pagar (6), haciendo uso de la expresión obtenida en el punto tres, literal a.	
R3	Estudiante que calcula de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista cada día, haciendo uso de la expresión obtenida en el punto tres, literal a, luego suma los resultados para obtener la cantidad total.	Dos estudiantes de cinco. E3, E5

Tabla 90

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4b (S2T2P4b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 4b (S2T2P4b)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P4: Teniendo en cuenta la expresión obtenida en punto tres, literal a y b, calcule:

- b. La cantidad total de docenas obtenidas por un transportista cuando transporta el
día lunes 11 piangueros, el martes 12, el miércoles 14 y el jueves 17.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calculan de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista cada día, haciendo uso adecuado de la expresión obtenida en el punto tres, literal b. No indica la cantidad total.	Dos estudiantes de cinco. E1, E4
R2	Estudiantes que calculan de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista, primero suma la cantidad de piangueros de cada día y el resultado total lo multiplica por la	Dos estudiantes de cinco E2, E5

R3

cantidad de docenas que deben pagar (4), haciendo uso de la expresión obtenida en el punto tres, literal b. Indica cantidad total obtenida.

Estudiante que calculan de forma acertada la cantidad de docenas obtenidas por un transportista cada día, haciendo uso de la expresión obtenida en el punto tres, literal b, luego suma los resultados para obtener la cantidad total.

Un estudiante de cinco E3

De acuerdo con los resultados registrado en la Tabla 89 y 90, se puede decir que los estudiantes hacen buen uso de los modelos creados alrededor de una situación particular, para este caso el transporte de piangueros a la faena de recolección de pianguas, lo cual es propio del nivel referencial de la modelación (ver Figura 69)

Figura 69

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 4a, 4b, Estudiante 4 (S2T2P4E4)

$4 = 6 \times 4 = 24$	docenas
$4 = 6 \times 5 = 30$	docenas
$4 = 6 \times 7 = 42$	docenas
$4 = 6 \times 9 = 54$	docenas
<u>150</u>	docenas

$4 = 4 \times 11 = 44$	docenas
$4 = 4 \times 12 = 48$	docenas
$4 = 4 \times 14 = 56$	docenas
$4 = 4 \times 17 = 68$	docenas
<u>216</u>	docenas

Además, el uso de las expresiones permite el reconocimiento de la variable independiente y la variable dependiente, aspectos de la función. Así mismo, se ve también reflejada la covariación y el nivel de coordinación del razonamiento covariacional, en tanto que, de acuerdo a la cantidad de personas transportadas, así mismo es la cantidad de docenas a pagar, y por

consiguiente, deben emplear la expresión que corresponda, reconociendo los cambios que surgen en la cantidad de docenas a pagar, de acuerdo a la cantidad de personas transportadas.

Tabla 91

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 5a (S2T2P5a)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P5. Don José después de realizar el transporte de muchos piangüeros, ha determinado que para calcular la cantidad de docenas de pianguas que recibe por cada grupo que transporta lo puede hacer de la siguiente manera: $6x$ para cuando transporta de uno (1) a nueve (9) piangüeros y $4x$ para cuando transporta de diez (10) a veinte (20) piangüeros. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & \text{si } 1 \leq x \leq 9, \quad x \in \mathbb{N} \\ 4x, & \text{si } 10 \leq x \leq 20, \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

P5a: Escribe la validez de las expresiones que ha determinado don José.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que la expresión que formula don José si es válida porque si la cantidad de personas va de 1 a 9 le toca pagar 6 docenas de pianguas, y si la cantidad de personas que transporta va de 10 a 20 le toca pagar 4 docenas.	Dos estudiantes de cinco. E1, E4
R2	Estudiante que indica que, si tiene validez, ya que la variable x toma los valores de las personas transportadas.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que indica que le parece válida la expresión matemática, ya que esta correcto el procedimiento de acuerdo a las tarifas establecidas.	Un estudiante de cinco. E3

R4	Estudiantes que indica que la expresión que formula don José si es válida para calcular el ingreso de docenas, no justifica.	Un estudiante de cinco. E5
-----------	--	-------------------------------

A partir de las respuestas registradas por los estudiantes en S2T2P5a, se puede decir que se da un acercamiento a la construcción de funciones por tramos a través de una representación algebraica, desde el contexto de transporte a la faena de recolección de pianguas. Del mismo modo, hay un trabajo en el nivel general de la modelación, en tanto que reflexionan alrededor de un modelo creado en un contexto particular, lo cual es de gran ayuda para la creación de modelos que permitan resolver situaciones similares.

Tabla 92

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 5a (S2T2P5b)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P5b: Indica que valores puede tomar la variable x .

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que x toma los valores de 1 a 20	Tres estudiantes de cinco. E1, E4, E5
R2	Estudiante que indica que x toma los valores de la cantidad de personas que transporta las cuales pueden ser de 1 a 10 o de 11 a 20 según el intervalo.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que indica que para $6x = 1$ a 9, para $4x = 10$ a 20	Un estudiante de cinco. E3

Tabla 93

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5a (S2T2P5c)

Situación 2, tarea 2, pregunta 5a (S2T2P5c)		
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.		
P5c: Indica que valores puede tomar $f(x)$ o la variable y .		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica que la variable y para el primer tramo toma los valores de (6,12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54) para el tramo dos (40, 44, 48, 52, 56,60, 64, 68, 72, 76, 80)	De los cinco estudiantes, tres E1, E3, E4.
R2	Estudiante que indica los valores que toma la variable y (6,12, 18, 24, 30, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80)	De los cinco estudiantes, uno E2.
R3	Estudiante que no indica de forma acertada los valores que toma la variable y .	De los cinco estudiantes, uno E5.

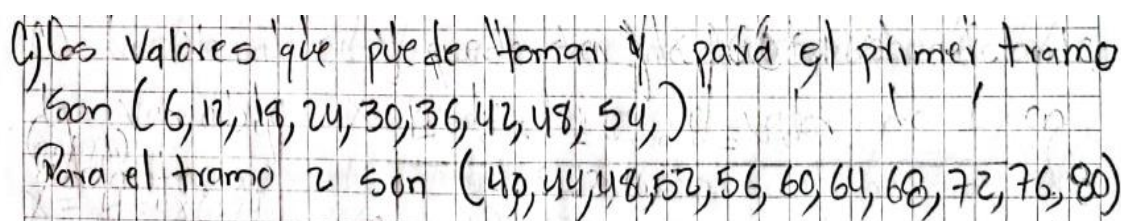
En el desarrollo de la plenaria un estudiante argumenta que x va tomando los valores de la cantidad de personas transportadas, es decir, si transporta 1,2,3,4,5 personas y así sucesivamente hasta llegar a 20, ese es el valor de x , y va tomando los valores según los valores de x , por ejemplo, cuando transporta 4 personas, entonces y vale 24, ya que cada persona paga 6 docenas.

En relación con los resultados de la S2T2P5 obtenidas de los estudiantes en la pregunta 5, literal b y c, es posible decir que existe un acercamiento al contenido matemático en relación al

dominio y rango de una función desde una representación algebraica, algunos estudiantes incluso los definen por tramos, lo cual parece indicar que reconocen que aunque es una sola función, las expresiones toman valores diferentes en el eje x y en el eje y , esto deja ver que hay comprensión de los dominios y rangos para funciones con diferentes expresiones, como ocurre en la función por tramos, como se puede observar en la Figura 70.

Figura 70

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 5c, Estudiante 1(S2T2P5E1)



Los valores que puede tomar y para el primer tramo son (6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54,)

Para el tramo 2 son (40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80)

Esto a su vez, permite una reflexión desde el nivel general de la modelación, ya que promueve la comprensión de los componentes de una función para la creación de nuevos modelos de funciones. Ahora bien, cabe mencionar que también se da la presencia del nivel de coordinación del razonamiento covariacional y de la covariación, ya que los estudiantes reconocen los valores que toma la variable y , de acuerdo a los valores que va tomando la variable x .

Tabla 94

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6a (S2T2P6a)

Situación 2, tarea 2, pregunta 6a (S2T2P6a)

T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.

P6: Teniendo en cuenta la función anterior:

- a. Realiza una representación en el plano cartesiano.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representan de forma acertada la función en el plano cartesiano.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

De acuerdo con la Tabla 94, los estudiantes representaron en el plano cartesiano la función dada, es necesario mencionar que las representaciones tienen algunas inconsistencias, sin embargo, se aprecia el comportamiento de la misma

Tabla 95

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6b (S2T2P6b)

Situación 2, tarea 2, pregunta 6b (S2T2P6b)		
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.		
P6: Teniendo en cuenta la función anterior:		
b. Escribe una conclusión con relación a la gráfica.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que escriben, según la gráfica entre más personas transporte más cantidad de pianguas recolecta. Por otro lado, se puede ver que en algún punto pueden coincidir, ya que si se transporta 8 personas recolecta 48 docenas, al igual que si transporta 12 personas, en otro caso se ve que cuando transporta 8 personas gana más que si transporta 10	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que escriben, teniendo en cuenta la gráfica entre más personas lleve más docenas de piangua recibe.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que escriben, que en 6x9, gana más que hasta 4x13	Un estudiante de cinco. E3

R4	Estudiantes que escriben, el transportista le va mejor llevando 6(7) a 6(9) y de 4(14) a 4(20)	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiantes que escriben, tanto las personas como las docenas son cantidades variantes, también cuando lleva 8 y 12 recibe la misma cantidad de docenas.	Un estudiante de cinco. E5

A partir de los datos registrados en la Tabla 95, se puede observar que cada uno de los participantes escriben una conclusión en relación a la representación gráfica que realizaron, donde se evidencia que una de las relaciones que establecen es que, a mayor cantidad de personas, mayor cantidad de docenas recibe el transportista. Además, algunos estudiantes describen los puntos donde coinciden ambas expresiones en la gráfica, también realizan comparaciones entre una gráfica y otra para describir en que punto gana mayor o menor cantidad de docenas de pianguas, en la plenaria un estudiante indica que en la gráfica se observa que cuando el transportista lleva 9 personas, gana más que cuando transporta 13 personas.

En relacion con la informacion registrada en las Tablas 94 y 95, se puede decir que los estudiantes tienen facilidad para crear modelos a partir de un modelo dado, ya que, dado el registro algebraico de una función construyeron la representación gráfica de la misma, por tanto, se ubican en un nivel referencial de la modelación. Por otro lado, desde el razonamiento covariacional, se evidencia un trabajo desde el nivel de coordinación y el nivel de dirección, puesto que los estudiantes reconocen como cambia la cantidad de docenas de pianguas si el transportista lleva mayor o menor cantidad de personas, en este mismo sentido reconocen si aumenta, disminuye o se mantiene igual la cantidad de docenas con respecto a la cantidad de personas transportadas como parte de nivel de dirección (ver Figura 71). Ahora bien, en cuanto

al contenido matemático se observa que, los estudiantes realizan representaciones graficas de función por tramos pese a inconsistencia en relación a la designación de los ejes (ver Figura 72).

Figura 71

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6b, Estudiante 1(S2T2P6E1)

b.) Según la grafica entre mas personas transporte mas cantidad de pianguas recolecta, por otro lado, se puede ver que en algun punto puede coincidir ya que si transporta 8 personas recolecta 48 docenas a igual que si transporta 12 personas. En otro caso se ve que cuando transporta 8 personas gana mas que si transporta 10.

