



UNA CARACTERIZACIÓN DE ALGUNAS FORMAS COMO LAS PROFESORAS
DE BÁSICA PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PABLO EMILIO CARVAJAL
ASUMEN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN PENSAMIENTO ALGEBRAICO
TEMPRANO.

LUIS STIVEN DIAZ ANGULO
ZAIDA RENGIFO RENGIFO

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE PACÍFICO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURA
BUENAVENTURA
2023



UNA CARACTERIZACIÓN DE ALGUNAS FORMAS COMO LAS PROFESORAS DE
BÁSICA PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PABLO EMILIO CARVAJAL
ASUMEN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN PENSAMIENTO ALGEBRAICO
TEMPRANO.

LUIS STIVEN DIAZ ANGULO

201857996

ZAIDA RENGIFO RENGIFO

201857550

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciados en Educación básica con énfasis en Educación Matemática

DIRECTOR

LUIS ANTONIO ALEGRÍA SALAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE-SEDE PACÍFICO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

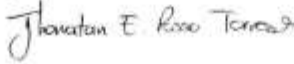
ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURA

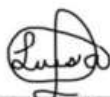
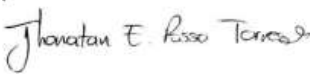
BUENAVENTURA

2023



Una caracterización de algunas formas como las profesoras de básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica		ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO								
Programa Académico : <u>Licenciatura en Ed. Básica Énfasis en Matemática</u>		Fecha								
Código del programa: <u>3469</u>		Resolución del programa: _____								
		<table border="1"><tr><th>Día</th><th>Mes</th><th>Año</th></tr><tr><td>8</td><td>5</td><td>2023</td></tr></table>	Día	Mes	Año	8	5	2023		
Día	Mes	Año								
8	5	2023								
Título del Trabajo o Proyecto de Grado										
UNA CARACTERIZACIÓN DE ALGUNAS FORMAS COMO LAS PROFESORAS DE BÁSICA PRIMARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PABLO EMILIO CARVAJAL ASUMEN ACTIVIDADES QUE PROMUEVEN PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO.										
Se trata de:										
Proyecto		Informe Final ☒								
Director										
Luis Antonio Alegría Salas										
Nombre del Primer Evaluador										
Jhonatan Elías Posso Torres										
Nombre del Segundo Evaluador										
Mónica Correa Angel										
Estudiantes										
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto						
ZAIDA RENGIFO RENGIFO	201857550	3469	zaida.rengifo@correounivalle.edu.co	3225324689						
LUIS STIVEN DIAZ ANGULO	201857996	3469	luis.stiven.diaz@correounivalle.edu.co	3225393679						
Evaluación										
Aprobado ☒		Meritorio		Laureado						
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto						
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:										
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador						
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa										
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).										
Firmas										
										
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador								

Recomendaciones	Observaciones	Razón de desacuerdo - Alternativas
Es un trabajo que muestra con claridad un interés en un problema de la educación, hace énfasis en la necesidad de trabajar con los profesores responsables de la formación en la básica primaria, para fomentar reflexiones alrededor de la enseñanza del álgebra. Se propusieron algunos ajustes de forma para dar mayor claridad sobre la intención que se tenía en el desarrollo del trabajo. (Mónica Correa Ángel) El ejercicio investigativo llevado a cabo da cuenta de una reflexión académica sistemática organizada, revisada y corregida, originada a partir de la identificación de la problemática la cual fue fundamentada en diferentes momentos y apartados del informe conduciendo a la formulación de la propuesta metodológica de estudio y recolección de datos a partir del enfoque teórico considerado y los aspectos necesarios para indagar ampliamente en lo requerido. Posteriormente, el análisis de dato y conclusiones reflejaron la importancia de una correcta fundamentación para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria y que a partir de la forma como el docente asume esa enseñanza se podrán movilizar aprendizajes de las matemáticas cercanos a sus propiedades y definiciones. En concordancia con lo anterior, el trabajo se considera APROBADO. (Jhonatan Elias Posso Torres)		
Firmas		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador



DEDICATORIA.

Dedico este proyecto a mi madre Ana Leidy Angulo Victoria por su amor, apoyo incondicional, motivación y sacrificio en todo momento de mi vida tanto personal como académico, a mi padre James Diaz quien contribuyó en este proceso, a mis hermanos quienes han estado apoyando mi proceso con palabras de aliento y motivación, a mi abuela Doris Victoria por su amor y entrega.

También quiero dedicar este trabajo a mi compañera y futura esposa Zaida Rengifo Rengifo quien con su paciencia, amor, conocimiento y empatía contribuyo satisfactoriamente en mi proceso académico de principio a fin. Por último, dedico este trabajo a familiares y amigos que creyeron en mí y motivan a ser mejor cada día.

Luis Stiven Diaz Angulo.

A mi madre Yoli Rengifo Peña por ser mi fuente de inspiración y motivación en cada uno de mis logros, quién me ha enseñado con su ejemplo a trabajar con dedicación y responsabilidad para alcanzar cada una de las metas que me proponga, a mi padre y hermanas quienes han estado de una u otra manera motivándome y haciéndome tomar fuerza en cada uno de los momentos difíciles que he pasado por este trayecto de la vida y en especial a mi compañero y futuro esposo por su amor y dedicación para poder lograr los frutos de este trabajo.

Zaida Rengifo Rengifo.

AGRADECIMIENTOS.

Agradecemos principalmente a Dios por darnos paciencia y sabiduría que se requiere para avanzar y culminar este proceso académico, con la oportunidad de crecer a nivel profesional, personal, social y familiar.

Agradecemos a nuestros familiares y amigos, quienes contribuyeron de manera positiva en este proceso, en especial a nuestras madres Ana Leidy Angulo Victoria y Yoli Rengifo Peña las cuales con su esfuerzo, sacrificio y apoyo incondicional se convirtieron en pilares importantes y necesarios para alcanzar nuestro objetivo profesional.

A nuestro director de trabajo Luis Antonio Alegría Salas por aceptarnos para realizar esta investigación. Su orientación, apoyo, confianza en nuestro trabajo y su capacidad para guiar nuestras ideas de manera oportuna, fueron un aporte importante no solo en el desarrollo de esta investigación, sino también en nuestro proceso de formación.

Extendemos los agradecimientos a nuestros profesores y compañeros quienes con su aporte y experiencia nos ayudaron a crecer a nivel académico, en especial al magíster Hilda Marleth Palacios Andrade quien con su conocimiento profesional nos brindó apoyo en todo momento no solo en nuestro crecimiento profesional sino también en el académico y personal.

Por último, a todas esas personas que con sus palabras de motivación nos daban fuerzas para avanzar con este proyecto. A todos los antes mencionados infinitas gracias por su apoyo, dedicación y amor.

RESUMEN

Este trabajo de investigación se enmarca en una caracterización de las formas como las docentes que enseñan matemática en la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal en básica primaria asumen actividades que promueven el pensamiento algebraico temprano, para ello, se establece un espacio de formación mediado por tres actividades bajo la estrategia metodológica entrevista basada en tareas, las cuales fueron aplicadas y posteriormente analizadas de acuerdo con lo planteado por Vergel y Rojas (2018) y Radford (2010 y 2021) sobre el desarrollo de pensamiento algebraico.

Respecto a los resultados y análisis de resultados, se logró evidenciar que las profesoras que enseñan matemática en básica primaria asumen estas actividades que promueven pensamiento algebraico temprano necesarias para su práctica de aula, expresándolos por medio de su actitud para trabajar y la apropiación que tuvieron de las mismas. También se observó que, mediar estas actividades en un espacio de formación es esencial no solo para movilizar ideas, expresiones y reflexiones sobre la enseñanza del álgebra en las primeras etapas de escolaridad sino, también para tomar conciencia del trabajo aritmético y algebraico en la escuela.

Palabras claves: *Álgebra temprana, pensamiento algebraico temprano, profesoras, práctica de aula, actividades, formación.*

ABSTRACT

This research work was framed in a characterization of the ways in which teachers who teach mathematics at the IE Pablo Emilio Carvajal in elementary school assume activities that promote algebraic thinking; therefore, a training space was established, mediated by three activities under the methodological strategy; task-based interview, which were applied and later analyzed according to what was proposed by Vergel and Rojas (2018), Radford (2010 y 2021) on the development of algebraic thinking.

Regarding the results and analysis of results, it was possible to show that teachers who teach mathematics in elementary school assume these activities that promote early algebraic thinking as necessary and important for their classroom practice, expressing them through their attitude to work and the appropriation they had of them. It was also observed that mediating these activities in a training space is essential not only to mobilize ideas, expressions, and reflections on the teaching of algebra in the early stages of schooling, but also to become aware of arithmetic and algebraic work.

Keywords: *Early algebra, early algebraic thinking, teachers, classroom practice, activities, training.*



TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES	4
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	4
1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	8
1.2.1 Objetivo general.....	8
1.2.2 Objetivos específicos.	8
1.3 JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN	8
1.4 ANTECEDENTES.	17
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL	25
2.1 PROPÓSITOS DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA DESDE LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS (PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS).	26
2.2 ÁLGEBRA TEMPRANA (EARLY ALGEBRA).....	28
2.3 PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO (PAT).....	30
2.4 UNA MIRADA A ALGUNOS ELEMENTOS QUE DETERMINAN LAS PRÁCTICAS DE AULA DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS.	37
2.4.1 Conocimiento de matemáticas	40
2.4.2 Conocimiento del currículo.....	40
2.4.3 Conocimiento de la práctica educativa o procesos de trabajo en el aula	40
2.4.4 Concepciones de docentes que enseñan matemática de básica primaria en la introducción del álgebra temprana en la escuela.....	41
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	44
3.1 DISEÑO METODOLÓGICO.....	44
3.2 FASES DE LA INVESTIGACIÓN.....	46
3.2.1 Fase 1: Identificación del fenómeno de estudio.....	46
3.2.2 Fase 2: Ejecución de la estrategia metodológica.....	47
3.2.2.1 Momento 1: Fundamentación para el diseño de la entrevista basada en actividades.....	48
3.2.2.2 Momento 2: Análisis de la revisión y las actividades identificadas.....	52
3.2.2.3 Momento 3: Diseño de las actividades.....	53
3.2.2.4 Momento 4: implementación y reflexiones de las actividades.	54
3.2.2.5 Momento 5: Análisis del espacio de formación.....	55
3.2.3 Fase 3: Síntesis de resultados.....	55

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	56
4.1 PROCESO DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	56
4.2 TIPIFICACIÓN DE ACTIVIDADES QUE LAS DOCENTES LES PRESENTAN A SUS ESTUDIANTES.	58
4.3 ESPACIO DE FORMACIÓN A PARTIR DE ACTIVIDADES.	67
4.3.1 Actividad 1: Secuencias.....	69
4.3.1.1 Ejercicio 1: Secuencia corporal.....	71
4.3.1.2 Ejercicio 2: Secuencia Figural.	73
4.3.1.3 Ejercicio 3: Secuencia Numérica	76
4.3.2 Actividad 2: Palitos de helado y Problema de los sobres.....	80
4.3.2.1 Ejercicio 1: Palitos de helado.....	82
4.3.2.2 Ejercicio 2: Problema de los sobres.	87
4.3.3 Actividad 3: Creación autónoma.....	90
4.3.4 Reflexiones docentes.....	93
CAPÍTULO V. SÍNTESIS DE RESULTADOS.....	99
5.1 CONCLUSIONES	99
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	104
ANEXOS.	110
ANEXO A. RESULTADO COMPARATIVO POR COMPETENCIAS PRUEBAS SABER 2017 Y APRENDIZAJES POR MEJORAR GRADOS 3° Y 5°, DE IE-PEC.	110
ANEXO B. EVIDENCIA FOTOGRAFICAS DE LA IMPLEMENTACIÓN.....	113



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Características de las formas del pensamiento algebraico	33
Tabla 2. Tipos de secuencias usadas en la investigación.....	36
Tabla 3. Aspectos de la entrevista basada en tareas.....	45
Tabla 4. Conceptos de aspectos del PAT.....	49
Tabla 5. Modelo de tipificación de las actividades identificadas; Elaboración propia	51
Tabla 6. Contenido y descripción de la actividad identificada.	52
Tabla 7. Cantidades de actividades presentadas por cada profesora.....	58
Tabla 8. Tipificación de las actividades identificadas.	59
Tabla 9. Reconocimiento de secuencias en actividades de P1 y P3	60
Tabla 10. Reconocimiento de generalización de patrones en actividades de P8 y P9	62
Tabla 11. Reconocimiento de variación y cambio en actividades de P4 y P5.	64
Tabla 12. Reconocimiento de indeterminación en actividades de P6.	65

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Resultado prueba saber grado tercero.....	16
Figura 2. Resultado prueba saber grado quinto.	16
Figura 3. Dimensiones del conocimiento didáctico (Ponte, 2012, p. 87)	39
Figura 4. Fases de la investigación	46
Figura 5. Plan de ejecución estrategia entrevista basada en actividades.	47



ÍNDICE DE IMÁGENES

<i>Imagen 1. Ejemplo de secuencias</i>	36
<i>Imagen 2. Actividad 1 de secuencias corporal, figural y numérica.....</i>	70
<i>Imagen 3. Desarrollo de ejercicio uno por las profesoras.</i>	72
<i>Imagen 4. Producción escrita de P9 ejercicio uno ACTV_1.</i>	72
<i>Imagen 5: Producción escrita de P5 ejercicio uno, ACTV_1</i>	73
<i>Imagen 6. Desarrollo del ejercicio dos por las docentes.....</i>	74
<i>Imagen 7. Producción escrita P7, ejercicio dos ACTV_1.....</i>	75
<i>Imagen 8. Producción escrita P3, ejercicio dos ACTV_1.....</i>	76
<i>Imagen 9. Producción escrita P2, ejercicio dos ACTV_1.....</i>	76
<i>Imagen 10. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P7.....</i>	77
<i>Imagen 11. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P1.....</i>	77
<i>Imagen 12. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P8.....</i>	78
<i>Imagen 13. Producción escrita de P4, ejercicio tres ACTV_1</i>	79
<i>Imagen 14. Producción escrita de P7, ejercicio tres ACTV_1</i>	79
<i>Imagen 15. Producción escrita de P3, ejercicio tres ACTV_1</i>	80
<i>Imagen 16. Actividad 2, Palitos de helado y problemas de los sobres.</i>	81
<i>Imagen 17. Desarrollo del ejercicio uno por las docentes.</i>	83
<i>Imagen 18. Desarrollo del ejercicio uno por las docentes.</i>	84
<i>Imagen 19. producción escrita de P7, ejercicio uno ACTV_2.....</i>	86
<i>Imagen 20. Producción escrita de P4, ejercicio uno ACTV_2</i>	86
<i>Imagen 21. Producción escrita de P6, ejercicio dos, ACTV_2.....</i>	88
<i>Imagen 22. Producción escrita de P7, ejercicio dos, ACTV_2.....</i>	88
<i>Imagen 23. Producción escrita de P3, ejercicio dos, ACTV_2.....</i>	89
<i>Imagen 24. Producción escrita de P4, ejercicio dos, ACTV_2.....</i>	89
<i>Imagen 25. Actividad tres, creación autónoma.....</i>	90
<i>Imagen 26. Producción escrita de P4, ACTV_3</i>	92
<i>Imagen 27. Producción escrita de P8, ACTV_3</i>	92
<i>Imagen 28. Producción escrita de P9, ACTV_3</i>	92

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

Imagen 29. Producción escrita de P1 ACTV_3	93
---	-----------



INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo de investigación describe una propuesta relacionada con una caracterización de algunas formas como las profesoras que enseñan matemática en básica primaria en la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano, este trabajo se constituye en cinco capítulos que se presentan a continuación.

En el primer capítulo, se expone los aspectos generales que direccionan este trabajo, los cuales están conformados por la problemática en la que se describen algunas dificultades relacionadas con la enseñanza tardía del álgebra y aspectos que determinan la práctica de aula del profesor, de manera que permite suscitar la pregunta de investigación *¿Cómo las docentes que enseñan matemáticas en educación básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven el pensamiento algebraico temprano, en sus prácticas de aula?*.

Seguido de ello, se formulan los objetivos, en los cuales se establece lo que se espera con la investigación; luego, se presenta la justificación en la que se dan las razones que sustentan la propuesta de este trabajo. Por último, se exhiben los antecedentes del problema de investigación, los cuales develan no solo la importancia y utilidad del desarrollo algebraico en los estudiantes en las primeras etapas de escolaridad, sino también, establecen propuestas que podrían ser significativas en la práctica de aula a partir de actividades y tareas.

En el segundo capítulo, se da a conocer una fundamentación teórica que se enmarca en cuatro aspectos que, relacionados entre sí, orientan el desarrollo de esta investigación. El primero

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

está relacionado con un marco curricular desde los Lineamientos y Estándares Básicos de Competencias (MEN, 1998 y 2006) centrado en el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, el segundo enfatiza la perspectiva de cambio curricular denominada álgebra temprana (Early Algebra) manifestando el impacto que ha generado en esta propuestas curricular en la educación matemática y la diferencia de esta con otras teorías, a partir de los trabajos de investigación de Kaput (1998), Aké (2013), Socas (2011) y Vergel (2016).

En esta misma línea, el tercer aspecto aborda el pensamiento algebraico temprano desde sus características y sus formas a la luz de los posicionamientos teóricos de Radford (2010a, 2011 y 2021) y Vergel (2015 y 2016). Para finalizar, el cuarto aspecto hace énfasis en algunos elementos que determinan la práctica de aula del profesor, basado en las investigaciones de Ponte (2012), Zapata, Ramírez, y Jaramillo. (2018) y Londoño (2020).

En el tercer capítulo se aborda el diseño metodológico de la investigación, el cual es de tipo cualitativo mediante la entrevista basada en tareas o actividades sintetizada por Camargo (2021). Así mismo, se develan las fases en las que se desarrolló esta investigación junto con su propósito y la forma en que a partir de cinco momentos se llevó a cabo el proceso de análisis de la información. Posteriormente en el cuarto capítulo, se presentan el proceso de análisis de la información obtenida, el análisis de los datos, y los resultados obtenidos de dicho análisis, los cuales se exhiben en cuatro apartados que develan cada sesión desarrollada en el espacio de formación.

Por otro lado, en el capítulo cinco, se dan a conocer las conclusiones a las que se llegó después de la implementación y análisis de los cuatro apartados mencionados en el capítulo anterior. Asimismo, se presenta las ideas desarrolladas en la investigación en relación con las formas como profesoras asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano, y



a su vez, se establecen algunas recomendaciones que pueden ser objeto de estudio de futuros trabajos de indagación en el campo de la Educación en Matemática.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas y los anexos que incluyen algunas fotografías relacionadas con la implementación, producciones escritas de las profesoras sobre las actividades trabajadas en el espacio de formación.

CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se presentan los aspectos que direccionan este trabajo, tales como la descripción del problema, en el cual se formula la pregunta que orienta esta investigación; los objetivos (general y específicos) los cuales permiten perfilar y delimitar la presente indagación y finalmente, la justificación, contextualización, y antecedentes aspectos que dan sentido a la orientación definida para el trabajo.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El paso de la aritmética al álgebra es considerado como una transición importante, dado que, estas son dos áreas fundamentales para conseguir un conocimiento matemático que permite llegar a un saber más complejo y avanzado dentro de las matemáticas que se enseñan en la escuela. Sin embargo, son evidentes las grandes dificultades que presentan los estudiantes cuando inician con estudios más avanzados del álgebra en educación secundaria, generando en ocasiones ciertos rechazos y desinterés hacia las matemáticas en muchos de ellos (Bouzas, 2011).

Estas dificultades pueden estar relacionadas con el proceso de enseñanza que se brinda en la etapa escolar, en el cual se evidencia que los aspectos de aritmética y álgebra según (Schlieman, Carraher y Brizuela, 2011) están desarticulados y contemplan un orden particular al ser enseñados, es decir, en el proceso de enseñanza no se tiene en cuenta la relación de la aritmética con el álgebra y tradicionalmente el álgebra se enseña cuando culminan los procesos aritméticos.

En consecuencia, dentro del contexto escolar colombiano, la enseñanza del álgebra que se brinda en básica secundaria, en palabras de Vergel y Rojas (2018) se inicia de manera abrupta,

incorporando contenidos totalmente nuevos para los estudiantes (estudio de los polinomios y la relación de ecuaciones e inecuaciones), sin que estos tengan un acercamiento previo del mismo en grados anteriores. Además, de acuerdo con Butto y Rojano (2004) el álgebra se asume como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo alfanumérico, lo cual, ocasiona que el inicio del trabajo algebraico se centre en la representación de expresiones simbólicas y en la manipulación de estas por parte de los estudiantes.

Este sentido, se logra evidenciar una enseñanza tardía del álgebra, la cual puede ser ocasionada entre otras cosas porque algunos docentes que enseñan matemática en educación básica primaria no son conscientes de aspectos importantes para que los estudiantes desarrollen su Pensamiento Algebraico Temprano (PAT)¹. Entre ellos, la influencia que generan con su forma de transmitir conocimiento y la importancia del rol que cumplen dentro del aula de clase, Agudelo (2007); actitud profesional, actualización a nivel profesional, competencias en el campo didáctico, Ponte (2012).

Además, Ernest (como se citó en Agudelo, 2007) manifiesta que en la enseñanza de cualquier saber matemático las concepciones de los profesores influyen poderosamente en su personalidad y enfoque de trabajo. Lo que significa que, si un docente de básica primaria considera que la enseñanza del álgebra inicia en secundaria, difícilmente dentro de sus planeaciones implementaría actividades que fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico en sus cursos, dando una mirada trivial a este elemento en su práctica de enseñanza.

¹ PAT: esta abreviatura se utilizará de ahora en adelante.

En este sentido, varias investigaciones (Vergel, 2015; Zapata, 2020, etc.) vislumbran que en las concepciones de los maestros que enseñan matemática en educación primaria, prevalece el desarrollo del pensamiento numérico como elemento fundamental de sus planes de áreas y prácticas de aula, en el cual, el estudiante aprende lo que debe saber al culminar este proceso de formación, para luego enfrentarse a secundaria con elementos nuevos y aislados a los enseñados en grados inferiores. Por ello, probablemente otros pensamientos propuestos por los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006) como el espacial, el métrico, aleatorio, variacional y sistemas algebraicos ocupan un espacio secundario.

En otros escenarios, una posible causa de la enseñanza tardía del álgebra radica en la formación disciplinar de los docentes que enseñan matemáticas en educación primaria y en la configuración de su práctica profesional, dado que, en múltiples casos estos profesores no tienen una formación en matemática que le permita concebir la importancia de desarrollar el PAT. Lo anterior, se afirma en Blanton y Kaput (como se citó en Zapata, Ramírez y López, 2018):

La incorporación del álgebra en la educación básica primaria no es un asunto trivial, si se considera que, generalmente los profesores de estos niveles no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas (Ávalos y Matus, 2010) y que ello podría conducir a que su conocimiento carezca de profundidad disciplinar, imposibilitando comprender el cómo y el porqué del álgebra en primaria. (pp.7- 8)

De la misma manera, Agudelo (2007) afirma que la gran mayoría de los docentes en su práctica de aula se inclina a un enfoque de transmisión y repetición mecánica apoyados en libros de texto y guías que estén a su alcance, esto hace que a dichos profesores se les dificulte herramientas pedagógicas para tal fin. Así, se hace necesario precisar que este tipo de profesores

no se consideran como creadores de conocimiento ni como agente de cambio, de hecho, la gran mayoría se convierten en un seguidor de decisiones y diseños de trabajos elaborados por otros (libro de texto y formato de las pruebas ICFES).

