



Los números reales en Cantor y Bourbaki: un estudio comparativo con fines educativos.

Nayby Yasury Herrera Viafara

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas
2024



Los números reales en Cantor y Bourbaki: un estudio comparativo con fines
educativos.

Nayby Yasury Herrera Viafara

Maribel Patricia Anacona
Directora de Trabajo de Grado

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas
2024

*A mis padres y hermanas, que han hecho
posible todo lo que he conseguido; a mi abuela
Petrona que siempre recuerdo y me acompaña
desde el cielo.*

El profesor mediocre habla.

El buen profesor explica.

El gran profesor demuestra.

Pero el profesor ideal inspira.

(William Arthur Wild)

Agradecimientos

Me gustaría comenzar este apartado con un sincero reconocimiento a todas las personas que han contribuido a hacer realidad este sueño académico.

Quiero comenzar expresando mi más profundo agradecimiento a Dios, por ser mi guía, por brindarme fortaleza y por permitirme haber llegado a este momento tan importante de mi formación profesional.

Asimismo, deseo agradecer a mis padres, Filemon Herrera y Rosa Viafara, por ser los pilares más importantes, quienes me impulsan a ser mejor cada día y por demostrar siempre su cariño y apoyo incondicional.

A mis queridas hermanas, por estar siempre presentes y por su constante apoyo durante mi formación profesional. Sus ánimos y confianza en mí me han dado la fortaleza para enfrentar cualquier desafío que se presente.

A la Universidad del Valle, mi Alma Máter por ser mi casa de estudio, recinto de mi formación como Licenciada en Matemáticas proporcionándome los mejores espacios y recursos para mi formación.

Quiero expresar mi gratitud a mi querida profesora Maribel Anacona, directora de este trabajo de grado por su dedicación y paciencia, quien con su entusiasmo y apoyo me motivo para la realización de este trabajo y llevarlo a buen término.

También, a la profesora Marisol Santacruz, por impulsarme a exponer los avances de este proyecto en el Encuentro de Semilleros de investigación durante el desarrollo del curso de Formación en Semillero de Investigación II.

Agradezco sinceramente a la profesora y evaluadora Yesika Ñañez, por su tiempo, esfuerzo y valiosas sugerencias que contribuyeron a enriquecer este trabajo.

A los demás profesores por compartir sus enseñanzas, por su dedicación y acompañamiento durante mi proceso de formación.

También quiero reconocer a mis compañeras Yesica Díaz, Camila Castillo y Angélica García, por su apoyo, motivación y palabras de aliento durante la realización de este trabajo. Su contribución ha sido invaluable y aprecio cada gesto de apoyo.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a mis compañeros de clase, amigos y todas las personas que de alguna u otra manera aportaron para la terminación de este trabajo de grado.

A todos los mencionados, mis más sinceros agradecimientos.

Resumen

En este trabajo de grado se estudian dos construcciones del conjunto de los números reales con el objetivo principal de analizar las ventajas y limitaciones de estas en la formación de los profesores de matemáticas. La primera realizada por Cantor mediante sucesiones de Cauchy en 1872 y la segunda propuesta por Bourbaki en 1940 mediante filtros minimales de Cauchy.

En vista de que la construcción rigurosa de los números reales es un tema relevante en el Análisis Matemático, comprender la convergencia y la completitud proporcionan una visión general de los conceptos y técnicas fundamentales que han contribuido al desarrollo de las matemáticas a partir de los estudios históricos y epistemológicos.

Por un lado, Cantor parte del cuerpo ordenado de los números racionales $\mathbb{Q}$, define el conjunto $\mathcal{C}$ de las sucesiones de Cauchy y luego, una relación de equivalencia y las clases de equivalencia que forman el anillo cociente para construir el cuerpo de los números reales. Por otra parte, Bourbaki parte del espacio uniforme de los números racionales $\mathbb{Q}$, sobre el que se definen los filtros de Cauchy para estudiar la convergencia y la “cercanía” entre dos filtros por la relación de inclusión “ $\subseteq$ ” y para verificar la propiedad de completitud se muestra que los filtros de Cauchy convergen en dicho espacio para obtener los números reales.

Finalmente, el estudio comparativo ofrece una comprensión más profunda de las construcciones de los números reales que ofrecen perspectivas y herramientas únicas en la formación matemática universitaria.

Palabras clave: Construcción de los números reales, sucesiones de Cauchy, filtros de Cauchy, convergencia de sucesiones, convergencia de filtros.

Abstract

In this degree work, two constructions of the set of real numbers are studied with the main objective of analyzing their advantages and limitations in the training of mathematics teachers. The first carried out by Cantor using Cauchy sequences in 1872 and the second proposed by Bourbaki in 1940 using minimal Cauchy filters.

Given that the rigorous construction of real numbers is a relevant topic in Mathematical Analysis, understanding convergence and completeness provides an overview of the fundamental concepts and techniques that have contributed to the development of mathematics from historical and epistemological studies.

On one hand, Cantor starts from the ordered field of rational numbers $\mathbb{Q}$, defines the set $\mathcal{C}$ of Cauchy sequences, and then an equivalence relation to obtain the equivalence classes that form the quotient ring over which the real numbers are constituted. On the other hand, Bourbaki starts from the uniform space of rational numbers $\mathbb{Q}$, over which Cauchy filters are defined to study the convergence and "closeness" between two filters by the inclusion relation " $\subseteq$ ". To show that the completeness property is fulfilled, it is verified that the Cauchy filters converge in this space to obtain the real numbers.

Finally, the comparative study offers a deeper understanding of the constructions of real numbers, providing unique perspectives and tools in the university mathematical training of mathematics teachers.

Keywords: Real numbers construction, Cauchy sequences, Cauchy filters, sequence convergence, filter convergence.

Tabla de Contenido

	Pág.
CAPÍTULO 1	16
Conceptos preliminares a la construcción de los reales por Cantor	16
1.1 Sobre las sucesiones de racionales y su convergencia	20
1.1.1 Sucesión de racionales.....	20
1.1.2 Convergencia de una sucesión de racionales.....	22
1.1.3 Sucesión de Cauchy de números racionales	25
1.2 Estructuras algebraicas: grupo, anillo y cuerpo.	27
1.2.1 Operación	27
1.2.2 Propiedades básicas de una operación.....	28
1.2.3 Grupo	28
1.2.4 Anillo.....	29
1.2.5 Cuerpo	29
1.2.6 Ideal de un anillo	30
1.2.7 Ideal maximal de un anillo	31
1.3. Relaciones y clases de equivalencia.....	31
1.3.1 Propiedades de las relaciones	32
1.3.2 Relación de equivalencia.....	33
1.3.3 Clase de equivalencia	33
1.3.4 Partición.....	33
1.3.5 Conjunto cociente	34
1.3.6 Relación de orden	35
1.3.7 Anillo cociente.....	35
CAPÍTULO 2	38
La construcción de los reales por Cantor a través de sucesiones de Cauchy	38
2.1 Operaciones sobre $\mathcal{C}$	39
2.2 $\mathcal{C}$ como anillo conmutativo unitario.....	40
2.3 Relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$	41
2.4 Anillo cociente, cuerpo e ideales sobre $\mathcal{C}$	42
2.5 Clases de equivalencia sobre $\mathcal{C}$	43
2.6 Los números reales forman un cuerpo ordenado y arquimediano	44
2.7 Los números reales forman un cuerpo completo	47
CAPÍTULO 3	49
Conceptos preliminares a la construcción de los reales por Bourbaki	49
3.1 Cola y convergencia de una sucesión.....	52
3.1.1 Convergencia de sucesiones en términos de familias de conjuntos	54
3.2 Filtros y bases.....	56

3.2.1 Filtros comparables	59
3.2.2 Base de filtro.....	59
3.3 Espacios topológicos y bases	62
3.3.1 Topologías comparables	63
3.3.2 Base de una topología.....	63
3.3.3 Bases de topologías comparables	64
3.4 Noción de vecindad y convergencia de filtros	64
3.5 Sobre filtros de Cauchy	69
3.5.1 Estructura y espacio uniformes	69
3.5.2 Sistema Fundamental de Entornos	74
3.5.3 Definición de Filtro de Cauchy	75
3.5.4 Filtro minimal de Cauchy	76
CAPÍTULO 4	77
La construcción de los reales por Bourbaki a través de filtros de Cauchy	77
4.1 $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme	78
4.2 Filtros de Cauchy en $\mathbb{Q}$	79
4.3 Relación de contenencia.....	81
4.4 Convergencia de filtros minimales de Cauchy.....	82
4.5 Conjunto de los filtros minimales de Cauchy en $\mathbb{Q}$	83
CAPÍTULO 5	86
Análisis comparativo y conclusiones	86
Referencias.....	93

Índice de figuras

Pág.

Figura 1 <i>Gráfica de una sucesión de racionales</i>	21
Figura 2 <i>Ejemplos de sucesiones racionales que convergen en $\mathbb{Q}$</i>	23
Figura 3 <i>Ejemplos de sucesiones de racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$</i>	24
Figura 4 <i>Ejemplos de filtro y no filtro de $X = \{1,2,3\}$</i>	56
Figura 5 <i>Caso I: $a \leq b$ en $X = \mathbb{R}$ del filtro de Fréchet</i>	60
Figura 6 <i>Caso II: $a > b$ en $X = \mathbb{R}$ del filtro de Fréchet</i>	61
Figura 7 <i>Características de los entornos de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$</i>	70
Figura 8 <i>Propiedad reflexiva de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$</i>	71
Figura 9 <i>Propiedad simétrica de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$</i>	72
Figura 10 <i>Propiedad de la desigualdad triangular de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$</i>	72
Figura 11 <i>Propiedad de la intersección en un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$</i>	73
Figura 12 <i>Propiedad de contenencia de entornos</i>	74
Figura 13 <i>Estructura uniforme $\mathfrak{U}$ sobre $\mathbb{Q}$</i>	79
Figura 14 <i>$U_a(x) = \{y \in \mathbb{Q}: (x, y) \in U_a\}$ es una vecindad alrededor de $x \in \mathbb{Q}$</i>	80
Figura 15 <i>El conjunto $\mathfrak{U}^* = \{\tilde{U}_a: U_a \in \mathfrak{U}\}$ dota a $\mathbb{R}$ de una estructura uniforme</i>	81
Figura 16 <i>Topología inducida de la estructura uniforme de $\mathbb{R}$</i>	82
Figura 17 <i>Traza sobre $i(\mathbb{Q})$ de una vecindad de $\tilde{V}(\mathcal{F}_0)$ de un punto $\mathcal{F}_0$ de $\mathbb{R}$</i>	84

Introducción

Los números reales constituyen un tema relevante en la formación matemática universitaria dada su importancia en los cursos de Cálculo, Análisis, Topología, y otros. Su presentación se hace generalmente vía axiomática, al estilo de Hilbert y no se estudian sus construcciones, salvo en los cursos de la línea de Historia de las Matemáticas del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle; más específicamente, en el sexto y noveno semestre en los cursos de Historia y Epistemología de las Matemáticas y de Tópicos de Matemáticas Modernas y Contemporáneas, respectivamente. En el primero, se hace un recorrido de la historia de las matemáticas desde la antigüedad hasta el siglo XX constituyéndose en los preliminares para la constitución histórica de ramas como la Geometría, el Cálculo, el Análisis y el Álgebra. Además, en este se analizan esencialmente las construcciones de Dedekind mediante cortaduras y la de Cantor por medio de sucesiones de Cauchy ambas fundamentadas en la estructura de los números racionales. En el segundo, se hace un acercamiento a los avances matemáticos más destacados de las prácticas matemáticas del siglo XX y principios del XXI y se presenta la noción de estructura matemática como foco principal de estos desarrollos.

Es así como dada la complejidad del tema, se considera oportuno estudiar otra construcción que permita tener una visión más amplia y ofrezca nuevos elementos de orden epistemológico que posibiliten una mejor comprensión de las propiedades

fundamentales de los números reales. Desde esta perspectiva, nos interesa conocer a fondo la construcción de los reales propuesta por Bourbaki, la cual emplea conceptos, métodos y técnicas propias del siglo XX. No sólo nos interesa conocer la construcción conceptual sino analizar las ventajas y limitaciones que ofrece su abordaje en la formación de profesores de Matemáticas. De ahí, que nos interesa responder la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las ventajas y limitaciones que ofrece el estudio de las construcciones de los números reales a través de sucesiones de Cauchy y por filtros minimales de Cauchy en la formación de los profesores de matemáticas?

De modo que, para resolver este interrogante, en este trabajo se hace énfasis en el estudio de dos construcciones del conjunto de los números reales realizadas por Cantor y por Bourbaki, respectivamente para cumplir con el objetivo principal de analizar las ventajas y limitaciones de estas en la formación de los profesores de matemáticas. En particular se analiza una versión moderna de la propiedad de completitud, la cual no es de fácil comprensión para los estudiantes universitarios como lo menciona Bergé (2004).

Aunque el estudio de los números reales ha hecho parte de diversas investigaciones en Historia, Didáctica y Educación Matemática, la propiedad de completitud que los caracteriza no es muy clara para los estudiantes universitarios en los cursos de matemáticas tales como: Matemáticas Fundamentales, Cálculo, Análisis, Topología, entre otros. Por esta razón, en este trabajo se estudia la construcción de los números reales que surgió en las prácticas matemáticas del siglo XX. Pues, por un lado, se quiere comprender los números reales desde una técnica de las matemáticas modernas y, por otro lado, estudiar las ventajas

y limitaciones de esta construcción para la comprensión de los futuros docentes de matemáticas.

Es así como el presente trabajo se organiza de la siguiente manera: en el capítulo uno, se muestran los antecedentes de la construcción de los números reales por Cantor, los cuales nos proporcionan los fundamentos y conceptos necesarios para comprender los elementos básicos de dicha construcción; en el segundo capítulo, se presenta una versión moderna de la construcción realizada por Cantor mediante sucesiones de Cauchy en 1872 empleando el concepto de clases de equivalencia; en tercer capítulo, se exponen los conceptos principales necesarios para la construcción de los reales por Bourbaki sobre todo los relacionados con el concepto de filtro y filtros de Cauchy; en el cuarto capítulo, se realiza un bosquejo muy general de la prueba realizada por Bourbaki en 1940, y en el quinto capítulo se realiza un estudio comparativo de ambas construcciones y las conclusiones que nos permite comprender las ventajas y limitaciones de estas. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas, que soportan esta indagación.

CAPÍTULO 1

Conceptos preliminares a la construcción de los reales por Cantor

La historia de las matemáticas se asemeja a un rompecabezas en el que, en cada etapa, sus piezas van encajando, convirtiéndose en un medio significativo que ofrece posibilidades de transitarlo e indagar sobre lo que se ha establecido. De esta manera, algunos fragmentos de estas piezas corresponden a las diversas construcciones de los números reales ($\mathbb{R}$) especialmente, las referentes al surgimiento de nuevos conceptos y métodos del cálculo que se instauraban a comienzos del siglo XIX.

Puesto que, la necesidad de una prueba rigurosa del *teorema del valor intermedio*¹ era indispensable para el proceso de fundamentación que se vivía en la época. Este teorema fue demostrado por primera vez por *Bernard Bolzano*² en 1817. En cambio, *Cauchy*³ da una demostración en 1821. Ambos perseguían el objetivo de formalizar el análisis de funciones antes de que la definición formal de continuidad existiera, la

¹ Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces, para todo z con $f(x_1) < f(z) < f(x_2)$ o $f(x_2) < f(z) < f(x_1)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.

² *Bernard Bolzano* (1781-1848) fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo que realizó importantes contribuciones a las matemáticas como lo fue el teorema que lleva su nombre. Además, fue el primero en demostrar el teorema de Bolzano -Weierstrass. También realizó aportes a la lógica y el análisis.

³ *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia de las matemáticas y realizó una serie de aportes significativos en el análisis y la teoría de permutaciones de grupos.

propiedad del valor intermedio era dada como parte de la definición de función continua. Otros autores asumían que el resultado es intuitivamente obvio, por lo que no requiere de prueba. La visión de Bolzano y Cauchy fue la de definir una noción general de continuidad (en términos de infinitesimales⁴ en el caso de Cauchy, y utilizando desigualdades reales en el caso de Bolzano), y la de proveer una prueba basada en tales definiciones.

Este ambiente de fundamentación y rigorización fue propicio para que matemáticos como *Weierstrass*⁵, *Dedekind*⁶ y *Cantor* (entre otros) hicieran sus propuestas de construcción pues, lo que se necesitaba era una teoría satisfactoria de los números reales, que estableciera la continuidad (completitud) de $\mathbb{R}$ (Ferreirós, 2008). Mientras que Dedekind empleó las *cortaduras*⁷ sobre los números racionales para “crear” los irracionales y definir formalmente los números reales, Cantor y Weierstrass propusieron construir los irracionales con la ayuda de ideas y técnicas del cálculo de la época, tales como sucesiones y series infinitas (Corry, 2015).

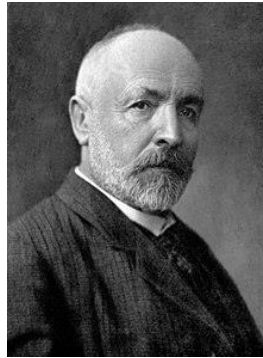
En este trabajo de grado revisaremos con cierto detalle la construcción de los reales de Cantor. Pero, antes conozcamos quién fue este autor.

⁴ Se refiere a una cantidad extremadamente pequeña, casi imperceptible. Sin embargo, es diferente de cero. Expuesto, principalmente por *Arquímedes* luego acuñado por *Isaac Newton* y *Gottfried Leibniz* en el nacimiento del Análisis moderno.

⁵ *Karl Weierstrass* (1815-1897) conocido por ser el padre del análisis moderno, por la primera definición formal de la continuidad de una función, las nociones de límite y continuidad y aportar a las demostraciones de los teoremas de Weierstrass y el de Bolzano-Weierstrass.

⁶ *Richard Dedekind* (1831 - 1916) fue un destacado matemático alemán reconocido por sus aportes a la teoría de conjuntos y a la teoría de números y su papel fue clave en el desarrollo de las matemáticas modernas.

⁷ Una *cortadura* se define cuando tenemos A_1 y A_2 subconjuntos de $\mathbb{Q}$, a la pareja $\langle A_1, A_2 \rangle$ que cumpla que cada elemento de A_1 es menor que cada elemento de A_2 y que la unión de A_1 y A_2 concuerde con $\mathbb{Q}$.



George Cantor (1845-1918)

Georg Cantor (1845 - 1918) fue un matemático alemán procedente de Rusia, empezó sus estudios universitarios en la Universidad de Zúrich, pero se especializó en física, filosofía y matemáticas, en la Universidad de Berlín, en esta última algunos de sus profesores fueron Karl Weierstrass, Ernst Kummer y Leopold Kronecker. Después, trabajó como profesor en la Universidad de Halle donde obtuvo su Cátedra en 1872. También, fue miembro de la Sociedad Matemática de Londres y la Sociedad de Ciencias de Gotinga.

Además, realizó las demostraciones de que los conjuntos de números naturales y de los números pares tienen el mismo número de elementos, y que el número de puntos de una línea infinita es el mismo que el de un segmento. Argumentando así, que existen conjuntos infinitos que tienen el mismo tamaño, más precisamente que tienen la misma cardinalidad; igualmente, demostró que hay diferentes *tamaños de infinitos*⁸. Al final de su

⁸ A partir de la noción de cardinalidad que hace referencia al número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, podemos mencionar que el conjunto de los dedos de una mano tiene como cardinal al número 5, ya que tenemos 5 dedos. Además, esta idea se puede extender a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y de los números reales. Por una parte, se puede verificar que la cardinalidad de los números naturales es la misma que de los números enteros estableciendo una correspondencia biunívoca (dos a dos) dado que a cada número natural impar le corresponde un número entero negativo y cada número natural par le corresponde un número entero positivo (al 1 le corresponde el -2, al 2 el 0, al 3 el -1, al 4 el 1, al 5 el 2, y así sucesivamente); esto quiere decir, que los números naturales tienen el mismo tamaño que de los números enteros y se refiere al *primer infinito* representado como $\aleph_0$ (Aleph-cero). Por otro lado, el conjunto de los números naturales no tiene la misma cardinalidad que de los números reales puesto que no pueden emparejarse esto quiere decir que se encontrarán más números reales que naturales, su tamaño es

vida, vivió aquejado por una depresión debido a las críticas y fallas en su demostración de la *hipótesis del continuo*⁹.