Figura 72

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6a, Estudiante 3(S2T2P6E3)

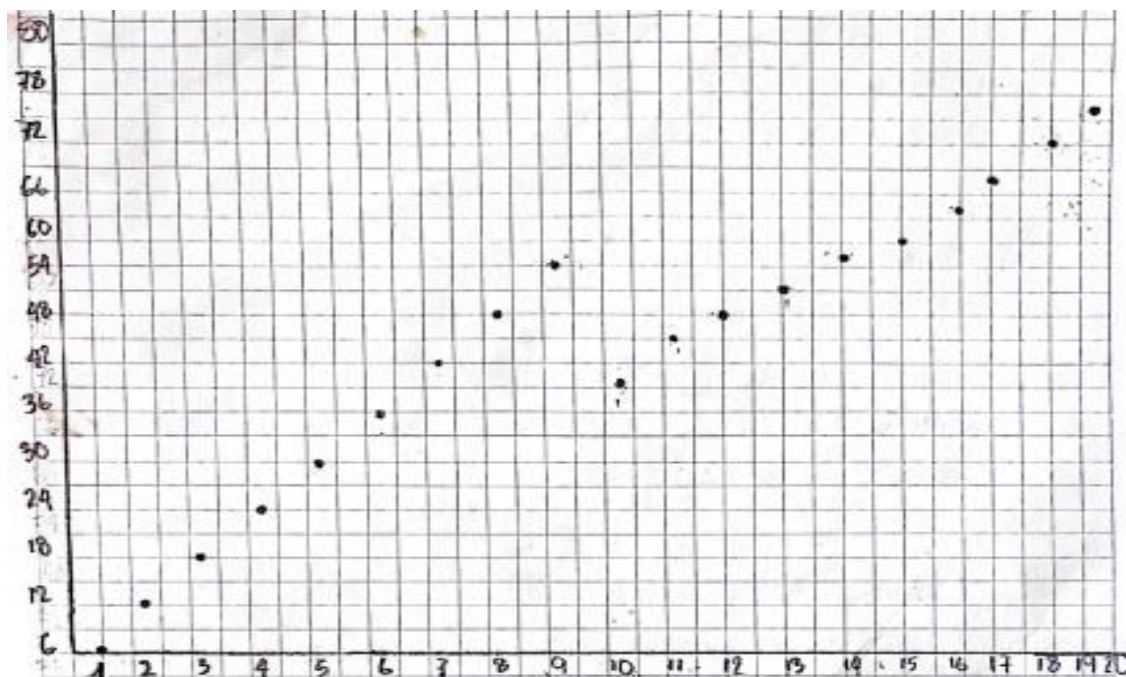


Tabla 96

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6c (S2T2P6c)

Situación 2, tarea 2, pregunta 6c (S2T2P6c)		
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.		
P6: Teniendo en cuenta la función anterior:		
C. indica si es pertinente unir los puntos de la gráfica, por qué.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican que no es pertinente unir los puntos porque la cantidad de docenas de pianguas que se obtiene es independiente y fácilmente la cantidad de pianguas obtenidas.	Un estudiante de cinco. E1,
R2	Estudiantes que indican que no porque cada valor es independiente.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que indican que no, porque no hay necesidad de ver en qué punto a que punto aumenta.	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indican que no es pertinente unir los puntos porque los números son exactos.	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiantes que indican que no es pertinente unir los puntos porque son cantidades diferentes y son cantidades exactas.	Un estudiante de cinco. E5

De acuerdo información registrada en la Tabla 96, solo dos estudiantes reconocen que al ser exactos los valores no es necesario unirlos, lo cual deja ver una idea de continuidad numérica,

los demás participantes parecen no tenerlo claro. En este sentido, desde el nivel general se evidencia una falencia en relación a este tipo de reflexiones a partir de modelos dados.

Tabla 97

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 7 (S2T2P7)

Situación 2, tarea 2, pregunta 7 (S2T2P7)		
T2: Comprendiendo las cantidades en registros tabulares.		
P7: Utiliza la expresión de don José para calcular la cantidad de docenas obtenidas si transporta el lunes 7 personas, el martes 12, el miércoles 15 y el viernes 5. Luego, calcula la cantidad total de dinero adquirido.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que hacen uso de la expresión y calcula de forma acertada la cantidad de dinero obtenido cada día de acuerdo a la cantidad de personas, luego suma los ingresos de cada día para determina el dinero total.	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

A partir de los datos registrados en la Tabla 97, se puede observar que los cinco estudiantes determinaron de forma acertada la cantidad docenas obtenidas haciendo uso de la formula dada, además determinaron la cantidad total de dinero,

En este sentido, es posible decir que la mayoría de los estudiantes hacen buen uso de modelos creados a partir del contexto de recolección de pianguas, específicamente el transporte, en tanto que reconocen la expresión algebraica a utilizar de la función para determinar la cantidad de docenas de pianguas recolectadas según la cantidad de personas transportadas (ver Figura 73) , esto evidencia un trabajo desde el nivel referencial de la modelación en cuanto al uso

de modelos, pero a su vez, es un paso al nivel general, puesto que permite la reflexión a partir de un modelo dado, lo cual facilita la creación de nuevos modelos para la solución de situaciones similares.

Figura 73

Situación 2, Tarea 2, Pregunta 6c, Estudiante 3(S2T2P6E3)

The image shows two columns of handwritten work on grid paper. The left column contains two piecewise functions and their corresponding calculations. The first function is defined for $1 \leq x \leq 9$ with a constant value of 6, and the calculation is $6 \times 7 = 42$ followed by $42 \times 2,000 = 84,000$. The second function is defined for $10 \leq x \leq 20$ with a constant value of 4, and the calculation is $4 \times 12 = 48$ followed by $48 \times 2,000 = 96,000$. The right column contains two similar piecewise functions and calculations. The first function is defined for $1 \leq x \leq 9$ with a constant value of 6, and the calculation is $6 \times 5 = 30$ followed by $30 \times 2,000 = 60,000$. The second function is defined for $10 \leq x \leq 20$ with a constant value of 4, and the calculation is $4 \times 15 = 60$ followed by $60 \times 2,000 = 120,000$.

Tarea 3. funciones por tramos en diferentes contextos.

1. El precio de una llamada a una línea telefónica fija nacional se descompone en dos conceptos: el primero es el precio fijo y el otro es el costo de la duración de la llamada en minutos. El costo fijo de la llamada es de \$840 y el costo de un minuto de llamada es de \$210 el minuto durante los primeros 60 minutos y de \$2.100 minuto a partir del minuto 60.

Tabla 98

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1a (S2T3P1a)

Situación 2, tarea 3, pregunta 1a (S2T3P1a)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P1. El precio de una llamada a una línea telefónica fija nacional se descompone en dos conceptos: el primero es el precio fijo y el otro es el costo de la duración de la llamada en minutos. El costo fijo de la llamada es de \$840 y el costo de un minuto de llamada es de \$210 el minuto durante los primeros 60 minutos y de \$2.100 minuto a partir del minuto 60.

P1a: Indica la función que representa el costo total de una llamada.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican una función para los primeros 60 minutos de la forma: $Cf + Cm \times N$ Para el costo del minuto a partir de 60 minutos define una función de la forma: $Cf + (Cm \times N) + (Cm1 \times N1)$ y explica lo que representa cada variable.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que determinan una expresión de la forma: $840 + 210x, 0 < x \leq 60$ $13.440 + 2100x, 60 < x$	Dos estudiantes de cinco. E2, E4
R3	Estudiantes que determinan una expresión de la forma: $f(x) = 840 + 210x, x \leq 60$ $f(x) = 840 + 210x + 2100(x - 60), x > 60$	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que determinan una expresión de la forma: $x = (m210 + 840)$ para los minutos de 0 a 60 $x = (m210) + 840 + (m2100)$	Un estudiante de cinco. E5

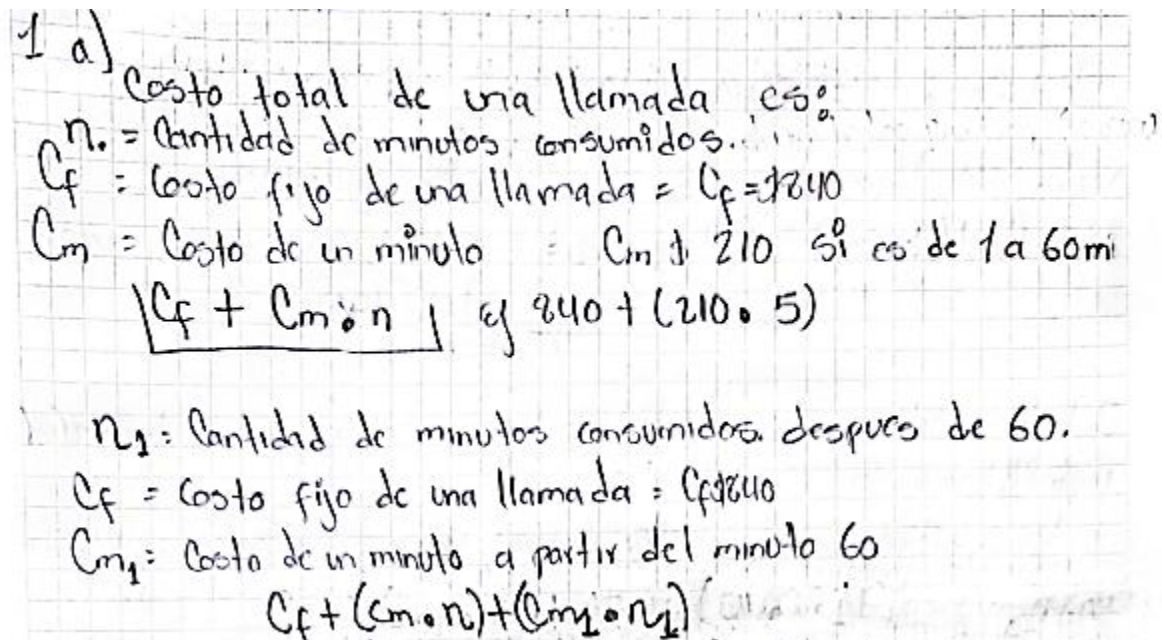
De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 98, cada uno de los estudiantes escribió una expresión para representar el costo total de una llamada cuando es menor o igual a 60 minutos y el costo total de una llamada cuando esta supera los 60 minutos. Es importante mencionar que, los estudiantes indicaron que significan cada una de las variable o datos que componen la expresión,

En relación con las respuestas obtenidas de los estudiantes en a la pregunta S2T3P1A, es posible decir apoyado en el nivel referencial de la modelación que la mayoría de los estudiantes

se les facilita modelar una situación de manera algebraica, pese a que establecieron las expresiones por separados y no la consideraron como parte de una sola función, se puede notar que comprenden que existe la necesidad de representar la situación en diferentes expresiones algebraicas, en tanto que establecieron una expresión para cada caso, como se puede ver en la Figura 74.

Figura 74

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1a, Estudiante 1(S2T3P1E1)



1 a) Costo total de una llamada es:

n = Cantidad de minutos consumidos.

C_f = Costo fijo de una llamada = $C_f = 840$

C_m = Costo de un minuto : $C_m = 210$ si es de 1 a 60 min

$C_f + C_m \cdot n$ ej $840 + (210 \cdot 5)$

2 n_1 = Cantidad de minutos consumidos después de 60.

C_f = Costo fijo de una llamada = $C_f = 840$

C_{m1} = Costo de un minuto a partir del minuto 60

$C_f + (C_m \cdot n) + (C_{m1} \cdot n_1)$

Esto deja ver que, existe una comprensión desde el estudio de la covariación, donde reconocen las variables involucradas y los cambios que ocurren en ellas, puesto que identifican que, si la llamada supera los 60 minutos, entonces cambia el costo de la llamada, siendo esto también parte del nivel de coordinación del razonamiento covariacional. Ahora bien, los estudiantes identifican las variables que componen la situación y la representan mediante un

sistema algebraico, lo cual es propio del contenido matemático, para este caso la representación de una función por tramos.

En el desarrollo de la plenaria algunos estudiantes manifiestan que en principio presentaron un poco de dificultad para determinar la expresión, pero luego analizaron la situación desde un ejemplo, es decir si yo hablo los primeros 60 y luego 2 o 3 minutos más como tendría que pagar, eso ayudo un poco a organizar la idea y crear la expresión.

Tabla 99

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b (S2T3P1b)

Situación 2, tarea 3, pregunta 1b (S2T3P1b)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P1b: Representa la función en el plano cartesiano		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que representan la función en el plano cartesiano trazando una línea para cada expresión, se evidencia el comportamiento, pero establece los extremos.	Cuatro estudiantes de cinco. E1, E5, E4
R2	Estudiante que representa la función en el plano cartesiano a través de puntos, se evidencia el comportamiento, pero no unifica los puntos	Un estudiante de cinco. E4
R3	Estudiantes que no representan de forma clara la función en el plano cartesiano, ya que no se evidencia el comportamiento	Dos estudiantes de cinco. E2, E3

En la Tabla 99, podemos ver que la mayor parte de los estudiantes representa la función que construyeron en pregunta 1, literal a, en el plano cartesiano, pese a las inconsistencias relacionadas con la continuidad de la misma y la designación de los ejes, se logra evidenciar el comportamiento de la gráfica.