De esta manera, se encuentra que la enseñanza de álgebra es tardía, lo cual, dificulta un buen desarrollo del pensamiento algebraico, debido a que, algunos docentes que enseñan matemática en básica primaria no suelen articular aspectos algebraicos en sus cursos, ya sea por la actitud, concepciones y/o conocimiento disciplinar que tienen frente a la enseñanza del álgebra. Por ello, es importante seguir generando en la educación matemática propuestas curriculares y didácticas en las cuales se puedan reflexionar sobre pertinencia de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de álgebra en la escuela y, a su vez, proyectar la mirada en el educador matemático de básica primaria quien es el agente principal para que esta propuesta curricular (Early Algebra) pueda tener un efecto en el aula. Bajo esta perspectiva, en esta investigación se busca responder a la siguiente pregunta: *¿Cómo las docentes que enseñan matemáticas en educación básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal (IE-PEC)² asumen³ actividades que promueven el pensamiento algebraico temprano, para sus prácticas de aula?*

² IE-PEC: De ahora en adelante se hará uso de esta abreviación.

³ Asumir: Tomar para sí o hacerse cargo de algo no material, especialmente una tarea o una responsabilidad y aceptar o reconocer algo no material, Tomado de *Nueva gramática de la lengua española* (2009) y a la *Ortografía de la lengua española* (2010).

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1 Objetivo general.

Caracterizar algunas formas como las docentes que enseñan matemáticas en básica primaria de la *IE-PEC* asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano, para sus prácticas de aula.

1.2.2 Objetivos específicos.

- ✓ Describir algunas de las actividades que las docentes participantes del estudio presentan a los estudiantes durante sus prácticas pedagógicas relacionadas con el pensamiento algebraico temprano.
- ✓ Establecer un espacio de formación con las docentes de educación básica primaria, que permitan la movilización de actividades relacionadas con el pensamiento algebraico temprano en la escuela.
- ✓ Generar reflexiones pedagógicas sobre la apropiación de actividades que permitan el desarrollo del álgebra en los primeros años de escolaridad.

1.3 JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

En el siguiente apartado, se presentan las razones por las que es necesario trabajar con aspectos asociados a la enseñanza tardía del álgebra, la importancia de enfocarse en las prácticas de aula de los docentes que enseñan matemáticas en educación básica primaria, y, la necesidad de realizar esta investigación en la *IE-PEC*, este último se hará a través de una contextualización.

En este sentido, influenciados por las evidencias del potencial de la propuesta denominada Early Algebra para promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, a su vez, siendo conscientes de que el pensamiento numérico comprende gran parte de la

enseñanza de las matemáticas durante la Educación Primaria, se desarrolló este trabajo para aportar reflexiones en el campo de la educación matemática sobre las formas como las profesoras que enseñan matemática asumen actividades que promueven la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico a temprana edad.

De esta manera, dado que en el proceso de enseñanza del álgebra se presentan dificultades asociadas a la manera abrupta de incorporar los contenidos algebraicos Garzón (2013) y el rechazo o temor que presentan los estudiantes de secundaria frente a esta área de conocimiento, García y Estrada (2014). Desde el NCTM (2000) se establece que el álgebra debe ser tratada al comenzar la educación infantil en adelante con el propósito de ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en grados superiores. Es decir, estas nociones se consideran elementos fundamentales o relacionados con objetos matemáticos de mayor complejidad asociados, por ejemplo, al cálculo.

Asimismo, en los documentos curriculares vigentes para la educación básica y media de Colombia, se propone no solo iniciar un acercamiento a los procesos del pensamiento algebraico en edad temprana a partir de situaciones de variación y cambio, sino también, se plantea la relación que este tiene con los otros tipos de pensamientos matemático (numérico, espacial, métrico y aleatorio). Cabe mencionar que, el pensamiento variacional y los sistemas analíticos se relacionan directamente con el álgebra. De manera que la introducción del pensamiento algebraico se puede hacer a través de actividades que estén orientadas a la variación y el cambio de la vida cotidiana, generalización de patrones, secuencias, etc. Pues, promueven un

acercamiento a la comprensión y uso de conceptos y procedimientos de los sistemas analíticos y algebraicos MEN (2006).

Además, en estos documentos se contempla la coherencia vertical y horizontal sobre la relación de los pensamientos y los distintos conjuntos de grados, haciendo énfasis en una enseñanza alineada de principio a fin del proceso académico. Sin embargo, se evidencia que los profesores privilegian el desarrollo del pensamiento numérico más que el desarrollo del pensamiento algebraico. Este hecho hace suponer que algunos profesores desconocen lo importante que es trabajar de manera simultánea los dos pensamientos desde la educación primaria, de tal forma que genere un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del álgebra en Educación secundaria (Mora, 2012).

Ahora bien, la introducción del álgebra en edad temprana permite trabajar aspectos aritméticos y algebraicos de manera simultánea (las operaciones aritméticas con patrones y secuencias numéricas), facilitando el estudio de esta en niveles de escolaridad más avanzados. De la misma manera, Molina (2007) (citado en Zapata et al, 2018) expresa algunos beneficios pertinentes del álgebra en edad temprana tales como: observación de patrones, comprensión de propiedades, construcción de relaciones, etc.

Por lo anterior, desde diversas investigaciones (Kaput, 1995, 1998 y 2000; MEN 1998, 2006; Kieran 2004; Radford, 2010; Schlieman et al, 2011; Vergel, 2016; Vergel y Rojas, 2018) con el fin de contribuir al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, se propone cambiar la mirada y el rumbo de la enseñanza de procesos algebraicos, poniendo como eje central un trabajo del aula que fomente un aprendizaje significativo. Esto implica no ver el álgebra como un curso perfectamente definido que se debe enseñar en algunos grados específicos de la educación secundaria, como son octavo y noveno.

En suma, para el fortalecimiento de esta nueva visión se hace necesario contemplar la nueva perspectiva curricular denominada Early Algebra la cual potencia el desarrollo del Pensamiento Algebraico Temprano (PAT). Puesto que Kaput (como se citó en Vergel y Rojas, 2018) afirma que, trabajar con el álgebra en edad temprana ayuda a cambiar la visión de la enseñanza de las matemáticas que se tiene hoy en día, la cual se centra en brindar cursos de álgebra tardíos, repentinos, superficiales y totalmente aislados. Además, el foco debe estar en integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas, “algebrizar” las matemáticas escolares.

Por otra parte, esta introducción conlleva hacer una reflexión sobre las prácticas de aula de los profesores de primaria, en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico en las primeras etapas de escolaridad, ya que, en palabras de Godino y Font (2003), estos son los agentes principales de promover dichos procesos en el aula. Así pues, se contribuye a replantear la postura tradicional que se tiene sobre la enseñanza del álgebra en la escuela, dado que para muchos el álgebra es una asignatura de combinación alfanumérica que debe ser aplicada en básica secundaria. Ante esto, surge la necesidad que el docente de matemática de básica primaria comprenda que hablar sobre la enseñanza del álgebra en los primeros años de escolaridad no significa asignar el álgebra como un área específica sino más bien, ser integrada en otros contenidos matemáticos abordados en primaria, (Vergel, 2010). Sin embargo, muchos docentes de primaria de Colombia se niegan a cambiar sus ideales de enseñanza del álgebra escolar, además, estos no cuentan con un conocimiento disciplinar sólido que le permita brindar estos procesos en el aula de clase, Agudelo (2007).

Así mismo, Londoño (2020) manifiesta que, comprender cómo el maestro puede llevar el álgebra a la práctica de la básica primaria desde su conocimiento matemático y de sus concepciones, implica dar una mirada amplia sobre su formación, la manera cómo concibe el pensamiento algebraico temprano y sus formas de llevarlo al aula. Además, reflexionar sobre la pertinencia del trabajo algebraico con los estudiantes en edad temprana, es una oportunidad para que los docentes mejoren sus prácticas en cuanto a las perspectivas de enseñanza del álgebra en la escuela.

Por ello, es necesario impartir espacios de formación profesional en los cuales se promuevan elementos y conocimientos apropiados para poder introducir el trabajo algebraico temprano. De hecho, a partir de lo establecido por Hohensee (2017) la enseñanza del álgebra temprana no es trivial para futuros docentes de matemática, por tal razón, se requiere de un ejercicio de motivación, disponibilidad y actitud positiva, por parte del docente para transformar sus prácticas de aula.

Bajo estas consideraciones, en el marco de esta investigación se hace pertinente convocar a las profesoras que enseñan matemática en la IE-PEC, a un espacio de formación el cual gira en torno a actividades que están orientadas a aspectos como: variación y cambio, generalización de patrones, secuencia, regularidad, etc. los cuales desde la mirada de Vergel y Rojas (2018), Radford (2010 y 2021), MEN (1998 y 2006) son importantes para promover PAT. Además, permiten reflexionar acerca de la necesidad de introducir en sus estudiantes estos aspectos y en la forma como se desarrollan en sus prácticas de aula, y a su vez, reconocer las posibles habilidades o falencias que poseen frente a este tipo de conocimiento.

Por otro lado, con el propósito de contextualizar los escenarios que intervienen en esta investigación, se presentan características en relación con el MEN y la IE-PEC. En relación con

el MEN, se indagó sobre la enseñanza de las matemáticas en básica primaria de la educación formal; la cual ha sido organizada para el contexto colombiano en ciclos y grados, para el de interés de la investigación (educación básica primaria) se contemplan cinco grados organizados en dos ciclos (primero a tercero y cuarto a quinto); así mismo, se ha estructurado un currículo que establece algunas áreas de carácter obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional (PEI). Cabe mencionar que, estas áreas de conocimiento comprenderán un mínimo del 80% del plan de estudio. Dichas áreas son:

- Ciencias Naturales.
- Ciencias Sociales.
- Educación artística.
- Educación ética y en valores humanos.
- Educación física, recreación y deportes.
- Educación religiosa.
- Humanidades, lengua castellana e inglés.
- Matemáticas.
- Tecnología e informática.

De esta manera, en el primer Capítulo del Decreto 1850 de 2002 denominado jornada escolar, se evidencian cuatro artículos los cuales plantean que; las instituciones educativas formales tienen autonomía para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

para cada nivel educativo, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas establecidas, adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza y organizar actividades formativas, culturales y deportivas dentro de los lineamientos que se establezcan.

En este sentido, las matemáticas son consideradas como áreas obligatorias, por lo que se propone que dentro de la autonomía de las instituciones promuevan las cinco competencias que hoy se conocen como: Resolución y Planteamiento de problemas, Comunicación, Modelación, Razonamiento y Elaboración, Comprensión y Ejercitación de procedimientos. Las cuales contribuyen al desarrollo de cada uno de los pensamientos de los conocimientos básicos establecidos por el MEN (1998 y 2006): Pensamiento y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y sistemas geométricos, Pensamiento métrico y sistemas de medidas, Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Por otro lado, la IE-PEC la cual es la institución en la que se llevó a cabo esta investigación, perteneciente al sector público, está ubicada en la zona continental del Distrito Especial de Buenaventura comuna doce, específicamente en la transversal 87N° 3s-40 barrio Alejandro Cabal Pombo. Cabe mencionar que, la institución forma niños en los programas de básica primaria, secundaria, media y a su vez programas para adultos y jóvenes de extra-edad. Además, está constituida por ocho sedes, sin embargo, para este trabajo se optó por la sede principal.

Ahora bien, la sede principal cuenta con una capacidad de 1493 estudiantes en todas las jornadas (diurna, nocturna, sabatina y única). Asimismo, la institución contempla como misión en su Proyecto Educativo Institucional (PEI), ofrecer un servicio educativo que permita potenciar

en los niños, niñas y jóvenes, los valores humanos, despertando interés por la investigación, creatividad, participación, cultura, tecnología y el sentido empresarial.

En la IE-PEC, particularmente en básica primaria las encargadas de brindar la enseñanza en matemáticas y las otras áreas de conocimientos, son mujeres las cuales cuentan con un promedio de 23 años de experiencia, además, algunas de estas son licenciadas en básica primaria, especialistas en educación administrativa, magíster en educación inclusiva y especialistas en pedagogía, entre otras.

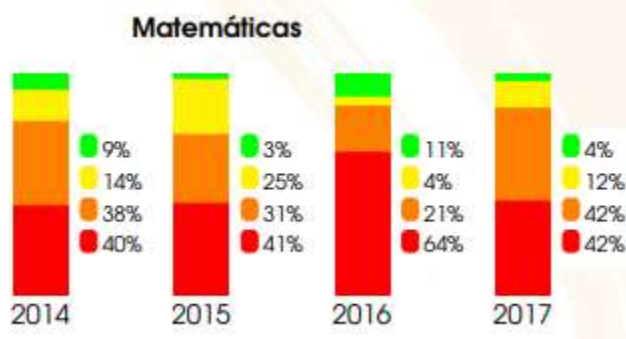
Ante esto, se puede inferir que ninguna de estas profesoras cuenta con una formación específica en matemáticas, sin embargo, han tenido capacitaciones del Programa para la Transformación de la Calidad Educativa Todos a Aprender (PTA) en matemáticas. Pero estas no han sido atendidas de la mejor manera, ya que, algunas profesoras manifiestan no comprender el propósito funcional del programa por lo cual afirman seguir en las mismas condiciones antes de iniciar las capacitaciones.

Otro aspecto importante por resaltar es el informe de las pruebas saber de la institución educativa, el cual permite evidenciar los bajos resultados que se han obtenido para el caso de los grados 3° y 5° de básica primaria en relación con el área de Matemáticas específicamente en las competencias de Comunicación, Razonamiento y Resolución y Planteamiento de problema. (Véase anexo A: Resultados pruebas saber Matemáticas por competencias, grados 3° y 5°).

Cabe señalar que, las últimas pruebas que el colegio registra en cuanto a la evaluación de los alcances de las competencias en matemáticas en los estudiantes fueron del 2017, sin embargo, desde ese año en adelante el proceso de evaluación para esos grados cambia de prueba

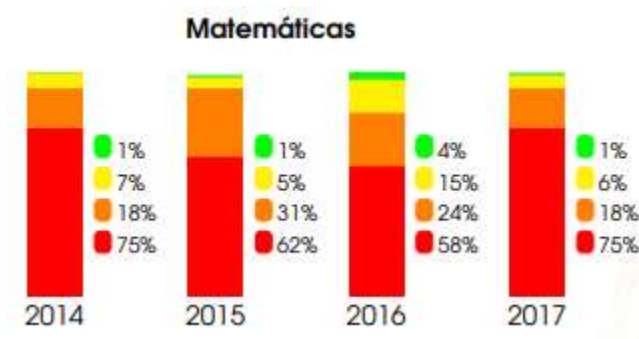
saber a evaluar para avanzar, debido a que, la institución implementó la jornada única y por cuestiones administrativas hasta el momento no se ha presentado ningún resultado de estas.

Figura 1. Resultado prueba saber grado tercero.



En esta figura se vislumbra el nivel de insuficiencia que presentan los estudiantes de grado tercero de primaria, además, se observa un nivel avanzado muy bajo el cual no supera el 5%. De la misma manera sucede con los resultados de grado quinto véase figura 2.

Figura 2. Resultado prueba saber grado quinto.



En esta, el nivel de insuficiencia es mayor a la anterior, superando el 70%, además el nivel de avance fue mínimo con solo el 1%. Esto puede suponer que, el estado de dominio de los contenidos matemáticos de los estudiantes es insuficiente, por tanto, no podrían desarrollar las competencias matemáticas antes mencionadas y a su vez los aprendizajes evaluados en esta competencia y el nivel académico del establecimiento educativo presentarán un déficit significativo (Véase anexo A).

Frente a este panorama expuesto, es necesario implementar nuevas estrategias para abordar las dificultades a las que se ha venido haciendo referencia. Es decir, el bajo desempeño que han presentado los estudiantes en las pruebas saber y la falta de formación de las docentes en matemáticas, señala la necesidad de promoverlas a un ejercicio de formación y reflexión permanente, sobre sus prácticas de enseñanza de las competencias que permiten un buen desarrollo del Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

1.4 ANTECEDENTES.

Teniendo en cuenta el eje central de esta investigación, el cual está orientado hacia el álgebra temprana y su importancia para promover pensamiento algebraico en la escuela, dejando ver un interés significativo de su inclusión dentro del currículo de matemática. En este sentido, se han realizado diferentes trabajos de investigación nacionales e internacionales que presentan no solo la importancia y utilidad del desarrollo algebraico en los estudiantes en las primeras etapas de escolaridad, sino también, establecen propuestas que podrían ser significativas en la práctica de aula a partir de actividades y tareas. Asimismo, se resaltan otras investigaciones las cuales están orientadas a algunos aspectos que determinan la práctica de aula y las formas para abordar los procesos algebraicos en esta etapa escolar, siendo éste un aspecto importante para que la propuesta (Early Álgebra) pueda tener éxito en el aula de clase. Estas investigaciones se presentan a continuación resaltando los aspectos más relevantes de las mismas en conexión al propósito de este trabajo.

- **Estudios sobre la introducción del álgebra temprana.**

El nuevo enfoque curricular, integra el álgebra en los primeros ciclos de escolaridad matemática, lo cual permite que los estudiantes desarrollen pensamiento algebraico antes de

ingresar a estudios más avanzados del álgebra escolar. Esto puede ser argumentado por investigadores como Molina (2009) y Merino (2012), quienes evidencian como estudiantes de básica primaria pueden estructurar un pensamiento algebraico temprano a partir del contenido curricular matemático desde su nivel académico.

En este sentido, Vergel (2016) en su trabajo doctoral que lleva como título; *Sobre la emergencia en el pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Este manifiesta la necesidad de iniciar procesos algebraicos en básica primaria, de manera que a los estudiantes le sea más fácil el acceso a conceptos de álgebra más avanzada, en otras palabras, el trabajo con procesos algebraicos a edad temprana promueve el acercamiento a aspectos considerados importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico tales como; identificación de patrones, generalización, cambio, variación, etc.

Así mismo, este autor sugiere continuar indagando otras formas de pensamiento algebraico provocadas por las situaciones matemáticas y concluye que:

- Para la incorporación del álgebra temprana en la educación básica primaria, una de las formas más eficaces es la generalización de patrones, porque permiten a los estudiantes, acercarse a situaciones de variación que se eligen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Los medios semióticos tales como; el movimiento, gestos, ritmo, palabras, actividades perceptuales, etc. Son importantes para analizar los procesos usados por los estudiantes al abordar situaciones de álgebra temprana, lo cual contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico temprano (PAT).

- En la construcción del currículo de matemática es importante tener presente el álgebra temprana para brindar una enseñanza con sentido, de manera que le sirva al estudiante en estudios más avanzados.

Otro trabajo que se referencia para la introducción del álgebra temprana es el artículo realizado por Alsina y Pincheira (2021), el cual lleva como nombre *Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria*.

Este artículo tuvo como propósito analizar la incorporación del álgebra temprana en los currículos de cuatro países; Austria, Chile, Estados Unidos y Singapur, a partir de los conocimientos que la caracterizan. En este sentido, en el presente artículo se logra mostrar que; la comprensión de distintos tipos de relaciones, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprensión del cambio y el uso de variables para determinar una constante o incógnita. Son conocimientos fundamentales para identificar cómo se caracteriza el álgebra temprana.

Estos trabajos, aportan en esta investigación un panorama de las formas de pensamiento algebraico las cuales son provocadas por las situaciones matemáticas, y a su vez, algunos conocimientos que ponen de manifiesto la caracterización del álgebra temprana a partir de su incorporación en los currículos de matemáticas.

- **Estudios relacionados con actividades y tareas que permiten el desarrollo del PAT.**

Promover pensamiento algebraico en la educación primaria ha sido tema de interés recientemente, centrando su atención en el impacto que genera en básica secundaria cuando se le

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

presenta a los estudiantes tareas y actividades de variación y procesos de generalización desde temprana edad. En suma, esta incorporación genera la posibilidad de conducir ideas algebraicas como; (patrones, secuencias, generalizaciones, variación, cambio, entre otras) de manera anticipada.

En este orden, el artículo de Radford (2010), el cual tiene como objetivo investigar los diversos aspectos del pensamiento algebraico de los estudiantes, en relación con los conceptos algebraicos estipulados por el plan de estudios de Ontario y haciendo énfasis en la generalización de patrones, pone de manifiesto que la generalización de patrones se considera una de las vías principales para introducir a los alumnos en el álgebra, además aclara que no todas las generalidades son algebraicas, por lo que, los docentes deben estar atentos para no confundir la generalización algebraica con otra manera de entender lo general.

De manera que, para que una generalización de patrones pueda llamarse algebraica se requiere de tres componentes. En primer lugar, se debe ser consciente de observar un elemento común en algunos términos particulares dados, seguido de ello, se pretende formar un concepto general que permita sintetizar las coincidencias de los elementos observados en la secuencia y finalmente, hacer visible una regla que proporcione una expresión de cualquier término de la secuencia.

Un segundo trabajo que se refiere para argumentar los estudios relacionados con actividades y tareas que ayuden al desarrollo del PAT es un libro doctoral realizado por Vergel y Rojas (2018) titulado: *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*.

En este libro, los doctores en educación matemática trabajaron entre otras cosas, con tareas realizadas por el profesor en el aula con el propósito de potenciar el desarrollo del

pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes. Además, presenta una contribución relevante para la educación matemática y en particular en el área de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Igualmente, incluye cinco capítulos cuyos contenidos muestran cómo el trabajo de investigación realizado por los autores puede ser de gran ayuda para los profesores que enseñan álgebra.

Este libro muestra como resultado de ello: potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes se puede hacer a partir de la generalización de patrones, la cual es clave para iniciar el trabajo algebraico en la escuela; aplicar actividades y tareas aritméticas que contengan aspectos algebraicos tales como; la generalización y repetición de variación, permite un desarrollo del PAT.

Los trabajos presentados anteriormente, suministran a esta investigación estilos de actividades que pueden ser usadas para el trabajo con las docentes participantes, así como también, una serie de aspectos que sirven para promover pensamiento algebraico en edad temprana logrando mostrar que desde la educación primaria se puede trabajar este pensamiento a través dichos aspectos.

- **Estudios relacionados con las docentes y el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.**

La forma como el docente concibe el pensamiento algebraico y el comienzo de su desarrollo influye de manera significativa en el aprendizaje de los estudiantes, en tanto, es a partir de la planeación en el aula donde se piensan, construyen y se llevan a cabo las actividades que incitan al estudiante a inferir, reflexionar y proponer estados de pensamiento matemático. Lo

anterior, puede ser argumentado desde lo que plantea Molina (2006), “las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida y que la manera de enseñanza de un maestro puede facilitar o complejizar las maneras de pensar algebraicamente.” (p.139).

En esta misma línea, Zapata, Ramírez y López (2018) en su artículo denominado: El profesor de primaria: una reflexión sobre su papel en la inclusión del álgebra temprana en el currículo escolar. divulgan los resultados que emergieron de un proceso de indagación documental, respecto al profesor y su papel en la inclusión del álgebra temprana en el currículo de la educación básica primaria. En el cual se sintetizó que:

- La determinación, reflexión y actuación del profesor puede ser elemento decisivo para que se logre la incorporación del álgebra temprana en la educación primaria, ya que esta no ha sido considerada en esta etapa de escolaridad debido al enfoque tradicionalista del maestro.

- Crear espacios profesionales que permitan al docente de primaria adquirir conocimiento para la enseñanza del álgebra temprana.

Por su parte, Londoño (2020) en su trabajo de investigación para optar por el título de magíster en educación, en cual lleva como nombre: La movilización de las concepciones de maestros de básica primaria para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Pone como eje central analizar cómo el maestro de básica primaria moviliza sus concepciones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Es esta investigación, la autora establece que: las concepciones de los docentes juegan un papel fundamental, puesto que, está en su decisión el profundizar conceptos y permitirse comprender la necesidad de ir más allá de las operaciones numéricas con el objetivo de ampliar

su perspectiva para potenciar el desarrollo del PAT en los estudiantes; la cualificación de los docentes de primaria, es necesaria para que éstos tengan la posibilidad de orientar los procesos de pensamiento algebraico de manera consciente sin recurrir a una mera manipulación de procesos algorítmicos.

Otra investigación que se refiere para las miradas de las docentes sobre el desarrollo del PAT es la realizada por Sandra Milena Zapata en el año 2020 para obtener el título de doctorado en Educación, el cual se denomina: Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

En esta investigación, la autora establece como propósito analizar cómo el profesor de matemáticas de primaria transforma su conocimiento profesional en el contexto del pensamiento algebraico temprano, poniendo como evidencia de sus resultados la importancia del papel que tiene el profesor para promover pensamiento algebraico en los primeros grados de enseñanza, en relación con su conocimiento profesional, el cual puede transformarse cuando toma conciencia de las tareas y actividades que pueden desarrollar en el aula, también, establece que el proceso de transformación lleva consigo una configuración de las interacciones consigo mismo, el conocimiento, el currículo, los estudiantes y la práctica, lo cual reflejan cambios en las ideas de los docentes acerca de la necesidad y posibilidad de enseñar conceptos y procesos algebraico en la educación básica primaria.