Es importante tener presente que George Cantor y Richard Dedekind son los pioneros de la teoría de conjuntos. Específicamente Cantor domesticó la noción de infinito considerando los *números transfinitos*¹⁰. Por otra parte, el año en que se publicó la teoría de las cortaduras de Dedekind, 1872, fue también el año en que aparecieron otras dos obras que sugerían formas alternativas de construir los irracionales y deducir sus propiedades a partir de fundamentos sólidamente definidos. Su objetivo era también completar la demostración del teorema fundamental del cálculo, una de estas obras fue la de George Cantor, luego de ser un matemático desconocido (Corry, 2015).

Pues Cantor, en su artículo *Sobre la extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas* publicado también en 1872 presenta la construcción de $\mathbb{R}$. En este capítulo se presentan los aspectos centrales de dicha construcción, pero antes de entrar en los detalles es necesario considerar algunos conceptos que están en la base de esta de tal forma que se pueda comprender en un sentido amplio la propuesta de Cantor y que la construcción resulte autocontenida.

mayor y corresponde al *segundo infinito* representado como $\aleph_1$ (Aleph-uno). En conclusión, hemos encontrado al menos dos infinitos diferentes.

⁹ Es uno de los 23 *problemas* expuestos por Hilbert en 1900 y hace referencia a una hipótesis sobre los tamaños de los conjuntos infinitos.

¹⁰ Los *números transfinitos* son de dos tipos, *cardinales* y *ordinales*. Primero, los *números transfinitos cardinales*, se usan para describir el tamaño de un conjunto infinitamente grande. Ej.: $\aleph_0$ (Aleph-cero) denota el primer cardinal transfinito y representa el tamaño de los números naturales. Mientras que, los *números infinitos ordinales* describen la ubicación dentro de un conjunto infinitamente grande que está ordenado. Ej.: ω (omega) denota el menor número ordinal transfinito, sus elementos son los números naturales y representa el tipo de orden de estos.

A continuación, se presentan muy rápidamente conceptos del análisis (sucesión, límite de una sucesión, sucesión de Cauchy y convergencia), del álgebra (estructuras algebraicas de grupo, anillo, cuerpo e ideales) y de la teoría de conjuntos (relaciones de equivalencia, clases de equivalencia y conjunto cociente) necesarios para el estudio de la construcción de los reales por Cantor. Empecemos con los conceptos requeridos desde el análisis.

1.1 Sobre las sucesiones de racionales y su convergencia

De manera informal, se puede decir que el concepto de *sucesión de racionales* se refiere a la disposición de un conjunto o lista de números racionales en un orden determinado. Para tal efecto, se tiene en consideración el conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ ya que a cada n que represente un número entero positivo le corresponderá un a_n que equivale a un número racional, de tal manera que se obtenga el conjunto ordenado $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ donde a_1 corresponde al primer término, a_2 al segundo término, a_3 al tercer término y en general a_n al término enésimo de la sucesión y no hay un último término. Veamos a continuación su definición formal.

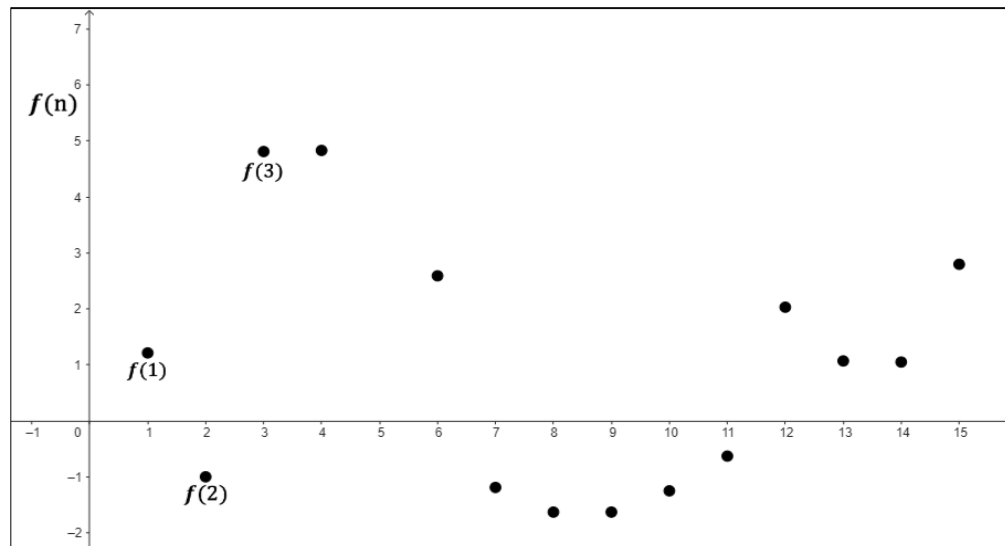
1.1.1 Sucesión de racionales

Una *sucesión* de números racionales (o una sucesión en $\mathbb{Q}$) como se muestra en la Figura 1, es una función $f(n)$ que tiene como dominio (o que está definida en) el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, o de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y cuyo rango está contenido en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ que corresponde al conjunto $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ visto también como $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ y el valor $f(n)$ se denomina

término enésimo de la sucesión. Además, cabe mencionar que para ser más breve se pueden usar algunas de las notaciones como: $\{f(n)\}$ o a_n, x_n, s_n o (x_n) o $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Figura 1

Gráfica de una sucesión de racionales



Nota: Representación de una sucesión de números racionales con sus primeros términos.

Seguidamente, de manera más detallada hemos de revisar algunos de los ejemplos más comunes de sucesiones, según Apóstol (1990) están asociados, por un lado, a una, dos o más fórmulas que definan el término n -simo de la sucesión, y, por otro lado, también se pueden asociar a fórmulas de recurrencia con las cuales se puede construir una sucesión al considerar criterios que definan el término n -simo a partir de los términos anteriores. Para cada caso podemos explorar:

Sucesión definida por un término n -simo: $a_n = \frac{1}{n^2}$. Los 5 primeros términos son

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}.$$

Sucesión definida por dos o más términos n -simos: $a_{2n-1} = 2$, $a_{2n} = 3n$. Los primeros términos corresponden a 2, 3, 2, 6, 2, 9. Notemos que los términos n -simos de las posiciones impares corresponden al número 2.

Sucesiones definidas por una fórmula de recurrencia: Presentamos dos ejemplos, la primera dada por $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}$ en la que sus términos se obtienen de manera sucesiva, a partir de la suma de los dos inmediatamente anteriores. Mientras que, en la segunda sus términos se obtienen con la fórmula de recurrencia $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$ que es conocida como la sucesión de *Fibonacci*¹¹ de donde resultan los términos iniciales: 1,1,2,3,5,8,13.

A continuación, nos interesa conocer cuándo una sucesión es convergente y qué es una sucesión de Cauchy, según Dutta et al. (2020) nos remite a las definiciones que se presentan en la sección siguiente.

1.1.2 Convergencia de una sucesión de racionales

Una sucesión (a_n) de números racionales se dice que *converge* si existe un $a \in \mathbb{Q}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero positivo N , dependiente de ε , tal que $|a_n - a| < \varepsilon$, si $n \geq N$. En tal caso, decimos que (a_n) *converge* a a , y se escribe como $a_n = a$. Note que cuando a existe es único. Es llamado el *límite* de (a_n) y se denota $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$. Por otra parte, la sucesión (a_n) se dice que *diverge* si no converge en $\mathbb{Q}$.

¹¹ Fibonacci (1170-1250) cuyo nombre era Leonardo de Pisa fue un matemático italiano conocido por haber introducido la *sucesión de Fibonacci* en la que cada número es la suma de los dos anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) que se usa en matemáticas y en diversas aplicaciones en la ciencia, la naturaleza y hasta en el arte. Fibonacci también realizó importantes contribuciones en los campos de la aritmética, la geometría y el álgebra.

Por consiguiente, en las Figuras 2 y 3 se exponen ejemplos de sucesiones de racionales que convergen y que no convergen en $\mathbb{Q}$, respectivamente.

Por una parte, los términos de las sucesiones correspondientes a la Figura 2 con sus respectivos límites corresponden a:

$$(a) (a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right); \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0.$$

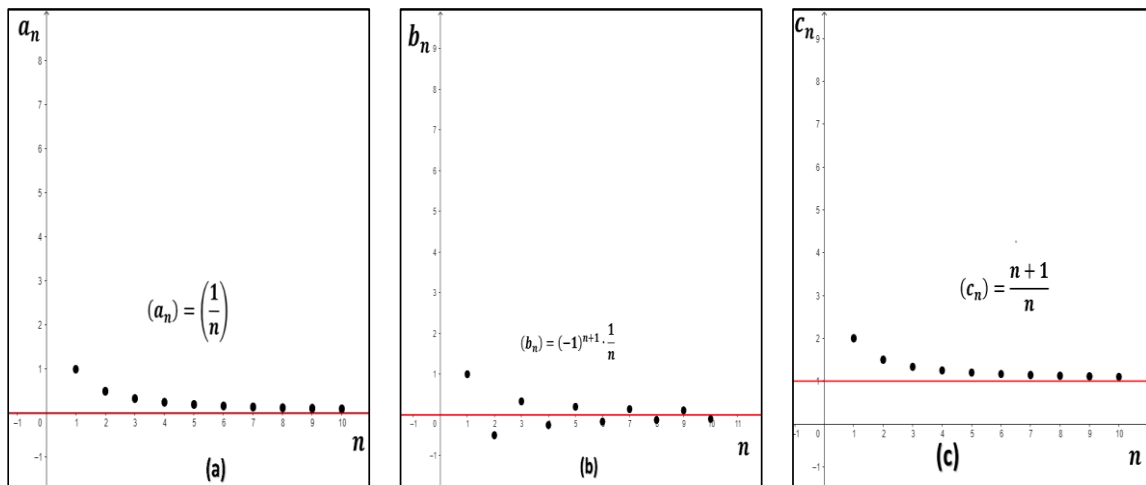
$$(b) (b_n) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right); \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0.$$

$$(c) (c_n) = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right); \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = 1.$$

Además, cabe anotar que, las líneas de color rojo en cada gráfica representan sus límites, es decir, los valores hacia el cual se acercan los términos n -simos de las sucesiones a medida que n aumenta).

Figura 2

Ejemplos de sucesiones racionales que convergen en $\mathbb{Q}$



Nota: En la figura se muestran las gráficas de las sucesiones convergentes (a), (b) y (c) con sus primeros términos y sus respectivos límites.

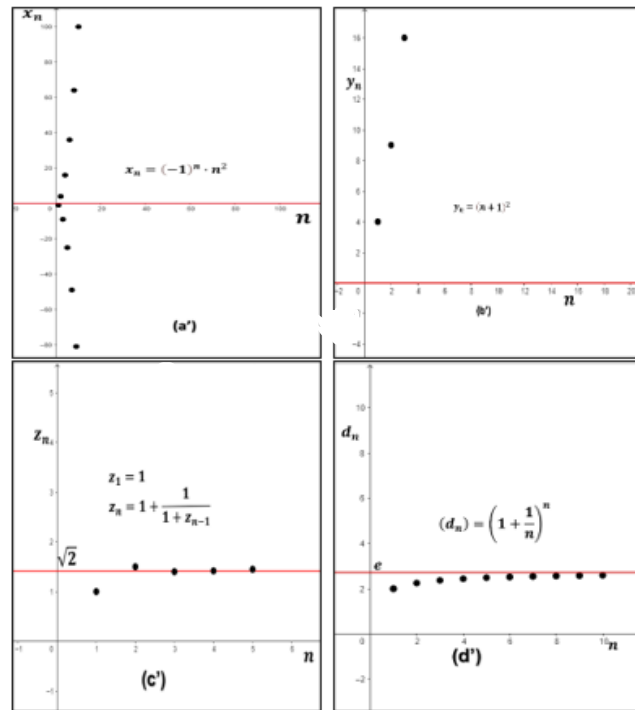
Por otro lado, las sucesiones de la Figura 3, que no tienen un límite y están dadas por:

- (a') $(x_n) = (-1, 4, -9, 16, \dots)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -\infty$ cuando n es impar y,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty$ cuando n es par.
- (b') $(y_n) = (4, 9, 16, 25, \dots)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = +\infty$.
- (c') $(z_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{42}{29}, \dots\right)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = \sqrt{2}$. Pero, no converge en $\mathbb{Q}$.
- (d') $(d_n) = (2, 2.25, 2.37, 2.44, 2.52, 2.55, \dots)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = e$. Pero, no converge en $\mathbb{Q}$.

Es importante aclarar que si una sucesión (a_n) no converge en $\mathbb{Q}$, puede suceder que (a_n) tienda a $-\infty$ o $+\infty$; como en los casos (a') y (b') o si (a_n) tiende a un elemento x , tal que $x \notin \mathbb{Q}$ tampoco sería una sucesión convergente, como en los casos (c') y (d') como se puede observar en la Figura 3.

Figura 3

Ejemplos de sucesiones de racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$



Nota: Gráficas de las sucesiones no convergentes (a'), (b'), (c') y (d') con los primeros términos de cada sucesión y que no tienen límite.

1.1.3 Sucesión de Cauchy de números racionales

Una sucesión (a_n) de números racionales es llamada *sucesión de Cauchy*. Si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero positivo N , tal que $|a_m - a_n| < \varepsilon$, si $m, n \geq N$.

Volvamos sobre unos ejemplos mencionados en la sesión anterior:

a. Sea $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. A partir de la definición anterior, verifiquemos que es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $N \in \mathbb{N}, N = \frac{2}{\varepsilon}$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n > N$ y $m > N$ entonces $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ y $\frac{1}{m} < \frac{1}{N}$. Lo mismo que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ dado que $N = \frac{2}{\varepsilon}$. Teniendo en cuenta lo anterior, si $n, m > N$ entonces tenemos que $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por tanto, $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$. Así, $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es una sucesión de Cauchy.

Además, veamos que en la parte (a) de la Figura 2, se muestra cuando sus términos se van acercando a cero.

b. Sea $(b_n) = (n + 1)^2$. Análogamente, con la definición anterior, verifiquemos si es una sucesión de Cauchy. Primero, sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$. Y sean dos términos de la sucesión $b_n = (n + 1)^2$ y $b_m = (m + 1)^2$.

Entonces, para la diferencia entre $b_n - b_m$ se tendrá en cuenta el caso de factorización de diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, de ahí que:

$$\begin{aligned} |b_n - b_m| &= |(n + 1)^2 - (m + 1)^2| \\ &= |[(n + 1) + (m + 1)][(n + 1) - (m + 1)]| \\ &= |[(n + 1) + (m + 1)][(n + 1) - m - 1]| \\ &= |(n + m + 2)(n - m)|. \end{aligned}$$

Pues, de esta manera se concluye que no se puede encontrar un N , para cualquier $\varepsilon > 0$ tal que $|b_n - b_m| < \varepsilon$. A medida que $n, m > N$ los valores de la sucesión y de las diferencias entre sus términos se van haciendo más grandes. Por ende, $(b_n) = (n + 1)^2$ no cumple las condiciones para ser una sucesión de Cauchy.

Adicionalmente, en la parte (b') de la Figura 3, se muestra como sus términos se van haciendo más grandes y no se aproximan a un valor fijo.

c. Como ya se ha mencionado, existen sucesiones de Cauchy de números racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$, como $(d_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ de la parte (d') de la Figura 3. Para ello, consideremos dos términos arbitrarios $m, n \in \mathbb{Q}$ en la sucesión donde $m > n$. Queremos demostrar que esta sucesión cumple con ser una sucesión de Cauchy de modo que:

$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right|$ usando la propiedad $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ tenemos que:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n\right| + \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right|$$

Simplificando el primer término de la desigualdad, por las propiedades de la potenciación se tiene que:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n\right| \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-n} - 1\right|$$

Ahora, para el segundo término por las propiedades de la potenciación y como $m > n$ se tiene: $\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right|$.

A continuación, vamos a acotar cada uno de los términos. Para el primer término, se tiene que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$ es un número racional positivo ya que $\frac{1}{m}$ y n son números racionales positivos y $\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-n} - 1\right|$ es un número racional positivo, de ahí que:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n\right| \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-n} - 1\right| \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-n} - 1\right|$$

Para el segundo término, se tiene que si $m > n$, podemos tener que $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ lo que implica que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\text{Por lo tanto, } \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n = 0$$

Entonces, así para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un N tal que para $m, n \geq N$, se cumple:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \left|\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-n} - 1\right| \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \cdot x < \varepsilon$$

Para cualquier $x \in \mathbb{Q}^+$. Por ende, $(d_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión de Cauchy, pero no converge en $\mathbb{Q}$.

Con este último ejemplo, se muestra que el conjunto de los números racionales *no* es *completo*, puesto que los conjuntos que verifican esta condición topológica (propiedad de la *completitud*) reciben este nombre. De ahí la importancia de construir un conjunto más grande en el que toda sucesión de Cauchy converja.

Ahora veamos los conceptos de orden algebraico que se requieren para la construcción de los reales.

1.2 Estructuras algebraicas: grupo, anillo y cuerpo.

A continuación, teniendo en cuenta a Fraleigh (1977), Herstein (1988) y Panza (2019) se exponen las estructuras algebraicas que satisfacen ciertos conjuntos de números. La pretensión es llegar a la estructura de cuerpo, la cual se verifica en el conjunto de los números racionales (con las operaciones de suma y producto) como punto de partida de la construcción realizada por Cantor. Se inicia con la presentación de operación y sus propiedades básicas.

1.2.1 Operación

Una *operación binaria* sobre un conjunto $A \neq \emptyset$ es una función de $*$: $A \times A \rightarrow A$ que asocia cada pareja $(a, b) \in A \times A$ con un elemento $c \in A$, que se simboliza como: $a * b = c$. Esto significa que una operación así definida es clausurativa. Un caso particular lo constituyen las operaciones de suma (+) y producto (·) definidas sobre los conjuntos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, asocia la pareja (a, b) con c , a través de la operación $(+)$. Es decir, $a + b = c$ y $c \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Propiedades básicas de una operación

Sea $*$: $A \times A \rightarrow A$ una operación. Entre sus propiedades básicas están:

- i. Si $(a * b) * c = a * (b * c)$. $\forall a, b, c \in A$ entonces la operación $(*)$ es asociativa.
- ii. Si $a * b = b * a$ $\forall a, b \in A$, entonces la operación $(*)$ es conmutativa.
- iii. Si $(\exists e \in A)(\forall a \in A)$ tal que $e * a = a * e = a$, entonces e es el elemento neutro de la operación $(*)$.
- iv. Si $\forall a \in A, \exists a' \in A$ tal que $a' * a = a * a' = e$, entonces a' es el elemento inverso de a , bajo la operación $(*)$.

1.2.3 Grupo

Sea G un conjunto y $*$ una operación definida sobre G . Se dice que $(G, *)$ es un grupo si la operación $*$ satisface las siguientes condiciones:

1. Asociativa.
2. Existencia del elemento neutro de la operación.
3. Existencia del elemento inverso, para todo elemento $a \in G$.

Nota: Si además se satisface la propiedad conmutativa $x * y = y * x$, para todo $x, y \in G$ se dice que es un grupo abeliano. Veamos algunos ejemplos:

- a. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación suma $(+)$ es un grupo. La suma es asociativa. El elemento neutro es el 0 y para todo elemento $a \in \mathbb{Z}$, existe el elemento inverso $-a$. Por tanto, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo. Además, es abeliano puesto que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$.
- b. $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo porque no existen los elementos inversos bajo la suma.
- c. Las parejas $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos mientras que la pareja

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ no forma un grupo puesto que $0 \in \mathbb{Q}$ y 0 no tiene inverso con respecto a $(\cdot)$.

1.2.4 Anillo

La terna $(A, *, \star)$ compuesta por un conjunto A y dos operaciones binarias $(*)$ y $(\star)$ es un *anillo* si $(A, *)$ es un grupo abeliano y la nueva operación $(\star)$ es asociativa y es distributiva con respecto a $(*)$. En otras palabras, si se verifican las siguientes condiciones:

1. La operación $(*)$ es conmutativa, asociativa, existe el elemento neutro de $(*)$ y existe el elemento inverso de cada elemento de A .
2. La operación $(\star)$ es asociativa y distributiva con respecto a la operación $(*)$. Es decir, si se cumple que $a \star (b * c) = (a \star b) * (a \star c)$.