Figura 75

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b, Estudiante 1(S2T3P1E1)

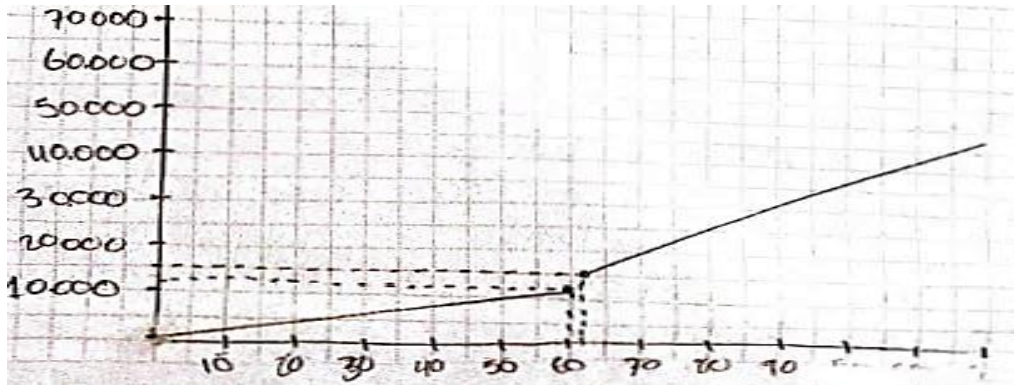
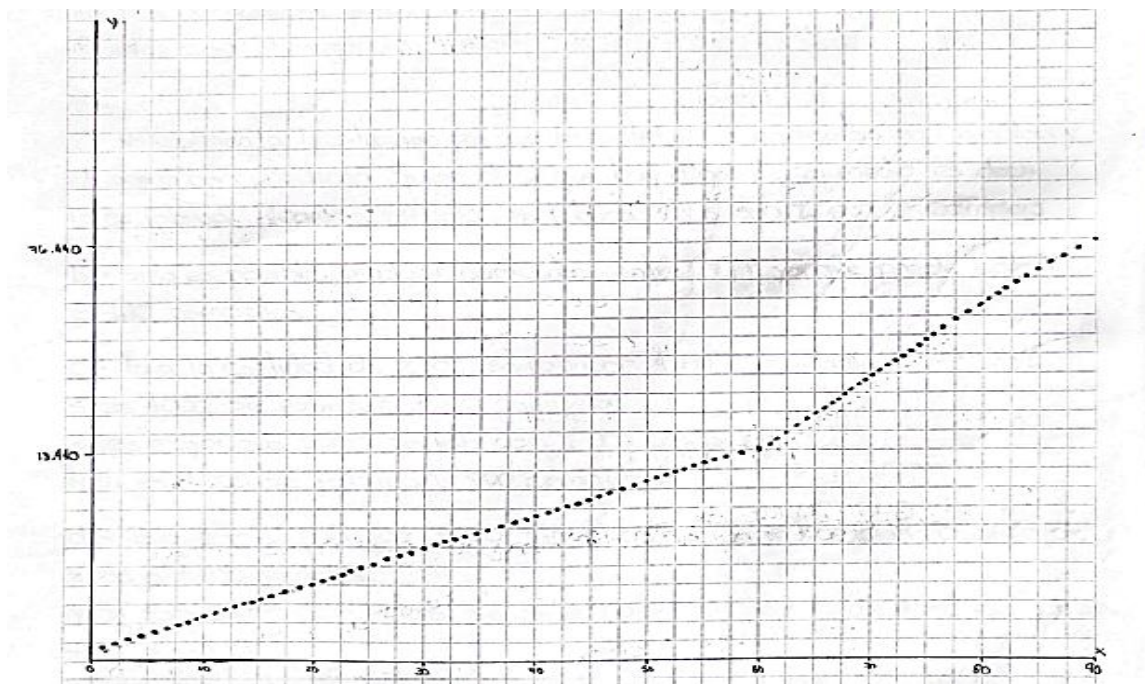


Figura 76

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1b, Estudiante 4(S2T3P1E4)



En relación con la Figura 74 y 75, un estudiante traza líneas rectas y el otro traza puntos, pese a que se observa el comportamiento de la función parece existir una conciencia de la representación gráfica de funciones con más de una expresión, es importante mencionar que, aun

no se alcanza una comprensión de la continuidad en el plano cartesiano en determinadas situaciones, puesto que no reconocen que al tratarse de la magnitud tiempo y de acuerdo a la situación planteada, esta toma valores en todo el eje x , en este mismo sentido, en ninguna de las dos representaciones se definen los extremos de las expresiones, en tanto que no establecen en qué punto es abierto o cerrado. Sin embargo, se debe resaltar que algunos estudiantes representan la situación dada a través de un modelo gráfico, lo cual corresponde a un trabajo desde el nivel referencial de la modelación. Además, comprenden la relación de dependencia existente, puesto que reconocen los valores que va tomando y de acuerdo a los cambios en x , en este mismo sentido, es posible decidir que hay una conciencia implícita de la dirección del cambio.

Ahora bien, desde el contenido matemático, función por tramos, los estudiantes tienen un acercamiento a la representación gráfica de la misma, por tanto, reconocen la variable independiente y la variable dependiente.

Tabla 100

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1c (S2T3P1c)

Situación 2, tarea 3, pregunta 1c (S2T3P1c)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P1c: Indica si esta función representa una función por tramos y por qué.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
--------------------------	--------------------	--------------------------------

R1	Estudiantes que indica, si representa una función por tramos porque muestra dos comportamientos de 1 a 60 y de 61 en adelante.	De los cinco estudiantes, E1,
R2	Estudiante que indica, si es una función por tramos porque tiene más de una expresión	De los cinco estudiantes, E2
R3	Estudiante que indica, si es una función por tramos porque tiene dos funciones y para que sea una función por tramos se requiere de eso. También es porque al graficarla tiene comportamientos diferentes.	De los cinco estudiantes, E3
R4	Estudiante que indica, si es función por tramos, ya que se necesitan dos funciones para poder calcular los valores, además en el plano observamos que en el primer tramo va en un crecimiento normal y luego en el segundo sube de una manera más inclinada, entonces no tiene crecimiento uniforme.	De los cinco estudiantes, E4
R5	Estudiante que indica, si representa una función por tramos porque los datos son diferentes respecto a la tarifa de los precios según la cantidad de minutos utilizados.	De los cinco estudiantes, E5

En relación a las respuestas registradas en la Tabla 100, los estudiantes han hecho una primera aproximación a las características de una función por tramos. De acuerdo a lo argumentado, se puede ver que existe una comprensión de lo que es una función por tramos.

En este sentido, desde el contenido matemático se da un acercamiento al concepto de función por tramos (ver Figura 77). Por otro lado, se evidencia el nivel general de la modelación en tanto que reflexionan a partir del modelo dado, lo cual facilita la creación de nuevos modelos en situaciones similares, a su vez, se dan los primeros acercamientos al nivel formal, en relación al concepto de función por tramos.

Figura 77

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1c, Estudiante 2(S2T3P1E2)

c) Si, por que tiene más de una expresión.

Tabla 101

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1d (S2T3P1d)

Situación 2, tarea 3, pregunta 1d (S2T3P1d)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P1b: Calcula el precio de una llamada de 20 minutos y el de una llamada de 75 minutos.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que calcula de forma acertada el precio de una llamada de 20 minutos y el precio de una llamada de 75 minutos, haciendo uso de la función encontrada en el punto 1 literal a.	Cinco estudiantes de cinco. E1, E2, E3, E4, E5

En la Tabla 101, se puede ver que los estudiantes hacen uso de los modelos algebraicos que crearon en la pregunta 1, literal a, para determinar el costo de una llamada de 20 minutos y una de 75 minutos. Esto corrobora el uso de modelos por parte de los estudiantes, lo cual es propio del nivel referencial de la modelación, como se puede observar en la Figura 78.

Figura 78

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1d, Estudiante 2(S2T3P1E2)

$$\begin{array}{ll} f(x) = 840 + (210 \cdot 20) & f(x) = 840 + (210 \cdot 60) + (200 \cdot 15) \\ f(x) = 840 + 4200 & f(x) = 840 + 12600 + 31500 \\ f(x) = 5040 & f(x) = 44940 \end{array}$$

En la plenaria un estudiante indica que para determinar el valor a pagar utilizó la expresión que ya había determinado, teniendo en cuenta en que intervalo se encuentra la cantidad de minutos, si entre los primeros 60 minutos o si se pasa de 60, así mismo eligió la expresión que debía utilizar.

Tabla 102

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 1e (S2T3P1e)

Situación 2, tarea 3, pregunta 1e (S2T3P1e)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P1e: Indica los valores que puede tomar la variable x y la variable y . explica a qué conjunto numérico pertenece y por qué.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican, los valores que puede tomar x son de cero hasta infinito minuto, y toma los valores de 1.050 hasta infinito precio, no indica el conjunto numérico.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que indican, los valores que puede tomar x son todos los números reales que existen, y toma los valore cero a infinito, pero no	Un estudiante de cinco. E2

	indica el conjunto numérico al que pertenece y .	
R3	Estudiantes que indican los valores que toma la variable x son los de los minutos que varían del 0 al infinito, y son los precios de los minutos que varían del 0 al infinito.	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indican, los valores que puede tomar la variable x son la cantidad de minutos y la variable y la cantidad de dinero, pertenece a los racionales porque en una llamada uno puede hablar 10 minutos con 8 segundos o 68 minutos con 14 segundo y así.	Un estudiante de cinco. E4
R5	Estudiante que indica, en esta función $x = (m210 + 840)$ los valores de x son de 1 a 60 minutos y la variable y toma un valor de 840 a 13.440 pesos, y en la función $x = (m210) + 840 + (m2100)$ la variable x toma el valor de 61 en adelante y la variable y toma valor desde 15.540 en adelante. No indica conjunto numérico.	Un estudiante de cinco. E5

En la Tabla 102, se puede observar que la mayoría de los estudiantes presenta dificultad para identificar los valores que puede tomar la variable x y la variable y , así como definir el conjunto numérico al que pertenece, en tanto que presentan inconsistencias al definir los valores que toman las variables. Un estudiante indica los valores que puede tomar la variable x y la variable y de manera verbal, pero no define el conjunto numérico al que este pertenece.

De acuerdo con los datos arrojados, los estudiantes presentan dificultad para definir los valores que toma la variable x y la variable y en la función definida a tramos. Además, no determinan el conjunto numérico al cual pertenece la función, lo cual es una falencia para avanzar al nivel formal de la modelación, en tanto que, de acuerdo con las actividades

desarrolladas anteriormente, los estudiantes comprenden el concepto de dominio y rango, pero parece ser que se les dificulta definirlo para cualquier situación, en especial se evidencia dificultad para definir cuando el intervalo es cerrado o abierto, generando dificultades en el manejo de estos conceptos matemáticos.

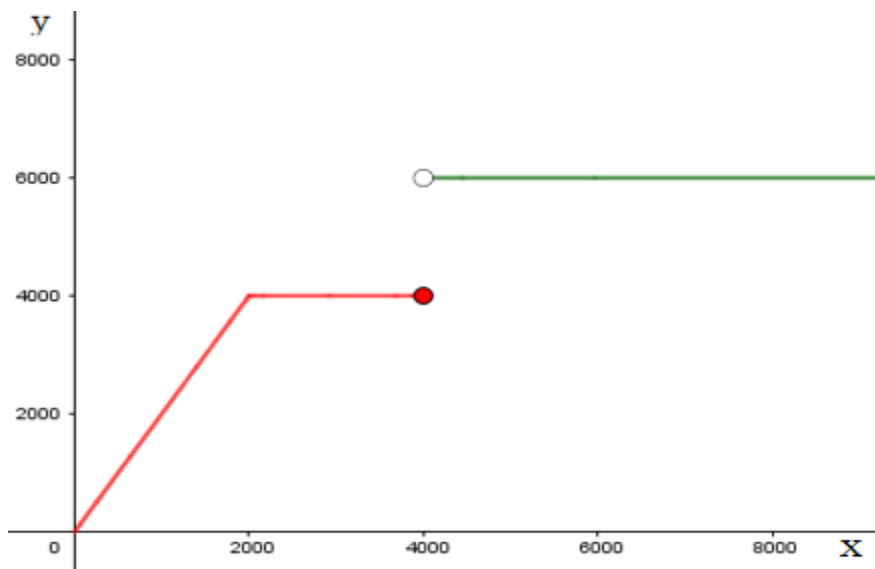
Tabla 103

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2a (S2T3P2a)

Situación 2, tarea 3, pregunta 2a (S2T3P2a)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P2: Las personas encargadas de la publicidad de un equipo de fútbol español fabrican diariamente camisetas para suplir en totalidad los pedidos de las tiendas. La gráfica de la función que proporciona la cantidad diaria de camisetas a fabricar en función del número de pedidos es la siguiente.