Bajo este panorama, estas investigaciones presentan una mirada amplia sobre la formación del profesor, sus ideas sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, y a su vez la forma como estas influyen en la enseñanza escolar. Además, vislumbran que el profesor debe ser el principal agente del cambio, desde las ideas hasta su conocimiento.

Así pues, en esta indagación se exponen diferentes aspectos que manifiestan que en educación básica primaria es necesario abordar procesos algebraicos a temprana edad en las prácticas de aula de los docentes, dado que, en este escenario se permite observar las formas cómo los docentes promueven conocimientos matemáticos, especialmente contenidos y procedimientos que favorezcan el desarrollo del PAT.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

Teniendo en cuenta el propósito fundamental de esta investigación, se hace necesario destacar algunos referentes teóricos considerados pertinentes para la fundamentación de esta, expuestos en cuatros momentos. Primero, se presenta un marco curricular desde los Lineamientos y Estándares Básicos de Competencias en relación con el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos, el cual, establece aspectos relacionados con el trabajo algebraico en la escuela y su implicación en la enseñanza y aprendizaje, MEN (1998 y 2006). En un segundo momento, se plantea la perspectiva denominada álgebra temprana (Early Algebra), partiendo desde manifestando su inicio, el impacto que ha generado en las nuevas propuestas curriculares en la educación matemática y la diferencia de esta con otras teorías, a partir de los trabajos de investigación de Kaput (1998), Aké (2013), Socas (2011) y Vergel (2016).

Tercero, se aborda el PAT desde sus características y sus formas, además algunos aspectos de este pensamiento los cuales son necesarios para el diseño de las actividades que orientan el trabajo en aula con las docentes participantes, a partir de lo mencionado por Radford (2010a, 2011 y 2021), Vergel (2015 y 2016). En un cuarto momento, se hace énfasis en algunos elementos que determinan la práctica de aula, en este se evidencia la formación y conocimiento profesional de los docentes de matemáticas en educación primaria, basado en las investigaciones de Ponte (2012), Zapata, Ramírez, y Jaramillo. (2018) y Londoño (2020).

2.1 PROPÓSITOS DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA DESDE LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS (PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS).

En los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) de Colombia no se aborda explícitamente el enfoque del Early algebra, sin embargo, se reconocen las ideas algebraicas a temprana edad; debido a que hay una necesidad de mejorar los desempeños académicos de los estudiantes de educación secundaria, especialmente de grados octavo y noveno, pues enfrentan una serie de dificultades por la transición lineal que se tiene del trabajo numérico hacia el trabajo algebraico (símbolos, letras, variación, etc.). En este sentido, para mejorar algunas de las dificultades que trae consigo esta transición, el MEN (1998 y 2006) proponen que en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra se tenga en cuenta los cinco tipos de pensamientos (numérico, espacial, métrico, variacional y estocástico), a su vez los cinco procesos generales de la actividad matemática (formulación, tratamiento y resolución de problemas; comunicación; el razonamiento; la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos y modelación) desde los primeros años de escolaridad a partir de tareas y actividades que brinden la oportunidad de formular conjeturas, generalización y argumentación.

Para efecto de esta investigación el pensamiento variacional y los sistemas analíticos ejerce un papel fundamental dado que se relacionan directamente con el álgebra. De manera que la introducción del pensamiento algebraico se pueda hacer en edad temprana a través de actividades que estén orientadas a la variación y el cambio de la vida cotidiana, generalización de patrones, secuencias, etc. pues, promueven un acercamiento a la comprensión y uso de conceptos

y procedimientos de los sistemas analíticos y algebraicos. Así pues, el pensamiento variacional se entiende como;

La identificación, reconocimiento, caracterización y percepción de la variación y el cambio de cantidades en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66).

De la misma manera, el MEN (2006) propone que el desarrollo de este pensamiento inicie en los primeros niveles de escolaridad con tareas y actividades que brinden la oportunidad de ver la manera cómo cambia, disminuye o aumenta una secuencia; identificar una sucesión de figuras, números o letras; conjeturar el valor que sigue en una secuencia; intentar formular un procedimiento que permita reproducir un patrón para hallar los términos siguientes, además, verificar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas y/o modelarlas.

Ahora bien, en relación con el trabajo algebraico, el MEN (1998) manifiesta que una buena enseñanza del álgebra permitirá de cierta manera al estudiante organizar y modelar matemáticamente situaciones de su vida diaria y de las ciencias. Además, le ayudará a asimilar cálculos en cursos más avanzados ya que, ha desarrollado el pensamiento variacional y la generalización.

Por tanto, es conveniente mencionar que desde los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) de Colombia existe una ligera diferencia entre el pensamiento variacional y el pensamiento algebraico, dado que el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente, sobre el estudio de la variación y el cambio. Y el pensamiento

algebraico es entendido como el conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional. Rojas y Vergel (2013).

2.2 ÁLGEBRA TEMPRANA (EARLY ALGEBRA)

El trabajo del álgebra con estudiantes de temprana edad trae consigo la transformación del currículo de matemáticas, cambiando las maneras o formas limitadas y tradicionales que se tienen sobre la enseñanza de estas, haciendo hincapié en ampliar el panorama del trabajo algebraico desde los primeros años de escolaridad. Esto implica que, se reconozcan las perspectivas curriculares que proponen una visión que no centra su enseñanza en grados convencionalmente conocidos (8° y 9°) sino, ser incorporado en los primeros años de forma que favorezca el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Por lo expresado anteriormente, varias investigaciones; Godino y Font, (2003); Kieran (2004); Radford (2010, 2013 y 2014); Ake, (2013); Rojas y Vergel, (2013, 2018); Vergel, (2014 y 2019), toman como punto de partida lo planteado por Kaput (1998) quien sostiene que, “la clave para la reforma del álgebra es integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas, “algebrizar” las matemáticas escolares” (p. 24) es decir, no se debe esperar hasta ciertos grados de secundaria para iniciar el trabajo con álgebra en la escuela.

Ahora, esto no implica que se incorpore en el horario de clase de los estudiantes de educación primaria además de aritmética otra asignatura denominada álgebra, sino que se busca considerarla como una forma de reflexionar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas que permita una enseñanza dotada de comprensión y significado de las mismas en edad temprana, Vergel (2010). Cabe mencionar que, esto puede ser un reto para el maestro, pero también una posibilidad de pasar de las listas de contenidos fragmentados a una integralidad formativa que potencie el desarrollo de pensamientos en el saber matemático.

Por otra parte, Aké (2013) destaca la importancia de hacer una distinción entre la Pre-Álgebra y Early Algebra, ya que éstas contemplan un propósito diferente. la Pre-Álgebra tiene como objetivo, mitigar las dificultades que presentan los estudiantes de básica secundaria al iniciar el trabajo con el álgebra, es decir, brindar elementos algebraicos antes tratar con ello. Sin embargo, el álgebra temprana tiene como propósito en palabras de Vergel (2014) reconocer y desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes desde edad temprana, además, incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el fin de promover el sentido y significado de las mismas. Esto a partir del estudio de la generalización de patrones, identificación de relaciones numéricas, compresión de estructuras, etc.

Además, Socas (2011) menciona que el álgebra temprana implica que el maestro posibilite en el aula de matemáticas aspectos como la observación y descripción de patrones, la identificación de relaciones y propiedades matemáticas, la elaboración de predicciones, el establecimiento de argumentos y la realización de modelizaciones; se trata, entonces, de la algebraizar el currículo, esto es, integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares Kaput (2000), Blanton y Kaput (2005). En definitiva, Mora (2012) “se trata de desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico desde la educación primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del álgebra en la educación secundaria” (p.1).

En síntesis, la propuesta Early Álgebra implica concebir una visión distinta del álgebra, a través de la cual se posibilite el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad, sin requerir ni ser necesaria la presencia de símbolos alfanuméricos. En este sentido, esta investigación se enmarca en la propuesta de álgebra temprana y, por tanto, la

pertinencia y necesidad de abordar el pensamiento algebraico temprano, el cual se estudiará a partir de sus características y las tres formas de pensar algebraicamente.

2.3 PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO (PAT).

Introducir la enseñanza del álgebra en educación primaria promueve el desarrollo del pensamiento algebraico y favorece formas de pensar algebraicamente, especialmente si no se reduce a la manipulación de símbolos específicos, pues de acuerdo con Radford (2011) el pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades que tiene el individuo para comprender patrones, identificar regularidades y utilizarlos para tratar cuestiones de términos remotos y no específicos.

Ahora bien, considerando la idea de que el pensamiento algebraico está detrás del pensamiento aritmético, muchos docentes se inclinan a no promover estos dos pensamientos en conjunto. Esto implica que se siga viendo estos dos campos de manera distinta, desarrollando uno en básica primaria (aritmética) y otro en básica secundaria (álgebra). De acuerdo con lo anterior, Vergel (2016) manifiesta que, de manera tradicional en los currículos de matemáticas se sostiene la idea de enseñar el álgebra en básica secundaria, dado que, para entenderla es necesario tener una base aritmética sólida. Sin embargo, es importante hacer una distinción entre estos pensamientos de manera que al docente le permita saber cuándo se trabaja con uno de ellos y que los caracteriza para unirlos y/o diferenciarlos.

En este sentido, Radford (2011) hace una distinción entre el pensamiento aritmético y algebraico, al establecer que, en este último se trabajan cantidades indeterminadas de forma analítica. En términos generales, este pensamiento se relaciona con analizar las relaciones entre cantidades, el estudio del cambio y de la generalización, la resolución de problemas, la

modelación, la justificación, la predicción, la elaboración de hipótesis y la verificación, Kieran (2004).

Asimismo, Radford (2010) presentada una caracterización del pensamiento algebraico, a partir de tres aspectos fundamentales, cabe señalar que estas se pueden trabajar en cualquier edad

- **Indeterminación:** Es aquello opuesto a la determinancia numérica, en la cual intervienen objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros.
- **Analiticidad:** Implica la manera de trabajar con los objetos indeterminados identificando el carácter operatorio de los mismos.
- **Denotación:** La forma específica en la cual se nombra o se hace referencia a los objetos, por ejemplo; gestos, palabras, signo alfanumérico etc.

De esta manera, el uso de símbolos alfanuméricos no determina el pensar algebraicamente, sino que lo indeterminado y lo analítico es lo que fundamenta este tipo de pensamiento, dado que, Radford (2011) afirma que los dos primeros aspectos, la indeterminación y la analiticidad, posibilitan trabajar con cualquier figura de la secuencia y aunque esto no implique necesariamente el uso de letras, de símbolos alfanuméricos, sí implica hacer álgebra.

Por otro lado, en esta investigación se hace relevante señalar la tipología de formas de pensamiento algebraico (Factual, contextual y simbólico) propuestas por Radford (2010a). Ya que estas, permiten diseñar tareas o actividades orientadas a potencializar el pensamiento algebraico, es decir, las formas de pensamiento sirven a partir de sus características, como base y orientación para que los docentes inicien a desarrollar dicho pensamiento en sus estudiantes.

- **Pensamiento algebraico Factual:** los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más 2”. (Vergel, 2016, p.74)
- **Pensamiento algebraico Contextual:** los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación, tales como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total”. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos. (Vergel, 2016, p.74)
- **Pensamiento algebraico Simbólico:** las frases “clave” son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ o $2n - 1$. Según Radford (2010a), en este estrato de pensamiento “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso” (p. 8), a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (Vergel, 2016, p.74).

A continuación, se ilustra de manera detallada las características de estos tipos de pensamiento algebraico en la siguiente tabla:

Tabla 1. Características de las formas del pensamiento algebraico

Formas	Pensamiento Factual	Pensamiento Contextual	Pensamiento Simbólico
Características	- Los medios semióticos: gestos, ritmos, palabras, movimientos, actividad perceptual - La indeterminación no se expresa en acciones concretas	- Los gestos y las palabras se sustituyen por otro medio semiótico (Frases claves). - La indeterminación se convierte en un objeto de discurso. - La formulación algebraica es una descripción del término general	- La frase clave se representa por un símbolo algebraico - La indeterminación queda explícita y enunciada de manera clara.
Nota: Radford (2010a) y Vergel (2016), referentes utilizados Fuente: Elaboración propia			

Tomando los puntos de vistas considerados en las referencias anteriores se asume la necesidad de intervenir a través de esta investigación en el proceso de enseñanza de las matemáticas en educación primaria y con ello definir aspectos del pensamiento algebraico que sean pertinentes en este nivel educativo, de los cuales se toma como punto de partida la generalización de patrones, que ha sido destacado por diversos autores como una perspectiva y actividad importante del álgebra escolar, además, se hace necesario tener muy claro a qué se hace referencia con este aspecto y cómo se debería trabajar en el aula de clase.

➤ **Aspectos del PAT para contemplar en actividades que orientan el trabajo en el aula.**

Para caracterizar las formas como las docentes asumen actividades que promueven PAT se hace necesario identificar algunos elementos como la generalización de patrones y las

secuencias, que han sido destacados por diversos actores como una de las formas que se podría iniciar la introducción del álgebra temprana en la escuela, a partir de las investigaciones de Radford (2010a) Vergel (2015 y 2016).

a) Generalización de patrones.

La generalización de patrones según Radford (2010) se relaciona con la observación profunda que se hace de algo, es decir, ver más allá de lo superficial. Además, se consideran como una forma indispensable para la incorporación del álgebra en la escuela debido a que posibilita el acercamiento a situaciones de variación y cambio, entendidos estos como aspectos importantes en el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico. Asimismo, este autor en el 2013 establece que, la generalización de patrones permite:

- I. Identificar una característica común que tienen algunos elementos relacionados entre sí.
- II. Reconocer un elemento común entre términos de una secuencia.
- III. Usar propiedades comunes de forma que permita deducir una expresión que sirva para calcular cualquier término dentro de una secuencia numérica.

Por su parte, Vergel (2016) define la generalización de patrones como el punto de partida para la abstracción matemática, ya que es una de las actividades más asociada al desarrollo del pensamiento algebraico, pues permite que el individuo desarrolle situaciones que impliquen variación, acompañada de formas discursivas, gestuales y procedimentales. Es decir, este autor les da mayor prioridad a las formas de recursos cognitivos, perceptuales, como comunicacionales simbólicas y orales, dibujos y gestos.

Por otro lado, la generalización, contempla los patrones los cuales Castro, Cañadas y Molina (2012) citados en Merino (2012) lo definen como; “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p. 57). La relación entre patrones y generalización ha sido reconocida por diversos autores, Pólya (s.f) (Citado en Merino, cañadas & Molina, 2012) señala que el “reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar, ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos” (p.3). Además, estos patrones se dividen en numéricos, pictóricos y de repetición.

De esta forma, es importante que en el diseño de las actividades se reconozca cuál es la intención o propósito que se persigue cuando se habla la generalización de patrones, de tal forma que haya una reflexión profunda de cómo se concibe y se lleva a cabo este proceso en aula para poder establecer nuevas rutas o estrategias didácticas y pedagógicas.

b) Secuencias

De acuerdo con Radford (2021) la secuencia es un número finito de términos de una sucesión figural (es decir, una sucesión constituida de “figuras” hecha de objetos como círculos o cuadrados) o numérica (es decir, una sucesión constituida de números) en la cual, se pretende encontrar los términos siguientes, de términos remotos e incluso el término general (el término N) de la secuencia.

Por otro lado, Mora (2012) manifiesta que el proceso de generalización de patrones está relacionado con las sucesiones, las cuales se desarrollan en la educación primaria a partir de las secuencias, entendidas como un conjunto de signos (orales, gestuales, físicos, comportamentales,

gráficos, numéricos, etc.) ordenados llamados términos que se constituyen a partir de una regla de repetición de un patrón. Dicho orden determina los términos de las secuencias y la regla de repetición se denomina patrón

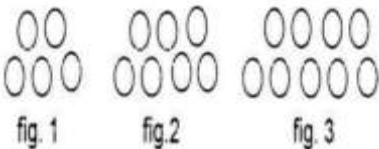
Por ejemplo;

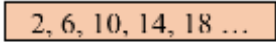
Imagen 1. Ejemplo de secuencias



Cabe mencionar que, existen varios tipos de secuencias entre los cuales se encuentran; corporales, figurales, gráficos numéricos, manipulativas, numéricas, recurrencia y tabular. Sin embargo, para efecto de esta investigación se hará uso de algunas de ellas, las cuales se ilustran en la siguiente tabla con su respectiva definición.

Tabla 2. Tipos de secuencias usadas en la investigación.

Secuencias	
Corporales 	En estas se utilizan movimientos corporales, ritmos o sonidos, por ejemplo: Niños agachados con las manos arriba, niños de pie con las manos a los lados, niños agachados con las manos arriba, niños de pie con las manos a los lados
Figurales 	La figura interviene como apoyo al proceso de generalización que realiza el estudiante. No obstante, aunque Radford (2010a) la denomina figural, Vergel (2015) la denomina figural apoyada por representación tabular, ya

	que además de la figura se indica el término que corresponde a cada una de ellas.
Numéricas 	En ella no interviene la figura como apoyo al proceso de generalización que realiza el estudiante, solo se presenta una secuencia de números y se indica el término que corresponde a cada uno.
Manipulativas 	Son secuencias en las cuales se utilizan materiales manipulativos como tapas, fichas de colores, fichas de formas, palillos, dominós, etc.

Las secuencias seleccionadas se contemplan en esta investigación para identificar si las docentes que enseñan matemáticas en educación primaria de la IE-PEC, tienen en cuenta en su práctica de aula actividades que estén relacionadas con ellas, además sirven como insumo para orientar las actividades que se llevarán a cabo en un espacio de formación en el cual se pretende reflexionar sobre la pertinencia de estas en sus prácticas de aula.

2.4 UNA MIRADA A ALGUNOS ELEMENTOS QUE DETERMINAN LAS PRÁCTICAS DE AULA DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICAS.

Un elemento de análisis en la presente investigación está enmarcado en el problema teórico y metodológico que se logra evidenciar en algunas investigaciones, Brizuela et al, (2013) Carracher y Schlieman (2007), Godino et al (2012), Kaput (1998), Kieran (2004), Vergel (2016), las cuales se centran en el pensamiento algebraico y la necesidad de su inclusión en las primeras etapas de escolaridad. Esto conlleva a poner el foco en los profesores que enseñan matemáticas

en básica primaria y en su formación, para que se pueda dar respuesta a la necesidad de desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros grados de escolaridad. Por ello, este apartado se centra en vislumbrar algunos elementos que determinan la práctica de aula de los docentes de matemáticas y cómo estos se pueden configurar en el marco del PAT, entre dichos elementos se encuentra; la formación y conocimiento profesional, desde las perspectivas de Ponte (2012) y Zapatas et, al (2018); las concepciones y actitudes de los docentes sobre las matemáticas, a partir de, Agudelo (2007) y Londoño (2020).

En este orden, en el proceso de enseñanza de educación básica primaria se requiere tener conocimiento disciplinar en todas las áreas obligatorias (sociales, naturales, español, matemática, inglés, etc.) establecidas por el MEN. Este hecho supone que dichos docentes que orientan clases en este nivel escolar deberían tener dominio en todas estas áreas, sin embargo, en relación con las matemáticas, los docentes no tienen una formación disciplinar adecuada, para garantizar una enseñanza eficiente de los contenidos que se abarcan en dicha área.

En este sentido, resulta importante reconocer la formación y el conocimiento disciplinar que tienen las docentes orientadas al desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Puesto que, de acuerdo con Zapata, et al (2018) muchos docentes no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas por tanto podría conducir a la falta de profundidad disciplinar, imposibilitando el reconocimiento del verdadero sentido del álgebra en primaria.

De esta manera, se hace necesario dar una mirada hacia el conocimiento profesional del docente, con un enfoque en su práctica. Para Llinares (2009^a), el constructo del conocimiento profesional podría “considerar la ‘forma’ en que la matemática es comunicada a los alumnos a través de las tareas o actividades que el profesor elige, las características de la interacción didáctica en el aula, los aspectos sobre los que se evalúa, etc.” (p.8). Es decir, a través de

actividades y tareas que el profesor proponga en su práctica de aula se puede apreciar su conocimiento profesional.

Por su parte, Ponte (2012), se apoya en dos tipos de conocimiento, uno de naturaleza teórica, el cual se vincula con asuntos de las matemáticas, su enseñanza y la educación en general y otro, socio experiencial relacionado con los estudiantes, las dinámicas de aula, los valores y la cultura de la comunidad escolar. Así mismo, este autor establece que a partir del conocimiento profesional del docente se puede apreciar que la formación disciplinar se configura como un punto de análisis, dado que su elaboración incluye diversos aspectos del conocimiento profesional, de los cuales para esta investigación se toman los que se refieren a la práctica educativa, designados por Ponte (2012) conocimientos didácticos. Aquí, este autor vislumbra cuatro dimensiones principales véase *figura 3*, pero para efectos de esta investigación se hará uso del conocimiento de matemáticas, conocimiento del currículo y conocimiento de la práctica educativa o los procesos de trabajo en el aula.



Figura 3. Dimensiones del conocimiento didáctico (Ponte, 2012, p. 87)

2.4.1 Conocimiento de matemáticas

Esta según Ponte (2012) no se centra en el conocimiento de las matemáticas desde su comprensión como ciencia, su foco está en la interpretación que hace el docente sobre las matemáticas como disciplina escolar. Es decir, más allá de los conceptos y procedimientos propios de las matemáticas, surgen formas de representar dichos conceptos y procedimientos, hecho que da lugar a una perspectiva general sobre la orientación de estos. Cabe señalar que, este conocimiento juega un papel fundamental en la visión que el docente tiene sobre de las matemáticas ya sea como; un producto terminado, orientado de manera fragmentada y aquello que le da valor en su práctica (aspectos de cálculos, procedimientos, conceptos, resolver problemas, algoritmos, etc.). En otras palabras, el conocimiento que el docente tiene sobre las matemáticas y las matemáticas escolares, ponen en manifiesto la especificidad de enseñanza.

2.4.2 Conocimiento del currículo

Esta dimensión relacionada con el conocimiento curricular, centra su atención en el conocimiento de las finalidades y objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, ya sea la organización de los contenidos, materiales pertinentes para la enseñanza y formas de utilizarlos. Ahora bien, este conocimiento tiene un papel importante en la toma de decisiones sobre los asuntos que se debe dedicar más tiempo, las prioridades a considerar en cada momento, las formas de orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje, además debe ser renovada de manera constante al mismo ritmo de la evolución curricular.

2.4.3 Conocimiento de la práctica educativa o procesos de trabajo en el aula

En esta dimensión, se incluyen planeaciones a corto o largo plazo como, por ejemplo: plan de aula, plan de área y cuestiones relacionadas con ellos. Además, abarca formas de

organizar el trabajo realizado por los estudiantes, es decir forma de evaluar, enseñanza del docente, entre otros. En síntesis, esta dimensión centra su foco en los procesos de planificación y organización de elementos que determinan la práctica educativa, es decir, se toman decisiones cruciales que orientan la práctica y dónde se regula todo el proceso de enseñanza en su conjunto. Además, Ponte (2012) manifiesta que esta tiene una relación directa y estrecha con las demás, y aunque todas están vinculadas entre sí, pareciera ser que esta se configura como el centro de la postura expuesta para el conocimiento profesional.

Lo expuesto hasta aquí, son referentes del presente estudio, dado que en el problema de esta investigación se menciona asuntos asociados con el conocimiento matemático, específicamente, en el campo del pensamiento algebraico temprano; también de tipo curricular y trabajo en el aula, pues, de acuerdo con Zapata (2020) en el currículo colombiano no es necesariamente reconocida la posibilidad de promover el pensamiento algebraico temprano como una circunstancia común en las aulas de clase. Además, los profesores develan sus necesidades frente a la imposibilidad de trabajar y reconocer conceptos de carácter algebraico en edades tempranas.

