



CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO NATURAL DESDE
UNA PERSPECTIVA LOGICISTA: EL TRABAJO DE GOTTLOB FREGE

ANGIE LISETH ROSERO R.
LINA MARCELA PARAMO FELIX

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2016



CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO NATURAL DESDE
UNA PERSPECTIVA LOGICISTA: EL TRABAJO DE GOTTLOB FREGE

ANGIE LISETH ROSERO R.
LINA MARCELA PARAMO FELIX

Trabajo de Grado para optar por el título de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Director:
FERNANDO GÁLVEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2016



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y
PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física

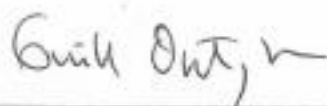
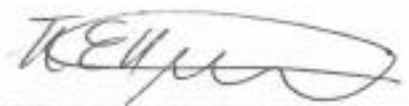
Fecha

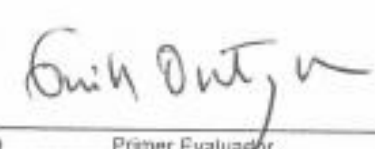
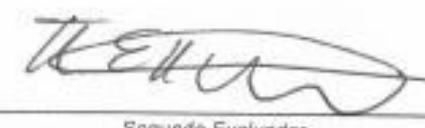
Código del programa: 3487

Resolución del programa: 19056

Día	Mes	Año
<u>04</u>	<u>10</u>	<u>2016</u>

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
<u>Caracterización de la noción de número natural desde una perspectiva logicista: El trabajo de Gottlob Frege</u>				
Se trata de:				
Proyecto ☐		Informe Final ☒		
Director				
<u>Fernando Gálvez</u>				
Nombre del Primer Evaluador				
<u>Guillermo Ortiz Rico</u>				
Nombre del Segundo Evaluador				
<u>Luz Victoria de la Pava</u>				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
<u>Angie Iseth Rosero R.</u>	<u>1132696</u>	<u>3487</u>	<u>rosan1450@gmail.com</u>	<u>3207699712</u>
<u>Lina Marcela Parame Felz</u>	<u>1126170</u>	<u>3487</u>	<u>linamar1808@hotmail.com</u>	<u>3177585114</u>
Evaluación				
Aprobado ☐		Meritorio ☐	Laureado ☒	
Aprobado con recomendaciones ☐		No Aprobado ☐	Incompleto ☐	
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), estas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐		Primer Evaluador ☐	Segundo Evaluador ☐	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				

Firmas		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones ☐	Observaciones ☐	Razón de desacuerdo - Alternativas ☐
<i>Si se considera necesario, usar hojas adicionales.</i> La definición de número natural en Frege comporta un nivel técnico (lógico- matemático) y un nivel filosófico altamente complejo, y no es usual que sea el objeto de una monografía de pregrado. En este sentido, el jurado destaca que este trabajo aborda una temática reconocida universalmente como de alta dificultad. En algunos apartes, se abordan conceptos muy complejos con un nivel de detalle y profundidad comparable con desarrollos a nivel de Maestría y Doctorado. Las estudiantes han explicado ampliamente las tres grandes obras de Frege, a través de las cuales él ofrece una definición logicista de la noción de número natural: <i>Begriffsschrift (Conceptografía)</i>, <i>Die Grundlagen der Arithmetik (Fundamentos de la aritmética)</i> y <i>Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet (Las leyes de la aritmética, deducidas ideográficamente)</i>. El estudio de estas obras fue complementado con un análisis filosófico de autores de reconocida trayectoria en este campo de investigación. Además de lo anterior, el jurado resalta la buena redacción del texto en toda su extensión. Y, por último, se destaca la forma en que se organizó la exposición final del trabajo, dando cuenta con solvencia de la globalidad y especificidad del trabajo. Tomando en consideración lo anterior, el jurado coincide en afirmar que este trabajo de grado supera en mucho las exigencias de un trabajo de pregrado, y cumple a cabalidad con las exigencias de un trabajo de Maestría. Igualmente recomienda que el contenido del trabajo se organice en un par de artículos, para su publicación a nivel nacional o internacional. Finalmente, resalta la importancia de abordar el tema de los números naturales desde una perspectiva filosófica, lo cual es de suma importancia en la formación de los futuros docentes de matemáticas. En virtud de lo anterior, el jurado decide de manera unánime otorgar la calificación de Laureado.		
Firmas		
 Director del Trabajo o Proyecto de Grado	 Primer Evaluador	 Segundo Evaluador

Santiago de Cali, Septiembre de 2016

Nota de aceptación

Director 1

Director 2

Evaluador 1.

Evaluador 2.