P2a: Indica si la gráfica representa la situación.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que argumentan, no porque como son productos no se pueden representar con líneas sino con puntos.	Un estudiante de cinco. E1

R2	Estudiante que argumenta, no representa la situación porque la cantidad de camisetas son exactas y al unir las con una línea quiere decir que hay algo de por medio, es decir, no se fabrican 1 camisa y media, se fabrica 1 si son dos son dos camisas.	Un estudiante de cinco. E4
R3	Estudiante que argumenta, la gráfica no representa la situación porque deberían manejar cantidades exactas, es decir, realizarla punto a punto.	Un estudiante de cinco. E5
R4	Estudiante que argumenta, si porque muestra la cantidad de camisas pedidas y la cantidad de camisas fabricadas	Un estudiante de cinco. E2
R5	Estudiante que argumenta, si porque va continuo el proceso.	Un estudiante de cinco. E3

En relación a las respuestas registradas en la Tabla 103, se evidencia la presencia del nivel formal de la modelación, puesto que los estudiantes en su mayoría comprenden el concepto de continuidad o discontinuidad numérica a partir de un modelo grafico que relaciona la cantidad de camisetas fabricadas y a cantidad de pedidos (ver Figura 79), con excepción a los estudiantes que aún no reconocen la continuidad o discontinuada de la recta numérica.

Figura 79

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2a, Estudiante 4(S2T3P2E4)

a) No representa la situación por que la cantidad de camisetas son exactas y al unirlo con una linea quiere decir que hay algo de por medio es decir no se fabrica 1camisa y media, se fabrica 1 y si son 2 son 2 Camisetas

Tabla 104

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2b (S2T3P2b)

Situación 2, tarea 3, pregunta 2b (S2T3P2b)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P2b: Es posible qué se puedan producir camisetas entre 0 y 1, entre 2 y 3, y entre 7 y 11.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que argumenta, no porque se fabrican una o dos, dos o tres, pues en medio de esos números no se pueden fabricar camisetas, entre siete y once si se pueden hacer 8,9 o 10.	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiante que argumenta, entre cero y uno no, ya que no se puede fabricar media camisa, entre 2 y 3 tampoco, ya que no se pueden fabricar dos y media o son dos o son tres y entre 7 y 11 si, ya que tienen un intervalo de 3 camisas. Ejemplifica.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que argumenta, entre cero y uno no, entre dos y tres no, entre siete y once sí, porque va 8, 9,10	Un estudiante de cinco. E3, E4
R4	Estudiante que argumenta, no es posible porque las camisetas son artículos que se manejan enteros y entre dos y tres se manejan decimales, por lo tanto, no se puede producir una camiseta y media o	Un estudiante de cinco. E5

cuarto, por tanto, entre cero y uno tampoco, ya para siete y once si se producen camisetas.

A partir de los datos registrados en la Tabla 104, la mayoría de los estudiantes reconocen la discontinuidad presente en la situación, en tanto que comprenden que solo es posible producir cantidades de camisas en valores enteros.

En la plenaria desarrollada, un estudiante indica que solo se pueden fabricar camisetas entre 7 y 11 porque entre ellos están los números 8,9,10, entre los demás no, porque no hay números enteros, es decir solo hay decimales, ejemplo 2,1,2,3 etc. y no se fabrican esa cantidad de camiseta.

Esto corrobora, la comprensión alcanzada por los estudiantes en relación a la continuidad y discontinuada en la recta numérica, lo cual refleja el desarrollo del nivel formal de la modelación (ver Figura 80), en tanto que, se evidencia la apropiación de un concepto matemático que posteriormente puede ser aplicado en el desarrollo de situaciones similares.

Figura 80

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2b, Estudiante 2(S2T3P2E2)

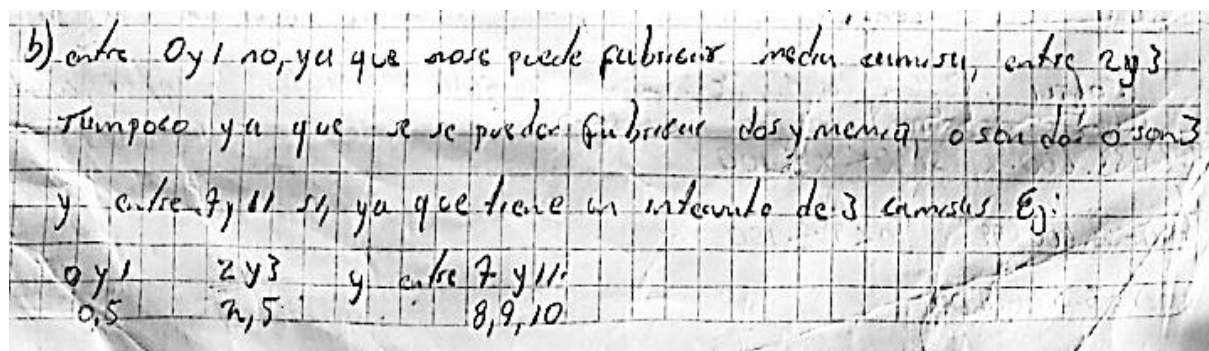


Tabla 105

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2c (S2T3P2c)

Situación 2, tarea 3, pregunta 2c (S2T3P2c)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P2c: Indica cuántas camisetas se fabrican si la cantidad de pedidos es 2.500, si es 4.000, si es mayor que 5.000, y si es 1.000		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que indica, para 2.500 pedidos se fabrican 4.000 camisetas, para 4.000 pedidos se fabrican 4.000 camisetas, para 5.000 pedidos se fabrican 6.000 camisetas y para 1.000 pedidos se fabrican 2.000 camisetas.	Dos estudiantes de cinco. E1, E2
R2	Estudiante que indica, según los datos de la gráfica, para 2.500 pedidos se fabrican 4.000 camisetas, para 4.000 pedidos se fabrican 4.000 a 6.000 camisetas, si es mayor a 5.000 pedidos se fabrican 6.000 camisetas y para 1.000 pedidos se fabrican 2.000 camisetas.	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiante que indica, para la cantidad de 2.500 se fabrican 4.000 camisetas, si es 4.000 se fabrican 4.000 camisetas, si es mayor a 5.000 se fabrican 6.000 camisetas, y si es 1.000 se fabrican 1.000	Dos estudiantes de cinco. E4, E5

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 105, solo dos estudiantes indican de manera acertada cuantas camisetas fabrican para cada cantidad de pedidos, un estudiante indica

de manera acertada la mayoría de los datos, solo no reconoce de forma correcta la cantidad de camisetas a fabricar para 4000 pedidos y para 1.000 pedidos, lo cual parece señalar que el estudiante no tiene una comprensión de lo que es un intervalo cerrado y abierto en una representación gráfica, en tanto que señala que para 4.000 pedidos se fabrican de 4.000 a 6.000 camisetas y gráficamente los 4000 pedidos no incluyen la fabricación de 6.000 camisetas, los demás estudiantes faltantes solo no reconocen cuantas camisetas se fabrican por 1.000 pedidos.

Tabla 106

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2d (S2T3P2d)

Situación 2, tarea 3, pregunta 2d (S2T3P2d)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P2d Indica cuántos pedidos deben recibirse para que se fabriquen 4.000 camisetas, y 6.000, y 2.500		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican, para que se fabriquen 4.000 camisetas deben recibirse 2.000 a 4.000 pedidos, para que se fabriquen 6.000 deben recibirse de 4.001 pedidos en adelante, para que se fabriquen 2.500 deben recibirse 1.500 pedidos	Un estudiante de cinco. E1
R2	Estudiantes que indican, se deben pedir entre 2.000 y 4.000 para que se fabriquen 4.000 camisetas, para que se fabriquen 6.000 se deben pedir 4.000 camisetas en adelante y para que se fabriquen 2.500 se deben pedir 1.500 camisetas.	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiantes que indican los pedidos que deben recibirse para que se fabriquen 4.000 camisetas es de 2.000 a 4.000, de 6.000 son 4.000 a 8.000 pedidos de 2.500 con 1000 pedidos	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiantes que indican, para que se fabriquen 4.000 camisetas se debe	Un estudiante de cinco. E4

hacer un pedido de 2.000 a 4000, y si
son 6000 camisetas se debe hacer un
pedido de 4.000 en adelante

R5

Estudiantes que indican, para que se
fabriquen 4.000 camisetas se deben
hacer 4.000 pedidos, para que se
fabriquen 6.000 camisetas se deben
hacer 4.000 pedidos en adelante y
para que se fabrique 2.500 camisetas
se deben hacer 4.000 pedidos

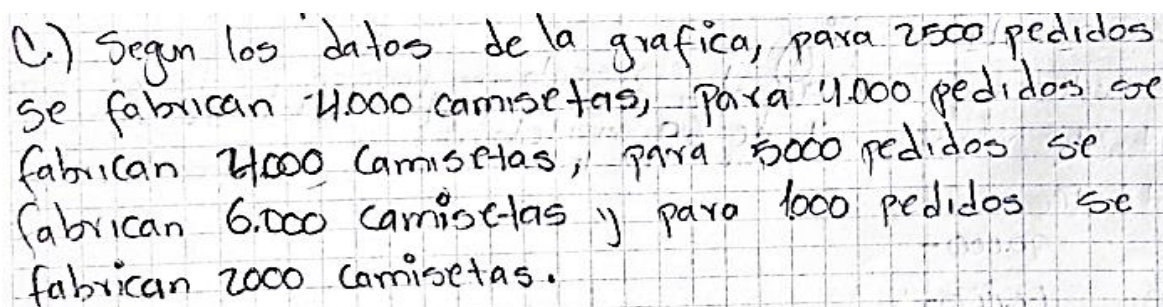
Un estudiante de cinco.
E5

En relación con los datos registrados en la Tabla 106, la mayoría de los estudiantes no reconoce que, de acuerdo con la gráfica, cuando se realizan 4.000 pedidos no incluyen la fábrica de 6.000 camisetas, en tanto que es un intervalo abierto, solo un estudiante reconoce que para que se fabriquen 6000 camisetas el pedido debe ser mayor a 4.000, puesto que indica que debe ser un pedido de 4.001. Además, no indican de manera acertada cuántos pedidos se deben recibir para fabricar 2.500 camisetas.

En relación con los resultados arrojados en la S2T3P2c y la S2T3P2d la mayoría de los estudiantes realizan una buena lectura de la representación gráfica, en tanto que reconocen la cantidad de camisetas a fabricar de acuerdo a un determinado número de pedidos, así mismo indican la cantidad de pedidos a recibir para que se fabrique una cantidad determinada de camisetas, lo cual los ubica en el nivel referencial de la modelación (ver Figura 81), en tanto que, tienen facilidad para interpretar modelos gráficos de una situación determinada, esto a su vez, los traslada al nivel general, en tanto que a partir de un modelo dado realizan reflexiones que pueden ser fundamentales para la creación de nuevos modelos.

Figura 81

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2c, Estudiante 1(S2T3P2E1)



C.) Según los datos de la grafica, para 2500 pedidos se fabrican 4000 camisetitas, para 4000 pedidos se fabrican 6000 camisetitas, para 5000 pedidos se fabrican 6.000 camisetitas y para 1000 pedidos se fabrican 2000 camisetitas.

Desde el estudio de la covariación y el nivel de dirección del razonamiento covariacional, se puede decir que los estudiantes al momento de realizar el análisis de algún modo reconocen las relaciones de dependencia y los cambios de una variable a partir de los cambios de la otra.

También se puede evidenciar una mayor apropiación por parte de los estudiantes en relación a lo que refiere a un intervalo cerrado o abierto en una representación gráfica, conceptos matemáticos fundamentales, lo cual permite ubicarlos en el nivel formal de la modelación, en el cual se da la apropiación de los conceptos y procedimientos matemáticos.

Tabla 107

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e (S2T3P2e)

Situación 2, tarea 3, pregunta 2e (S2T3P2e)

T3: funciones por tramos en diferentes contextos.

P2e: Determinar las expresiones algebraicas de la función a tramos.

Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
-------------------	-------------	-------------------------

R1	Estudiante que define una expresión de la forma $y = 2x + 0$ $y = 4.000$ $y = 6000$	Un estudiante de cinco. E1, E5
R2	Estudiante que define una expresión de la forma: $f(x) = 6.000$ $f(x) = 4.000$	Un estudiante de cinco. E2
R3	Estudiante que define una expresión de la forma: $y = 2x - 0$ $y = 4.000$ $y = 6.000$	Un estudiante de cinco. E3
R4	Estudiante que define una expresión de la forma: $y = 2x$ $f(x) = 6.000$ $f(x) = 4000$	Un estudiante de cinco. E4

En relación a los datos registrados en la Tabla 107, se puede observar que cuatro estudiantes definen la expresión para cada tramo, aunque algunos presentan inconsistencias con el numero cero en la expresión del tramo 1, un estudiante lo suma y otro lo resta, pese a que este valor no altera los resultados, es importante reconocerlo, ya que no ocurre lo mismo si fuera otro valor. Sin embargo, se evidencia el proceso realizado para determinar dicha expresión, el estudiante faltante solo determina el tramo dos y tres de la situación dada.