2.4.4 Concepciones de docentes que enseñan matemática de básica primaria en la introducción del álgebra temprana en la escuela

La idea de cambio curricular en el proceso de enseñanza del álgebra en básica primaria implica reflexionar sobre las concepciones que determinan las prácticas de aula de los docentes de matemática, dado que, son los actores principales para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en edad temprana además de otros pensamientos. De acuerdo con lo anterior, se

presentarán algunas reflexiones en torno a las concepciones que determinan la práctica de aula en pro del desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

En este orden, cada docente en su experiencia a partir de la práctica de aula crea una serie de concepciones sobre la enseñanza de contenidos matemáticos, es así como, Vergel (2016) manifiesta que “una tradición curricular ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida” (p.15). Es decir, las concepciones de los docentes influyen significativamente en la planeación y organización de actividades propuestas en clase, ya que, según Santos (1993), “las ideas que los profesores tienen acerca de las matemáticas moldean las actividades del salón de clase” (p. 119).

Así, las concepciones que tienen los docentes se convierten en un elemento fundamental en el proceso de enseñanza dado que, permite reconocer la forma en que los docentes asumen la enseñanza del álgebra en sus prácticas de aula. Ahora bien, es importante tener presente que existen orientaciones para la planeación de las clases desde los referentes institucionales de calidad, no obstante, estas son poco tomadas en cuenta por los docentes, causa de ello posiblemente son las concepciones individuales y sociales. En palabras de Londoño (2020) esto implica hacer una reflexión individual de cada docente, la cual le permita identificar hasta dónde lo que cree enseñar en su práctica debería enseñarse.

Por otro lado, para promover pensamiento algebraico a temprana edad, sería conveniente implementar espacios de formación de acompañamiento a los docentes en el área de matemática los cuales están orientados a la construcción de situaciones didácticas e instrumentos para evaluar el nivel de conocimiento sobre el álgebra escolar, éste en palabras de Godino (2015) es un proceso que debe ser relevante en la formación inicial y continua de los docentes de



matemática. Así mismo, Hohensee (2017) establece que, para promover la enseñanza del álgebra temprana, se requiere de un ejercicio de motivación, disponibilidad y actitud positiva, por parte del docente en espacios de formación para transformar sus prácticas de aula.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

En este capítulo, se presentan las características y el diseño metodológico de la investigación, fundamentada en la entrevista basada en tareas tomando como referente la síntesis propuesta por Camargo (2021). De igual manera, se presentan las diferentes fases y momentos de esta investigación, con su intencionalidad y la manera en que se llevó a cabo la misma, para dar cuenta de los objetivos propuestos.

3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

El enfoque metodológico de esta investigación es cualitativo con un alcance descriptivo, dado que permitió describir, interpretar y caracterizar la forma como las docentes que enseñan matemáticas en básica primaria de IE-PEC asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano en sus prácticas de aula. Así pues, Páramo (2019) establece que la investigación cualitativa es un conjunto de técnicas que permite describir, explicar, comprender y caracterizar fenómenos educativos los cuales requieren ser explicados de manera inmediata; en tanto que, las características y propiedades del fenómeno de estudio se detallan mediante el alcance descriptivo. Dentro de este enfoque, se optó por un estudio fundamentado en la entrevista basada en tareas a partir de las ideas propuestas por Camargo (2021), pues, permitió indagar sistemáticamente sobre el conocimiento profesional de los educadores para enfrentar retos de su profesión, en este caso promover el pensamiento algebraico temprano en sus prácticas de aula. En este sentido, esta autora plantea que, la estrategia “entrevista basada en tareas” consiste en;

llevar a cabo una indagación sistemática sobre la actividad que llevan a cabo individuos, o sobre la evolución de esta, interactuando con ellos mientras

resuelven las tareas que se les proponen y que han sido pre-planeadas de acuerdo con los propósitos de la investigación. (p. 62)

Lo cual, posibilita caracterizar fenómenos asociados a la forma como las docentes asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano. Desde este panorama, en la siguiente tabla se explicitan algunos aspectos generales de la estrategia entrevista basada en tareas:

Tabla 3. Aspectos de la entrevista basada en tareas

Tipo	Estrategia	Descripción	Participantes	Requisitos	Producto
Clínica	Entrevista basada en tareas	Estudio sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos mientras resuelven problemas e interactúan con un investigador.	Equipo de investigación Entrevistadores Entrevistados Tareas	La entrevista se lleva a cabo en el escenario de realización de la tarea. Los investigadores retan a los entrevistados a “pensar en voz alta” para obtener de manera clara, completa y precisa lo que piensan.	Descripciones finas o reportes detallados del proceso seguido por los entrevistados. Pruebas de hipótesis o inferencias causales sobre el pensamiento de las personas. Protocolos de entrevista.
Fuente: Camargo (2021) referente utilizado					

Cabe mencionar que, para el propósito de esta investigación se utilizó el término actividad en lugar de tarea, (dado que algunas profesoras consideran el término tarea como un compromiso que se debe resolver de manera no inmediata) además, para la selección de los entrevistados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Profesoras activas en la Institución Educativa pablo Emilio Carvajal
- Profesoras de 2º, 3º, 4º, y 5º de educación básica primaria

- Profesoras que enseñen matemáticas en estos grados

3.2 FASES DE LA INVESTIGACIÓN

El proceso de esta investigación se llevó a cabo mediante tres fases, las cuales ilustran la organización, desarrollo y análisis de estas. Además, se presentan los elementos a considerar y que se utilizaron para ejecutar esta investigación y, a su vez, se da cuenta de los objetivos propuestos y de la pregunta, Véase figura 4.

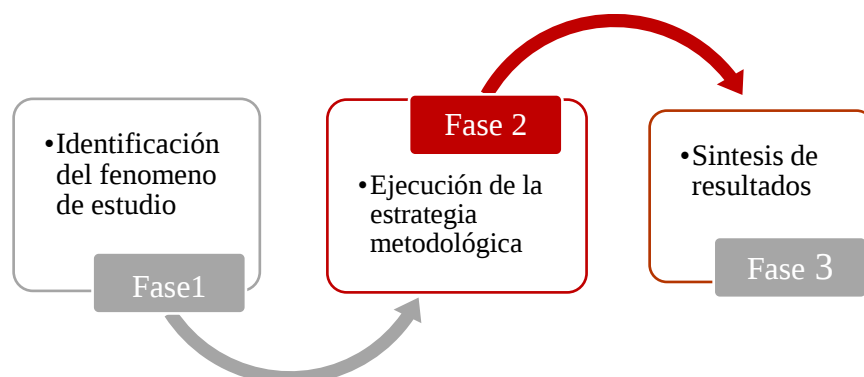


Figura 4. Fases de la investigación

3.2.1 Fase 1: Identificación del fenómeno de estudio

Esta fase consistió en tres aspectos importantes: la construcción del planteamiento del problema, la fundamentación teórica y la metodología de investigación. En relación con el primer aspecto, se realizó la búsqueda y revisión de artículos y trabajos de investigación de pregrado, maestría y doctorado que brindaron insumos para la identificación de la enseñanza tardía del álgebra y la necesidad de abordar los procesos algebraicos en edad temprana, las cuales permitieron plantear la pregunta de investigación, diseñar los objetivos y justificar la pertinencia de su indagación.

En cuanto al segundo aspecto, dados los objetivos de la investigación fue necesario recurrir a cuatro momentos fundamentales, los cuales se especificaron en: el propósito de la

enseñanza del álgebra desde lo que manifiesta el Ministerio de Educación Nacional; la perspectiva de cambio curricular denominada álgebra temprana (Early Algebra), partiendo desde su inicio, el impacto que ha generado en las nuevas propuestas curriculares en la educación matemática y la diferencia de esta con otras teorías; el pensamiento algebraico temprano desde sus características y sus formas; algunos elementos que determinan la práctica de aula, en este se evidencia la formación y conocimiento profesional de los docentes de matemáticas en educación primaria.

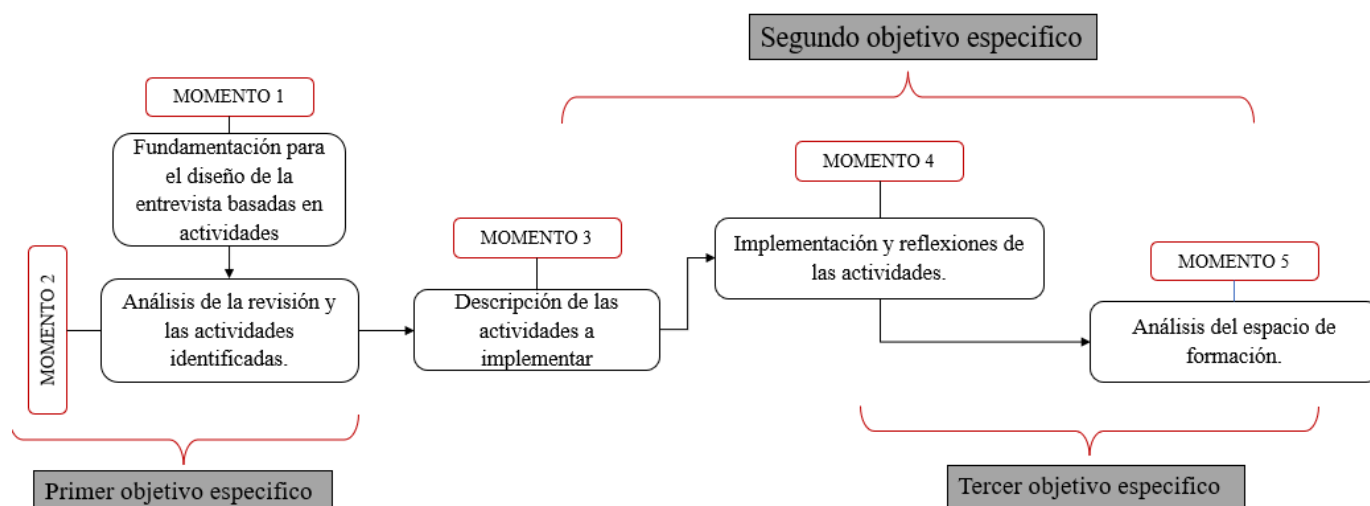
Finalmente, se abordó el tercer aspecto a partir de la descripción de la forma como se llevó a cabo la investigación, es decir, mediante un enfoque cualitativo de alcance descriptivo y una aproximación a la estrategia investigativa entrevista basada en tareas.

3.2.2 Fase 2: Ejecución de la estrategia metodológica

En esta fase se constituyeron los momentos como ruta para la ejecución de la estrategia metodológica "entrevista basada en actividades"⁴, el primero y segundo responden al primer objetivo específico, los dos siguientes dan cuenta del segundo y tercer objetivo específico (Véase figura 5). Así, estos momentos permitieron caracterizar algunas de las formas como la docente que enseña matemática en básica primaria, asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano en sus prácticas de aula. Ahora bien, en los apartados siguientes se describen la forma cómo se desarrollaron estos momentos.

Figura 5. Plan de ejecución estrategia entrevista basada en actividades.

⁴ Entrevistas basadas en actividades desde ahora.



Fuente. Una adaptación de Camargo (2021)

3.2.2.1 Momento 1: Fundamentación para el diseño de la entrevista basada en actividades.

Este se desarrolló en dos partes, primero, se consideró un apartado de la fundamentación teórica relacionada con los aspectos que promueven pensamiento algebraico temprano, a partir de lo que propone Vergel (2016), Radford (2010), MEN (2006), los cuales establecen que una de las formas que se podría iniciar la introducción del álgebra temprana en la escuela es a partir del tratamiento de algunos elementos como; la generalización de patrones, las secuencias, indeterminancia, variación y cambio, etc. Para efecto de esta investigación se hizo necesario tener presente los conceptos de cada aspecto mencionado ya que sirvieron de insumo para la segunda parte de este momento. Por ello, en la tabla 4 se ilustra lo que se entiende de cada uno de ellos con su respectivo autor.

Tabla 4. Conceptos de aspectos del PAT

Aspectos	Concepto	Autor
Generalización de patrones.	-Identificar una característica común que tienen algunos elementos relacionados entre sí. -Reconocer un elemento común entre términos de una secuencia. -Usar propiedades comunes de forma que permita deducir una expresión que sirva para calcular cualquier término dentro de una secuencia numérica	Radford (2013)
	Es el punto de partida para la abstracción matemática, pues permite que el individuo desarrolle situaciones que impliquen variación, acompañada de formas discursivas, gestuales y procedimentales.	Vergel (2016)
Secuencia.	Es un número finito de términos de una sucesión figural, es decir, una sucesión constituida de figuras o números en la cual, se pretende encontrar los términos siguientes, de términos remotos e incluso el término general.	Radford (2021)
Indeterminancia.	Es aquello opuesto a la determinancia numérica, en la cual intervienen objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros.	Radford (2010)

Analiticidad.	Implica la manera de trabajar con los objetos indeterminados identificando el carácter operatorio de los mismos.	
Denotación.	La forma específica en la cual se nombra o se hace referencia a los objetos, por ejemplo; gestos, palabras, signo alfanumérico etc.	
Variación y cambio	Se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, y a su vez, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real)	MEN (2006)

Fuente. *Elaboración propia*

La segunda parte de este momento se centró en observar el plan de aula de cada docente, los libros que utilizaban en su práctica de aula y cuadernos de los estudiantes (más aplicados de cada grado), con el propósito de evidenciar las actividades que dichas docentes les presentaban a sus estudiantes. Luego de la observación se hizo una revisión a todas las actividades a partir de la descripción conceptual de los aspectos mencionados en la primera parte de este momento. Esto permitió identificar y describir las actividades que contaban con alguno de ellos y a su vez, atender el primer objetivo específico de la investigación.

Ahora bien, para los resultados obtenidos a partir de la revisión de las actividades se diseñó una tabla de doble entrada (*Véase tabla 5*), la cual muestra la cantidad de actividades que tuvieron aspectos del pensamiento algebraico temprano. Por lo que, para identificar la cantidad y

porcentaje de los aspectos más utilizados por cada docente se hizo la siguiente convención; color **naranja** para identificar las tres profesoras de segundo grado (**P1, P2 y P3**); color **verde** para hacer referencia a las dos profesoras de tercer grado (**P4 y P5**); color **azul** hizo énfasis en las dos profesoras que enseñan en cuarto grado (**P6 y P7**) por último, el color **amarillo** representa a las profesoras de grado quinto (**P8 y P9**).

Tabla 5. Modelo de tipificación de las actividades identificadas.

Aspectos del PAT	Actividades identificadas									Total	%
	Grado 2º			Grado 3º		Grado 4º		Grado 5º			
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9		
Secuencias											
Generalización de patrones											
Indeterminación.											
Variación y cambio.											
Total											

Fuente. Elaboración propia.

En este orden de ideas, dicho modelo permitió mostrar la cantidad de actividades que reportaban las docentes en su práctica de aula las cuales contienen aspectos del pensamiento algebraico temprano, así como también, identificar los aspectos más utilizados por ellas.

3.2.2.2 Momento 2: Análisis de la revisión y las actividades identificadas.

En este momento se realizó un contraste entre la fundamentación referencial, la información obtenida en la tipificación y los tipos de actividades que las profesoras le presentaban a sus estudiantes relacionadas con aspectos del pensamiento algebraico temprano, este último se realizó a través de una descripción, para la cual se hizo uso de la *tabla 6*. De este modo, el análisis de la revisión no solo permitió identificar las cantidades de aspectos abordados por las profesoras en su práctica de aula, sino también ver el tipo de conocimiento didáctico que estas tienen según lo planteado por Ponte (2012). Además, este análisis brindó insumos para orientar la creación de las actividades que se le presentarían más adelante a las profesoras en un espacio de formación. Dando cumplimiento al primer objetivo específico de la investigación, los resultados de este análisis se verán más detallados en el siguiente capítulo.

Tabla 6. Contenido y descripción de la actividad identificada.

Actividades de (Aspectos del PAT)	
ACTV_ P(n)	
Contenido	
Descripción	

Fuente. Una adaptación de Manyoma, Riascos y Cuero. (2021)

De esta manera, se utilizaron los elementos que configuran esta tabla para lograr su comprensión *ACTV_ P(n)* se refirió a la actividad de cada profesora, *contenido* hizo énfasis al objeto de análisis y *descripción* dio cuenta de la forma cómo se presentó el aspecto del PAT.

3.2.2.3 *Momento 3: Descripción de las actividades a implementar*

Luego de haber identificado los aspectos y las temáticas que las docentes participantes utilizaban con frecuencia en sus prácticas de aula, se tomaron como punto de partida varias actividades propuestas por Vergel y Roja (2018) y el Programa Todos Aprender (PTA). Ahora bien, dichas actividades estaban diseñadas para desarrollar pensamiento algebraico temprano en estudiantes de educación básica primaria, sin embargo, para el propósito de esta investigación se hizo una adaptación ya que se partió del hecho de que a quienes se les presentarían las actividades son profesoras activas de 2° a 5° de básica primaria, las cuales no cuentan con una formación específica en matemáticas.

Con los aspectos considerados anteriormente, se plantearon tres actividades en las cuales se tuvo en cuenta el uso de medios y materiales que promovieran en las profesoras acciones de comunicación, autonomía, apropiación y experimentación. De manera que, las profesoras pudieran realizar un proceso de fundamentación y reflexión sobre promover pensamiento algebraico temprano en sus prácticas de aula.

La primera actividad está orientada al aspecto de secuencia, precisamente corporal, numérica y figural con el propósito no solo de poner a las profesoras en un escenario de experimentación y comunicación sino también, fortalecer el dominio de los conceptos abordados en ésta.

Para la segunda actividad, se hace referencia a los aspectos de indeterminancia y generalización en la cual se propuso como medio el uso de material manipulativo, con el fin de promover en las profesoras el fortalecimiento de iniciar procesos de pensamiento algebraico temprano sin caer en la convencionalidad de una clase magistral.

Por último, la tercera actividad está dirigida hacia un medio de creación autónoma por parte de las profesoras, con el propósito de identificar el dominio de los aspectos abordados en las actividades anteriores. Cabe notar que, estas actividades se presentarán de forma más detalladas en el siguiente capítulo

3.2.2.4 *Momento 4: implementación y reflexiones de las actividades.*

Este momento se centró en realizar interacciones entre los entrevistados (profesoras) y entrevistadores, a través de un espacio de formación en el cual se inicia planteando varias preguntas relacionadas con la enseñanza y desarrollo del álgebra temprana tales como; ¿qué entiende usted por álgebra temprana?, ¿qué piensa sobre enseñar procesos algebraicos a estudiantes de básica primaria?, ¿es posible desarrollar estos procesos en los primeros años de escolaridad?, etc. Esto con el fin de identificar algunas ideas o conocimientos que poseen las profesoras previamente.

Luego de realizar dicho espacio de interacción inicial, se les presentaron a las profesoras tres actividades que se constituyeron como insumo de análisis, las cuales, posibilitaron ciertas conversaciones con el propósito de precisar elementos fundamentales que las profesoras podrían presentar al momento de desarrollar las actividades. De estas conversaciones pueden surgir interrogantes como; ¿qué hizo para llegar a ese término?, ¿cómo encontró la generalización?, etc. Estos hechos ocasionaron varias reflexiones sobre la apropiación de las actividades para

promover PAT en la práctica de aula. Lo cual permitió atender los objetivos específicos dos y tres de la investigación.

3.2.2.5 *Momento 5: Análisis del espacio de formación.*

En este momento, se hizo una revisión detallada a los insumos considerados como evidencia para definir los elementos importantes a destacar en el espacio de formación, tales como; las tres actividades, las interacciones con los entrevistados, los materiales utilizados (audio, videos, imágenes etc.) para caracterizar las formas como las profesoras asumieron actividades que promueven PAT. Además, se tuvo presente los aspectos establecidos en el marco teórico referencial para constatar el trabajo en el campo con la teoría. Cabe notar, que los resultados de este análisis podrán verse detalladamente en el siguiente capítulo.

3.2.3 Fase 3: Síntesis de resultados.

En esta fase final, se expusieron las conclusiones contrastando lo desarrollado a lo largo del trabajo, el marco teórico referencial, los objetivos y la pregunta de investigación; también, se realizó un informe final en el que se sistematizó todos los elementos asociados con el desarrollo de esta investigación.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Este capítulo abarca el proceso de análisis llevado a cabo en esta investigación cualitativa, el método entrevista basada en tarea sintetizada por Camargo (2021), la pregunta y objetivo de esta, los cuales se encuentran en el planteamiento del problema. Este análisis se enmarca en los aspectos que ponen en manifiesto el fenómeno de estudio: el pensamiento algebraico temprano, a partir de las producciones e interacción con las docentes participantes, evidenciadas en unidades de análisis.

Así mismo, se presentan los resultados de la investigación en una descripción donde se tiene en cuenta la relación entre las categorías emergentes con la presencia de diferentes aspectos y formas de pensamiento algebraico, conocimiento didáctico que poseen las docentes y concepciones de estas en relación con el pensamiento algebraico temprano, dando cuenta de la forma cómo las docentes asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

4.1 PROCESO DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A partir de los datos obtenidos en la revisión de las actividades que las profesoras de este estudio le presentaban a los estudiantes y en el espacio de formación, mediante las técnicas empleadas para recoger la información para desarrollo del trabajo de campo y que se han enmarcadas en las fases propuestas en el método cualitativa a partir de una entrevista basada en actividades (Camargo, 2021) se dio paso al desarrollo de la fase dos, en la cual se realiza una descripción a la tipificación de las actividades identificadas, al espacio de formación, sus producciones, las experiencias vividas por las participantes en la intervención y en su práctica de aula.

En este sentido, la descripción se realizó sobre los resultados de la tipificación, los audios, las hojas de trabajo obtenidas en el espacio de formación con las profesoras, videos, imágenes y diálogos que dieron cuenta de algunas formas como estas asumen actividades que promueven PAT y a su vez, de las reflexiones surgidas de las preguntas tipo entrevista.

De esta manera, al revisar toda la descripción e información obtenida, se llevó a cabo el reajuste de los datos teniendo presente la pregunta y objetivos de investigación, así como también el marco teórico que desde la caracterización del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2010), los aspectos del PAT (MEN, 1998 y 2006), (vergel, 2016) y (Radford, 2021) y los elementos que determinan la práctica de aula de las profesoras que enseñan matemática en básica primaria (Ponte, 2012), Zapatas, et al (2018) y Londoño (2020) permiten darle sentido a los datos para concretar las unidades de análisis en la investigación.

En esta misma línea, se inició a señalar en carpetas las ideas sobre el trabajo algebraico temprano presentadas en los diálogos de las profesoras, las ideas de formas de pensamiento algebraico evidenciadas en el desarrollo de las actividades por parte de las profesoras. En suma, en una carpeta se ubicaron aquellas donde se evidenciaban indicios de los tipos de pensamientos algebraicos (factual, contextual y simbólico); también, se tomó en cuenta en otra carpeta los aspectos evidenciados en las producciones de las docentes que promueven PAT, las cuales, a partir de sus expresiones y reflexiones permitían identificar las unidades de análisis sobre las formas como asumieron las actividades.

Así mismo, en las descripciones de los diálogos se utilizaron algunos elementos distintivos cuando las expresiones de las profesoras estaban acompañadas, no solo por expresiones verbales sino también por expresiones corporales, gestuales, silencio, etc. Para ello,

los guiones indicarán si en las interacciones las expresiones de las profesoras fueron con algún movimiento o gesto y los puntos mostrarán si hubo un silencio por parte de las profesoras en dichas interacciones, esto con el propósito no solo de analizar los posibles medios semióticos usados por ellas durante el desarrollo de las actividades sino observar las formas como las están asumiendo.

4.2 TIPIFICACIÓN DE ACTIVIDADES QUE LAS DOCENTES LES PRESENTAN A SUS ESTUDIANTES.

A continuación, se presenta una tabla que evidencia el total de actividades revisadas a las docentes y a su vez cuántas de ellas contienen aspectos del PAT. Seguido de ello, se detalla otra tabla que resume las actividades identificadas en las cuales se evidencian aspectos que promueven PAT.