Nota: Si la operación $(\star)$ es conmutativa, se dice que el anillo A es *conmutativo*. Si además la operación $(\star)$ tiene elemento neutro, el anillo se denomina anillo *conmutativo unitario*. Mencionemos algunos ejemplos:

- a. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario.
- b. $(\mathbb{Z}, \cdot, +)$ no es un anillo ya que la suma no es distributiva con respecto al producto y los elementos que pertenecen a $\mathbb{Z} / \{1\}$ no tienen inverso en $\mathbb{Z}$ con respecto a $(\cdot)$. Esto significa que el orden de las operaciones es determinante.
- c. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario.

1.2.5 Cuerpo

La terna $(F, *, \star)$ compuesta por un conjunto F y dos operaciones binarias $(*)$ y $(\star)$ es un *cuerpo* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La operación $(*)$ es conmutativa, asociativa, existe el elemento neutro de $(*)$ y existe el elemento inverso de cada elemento de F .
2. La operación $(\star)$ es asociativa y distributiva (con respecto a la operación $*$), tiene elemento neutro y existe el elemento inverso de cada elemento de F .

Nota: Si además la operación $(\star)$ es conmutativa, se dice que el cuerpo es *conmutativo*.

Veamos algunos ejemplos:

a. Como se sabe, los racionales con la suma y el producto $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forman un cuerpo conmutativo. Sin embargo, si cambiamos el orden de las operaciones $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$ no es un cuerpo, puesto que la suma no es distributiva con respecto al producto.

b. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo, pues en $\mathbb{Z}$ no todos sus elementos poseen elemento inverso multiplicativo.

Ahora, definamos ideal de anillo y de lo que trata un ideal de anillo maximal.

1.2.6 Ideal de un anillo

Sea A un anillo. Se dice que $I \subset A$ es un ideal, si cumple las siguientes condiciones:

1. $(I, +)$ es un subgrupo¹² de A .
2. $x \in A, y \in I$ entonces $x \cdot y, y \cdot x \in I$.

Lo que quiere decir que las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ son cerradas en I y además $(\cdot)$ es invariante respecto al producto. Algunos de los ejemplos son:

- a. $\{0\}, A$ siempre son ideales de cualquier anillo A .
- b. Los múltiplos de n , para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ es ideal de $\mathbb{Z}$.
- c. $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\}$ el conjunto de los números pares es un ideal de $\mathbb{Z}$.
- d. Sea $B = \{0, 2, 4, 6\}$ este no es un ideal en $\mathbb{Z}$. Por un lado, $2 + 4 = 6 \in B$,
 $4 + 6 = 10 \notin B$. Por otro lado, si $2 \in B$ y $-1 \in \mathbb{Z}$ entonces $2 \cdot (-1) = -2 \notin B$.
- e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ no es un ideal del anillo $\mathbb{Z}$ con el producto $(\cdot)$. Si tenemos los elementos $1 \in \mathbb{N}$ y $-1 \in \mathbb{Z}$ entonces $(1)(-1) = -1 \notin \mathbb{N}$.
- f. $\mathbb{Z}$ no es un ideal en $\mathbb{Q}$. Este es similar al anterior, ya que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ y $1 \in \mathbb{Z}$ entonces
 $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ y los ideales en $\mathbb{Q}$ son $\{0\}$ y $\mathbb{Q}$.

¹² Sea G un grupo, y sea $H \subseteq G$, H se dice *subgrupo*, si H es un grupo bajo la misma operación de G .

1.2.7 Ideal maximal de un anillo

Sea A un anillo. Se dice que $I \subset A$ es un ideal maximal, si es propio es decir que $I \neq \{0\}, I \neq A$ y no sucede que exista otro ideal I tal que $I \subset J \subset A$. Como, por ejemplo:

a. El ideal que es generado por un número primo p denotado $\{kp: k \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal en el anillo $\mathbb{Z}$. Puesto que, no se puede encontrar un ideal propio que lo contenga además el ideal generado por $p = 2$, es maximal en el anillo $\mathbb{Z}$.

b. $\{0\}$ y A conocidos como ideales triviales no son ideales maximales en cualquier anillo A . Pues estos deben ser ideales propios del anillo.

Para concluir esta sección de conceptos preliminares, se recuerdan los siguientes conceptos de la teoría de conjuntos teniendo en cuenta a Hrbacek y Jech (1999).

1.3. Relaciones y clases de equivalencia

Sean A, B conjuntos. Una *relación* R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$, decimos que a está relacionado con b , bajo R .

Nota: Si $R \subseteq A \times A$ decimos que la relación R se da en A . Presentemos algunos ejemplos: Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4,6,7\}$. Tenemos que el producto cartesiano está dado por:

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (2,7), (3,2), (3,4), (3,6), (3,7)\}$$

A partir del cual podemos obtener muchas relaciones de A en B . Entre estas:

- $R_1 = \{(a, b) \in A \times B: b = 2a\} = \{(2,4), (3,6), (4,8)\}$.
- $R_2 = \{(a, b) \in A \times B: b = 3a + 1\} = \{(1,4), (2,7)\}$.
- $R_3 = \emptyset$ es una relación porque $\emptyset \subseteq A \times B$.
- El conjunto $R_4 = \{(1,4), (2,9), (3,5)\}$ no es una relación, pues la pareja $(2,9) \notin A \times B$.

1.3.1 Propiedades de las relaciones

Vamos a considerar cinco propiedades en las relaciones, entre estas:

- R es *reflexiva* en B si $\forall b \in B, (b, b) \in R$.
- R es *antisimétrica* en B si $\forall a, b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ implica que $a = b$.
- R es *simétrica* en B si $\forall a, b \in B, (a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.
- R es *asimétrica* en B si $\forall a, b \in B, (a, b) \in R$ entonces $(b, a) \notin R$.
- R es *transitiva* en B si $\forall a, b, c \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$.

Ahora, observemos un ejemplo. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y algunas de las relaciones de $R \subseteq A \times A$, estudiemos qué propiedades cumplen cada una:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Esta relación es evidentemente reflexiva, pues todos los elementos de A están relacionados consigo mismos. A su vez, también es antisimétrica y simétrica.

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

En este caso, R_2 no es reflexiva porque $(3, 3) \notin R_2$. Además, R_2 tampoco es simétrica porque $(2, 3) \in R_2$ pero $(3, 2) \notin R_2$.

$$R_3 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3)\}$$

La relación R_3 es simétrica, puesto que $(1, 2), (2, 1) \in R_3$, asimismo con el otro par. Sin embargo, dado lo anterior esta relación no es antisimétrica, ni asimétrica.

$$R_4 = \{(1, 1), (2, 3)\}$$

Consideremos la relación R_4 , la cual es antisimétrica pues como $2 \neq 3$ implica que $(2, 3) \in R_4 \vee (3, 2) \in R_4$. Pero no es asimétrica pues $(1, 1) \in R_4$.

$$R_5 = \{(1, 2), (3, 2), (2, 1), (1, 3)\}$$

Vemos que si $(1,2) \in R_5 \wedge (2,1) \in R_5$ pero $(1,1) \notin R_5$. Así, la relación R_5 no es transitiva.

$$R_6 = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

En la cual $(1,2) \in R_6 \wedge (2,3) \in R_6$ entonces $(1,3) \in R_6$. Por ende, esta relación R_6 es transitiva y también es asimétrica.

1.3.2 Relación de equivalencia

Una *relación R es de equivalencia* en un conjunto A si es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, una relación de equivalencia en A se puede identificar con cualquiera de los caracteres $E, \equiv, \sim, =$ o $\approx$. Cuando se satisface que $a \sim b$, se dice que “ a es equivalente a b módulo $\sim$ ” o simplemente se dice que “ a es equivalente a b ” y se ha de cumplir que el dominio de “ $\sim$ ” es el mismo dominio de A .

1.3.3 Clase de equivalencia

Una *clase de equivalencia* de “ a módulo $\sim$ ” es el conjunto $[a] = \{x \in A / x \sim a\}$. Es decir, se cumple para todos los elementos del conjunto A que sean equivalentes a a .

1.3.4 Partición

Sea A un conjunto y $\mathcal{P}$ un conjunto no vacío de subconjuntos de A . Se dice que $\mathcal{P}$ es una partición de A , denotado por $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n\}$. Si se cumple que:

1. $A_i \subseteq A, A_i \neq \emptyset$.
2. Los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos, es decir si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
3. $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

1.3.5 Conjunto cociente

Un *conjunto cociente* de A dado por la relación de $\sim$, denotado por

$A/\sim = \{[a]: a \in A\}$ que cubre la familia de todas las clases de equivalencia

módulo $\sim$. Para concluir, veamos los conceptos anteriores en un ejemplo sencillo basado en un conjunto finito y una relación.

Sea $B = \{1, 2, 3, 5\}$ y $R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (5,1), (5,5)\}$. En primer lugar, verifiquemos si R es una relación de equivalencia del siguiente modo:

En este caso, los pares $(1,1), (2,2), (3,3), (5,5)$, pertenecen a R para todos los elementos de B . Entonces, se cumple que R es reflexiva.

Como las parejas $(1,5), (5,1); (2,3), (3,2); (1,1), (2,2), (3,3)$, y $(5,5)$, pertenecen a R . Entonces, se cumple que R es simétrica.

Además, si los pares $(2,2)$ y $(2,3); (1,5)$ y $(1,1)$ pertenecen a R implica que $(2,3)$ y $(1,5)$ pertenecen a R , respectivamente. Asimismo, se puede verificar con los demás pares. Entonces, se cumple que R es transitiva. Finalmente, como se comprueba en B que R es reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, la *relación R es de equivalencia sobre B* .

En segundo lugar, analicemos algunas de las clases de equivalencia del conjunto B . Sean $[1] = \{x \in B/x \sim 1\}$ y $[2] = \{x \in B/x \sim 2\}$. Se deduce que $[1] = \{1,5\}$ ya que para $(1,1)$ se tiene $1 \sim 1$, $(1,5)$ ó $(5,1)$ se tiene $1 \sim 5$. Análogamente para $[2] = \{2,3\}$.

En tercer lugar, en lo referente a las particiones del conjunto. Se dice que B es la partición trivial, $B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}$, $B_2 = \{\{1,2\}, \{3\}, \{5\}\}$, $B_3 = \{\{1\}, \{2,3,5\}\}$ son algunas otras. Mientras que, $B_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ no es una partición pues $5 \in B$ y

$\{5\} \notin B_4$.

Por último, consideremos el conjunto cociente de $B/\sim = \{[b]: b \in B\}$. De donde resulta $B/\sim = \{[1], [2], [3], [5]\}$ que también se puede ver como $B/\sim = \{[1], [2]\}$.

1.3.6 Relación de orden

Una *relación* R sobre un conjunto A , es un *orden parcial* o simplemente un *orden* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. (A, R) denota un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*, aunque es más usual la notación $(A, \leq)$. Algunos otros símbolos de orden son $\geq$, $\lesssim$, $\preceq$. Presentemos algunos ejemplos:

a. Sea $B = \{1, 2, 3\}$ y $R = \wp(B)$ que denota *Conjunto de Partes o Conjunto Potencia* de B , para este caso $\wp(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Entonces $(\wp(B), \subseteq)$ es parcialmente ordenado.

b. $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados.

Adicionalmente, una *relación* R sobre un conjunto A es un *orden estricto* si es asimétrica y transitiva. Por ejemplo:

a. $(\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{Q}, <)$ son conjuntos con orden estricto.

b. La relación definida por $m|n$, si y sólo si m divide estrictamente a n , (m es divisor propio de n) es un orden estricto en $\mathbb{Z}^+$.

Retomando, el tema de los ideales, conjunto cociente y de las clases de equivalencia es importante referirnos al término anillo cociente que más adelante nos será de utilidad.

1.3.7 Anillo cociente

Un ideal I en un anillo A , permite establecer la relación de equivalencia para dos elementos cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x \sim y$ si y solo si sucede que $x - y \in I$. Se

obtiene el conjunto cociente A/I , también llamado *anillo cociente*, puesto que A/I hereda las operaciones de suma y producto del anillo A :

$[x] + [y] = [x + y]$ representa la clase de equivalencia del elemento de $x + y \in A$

$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ representa la clase de equivalencia del elemento de $x \cdot y \in A$.

Si I es un ideal maximal en A , entonces A/I es un cuerpo.

Un ejemplo de anillo cociente es el que resulta de los enteros módulo n , denotado por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Este se forma tomando el conjunto de todos los enteros, considerando la relación de equivalencia en la cual, dos enteros son equivalentes si tienen un mismo residuo cuando se dividen por n , denotado como:

$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow a - b = k \cdot m, k \in \mathbb{Z}$. Si tenemos en cuenta, el anillo de los enteros módulo 3 denotado por $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_3$. En la cual, la relación de equivalencia $a \equiv b \pmod{3} \leftrightarrow a - b = k \cdot 3, k \in \mathbb{Z}$. Es decir, $a - b$ es un múltiplo de 3.

Luego, de esta relación de equivalencia resultan tres clases de equivalencia representativas $[0], [1], [2]$ tales como: $[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$ incluye todos los números enteros que al dividirlos por tres tienen residuo cero. Análogamente, para la clase que incluye todos los números enteros que al dividirlos por tres tienen residuo uno, la cual es $[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, \dots\}$. Del mismo modo, para $[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ que incluye todos los números enteros que al dividirlos por tres tienen residuo dos. Cabe mencionar que en el anillo $\mathbb{Z}_3$ se cumplen las propiedades de suma, producto, elementos neutros e inversos.

Ilustremos con el 1, como elemento de la clase $[1]$ y 2 como elemento de la clase $[2]$. Para la suma, $[1] + [2] = [1 + 2] = [3] = [0]$ representa la clase de equivalencia del

elemento de $1 + 2 = 3 \in \mathbb{Z}_3$. Y, $3 \equiv 0 \pmod{3}$. Al sumarlos y reducirlos a módulo 3 representa la clase $[0]$. En el producto, $[1] \cdot [2] = [1 \cdot 2] = [2]$ representa la clase de equivalencia del elemento de $1 \cdot 2 = 2 \in \mathbb{Z}_3$. Y, $2 \equiv 2 \pmod{3}$. Al multiplicarlos y reducirlos a módulo 3 representa la clase $[2]$. En lo que respecta, a los elementos neutros, en este anillo $[0]$ actúa como el elemento neutro aditivo, donde $[0] + [a] = [a]$ y $[1]$ como el elemento neutro multiplicativo, ya que $[1] \cdot [a] = [a]$ para cualquier $[a] \in \mathbb{Z}_3$.

Hemos culminado el capítulo de los conceptos preliminares necesarios para el siguiente, que hace referencia a la construcción de los números reales por Cantor el cual está basado principalmente en Calderón Ramos (2014), y de manera complementaria en Arboleda (2017), Escardó (1991), González Hernández (2020), Marcos Lomo (2020) y Ortega (1993).

CAPÍTULO 2

La construcción de los reales por Cantor a través de sucesiones de Cauchy

En el capítulo anterior se presentaron los principales fundamentos para tener en cuenta en este apartado en el que se explican los aspectos centrales de la construcción de los reales por Cantor visto desde una perspectiva de las matemáticas modernas. Puesto que, bajo una interpretación moderna, Cantor empleó en la construcción *clases de equivalencia*, formadas a partir de una relación de equivalencia entre sucesiones de Cauchy de números racionales. Estas *clases de equivalencia*¹³ dieron lugar a un nuevo objeto matemático: el conjunto de los *números reales* ($\mathbb{R}$). A continuación, se expone detalladamente el proceso de construcción, el cual se desarrolla en las siguientes siete secciones del presente capítulo.

En primer lugar, Cantor toma como base el cuerpo ordenado de los números racionales ($\mathbb{Q}, \leq$). En segundo lugar, forma el conjunto $\mathcal{C}$ con las sucesiones de Cauchy de números racionales $\mathcal{C} = \{(a_n)_{n \geq 1}, a_n \in \mathbb{Q}\}$, donde, (a_n) es una sucesión de Cauchy dotada

¹³ Las *clases de equivalencia* constituyen una herramienta teórica muy empleada en matemáticas para crear nuevos objetos. De hecho, los números enteros se construyen formalmente a partir de clases de equivalencia sobre los números naturales así: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ donde la relación de equivalencia está dada por $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a - b = c - d$. Del mismo modo, los números racionales resultan de clases de equivalencias sobre los números enteros así: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$; donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ y la relación de equivalencia está dada por $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

de una estructura algebraica. Para tal efecto, se requiere definir las operaciones de suma y producto entre los elementos del conjunto $\mathcal{C}$.

2.1 Operaciones sobre $\mathcal{C}$

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de Cauchy, pertenecientes a $\mathcal{C}$. Las operaciones de suma y producto se definen como $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ y $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$, respectivamente. Esto significa que la suma y el producto de sucesiones de Cauchy de números racionales se realiza a partir de la suma y el producto de sus términos enésimos.

Por consiguiente, veamos que estas operaciones son cerradas. Es decir, que si (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy, tanto $(a_n) + (b_n)$ y $(a_n) \cdot (b_n)$ resultan ser sucesiones de Cauchy, como se demuestra a continuación.

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de Cauchy:

a) Veamos que la suma $(a_n + b_n)$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$. Entonces, existen N_0 y N_1 enteros positivos, tales que para cualesquiera n, m números naturales $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n, m > N_0$ y $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n, m > N_1$.

Consideremos, $N_2 = \text{máx}(N_0, N_1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| &\leq |(a_n - a_m)| + |(b_n - b_m)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon, \text{ si } n, m > N_2. \end{aligned}$$

Por tanto, $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon$. Lo que implica que la suma también es de Cauchy.

b) Ahora, vemos que el producto $(a_n \cdot b_n)$ es una sucesión de Cauchy.

Antes de ello, tengamos en cuenta que toda sucesión de Cauchy es acotada en $\mathbb{Q}$. Como se demuestra a continuación.

Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ existe N_0 entero positivo tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$, para $n, m \geq N_0$.

Es decir que, $a_{N_0} - \varepsilon < a_n < a_{N_0} + \varepsilon$. Si consideramos $m = N_0$ entonces se tiene que

$a_{N_0} - \varepsilon < a_n < a_{N_0} + \varepsilon$. Luego, los elementos denotados como s y t tales que:

$s = \max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N_0-1}, a_{N_0} + \varepsilon\}$ es una cota superior de (a_n) , y

$t = \min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N_0-1}, a_{N_0} - \varepsilon\}$ es una cota inferior de (a_n) .

Por lo tanto, (a_n) está acotada.

Ahora, puesto que las sucesiones (a_n) y (b_n) están acotadas, existe $c \in \mathbb{Q}^+$ tal que c es una cota para (a_n) y (b_n) . Entonces los productos:

$$\begin{aligned} |(a_n \cdot b_n) - (a_m \cdot b_m)| &= |(a_n \cdot b_n) - (a_n \cdot b_m) + (a_n \cdot b_m) - (a_m \cdot b_m)| \\ &\leq |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| \\ &< c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = 2c \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = c\varepsilon. \end{aligned}$$

Por ende, $|(a_n \cdot b_n) - (a_m \cdot b_m)| < c\varepsilon$, si $n, m > N_2$. Lo que implica que el producto también es de Cauchy.

Ahora, mostremos que, con estas operaciones el conjunto $\mathcal{C}$ tiene estructura de *anillo conmutativo unitario* $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ lo cual quiere decir que todavía no tiene la estructura de *cuerpo*. De modo que, si la operación $(\cdot)$ es conmutativa en $\mathcal{C}$ entonces el anillo es conmutativo y si tiene elemento neutro en $\mathcal{C}$, entonces el anillo es *conmutativo unitario*, pero es importante entender que, hasta este paso, $\mathcal{C}$ no tiene elemento inverso el cual es clave en un cuerpo. Se explica de manera más detallada a continuación.

2.2 $\mathcal{C}$ como anillo conmutativo unitario

En primer lugar, verifiquemos que $(\mathcal{C}, +)$ es un grupo abeliano. Para ello, se ha de cumplir que la operación $(+)$ sea asociativa, conmutativa y que existan los elementos neutros e inversos. Por un lado, las propiedades asociativa y conmutativa se cumplen debido a que se verifican para la suma en $\mathbb{Q}$. Por otro lado, el elemento neutro corresponde

a las sucesiones que convergen a cero, como la sucesión $(c_n) = (0)$ en la que todos sus términos son ceros y, el elemento inverso u opuesto de cualquier sucesión (a_n) es $(-a_n)$, en la cual los términos enésimos son los opuestos de los términos enésimos de (a_n) . Por ende $(\mathcal{C}, +)$ es un *grupo abeliano*.