A partir de los resultados, en relación a los niveles de modelación, los estudiantes en su mayoría se ubican en el nivel referencial, puesto que esquematizan la situación presentada en el modelo grafico a través de un modelo algebraico (ver Figura 82), esto a su vez evidencia el reconocimiento de las variables independientes, la variable dependiente y el uso de sistemas de representación algebraico y gráfico de una función por tramos. Por otro lado, desde los niveles

de razonamiento covariacional, se registra un trabajo desde el nivel de coordinación cuantitativa en tanto que para determinar la expresión del tramo uno y tres, primero determinaron la razón de cambio promedio (ver figura 83), es importante mencionar que, el objetivo en este caso no fue enfatizar en la comprensión de la coordinación o dirección de la razón de cambio, se emplea como medio para determinar la expresión a la situación dada.

Figura 82

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e, Estudiante 4 (S2T3P2E4)

Handwritten work on grid paper:

$$e) \cdot f_m = 6.000 \text{ Para } 4.000 \text{ pedidos en adelante}$$

$$f(x) = 4.000 \text{ Para } 2.000 \text{ a } 4.000 \text{ pedidos}$$

$$| y = 2x |$$

Figura 83

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 2e, Estudiante 3(S2T3P2E3)

Handwritten work on grid paper:

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 2000 & 4000 \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4000 - 0}{2000 - 0} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x - 0$$

Tabla 108

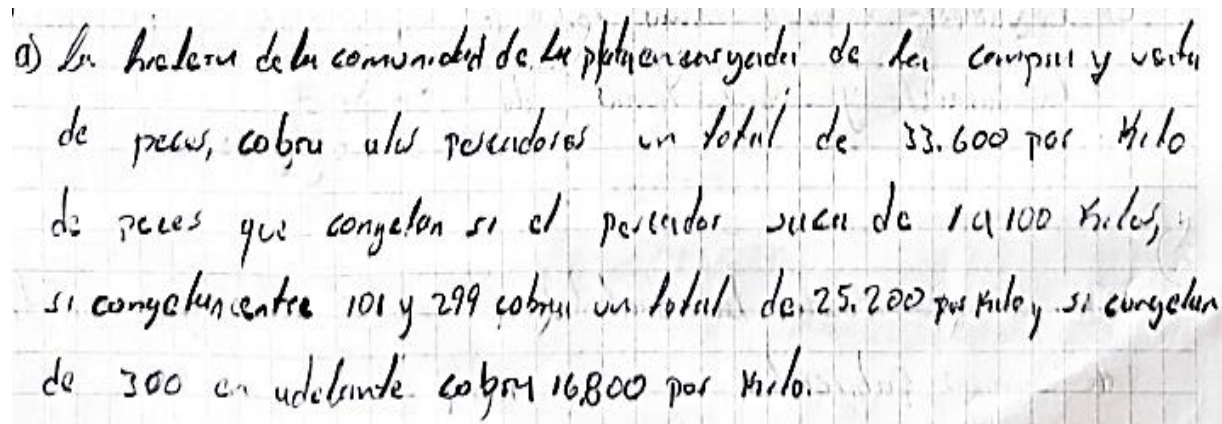
Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a(S2T3P3a)

Situación 2, tarea 3, pregunta 3a(S2T3P3a)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P3: Observa la siguiente expresión algebraica.		
$f(x) = \begin{cases} 33.600x, & \text{si } 0 < x \leq 100 \\ 25.200x, & 100 < x < 300 \\ 16.800x, & x \geq 300 \end{cases}$		
P3a: Define una situación que pueda ser modelada a partir de la función dada.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indica una situación modelada a partir de la función dada y satisface los intervalos.	Un estudiante de cinco. E2,
R2	Estudiante que indica una situación modelada a partir de la función dada, pero no satisface los intervalos indicados	Un estudiante de cinco. E1, E3, E4, E5

En relación a los datos registrados en la Tabla 108, todos los estudiantes definen una situación para la función dada, pero solo un estudiante la define cumpliendo con los intervalos indicados, como podemos ver en la Figura 84.

Figura 84

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a, Estudiante 2(S2T3P3E2)



a) En la feria de la comunidad de la población vendiendo de los campesinos y venta de peces, cobra a los pescadores un total de 33.600 por kilo de peces que congelan si el pescador suena de 1 a 100 kilos, si congelan entre 101 y 299 cobra un total de 25.200 por kilo, y si congelan de 300 en adelante cobra 16.800 por kilo.

En relación con lo que se evidencia en la Figura 84, es posible decir que el estudiante tiene una comprensión de las condiciones dadas en cada intervalo de la función, en tanto que reconoce que la primera expresión debe incluir el 100, la segunda no incluye el 100 ni el 300, y la tercera va desde 300 en adelante.

Los demás estudiantes indican una situación para la función, pero de acuerdo con el enunciado que escriben, no es acertado el uso de los extremos de acuerdo a lo indicado para cada expresión, puesto que no dejan claro a que intervalo pertenecen los valores en el enunciado escrito.

Ahora bien, de acuerdo con los resultados arrojados, la mayoría de los estudiantes tienen habilidad para crear situaciones dadas una función por tramos, lo cual es un trabajo desde el nivel referencial y a su vez el nivel general de la modelación, en tanto que analizan y reflexionan a partir de un modelo algebraico dado para crear un modelo verbal, sin embargo, es necesario reconocer que aún presentan dificultades, ya que no reconocen con claridad los extremos de cada

una de las expresiones dadas, lo cual podría relacionarse como una dificultad en la lectura de símbolos matemáticos ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$) obstaculizando la esquematización acertada de la situación.

Desde el nivel de coordinación del razonamiento covariacional, pese a las falencias, se evidencia que reconocen los cambios que ocurren en una variable a partir de los cambios de la otra, puesto que identifican que, si cambia el intervalo de la situación, cambia el valor a cancelar, esto de acuerdo con las situaciones que crearon como se observa en la Figura 84. En cuanto al contenido matemático, se da un acercamiento a la creación de modelos de manera verbal.

Tabla 109

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3a(S2T3P3b)

Situación 2, tarea 3, pregunta 3a(S2T3P3b)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P3b: Para cada tramo indica cuál es la situación particular.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que indica la situación particular para cada tramo, pese a inconsistencia indica los intervalos y ejemplifica	Un estudiante de cinco. E2,
R2	Estudiante que indica la situación particular para cada tramo, pero no establece los intervalos de manera acertada	Un estudiante de cinco. E1, E3, E4, E5

Los resultados arrojados en la S2T3P3b, corrobora lo expresado en el análisis de la S2T3P3a ya que, de los cinco estudiantes solo uno hace un acercamiento al manejo de los intervalos de situación, pues el estudiante indica a que corresponde el primer tramo y ejemplifica, así para los demás tramos, esto deja ver que existe una comprensión de la condición dada para cada expresión de la función en relación a los extremos, así como una conciencia de la

continuidad o discontinuidad de la función (ver Figura 85). En cuanto a los otros estudiantes, estos parecen no comprender en su totalidad estos aspectos, ya que no dejan claro que valores involucran cada uno de los extremos, en tanto que no usan términos que dejen un indicio o ejemplos numéricos (ver Figura 86).

Figura 85

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3b, Estudiante 4(S2T3P3E4)

b) si David congeló entre uno y cien kilos de pescar la empresa cobra 33.600 por kilo. Ej: David congeló 99 kilos de pescar, cuánto cobrará la empresa

$$f(x) = 33.600 \cdot x, \text{ si } 0 \leq x \leq 100$$

$$f(x) = 33.600 \cdot 99 \quad 0 < 99 \leq 100$$

$$f(x) = 3.326.400$$

Figura 86

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3b, Estudiante 4(S2T3P3E4)

$f(x)$ 33.600 si le piden a Don Juan de 0 a 100 tablas (tramo 1)
25.200 si le piden a Don Juan de 100 a 300 tablas (tramo 2)
16.800 si le piden a Don Juan de 300 en adelante (tramo 3)

En esta dirección, se evidencia falencias en el nivel formal de la modelación, en tanto que se observan dificultades para definir los extremos de la expresión de manera verbal. Por tanto, hay falencias para determinar los intervalos cerrados y abiertos, lo cual se relaciona con la comprensión de los conceptos matemáticos que facilitan la solución de diversas situaciones.

Tabla 110

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3c(S2T3P3c)

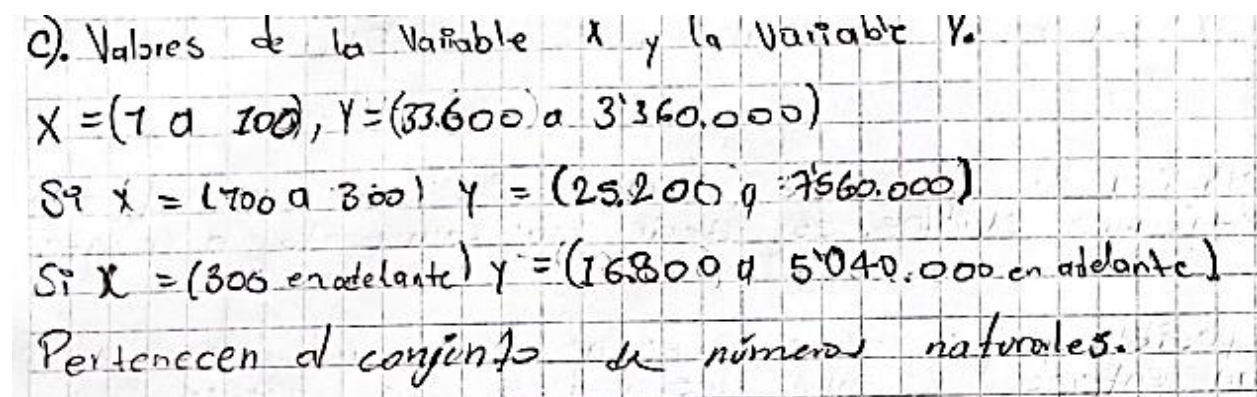
Situación 2, tarea 3, pregunta 3c(S2T3P3c)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P3c: Indica los posibles valores que puede tomar la variable x y la variable y , y determina el conjunto numérico al que pertenece.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que indica los valores que toma la variable x , pero no indica los valores que toma la variable y , indica el conjunto numérico al que pertenece	Un estudiante de cinco. E4
R2	Estudiante que no indica de forma acertada los valores que toma la variable x y la variable y , en tanto que no estable los extremos. Indica el conjunto numérico.	Un estudiante de cinco. E1, E3, E5
R3	Estudiante que indica que los valores que toma la variable x hacen referencia a los valores independientes, y la variable y toma los valores dependientes	Un estudiante de cinco. E2,

De acuerdo con los datos de la Tabla 110, se puede observar que la mayoría de los estudiantes no determinan de forma acertada los valores que toma la variable x y la variable y , pero si indican a que conjunto numérico pertenece la situación creada para la función, los estudiantes indican los valores de la variable x y la variable y por tramos, pero no establecen con claridad los extremos en tanto que, involucran el valor de 100 y el 300 en dos expresiones, sin establecer si es un intervalo cerrado o abierto.

En relación a los resultados arrojados, se puede decir que los estudiantes presentan dificultad para definir los extremos de las expresiones algebraicas presentes en la situación, y así poder definir de forma acertada los valores que toma la variable x y la variable y , es importante mencionar que reconocen como determinar los valores que va tomando la variable y según los valores de x (ver Figura 87). En este sentido, podría decirse que la dificultad radica en la representación de intervalos en los reales, pero existe una comprensión de lo que refiere a los valores que toma la variable x y la variable y en una situación determinada.

Figura 87

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 3c, Estudiante 5(S2T3P3E5)



C). Valores de la Variable x y la Variable y .

$x = (1 \text{ a } 100), y = (33.600 \text{ a } 3'360.000)$

Si $x = (1700 \text{ a } 300) y = (25.200 \text{ a } 7560.000)$

Si $x = (300 \text{ en adelante}) y = (16800 \text{ a } 5'040.000 \text{ en adelante})$

Pertenecen al conjunto de números naturales.

Ahora bien, desde el nivel formal de la modelación se evidencia una comprensión de lo que sería el dominio y rango de una función, sin embargo, es necesario mencionar que existen falencias en el manejo de los intervalos que definen los extremos de una expresión algebraica. Por otro lado, en relación al nivel de coordinación, se puede ver que reconocen que cambios van surgiendo en y , de acuerdo a los cambios en x , en tanto que determinan algunos valores que va tomando y según los valores que va tomando x para hallar el rango.