Tabla 7. *Cantidades de actividades presentadas por cada profesora.*

Profesoras	Cantidad de actividades revisadas	Cantidad de actividades identificadas con aspectos de PAT
P1	10	3
P2	9	1
P3	11	3
P4	13	5
P5	13	5
P6	15	7
P7	10	2
P8	15	6
P9	17	7

De acuerdo con lo presentado en la tabla anterior, se evidenció que, el 35% de las actividades que las profesoras le presentan a sus estudiantes contienen aspectos del PAT, frente a este panorama se podría decir que, las docentes no tienen en cuenta el desarrollo de estos aspectos en su práctica de aula de manera frecuente. No obstante, es necesario detallar los porcentajes de cada aspecto evidenciado en las actividades.

Tabla 8. Tipificación de las actividades identificadas.

Aspectos del PAT	Actividades identificadas.									total	%
	Grado 2°			Grado 3°		Grado 4°		Grado 5°			
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9		
Secuencias	1	0	1	1	1	3	1	1	1	10	25,6%
Generalización de patrones	1	0	0	1	1	1	0	2	3	9	23,1%
Indeterminación.	0	0	0	1	0	1	0	1	0	3	7,7%
Variación y cambio.	1	1	2	2	3	2	1	2	3	17	43,6%
Total	3	1	3	5	5	7	2	6	7	39	100%

Esta tabla, pone en evidencia los porcentajes de cada aspecto que promueve PAT identificado en las actividades propuestas por las profesoras a sus estudiantes en su práctica de aula. En este sentido, el aspecto de secuencia tiene el 25,6% y generalización de patrones 23,1%, este hecho permite ver que la diferencia entre ellos es mínima, esto se podría relacionar con lo que plantea Mora (2012), el cual establece que, la generalización de patrones está relacionado con la secuencia ya que, a partir de esta, se puede establecer una regla de repetición de un patrón.

Por otro lado, la tabla vislumbra que el aspecto de indeterminación es el menos utilizado por las profesoras con un porcentaje de 7.7% de aplicación en las actividades identificadas. Sin embargo, la variación y cambio es el aspecto más evidenciado en las actividades, el cual comprende el 43,6%, este hecho hace suponer que, las profesoras atienden a lo que se plantea en MEN (1998 y 2006) en relación con aspectos del pensamiento variacional a temprana edad, precisamente, en presentar a los estudiantes actividades que brinden la oportunidad de ver, identificar y conjeturar la variación y el cambio en diferentes contextos.

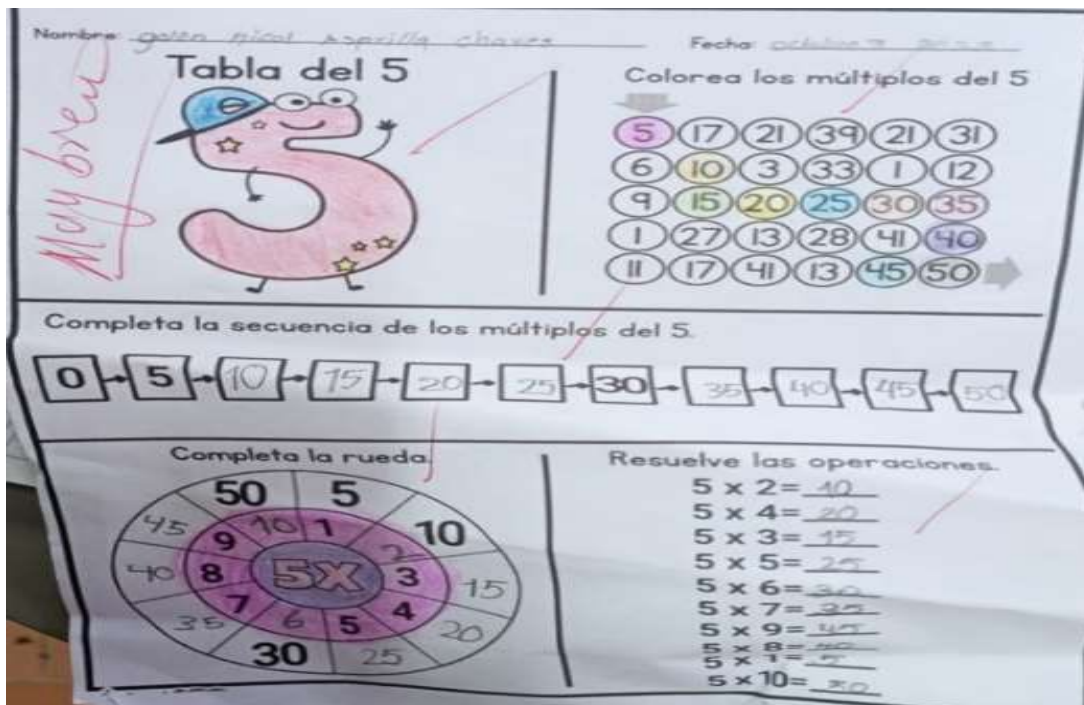
Además, como se evidencia en la tabla las profesoras **P4, P5, P6, P8 y P9** son las que más tienen en cuenta estos aspectos en sus actividades, esto puede darse, porque han recibido capacitaciones del programa PTA para el mejoramiento de su práctica y hacen uso de los

materiales que dicho programa les prevén para el trabajo en el aula. Sin embargo, en el siguiente apartado de análisis se podrá identificar a través de un espacio de formación, si las profesoras hacen la articulación de estos aspectos de forma conscientes o porque están dentro de un proceso de formación.

- **Análisis de las actividades identificadas que contienen aspectos del PAT.**

En lo que sigue, se muestra el análisis a algunas actividades identificadas en la tipificación que involucran secuencia, generalización de patrones, variación y cambio e indeterminancia. En el que se establece la forma como se presenta cada uno de estos aspectos y el tipo de conocimiento didáctico que las profesoras poseen desde lo planteado por Ponte (2012).

Tabla 9. Reconocimiento de secuencias en actividades de P1 y P3.

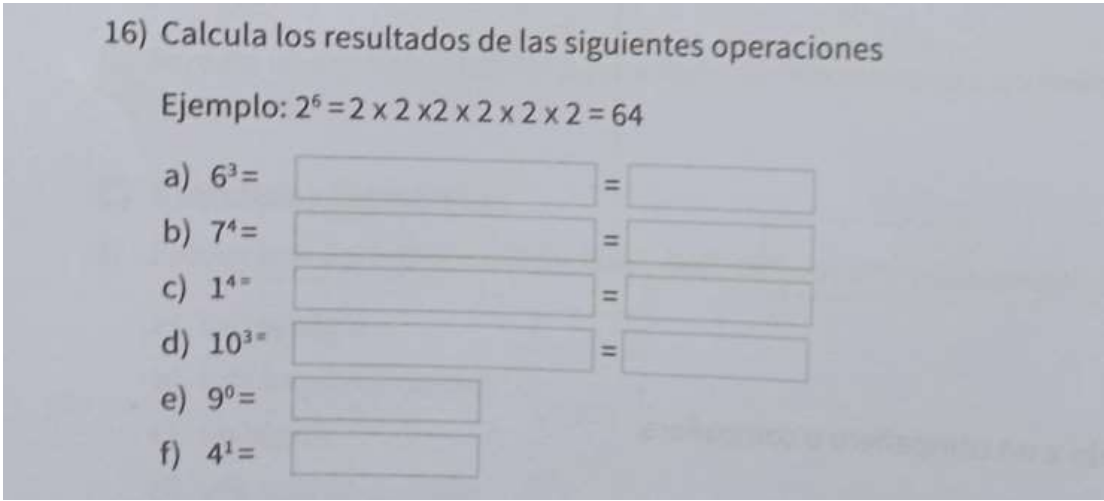
Actividades de Secuencia	
Actividad_ P1	
Contenido	

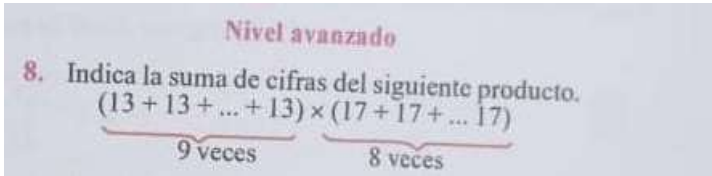
Descripción	Se invita a identificar en primer lugar los múltiplos del cinco dentro de un conjunto de números los cuales no tienen un orden específico e incluso algunos de ellos están repetidos, seguido de ello, se pretende completar la secuencia de los múltiplos del cinco, de modo que, a partir de un ejemplo guía se apoyen para la construcción de dicha secuencia, por último, se invita a colorear una rueda la cual contiene los múltiplos antes mencionados, para posteriormente resolver la tabla de dicho número. De esta manera en esta actividad se puede identificar el aspecto de secuencia.
Actividad _ P3	
Contenido	
Descripción	Se hace referencia a seleccionar a partir de tres opciones, el resultado correcto de cada multiplicación indicada en la parte superior. Cabe resaltar que, dentro de las opciones, solo dos de ellas pertenecen al conjunto de resultados posibles a la multiplicación. Es así como, la elección correcta se torna más posible.

En las actividades anteriormente presentadas, se puede evidenciar el aspecto de *secuencia*, específicamente secuencia numérica, a partir de los múltiplos de un número. De modo que, solo se presenta una secuencia de números y se indica el término que corresponde a cada uno. Ahora bien, a pesar de que en esta actividad hay figuras e imágenes, estas juegan un papel secundario para la solución de la actividad, por tanto, no servirán como apoyo para realizar una generalización a partir de la secuencia establecida.

No obstante, en la **Actv_P3**, se alude a desarrollar la competencia de *ejercitación* desde aspectos numéricos, específicamente cuando se solicita hallar el resultado de una operación específica. Sin embargo, se reconoce que es una actividad que puede promover PAT si se establece una sucesión de números que pertenezca a las posibles respuestas de la multiplicación, de forma que el estudiantado tenga mejor panorama para reconocer los números que pertenecen a una tabla de multiplicar, y a su vez, tengan un acercamiento a aspectos que promueven PAT de manera consciente.

Tabla 10. Reconocimiento de generalización en actividades de P8 y P9

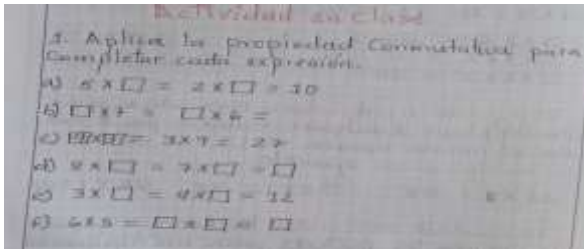
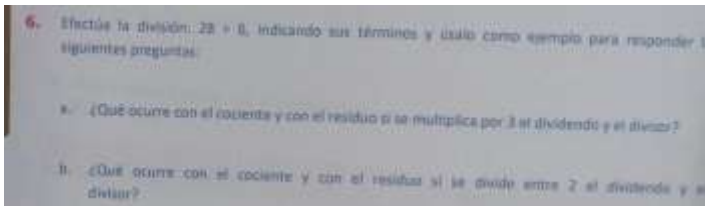
Actividades de Generalización.	
Actv_P8	
Contenido	 16) Calcula los resultados de las siguientes operaciones Ejemplo: $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ a) $6^3 =$ [] $=$ [] b) $7^4 =$ [] $=$ [] c) $1^4 =$ [] $=$ [] d) $10^3 =$ [] $=$ [] e) $9^0 =$ [] f) $4^1 =$ []
Descripción	Se hace alusión a completar los rectángulos vacíos ubicados en la parte derecha de la actividad, esto con el propósito los resultados de las operaciones presentadas a partir de un ejemplo dado, el cual permite evidenciar la sucesión de un producto. A su vez, proporciona la posibilidad de ver cuántas veces se repite el número que se está multiplicando, de manera que se obtenga un resultado establecido.

Actv_P9	
Contenido	
Descripción	Se propone indicar cómo queda ordenada la suma de las cifras las cuales están ubicadas en la parte inferior, teniendo en cuenta la cantidad de veces que estas se repiten. Asimismo, esta actividad permite conformar un producto a partir de la sucesión de dichas cifras.

Las actividades anteriormente presentadas, se relacionan con el aspecto de *generalización* pues en éstas, se identifica y reconoce un acercamiento a una expresión común que caracteriza la repetición de una sucesión numérica de forma implícita, dado que, las preguntas hechas en estas actividades están más orientada a hallar un resultado que a desarrollar este aspecto

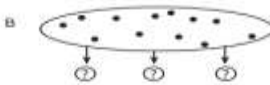
Sin embargo, haciendo una observación detallada, en la **Actv_P8** a partir del proceso solicitado se evidencia un elemento repetido, entendiendo este como lo común de la sucesión. Asimismo, en la **Actv_P9**, al ordenar la sucesión de las cifras, estas se reconocen como lo característico de la misma. Este entre otros hechos permiten evidenciar un proceso de *generalización* de manera implícita.

Tabla 11. Reconocimiento de variación y cambio en actividades de P4 y P5.

Actividades de Variación y cambio	
Actv_P4	
Contenido	
Descripción	Se hace referencia a escribir un número en el cuadro vacío que permita satisfacer la igualdad de la operación, de modo que se haga uso de una propiedad de la multiplicación especialmente, propiedad conmutativa. Así pues, se permite evidenciar como varia o cambia el resultado de la expresión al momento de intercambiar la posición de los números.
Actv_P5	
Contenido	
Descripción	Se hace referencia a efectuar una división en la que se debe indicar cada uno de los términos que la componen con el objetivo de usarlos como ejemplo para responder las preguntas, las cuales están orientadas a percibir lo que ocurre con los términos cuando se cambian los números que los determinan. Esta actividad permite entre otras cosas, reconocer cuáles y cuántos términos se constituyen en la división, y a su vez, conjeturar sobre la variación de estos en otros escenarios.

En estas actividades se evidencia el aspecto de *variación y cambio*, ya que, este estudia los procesos de cambio y variación de variables y relación de ellas, además, se suele relacionar con distintos sistemas numéricos en diferentes contextos, en este caso particular con los números reales. Así pues, se evidencia que **P4**, plantea una actividad relacionada con números reales en los cuales de forma implícita se observa si las expresiones dadas cambian o varían teniendo en cuenta su posición. Por su parte **P5** plantea una actividad con preguntas orientadas a identificar lo que ocurre con las variables cuando son expuestos a otros escenarios.

Tabla 12. Reconocimiento de indeterminación en actividades de P6.

Actividades de Indeterminación	
Actv_P6	
Contenido	C) Ejercicios numéricos 4) Asocia el problema a la ilustración correspondiente. El duende recibe 3 piedras por día. ¿Cuántas piedras recibe en 4 días? El duende tiene 3 piedras y el gnomo tiene 12. ¿Cuántas veces más piedras tiene el gnomo con respecto al duende? El duende tiene 3 piedras. El gnomo tiene 4 veces más ese número de piedras. ¿Cuántas piedras tiene el gnomo? El duende tiene 12 piedras. Esto es 4 veces más que el gnomo. ¿Cuántas piedras tiene el gnomo? En una bolsa hay 12 objetos. Se distribuyen por partes iguales a 3 amigos. ¿Cuántos objetos recibirá cada amigo? El duende tiene 12 piedras y el gnomo tiene 3 piedras. ¿Cuántas veces menos piedras tiene el gnomo con respecto al duende? A  B  C  D  E  F 

Descripción	Se invita a asociar cada problema presentado en la parte izquierda de la actividad con su respectiva ilustración ubicada al frente de estos. Ahora bien, tanto los problemas como las ilustraciones están orientadas a la multiplicación, de manera que permiten identificar y reconocer las diferentes formas en las que se podría presentar, y a su vez, brindan un panorama más amplio de este objeto de conocimiento.
-------------	---

El aspecto que se vislumbra en esta actividad es la idea de *indeterminación*, en el sentido que se presentan objetos algebraicos como variables e incógnitas implícitamente, permitiendo trabajar con ellas como si se conocieran. De forma que, las preguntas de los problemas se podrían asociar con las incógnitas, y las ilustraciones con las variables que las representan. Así pues, se daría sentido a sustituir un problema por una ilustración ya que, evidencian lo mismo y se relacionan entre sí.

De manera general, las actividades anteriormente presentadas propuestas por las profesoras a sus estudiantes ponen en evidencia no solo los aspectos que promueven PAT sino también su conocimiento profesional, pues de acuerdo con Llinares (2009) la elección y diseño de tareas o actividades que brinda un profesor vislumbra elementos asociados con el conocimiento profesional, como pueden ser: el conocimiento matemático, didáctico, pedagógico, curricular, etc.

En este sentido, centrando la mirada en el conocimiento matemático desde lo establecido por Ponte (2012) estas actividades identificadas permiten inferir un conocimiento de las matemáticas escolares en relación con los conceptos (suma, resta, múltiplo, división, etc.) que se reflejan en estas y el procedimiento (resultado esperado, cálculo con algoritmo etc.). Asimismo, se deduce la visión que las profesoras tienen sobre las matemáticas como producto terminado, orientado de manera fragmentada, reflejado en el tipo de preguntas que hacen en estas

actividades, las cuales se dirigen a resolver procesos aritméticos para encontrar un valor determinado.

En esta misma línea, en lo que concierne al conocimiento curricular y la práctica educativa, estas actividades permite deducir que las profesoras en su planificación y organización priorizan el desarrollo del pensamiento numérico por encima de cualquier otro pensamiento, esto reflejado en los temas que brinda en su práctica de aula, los cuales están orientados en las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

No obstante, en estas actividades se hacen visibles aspectos que promueven PAT los cuales son usados por algunas profesoras en su gran mayoría por **P6** y **P9**, sin embargo, como se ha mencionado en párrafos anteriores, es necesario identificar a partir de un espacio de formación mediado por tres actividades, si las profesoras articulan estos aspectos de manera consciente o inconsciente.

4.3 ESPACIO DE FORMACIÓN A PARTIR DE ACTIVIDADES.

En este apartado se describe el desarrollo del espacio de formación realizado con las profesoras participantes a través de varias preguntas iniciales y tres actividades elaboradas después de identificar los aspectos de PAT que las profesoras utilizaban en su aula de clase, de los cuales se hizo énfasis en las secuencias, generalización de patrones e indeterminación, en cuanto a la variación y cambio, esta se ve de manera implícita en los demás. En este sentido, el análisis se realiza de las producciones escritas, interacciones, expresiones, gestos e ideas, de las cuales se obtienen las unidades de análisis que expresan unas posibles formas como las docentes asumen actividades que promueven PAT desde lo establecido en el marco teórico referencial (formas de pensamiento algebraico, conocimiento profesional, concepciones) y en concordancia

con Vergel (2016) cuando manifiesta que, el análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes tipos de texto (escrito, hablado, gestual) que se producen durante el desarrollo de una tarea o actividad.

De este modo, este espacio permitió reunir a las profesoras para contextualizarlas sobre la investigación de la que harían parte e iniciar un dilago e interacción entre la maestra y los entrevistadores con el apoyo de tres preguntas relacionadas con Eraly Algebra: ¿qué entiende usted por álgebra temprana?, ¿qué piensa sobre enseñar procesos algebraicos a estudiantes de básica primaria? y ¿es posible desarrollar estos procesos en los primeros años de escolaridad?

Es así como, en las interacciones algunas profesoras no tenían una idea o concepto claro del álgebra temprana y su propósito, esto evidenciado en expresiones como; *“Sí, he escuchado el termino álgebra temprana, pero no sé qué es o a qué hace referencia”, “la idea no la tengo clara, pero teniendo cuenta el nombre, es enseñar álgebra de manera diferente a la que se ha venido realizando”*. Además, se develan concepciones sobre la enseñanza del álgebra, ya que algunas profesoras consideran que los procesos algebraicos deben ser trabajados en secundaria por su nivel de abstracción o complejidad, por lo tanto, estas consideran que no es posible promover estos procesos en los primeros años de escolaridad. Sin embargo, no descartan la posibilidad de ser articulados teniendo en cuenta el nivel de escolaridad de los estudiantes, manifestado en expresiones como;

P7: *“Para mi enseñar elementos algebraicos en primaria sería muy complicado, porque esa combinación de letras y números es bien complicada, si en secundaria esos niños pasan trabajo, imagínese usted un niño de tercero o cuarto, le sería muy difícil.”*

P4: “Creo que promover este pensamiento sería algo muy complejo, si a los niños les cuesta realizar operaciones e incluso aprenderse las tablas, que son bases necesarias para su aprendizaje en primaria, más difícil será aun que puedan trabajar con letras e incógnitas”

P9: “A diferencia de mis compañeras yo pienso que sería importante mirar la articulación entre niveles de escolaridad de los estudiantes para que se den estos procesos, por ejemplo, a partir de las operaciones básicas”

Esto podría pensarse que hace parte de su cultura y experiencias que las constituyen en la enseñanza del saber matemático, ello en coherencia con planteamientos como los de Vergel (2016) cuando manifiesta que “una tradición curricular nos ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida” (p.15)

Ahora bien, después de este espacio de dialogo e interacción inicial, los entrevistadores proceden a dar aclaraciones sobre la propuesta curricular Early Algebra y su propósito, esto con el fin de sintetizar las ideas expresadas anteriormente, para luego dar paso al desarrollo de las actividades que orientaron este espacio de formación.

4.3.1 Actividad 1: Secuencias.

Esta actividad estuvo orientada en el aspecto de secuencia corporal, figural y numérica, en ella se desarrollan tres ejercicios, tomados del programa Todos Aprender (2021), que fueron seleccionados con el propósito no solo de identificar patrones, características comunes, sino también ejes temáticos y formas cómo se han abordado en las prácticas de aula de las docentes participantes, teniendo en cuenta el grado que enseñan cada una de ellas.

Bajo este panorama, a cada docente se le dio una hoja con la primera actividad denominada secuencias. En el primer ejercicio de esta, se propone formar grupos de tres docentes para que realicen una secuencia con su cuerpo y describan lo que lograron identificar. Posteriormente en el segundo ejercicio se presenta una secuencia figural, la cual debía ser observada para responder a los interrogantes expuestos, y en el último ejercicio se evidencia una secuencia numérica en la que se tuvo que encontrar el siguiente término y a su vez plasmar cómo se logró hallar para dar respuesta al interrogante **c**, véase imagen 2.

Imagen 2. Actividad 1 de secuencias corporal, figural y numérica.

Actividad 1: Secuencias

1) Descripción: en grupos de 4 cuatro personas, propongan una secuencia usando el cuerpo, de tal forma, que los demás compañeros logren identificar la posición siguiente. Observa el ejemplo



Preguntas

a) ¿Qué pudieron notar en el desarrollo de la actividad? Realiza una breve descripción.

2) Teniendo en cuenta la siguiente secuencia de figuras, Responda.



Figura 1



Figura 2



Figura 3

a) ¿Puedes relacionar las figuras anteriores con algunas temáticas que trabajas en clases?

b) ¿Las temáticas que lograste identificar en la pregunta anterior, de que otra forma la has abordado en tu práctica de aula?

3) Observa la siguiente secuencia numérica y responde a las preguntas.

2, 5, 11, 20, 32, 47...

a) ¿Cuál es el séptimo término de la secuencia?

b) Explique, ¿Cómo logro encontrarlo?

c) ¿Cree usted que esta actividad la podría implementar en su práctica de aula teniendo en cuenta el nivel que enseña?, de acuerdo con su respuesta, ¿Cómo lo adaptaría al nivel que enseña?

4.3.1.1 Ejercicio 1: Secuencia corporal.

Las docentes inician el desarrollo de este ejercicio formando grupos para generar una secuencia con movimientos y gestos expresados por su cuerpo, luego comenzaron a describir en la hoja, lo que alcanzaron a percibir del ejercicio. Sin embargo, en el transcurso de generar la secuencia, las docentes se encontraron un poco confundidas sobre el movimiento que seguía, lo cual se refleja en expresiones como: “debo hacer lo mismo que al principio”, “¿los movimientos deben ser los mismo?”, este hecho ocasionó que se repitiera el ejercicio varias veces. No obstante, cada grupo continuó observando, analizando y deduciendo el proceso necesario para generar la secuencia, reflejado en el siguiente episodio que permitió una interacción colectiva:

P9: Ya se, esto es una secuencia, le toca a usted (- señala a su compañera de grupo con su dedo índice)

P8: Mi movimiento es este (- realiza un movimiento con brazo derecho y sonríe)

P9: Ahora le toca al otro grupo, recuerden que es una secuencia.