AGRADECIMIENTOS

De antemano agradecemos a Dios por permitirnos culminar nuestros estudios y este trabajo de investigación; por la salud y fortaleza que nos brindó durante el proceso de formación. A nuestros familiares por su apoyo incondicional, afecto y comprensión.

Agradecemos a nuestro director de tesis por sus indicaciones, apoyo y por el tiempo dedicado lo cual contribuyó a nuestra madurez intelectual, de igual forma a cada docente que estuvo presente a lo largo de nuestra formación.

A nuestros padres por el amor, la paciencia, por confiar y creer en nosotras, siendo ellos los primeros promotores de los sueños. Gracias por la preocupación que día a día reflejaban por el avance y desarrollo de nuestro Trabajo de Grado.

De igual forma a los amigos que estuvieron presentes y que junto con nosotras pasaron largas noches de estudio llenas de angustia. Por compartir sus experiencias y contribuir a nuestro desarrollo personal.

RESUMEN

Gottlob Frege construye un sistema lógico formal que le permite definir los números naturales a partir de principios lógicos exclusivamente. Este trabajo es considerado como uno de los desarrollos de la lógica y la filosofía más significativos en el contexto de la fundamentación de la matemática. Este reconocimiento permanece actualmente a pesar del resultado de Bertrand Russell, quien identificó una contradicción en los cimientos de este sistema. Este trabajo de grado pretende identificar los aspectos relevantes que caracterizan la definición de número natural de Frege, a partir de tres contextos generales: lógico, ontológico y epistemológico. Para ello, se realizará el estudio de sus tres obras claves *Begriffsschrift*, *Grundlagen* y el tomo I de *Grundgesetze* publicadas en 1879, 1884 y 1893 respectivamente, y en las cuales él engloba todo su proyecto logicista.

Palabras claves: Números naturales, fundamentación de la matemática, lógica, principios lógicos, sistema formal, Gottlob Frege.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. FORMALIZACIÓN DE LA LÓGICA: CONSTRUCCIÓN DE UN LENGUAJE DE FÓRMULAS.....	5
1.1. Consideraciones generales del sistema formal en <i>Begriffsschrift</i>	5
1.2. El juicio.....	9
1.3. Operadores lógicos del sistema de Frege	11
1.3.1. Condicionalidad	11
1.3.2. Negación	15
1.3.3. Disyunción inclusiva, exclusiva y conjunción	16
1.4. La identidad de contenido	19
1.5. Función y Argumento	21
1.5.1. Funciones con argumentos determinados e indeterminados	24
1.5.2. Representación simbólica de función.....	27
1.6. Introducción de la letra gótica y los cuantificadores lógicos	29
1.6.1. Juicios relevantes en el análisis de Frege	35
2. FORMULACIÓN DE LA TESIS LOGICISTA: DEFINICIÓN INFORMAL DE NÚMERO.	40
2.1. Algunas consideraciones sobre la fundamentación de los números.	41
2.1.1. La naturaleza de los números naturales	45
2.1.2. Definición informal de los números naturales	51
3. DEFINICIÓN FORMAL DE LOS NÚMEROS NATURALES A PARTIR DE LEYES LÓGICAS UNIVERSALES.....	57
3.1. Reformulación de la <i>Begriffsschrift</i>	57
3.1.1. Clasificación de las funciones y nombre de funciones	59
3.1.2. Juicios, horizontales, amalgamación de horizontales y Neither-or	63
3.1.3. Negación de la generalidad y función correspondiente	64
3.1.4. Curso de valores, extensión de un concepto y función $\forall \xi$	66
3.1.5. Componente principal y subcomponentes	67
3.1.6. Métodos de inferencia.....	68
3.1.7. El cambio de letra gótica a latina y viceversa	72

3.1.8. Leyes Básicas.....	73
3.1.9. Funciones de segundo nivel y nivel desigual.....	74
3.1.10. Definición de la barra de definición (la doble barra).....	76
3.2. Definiciones particulares.....	76
3.2.1. Definición de la función $\xi \cap \zeta$ y el doble curso de valores.....	76
3.2.2. Definición de la función $I\xi$	78
3.2.3. Definición de las funciones $\rangle\xi$, $\&\xi$ y $\emptyset\xi$	79
3.3. Definición de los números naturales.....	81
3.3.1. Definición de $\emptyset$ y 1	82
3.3.2. Definición de f : Relación sucesor.....	82
3.3.3. Definición de la función $\acute{\xi}$: Sucesor y predecesor de la serie numérica.....	83
3.3.4. Definición de la función $\cup\xi$	85
3.3.5. Propositiones aritméticas.....	86
3.4. La noción de función en Frege desde la perspectiva de Panza (2015).....	87
3.4.1. La discusión sobre el origen de la noción de función de Frege.....	88
3.4.2. Discusión del programa fundacional de Frege.....	90
Conclusiones.....	95
Bibliografía.....	99

Introducción

Este trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de investigación de Historia de las Matemáticas del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, adscrito al Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, y va dirigido a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y docentes en matemáticas interesados en conocer una de las tesis alternativas para la fundamentación de la aritmética: La definición logicista de los números naturales.