La operación $(\cdot)$ es asociativa, conmutativa y distributiva pues se verifican para el producto en $\mathbb{Q}$ y también tiene elemento neutro correspondiente a las sucesiones que convergen a uno. Por ejemplo, la sucesión en la que todos sus términos son unos $(u_n) = (1)$. Por tanto, dado que $(\cdot)$ es conmutativa y que existe el elemento neutro se concluye que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es un *anillo conmutativo unitario*.

Observación: Es importante observar que $\mathcal{C}$ no tiene estructura de cuerpo puesto que, no cumple la propiedad del elemento inverso para el producto. Por ejemplo, para sucesiones de Cauchy como $(a_n) = \left(\frac{1}{n^3}\right)$ no existe la sucesión inversa en $\mathcal{C}$, ya que esta correspondería a la sucesión $(b_n) = (n^3)$ que no es una sucesión de Cauchy.

Una vez tenemos a $\mathcal{C}$ con la estructura de anillo conmutativo unitario, se define sobre $\mathcal{C}$ una relación de equivalencia entre sus elementos, para luego formar las clases de equivalencia que nos llevarán a los números reales.

2.3 Relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$

Sea $\mathcal{C}_0$ el conjunto de las sucesiones nulas. Es decir, el conjunto formado por todas las sucesiones de Cauchy que convergen a cero. Se define una relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$ de la siguiente manera:

Dos sucesiones de Cauchy no nulas están relacionadas si y sólo si su diferencia es una sucesión nula. Es decir, $(a_n) \sim (b_n)$ sí y sólo si $(a_n - b_n) \in \mathcal{C}_0$. Verifiquemos que la relación es de equivalencia.

1. $(a_n) \sim (a_n)$ porque $(a_n - a_n) = (0) \in \mathcal{C}_0$.

Por ende, es reflexiva.

2. $(a_n) \sim (b_n) \Rightarrow (a_n - b_n) \in \mathcal{C}_0$,

$$\Rightarrow -(a_n - b_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (-a_n + b_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (b_n - a_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (b_n) \sim (a_n).$$

Por tanto, es simétrica.

3. Si $(a_n) \sim (b_n)$ y $(b_n) \sim (c_n)$

$$\Rightarrow (a_n - b_n) \in \mathcal{C}_0 \text{ y } (b_n - c_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (a_n - b_n + b_n - c_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (a_n - c_n) \in \mathcal{C}_0$$

$$\Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$$

Entonces, es transitiva.

En conclusión, al cumplirse las tres propiedades la relación $\sim$ es de *equivalencia* sobre $\mathcal{C}$.

2.4 Anillo cociente, cuerpo e ideales sobre $\mathcal{C}$

Adicionalmente refirámonos a los ideales de un anillo, para considerar el anillo cociente que denotaremos como $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$. Veamos a continuación que $\mathcal{C}_0$ es un ideal de $\mathcal{C}$.

(i) La suma de dos sucesiones $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}_0$ es una sucesión de $\mathcal{C}_0$.

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de Cauchy en $\mathcal{C}_0$, entonces $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \in \mathcal{C}_0$.

(ii) Si $(a_n) \in \mathcal{C}$ y $(b_n) \in \mathcal{C}_0$, (b_n) una sucesión de Cauchy acotada en $\mathcal{C}_0$.

De ahí que, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ es una sucesión en $\mathcal{C}_0$. Puesto que, si $\varepsilon > 0$ y $|b_n| \leq c$, y sea N tal que $|b_n| \leq \frac{\varepsilon}{c}$ para $n > N$, entonces $|a_n \cdot b_n| \leq c|a_n| \leq \varepsilon$. Por tanto, $\mathcal{C}_0$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}$. Debido a que para las sucesiones en las cuales hay un cero, no pueden tener inverso, para evitar este tipo de inconvenientes se hace necesario demostrar que el anillo cociente $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ tiene estructura de cuerpo. Es por eso, que vamos a verificar que $\mathcal{C}_0$ es un ideal maximal del anillo $\mathcal{C}$.

Sea $(d_n) \notin \mathcal{C}_0$, es decir, esta sucesión es de Cauchy, pero su límite es diferente de cero. Aunque, esta sucesión puede ser positiva o negativa. Entonces, vamos a demostrar que tiene inversa. Consideremos la sucesión constante $(u_n) = (1)$ que pertenece al ideal generado por (d_n) y $\mathcal{C}_0$. Como $(d_n) \notin \mathcal{C}_0$, si $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|d_n| > \delta$, si $n \geq N$. Sea la sucesión (b_n) dada por $b_n = 0$, si $n < N$ y $b_n = \frac{1}{d_n}$, si $n \geq N$, y la sucesión $(c_n) \in \mathcal{C}_0$, dada por $c_n = 1$, si $n < N$ y $c_n = 0$, si $n \geq N$. Entonces, $(1) = (c_n) + (d_n) \cdot (b_n)$.

Ahora, verifiquemos que (b_n) es una sucesión de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Entonces, } |b_n - b_m| = \left| \frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_m} \right| = \frac{|d_m - d_n|}{|d_n \cdot d_m|} = \frac{|d_m - d_n|}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{\delta^2}.$$

Por tanto, (b_n) la sucesión inversa de (d_n) es una sucesión de Cauchy y $\mathcal{C}_0$ es un ideal maximal del anillo $\mathcal{C}$. En consecuencia, el anillo cociente $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ es un cuerpo que hereda las propiedades de las operaciones de suma y producto del anillo $\mathcal{C}$.

2.5 Clases de equivalencia sobre $\mathcal{C}$

Después de lo anterior, se puede originar una partición de $\mathcal{C}$ en clases de equivalencia que vamos a denotar como $[(a_n)] = \{(q_n) \in \mathcal{C} : (q_n) \sim (a_n)\}$. De ahí que, el conjunto de todas las clases de equivalencia corresponde al anillo cociente $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 = \{[(a_n)] : (a_n) \in \mathcal{C}\}$, lo que quiere decir que un número real para Cantor es una clase de equivalencia $[(a_n)]$ formada por todas las sucesiones de Cauchy de racionales que

son equivalentes con la sucesión (a_n) . Es decir, una clase de equivalencia formada por todas las sucesiones que al ser restadas con la sucesión (a_n) , da como resultado una sucesión nula. Por ende, denotamos el conjunto de los números reales como $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$.

Asimismo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se dice que está *inmerso* en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, es decir que $\mathbb{R}$ contiene una copia de $\mathbb{Q}$. Lo que se refiere a que si $q \in \mathbb{Q}$, la sucesión que representa este número en el nuevo conjunto es la sucesión constante $(\bar{q}) = (q, q, q, \dots)$, la cual se puede tomar como representante de la clase de equivalencia $[(\bar{q})]$, de todas las sucesiones de Cauchy de racionales que convergen a q .

Además, como $\mathbb{R}$ está formado por clases de equivalencia para $[(\bar{a}_n)]$ y $[(\bar{b}_n)]$, las operaciones de suma y producto se realizan entre dichas clases, que podemos ver como:

$$[(\bar{a}_n)] + [(\bar{b}_n)] = [(\overline{a_n + b_n})] \text{ y } [(\bar{a}_n)] \cdot [(\bar{b}_n)] = [(\overline{a_n \cdot b_n})]$$

La suma y el producto de las clases de equivalencia, respectivamente.

2.6 Los números reales forman un cuerpo ordenado y arquimediano

Otro de los aspectos de este cuerpo es que es ordenado y arquimediano. Antes de entrar en detalles, por una parte, recordemos el orden en los números racionales $\mathbb{Q}$, para cualquier par de números racionales $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ decimos que $q_1 \leq q_2$ si $q_1 - q_2 \geq 0$. Ahora, sean dos números reales representados en forma de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy $[(a_n)]$ y $[(b_n)]$:

Si $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque para todos los $n \geq N$, $a_n \leq b_n$ en $\mathbb{Q}$.

Formalmente, una relación de orden ha de cumplir con tres propiedades esenciales: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

En primer lugar, verifiquemos la propiedad reflexiva de tal modo que para cualquier número real $[(a_n)]$, la sucesión (a_n) es una sucesión de Cauchy y por la definición de orden decimos que $[(a_n)] \leq [(a_n)]$ si y solo si existe $N \in \mathbb{N}$ talque para todos los $n \geq N$, $a_n \leq a_n$ en $\mathbb{Q}$. Por tanto, la relación de orden es reflexiva.

En segundo lugar, verifiquemos la propiedad antisimétrica, si $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ y $[(b_n)] \leq [(a_n)]$, entonces:

Si $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ entonces existe un N_1 tal que para todos $n \geq N_1$, $a_n \leq b_n$ en $\mathbb{Q}$

Si $[(b_n)] \leq [(a_n)]$ entonces existe un N_2 tal que para todos $n \geq N_2$, $b_n \leq a_n$ en $\mathbb{Q}$

Si los dos casos son verdaderos, llegamos a una contradicción puesto que no es posible que a la vez $a_n \leq b_n$ y $b_n \leq a_n$ para los mismos n . Por tanto, $[(a_n)]$ y $[(b_n)]$ no pueden ser diferentes, por ende $[(a_n)] = [(b_n)]$, cumpliendo de esta manera la propiedad antisimétrica.

En tercer lugar, verifiquemos la propiedad transitiva:

Si $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ y $[(b_n)] \leq [(c_n)]$ entonces $[(a_n)] \leq [(c_n)]$

Si $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ entonces existe un N_1 tal que para todos $n \geq N_1$, $a_n \leq b_n$ en $\mathbb{Q}$.

Si $[(b_n)] \leq [(c_n)]$ entonces existe un N_2 tal que para todos $n \geq N_2$, $b_n \leq c_n$ en $\mathbb{Q}$.

Tomando $N = \max(N_1, N_2)$ para todos $n \geq N$ tenemos $a_n \leq b_n$ y $b_n \leq c_n$ lo que implica que $a_n \leq c_n$. Por lo tanto, $[(a_n)] \leq [(c_n)]$, cumpliendo así la propiedad transitiva.

A manera de conclusión, para el orden y para a_n y c_n , tenemos solo una de las siguientes condiciones: $[(a_n)] \leq [(b_n)]$, $[(b_n)] \leq [(a_n)]$ o $[(a_n)] = [(b_n)]$ que se

derivan directamente del orden de $\mathbb{Q}$. Así podemos ver que el orden en los números reales es total de tal modo que:

$$[(a_n)] \leq [(b_n)] \text{ si y sólo si } [(a_n)] < [(b_n)] \text{ o } [(a_n)] = [(b_n)]. \text{ Finalmente, } (\mathbb{R}, \leq)$$

es un cuerpo ordenado.

Por otra parte, veamos si el cuerpo $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ es *arquimediano*. Para esto, diremos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es arquimediano si para cualesquiera dos elementos positivos $a, b \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ talque $n \cdot a > b$.

Primeramente, recordemos que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es arquimediano pues si tomamos $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nq_1 > q_2$ y tengamos en cuenta que una sucesión de Cauchy es positiva, si existe, $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(a_n) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Ahora, en $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ tenemos $[(a_n)]$ y $[(b_n)]$ que representan los números reales por medio de las clases de equivalencia de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Para verificar que es arquimediano debemos mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[(na_n)] > [(b_n)]$.

Como $[(a_n)] < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ y $[(a_n)] < M$ esta acotada por ser de Cauchy y como el conjunto $\mathbb{Q}$ es arquimediano, existe m , tal que $m\varepsilon > M$ entonces

$$[(ma_n)] - [(b_n)] > m\varepsilon - M > 0 \text{ siempre que } n > n_0 \text{ y, por lo tanto, } [(ma_n)] > [(b_n)].$$

Esto prueba que el cuerpo $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ es arquimediano.

Por otra parte, también tengamos presente que si $[(a_n)] < [(b_n)]$ entonces existe una sucesión (c_n) tal que se cumple que $[(a_n)] < [(c_n)] < [(b_n)]$. Esto quiere decir que entre dos números reales siempre podemos encontrar otro número real y esta propiedad es a la

que nos vamos a referir como la *densidad* de los números reales. Para terminar la presentación veamos que este cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ es *completo*.

2.7 Los números reales forman un cuerpo completo

Lo que se va a probar es que $\mathbb{R}$ es **completo**. Veamos a continuación una manera intuitiva de probar que $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ es completo. Es decir, que toda sucesión de clases de equivalencia converge a una clase de equivalencia.

Si $(a_n) \in \mathcal{C}$ en $\mathbb{Q}$, entonces por la inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $([\overline{a_n}])$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Es decir, la sucesión de Cauchy de racionales

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ corresponde en $\mathbb{R}$ a la sucesión

$([\overline{a_n}]) = ([\overline{a_1}], [\overline{a_2}], [\overline{a_3}], \dots)$ de clases de equivalencia. Esta sucesión de clases converge a la clase $[(a_n)]$ que equivale a la clase de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que tienen el mismo límite que la sucesión (a_n) . De esta manera se muestra que el nuevo cuerpo $\mathbb{R}$ contiene todos los límites de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Por tanto, es completo.

Otra prueba muy empleada es la siguiente. Aquí se va a demostrar que toda sucesión de Cauchy de racionales converge en $\mathbb{R}$:

Sea (q_n) una sucesión de Cauchy de números racionales, para cada entero n tomamos un racional a_n tal que: $q_n < (a_n) < q_n + 1/n$.

Para demostrar que la sucesión $(a_n) \in \mathcal{C}$. Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, entonces se puede encontrar $N \in \mathbb{Z}^+$, $N > 3/\varepsilon$ tal que $|q_n - q_m| < \varepsilon/3$, para $m, n > N$, entonces,
 $|a_n - a_m| \leq |a_n - q_n| + |q_n - q_m| + |q_m - a_m| < \varepsilon$, siempre que $m, n \leq N$. Por tanto,
 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Lo que implica que la sucesión (a_n) es de Cauchy.

Ahora, supongamos que $q = (q_n)$, podemos ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n) = q$, como existe una sucesión de racionales (a_n) , talque $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = q$, entonces $|a_n - q| < \frac{\delta}{2}$, siempre que $n \geq M$, entonces $|q_n - q| \leq |q_n - a_n| + |a_n - q| < \delta$, cuando $n \geq M$ y, por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n) = q$.

Por tanto, hemos demostrado que la sucesión (q_n) converge. Concluyendo de esta manera que el cuerpo numérico ordenado $\mathbb{R}$ es completo, ya que toda sucesión de Cauchy converge en él.

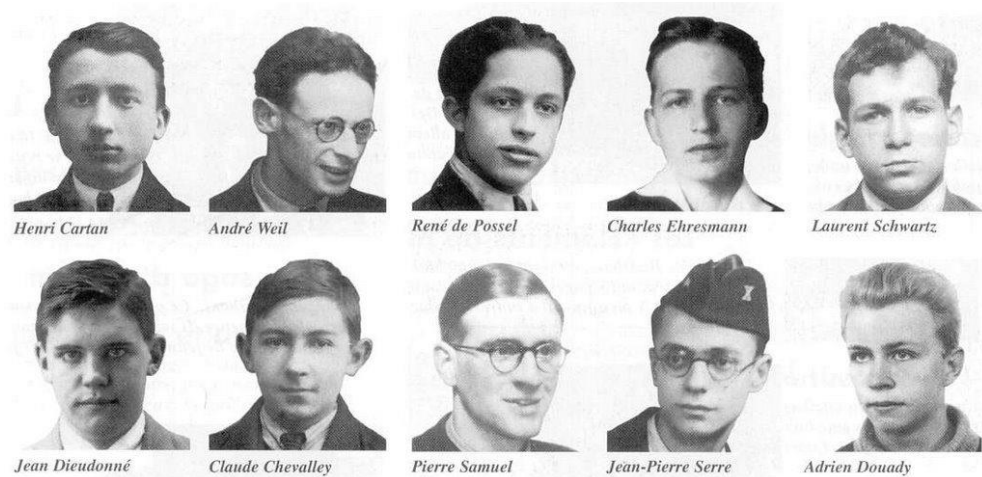
Después de todo lo anterior, se infiere que para Cantor un número real es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales cuya diferencia corresponde a una sucesión nula. Finalmente, se obtiene el cuerpo $\mathbb{R}$ que cumple con las propiedades de orden y las operaciones de suma y producto como condiciones necesarias para ser un cuerpo ordenado y completo terminando la construcción realizada por Cantor en términos de las matemáticas modernas. De manera adicional, podemos revisar a Bergé (2004) quien retoma la idea de la construcción en los términos más cercanos a Cantor.

CAPÍTULO 3

Conceptos preliminares a la construcción de los reales por Bourbaki

La construcción de Bourbaki tiene como base la construcción de los reales hecha por Cantor en 1872; específicamente se trata de una generalización en la que la noción de filtro juega un papel fundamental en el proceso de construcción. De ahí la necesidad de estudiar previamente algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos y de la topología relacionados con la noción de filtro y su convergencia. Pero antes de ello, conozcamos un poco sobre la historia de Bourbaki. Según Bombal (2011):

Nicolás Bourbaki, quien no fue solo un matemático pues este nombre hacía referencia a un pseudónimo colectivo de jóvenes matemáticos (de edades comprendidas entre los 24 y 30 años) de la *École Normale Supérieure*. El grupo fue fundado en la década de 1930 hasta mediados de 1970, la mayoría eran franceses quienes contribuyeron ampliamente al desarrollo de la matemática contemporánea y la reformularon en una base más rigurosa y lógica.



Nicolás Bourbaki

En seguida, se mencionan algunos de sus miembros y sus principales aportes en las matemáticas. *Henri Cartan* (1904-2008), conocido por su trabajo en teoría de *haces* usados en Topología, Geometría algebraica y Geometría diferencial y por sus contribuciones en Álgebra homológica y Análisis complejo; *Claude Chevalley* (1909-1984), destacado por su trabajo en Álgebra y Teoría de números; *Jean Delsarte* (1903-1968) quien fue conocido por su trabajo en Análisis matemático principalmente sobre funciones periódicas medias y operadores, fue un analista de gran potencia y originalidad; *Jean Dieudonné* (1906-1992), realizó sus trabajos en Topología y Geometría algebraica además contribuyó significativamente a la redacción de los volúmenes de Bourbaki; *René de Possel* (1905-1974) uno de los primeros en publicar libros sobre Teoría de juegos y realizó aportes en informática; *André Weil* (1906-1998), destacado por sus trabajos en Teoría de números y Geometría algebraica; entre otros matemáticos.

De la misma manera, es importante saber ¿por qué escogieron el nombre "Nicolas Bourbaki"? y ¿cuál es el propósito de este grupo? El nombre del grupo fue adoptado en

honor a Charles-Denis Bourbaki, un general francés del siglo XIX y el propósito de Bourbaki era revolucionar las matemáticas, es decir pretendían reescribir los fundamentos de las matemáticas de manera más lógica y estructurada. La obra más conocida de Bourbaki es la serie de libros titulada "*Éléments de Mathématique*". Esta serie abarca múltiples volúmenes y cubre una amplia gama de temas matemáticos, desde Álgebra y Análisis hasta Topología y Teoría de categorías. Este colectivo es conocido por su enfoque abstracto y riguroso, estos dejaron de un lado el uso de intuición y de ejemplos específicos, prefiriendo usar definiciones precisas, axiomas y teoremas de manera estricta.

Además, utilizaron la teoría de conjuntos como el fundamento para todas las matemáticas lo cual les permitió desarrollar una estructura coherente y unificada para la matemática moderna. Pues la influencia de Bourbaki se extendió a través de todo el mundo, especialmente en Europa y América del Norte, ya que sus métodos y enfoques se adoptaron ampliamente en la investigación y la enseñanza.

Sin embargo, muchos matemáticos elogiaron el rigor y la coherencia de Bourbaki, mientras que otros criticaron su punto de vista por ser demasiado abstracto y alejado de las aplicaciones prácticas lo cual podría hacer más difícil la comprensión para los estudiantes.

En conclusión, Bourbaki es uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX, pues su huella en las matemáticas superiores sigue presente y su importancia en el desarrollo de estas es indiscutible.

En otro orden de ideas, en el desarrollo de este capítulo, se tendrá como referencia el libro de *Topología General* de Bourbaki (1965), Dolecki y Mynard (2016) y las notas para el curso de Topología de Anaconda (en elaboración).

Tengamos presente que la convergencia de una sucesión se estudia en *espacios métricos*¹⁴, es decir espacios donde se ha establecido previamente una *métrica* o distancia, es así como se puede calcular el límite de la sucesión siempre y cuando el límite exista. Sin embargo, en espacios más abstractos y generales la noción de sucesión no es suficiente. De ahí surge la necesidad de incorporar formalmente una herramienta teórica que nos permita capturar la noción de límite en otro tipo de espacios, de este modo los filtros son requeridos para efectuar esta labor. Los filtros de manera formal fueron expuestos en 1936 por Henri Cartan y luego usados por Bourbaki en 1940. No obstante, antes de entrar al concepto de filtro retomemos algunos términos del apartado de sucesiones y definamos otros, tales como *cola* y *convergencia de una sucesión*.