P5: Mi movimiento debe ser el mismo de **P8** porque estoy en la misma posición de ella.

P9: No, su movimiento debe ser diferente porque usted no es de este grupo.

P5: (- sonríe) ¡listo, vamos!

Imagen 3. Desarrollo de ejercicio uno por las profesoras.



Este episodio permite observar que las docentes al iniciar el desarrollo de este ejercicio estaban confundidas para realizarlo correctamente. Sin embargo, en el momento de la interacción colectiva, **P9** expresa “esto es una secuencia”, esta frase sirvió para que las demás profesoras tuvieran un panorama más claro sobre la ejecución del ejercicio. Lo cual, hace suponer que las profesoras reconocen el término secuencia, sin embargo, en las producciones escritas, se logra evidenciar la falta de profundidad disciplinar, pues el término lo dejaban en titulares y no describen las razones por las cuales se presenta ese término en el ejercicio.

Imagen 4. Producción escrita de P9 ejercicio uno ACTV_1.

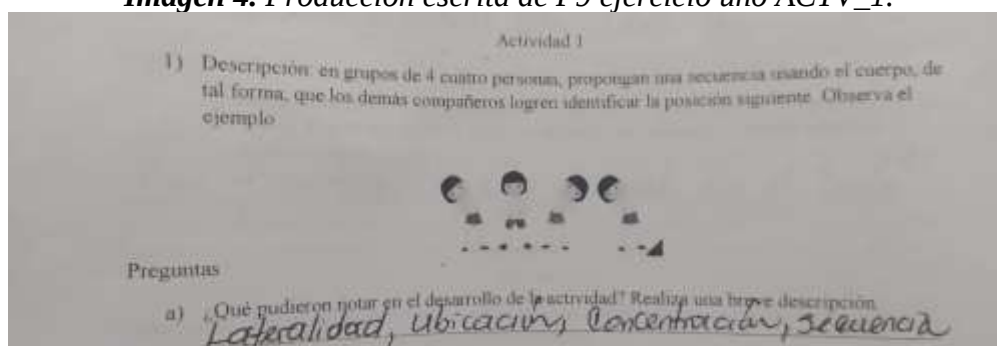
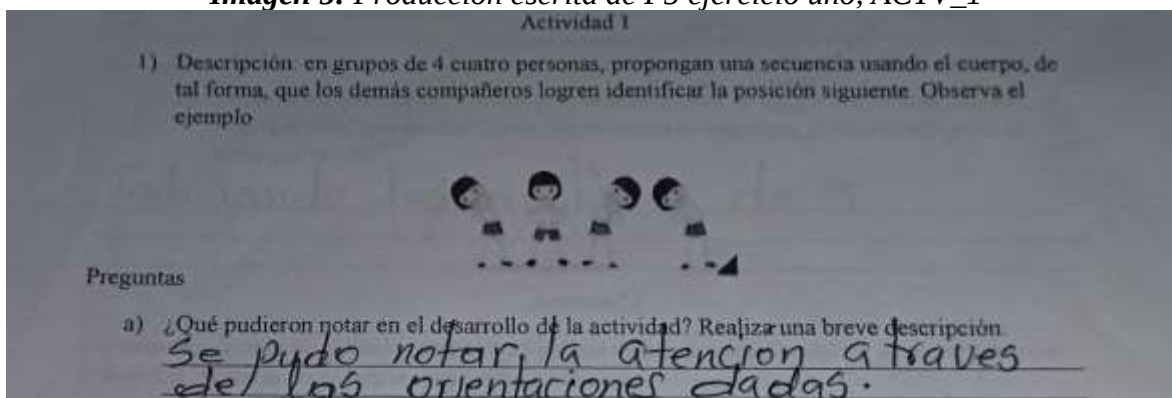


Imagen 5: Producción escrita de P5 ejercicio uno, ACTV_1



Lo mencionado anteriormente, se puede relacionar con lo planteado por Zapata, et al (2018) cuando afirma que, muchos profesores no cuentan con una formación exclusiva en matemática lo cual podría conducir a la falta de profundidad disciplinar, este hecho se logra evidenciar cuando las docentes en sus producciones e interacciones utilizan los términos para buscar sinónimos, mas no para detallar en ellos. Esto podría imposibilitar el reconocimiento del verdadero sentido del álgebra en primaria.

4.3.1.2 Ejercicio 2: Secuencia Figural.

Luego de que las profesoras terminaran el ejercicio anterior, estas inician de manera individual el desarrollo del ejercicio dos, en el cual deben relacionar la secuencia figural con uno o varios ejes temáticos que ellas hayan trabajado en clases y describir la forma como lo han abordado en su práctica de aula. En el proceso de abstracción y deducción las profesoras no mostraron ninguna dificultad para relacionar la secuencia con temáticas como: suma, resta, múltiplo, números impares entre otros, e incluso la relacionaron con otras materias como artística, estadística y geometría. Sin embargo, algunas profesoras no presentaban disposición para el desarrollo de este ejercicio como, por ejemplo; abandonaban el espacio, estaban más

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

atentas al celular y mostraban desinterés a las preguntas del ejercicio. En este sentido, allí se rescatan episodios que centran la atención sobre el porqué de esos ejes temáticos y a su vez esas materias.

P6: Esa secuencia se puede relacionar con la suma y la resta porque de izquierda a derecha aumenta y de derecha a izquierda disminuye (- orienta sus manos hacia la dirección mencionada).

P7: Sí, también con números impares porque de uno se pasa a tres y luego a cinco y esos son número impares.

P3: Yo también la relaciono con materias como artística para el diseño de dibujo. (- mueve sus manos haciendo la forma de una figura)

P5: Pero mira, (-señala con su índice la siguiente pregunta) esta, está relacionada con la primera.

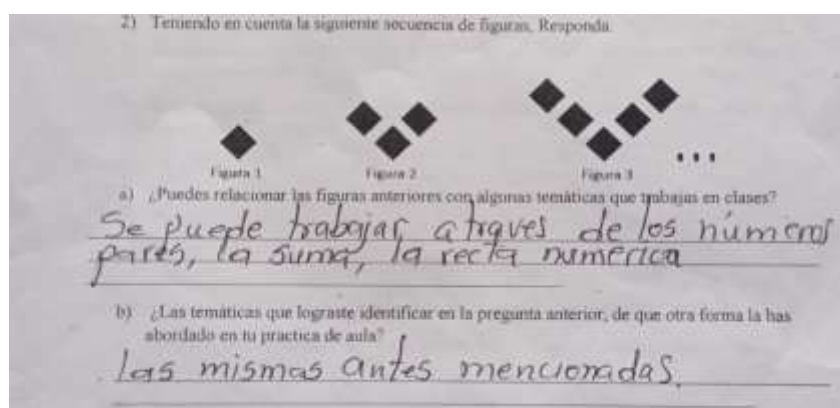
P7: Es prácticamente lo mismo que lo primero (-levanta su hombro izquierdo, e inclina su cabeza hacia la misma dirección)

Imagen 6. Desarrollo del ejercicio dos por las docentes.

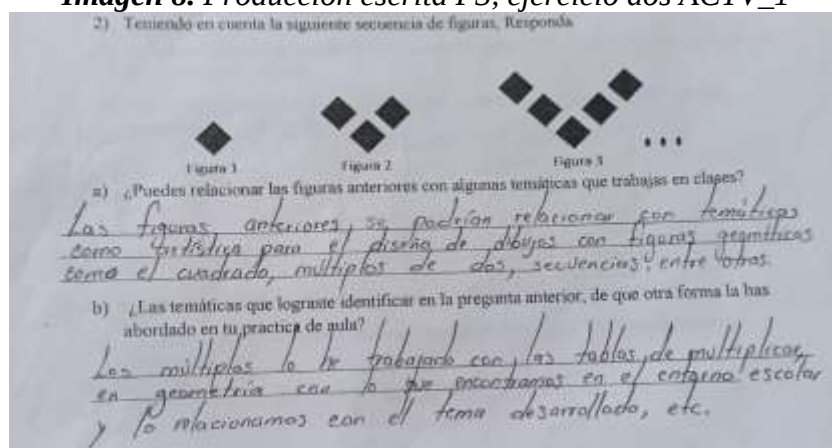
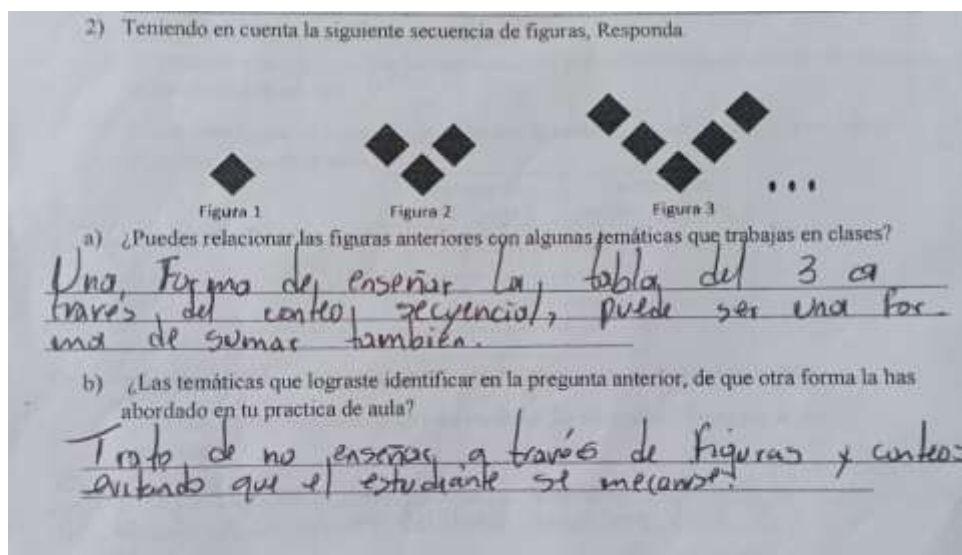


Esta interacción colectiva de las profesoras permite evidenciar un conocimiento disciplinar cómo a partir de dar una ideas o expresiones, se pueden generar nuevas, que sirvan para ampliar las posibilidades de encontrar un tema en la secuencia, e incluso, generar desinterés en responder las preguntas de manera coherente. En este episodio se puede observar que, a partir de la expresión que hizo **P5**, el nivel de interés de **P7** para responder la siguiente pregunta es mínimo. lo cual se puede evidenciar en las producciones de esta.

Imagen 7. Producción escrita P7, ejercicio dos ACTV_1



Nótese que, **P7** no da una respuesta coherente a lo que se le solicita en el inciso '**b**', ya que considero que las preguntas **a** y **b** llegan a lo mismo. Este hecho, muestra la no disponibilidad de **P7** para responder o, en efecto, la no comprensión de la información proporcionada. Por otro lado, en las producciones de **P3** y **P2**, se logra evidenciar un conocimiento profesional desde lo manifestado por Ponte (2012), específicamente en el conocimiento matemático, dado que, se aprecia un cierto conocimiento sobre conceptos de suma, resta, múltiplos, figuras geométricas, etc. Estos a pesar de no estar representados desde lo conceptual y procedimental, dichas profesora lograron ver otras formas en la que estos ejes temáticos pueden llegar a ser representados como fue el caso de la secuencia figural.

Imagen 8. Producción escrita P3, ejercicio dos ACTV_1**Imagen 9. Producción escrita P2, ejercicio dos ACTV_1**

4.3.1.3 Ejercicio 3: Secuencia Numérica

En este ejercicio las profesoras desarrollan una secuencia numérica en la cual deben identificar qué número sigue del anterior, luego explicar cómo lo encontraron, y mencionar la forma cómo adaptaría este ejercicio en su práctica de aula teniendo en cuenta el nivel de escolaridad que enseñan. Ante esto, las profesoras de manera individual inician un proceso de análisis y deducción para crear estrategias establecidas por algunas de ellas que sirvan para tratar

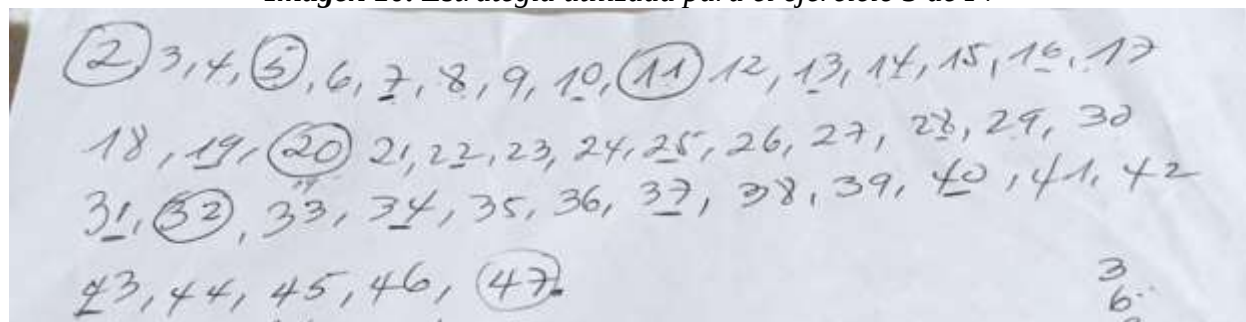
de identificar y describir un patrón que les permitiera hallar el séptimo término de la secuencia, las cuales dieron paso a varios episodios.

P2: ya sé cómo encontrar el séptimo término

P4: ¿Cómo lo hizo?

P7: Voy a explicar, va de tres, seis, nueve, diez, (- señala lo escrito en la hoja) ah, pero no me da, no, no me dio.

Imagen 10. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P7

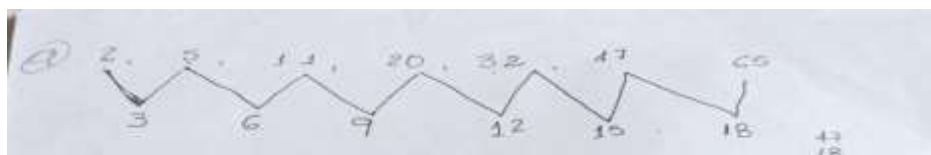


P1: Creo que tengo una forma de encontrarlo

P9: ¿A usted si le da? (-sonríe)

P1: eso creo, (-sonríe) entiendo que esto es una secuencia y la distancia que hay del dos al cinco es tres, del cinco al once es seis, del once al veinte la distancia es nueve y así sucesivamente. (-señala la hoja con el lápiz) “creo que con la distancia se puede encontrar

Imagen 11. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P1



P8: Ah sí, eso es sumar los múltiplos del tres, se inicia en dos, al cual se le suma tres, al resultado se le suma seis y así sucesivamente (- mueve la cabeza de arriba abajo rápidamente)

Imagen 12. Estrategia utilizada para el ejercicio 3 de P8

$$2 + 3 = 5, 5 + 6 = 11, 11 + 9 = 20, 20 + 12 = 32, 32 + 15 = 47, 47 + 18 = 65$$

P2: sí, entonces el séptimo término es 60

P1 y P8: No, es 65 acuértese que se van sumando los múltiplos de tres (-mueven la cabeza de izquierda a derecha rápido)

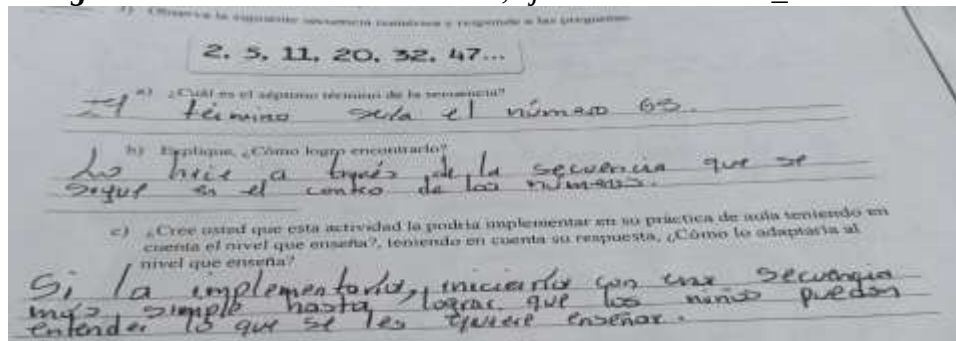
P2: ¡Eso! (-sonríe y señala a su compañera)

En este episodio permite dilucidar la presencia de un lenguaje natural en las profesoras, y el uso de algunos medios semióticos, es el caso de **P1**, quien con un gesto de sonrisa, señala con el bolígrafo la hoja donde se presenta la secuencia numérica, encontrando similitudes en las relaciones establecidas “entiendo que esto es una secuencia y la distancia que hay del dos al cinco es tres, del cinco al once es seis, del once al veinte la distancia es nueve y así sucesivamente, creo que con la distancia se puede encontrar”. Este hecho hace notar elementos del pensamiento factual Radford (2010), ya que se hace uso de medios semióticos como los gestos, las palabras, señales con el lápiz, y expresiones que indican una generalidad.

Por otra parte, **P8**, quién logra identificar un patrón general al mencionar “ah sí, eso es sumar los múltiplos del tres, se inicia en dos, al cual se le suma tres, al resultado se le suma seis y así sucesivamente”, en esto se hace presente el pensamiento algebraico contextual, pues aquello que era desconocido se logra deducir a través de la frase clave “sumar los múltiplos del tres” para demostrar cómo se conforma la secuencia.

En este mismo episodio se puede suponer que, en la idea establecida por **P1** y **P8**, las demás profesoras responderían de manera adecuada y coherente a las preguntas a y b. Pero, en las producciones escritas se evidencia una incoherencia entre el resultado y la estrategia utilizada para hallarlo. Además, se observa que algunas profesoras sí tendrían en cuenta este ejercicio, haciendo una adaptación a partir del nivel que enseñan y a su vez estableciendo tics previos a sus estudiantes, como es el caso de **P4** y **P7**. Sin embargo, otras profesoras abordarían este ejercicio a partir de experiencias vividas de los estudiantes y con diversos materiales pedagógicos, es el caso de **P9** y **P2**. Lo cual se puede relacionar con el conocimiento profesional del profesor desde lo planteado por Ponte (2012) particularmente con el tipo de conocimiento socio experimental.

Imagen 13. Producción escrita de P4, ejercicio tres ACTV_1



2. 5. 11. 20. 32. 47...

a) ¿Cuál es el séptimo término de la secuencia?

63

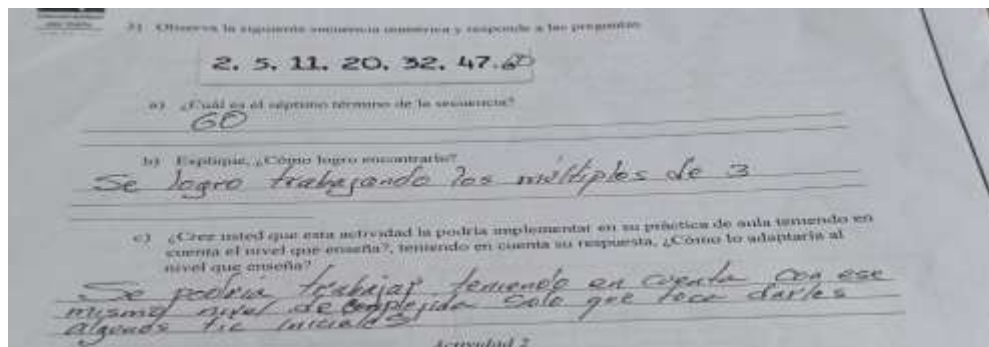
b) Explique, ¿Cómo logra encontrarlo?

Lo hice a través de la secuencia que se sigue en el conteo de los números.

c) ¿Cree usted que esta actividad la podría implementar en su práctica de aula teniendo en cuenta el nivel que enseña?, teniendo en cuenta su respuesta, ¿Cómo lo adaptaría al nivel que enseña?

Si la implementaría, iniciaría con una secuencia más simple hasta lograr que los niños puedan entender lo que se les quiere enseñar.

Imagen 14. Producción escrita de P7, ejercicio tres ACTV_1



2. 5. 11. 20. 32. 47...

a) ¿Cuál es el séptimo término de la secuencia?

60

b) Explique, ¿Cómo logra encontrarlo?

Se logra trabajando los múltiplos de 3

c) ¿Cree usted que esta actividad la podría implementar en su práctica de aula teniendo en cuenta el nivel que enseña?, teniendo en cuenta su respuesta, ¿Cómo lo adaptaría al nivel que enseña?

Se podría trabajar teniendo en cuenta con ese mismo nivel de complejidad solo que lea darles algunos tic iniciales

Actividad 2

Imagen 15. Producción escrita de P3, ejercicio tres ACTV_1**4.3.2 Actividad 2: Palitos de helado y Problema de los sobres.**

Esta actividad apuntó a los aspectos de generalización de patrones e indeterminación a partir de dos ejercicios, uno de ellos tomado del Programa Todos aprender (2021) y el otro de Vergel y Rojas (2018). Los cuales, fueron escogidos con el propósito de que las profesoras exploren un escenario dónde deben identificar un patrón y establecer criterios de evaluación para un caso particular.

En este sentido, a cada profesora se le presentó una hoja con la actividad llamada; problema de los sobres y palitos de helado. Así pues, en el ejercicio uno se propone formar parejas para que realicen una secuencia de triángulos con palitos de helados, los cuales deberían registrar en una tabla a partir de unas condiciones dadas. Luego, en el segundo ejercicio se presenta una situación en la cual las docentes deben deducir y establecer un criterio de evaluación.

Una caracterización de algunas formas como las profesoras de básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

Imagen 16. Actividad 2, Palitos de helado y problemas de los sobres.

Actividad 2

Descripción: a cada pareja se le entregará 15 palitos de helados con los cuales, deberán construir triángulos, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- 1) Inicialmente, se debe construir un triángulo.
- 2) El triángulo siguiente, se debe formar usando los palitos del triángulo anterior. Es decir que deben compartir un lado.
- 3) Construyan todos los triángulos posibles con la cantidad de palitos que se le entregó y completa la siguiente tabla:

Número de triángulos	Cantidad de palitos utilizados

Después de registrada la información de la tabla, responde a las siguientes preguntas

- a. ¿Cuántos palitos son necesarios para construir 20 triángulos? Explique la estrategia utilizada.

- b. ¿La estrategia que utilizo, la ha tenido en cuenta en su práctica de aula?

- c. En su práctica de aula alguna vez ha realizado este tipo de ejercicio, si su respuesta es sí, ¿Cómo lo ha desarrollado?

- 2) Analice la siguiente tarea propuestas a niños y dos posibles soluciones, luego responda a las preguntas.

Situación.

Carlos y Marina participan en una rifa de boletas para ingresar a un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres con un mismo número de boletas.

Carlos tenía siete boletas y ganó un sobre, y Marina tenía dos boletas y ganó dos sobres. Si ahora los dos tienen el mismo número de boletas, ¿Cuántas boletas contiene cada sobre?

CARLOS →



MARINA →



Ensayo y error		
Nº de boletas en Sobres	Nº boletas Carlos	Nº boletas Mariana
1	8	4
2	9	6
3	10	8
4	11	10
5	12	12
6	13	14

Estudiante B

Carlos Mariana



- a) ¿Cuál de las dos respuestas considera correcta, ¿Por qué?

- b) Si consideras que las dos son correctas. ¿Cuál sería su posición para validar ambas respuesta?

4.3.2.1 Ejercicio 1: Palitos de helado.

Las profesoras al iniciar este ejercicio se organizan en parejas para construir la secuencia de triángulos teniendo en cuenta las condiciones dadas para tal propósito, seguido de ello, registran en la tabla la cantidad de palitos necesarios para formar cierta cantidad de triángulos. Esto generó una serie de episodios que permitió una interacción colectiva.

P7: Hay que formar todos los triángulos que más se pueda, vamos a usar esta de aquí también, este tiene que estar más así (- señala y mueve con el bolígrafo un lado del triángulo inicial).

P5: ¡Ya! Pero tenemos más palitos.

P7: Ah, pero solo eran con quince palitos.