Tabla 111

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4a(S2T3P4a)

Situación 2, tarea 3, pregunta 4a(S2T3P4a)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P4. teniendo en cuenta las tareas desarrolladas en la situación 1 y situación 2:		
P4a. Explica con tus propias palabras cómo entiendes qué es una función por tramos.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiantes que indican, una función por tramos es una situación matemática que se define por varias expresiones y estas representadas en el plano cartesiano muestran varias situaciones con comportamiento diferente.	Un estudiante de cinco. E1, E2
R2	Estudiantes que indican, una función por tramos es la que tiene dos o más expresiones.	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiantes que indican, una función por tramos es que en la expresión hay más de una fórmula para los diferentes valores de la variable independiente (x) se deben usar diferentes fórmulas que permitan calcular los valores de y que les corresponda.	Un estudiante de cinco. E4
R4	Estudiantes que definen una función por tramos como una situación en la cual se muestran varias situaciones con comportamientos diferentes, entonces cada comportamiento de	Un estudiante de cinco. E5

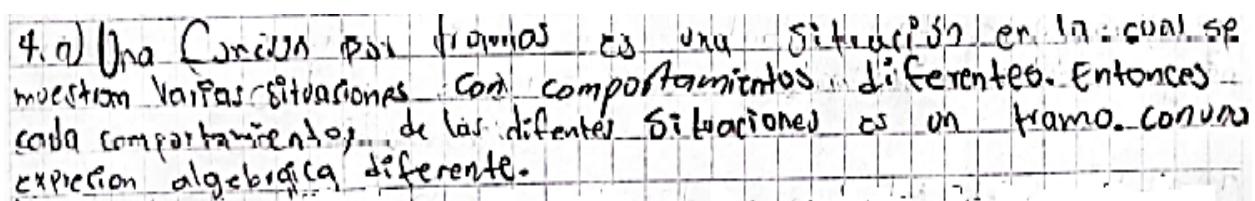
las diferentes situaciones es un
tramo con expresiones algebraicas
diferentes.

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 111, la mayoría de los estudiantes luego de desarrollar la situación 1 y 2, comprenden que es una función por tramos, esto deja ver que se ha logrado una apropiación en relación al concepto de función por tramos, en tanto que los participantes comprenden que este tipo de funciones surgen a partir de situaciones que requieren ser definidas por diferentes expresiones, y estas a su vez pueden tener diferentes comportamientos en el plano cartesiano, un estudiante parece presentar confusión en tanto que indica que la expresión tiene varias fórmulas, sin embargo, se logra comprender que hace referencia a las expresiones.

De acuerdo con los resultados, es posible mencionar que los estudiantes han alcanzado una comprensión en relación al concepto de función por tramos, además, relacionan que este tipo de funciones se emplean para trabajar situaciones con diferentes comportamientos que requieren ser representadas a través de diferentes expresiones que satisfagan la necesidad (ver Figura 88). En esta dirección, se logra el alcance del nivel formal de la modelación, ya que se ha logrado la comprensión del concepto matemático en estudio en esta investigación, función por tramos. Así pues, desde el contenido matemático los estudiantes al logrado la definición de la función por tramos desde el contexto artesanal de recolección de pianguas.

Figura 88

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4a, Estudiante 5(S2T3P4E5)



4.a) Una función por tramos es una situación en la cual se muestran varias situaciones con comportamientos diferentes. Entonces cada comportamiento de las diferentes situaciones es un tramo con una expresión algebraica diferente.

Tabla 112

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4b (S2T3P4b)

Situación 2, tarea 3, pregunta 4b (S2T3P4b)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P4. teniendo en cuenta las tareas desarrolladas en la situación 1 y situación 2:		
P4b: Describe a que hace referencia los valores que toma la variable x en distintas situaciones.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes
R1	Estudiante que indica, los valores que toma la variable x hacen referencia a los valores independientes que toma x en las diferentes expresiones.	Tres estudiantes de cinco. E1, E2, E5
R2	Estudiante que indica, x representa el dominio de acuerdo a la situación.	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiante que indica, los valores que toma x hacen referencia a la variable independiente, dominio.	Un estudiante de cinco. E4

Tabla 113

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4c (S2T3P4c)

Situación 2, tarea 3, pregunta 4c (S2T3P4c)		
T3: funciones por tramos en diferentes contextos.		
P4. teniendo en cuenta las tareas desarrolladas en la situación 1 y situación 2:		
P4C: Describe a que hace referencia los valores que toma la variable y en distintas situaciones.		
Tipo de respuesta	Descripción	Cantidad de estudiantes

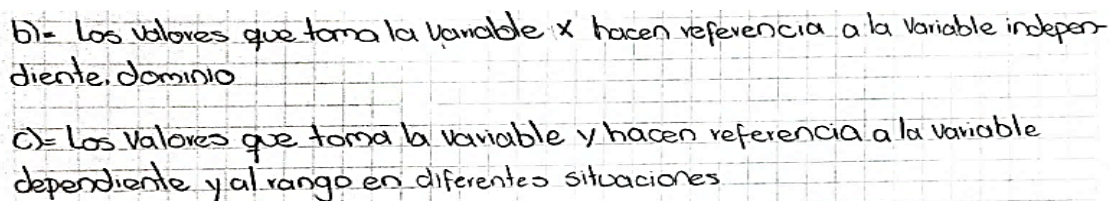
R1	Estudiante que indica, los valores que toma la variable y hacen referencia a los valores dependientes que toma en las diferentes expresiones.	Un estudiante de cinco. E1, E2, E5
R2	Estudiante que indica, y representa el rango que varía de acuerdo a la situación.	Un estudiante de cinco. E3
R3	Estudiante que indica, los valores que toma y hacen referencia a la variable independiente y al rango en diferentes situaciones.	Un estudiante de cinco. E4

A partir de los datos registrados en la Tabla 112 y 113, podemos ver que la mayoría de los estudiantes relacionan los valores que toma la variable x con los valores independientes y los de la variable y con valores dependientes, un estudiante además de reconocer las variables como independiente y dependiente, las identifican como el dominio y rango de la función.

En relación a los resultados, se puede ver que los estudiantes reconocen que significan la variable x y la variable y en una situación determinada, además, puede decirse que reconocen las relaciones de dependencia entre dichas variables, en tanto que existe una conciencia de que x toma los valores independientes y y toma los valores dependientes. A su vez hacen una relación de estas con lo que sería el dominio y rango de una función, lo cual permite ubicar a los estudiantes en el nivel formal de la modelación, en tanto que han adquirido una apropiación de conceptos matemáticos desde el contexto de recolección de pianguas que pueden emplear en futuras situaciones (ver Figura 89), esto a su vez desde el contenido matemático los acerca a la comprensión de los componentes de una función, variable independiente, variable dependiente, dominio y rango.

Figura 89

Situación 2, Tarea 3, Pregunta 4c,4b Estudiante 4(S2T3P4E4)



b) = los valores que toma la variable x hacen referencia a la variable independiente. dominio

c) = los valores que toma la variable y hacen referencia a la variable dependiente y al rango en diferentes situaciones.

Luego de la aplicación de la situación 1 y la situación 2, se puede llegar a las siguientes conclusiones iniciales apoyado en la matriz de análisis (ver Tabla 15) diseñadas para observar el alcance de la investigación en relación a la perspectiva curricular, didáctica y matemática.

En primer momento, en el desarrollo de cada una de las tareas de la situación 1, los estudiantes emplearan en principio sus propias estrategias y conocimientos previos e informales adquiridos en el desarrollo diario dentro de este contexto como practica principal de sustento económico, para dar respuesta a gran parte de los interrogantes planteados, esto desde el nivel situacional de la modelación, en el cual los estudiantes hacen sus primeros acercamientos a la situación e identifican las matemáticas en el contexto como parte del proceso de matematización horizontal.

En relación con el nivel referencial y el estudio de la covariación, la mayoría de los estudiantes identificaron las magnitudes involucradas, las relaciones de dependencia existente entre ellas, además identificaron lo constante y lo variable, lo cual fue fundamental para la esquematización de la situación a través de modelos gráficos, verbales, tabulares y algebraicos, siendo este el principal propósito del nivel referencial. Además, emplearon sin mayor dificultad modelos creados dentro de dicho contexto para determinar valores faltantes y a su vez escribieron conclusiones alrededor de los mismos como paso al nivel general, donde el

estudiante reflexiona a partir de los procesos realizado para la futura creación de modelos similares.

En cuanto al razonamiento covariacional, en el desarrollo de esta situación 1, se moviliza en los estudiantes el nivel de coordinación, puesto que reconocen los cambios que ocurren en una variable en relación con los cambios de la otra, en este caso, cómo cambia el precio de la docena de piangua, si el intervalo de medida de la piangua cambia; a su vez se da una comprensión del nivel de dirección, en tanto que identifican en una situación determinada si las variables aumentan, disminuyen o se mantienen constante. También se da un avance al nivel de coordinación cuantitativa, pues algunos estudiantes determinaron la razón de cambio para lograr definir la expresión algebraica que representaba la situación dada gráficamente.

En relación al contenido matemático función por tramos, la mayoría de los estudiantes identificaron los componentes de la función tales como, variable independiente, variable dependiente, dominio, rango y realizaron representaciones gráficas, verbales y algebraicas, esto a su vez permitió los primeros acercamientos al nivel formal de la modelación, en tanto que se da una comprensión de los componentes de la función por tramos.

En cuanto a la situación 2, al igual que en la situación 1, se evidencia un trabajo desde el nivel situacional, el nivel referencial y el nivel general, pero además los estudiantes lograron alcanzar el nivel formal al construir la definición de la función por tramos, variable independiente y variable dependiente, relacionando esta a su vez con lo que sería el dominio y rango de la función.

En cuanto al razonamiento covariacional y a su vez el estudio de la covariación, en el desarrollo de esta situación, se logró evidenciar que los estudiantes logran movilizar el nivel de coordinación, el nivel de dirección y tienen un acercamiento al nivel de coordinación

cuantitativa, en tanto que determinan la razón de cambio promedio, sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, no era el fin del trabajo enfatizar en la comprensión de este concepto, por lo cual no se profundiza en el nivel 3 del razonamiento covariacional, además no se aborda el nivel 4 y el nivel 5.

En relación con el contenido matemático en estudio, los estudiantes realizaron representaciones algebraicas, verbales, tabulares y gráficas, cabe mencionar que, pese algunas dificultades en las representaciones graficas se logra ver un gran avance, lo cual les permitió comprender que es una función por tramos, así como los componentes de la función, dominio, rango, variable dependiente e independiente, en relación al dominio y rango se evidencia un poco de dificultad para definirlo en cualquier situación, puesto que en la S1 lo hicieron con mayor facilidad que en la S2T3, lo cual dificultó la construcción de un modelo verbal a partir de una función dada en el punto S2T3P3A. Sin embargo, reconocen a que hace referencia, parece ser que se les dificulta determinar en qué punto un intervalo es cerrado o abierto, lo cual evidencia falencia en cuanto a la lectura de símbolo matemáticos como $>$, $<$, $\leq$, $\geq$. Por otro lado, la mayoría de los estudiantes presenta errores al momento de determinar la continuidad o discontinuidad en la recta numérica.

En cuanto a las dificultades expuestas en relación a determinar el dominio y rango de una función por tramos por parte de los estudiantes, deja en evidencia lo expuesto por Yam & Aparicio (2009), Chumpitaz (2013), Rojas (2019) los cuales manifiestan que a los estudiantes se les dificulta hacer análisis de cada tramo y determinar el dominio y rango, lo cual es una dificultad para establecer las reglas de correspondencia apropiadas. Añade además que, las falencias radican en el hecho de presentarles las funciones por tramos solo desde la representación algebraica y es necesario hacerlo desde una representación gráfica. Del mismo

modo, a los estudiantes solo se les presentan las funciones con una sola expresión, por lo cual establecer la regla de correspondencia para una función por tramos genera un problema, además de no reconocer la función por tramos como función.

Por otra parte, en el desarrollo de las plenarias se pudo evidenciar en relación con lo matriz diseñada para el análisis de los resultados (ver Tabla 15) que, en cuanto a la covariación y el razonamiento covariacional, los estudiantes comprenden y argumentan las relaciones de dependencia existente y como los cambios de una variables atienden a los cambios de la otra, su vez como es la dirección de dichos cambios, sin embargo, es importante mencionar que fue necesario retroalimentar en relación al concepto de magnitud en tanto que no lo recordaban con claridad.