3.1 Cola y convergencia de una sucesión

Para recordar, de manera general una sucesión se define como una función $f(n): N \rightarrow X$, donde $N \subseteq \mathbb{N}$ y X es un espacio cualquiera. Ahora bien, vamos a referirnos al concepto de cola de una sucesión como punto de partida al tema de los filtros.

La cola de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corresponde a los elementos de la sucesión a partir de un $k \in \mathbb{N}$. El conjunto de todas las colas de una sucesión está denotado por:

$$\mathcal{X} = \{\{x_n: n \geq k\}: k \in \mathbb{N}\}$$

¹⁴ Un *espacio métrico* (X, d) es una pareja formada por un conjunto X y una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que vamos a denominar *métrica* para todo $x, y, z \in X$, cumple con las condiciones:

1. $d(x, x) = 0 \leftrightarrow x = y$, es la propiedad reflexiva
2. Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$, es decir, la distancia entre dos puntos distintos siempre es positiva
3. $d(x, y) = d(y, x)$, conocida como simetría. Esto es, la distancia de x a y es la misma que de y a x .
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, denominada desigualdad triangular

A modo de ejemplo, consideremos la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ y tomemos un conjunto infinito de colas, desde un término k cualquiera. Sin embargo, todos los términos anteriores a k , es decir, $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ son el complemento de una cola y este conjunto es finito; a su vez este conjunto de colas se corresponde con un filtro *cofinito* el cual se mencionará más adelante. Por otra parte, en el capítulo anterior se había definido la convergencia de una sucesión, que vamos a expresar en los siguientes términos:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq k |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lo que permite inferir que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ℓ , sí y sólo si, para un intervalo con centro en ℓ y radio $\varepsilon > 0$, todos los elementos pertenecen al intervalo a partir del término x_k , $k \in \mathbb{N}$. Además, el orden en que estén dispuestos estos términos no es indispensable puesto que el límite se conserva.

De modo que, para la expresión (a) de la convergencia de una sucesión, si tenemos en cuenta que $\mathcal{B}(\ell) = \{(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ representa al conjunto de todas las bolas con centro en ℓ , que podemos reescribir como:

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (x_n)_{n \geq k} \subseteq \mathcal{B}(\ell).$$

Visto de otro modo, una sucesión (x_n) converge a ℓ , si y sólo si para cualquier intervalo o bola con centro en ℓ y radio $\varepsilon > 0$, existe una cola $(x_n)_{n \geq k}$ completamente contenida en dicho intervalo. Una manera más resumida de escribirlo es:

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \leftrightarrow \text{cada miembro de } \mathcal{B}(\ell) \text{ contiene como subconjunto un miembro}$$

de $\mathcal{X}$.

Recapitulando las líneas anteriores **(a)**, **(b)** y **(c)** son tres maneras distintas de enunciar la convergencia de una sucesión en términos de colas y bolas. Ahora, es conveniente entender esto en términos de familias de conjuntos, pero primero debemos de comprender cuándo una familia de conjuntos es más fina que otra basándonos en Dolecki y Mynard (2016).

3.1.1 Convergencia de sucesiones en términos de familias de conjuntos

Sean dos familias de conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dice que la familia $\mathcal{A}$ es *más fina que* $\mathcal{B}$ o viceversa $\mathcal{B}$ es *más gruesa que* $\mathcal{A}$ denotado como $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$ siempre que:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \exists A \in \mathcal{A}, A \subseteq B.$$

La relación $\geq$ cumple con las condiciones de ser reflexiva y transitiva, pero no es antisimétrica por ende no es una relación de orden.

Por ejemplo: Sea el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ y las familias de conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dadas por $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, X\}$ y $\mathcal{B} = \{\{1,2\}, X\}$ decimos que $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ es más fina que $\mathcal{B}$). En este caso particular, se cumple que todos los subconjuntos de la familia $\mathcal{A}$ están contenidos en la familia $\mathcal{B}$ y no al contrario.

Adicionalmente, dos familias son equivalentes si cumplen que $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$, en este caso escribimos $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$, de la cual es importante mencionar que es una relación de equivalencia y de orden.

Ahora, continuando con la terminología de bolas y colas de una sucesión, la convergencia se podría reescribir como:

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \mathcal{X} \geq \mathcal{B}(\ell)$$

Lo que quiere decir que una sucesión converge siempre que la familia de las colas resulte ser más fina que la familia de las bolas. Por otra parte, vamos a considerar el término superconjunto que será de gran utilidad.

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X , se puede formar una nueva familia $\mathcal{A}^\uparrow$ que contenga a todos los superconjuntos de los conjuntos de $\mathcal{A}$, es decir:

$$\mathcal{A}^\uparrow = \{C \subseteq X : \exists A \in \mathcal{A}, A \subseteq C\}$$

Ejemplo: Sea la familia $\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{3\}, X\}$ se tiene que todos los superconjuntos de los conjuntos de $\mathcal{A}$ están en el conjunto $\mathcal{A}^\uparrow$ dado por:

$$\mathcal{A}^\uparrow = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$$

Por otro lado, se puede expresar que $\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}^\uparrow = \mathcal{B}^\uparrow$. En otros términos, dos familias de subconjuntos son equivalentes cuando generan la misma familia de subconjuntos de X al completarlas por superconjuntos. Conforme a ello, en términos de colas y de bolas, se tiene que:

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{X}^\uparrow \text{ ya que } \mathcal{X}^\uparrow = \mathcal{X}^\uparrow \text{ y } \mathcal{B}(\ell) \approx \mathcal{B}(\ell)^\uparrow \text{ dado que } \mathcal{B}(\ell)^\uparrow = \mathcal{B}(\ell)^\uparrow.$$

A partir de esto, la expresión **(d)** se puede representar como:

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \Leftrightarrow \mathcal{X}^\uparrow \geq \mathcal{B}(\ell)^\uparrow$$

En resumen, los conceptos anteriores permiten exponer de otra manera la convergencia de una sucesión en términos de superconjuntos. A continuación, vamos a

referirnos a los filtros y espacios topológicos para más adelante referirnos a la convergencia de los filtros. Empecemos con entender ¿qué es un filtro?

3.2 Filtros y bases

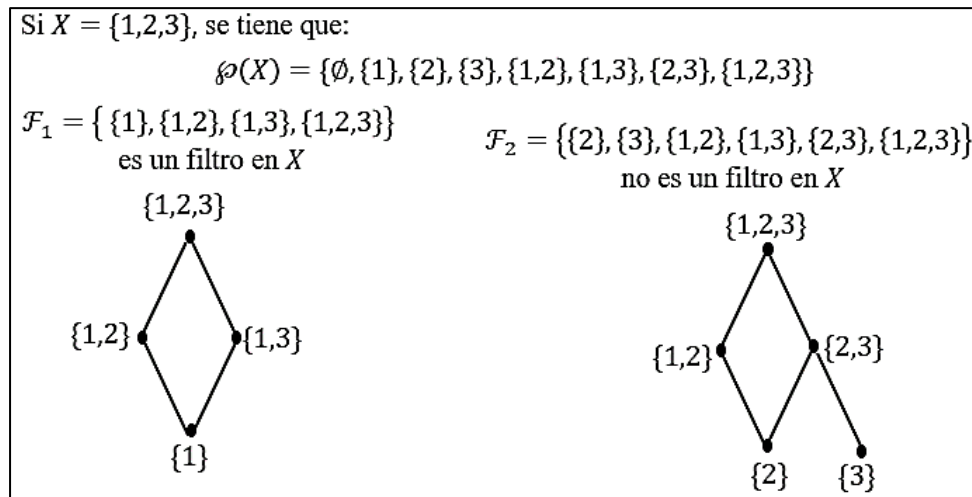
Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X . Si cumple las tres propiedades siguientes:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, \mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$ para algún $G \in X$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Veamos ejemplos de filtros y otros que no lo son. En algunos de ellos se verificarán las propiedades anteriores:

Figura 4

Ejemplos de filtro y no filtro de $X = \{1,2,3\}$



Nota: Representaciones de las familias $\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

(a) Sean X un conjunto y $\wp(X)$ su conjunto potencia, el cual no es un filtro sobre X ya que $\emptyset \in \wp(X)$. Sin embargo, de $\wp(X)$ se pueden obtener filtros y no filtros. Por ejemplo, sea $X = \{1,2,3\}$ y su conjunto potencia dado por:

$\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$ del cual se pueden obtener las familias $\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ representadas en la Figura 4, veamos qué condiciones cumplen:

Si bien las dos familias cumplen con la condición de que el conjunto $\emptyset$ no pertenece a ninguna de ellas. Sin embargo, cuando se analiza la segunda condición para $\mathcal{F}_1$ se tiene que al realizar intersecciones entre sus conjuntos efectivamente están en la familia tales como: $\{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} \in \mathcal{F}_1$; $\{1,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\} \in \mathcal{F}_1$. Mientras que para $\mathcal{F}_2$ se tiene que $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset \notin \mathcal{F}_2$ por lo que falla esta condición.

Y finalmente, para la tercera condición en $\mathcal{F}_1$ se tiene que $\{1\} \in \mathcal{F}_1$ y $\{1\} \subseteq \{1,2\} \Rightarrow \{1,2\} \in \mathcal{F}_1$; $\{1,2\} \in \mathcal{F}_1$ y $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \Rightarrow \{1,2,3\} \in \mathcal{F}_1$. Pero, analizando $\mathcal{F}_2$ se tiene que $\{3\} \in \mathcal{F}_2$ y $\{3\} \subseteq \{1,3\} \Rightarrow \{1,3\} \notin \mathcal{F}_2$ por lo cual no se cumple esta otra condición.

En conclusión, resulta que $\mathcal{F}_1$ es un filtro sobre X , mientras que $\mathcal{F}_2$ no lo es.

(b) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y recordemos $\mathcal{X} = \{\{x_n : n \geq k\} : k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las colas de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Denotamos el **filtro secuencial** o también denominado el **filtro asociado a la sucesión** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$$(\mathbf{x}_n)_n^\uparrow = \{F \subseteq X : F \supseteq \mathcal{X} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

Es decir, $(\mathbf{x}_n)_n^\uparrow$ corresponde a la familia de conjuntos que contienen todas las colas de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Sea X un conjunto y $A \subseteq X, A \neq \emptyset$. Se denota $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$ al **filtro principal generado por A** . Puesto que:

1. $A \subseteq A, A \in \mathcal{F}_A$ y, por ende $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$. Además, $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$ pues $A \not\subseteq \emptyset$.

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_A$ entonces $A \subseteq F_1$ y $A \subseteq F_2$. Luego, $A \subseteq F_1 \cap F_2$. Por consiguiente, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_A$.

3. Sea $G \subseteq X$ tal que $F \subseteq G$ para algún $F \in \mathcal{F}_A$. Tenemos que $A \subseteq F \subseteq G$. Por tanto, $G \in \mathcal{F}_A$.

Nota: Si $A = \{x\}$ este filtro se denota como $\mathcal{F}_x$.

(d) Sea X un conjunto, el **filtro trivial** o **indiscreto** corresponde a $\mathcal{F} = \{X\}$.

(e) Sea X un conjunto infinito y el **filtro cofinito** $\mathcal{F}_{cof} = \{F \subseteq X: F^C \text{ es finito}\}$

cabe recordar que $F^C = X - F$. Dado que cumple:

1. $X^C = X - X = \emptyset$ es finito entonces $X \in \mathcal{F}_{cof}$ y, por consiguiente

$\mathcal{F}_{cof} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{F}_{cof}$ pues $\emptyset^C = X - \emptyset = X$ no es finito.

2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{cof}$ entonces $(F_1 \cap F_2)^C = F_1^C \cup F_2^C$. Dado que F_1^C y F_2^C son finitos. Entonces $F_1^C \cup F_2^C$ también es finito. Por tanto, $(F_1 \cap F_2)^C \in \mathcal{F}_{cof}$.

3. Sea $G \subseteq X$ tal que $F \subseteq G$ para algún $F \in \mathcal{F}_{cof}$. Entonces, $G^C \subseteq F^C$. Como F^C es finito entonces G^C es finito. Luego, $G^C \in \mathcal{F}_{cof}$.

Para este caso, si $X = \mathbb{N}$ o $X = \mathbb{R}$ este se denomina el **filtro de Fréchet**.

(f) Sea X un conjunto no contable y $\mathcal{F}_{coc} = \{F \subseteq X: F^C \text{ es contable}\}$ el **filtro cocontable** para el cual se puede realizar un análisis similar al anterior. De acuerdo con lo anterior, veamos qué quiere decir que un filtro es más fino que otro.

3.2.1 Filtros comparables

Si tenemos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos filtros sobre un conjunto X se dice que $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ (o que $\mathcal{F}_2$ es *menos fino* que $\mathcal{F}_1$) que se puede denotar como $\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}_2$. Lo que significa que $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Si $\mathcal{F}_2 \neq \mathcal{F}_1$ se tiene que $\mathcal{F}_1$ es *estrictamente más fino* que $\mathcal{F}_2$.

Cuando un filtro resulta ser más fino que otro se dice que los filtros son comparables. Un ejemplo es el **filtro cocontable** que es *más fino* que el **filtro cofinito**. Seguidamente nos compete saber ¿qué es una base de filtro?

3.2.2 Base de filtro

Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de filtro, si $\mathcal{B}^\uparrow = \{F \subseteq X: \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq F\}$ es un filtro sobre X . Dicho de otro modo, si $\mathcal{F}$ es un filtro $\mathcal{B}$ es base de filtro para $\mathcal{F}$ si todo conjunto de $\mathcal{F}$ contiene un conjunto de $\mathcal{B}$. Siendo así se dice que la base $\mathcal{B}$ genera al filtro $\mathcal{B}^\uparrow$ y se denota por $\mathcal{B}^\uparrow = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Teniendo en cuenta lo anterior, en la siguiente proposición se expresan las dos propiedades que debe cumplir la familia $\mathcal{B}$ para ser base del filtro que ella genera.

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Revisemos algunos ejemplos:

(a) Todo filtro es base de sí mismo.

(b) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión sobre X . Veamos que el conjunto de las colas de la sucesión $\mathcal{X} = \{\{x_n: n \geq k\}: k \in \mathbb{N}\}$ es base para el filtro $(x_n)^\uparrow_n$. Verifiquemos las condiciones de ser base:

1. $\mathcal{X} \neq \emptyset$ pues para algún $k \in \mathbb{N}$ siempre existe $\{x_n: n \geq k\} \in \mathcal{X}$ y toda cola tiene infinitos elementos. Por tanto, $\emptyset \notin \mathcal{X}$.

2. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{X}$ siendo $B_1 = \{x_n: n \geq t\}$ y $B_2 = \{x_n: n \geq r\}$ con $t, r \in \mathbb{N}$.

Entonces, $B_1 \cap B_2 = \{x_n: n \geq m\}$ donde $m = \max\{t, r\}$. Por otro lado,

$B_3 = \{x_n: n \geq m + 1\} \in \mathcal{X}$ y $B_3 \subseteq (B_1 \cap B_2)$.

(c) Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{(a, \infty): a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $\mathcal{C}$ es una base de filtro sobre $\mathbb{R}$.

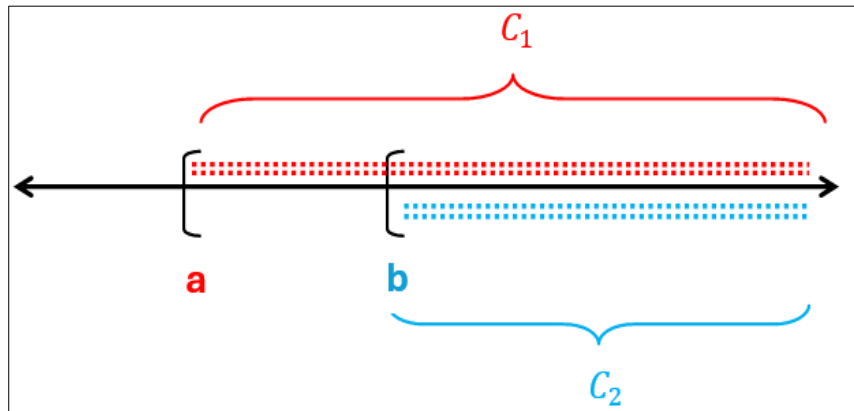
El filtro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{C} \rangle$ también es conocido como filtro de Fréchet. Veamos que efectivamente cumple con las condiciones de base:

1. $\mathbb{R} \neq \emptyset, a \in \mathbb{R}$ y sea $(a, \infty) \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}$. Pues, algunos elementos de la base son $\mathcal{C} = \{(-1, \infty), (2, \infty), (e, \infty), (\frac{-1}{2}, \infty) \dots\}$. Por tanto, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ y además $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

2. Sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ entonces $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ de ahí se pueden tener los casos $a \leq b$ ó $a > b, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Figura 5

Caso I: $a \leq b$ en $X = \mathbb{R}$ del filtro de Fréchet

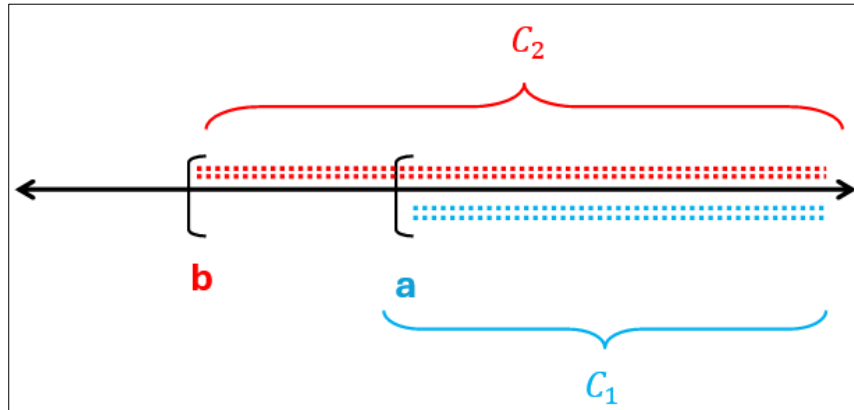


Nota: Representa $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ y $C_3 = (a, \infty) \cap (b, \infty) = (b, \infty)$; cabe aclarar que C_3 es cualquier conjunto de la intersección entre C_1 y C_2 .

Sean $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ representados en la Figura 5, para el caso $a \leq b$ se cumple que $\exists C_3 \in \mathcal{C}$ talque $C_3 \subseteq (a, \infty) \cap (b, \infty) = (b, \infty)$. Como C_3 es cualquier conjunto en $C_1 \cap C_2$ se cumple $\forall c \in \mathbb{R}, c > b, c \in C_3; C_3 = (c, \infty)$.

Figura 6

Caso II: $a > b$ en $X = \mathbb{R}$ del filtro de Fréchet



Nota: Representa $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ y $C_3 = (a, \infty) \cap (b, \infty) = (a, \infty)$; C_3 es cualquier conjunto de la intersección entre C_1 y C_2 .

Sean $C_1 = (a, \infty)$ y $C_2 = (b, \infty)$ representados en la Figura 6, para el caso $a > b$ se cumple que $\exists C_3$ talque $C_3 \subseteq (a, \infty) \cap (b, \infty) = (a, \infty)$. Además para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $x > a$, $x \in C_3$; $C_3 = (x, \infty)$. Para cualquiera de los casos, siempre se encontrará un intervalo de la forma (x, ∞) en la intersección de C_1 y C_2 .

Por tanto, al cumplir las dos condiciones de ser base de filtro entonces $\mathcal{C}$ es una base del filtro de Fréchet en $X = \mathbb{R}$.

En cuanto a los espacios topológicos, vamos a definirlos de manera similar a como se definieron en los filtros.

3.3 Espacios topológicos y bases

El tema de los espacios topológicos será de gran utilidad y se encuentra en la literatura de manera amplia, de modo que se considera necesario con el propósito de que el trabajo de grado sea autocontenido.

Es así como se define una *topología* sobre un conjunto $X, X \neq \emptyset$ como una familia de subconjuntos de X denotada por τ , en la que a cada uno de sus elementos se les dice abiertos y satisfacen que:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. $U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$ (la unión arbitraria de los elementos de una topología pertenece a la topología).
3. $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$ (la intersección finita de los elementos de una topología pertenece a la topología).