P1: Sí, pero hay más de 15 palitos.

P7: Entonces hagamos la cantidad de triángulos suficientes (- sonrío).

P2: ¿Los triángulos deben de quedar del mismo grande?

P7: Lo más probable es que sí.

P8: Que quede derecho. (- sonrío y mira a su compañera)

P2: Exacto. (mueve su cabeza arriba y abajo).

En este episodio se evidencia un estado de confusión por parte de las docentes, dado que, creía que todos los palitos de helado se debían usar para formar la mayor cantidad de triángulos. Además, se vislumbra que las profesoras no leyeron con atención las condiciones establecidas en el ejercicio, reflejado en las producciones de estas.

Imagen 17. Desarrollo del ejercicio uno por las docentes.



Luego de un proceso de análisis y algunas aclaraciones, las docentes continuaron el desarrollo de este ejercicio con una perspectiva clara. Sin embargo, **P5** y **P7** conservaron las ideas establecidas en el primer episodio, lo cual se refleja en expresiones como. “*El número de triángulos que hicimos fue; uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y cantidad de palitos que usamos fue; dos, seis, diez, dieciocho. Ahí ya quedó, en total nueve triángulos llevan dieciocho palitos, salió pa’ pintura ya no lo vuelvo armar*”; “*entonces un triángulo son tres palitos, dos son cinco porque fuimos aumentando de dos en dos, entonces tres triángulos serían siete palitos, y nueve triángulos sería dieciocho. Pero fue porque pusimos ese poco. Entonces ¿lo copiamos como lo hicimos?*”. Por otro lado, algunas profesoras atendieron a las aclaraciones y continuaron el desarrollo del ejercicio con su respectiva pareja, de lo que se destaca el siguiente episodio de cada pareja.

P4: *Entonces el cuarto triángulo tendría siete palitos.*

P9: *No, ve que aquí va aumentando, primero eran tres, luego cinco entonces el tercer triángulo se forma con siete palitos y el cuarto con nueve.*

P4: Ah si, entonces va aumentando de dos en dos (- sonríe y mueve la cabeza arriba y abajo)

P9: Ya tenemos cuatro triángulos  hay nueve palitos?

P4: Si, hay nueve. (- Apunta hacia la hoja de trabajo con el bolígrafo)

P8: Entonces para llenar el cuadro son cinco triángulos y se necesitan once palitos

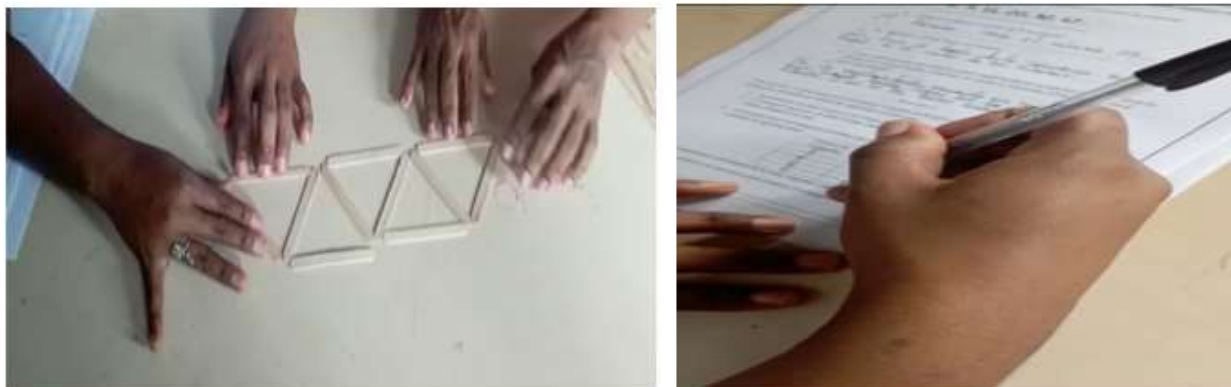
P3: Eso, tiene que ser once porque como ya se dijo vamos de dos en dos y comparten un lado.

P8:  Terminamos! (- levanta la hoja de trabajo con su mano derecha)

P3: No es competencia (- sonríe) o  s ?

Esta interacción colectiva de las profesoras permite evidenciar como a partir de compartir ideas, pensamientos, expresiones y deducciones, se contribuye en las concepciones que conducen al desarrollo de un ejercicio particular; en este caso apreciar como el compartir análisis, observaciones y deducciones, posibilitan encontrar una solución para un planteamiento, e incluso en su proceso ver posibles formas de pensamiento algebraico en las profesoras.

Imagen 18. Desarrollo del ejercicio uno por las docentes.



Las profesoras continúan el desarrollo de este ejercicio registrando en la tabla los resultados obtenidos a partir de sus estrategias establecidas para tal fin. Sin embargo, al preguntarles por la cantidad de palitos necesarios para formar veinte triángulos, parece que se convirtió en un proceso de construcción extensa, lo cual, se deduce por esta expresión “¡veinte triángulos!”; “¡ay! Aún falta,” a pesar de esto, las profesoras en parejas siguieron realizando un proceso de conteo, multiplicación y deducción, reflejado en el siguiente episodio.

P7: Haber, aquí nueve y nueve son dieciocho, que fue lo que hicimos al inicio (- mueve sus dedos contando). Entonces dieciocho y dieciocho son treinta y seis palitos, ehh () cuarenta palitos sí porque si, eso es. (- mueve su cabeza y señala la hoja)*

P5: Si, eso es, vamos de dos en dos.

P9: Con diez palitos construimos cinco triángulos, entonces con cuarenta palitos construimos veinte (- se rasca la cabeza).

P4: Recuerde que nos falta el lado que comparte, entonces sería cuarenta y un palitos.

P9: Cierto ese siempre esta verdad.

P4: Entonces para construir cinco triángulos se necesitan once palitos, no diez (-sonríe)

Imagen 19. producción escrita de P7, ejercicio uno ACTV_2

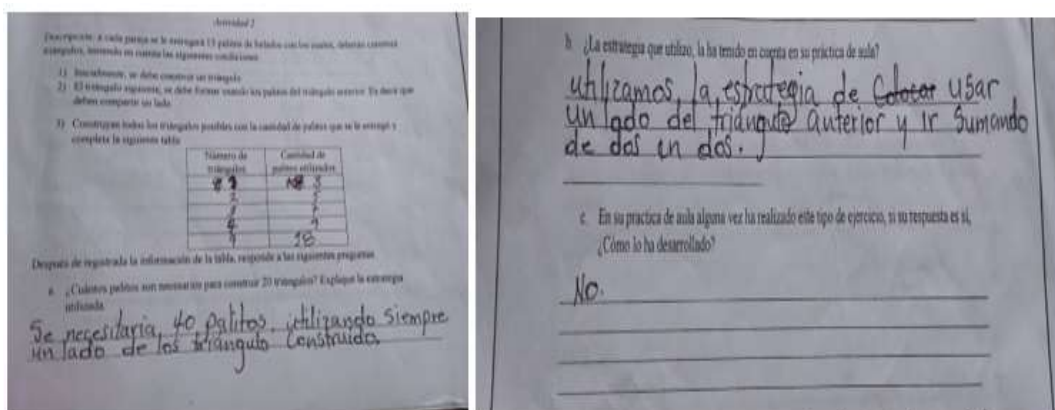
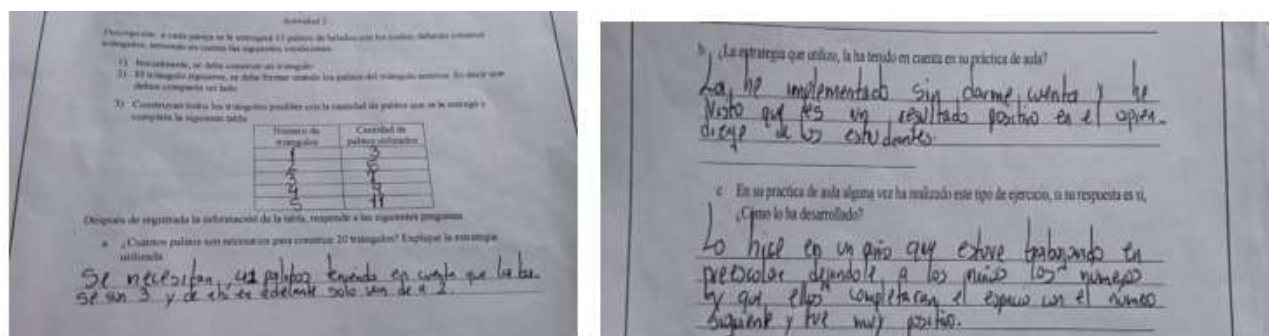


Imagen 20. Producción escrita de P4, ejercicio uno ACTV_2



Este episodio permite inferir las formas de pensamiento algebraico específicamente el factual y contextual, el primero se evidencia en **P7**, dado que, esta hace uso de palabras, actividad perceptual, gestos y expresa acciones concretas como; “nueve y nueve son dieciocho, Entonces dieciocho y dieciocho son treinta y seis palitos”. Así mismo al dar una mirada a **P4**, se dilucida que esta hace uso del pensamiento contextual ya que utiliza palabras claves como; “va aumentando de dos en dos”, “recuerde que nos falta el lado que comparte” lo cual evidencia que está trascendiendo de lo concreto hacia inferencias que la acercan a una generalización algebraica.

Por otro lado, en las producciones escritas se vislumbra que la pareja **P5** y **P7**, a pesar de la interacción colectiva, siguen apoyadas en sus ideas iniciales, además, al momento de darle

respuesta al inciso ‘c’ de este ejercicio, las profesoras muestran un desinterés porque expresan lo siguiente, “Pongamos No para no matarnos la cabeza”. Esto hace suponer que, no hace uso de este tipo de ejercicios en su práctica de aula y ni siquiera lo tendrían en cuenta. Así mismo, al dar una mirada a las producciones escritas de **P4** se observa la coherencia entre su estrategia y lo que escribió, además se evidencia que esta si ha tenido en cuenta este tipo de ejercicio en su práctica de aula, pero de manera inconsciente.

4.3.2.2 Ejercicio 2: Problema de los sobres.

Luego de terminar el ejercicio anterior, las profesoras se ubican en sus puestos de manera individual para realizar un proceso de análisis evaluativo al problema de los sobres. El cual está orientado en observar dos posibles respuestas dadas por estudiantes del mismo salón y, establecer una posición o criterio que le permita validar estas respuestas. En este sentido, en el desarrollo del ejercicio, se observó motivación en las profesoras por responder de forma personal a las preguntas aquí establecidas, por lo tanto, no se presentó episodios que permitiera una interacción colectiva. No obstante, se resalta un hecho relevante en el desarrollo de este ejercicio con **P3**, la cual da su punto de vista a los entrevistadores sobre este, expresando lo siguiente:

P3: *En esta pregunta vendríamos a mirar el nivel y la capacidad de análisis de cada estudiante, porque cada uno va a responder de acuerdo a las capacidades que ha desarrollado, entonces acá se hace un análisis más completo (-señala la respuesta del estudiante **B**), entonces al principio le podría malo al estudiante **A**, porque no la analice, solamente me fui al estudiante **B**, porque estaba más concreta, el análisis era más sencillo, pero después de analizar aquí se va*

descartando (-señala la respuesta del estudiante A) porque la respuesta es por descartar , hasta encontrar la igualdad.

De este suceso se puede inferir que **P3** cuenta con un conocimiento de la práctica educativa desde lo planteado por Ponte (2012), dado que, expresa la toma de conciencia del trabajo en el aula, cuando manifiesta que, se debe considerar el nivel de capacidad del estudiante para responder las preguntas, es decir, ser conscientes de los diferentes ritmos de aprendizajes que evidencian en el salón de clase. Además, reflexiona sobre su práctica al establecer que no hizo un análisis a la respuesta del estudiante **A**, porque, no presentaba una respuesta concreta como el segundo estudiante. Por otro lado, en las producciones escritas de las demás profesoras se logra apreciar su postura frente a las respuestas dadas por ambos estudiantes, lo cual se relaciona con sus concepciones y conocimiento sobre la práctica, en las siguientes imágenes.

Imagen 21. Producción escrita de P6, ejercicio dos, ACTV_2

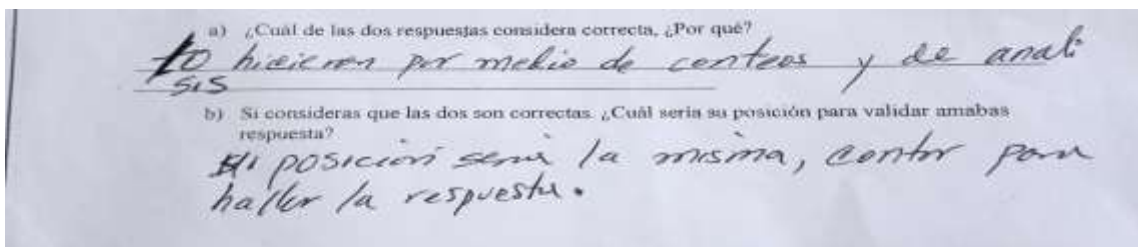
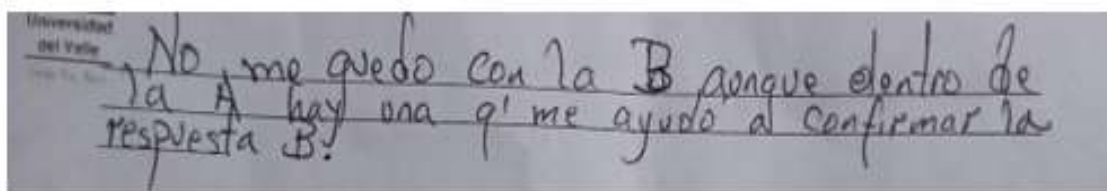
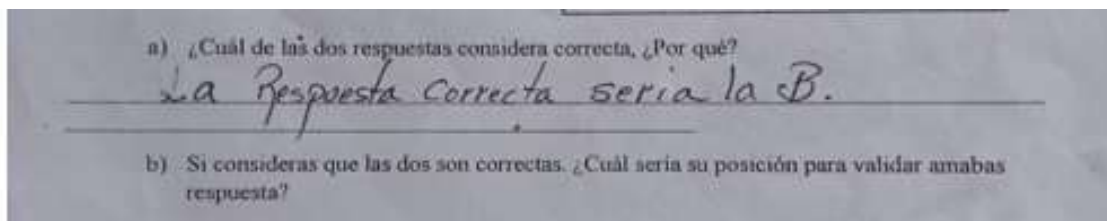


Imagen 22. Producción escrita de P7, ejercicio dos, ACTV_2



Nótese que, en las imágenes anteriormente presentadas se evidencia, entre otras cosas, la no comprensión de la información proporcionada por parte de **P6** y **P7**, dado que, no tuvieron en cuenta una postura como profesora para evaluar la situación presentada, en el caso de **P6** se puede suponer que esta guarda una postura de estudiante porque, establece que utilizaría la misma estrategia de los estudiantes A y B para encontrar la solución, pero no menciona cuál de las respuestas considera correcta y cuál sería su evaluación final. Por su parte, **P7** si considera una respuesta correcta, pero no menciona por qué de esta decisión, es decir, no justifica su posición.

Imagen 23. Producción escrita de P3, ejercicio dos, ACTV_2

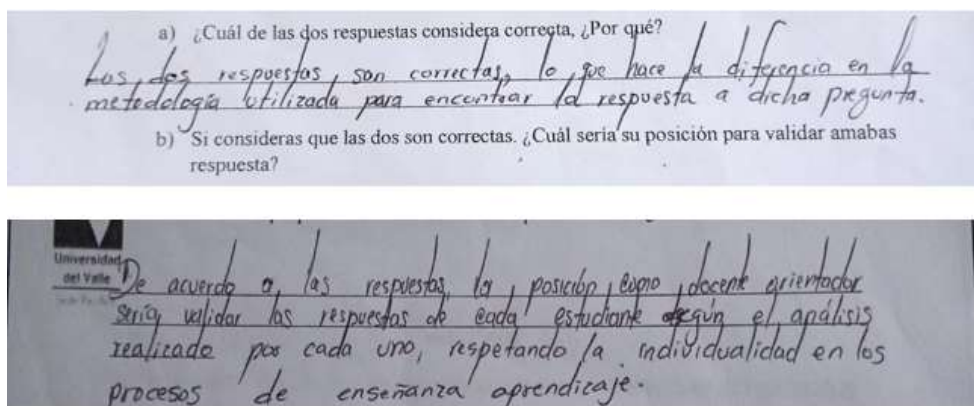
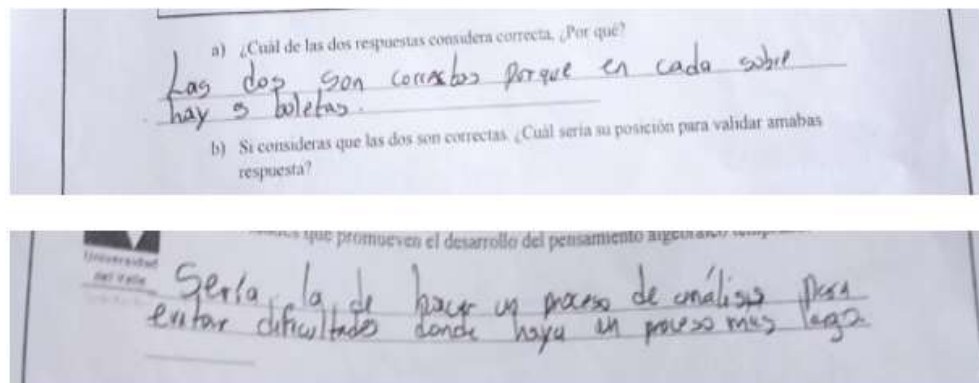


Imagen 24. Producción escrita de P4, ejercicio dos, ACTV_2



En estas imágenes se vislumbran dos posiciones para validar las respuestas de cada estudiante mencionado en la situación planteada, en primer lugar, **P3** considera que ambas respuestas son correctas y menciona qué diferencia un proceso de otro, así mismo, en su rol como profesora, asume una postura de validación objetiva, haciendo énfasis en respetar los ritmos de aprendizaje. En esta misma línea, se evidencia que **P4** coincide en que ambas respuestas son correctas y su posición se centra en analizar los resultados y explicar los procesos para evitar futuras dificultades. Estos casos ponen en evidencia el conocimiento de la práctica de cada profesora.

4.3.3 Actividad 3: Creación autónoma.

Después de haber tenido un proceso de conversación fluido de diálogo, expresión de ideas, y pensamientos con las profesoras en las actividades uno y dos. Se da paso al desarrollo de la actividad tres la cual consta de un solo ejercicio que tienen como propósito poner a las profesoras en un escenario de creación de una actividad que evidencie por lo menos un aspecto de los que se han trabajado a lo largo del espacio de formación, y a su vez, hacer una pequeña descripción de cómo la abordaría en su práctica de aula.

Imagen 25. Actividad tres, creación autónoma

Actividad 3	
<i>Descripción: Teniendo cuenta lo presentado hasta ahora. Cree una actividad que contenga los aspectos anteriormente trabajados y haga una breve descripción de cómo la abordaría en su aula de clase.</i>	
Actividad.	
Descripción	

En este sentido, se presentó a las profesoras la actividad donde se podía encontrar el enunciado y un rectángulo para plantear el ejercicio y a su vez, unas líneas para registrar el abordaje de este. En el proceso de desarrollo, se evidenció ansiedad en algunas profesoras por terminar el espacio de formación, reflejado en no dar respuesta a esta actividad y en expresiones como “*ya casi terminamos*”, “*¿solo falta esta diga?*”. Esta ansiedad en las profesoras no permitió episodios de interacción colectiva, sin embargo, se resalta un hecho que pone de manifiesto el interés de algunas de ellas por participar activamente en el desarrollo de esta actividad.

Es el caso de **P4**, quien expresa a los entrevistadores recordar una actividad en experiencia pedagógicas: “*En kínder estuve trabajando la sucesión de los números por lo menos en la familia del diez, yo les puse una cantidad de números y le dejaba el espacio para que completarán la sucesión. Entonces puedo poner esa actividad ¿cierto?, porque uno de los aspectos que hemos trabajado en este espacio es la secuencia. Yo lo trabajé no con el rigor como tal de la secuencia para promover eso que ustedes llaman (- se rasca la cabeza) álgebra temprana*”. Luego de la profesora terminar de expresar su idea, con la intención de indagar en ella, se le pregunta acerca de su trabajo con este tipo de actividades en el grado que enseña actualmente. Ante esto, manifiesta lo siguiente; “*Sí, lo he trabajado en grado tercero, pero no desde el álgebra, ya que eso es para secundaria, lo he hecho desde las matemáticas. (-sonríe)*”.

Imagen 26. Producción escrita de P4, ACTV_3

Actividad 3

Descripción: Teniendo cuenta lo presentado hasta ahora. Cree una actividad que contenga los aspectos anteriormente trabajados y haga una breve descripción de cómo la abordaría en su aula de clase.

Actividad

Completa la secuencia con el número que sigue

1 — 4 — 6 — — — 10 — — 13 — —

16 — 18 —

Descripción

Esta es una actividad que tuve en el grado preescolar cuando trabajé con ellos. Después de haber trabajado los números con ellos les pongo a completar la secuencia iniciando ya con el primer número y le doy algunos espacios para que ellos puedan completar y así lograr la secuencia y ver que si conocen los números.

Este hecho permite inferir que la profesora concibe que la enseñanza del álgebra inicia en básica secundaria, y está separada de lo aritmético (entendido para esta como matemáticas), lo cual permite confirmar lo planteado por Vergel (2016), al manifestar que muchos docentes se inclinan a no trabajar aspectos aritméticos y algebraicos en conjunto.

Por otro lado, en las producciones de la demás profesora se puede observar una similitud en las respuestas, es el caso de **P8** y **P9**. Lo cual pudo ser ocasionado por el estado de ansiedad de estás.

Imagen 27. Producción escrita de P8, ACTV_3

Actividad 3

Descripción: Teniendo cuenta lo presentado hasta ahora. Cree una actividad que contenga los aspectos anteriormente trabajados y haga una breve descripción de cómo la abordaría en su aula de clase.

Actividad

Ejercicios de lateralidad y secuencias numéricas en un contexto real.

Descripción

Por medio de una canción batalla con movimientos.

Imagen 28. Producción escrita de P9, ACTV_3

Actividad 3

Descripción: Teniendo cuenta lo presentado hasta ahora. Cree una actividad que contenga los aspectos anteriormente trabajados y haga una breve descripción de cómo la abordaría en su aula de clase.

Actividad

Ejercicios de lateralidad y Secuencia numérica en un contexto real.

* Canción batalla del calentamiento.

Descripción

Con movimientos: izquierda, derecha, arriba, abajo, dentro, fuera.

En estas producciones las profesoras plantean un ejercicio relacionado con el aspecto de secuencia a partir del contexto real del estudiante sin especificar en él, así mismo registran que el abordaje de este lo harían a través de movimiento corporales, los cuales son propios de la secuencia corporal. Esto hace suponer que las profesoras no tienen claro los aspectos que diferencian estos tipos de secuencia, ya que, en una secuencia numérica interviene una sucesión de números y se indica el término que corresponde, por su parte la secuencia corporal se constituye a partir de ritmos, sonidos o movimiento.