En relación a la modelación en el contexto de recolección de pianguas a través de expresiones algebraicas, se pudo ver que reconocen las magnitudes y relaciones de dependencia, sin embargo, en plenaria argumentaban en relación a S1T2 Y S2T2 que no hubo dificultad para modelar al ser un proceso que realizan en su contexto, solo que había que escribirla en expresiones, pero no ocurrió lo mismo con las expresiones que debían determinar en la S1T3P5, S1T4P2, S2T3P1y S2T3P2 ya que debían extraer la función de la gráfica o de la representación verbal y en el caso de la S2T3P1y S2T3P2 son situaciones diferentes a las del contexto, en principio argumentaban que no lograban determinar las expresiones e intentaban acudiendo a diferentes procedimientos, hasta que finalmente relacionaron algunos tramos con una representación lineal, lo cual les permitió determinar las expresiones apoyándose en la razón de cambio, que, aunque la recordaban fue necesario ayudar un poco en su estructura, ya que presentaban dificultad en la organización de las variables. Luego de esto, se evidencio a partir de los argumentos en relación a la comprensión que hicieron de las gráficas, su comportamiento y

del reconocimiento de los aspectos fundamentales para la creación de modelos (magnitudes, variaciones, constante) que se da el desarrollo del nivel general.

En cuanto al componente matemático, es posible decir que se logró la comprensión de la función y sus componentes, sin desconocer la dificultad presente para determinar el dominio y rango en especial en la S2T3, donde comentaban que no era igual a las demás situaciones y era más complicado determinarlo, que, aunque comprenden a que se refiere se les dificulta reconocer que valores corresponden a cada tramo o escribirlo de manera general.

Finalmente, en relación al desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional, fue posible ver que reconocen y comprenden la covariación y el nivel 1, nivel 2 y nivel 3 del razonamiento covariacional, lo cual es fundamental para la creación de modelos, objetivo de este pensamiento. Por lo tanto, de acuerdo con los resultados y evidencia se logró alcanzar en gran manera.

Es importante mencionar que, el desarrollo de la situación 1 T1,T2,T3 y T4 y la situación 2 T1, T2 , al ser situaciones que se abordan desde la actividad artesanal de recolección de pianguas, actividad principal de sustento económico para los habitantes del consejo comunitario de la comunidad negra de la Plata Bahía Málaga, contexto donde se desarrollan los estudiantes participantes, permitió que se diera una apropiación de la situación, apoyándose en sus conocimientos adquiridos en la faena de recolección y venta de la piangua, a su vez, se desarrollará con mayor facilidad el proceso de modelación en dicho contexto, lo cual facilitó un poco el desarrollo de la S2T3 en la cual se presentaron diferentes situaciones que pueden modelarse a través de función por tramos, logrando la comprensión de este concepto.

En esta dirección, es posible decir que, se ha logrado el objetivo de la situación 1 y de la situación 2, además se corrobora lo expuesto por los Lineamientos Curriculares De Matemáticas (MEN 1998) en relación a la importancia de abordar las matemáticas desde un contexto real, en tanto que permite a los estudiantes construir conceptos matemáticos significativos, por lo que se hace esencial involucrar problemas relacionados con el contexto donde se desarrollan los estudiantes, donde puedan desarrollar pensamiento matemático, en el caso de esta investigación, el desarrollo del pensamiento variacional desde el trabajo de situaciones que evidencien variación y cambio para comprender algunos aspectos de este pensamiento.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES GENERALES

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los resultados de la implementación de la secuencia didáctica como propuesta de aula, con los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, sede Cocalito. Las conclusiones se realizan teniendo en cuenta cada uno de los objetivos específicos diseñados para lograr el alcance del objetivo general de la investigación, el cual tuvo como finalidad, favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional a través de la modelación de fenómenos en el contexto artesanal de recolección de pianguas, mediante la función por tramos.

4.1. Conclusiones

En relación al objetivo uno, el cual corresponde a la fundamentación teórica de la problemática desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática, se reconoce que:

El estudio de la función por tramos en contextos cotidianos donde se desarrollan los estudiantes permite abordar los procesos de modelación que involucran fenómenos de variación y cambio, facilitando el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional, en tanto que, a partir del contexto de recolección de pianguas, los estudiantes reconocieron y analizaron las magnitudes involucradas, las relaciones de dependencia y el estudio de la covariación entre magnitudes. Además, comprendieron que existen situaciones que por su condición requieren de más de una expresión para ser representada.

En relación a la modelación, esta privilegia la relación de las matemáticas con el contexto, por lo cual, es importante reconocer los niveles de modelación para la construcción de la secuencia didáctica como propuesta de aula, con el fin de lograr el desarrollo consecuente y coherente del contenido matemático en estudio, para este caso la función por tramos, a su vez, estos niveles favorecen el análisis de los resultados, permitiendo identificar el nivel de

modelación alcanzado por los estudiantes a partir del desarrollo de cada una de las tareas propuesta. En cuanto al razonamiento covariacional, se reconocen los niveles que permiten identificar la apropiación alcanzada por los estudiantes en el desarrollo de situaciones que involucran la covariación, esto en relación a la comprensión de la coordinación de las variaciones de las magnitudes involucradas.

Finalmente, la articulación de las perspectivas curriculares permitió la creación de la matriz de análisis diseñada para caracterizar los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica.

En relación al objetivo dos, el cual indica que se debe articular en una propuesta de aula los resultados de la fundamentación de la problemática en la cual se privilegie los procesos de modelación.

Se construye una secuencia didáctica compuesta por dos situaciones, la cual reconoce la importancia de favorecer el desarrollo del pensamiento variacional a través de actividades de la vida práctica, por lo cual se diseña desde el contexto artesanal de recolección de pianguas, contexto donde se desarrollan diariamente los participantes, el cual resulto ser apropiado, en tanto que aporoto problemas que se pueden modelar a través de la función por tramos.

El diseño de la secuencia didáctica se estructura de manera que se evidencia la articulación de los referentes teóricos considerados, en relación al pensamiento variacional, la modelación, el razonamiento covariacional y el contenido matemático, lo cual permitió una secuencia organizada para el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional y la comprensión del concepto de función por tramos por parte de los estudiantes.

Posterior a la aplicación de la secuencia didáctica, es posible decir que, el desarrollo de situaciones que involucren el contexto cotidiano de los estudiantes, permite una apropiación de

los contenidos matemáticos, para el caso del concepto de función por tramos, la articulación de este con el contexto de recolección de pianguas facilitó la comprensión de las características de este tipo de funciones. Por otro lado, se reconoce que los contenidos matemáticos abordados través de secuencias didácticas que relacionan el contexto sociocultural, le apuesta a la reducción de enseñanza fragmentada, dándole sentido a las matemáticas en la cotidianidad y logrando el desarrollo de habilidades en los estudiantes.

En esa dirección, el diseño de la secuencia didáctica desde la actividad artesanal de la recolección de pianguas, facilitó en gran manera que los estudiantes hicieran un acercamiento real a lo que se define como magnitudes, medidas, unidades de medidas, así como la comprensión de las variables involucradas en la recolección de pianguas y los diferentes comportamientos que se presentan en este contexto, logrando establecer relaciones funcionales que permitieron determinar diferentes modelos de representación de funciones por tramos. También, permitió que los estudiantes comprendieran lo que se define como dominio, rango, variable independiente, variable dependiente, intervalos, continuidad, discontinuidad etc. Dejando estos conceptos de algún modo un poco más cercanos a ellos, puesto que, se definen desde la realidad contextual en la que se desarrollan, lo cual logra darles sentido a las matemáticas, en tanto que siempre se abordan desde situaciones distantes a ellos, esto ratifica la pertinencia del diseño de la secuencia didáctica en esta investigación desde un contexto sociocultural.

En cuanto al objetivo tres, con el cual a partir de la implementación de la propuesta didáctica se busca identificar y caracterizar los aspectos de pensamiento variacional que se movilizan en estudiantes de grado noveno, se puede concluir que:

La articulación de la propuesta de aula en el contexto artesanal de recolección de pianguas, permitió que los estudiantes tuvieran un acercamiento al concepto de función por tramos desde su contexto de desarrollo, donde lograron identificar las magnitudes involucradas, las relaciones de dependencia entre magnitudes, los cambios que ocurren en una magnitud a partir de los cambios de la otra, las variables independientes y las variables dependientes.

Desde los niveles de modelación, se logró de acuerdo con la matriz de análisis (ver Tabla 15), el alcance del nivel situacional a partir de las tareas diseñada para la comprensión y reconocimiento del contexto de desarrollo de las situaciones. En relación al nivel referencia, la mayoría de los estudiantes posterior al reconocimiento de las magnitudes involucradas y las relaciones de dependencia presentes esquematizaron la situación a través de modelos particulares, lo cual permite el alcance del nivel referencial, en cuanto al nivel general, es posible decir que los estudiantes realizan reflexiones frente a un determinado modelo, lo cual facilita la construcción de modelos similares. Finalmente, en el nivel formal se logra la comprensión del concepto de función por tramos y de sus componentes, con algunas falencias en relación al dominio, rango, continuidad y discontinuada en la recta numérica en el desarrollo de la S2, como se mencionó anteriormente.

En relación a los niveles de razonamiento covariacional, la mayoría de los estudiantes alcanzaron el nivel de coordinación y el nivel de dirección, al coordinar el cambio de una variable con los cambios de la otra, y a su vez coordinar la dirección del cambio a través del análisis de las representaciones graficas. Finalmente, se da el nivel de coordinación cuantitativa el cual no se desarrolla de forma total, ya que los estudiantes determinan la razón de cambio como medio para calcular la expresión algebraica, pero no existe una conciencia de los que esto

significa. En esta investigación no se desarrolla el nivel 4, ni el nivel 5 del razonamiento covariacional.

En cuanto al contenido matemático, los estudiantes logran la comprensión del concepto de función por tramos, de variable independiente y variable dependiente, como se ha mencionado anteriormente, hay dificultades en relación al concepto de dominio y rango de una función especialmente en el desarrollo de la S2, sin embargo, se pudo evidenciar que existe una comprensión de estos componentes de la función, también realizan representaciones verbales, tabulares, algebraicas y gráficas.

En relación con lo anterior, haciendo especial énfasis en el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional, el cual es el principal objetivo de esta investigación, es posible decir que desde el estudio de la covariación en relación con el razonamiento covariacional los estudiantes logran comprender la coordinación del cambio de una variable con relación a los cambios de la otra, así como verbalizar la dirección del cambio de las variables. Respecto a los procesos de modelación y los niveles que la componen, se logra evidenciar que los estudiantes identifican las magnitudes, las variaciones presentes, las relaciones de dependencia, logrando la creación de modelos algebraicos y, pese algunas inconsistencias realizaron representaciones gráficas y verbales dentro del contexto de recolección de pianguas.

Por lo anterior se puede decir que los estudiantes lograron analizar, organizar y modelar el contexto de recolección de pianguas a través del estudio de la función por tramos, como parte del desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional.

El desarrollo de este trabajo como investigadora permitió reconocer desde un desarrollo en contexto real la importancia de relacionar el contenido matemático con el contexto en el que se desarrollan los estudiantes, ya que, permite el reconocimiento de las matemáticas como parte

del desarrollo humano y no aislada. Además, fue posible analizar la práctica de aula, pues como docentes en ocasiones por temas de tiempo en el desarrollo del currículo abordamos los conceptos matemáticos desde una enseñanza tradicional que de algún modo obstaculiza el proceso de enseñanza- aprendizaje. Por consiguiente no se logra el correcto desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos y se cae en la formación de estudiantes mecánico.

A modo de conclusión, es posible decir que se logra el alcance del objetivo general de la investigación el cual tuvo como propósito favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional a través de la modelación de fenómenos en el contexto artesanal de recolección de pianguas, mediante la función por tramos, ya que la secuencia didáctica diseñada permitió a los estudiantes apropiarse de las magnitudes, relaciones de dependencia, variaciones, cambios y el reconocimiento de la covariación presentes en este contexto, para lograr desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional y a su vez la comprensión del concepto de función por tramos.

REFERENCIAS

- Arrieta, J. L (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.
(Tesis Doctorado en ciencias en la especialidad de matemáticas educativa), Centro de
Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
[https://www.researchgate.net/publication/275770624_Las_practicas_de_modelacion_co
mo_proceso_de_matematizacion_en_el_aula](https://www.researchgate.net/publication/275770624_Las_practicas_de_modelacion_como_proceso_de_matematizacion_en_el_aula)
- Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje.
Editorial Síntesis. Madrid, España.
- Biembengut M. y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar
matemática. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Biembengut M.S. (2007). Modelling and Applications in Primary Education.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-29822-1_50
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes
Algebraic Reasoning.
[https://mathed.byu.edu/kleatham/Courses/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Lib
rary.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgeb
raicReasoning-
1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebra
icReasoning.pdf](https://mathed.byu.edu/kleatham/Courses/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf)
- Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In Clarke, et al. (eds.),
international perspectives on learning and teaching mathematics, Göteborg: national
center for mathematics education, 145-159.

Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.

<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>

Blomhoj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research.

En Blomhoj, et al. (eds.), mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics, ICMI, 1-18.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction.

https://www.researchgate.net/publication/36410733_Mathematical_modelling_in_mathematics_education_and_instruction

Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications, 299-307. Reston, VA: NCTM.

Bravo, M. (2015). Importancia del contexto en las matemáticas de educación infantil.

<https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/3382/BRAVO%20CRUZ%2C%20MANUELA.pdf?sequence=1>

Breiteig, T. y Grevholm, B. (s.f). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1005151/FULLTEXT01.pdf>

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S. y Zolkowe, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teor%C3%ADa_EMER-Final.pdf

Camacho, B. (2008). Metodología de la investigación científica: un camino fácil de recorrer para todos. <https://librosaccesoabierto.uptc.edu.co/index.php/editorial-uptc/catalog/view/124/154/3259>

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio.
<https://core.ac.uk/download/pdf/12341948.pdf>
- Caro, S. A. (2013). Propuesta de enseñanza sobre la modelación de funciones por tramos pasando de lo concreto a lo abstracto. (Tesis Maestría en enseñanza de la ciencias exactas y naturales), Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21519/71295941.2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School.
<https://www.mathedleadership.org/docs/coaching/PK-B-CARPENTER%20FRANKE%20LEVI.pdf>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education.
https://www.researchgate.net/publication/298917525_Arithmetic_and_algebra_in_early_mathematics_education
- Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático, revista digital innovación y experiencias educativas.
https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.
<http://funes.uniandes.edu.co/11199/2/Castro2012Dificultades.pdf>

- Chumpitaz, L. (2013). La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos, mediado por el Software GeoGebra, con estudiantes de Ingeniería. (Tesis Maestría en Enseñanza de las Matemáticas), Pontificia Universidad Católica, Perú.
<http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4514>
- Díaz, E., Arguedas, B. y Porras, J. (2012). Contexto sociocultural del estudiante como facilitador de su aprendizaje sobre conceptos de funciones en matemática.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947764011>
- FREUDENTHAL, H. (1991). Revisiting mathematics education: China Lectures, Dordrecht: Kluwer
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America, Vol. 1, 49-66. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Garijo, L. (2014). Enseñanza de funciones y gráficas en 1º Bachillerato basado en el uso de GeoGebra. (Tesis Maestría en Educación), Universidad Internacional de la Rioja, España.
<https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2432/garijo.alonso.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Gómez Ospina, O. M. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/5966/9582>

Henao, S. M., y Vanegas, Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos.

https://www.researchgate.net/profile/johnny_vanegas2/publication/341741377_la_modelacion_matematica_en_la_educacion_matematica_realista_un_ejemplo_a_traves_de_la_produccion_y_uso_de_modelos_cuadraticos/links/5ed15ff292851c9c5e664578/la-modelacion-matematica-en-la-educacion-matematica-realista-un-ejemplo-a-traves-de-la-produccion-y-uso-de-modelos-cuadraticos.pdf

Herrera, Y. P., y Muñoz, V. E. (2014). Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática.

<http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/7760/TE-17582.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los países bajos: Un recorrido guiado. Correo del maestro, 149, 23-54. Traducción: Héctor Escalona.

http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2008_guided-tour.pdf
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=12905>

Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education:

An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics 54, 9–35

https://www.researchgate.net/publication/226251698_The_didactical_use_of_models_in_realistic_mathematics_education_An_example_from_a_longitudinal_trajectory_on_percentage

- Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—
Examples and Experiences. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13138-010-0001-3>
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in
mathematics education. [https://hs.umt.edu/math/research/technical-
reports/documents/2006/11_Kaiser_Sriraman.pdf](https://hs.umt.edu/math/research/technical-reports/documents/2006/11_Kaiser_Sriraman.pdf)
- Malara, N. A. y Navarra, G. (2012). Promoting an early approach to the algebraic thought in
primary and middle school.
http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_mal/MalNavS01.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares para el área de
Matemáticas. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de matemáticas. Santafé
de Bogotá. http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). Derechos básicos de aprendizaje matemáticas
(DBA) v. 2. Santafé de Bogotá. http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf
- Ortiz, J. y Dos Santos, A. (2011). Modelización matemática en educación secundaria. Una
experiencia con estudiantes de 11 a 13 años.
<https://www.redalyc.org/pdf/904/90418851008.pdf>
- PEI. (2021). Proyecto educativo institucional. <http://ierosazarate.edu.co/>
- Reid, M. E., Gareis, M. I., Hernández, A. E., y Roldán, M. V. (2012). Funciones con
modelización matemática.
<http://funes.uniandes.edu.co/3638/1/Reid2012FuncionesNumeros81.pdf>
- Rojas, C. (2019). Función por tramos: representaciones gráfica y algebraica en una secuencia
didáctica mediada por el GeoGebra. (Tesis Maestría en Enseñanza de las Matemáticas),

Pontifica Universidad Católica, Perú.

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/15040/ROJAS_HUAM%c3%81N_FUNCION_POR_TRAMOS_REPRESENTACIONES_GRAFICA_Y_AL_GEBRAICA_EN_UNA_SECUENCIA_DIDACTICA_MEDIADA_POR_EL_GEOGEBRA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ruíz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España

Saa, Á. J. y Trochez, Á. K (2013). Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y GeoGebra. (Tesis Pregrado Educación Básica con Énfasis en Matemáticas), Universidad del Valle, Cali.

<http://funes.uniandes.edu.co/11378/1/Trochez2013Una.pdf>

Santacruz., O. A. (2016). Una propuesta de aula para la enseñanza de las funciones periódicas seno y coseno desde un enfoque variacional.

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/10234/7412-0525636.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. <http://funes.uniandes.edu.co/4872/1/AparicioInteractuandoAlme2009.pdf>

Tobón, S. Pimienta. y García J. (2010). Secuencias didácticas: metodología general de aprendizaje. Morales, G Secuencia didáctica: aprendizaje y evaluación de competencias (59-111). primera edición.

<https://josedominguezblog.files.wordpress.com/2014/08/aprendizaje-y-evaluacion-de-competencias.pdf>

Torres, J. J. (2014). Uso del contexto sociocultural como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la función lineal.

<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/30200/8412020.2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Torres, J. J. (2014). Uso del contexto sociocultural como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la función lineal.

<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/30200/8412020.2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Wagner, S. y Parker, S. (Sin fecha). Advancing Algebra.

<https://oak.ucc.nau.edu/smg224/401pdfs/algebrareadings/wagner1.pdf>

Xavier, A. L. (2015). Um estudo da genese instrumental para funcao de uma variavel real com varias sentencas. (Tesis Maestría Educación Matemática), Pontifícia Universidade católica, Sau Paulo.

<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18765/2/Armenio%20Lannes%20Xavier%20Neto.pdf>

Yam, E. y Aparicio, E. (2009). Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar.

<http://funes.uniandes.edu.co/16292/1/Yam2009Funcion.pdf>

Zill & Wright (2011). Matemáticas 1 calculo diferencial.

https://www.academia.edu/34757513/Matematicas_1_Calculo_Diferencial_Dennis_G_Zill

ANEXOS

Anexo A

Proceso De Conservación Del Molusco Piangua



Conservación Del Molusco Piangua Por Raíces Piangueras

La asociación de mujeres piangueras, Raíces Piangueras, del Consejo Comunitario de la Plata Bahía Málaga, está conformado por mujeres que se dedican tradicionalmente a la actividad de extracción de este molusco, pertenecientes a 3 de las 4 veredas (la Sierpe, la Plata, Miramar y Mangaña) que conforman el consejo comunitario de la comunidad negra de la Plata Bahía Málaga, hasta el momento, junto a la asociación FUVIPIA de la vereda de Mangaña, han liderado los procesos de monitoreo de las actividades y especies asociadas al ecosistema manglar, dentro del marco de proyectos y alianzas desarrollados con la CVC y otras instituciones que apoyan la conservación y uso responsable de los recursos naturales en el territorio.

La asociación se conformo legalmente en el año 2019, pero de desde años anteriores, viene realizando actividades de sensibilización enfocadas en la conservación del manglar y la piangua como producto pesquero que permite la sostenibilidad económica de las más de 300 familias Malagueñas.

La piangua, se ha convertido para el pacifico colombiano en un patrimonio cultural, tanto para la economía como para la gastronomía, es por ello que se han generados reglamento que regulen la extracción del producto de manera indiscriminada, una de las medidas de conservación expedidas por el gobierno nacional de Colombia es: Respetar la talla mínima de captura; el gobierno colombiano determinó que la talla mínima legal de captura de la piangua *Anadara tuberculosa* es de 5 cm de longitud total (INPA, Resolución 539 de 2000), de acuerdo al ciclo de reproducción y al crecimiento de esta especie. ¿Para qué



ASOCIACIÓN COMUNITARIA DE MUJERES PIANGUERAS
NIT:901351671-6
E-MAIL: raicespiangueras@gmail.com



se hace? Para que las pianguas juveniles crezcan y se reproduzcan varias veces, con el fin de mantener la conservación de la piangua.

De manera que la asociación comunitaria de mujeres piangueras como organismo territorial y ambiental, con el aval del consejo comunitario, ha venido creando medidas de conservación para implementar en las comunidades malagueñas y así lograr que el recurso permanezca en el tiempo, algunas estrategias son las siguientes:

- No uso de agentes químicos en los manglares, ni extracciones de material vegetal.
- No realizar la actividad del Pianguero en la quiebra.
- Cuando compremos piangua en concha, exijamos solo la grande.
- Evitar comprar la piangua “sacada de la concha” porque no sabemos de qué tamaño es la piangua.
- Usar el pianguímetro para comprobar que si tengan el tamaño legal.
- Colaborar con los procesos de ordenamiento y toma de información.
- Articular nuestro territorio a propuestas más amplias.
- Estamos en un área protegida y debemos articular nuestras acciones con una mirada integral que aporte al manejo y fortalecimiento con otras instituciones.
- Es importante considerar que la piangua ha sido evaluada por los expertos como un recurso amenazado debido a la sobre explotación, perdida de hábitat y poca área de distribución (manglares).
- Tener un lugar para almacenar cada uno de los residuos sólidos.

Lo anterior es un trabajo de sensibilización que requiere constancia, por ello, consideramos que es importante que se apliquen procesos de sensibilización a los niños, niñas



ASOCIACIÓN COMUNITARIA DE MUJERES PIANGUERAS
NIT:901351671-6
E-MAIL: raicespiangueras@gmail.com



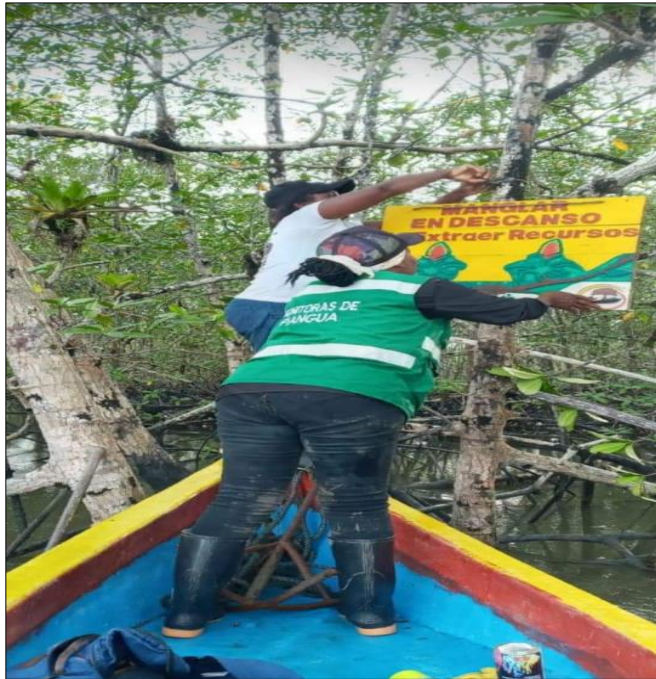
y jóvenes para ir construyendo un relevo generacional y sean quienes repliquen la importancia del manglar como sombrilla de infinidad de ecosistema y la piangua como actividad económica y cultural del Pacífico.

Matilde Mosquera Murillo

Matilde Mosquera Murillo
Representante legal-Raíces Piangueras

Anexo B

Marcación de Manglares



Nota. Marcación de manglares por la asociación raíces piangüeras 2020.

Anexo C

Control y Monitoreo



Nota. Control y monitoreo de la extracción de piangua por la asociación raíces piangüeras 2020.