Ya con esto, un *espacio topológico* se refiere al par (X, τ) el cual está dotado de un conjunto X y una topología τ . Entre los ejemplos encontramos:

(a) Sea X un conjunto talque $X \neq \emptyset$. Sean $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ la topología trivial o indiscreta y $\tau_{dis} = \wp(X)$ la topología discreta. Se denominan a (X, τ_{ind}) y (X, τ_{dis}) espacios topológicos *indiscreto* y *discreto*, respectivamente.

(b) Sean X un conjunto infinito y $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X: X - A \text{ es finito}\}$ se denomina la *topología de los complementos finitos*.

(c) Sea X un conjunto infinito no contable, $\tau_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X: X - A \text{ es contable}\}$ se le llama la topología cocontable.

(d) Si $X = \{0,1\}$, la topología de *Sierpinski* está dada por $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, X\}$.

(e) Sea $X = \mathbb{R}$, la topología *usual* sobre $\mathbb{R}$ denotada τ_U para la cual consideramos que $\mathcal{U} \in \tau_U$ si $\mathcal{U}$ es unión de intervalos abiertos, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si para cada punto $x \in \mathcal{U}$ existe un intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subseteq \mathcal{U}$.

3.3.1 Topologías comparables

Si tenemos τ_1, τ_2 dos topologías sobre un conjunto X decimos τ_1 es *más fina que* τ_2 (o que τ_2 es *menos fina que* τ_1) denotado como $\tau_1 \geq \tau_2$. Si $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Cuando $\tau_2 \neq \tau_1$ se tiene que τ_1 es *estrictamente más fino que* τ_2 .

Cuando una topología es más fina que otra se dice que las topologías son comparables. Por ejemplo, para un conjunto X dotado de una topología τ cualquiera se cumple que $\tau_{ind} \subseteq \tau \subseteq \tau_{dis}$. Por otro lado, si $X = \mathbb{R}$ tenemos que τ_U y τ_{coc} no son comparables. Así como se presentaron en los filtros vamos a estudiar qué es una base para una topología.

3.3.2 Base de una topología

En un espacio topológico (X, τ) una familia $\mathcal{B}, \mathcal{B} \neq \emptyset$ de abiertos es base para la topología τ si cada abierto de τ es unión de elementos en $\mathcal{B}$. Esto quiere decir que, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es base para τ . Si para todo abierto $\mathcal{U}$ y un punto $x \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathcal{U}$. Los elementos de la base se les llama abiertos básicos.

Adicionalmente, de manera similar a como sucede en los filtros en la siguiente proposición se presenta las dos condiciones que debe de cumplir una base de una topología:

1. $X = \bigcup \{B: B \in \mathcal{B}\}$ es decir, $\mathcal{B}$ es un recubrimiento sobre X .
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entre los ejemplos podemos tener en cuenta:

- (a) Una topología es base de sí misma.
- (b) $\mathcal{B}_{dis} = \{\{x\}: x \in X\}$ es base para la topología discreta sobre X .
- (c) $\mathcal{B}_{ind} = \{X\}$ es base para la topología trivial.
- (d) $\mathcal{B}_1 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{Q}\}$ son bases para la topología

usual sobre $\mathbb{R}$.

3.3.3 Bases de topologías comparables

Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases para una topología tales que $\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \tau_1$ y $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \tau_2$.

Decimos que $\mathcal{B}_1$ es más fina que $\mathcal{B}_2$ si $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Ahora, antes de introducir la temática de la convergencia de filtros, hemos de considerar el término de vecindad, que hace referencia al conjunto de puntos “vecinos” del punto x . A continuación, se presenta su definición formal.

3.4 Noción de vecindad y convergencia de filtros

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $V \subseteq X$ decimos que V es vecindad del punto $x \in X$ (denotada por V_x) si existe $\mathcal{U} \in \tau$, es decir un abierto talque $x \in \mathcal{U} \subseteq V_x$. Cabe notar

que si V es una vecindad de x , para todo $x \in A \subseteq X$, entonces se dice que V es vecindad del conjunto A . Veamos los ejemplos siguientes:

(a) Sea el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y la topología usual τ_u . Al considerar el intervalo $V = [a, b)$ como vecindad de x , para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$ ya que siempre es posible encontrar un intervalo abierto $(c, d) \in \tau_u$ tal que $x \in (c, d) \subseteq V$. Sin embargo, V no es vecindad de a dado que no es posible encontrar un intervalo (e, f) tal que $a \in (e, f)$ y a su vez $(e, f) \subseteq V$.

(b) Por otra parte, sea $\mathbb{R}$ y la topología del límite inferior dada por:
 $\mathbb{R}_\ell: [a, b) = \{x/a \leq x < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ sí es posible considerar que $[a, b)$ es vecindad de cada uno de sus puntos.

(c) Sea $X = \{a, b, c\}$ y la topología discreta τ_{dis} . El conjunto $V = \{a, b\}$ es vecindad del punto a dado que existe un abierto de la topología dado por $\{a\}$ tal que $a \in \{a\} \subseteq V$ y $a \in \{a, b\} \subseteq V$.

Como se ha mencionado antes, una vecindad de un punto x corresponde a cualquier conjunto V del espacio topológico X , que contiene abiertos que contienen al punto x . De modo que, muchos conjuntos cumplen con este papel, así que con estos es posible formar una familia de vecindades del punto $x \in X$, que se denominará *el conjunto de todas las vecindades de x* y se denota por $\mathcal{V}(x)$. A continuación se presenta una proposición importante sobre $\mathcal{V}(x)$.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. El conjunto $\mathcal{V}(x)$ de vecindades de $x \in X$ cumple las propiedades:

- 1) Si $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$.
- 2) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ y $V \subseteq W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$.
- 3) Si $V, W \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.
- 4) Para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{V}(x)$ con $U \subseteq V$ tal que $V \in \mathcal{V}(y)$ para todo $y \in U$.

Sobre las 3 primeras propiedades, un dato importante es que estas se corresponden con las mismas propiedades de filtro. Por ende, el conjunto $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de x forma un filtro denominado el filtro de vecindades de x .

Adicionalmente, si consideramos la familia de todos los conjuntos abiertos que contienen a x , dada por $\mathcal{O}(x) = \{U \in \tau: x \in U\}$. Entonces, la familia $\mathcal{O}(x)^\uparrow$ va a corresponder con $\mathcal{O}(x)^\uparrow = \{V_x: U \subseteq V_x, \exists U \in \mathcal{O}(x)\}$ que coincide con $\mathcal{V}(x)$.

Como ya se mencionó $\mathcal{V}(x)$ es un filtro sobre X , pues de ahí se tiene que $\mathcal{O}(x)$ es una base de este filtro. Lo que quiere decir que el conjunto de todos los abiertos alrededor de un punto forman una base de filtro y al completarla por superconjuntos se obtiene el filtro de vecindades de x .

Antes de empezar, revisemos que en párrafos anteriores se definieron los espacios topológicos que serán importantes para capturar la noción de cercanía y estudiar ahora la convergencia de filtros. Pues, así como se hizo en el capítulo anterior en las sucesiones de Cauchy se estudiaban la cercanía de sus elementos dos a dos, de una manera similar vamos a referirnos a los filtros de Cauchy.

Ahora recordemos la expresión anteriormente expuesta que hace referencia a la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \mathcal{X}^\uparrow \geq \mathcal{B}(x)$$

Para la cual sucede que cuando se completa la familia $\mathcal{X}$ de las colas se obtiene el filtro $\mathcal{X}^\uparrow$ asociado con la sucesión $\{x_n\}$ y del mismo modo al completar la familia de las bolas $\mathcal{B}(x)$ que de manera general se corresponde con la familia $\mathcal{O}(x)$, se obtiene el filtro $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de x . Por consiguiente, son equivalentes $\mathcal{X} \approx \mathcal{X}^\uparrow$ y $\mathcal{B}(x) \approx \mathcal{V}(x)$ con las que la ecuación anterior se transforma en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \mathcal{X}^\uparrow \geq \mathcal{V}(x).$$

A manera de conclusión, la convergencia de una sucesión se corresponde con la convergencia del filtro $\mathcal{X}^\uparrow$ asociado con la sucesión.

De manera adicional, la convergencia de sucesiones se usa para establecer la convergencia de un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico cualesquiera X . Para tal efecto, se hace cambio del filtro asociado a la sucesión que se denotaba como $\mathcal{X}^\uparrow$ por el filtro $\mathcal{F}$ y la expresión " $\mathcal{F}$ converge a x " se denota $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Transformando las ecuaciones anteriores sobre la convergencia en:

$$\mathcal{F} \rightarrow x \Leftrightarrow \mathcal{F} \geq \mathcal{V}(x)$$

Algunos ejemplos de la convergencia de filtros son:

(a) Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces el filtro de vecindades

$\mathcal{V}(x) \rightarrow x$ porque $\mathcal{V}(x) \geq \mathcal{V}(x)$.

(b) Sea X un espacio topológico y $x \in X$, el filtro principal $\mathcal{F}_x = \{x\}^\uparrow$ converge a x porque toda vecindad de x contiene a x y por tanto es un subconjunto de $\mathcal{F}_x$. Es decir, $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}_x$.

(c) Sean X un conjunto infinito y τ_{cof} la topología cofinita. Entonces el filtro $\mathcal{F}_{cof}$ converge a cualquier punto del espacio. Dado que, sea $x \in X$ y $\tau_{cof} = \mathcal{F}_{cof} \cup \{\emptyset\}$, se tiene que toda vecindad V de x contiene a x , entonces necesariamente $V \in \mathcal{F}_{cof}$. Por tanto, $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}_{cof}$ y así $\mathcal{F}_{cof} \rightarrow x$.

(d) Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$, el filtro $\mathcal{F}_{cof}$ no converge en $\mathbb{R}$, puesto que existen vecindades de x que no pertenecen al filtro $\mathcal{F}_{cof}$. Por tanto, $\mathcal{V}(x) \not\subseteq \mathcal{F}_{cof}$.

(e) En (X, τ_{ind}) todos los filtros convergen a todos los puntos de X , ya que la única vecindad de cada punto es X , y X pertenece a todos los filtros.

Por otra parte, tengamos en consideración la siguiente proposición, un resultado indispensable ya que existen casos en los que es más sencillo analizar la convergencia de la base del filtro.

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X , β una base para el filtro $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces, $\mathcal{F} \rightarrow x$ si y solo si $\beta \rightarrow x$. Con la cual se resume que cuando un filtro $\mathcal{F}$ converge a x , su base β también y viceversa.

Ahora para referirnos a la temática de los filtros de Cauchy se requiere de un espacio uniforme, sistema fundamental de entornos, entre otros términos.

3.5 Sobre filtros de Cauchy

Los filtros de Cauchy se definen en espacios uniformes. Por tanto, se requiere en primera instancia de una breve presentación de dichos espacios. Los espacios uniformes se introdujeron por Bourbaki en 1940 y constituyen una generalización de los espacios métricos. Los espacios uniformes permiten estudiar conceptos como continuidad uniforme, completitud, convergencia uniforme y filtros de Cauchy. Específicamente, en los espacios uniformes se puede capturar la noción de cercanía “dos a dos”; es decir, se puede establecer cuando un punto x_1 está tan cerca de un punto x_2 y de manera similar cuando un punto y_1 está cerca de un punto y_2 . Antes de acercarnos a los espacios uniformes que más adelante nos permitirán definir los filtros de Cauchy, tengamos presente:

Sean X, Y conjuntos y recordemos que relación U es subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Dadas las relaciones U, V en $X \times Y$, definimos:

$U^{-1} := \{(x, y) \in Y \times X \mid (y, x) \in U\}$. Además, se dice que U es simétrico si $U = U^{-1}$

$U \circ V := \{(x, z) \in X \times X : \exists y \in X \text{ tal que } (x, y) \in V \wedge (y, z) \in U\}$

Para todo $x \in X$ definimos $U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\}$

Dado un conjunto X , definimos la *diagonal* como el conjunto

$\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ que también podemos denotar solo por Δ cuando no haya lugar a confusión.

3.5.1 Estructura y espacio uniformes

Sea X un conjunto, $\mathcal{U} \subseteq \wp(X \times X)$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ ($\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos) tal que:

- a) Si $U \in \mathcal{U}$, $\Delta \subseteq U$.
- b) Si $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$.

- c) Si $U \in \mathfrak{U} \Rightarrow \exists V \in \mathfrak{U}: V \circ V \subseteq U$.
- d) Si $U, V \in \mathfrak{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{U}$.
- e) Si $U \in \mathfrak{U}, U \subseteq V \subseteq X \times X \Rightarrow V \in \mathfrak{U}$.

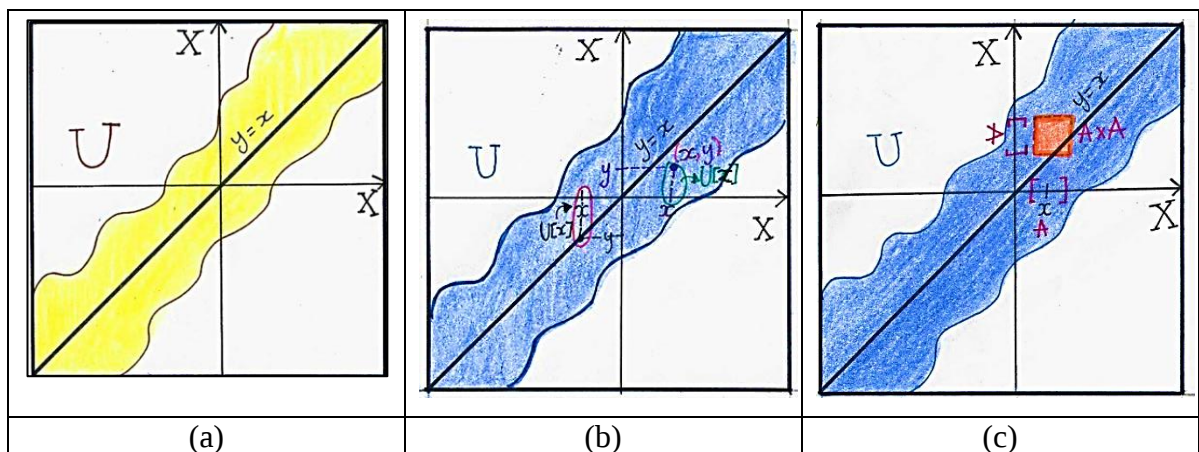
Ahora, ya con estos axiomas veamos que $\mathfrak{U}$ es una *estructura uniforme* también llamada *uniformidad* para X y el par $(X, \mathfrak{U})$ es un *espacio uniforme*. A los elementos de $\mathfrak{U}$ se les dice *entornos* de X o *entornos uniformes* de X . Como se muestra en la Figura 7, a partir de la recta $y = x$ en (a) se muestra un entorno U cualquiera tal que $U \in \mathfrak{U}$, en (b) se expone la característica de que dado un punto $x \in X$ se puede definir el conjunto

$U[x] = \{y: (x, y) \in U \in \mathfrak{U}\}$, que puede representarse como la sección vertical en la ordenada $y = x$ diremos que x es U -cercano de y . Del mismo modo, en (c) podemos ver que si todos los pares de puntos de un conjunto A son U -cercanos, es decir,

$A \times A \subseteq U \in \mathfrak{U}$ entonces se dice que A es U -pequeño.

Figura 7

Características de los entornos de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$



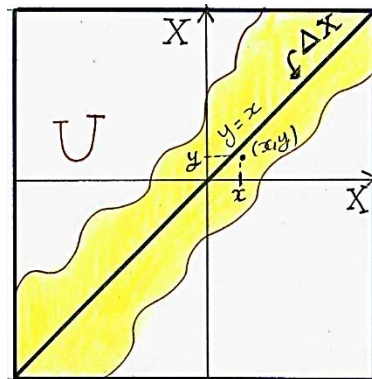
Nota: En (a) se representa U como un entorno cualquiera en $X \times X$, en (b) la sección vertical del conjunto $U[x]$ y en (c) un conjunto A es U -pequeño, como características que identifican este entorno.

De manera más intuitiva y detallada podemos interpretar cada ítem de la definición, ya que dos puntos x, y son “*cercanos*” si el par (x, y) está contenido en muchos entornos. Pues un entorno es aquel que captura un grado particular de “*proximidad*”. Entonces revisemos los axiomas anteriores:

- a) Para cualquier entorno U , todo punto es U -cercano consigo mismo, como se muestra en la Figura 8 la diagonal $\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$. Es decir, ser U -cercano es ser reflexivo. (Lo que generaliza directamente la propiedad $d(x, x) = 0$ para cualquier x siendo d una métrica).

Figura 8

Propiedad reflexiva de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$

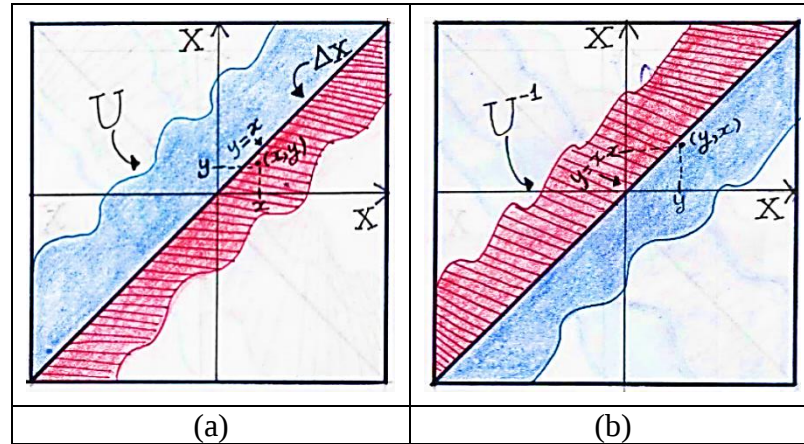


Nota: Bosquejo de un entorno con la propiedad reflexiva, el entorno es de color amarillo.

- b) Si x es U -cercano de y entonces y es U^{-1} -cercano de x (la propiedad nos garantiza que efectivamente $U^{-1} \in \mathfrak{U}$). Como se visualiza en la Figura 9, en (a) se encuentra el entorno U y en (b) el inverso de este U^{-1} . En otras palabras, ser U -cercano es simétrico. (Esto generaliza directamente la propiedad $d(x, y) = d(y, x)$ para cualquier x, y siendo d una métrica).

Figura 9

Propiedad simétrica de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$

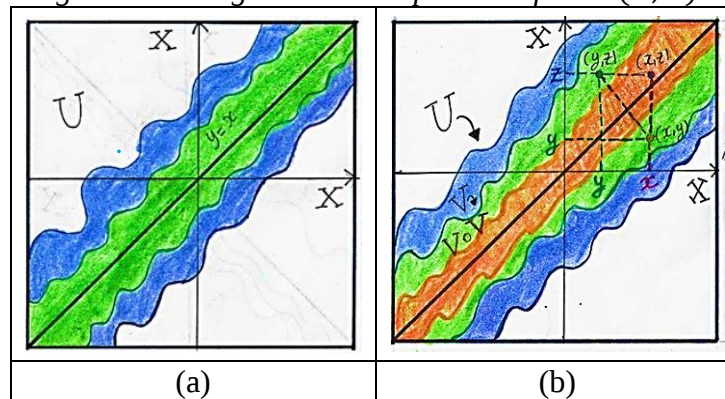


Nota: Bosquejo de un entorno con la propiedad simétrica en (a) se muestra el entorno U y en (b) el entorno inverso U^{-1} . Cabe anotar que es un solo el entorno compuesto por la región de colores rojo y azul.

c) Para todo entorno U , existe un entorno V con un tamaño inferior al del anterior, en otras palabras, para cada entorno o grado de proximidad, existe otro entorno que captura "dos veces más cerca" que podemos ver como la propiedad de la desigualdad triangular de las métricas. En la Figura 10, en (a) se muestra el entorno U y en (b) está el entorno $V \subseteq U$ donde se muestra la desigualdad triangular entre sus puntos, y la composición de $V \circ V \subseteq U$.