En esta misma actividad se observa la producción de **P1**(Imagen 30), ella plantea una actividad de secuencia, pero no establece la información pertinente para desarrollar tal fin, solo menciona el propósito y cómo el estudiante podría desarrollar dicha actividad. Pese a esto, se evidencia que esta profesora cuenta con un conocimiento de la práctica porque tuvo disposición para crear una actividad a su estudiante que permita contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

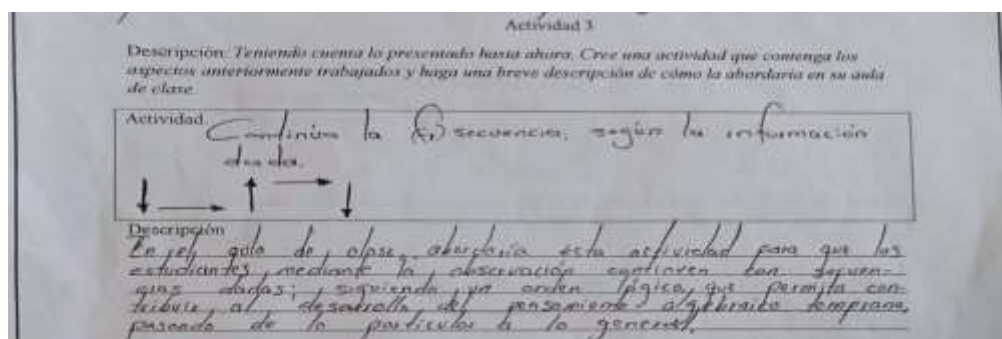


Imagen 29. Producción escrita de P1 ACTV_3

4.3.4 Reflexiones docentes.

Luego de terminar las actividades que orientaron este espacio de formación, se posibilitó una serie de reflexiones por cada docente las cuales están medidas a partir de dos preguntas

Luis Stiven Diaz Angulo y Zaida Rengifo Rengifo

realizadas por los entrevistadores; ¿Qué lograron rescatar de lo sucedido en este espacio de formación?, ¿Tienen sentido trabajar este tipo de actividades en básica primaria? Estos interrogantes, estaban orientados hacia la apropiación de actividades en la práctica de aula, por ello, se obtuvieron episodios de interacción por parte de las profesoras. En este sentido, se presentarán algunas reflexiones dadas por las profesoras para el primer interrogante.

P2: *Pues lo que logré entender de lo que hicimos resolviendo esas actividades y de los momentos de interacción frente a eso de que ustedes llaman pensamiento algebraico temprano, fue que nosotros como docentes debemos buscar en que nuestros estudiantes exploran y sean partícipes de su propio conocimiento y lo hagan por medio de cosas dinámica donde se pueda ver esos objetos del álgebra.*

P3: *Pues está caracterización que están trabajando me parece súper importante, porque la verdad ya fue tan dentro de la práctica docente con cosas que uno pues realiza pero que realmente no tiene claro que son procesos que existen. Y la verdad uno lo ha trabajado, pero realmente no tiene en cuenta el tema central en su totalidad, así como ustedes lo mencionaron porque ustedes hablan del desarrollo del pensamiento algebraico temprano y pues sin querer se trabaja, pero no se tiene claro cuál es el objetivo.*

P5: *El espacio fue muy bueno, nos han aclarado muchas dudas que de pronto nosotros teníamos con estos talleres realizados por ustedes, han sido muy claros y prácticos, sobre todo, estamos un poquito mejor, no como veníamos anteriormente.*

P9: *Es como retomar esa práctica docente con ejercicios reales en el aula de clase y que motiven esas prácticas a nuestros estudiantes, para fortalecer esas competencias. Además, cabe resaltar que esto no es fácil porque nosotros los maestros vamos a encontrar muchos obstáculos, pero nosotros siempre vamos a poder, ya que marcamos vidas.*

Por otro lado, a continuación, se presentan algunas reflexiones sobre el segundo interrogante planteado por los entrevistadores.

***P1:** Yo considero que estas actividades son buenas pero en mi salón de clase las utilizaría no con el mismo rigor que ustedes nos las han presentado, sino un poco más fácil teniendo en cuenta que mis estudiantes son de segundo y estos no llegarían a resolver esas actividades es más, si con la suma y resta se quedan cortos imagínense con estas actividades (-mueve la cabeza y sonríe) por ejemplo yo les presentaría eso que hicimos a lo primero eso de los movimientos pero relacionado con algo de matemáticas no, fue lo que entendí.*

***P2:** Si nos vamos a básica primaria estas actividades podrían tener sentido puesto que como son niños a ellos siempre hay que llevarlos por algo que los motiven no, por ejemplo, lo que hicimos con los palitos de helado eso fue algo muy bueno porque nos ayudó a movernos a no quedarnos solamente en responder la pregunta normalmente como se hace, sino que a nosotras mismas lo resolvimos haciendo uso de cosas manipulables como los palitos de helado entonces al llevar estos u otras instrumentos que podemos utilizar sería bueno.*

También eso que los estudiantes utilizan para jugar como las canicas cosas así, entonces vemos que las cosas que están utilizando en el diario vivir se le puede implementar a eso del álgebra temprana, pero también podemos ver cosas de las matemáticas que nosotras hemos venido trabajando en matemática cierto, como la suma, los números impares, resta etc. Entonces me parece que, sí son muy buenas para utilizarla y tenerla en cuenta nosotras como profesoras en nuestra práctica de aula y sí, me gustó el espacio de formación.

P3: Mira que por acá en la descripción que le hago en la actividad (- señala con el bolígrafo la actividad tres) digo que se plantea esta actividad con el propósito de contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico temprano y que se pasa de algo particular y se va a lo general, entonces con estructuras pequeñas ya uno puede ir trabajando procesos que son más macros, así como lo digo de lo micro a lo macro.

Entonces, pues ya el niño cuando se encuentra con otros procesos más complejos tiene las herramientas y las bases desde la básica primaria de primero a segundo grado para manejar con mayor facilidad esos aspectos cuando ya estén niveles más altos del proceso formativo. Además, por acá hay una parte donde menciono que estas actividades van a ser una de las herramientas didácticas y pedagógicas para tener en cuenta para el próximo año porque pues este ya está terminando.

P4: Me parecen unas actividades muy interesantes porque nos llevan a enseñarle al estudiante a ver más allá de lo que le podamos estar enseñando, a veces pensamos que es algo básico y nos estamos dando cuenta que estamos llevando a los niños a otro fondo de una actividad que sería muy bueno ir la implementando para ponerlos a pensar y a que analicen algunas situaciones que se presentan.

P6: Ojalá esto se aplique en las instituciones educativas, nosotras sabemos que la matemática es de suma importancia para nuestro diario vivir y que más que empezar a ejercer con esta propuesta que traen ustedes en nuestra práctica de aula, ya que en lo personal no era consciente de que desde lo que yo hago en mi clase normal puedo involucrar elementos del álgebra, y no desde las letras sino desde otro elemento como la secuencia, patrones y los otros que vimos en este espacio.

P7: Podemos seguir en eso, pues algunas veces uno hace las cosas y no se da cuenta que se está haciendo realmente el trabajo, porque no se le dice álgebra, se dice estamos en matemáticas y de pronto será esa la parte que toca irle encontrando, para que no les suene tan duro cuando lleguen al bachillerato la palabra álgebra, que es la que espanta a mucha gente cuando no debería de ser así, porque desde primaria la vienen viendo, sino que no se han dado cuenta, y darse cuenta que han venido mirando desde mucho tiempo y la manejan muchas veces, y dicen "No yo no sabía, álgebra, no eso es feísimo" pero era porque no se le habla de ello.

P8: Estás actividades son muy buenas y pertinentes ya que nos ayudan a fabricar la enseñanza, para que nuestros estudiantes puedan aprender con mayor facilidad estás actividades y sí, las pondría en salón de clases.

De manera general, la apropiación de estas actividades en relación con su aplicación y el uso de material pedagógico se va adquiriendo progresivamente reflejado en las producciones escritas, interacciones colectivas y reflexiones por parte de las profesoras durante el desarrollo del espacio de formación ya que en el transcurso y al final de este, las profesoras hacían uso de manera frecuente de algunos términos trabajados en las actividades.

En lo que concierne con el uso de material pedagógico, algunas profesoras alcanzaron un nivel alto de apropiación es el caso de **(P2, P3 y P4)** pero para el resto el nivel fue medio. En este sentido, el uso de material concreto en actividades que promueven PAT posibilitó explorar ideas de las cuales surgieron figuras no consideradas en las actividades propuestas. Además, este dinamismo dio paso a que las profesoras pudieran hacer un proceso de análisis y deducción de lo concreto a lo abstracto, lo cual permitió una mejor comprensión de los conceptos abordados y a

su vez, generó interés y motivación en las profesoras para trabajar este tipo de actividad en su práctica de aula.

Bajo este panorama expuesto, se asume que, las concepciones, formas de pensamiento algebraico y los aspectos que lo inician son proceso que promueve actividades de diálogo, interacciones, expresiones, saberes y reflexiones que conlleva a la comprensión de conceptos y procedimientos que pueden ser trabajados en básica primaria, por lo tanto, se consideran como aspectos que favorecen la enseñanza del álgebra en las primeras etapas de escolaridad.

Finalmente, de toda la jornada del espacio de formación y el producto obtenido en esta, se puede inferir que la actitud de las profesoras denota que la estrategia utilizada ha sido eficiente en la idea de presentar actividades que promueven PAT para la práctica docente, su quehacer pedagógico y a su vez, contribuir en el desarrollo de este. Además, dejó una motivación en las profesoras por participar de manera recurrente en este tipo de espacio. Así, esta forma de sintetizar lo ocurrido, permite hacer inferencias y agrupar un conjunto de resultados a partir de la visión global de la investigación.

CAPÍTULO V. SÍNTESIS DE RESULTADOS.

En este último capítulo, se precisan y detallan algunas ideas relacionadas con la forma que las profesoras asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano para sus prácticas de aula, teniendo en cuenta los objetivos propuestos en relación con algunos elementos obtenidos a lo largo del desarrollo de la indagación.

5.1 CONCLUSIONES.

De esta manera, con relación al primer objetivo específico que trata de describir algunas actividades que las docentes participantes presentan a sus estudiantes durante sus prácticas pedagógicas relacionadas con el pensamiento algebraico temprano se puede concluir que:

- ✓ Las profesoras en sus prácticas de aula y organización pedagógica priorizan el trabajo con el pensamiento numérico esto reflejado en el tipo de preguntas y ejes temáticos que proponen en las actividades, centrándose en la parte operatoria o ejercitación sin explicar otros caminos que desde ese mismo pensamiento permitan acercar a los estudiantes a proceso algebraicos desde una edad temprana.
- ✓ En las actividades identificadas el aspecto de la variación y el cambio es el más evidenciado en estas, lo cual permite suponer que, las docentes consideran este aspecto como fundamento del pensamiento variacional. Sin embargo, este aparece de manera implícita o inconsciente en las actividades dado que, en las preguntas no se precisa ni se hace mención en que los estudiantes identifiquen la variación y el cambio de un suceso en diferentes contextos.

Luego, el segundo asociado con establecer un espacio de formación con las docentes de educación básica primaria, que permitan la movilización de actividades relacionadas con el pensamiento algebraico temprano en la escuela se concluye que:

- ✓ El espacio de formación mediado por una entrevista basada en actividades como herramienta metodológica potencia la participación, intercambio de idea, comprensión de conceptos y movilización de concepciones en las profesoras, sobre la importancia del álgebra en la escuela, la necesidad de adquirir el dominio de los conceptos y procedimientos a enseñar, así como la apropiación de estrategias que permitan promover en los estudiantes PAT, evidenciado específicamente en las actividades 1 y 2 las cuales, generaron en las profesoras motivación y actitud positiva para desarrollar y apropiarse de las actividades.
- ✓ Algunas profesoras desarrollan las actividades de manera implícita dado que no cuenta con una profundidad disciplinar Zapata, et al (2018), además les faltó mayor interpretación de la información lo cual deja percibir que no cuenta con un conocimiento adecuado de aspecto del pensamiento algebraico temprano, esto evidenciado específicamente en los ejercicios de la actividad 1 y los de la actividad 2.
- ✓ Las actividades que requieran la implementación de materiales manipulativos se evidenció un mayor interés por parte de las profesoras no solo para resolverla sino también para llevarla a cabo en su práctica de aula, ya que en el desarrollo del ejercicio uno de la actividad dos, se observó mayor interés, motivación, disponibilidad y actitud positiva de las profesoras, lo cual se refleja en las reflexiones, interacciones y concepciones de estas.

- ✓ Las profesoras tuvieron un acercamiento al pensamiento algebraico temprano dado que, en las producciones y expresiones de esta se logra evidenciar lo indeterminado y analítico los cuales según Radford (2010) son los que fundamentan el pensamiento algebraico y logran hacer álgebra. Sin embargo, la analiticidad no se presenta de manera constantes, ni el uso de símbolo alfanumérico, este último a pesar de no determinar el pensar algebraicamente hace parte de las características del pensamiento algebraico temprano.
- ✓ Las profesoras manifestaban dos tipos pensamiento el contextual y factual, ya que en sus discursos promovían medios semióticos relacionados con actividades perceptuales, gestos, palabras claves, etc. que le permitían de una u otra manera llegar a reconocer la generalidad, secuencia o patrón. Sin embargo, en sus interacciones no se logró evidenciar el pensamiento simbólico esto evidenciado en las expresiones y producciones de las profesoras, ya que, no se observan símbolos que permitan reemplazar una idea o palabra clave. Esto permitió establecer que, las profesoras pueden iniciar a promover PAT pues de acuerdo con Radford (2010) las formas de pensamiento sirven a partir de sus características como base y orientación para que las docentes inicien a promover dicho pensamiento.

En concordancia con el tercer objetivo asociado con generar reflexiones pedagógicas sobre la apropiación de actividades que permitan el desarrollo del álgebra en los primeros años de escolaridad se puede inferir que:

- ✓ Los resultados permitieron dar cuenta de cómo la interacción colectiva, intercambio de idea, entre otros, motivados por la dinámica de cada actividad

proporcionaban una toma de conciencia por parte de las profesoras sobre lo que realizan en sus prácticas de aula y la importancia de promover PAT a partir de actividades de formación. Este espacio fue sin duda un reto, pero a su vez, una oportunidad de aprendizaje mutuo que se construyó en reflexiones grupales e individuales haciendo que el pensamiento algebraico se convirtiera en algo cercano y posible de promover en edad temprana.

- ✓ Las ideas iniciales que tenían algunas profesoras, tales como asumir que la enseñanza del álgebra debe abordarse en secundaria y que solo es una combinación de números y letras, les permitió avanzar en sus reflexiones sobre sus prácticas pedagógicas, avances como la posibilidad de promover pensamiento algebraico en la educación básica primaria a través de actividades matemáticas que estas desarrollan en sus prácticas de aula, en las cuales se contemplan aspectos del PAT de forma implícita.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo que plantea el objetivo general en cuanto a la caracterización de algunas formas como las docentes que enseñan matemáticas en básica primaria de la *IE-PEC* asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano, para sus prácticas de aula. Se pudo evidenciar inicialmente una buena actitud y disposición de las profesoras para enfrentarse a cada una de las actividades que dentro del espacio de formación se plantearon, siendo estas un elemento fundamental a la hora de promover pensamiento algebraico temprano, ya que, son ellas las agentes principales para tal fin. Sin embargo, al momento de enfrentarse con cada actividad, se develan ciertas dificultades en la comprensión de cada una de ellas, dado que, no poseían el conocimiento disciplinar que se requería para su realización. Lo anterior se reafirma con lo que se plantea en Zapata, Ramírez y Jaramillo (2018) sobre la

importancia de que el docente de primaria pose cierto conocimiento disciplinar cuando trabaje con aspectos del pensamiento algebraico temprano en el aula de clase.

5.2 RECOMENDACIONES

Esta investigación propició elementos conceptuales, procedimentales y metodológicos que pone algunas bases sobre las cuales se edifica la propuesta curricular Early Algebra. Por lo que, las profesoras que enseñan matemática en básica primaria en la IE-PEC deben considerar como punto de partida estos aspectos aquí descritos en función de mitigar las dificultades, mejorar los aprendizajes y la comprensión del objeto matemático en niveles de escolaridad más avanzados.

Así mismo, considerando los resultados obtenidos a partir de las producciones de las profesoras en el desarrollo de las actividades, es pertinente extender la mirada a futuras investigaciones en el campo de la Educación en Matemática, en las que se vinculen espacios de formación que brinden bases para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en primaria, con el propósito de involucrar a los profesores del Distrito Especial de Buenaventura que enseñan en este nivel académico, en escenarios de interacción y reflexión sobre su quehacer como docente.

Por último, sería oportuno indagar sobre la forma en que se abordan los aspectos que promueven pensamiento algebraico temprano en la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal y cómo se aproximan a los estudiantes al abordaje de estos objetos algebraicos favoreciendo el desarrollo significativo del pensamiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agudelo, C. (2007). Promoción de una enseñanza para la comprensión en el Inicio del trabajo algebraico escolar. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. [Tesis Doctoral], Universidad de Granada. España
- Avalos, B., y Matus, C. (2010). La Formación Inicial Docente en Chile desde una Perspectiva Internacional. (Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS M). Santiago: Ministerio de Educación de Chile
- Blanton, L., y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 36(5), 412-446
- Bouzas, P. G. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Investigación en la Escuela*, (73), 95-108.
- Brizuela, B., Martinez, M., & Cayton-Hodges, G. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 209-241.
- Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148. Caldas.
- Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Pedagógica Nacional, en evaluación.

- Carraher, D., & Schlieman, A. (2007). Early Algebra and algebraic reasoning. En F. L. Jr., Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (Vol. 2, p. 669-706). NCTM, NC. Recuperado el abril de 2017, de <https://goo.gl/cf1G4u>
- García, Á. y Estrada, E. (2014). “Factores que influyen en la motivación para aprender matemáticas en estudiantes de una Preparatoria de la Universidad Autónoma de Nayarit”. Revista edúcate conciencia. Vol. 3, No. 3. Tepic, Nayarit. México, pp. 64-79.
- Garzón, N. (2013). Elucubraciones del saber. Universidad Central de Nicaragua UCN.
- Godino, J. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 26(42B), 483- 511.
- Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. Journal of Mathematics Teacher Education, 20(3), 231–257.
- Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics.
- Llinares, S. (2009a). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación con la noción de función. Colección Digital Eudoxus, (15).

- Londoño, J. M. (2020). Movilización de las concepciones del maestro de básica primaria para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.
- Manyoma, A., Riascos, C., & Cuero, G. (2021). Un análisis a libros de textos de matemáticas de básica primaria en el abordaje de las transformaciones isométricas a partir del proceso de visualización. Universidad del Valle.
- Merino, E. (2012). Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea Generalización. Universidad de Granada, Granada, España.
- Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (septiembre, 2012). Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. En J. Cardeñoso (Coordinador), Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico del XVI Simposio de la SEIEM, Jaén, España
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento en el marco del Programa Todos a Aprender del MEN. Tenerife, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática –SEIEM-.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación matemática*, 33(1), 153-18

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas, *Crítica y Práctica de la Educación Matemática* (p. 83-98). Barcelona: Graó.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Maria van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.), Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol. 4, pp. 81-88.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2010b). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. C. Knuth, Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives (págs. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cafladas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp.3-12). Granada. Editorial Comares.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. Revista latinoamericana de etnomatemática, 7(2), 132-150.
- Radford, L. (2021). The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. Brill/ Sense: Leiden, The Netherlands.
- Santos Trigo M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. México: Mathesis, Vol. 9, Número 4
- Schliemann, D., Carraher, W., & Brizuela, M. (2011). El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula. Paidós.
- Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Álgebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de Educación Primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización.
- Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) En: Gallego P. (Ed.) (2013). Revista Científica, Edición especial, 234-240.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). (Tesis doctoral). Colombia: Universidad Distrital.

Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 68, 9-17.

Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2019). Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. Minicurso, Memorias de XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, XV CIAEM, Medellín.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas

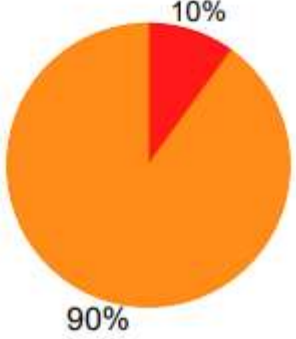
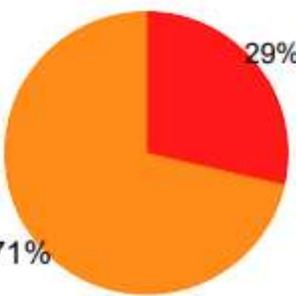
www.mineduccion.gov.co. - atencionalciudadano@mineducacion.gov.co

Zapata, S. (2020). Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Tesis Doctoral. Medellín: Universidad de Antioquia.

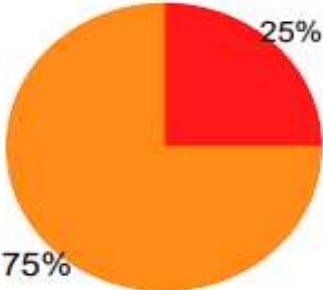
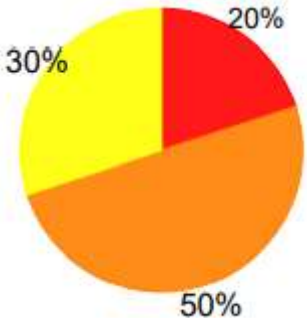
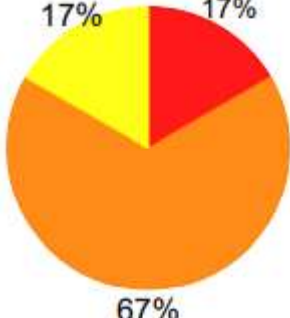
Zapata, S., Ramírez, Z., & Jaramillo, L. (2018). El profesor de primaria: una reflexión sobre su papel en la inclusión del álgebra temprana en el currículo escolar. Revista Virtual Universidad Católica del Norte (55), 192 – 20.

ANEXOS.

**ANEXO A. RESULTADO COMPARATIVO POR COMPETENCIAS PRUEBAS
SABER 2017 Y APRENDIZAJES POR MEJORAR GRADOS 3° Y 5°, DE IE-PEC.**

Lectura de reporte	Rojo: 70% o más no contestaron correctamente. Naranja: 40% al 69% no contestaron correctamente. Amarillo: 20% al 39% no contestaron correctamente. Verde: 19% o menos no contestaron correctamente.	
GRADO TERCERO	2017	
Competencias	Descripción general de los aprendizajes.	Aprendizajes para mejorar
COMUNICACIÓN	 A pie chart for the 'COMUNICACIÓN' competency. It is divided into two segments: a large orange segment representing 90% and a smaller red segment representing 10%.	-El 76% no construye ni describe secuencias numéricas y geométricas. -El 54% no describe características de un conjunto a partir de los datos que lo representan. -El 47% no reconoce equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con números.
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	 A pie chart for the 'RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS' competency. It is divided into two segments: a large orange segment representing 71% and a smaller red segment representing 29%.	-El 74% no estima medidas con patrones arbitrarios. -El 61% no resuelve ni formula problemas sencillos de proporcionalidad directa. -El 60% no resuelve problemas aditivos rutinarios de composición y transformación ni interpreta condiciones necesarias para su solución.

Una caracterización de algunas formas como las profesoras de básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

		-El 48% no desarrolla procesos de medición usando patrones e instrumentos estandarizados.
RAZONAMIENTO		-El 84% no usa operaciones ni propiedades de los números naturales para establecer relaciones entre ellos en situaciones específicas. -El 67% no establece conjeturas acerca del sistema de numeración decimal a partir de representaciones pictóricas
GRADO QUINTO	2017	
COMUNICACIÓN		- El 65% no describe ni interpreta datos relativos a situaciones del entorno escolar - El 62% no describe ni interpreta propiedades y relaciones de los números y sus operaciones. -El 50% no reconoce diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) ni hace traducciones entre ellas. -El 28% no reconoce ni interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos.
RESOLUCIÓN		-El 63% no resuelve problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones. -El 50% no resuelve ni formula problemas multiplicativos rutinarios y no rutinarios de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.

		-El 49% no resuelve ni formula problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa
RAZONAMIENTO	 A pie chart with three segments. The largest segment is orange and labeled '80%'. The other two segments are smaller, one yellow and one red, both labeled '10%'.	- El 77% no analiza relaciones de dependencia en diferentes situaciones. -El 55% no reconoce ni predice patrones numéricos. - El 44% no justifica propiedades ni relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos

Tomados de https://diae.mineduacion.gov.co/dia_e/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/176109002977.pdf

Una caracterización de algunas formas como las profesoras de básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

ANEXO B. EVIDENCIA FOTOGRAFICAS DE LA IMPLEMENTACIÓN.





Una caracterización de algunas formas como las profesoras de básica primaria de la Institución Educativa Pablo Emilio Carvajal asumen actividades que promueven pensamiento algebraico temprano.