Así pues, aquí se estudia la definición de los números naturales propuesta por Gottlob Frege, dada a conocer a finales del siglo XIX, como el intento más destacado en dar una definición estrictamente lógica de la noción de número. En este sentido se busca dar una respuesta a la pregunta que articula el trabajo filosófico de Frege: ¿Qué son los números?

Esta pregunta surge del hecho de que hasta antes del siglo XIX no se había logrado a cabalidad una aritmetización del análisis. En efecto, hacia finales del siglo XIX, dentro del campo del conocimiento científico y en particular en lo que respecta a las matemáticas, empiezan a surgir nuevas teorías donde prevalecía el rigor y la formalización. Entre estas teorías se destacan a las geometrías no euclidianas, la teoría general de los números complejos, la teoría de números transfinitos de George Cantor, entre otros. En general, se dan nuevos aportes al álgebra y a la consolidación del análisis (Serení & Panza, 2013). Pero una característica de este movimiento científico es que los matemáticos de esta época no podían precisar la naturaleza de los objetos con los que trabajaban. (Kenny, A. (1995/1997)).

Esta dificultad se evidencia desde la filosofía antigua cuando se planteó el llamado “problema de Platón”: ¿Por qué los seres humanos pueden acceder a objetos abstractos si estos no hacen parte

del mundo sensible? Ciertamente, desde la concepción de Platón, los objetos matemáticos son objetos abstractos no causales y, por tanto son independientes del mundo concreto. A pesar de las bondades de esta perspectiva para explicar la naturaleza de las matemáticas, la anterior pregunta ha planteado un verdadero desafío al platonismo.

En este sentido, algunos filósofos de las matemáticas han tomado esta pregunta como el eje central de su proyecto filosófico, y han querido ofrecer una respuesta, conservando una posición platónica respecto de los objetos matemáticos. Otros, al contrario, han optado por una posición anti-realista respecto de los mismos.

En lo que concierne a este trabajo, se toma como objeto de estudio uno de los intentos más destacados históricamente que se puede interpretar en la primera dirección arriba mencionada; y se trata como ya se había anticipado, del trabajo de Frege, quien intentó fundamentar toda la matemática en la lógica. Éste estableció una postura totalmente nueva y basada fundamentalmente en el rigor deductivo, en el cual se niega el valor de lo empírico y lo psicológico. La respuesta que Frege dio a este interrogante ha sido considerada como una versión moderna del platonismo matemático.

Las investigaciones de Frege inician y se desarrollan durante el auge de los desarrollos matemáticos mencionados anteriormente (movimiento de aritmetización del análisis), por lo cual sus trabajos se inscriben en la nueva forma de hacer matemáticas, en especial se destaca la relevancia que en este momento se reconoce a la noción de función. Frege afirma que el desarrollo de su sistema debía estar justificado en la lógica, pues la considera como un fundamento fiable para proveer una definición de los números. Sin embargo, él se percató de que para llevar a cabo su propósito debía reformular la lógica que existía, la lógica proposicional¹, la cual no era

¹ La lógica aristotélica o lógica proposicional fue una de las primeras lógicas que se trabajaba en la Antigua Grecia y perduró hasta el siglo XIX. Esta se basaba en los trabajos realizados por el filósofo Aristóteles.

suficiente para su proyecto, debido a que no ofrecía un lenguaje formal suficientemente rico que brindara la expresividad requerida.

No obstante, en el cierre de su proyecto Frege debe reconocer la ocurrencia de una contradicción o inconsistencia en la Ley V de su sistema, señalada por Bertrand Russell en 1902. Este hecho se constituyó en un golpe letal para la teoría de Frege y para el proyecto logicista de reducir la matemática a la lógica.

Aun cuando el trabajo de Frege se juzgó lógicamente inconsistente y no fue reconocido por los autores de su época, no se puede desconocer que este ha jalonado avances muy significativos en el desarrollo del conocimiento lógico y matemático. En virtud de esto, actualmente la obra de Frege sigue siendo objeto de estudio paradigmático para la filosofía de las matemáticas. Es por ello que nuestra investigación tiene como propósito principal destacar los aspectos más relevantes que caracterizan los trabajos de Frege, en relación a la definición de número natural, ligados a tres contextos generales: lógico, ontológico y epistemológico.