Figura 10

Propiedad de la desigualdad triangular de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$

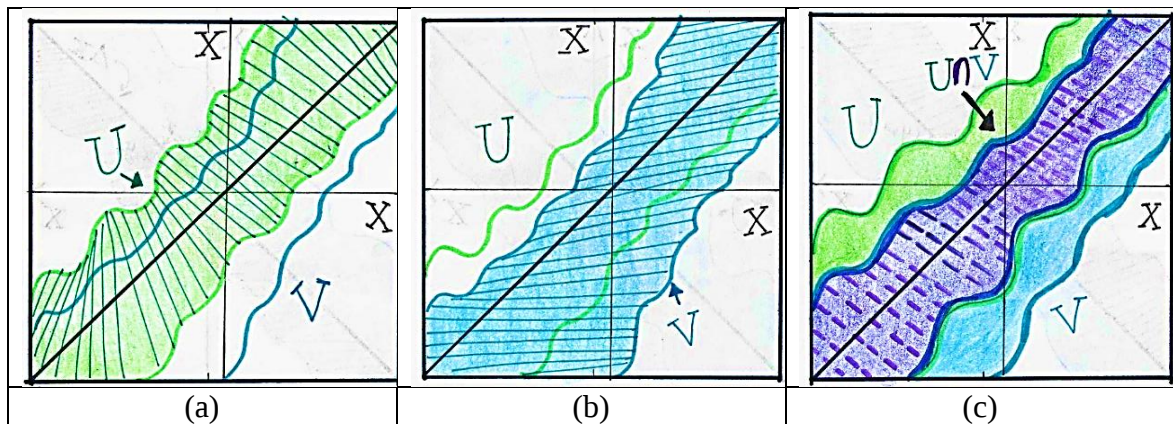


Nota: Bosquejo de un entorno con la propiedad de la desigualdad triangular en (a) están el entorno U donde $V \subseteq U$ aquí la región del entorno U es de color azul, y de color verde el entorno V , en (b) se muestran algunos de los elementos de la composición $V \circ V$ de color naranja.

d) Si podemos hablar de U -cercanía y de V -cercanía entonces podemos hablar de $(U \cap V)$ -cercanía. Estos son los puntos que son U -ceranos y V -ceranos simultáneamente, es decir, si tenemos dos entornos al combinarlos resulta otro entorno. Como vemos en la Figura 11 en (a) se muestra el entorno U , en (b) el entorno V y en (c) la intersección $U \cap V$ como sucede en los filtros, si tengo dos filtros su intersección es otro filtro.

Figura 11

Propiedad de la intersección en un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$

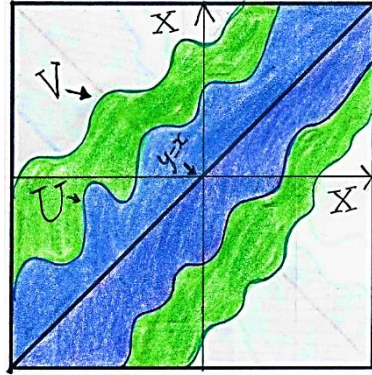


Nota: En esta parte (a) se muestran los bosquejos de los entornos U y V de color verde solo el entorno de color U , en (b) el entorno V es de color azul y en (c) se muestra $U \cap V$.

e) Si V contiene un entorno, entonces es un entorno. En la Figura 12 tenemos $U \subseteq V$ entonces V es un entorno. Esta propiedad es similar a como pasa con los filtros, ya que si V contiene un filtro, entonces si V es un filtro.

Figura 12

Propiedad de contención de entornos



Nota: Bosquejo del entorno V donde $U \subseteq V$, aquí la región del entorno U es de color azul.

Por otro lado, veamos algunos otros ejemplos de espacios uniformes. Sean X un conjunto podemos dotarlo de diferentes uniformidades. Las uniformidades triviales son $\mathcal{U} = \{X \times X\}$ (la más gruesa, conocida como *uniformidad indiscreta*) y

$\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : \Delta \subset U\}$ (la más fina, que llamaremos *uniformidad discreta*). Para la primera, se le denomina a $(X, \mathcal{U})$ *espacio uniforme trivial* y para la segunda se llama a $(X, \mathcal{U})$ *espacio uniforme discreto*. Adicionalmente, la uniformidad usual para $\mathbb{R}$ está dada por: $\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r > 0 \text{ tal que } |x - y| < r \Rightarrow (x, y) \in U\}$.

3.5.2 Sistema Fundamental de Entornos

Para que un conjunto $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ sea un *sistema fundamental de entornos* (SFE) de una *estructura uniforme* $\mathcal{U}$ sobre X es suficiente y necesario que satisfaga los axiomas:

- a) $\forall B \in \mathfrak{B}, \Delta \subseteq B$,
- b) $\forall B \in \mathfrak{B}, B' \subseteq B^{-1}$ para cierto $B' \in \mathfrak{B}$,
- c) $\forall B \in \mathfrak{B}, B' \circ B' \subseteq B$ para cierto $B' \in \mathfrak{B}$,

d) $\forall B, B' \in \mathfrak{B}, B'' \subseteq B \cap B'$ para cierto $B'' \in \mathfrak{B}$.

Cabe notar que estos axiomas son similares a los anteriores de una estructura uniforme. En otras palabras, un *sistema fundamental de entornos* de una estructura uniforme $\mathfrak{U}$ es cualquier colección $\mathfrak{B}$ de entornos de $\mathfrak{U}$ tal que todo entorno de $\mathfrak{U}$ contiene un conjunto perteneciente a $\mathfrak{B}$ o lo mismo que: $\forall U \in \mathfrak{U}, \exists B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subseteq U$. Un ejemplo de ello, si $(X, \mathfrak{U})$ es un espacio uniforme entonces los entornos simétricos de $\mathfrak{U}$ forman un *sistema fundamental de entornos* de $\mathfrak{U}$.

Por otro lado, así como se ha mencionado de topologías comparables y de filtros comparables, también podemos hablar de estructuras comparables, esto se refiere a que una estructura uniforme $\mathfrak{U}$ es más fina que otra estructura uniforme $\mathfrak{K}$ sobre el mismo conjunto si $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{K}$.

De manera adicional, las estructuras uniformes son esenciales para los filtros de Cauchy y la convergencia de filtros de Cauchy para tratar los conceptos de “cercanía” entre dos puntos y se requieren para la construcción de los reales realizada por Bourbaki. Por otra parte, los filtros de Cauchy fueron introducidos en 1936 por André Weil y son definidos en los espacios uniformes, los cuales constituyen una generalización de las sucesiones de Cauchy. Los cuales se definen de la siguiente manera:

3.5.3 Definición de Filtro de Cauchy

Sea $(X, \mathfrak{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro de Cauchy*, si para cada entorno $U \in \mathfrak{U}$ existe $F \in \mathcal{F}$ de orden U tal que $F \times F \subseteq U$. Es

decir, un filtro de Cauchy es aquel que contiene puntos “muy cercanos” dos a dos o un filtro que contiene conjuntos arbitrariamente pequeños.

Con esta definición, se puede verificar que un filtro más fino que un filtro de Cauchy es también un filtro de Cauchy. Ejemplo: Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $x \in X$. Entonces, el filtro de vecindades de x , $\mathcal{V}(x)$, es un filtro de Cauchy. De manera adicional, se dice que un espacio uniforme es completo si todo filtro de Cauchy es convergente.

3.5.4 Filtro minimal de Cauchy

En los espacios uniformes, los filtros de Cauchy que convergen al mismo límite se pueden bien ordenar por la relación de inclusión “ $\subseteq$ ”, en una *cadena*¹⁵ ascendente donde al *elemento minimal*¹⁶ se le conoce como *filtro minimal de Cauchy* y tiene el papel de ser el *menos fino* de todos los filtros de Cauchy en la cadena de inclusión. Cabe mencionar, que los filtros minimales son los llamados representantes de los filtros de Cauchy que convergen a un mismo punto. De esta manera, se da lugar a formar y completar el nuevo espacio con los filtros minimales de Cauchy sobre el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ el cual se identificará como el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como se mostrará en el próximo capítulo.

¹⁵ Se entiende por *cadena* un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado en el que cualquier par de elementos es comparable. Es decir, $a \leq b$ o $b \leq a$. Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la relación de orden usual $\leq$ se tiene que una cadena en A podría ser $B = \{1, 2, 3\}$ donde $1 \leq 2$, $1 \leq 3$ y $2 \leq 3$.

¹⁶ Se refiere como *elemento minimal* de un conjunto parcialmente ordenado, al elemento que no tiene otro que sea estrictamente menor que él. Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$ con la relación de orden usual $\leq$, el elemento 1 es minimal porque no hay un elemento menor que él.

CAPÍTULO 4

La construcción de los reales por Bourbaki a través de filtros de Cauchy

En este capítulo se desarrolla un bosquejo de la construcción moderna de los números reales realizada por Bourbaki en 1940. La importancia de esta presentación radica en la utilidad de nuevos conceptos y métodos que se puedan implementar en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de esta teoría para profesores de matemáticas en formación. A lo largo de este capítulo se menciona de manera detallada cada parte de la construcción lo cual permitirá una comprensión más profunda de este trabajo de grado.

Primero, cabe mencionar que Bourbaki parte del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ sobre el cual se define una estructura uniforme $\mathcal{U}$ para así caracterizarlo como un espacio uniforme y, luego es sobre este que se definen los filtros de Cauchy y los filtros minimales de Cauchy que permiten el estudio de la convergencia y la “cercanía” entre dos filtros que se ordenan por la relación de inclusión “ $\subseteq$ ”. Pues, los filtros minimales de Cauchy son los filtros menos finos de todos los filtros de Cauchy de la cadena ascendente por esta relación. Además, el filtro minimal de Cauchy “representa” a todos los filtros de Cauchy que tienen el mismo límite, independientemente de que el límite sea o no, un punto de $\mathbb{Q}$, y para mostrar que estos cumplen con la propiedad de completitud se debe de

verificar que todos los filtros de Cauchy convergen en dicho espacio en el cual solo hay filtros (en este caso puntos) para luego obtener a $\mathbb{R}$.

De ahí que, el primer paso es definir la *estructura uniforme* para referirse a lo que se entiende por filtros “cercaños” dos a dos pues a partir de los entornos de la estructura uniforme de $\mathbb{Q}$ se establecen los entornos de $\mathbb{R}$, de esta manera dos filtros minimales de Cauchy son “cercaños” en $\mathbb{R}$ si los límites a los que convergen son cercaños en $\mathbb{Q}$.

Ahora, la estructura uniforme de $\mathbb{R}$ induce una estructura topológica sobre $\mathbb{R}$ de modo que se define una vecindad alrededor de un filtro minimal de Cauchy, como aquella formada por todos los filtros de Cauchy que se encuentran “cerca” del filtro minimal seleccionado. Puesto que, el conjunto de todas las vecindades sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ constituye el filtro alrededor del filtro minimal de Cauchy en esta topología. A continuación, se muestra de manera más precisa un esbozo de la prueba.

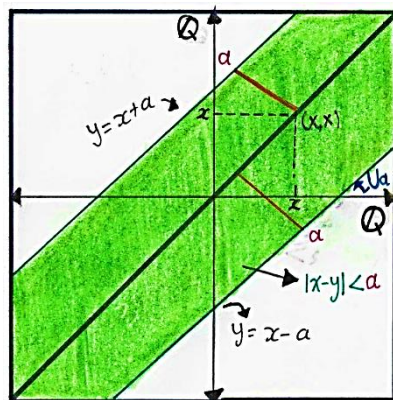
4.1 $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme

En primer lugar, Bourbaki considera el espacio uniforme $\mathbb{Q}$ de los números racionales, es decir que, sobre este espacio previamente se ha definido una estructura uniforme requerida para ubicar puntos “cercaños” dos a dos y en este vamos a estudiar la convergencia mediante filtros de Cauchy.

Es así, como tomamos $U_a = \{(x, y) : d(x, y) = |x - y| < a\}$ este representa la banda determinada por las rectas $x - y = a$ y $y - x = a$ que podemos visualizar en la Figura 13.

Figura 13

Estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{Q}$.



Nota: Región compuesta por las rectas $x - y = a$ y $y - x = a$ y el entorno U_a de la estructura uniforme $\mathcal{U}$

El conjunto de los entornos U_a con $a > 0$ constituye un *sistema fundamental de entornos* para una *uniformidad* sobre $\mathbb{R}$, más conocida como la *uniformidad usual* en $\mathbb{R}$

$$U = \{U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r > 0 \text{ tal que } |x - y| < r \rightarrow (x, y) \in U\}$$

Luego, un entorno está dado por $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que contiene estas bandas.

4.2 Filtros de Cauchy en $\mathbb{Q}$

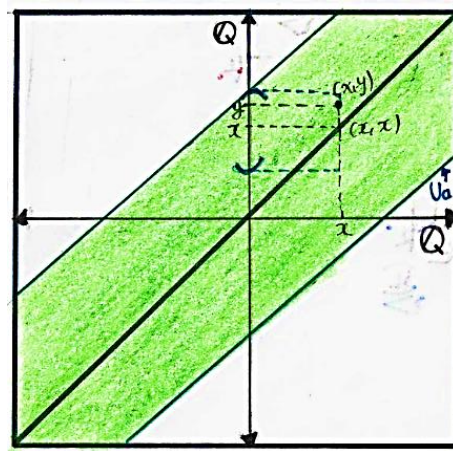
Ahora, a partir de lo anterior, la estructura uniforme $\mathcal{U} = \{U_a : a \in \mathbb{Q}^+\}$ que se establece como un *sistema fundamental de entornos* (SFE) para la estructura uniforme de $\mathbb{Q}$. A manera de ilustración en la Figura 13, se presenta el espacio uniforme $\langle \mathbb{Q}, \mathcal{U} \rangle$ donde los entornos uniformes están representados por U_a constituido por las parejas de puntos $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in U_a$ ($U_a \in \mathcal{U}$) cabe anotar que este caso nos referimos a los puntos (x, y) .

Asimismo, en la Figura 14 podemos visualizarlo más detallado.

Luego, tenemos que $B \subseteq \mathbb{Q}$ para el cual existe $F \in \mathcal{F}$ de orden $U_a \in \mathcal{U}$ talque $B \times B \subseteq U_a$ lo que significa que los $\mathcal{F}$ son los filtros de Cauchy en los cuales encontramos puntos “muy cercanos” dos a dos. Lo que se ilustra en la parte (a) de la Figura 15.

Figura 14

$U_a(x) = \{y \in \mathbb{Q}: (x, y) \in U_a\}$ es una vecindad alrededor de $x \in \mathbb{Q}$



Nota: Bosquejo de las vecindades en $\mathbb{Q}$

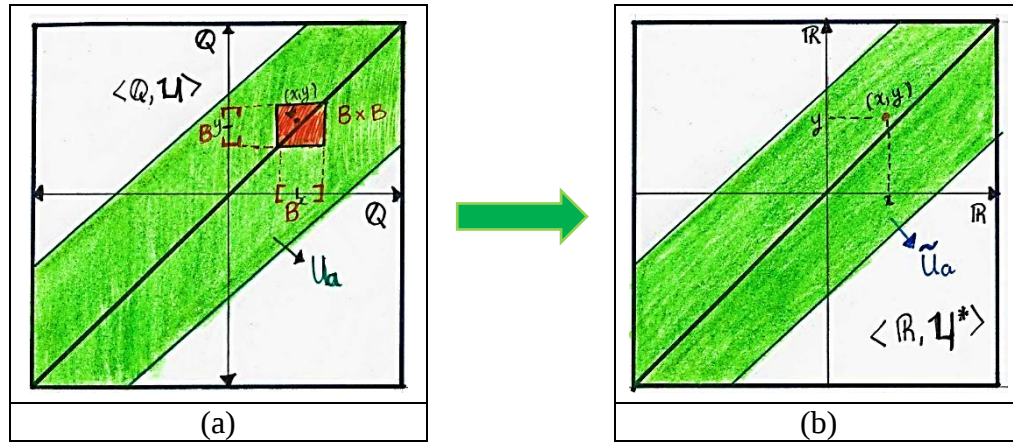
Además, se definen los filtros $\mathcal{F}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$, de tal forma que en un entorno U_a de la estructura uniforme de $\mathbb{Q}$ se forma el conjunto $\tilde{\mathcal{U}}_a$ de las parejas $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de puntos que representan los filtros minimales de Cauchy en $\mathbb{R}$ que tienen en común un conjunto pequeño de orden U_a .

$$\tilde{\mathcal{U}}_a = \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: \exists B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ tal que } B \times B \subseteq U_a\}$$

Donde $\mathbb{R}$ es el conjunto formado por todos los filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$. Además, consideremos que en la parte (b) de la Figura 15 se tiene el conjunto $\mathcal{U}^* = \{\tilde{\mathcal{U}}_a: U_a \in \mathcal{U}\}$ de entornos simétricos que constituye un *SFE* de una estructura uniforme que induce una estructura topológica sobre $\mathbb{R}$.

Figura 15

El conjunto $\mathfrak{U}^* = \{\tilde{U}_a : U_a \in \mathfrak{U}\}$ dota a $\mathbb{R}$ de una estructura uniforme



Nota: En la parte (a) se muestra el filtro de Cauchy que contiene conjuntos B -pequeños en el entorno U_a de $\mathbb{Q}$ y en la parte (b) el entorno $\tilde{U}_a$ derivado del entorno U_a

4.3 Relación de contenencia

En otro orden de ideas, los filtros de Cauchy con el mismo límite se pueden ordenar por la relación de contenencia. Si tenemos dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, diremos que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{G}$ o que $\mathcal{F}$ es menos fino que $\mathcal{G}$, ya que entre ellos se puede establecer una relación de orden basada en la contenencia. Lo que quiere decir, que uno de los dos filtros es un subconjunto del otro, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ o $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Además, si tenemos los filtros $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$, es decir $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1}$. Esto significa que cada filtro en la *cadena de filtros* es más fino (contiene más subconjuntos) que el anterior, con esto podemos interpretar cuando los filtros convergen al mismo límite.

4.4 Convergencia de filtros minimales de Cauchy

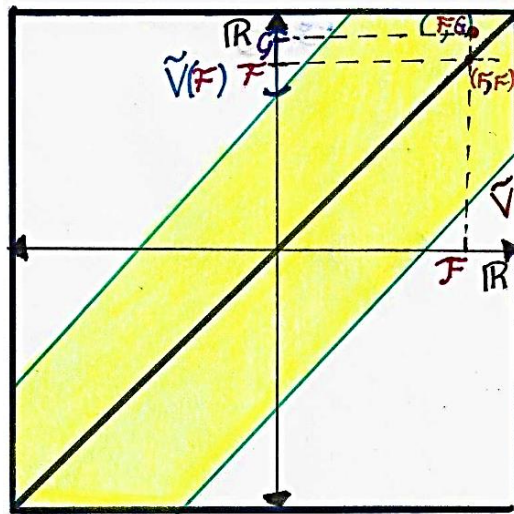
Por ende, $\langle \mathbb{R}, \mathcal{U}^* \rangle$ es un espacio uniforme y $\mathcal{U}^*$ deduce una estructura topológica sobre $\mathbb{R}$, de ahí se define una vecindad alrededor de un filtro minimal de Cauchy, la cual está formada por todos los filtros de Cauchy que están “cerca” del filtro minimal seleccionado $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$ y toda vecindad $\tilde{V} \in \mathcal{U}^*$. En la Figura 16, se ilustra la vecindad alrededor de $\mathcal{F}$ que se define como:

$$\tilde{V}(\mathcal{F}) = \{G \in \mathbb{R}: (\mathcal{F}, G) \in \tilde{V}\}$$

Luego, el conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\tilde{V}(\mathcal{F}): \tilde{V} \in \mathcal{U}^*\}$ define sobre $\mathbb{R}$ una única topología para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ formará el filtro de vecindades de $\mathcal{F}$ en dicha topología.

Figura 16

Topología inducida de la estructura uniforme de $\mathbb{R}$



Nota: Bosquejo de las vecindades en $\mathbb{R}$

4.5 Conjunto de los filtros minimales de Cauchy en $\mathbb{Q}$

Por consiguiente, para escoger al filtro minimal de Cauchy $\mathcal{F}_0$, como el representante de todos aquellos que convergen al mismo límite veamos que el conjunto que contiene a todos los filtros minimales de Cauchy en $\mathbb{Q}$ se denota como:

$$\mathbb{R} := \{\mathcal{F}_0 : \mathcal{F}_0 \text{ es filtro minimal de Cauchy sobre } \mathbb{Q}\}$$

El cual constituye la completación del espacio uniforme $\mathbb{Q}$. Ya que cada elemento de $\mathbb{R}$ se corresponderá con un número real pues un espacio completo es un espacio uniforme en el que todo filtro de Cauchy converge. La estructura uniforme $\mathcal{U}^*$ en $\mathbb{R}$ es la usual que se establece como un sistema fundamental de entornos de la estructura y de ahí se dice que se tiene un espacio uniforme completo.

En esta última parte, realicemos un esbozo más a detalle de este paso final, entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Primero, vamos a formalizar una relación mediante una nueva función $i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ la cual asocia a cada racional r con el filtro de vecindades alrededor de r . Denotemos como $i(\mathbb{Q})$ al conjunto formado por los filtros de vecindades alrededor de cada número racional, como los filtros de vecindades alrededor de un punto son filtros minimales de Cauchy, se tiene que $i(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$.

Adicionalmente, veamos que alrededor de cualquier filtro minimal de Cauchy en $\mathbb{R}$ siempre se encontrarán filtros de vecindades alrededor de racionales por lo que podemos decir que $\mathbb{R}$ es denso, pues la intersección $i(\mathbb{Q})$ con toda vecindad alrededor de un filtro minimal de Cauchy es un conjunto no vacío.

Por otra parte, verifiquemos que todo filtro de Cauchy converge en $\mathbb{R}$.

Inicialmente, si tenemos un filtro de Cauchy sobre $\mathbb{R}$, veamos que la *traza* del filtro sobre $i(\mathbb{Q})$ que se corresponde con la intersección de cada uno de los conjuntos del filtro con $i(\mathbb{Q})$, es también un filtro sobre $\mathbb{Q}$, ya que $i(\mathbb{Q})$ es denso en $\mathbb{R}$. Ampliemos un poco este detalle:

Veamos que toda vecindad alrededor de un punto $\mathcal{F}_0$ de $\mathbb{R}$ al intersectarse con $i(\mathbb{Q})$ es distinta de vacío. Sea $\mathcal{F}_0$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}$, una vecindad alrededor de $\mathcal{F}_0$ está formada por los filtros minimales de Cauchy que están cerca de $\mathcal{F}_0$. Es decir,

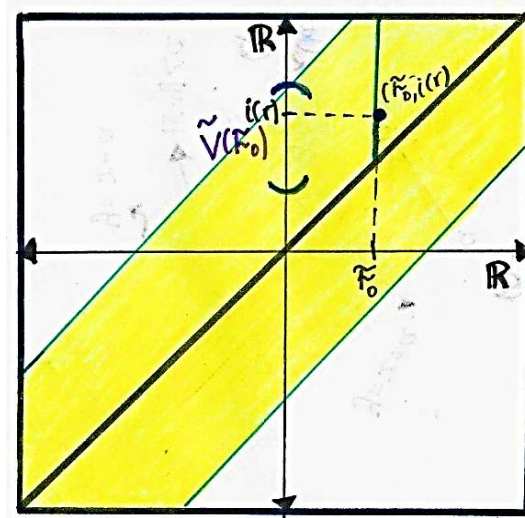
$$\tilde{V}(\mathcal{F}_0) = \{\mathcal{G} \in \mathbb{R}: (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}) \in \tilde{V}\}$$

La traza de esta vecindad sobre $i(\mathbb{Q})$ es el conjunto $\tilde{V}(\mathcal{F}_0) \cap i(\mathbb{Q}) = \{i(r): (\mathcal{F}_0, i(r)) \in \tilde{V}\}$.

Como se ilustra en la Figura 17.

Figura 17

Traza sobre $i(\mathbb{Q})$ de una vecindad de $\tilde{V}(\mathcal{F}_0)$ de un punto $\mathcal{F}_0$ de $\mathbb{R}$



Nota: Bosquejo de referencia

Este último, también es un filtro de Cauchy dado que $i(\mathbb{Q})$ es un espacio uniforme; y verificando algunas propiedades de los filtros se puede demostrar que este filtro de Cauchy converge en $\mathbb{R}$.

De manera similar, este filtro genera un filtro (extendido) sobre $\mathbb{R}$ el cual resulta ser más fino que el filtro inicial de Cauchy y también converge en $\mathbb{R}$. De modo que, si este nuevo filtro converge, el filtro inicial que es menos fino también converge. Por lo tanto, se prueba que todo filtro de Cauchy converge en $\mathbb{R}$. En otras palabras, hemos demostrado que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es completo.

CAPÍTULO 5

Análisis comparativo y conclusiones

En el contexto académico, la valoración comparativa de diversos enfoques, teorías o fenómenos ofrece una visión enriquecedora y profunda, facilitando la identificación de similitudes, diferencias, ventajas, limitaciones y potenciales sinergias. Es así como, este último capítulo tiene un enfoque reflexivo para los docentes en ejercicio, profesores de educación matemática o matemáticos en formación debido a que se dedica a realizar un análisis comparativo entre la construcción de Cantor a través de sucesiones de Cauchy de 1872 y la construcción de Bourbaki mediante filtros minimales de Cauchy de 1940, dos temas de gran interés para la comunidad de investigadores y profesionales en el ámbito de la Historia y la Educación Matemática.

El propósito de este trabajo es proporcionar una visión comprensiva y crítica de ambos temas, abordando sus puntos fuertes y débiles, y evaluando su impacto en la formación de profesores de matemáticas y matemáticos. Mediante este análisis comparativo, se pretende no solo esclarecer las ventajas y limitaciones, además de las diferencias y similitudes entre la construcción de Cantor a través de sucesiones de Cauchy y la construcción de Bourbaki mediante filtros minimales de Cauchy, sino también ofrecer una base para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en el campo de la Historia y la Educación Matemática. Puesto que, la comparación rigurosa y objetiva proporcionará

una comprensión más amplia y profunda de estos temas, contribuyendo al avance del conocimiento en la Educación Matemática. A continuación, se abarcan las principales similitudes y diferencias de las construcciones.

En primer lugar, veamos que Cantor usa sucesiones de Cauchy; esto expresa que Cantor hace uso de un enfoque matemático de comprensión más sencilla que permite manipularlas y realizar pruebas de una manera más clara pues proporciona una forma de estudiar la convergencia, definir las operaciones matemáticas en los reales usando los representantes de las clases de equivalencia de una manera más natural y estudiar la completitud de los números reales con el fin de completar la recta numérica real. Mientras que Bourbaki requiere los filtros minimales de Cauchy, lo que les permite usar un enfoque más abstracto con un nivel de complejidad más alto, recordemos que el propósito del grupo era desarrollar una teoría matemática basada en un enfoque matemático axiomático y riguroso de modo que el uso de los filtros de Cauchy igualmente concuerda con este esquema que permiten estudiar la convergencia y la completitud de los números reales.

En segundo lugar, la construcción de los reales por Cantor se puede estudiar en los primeros semestres de la carrera de Licenciatura en matemáticas o Matemáticas, incluso hasta en los programas de Ingeniería puesto que la perspectiva de las sucesiones de Cauchy se basa en el análisis de sucesiones y límites, que son especialmente útiles en el contexto del Análisis real. Mientras que, para la construcción por Bourbaki se requiere de muchos temas avanzados específicamente de las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas como son los conceptos topológicos y los filtros. De modo que sería conveniente realizar su presentación en los últimos semestres, ya que se espera que los

estudiantes cuenten con una visión y comprensión más madura lo cual es particularmente útil en espacios topológicos generales donde la noción de sucesión puede no ser suficiente para entender temas con un alto nivel de abstracción y de generalidad.

Aunque, una de las ventajas que tiene la construcción por Bourbaki es el uso de las propiedades topológicas y de los filtros puesto que nos ayudan a ver de una manera más clara el avance de las matemáticas modernas. Por otro lado, estudiar los conceptos de filtros que constituyen una generalización del concepto de sucesión brinda aportes para realizar una aproximación diferente y mejor a la condición de convergencia, por medio de los conjuntos y entornos y se evita el uso y tratamiento con ε - δ para las sucesiones de Cauchy. Los reales de Bourbaki constituyen una síntesis moderna de diversos procesos y métodos que se desarrollaron en torno a la completitud.

Otra de las similitudes entre las dos construcciones es que las dos permiten ver claramente las propiedades de cercanía y convergencia entre los elementos de los números reales, puesto que por un lado el uso de las sucesiones de Cauchy de números racionales permite completar el conjunto de los reales ya que, así como existen sucesiones de Cauchy que convergen a números racionales, también existen sucesiones de Cauchy que no convergen en los números racionales lo que hace constituir el conjunto de los números reales a través de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy que convergen al mismo límite. Mientras que, con el uso de filtros de Cauchy se establece de una manera más general este acercamiento a los números reales ya que proporciona un marco más completo y riguroso, pues a través de los filtros de Cauchy y con la relación de inclusión se puede capturar de manera más intuitiva el concepto de convergencia a través de los

filtros minimales de Cauchy que convergen al mismo límite, al organizarlos en una cadena ascendente que tiene como primer elemento un filtro minimal de Cauchy. Además, como para todo filtro de Cauchy existe un único filtro minimal menos fino, entonces el filtro minimal de Cauchy es el menos fino para cada uno de los filtros de Cauchy de la cadena ascendente. Por tanto, el filtro minimal de Cauchy “representa” a todos los filtros de Cauchy que tienen el mismo límite. Esto hace que la familiaridad con las vecindades alrededor de un punto y con la recta racional además de la idea de acercamiento a un punto a través de intervalos se capture en su esencia.

Además de ello, las dos construcciones se pueden usar como herramientas educativas para potencializar el conocimiento matemático de tal modo que el uso de la intuición por medio las representaciones permitan recrear los conceptos, para visualizar el proceso de completitud de los números reales a partir de dos perspectivas de una manera más clara con la construcción de Cantor y de otra forma más general o abstracta a través de la construcción de Bourbaki. Lo cual permite a los futuros docentes tener más claridad en los asuntos matemáticos con los cuales puedan responder de manera satisfactoria a los distintos niveles de su formación lo cual es pertinente en la academia, ya que con el uso de dibujos podemos representar de manera visual para fortalecer los conceptos matemáticos abstractos como el de filtro. Pues, en este ejercicio se desarrollan intuiciones y se adquieren técnicas que son fundamentales para el estudio posterior de la convergencia a nivel más general, como la que se realiza en los espacios de convergencia que permitan facilitar el aprendizaje de estos, lo que hace que el proceso de aprendizaje sea más atractivo e intuitivo. Por tanto, parece acertado considerar en la construcción de los reales

por Bourbaki para la formación matemática de los estudiantes este estudio puesto que la prueba de la convergencia con filtros ofrece las condiciones básicas para adentrarse en desarrollos más abstractos y generales del análisis y la topología.

En otro orden de ideas, se exponen las conclusiones derivadas de este trabajo de grado propuesto en la línea de Historia y la Educación Matemática para sintetizar los hallazgos y reflexiones derivadas del proceso de investigación, que permitirán evaluar su impacto y relevancia en el contexto de enseñanza y aprendizaje de los futuros docentes de matemáticas y matemáticos. Es como, en estos últimos párrafos se pretende recapitular los puntos más importantes, discutir las implicaciones prácticas y teóricas y ofrecer algunas recomendaciones para futuros estudios e intervenciones en el campo de la Educación matemática y en la Matemática misma. Por consiguiente, se presentan las conclusiones principales del análisis destacando los aportes más significativos de este trabajo.

En el contexto educativo actual uno de los desafíos trascendentales es el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números reales. Puesto que, son pocos los aspectos que se estudian en los primeros semestres de universidad ya que no se realiza un énfasis en el proceso de constitución como objeto matemático y más sobre la propiedad de completitud. En estos primeros cursos, se realiza una presentación de manera más axiomática y rigurosa que no permite comprender la variedad de conceptos basados en la configuración de este objeto matemático. Es así como con el estudio de estas dos construcciones realizadas por Cantor y Bourbaki, se espera aportar a la enseñanza de los números reales en los cursos de formación de profesores de matemáticas y matemáticos. Ya que, una de las consideraciones más relevantes a la que nos podemos referir es la diferencia fundamental

entre los números racionales y los números reales. Más precisamente, las condiciones esenciales para demostrar la completitud como la topología y la uniformidad. También es fundamental conocer que los reales de Bourbaki constituyen una síntesis moderna de diversos procesos y métodos que se desarrollaron en torno a la completitud. Puesto que la noción de filtro generaliza la noción de sucesión. Asimismo, la construcción de Bourbaki constituye una generalización de la construcción de Cantor.

Otro de los aportes de la construcción de los reales por Bourbaki es destacar la importancia del estudio de la convergencia de filtros durante la formación matemática de los estudiantes universitarios ya que proporciona el desarrollo de intuiciones que permitan el conocer técnicas para aprovechar los conceptos y contenidos más abstractos y generales del análisis y la topología.

Por otro lado, es clave mencionar que este trabajo constituye solo un estudio del tema, pues algunas de las ventajas que suscitaron de esta investigación fueron:

Proporcionar mejores condiciones para enseñar y comprender más los conceptos matemáticos de completitud, de límite y de continuidad; una formación más amplia en el tema de la convergencia la cual es fundamental para la matemática universitaria, la matemática moderna, la contemporánea y las matemáticas actuales. Mientras una de las posibles limitaciones u obstáculos podrían ser de tiempo si en los cursos avanzados como el de topología no se alcanza a tratar el tema de la construcción de los números reales por Bourbaki pues los estudiantes se perderían del enriquecimiento y la utilidad de los conceptos topológicos y de los de filtros.

Por otra parte, algunos de las recomendaciones e impactos obtenidos para futuras investigaciones son:

En primer lugar, realizar un estudio comparativo entre otras construcciones de los números reales debido a la variedad de estas, con la finalidad de seguir aportando al proceso de enseñanza-aprendizaje y proveer al de mejoramiento de la apropiación de estos temas por parte de los profesores en formación desde los diversos enfoques didácticos, de lenguajes, desde las tecnologías digitales, entre otras.

En segundo lugar, construir actividades de aprendizaje con el uso de la didáctica y con las tecnologías digitales que se puedan implementar a los estudiantes de distintos semestres sobre las construcciones con la finalidad de revisar sus niveles de apropiación de las temáticas.

En tercer lugar, divulgar en el marco de seminarios o eventos nacionales e internacionales los distintos tipos de construcción de los números reales que no es muy conocida en el currículo universitario dado que está instaurada en las matemáticas modernas del siglo XX.

En cuarto lugar, buscar diferentes maneras para entender los números reales desde diferentes perspectivas. Asimismo, contribuir al fortalecimiento de la relación entre Historia y la Educación Matemática. Y finalmente, tener presente que la incorporación de esta construcción de los números reales hace más visible la importancia del concepto de filtro para los cursos más avanzados como el curso de Topología.

Referencias

Anaconda, M., Arboleda, L., & Pérez-Fernández, F. J. (2014). *La noción de vecindad y de entorno en la comprensión de los números reales*.

<https://produccioncientifica.uca.es/documentos/615d616015cff5474de9a0b2>

Anaconda, M. (2017). *Los números reales en el estructuralismo bourbakista: un análisis histórico-epistemológico con fines educativos* [Doctoral dissertation]. Universidad de Cádiz

Anaconda, M. (2024). *Notas para el curso de Topología*. Manuscrito en preparación.

Apostol, T. M. (1976). *Análisis Matemático Segunda edición*. Reverte.

Apóstol, T. M. (1990). *Calculus I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. (2nd ed., Vol. 1). Reverté.

Arboleda, L. C. (2017). *Historia de las matemáticas y formación docente: el caso de la completud de los números reales*. <https://core.ac.uk/download/pdf/328837745.pdf>

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis (Vol. 2)*. New York: Wiley.

Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria* (Doctoral dissertation, Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales). http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3718_Berge

Bombal Gordón, F. (2011). Nicolás Bourbaki: *el matemático que nunca existió*.

<https://hdl.handle.net/20.500.14352/44552>

Bourbaki, N. (1962). *La arquitectura de las matemáticas*. Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Eudeba, 36-49.

Bourbaki, N. (1965). *Topologie générale. Éléments de Mathématique. Livre III*.

Hermann. Paris.

Bourbaki, N. (2013). *General Topology: Chapters 1–4 (Vol. 18)*. Springer Science & Business Media.

Caicedo, L. C. R. (2024). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle.

<https://books.google.es/books?id=C3AFEQAAQBAJ&lpg=PP1&ots=Gw2LlMGAUc&dq=luis%20recalde%20lecturas%20de%20historia%20de%20las%20matematicas&lr&hl=es>

<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52142&pg=PP1#v=onepage&q=luis%20recalde%20lecturas%20de%20historia%20de%20las%20matematicas&f=false>

Calderón Ramos, N. O. (2014). *Diferentes construcciones del número real* (Doctoral dissertation).
<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52142>

Corry, L. (2015). *A Brief History of Numbers*. Reino Unido: OUP Oxford.

Courant, R., & John, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (Vol. 1). Limusa.

Dolecki, S., & Mynard, F. (2016). *Convergence foundations of topology*. World Scientific Publishing Company.

Dutta, H., Natarajan, P. N., & Je Cho, Y. (2020). *Concise Introduction to Basic Real Analysis*. Taylor & Francis Group.

Escardó, E. L. (1991). *Principios de análisis matemático*. Reverté.

Ferreira, S. G. (2011). *Algunas aplicaciones de los puntos F -límites en topología, análisis y álgebra*. Boletín de matemáticas, 18(1), 1-38.

Ferreirós, J. (2008). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Springer Science & Business Media.

Fraleigh, J. B. (1977). *A first course in abstract algebra* (2ª ed.). Addison-Wesley.

González Hernández, G. (2020). *La construcción de los números reales*.

<http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21553>

Grossman, S., & Stanley, I. (2019). *Álgebra lineal*.

Hernández, J. (1995). *Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki*. Seminario “Orotava” de Historia de la Ciencia. La Orotava, Tenerife.

Hernández, S. N. (1983). Espacios uniformes. *Proyecciones* (Antofagasta, On line), 2(5), 179-200.

Herstein, I. N. (1988). *Álgebra abstracta*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*, Revised and Expanded (3rd ed.). CRC Press.

<https://books.google.com.mt/books?id=Er1r0n7VoSEC&lpg=PP1&hl=es&pg=PR2#v=onepage&q&f=false>

Ivorra Castillo, C.(s,f). *Topología*. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf>

Jeronimo, G., Sabia, J., & Tesauri, S. (2008). *Algebra lineal*.

Lima, E. L. (1992). *Curso de análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq

Lopes, P. C. R. (2006). *Construções dos números reais* (Master's thesis, Universidade da Madeira (Portugal)).

Marcos Lomo, F. (2020). *Construcción del cuerpo de los números reales*.

<https://uvadoc.uva.es/handle/10324/43727>

Marín Guevara, J y Perea Sáenz, L. (2019). *Los números reales de Weiss: un análisis histórico-epistemológico de su construcción con fines educativos en la formación docente*.

<https://hdl.handle.net/10893/14186>

Ñañez Valdéz, Y. (2021). *La definición V.5 de los elementos de Euclides en la génesis de los reales: las construcciones de Dedekind y Schanuel*. Universidad del Valle.

<https://hdl.handle.net/10893/21551>

Orbegozo Rodríguez, M. (2018). *Filtros y convergencia en espacios topológicos*.

<http://hdl.handle.net/10810/30508>

Ortega, J. M. (1993). *Introducción al análisis matemático* (Vol. 5). Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

<https://books.google.com.co/books?id=dmOd2KMy7eYC&lpg=PP1&hl=es&pg=PP1#v=onepage&q&f=false>

Panza, M. (2019). *Números: elementos de matemáticas para filósofos*. Colombia: Universidad del Valle.

Recalde, L. C., Anacona, M. P., Arbeláez, G. I., Gálvez, E. F., Amparo, T. R. L., & Malagón, M. R. (2008). *La construcción histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*.

Recalde, L. C. (2011). *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico-epistemológica*. Colombia: Universidad del Valle.

Rubiano, G. N. (2000). *Topología general*. Univ. Nacional de Colombia.

Rudin, W., Sánchez, M. I. A., & Aguirre, L. B. (1980). *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill.

Sánchez Valencia, D. (2012). *Los números reales por Bourbaki y por Choquet: un estudio comparativo de las construcciones con fines educativos* [recurso electrónico].

<https://hdl.handle.net/10893/4487>

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*.

Stonek, B. (2010). *Una breve introducción a los espacios uniformes*.

<https://bruno.stonek.com/uniforme.pdf>

Thomas, G., & Weir, M. D. (2006). *Cálculo. Una Variable*. Undécima Edición.

Weiss, I. (2015a). Survey article: The real numbers-a survey of constructions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 45(3), 737–762. <https://projecteuclid.org/journals/rocky-mountain-journal-of-mathematics/volume-45/issue-3/Survey-Article-The-real-numbersA-survey-of-constructions/10.1216/RMJ-2015-45-3-737.full?tab=ArticleLinkReference>

Weiss, I. (2015b). The reals as rational Cauchy filters. <https://arxiv.org/abs/1503.04348>