Es pertinente explicar, para no dar lugar a errores de interpretación, lo que se entiende por lógico, ontológico y epistemológico; así pues al hablar del contexto lógico nos referimos a la lógica como teoría formal. En el contexto ontológico pretendemos determinar bajo qué condiciones se caracteriza y se entiende la naturaleza de los objetos matemáticos (los números naturales), y en el contexto epistemológico se hace alusión al por qué nosotros como sujetos causales podemos acceder a los objetos abstractos.

En este sentido, este trabajo de grado se desarrolla en tres capítulos que corresponden con los tres libros de Frege, *Begriffsschrift*, *Grundlagen* y *Grundgesetze*, escritos en el marco de su proyecto de formalizar la noción de número:

- En el primer capítulo, se expone lo que a criterio de Frege faltaba a la lógica: se dilucida el carácter formal de su lenguaje y se introduce las nociones básicas en el lenguaje de fórmulas que él mismo formuló.
- En el segundo capítulo se estudia la tesis logicista, por lo cual se identifica, a juicio de Frege, algunas de las imprecisiones que las concepciones clásicas de número comportan. Además se introduce la primera definición informal de número que es coherente desde el punto de vista de un conocimiento riguroso.
- En el tercer capítulo, se presenta la reformulación de su lenguaje de fórmulas, y se analiza la formalización de la definición de número natural. Además, se deducen algunas proposiciones aritméticas a partir de su lenguaje de fórmulas, paralelo a ello se aclara, desde la interpretación de Panza (2015), uno de las nociones más relevantes dentro de este lenguaje: la noción de función.

Finalmente, se hará una reflexión a modo de conclusión que permite mostrar más específicamente los aspectos que son significativos en el trabajo de Frege, y la pertinencia de hacer un estudio como este. En esta reflexión, se destaca principalmente su contribución a la fundamentación de la matemática.

CAPITULO 1

1. FORMALIZACIÓN DE LA LÓGICA: CONSTRUCCIÓN DE UN LENGUAJE DE FÓRMULAS.

Introducción

En este capítulo se pretende hacer un estudio del sistema formal que Frege construye y que sirve de base para el desarrollo de su proyecto. En este sentido, se hace una recopilación de las nociones lógicas que son fundamentales en la construcción de los números naturales propuesta por Frege. Estas nociones se exponen en su primer libro *Begriffsschrift* y son reformuladas al inicio del tomo I de su tercer libro *Grundgesetze der Arithmetik Begriff schriftlich Abgeleitet*. Para los fines de este capítulo solo se tendrá en cuenta el primer libro.

Para hacer esta revisión se tiene en cuenta dos traducciones del libro *Begriffsschrift*. Una versión en español realizada por Hugo Padilla en 1972, cuyo texto se titula *Conceptografía*; y otra en inglés realizada por Jean Van Heijenoort que se encuentra en su libro titulado *From Frege to Gödel*.

1.1. Consideraciones generales del sistema formal en *Begriffsschrift*

Frege en 1879, publica su libro *Begriffsschrift*. Al inicio de este, Frege expone que en el marco del conocimiento científico, para establecer la verdad de las proposiciones, es necesario partir de ciertas conjeturas, donde es preciso determinar los casos en que esas proposiciones son posibles,

y seguidamente, evidenciar por medio de las cadenas de inferencia, la relación que presentan con otras verdades existentes. Sin embargo, establecer la diferencia entre una proposición válida para casos particulares, verdad particular, y el momento preciso en que una proposición podría establecerse como verdad universal, no era inmediato.

De modo que Frege clasifica las verdades en dos tipos: aquellas en donde la prueba puramente lógica es primordial y las que se apoyan en la experiencia. Al hacer la clasificación se debe tener en cuenta el tipo más completo de prueba al que una verdad esté sujeta. Para ello es necesario la actividad sensorial, que es la que permite ser consciente de si una verdad pertenece a uno u otro tipo. (Frege, 1879/1967).

En este sentido, Frege se cuestiona sobre el tipo de verdad al que pertenecen los juicios matemáticos. Para dar respuesta a esta cuestión, se centra primordialmente en la aritmética, y se apoya en las leyes del pensamiento, puesto que por su generalidad ellas sobrepasan las verdades particulares. Basado en esta idea, él busca la forma de demostrar que el concepto de ordenación en una serie puede ser obtenido como una consecuencia lógica (la demostración se fundamenta en principios lógicos universales), e intenta dejar a un lado el carácter intuitivo, es decir, suprimir toda inconsistencia o hechos que no tuvieran una base sólida dentro de la cadena de inferencias.

No obstante, a mayor complejidad de las relaciones es mayor la dificultad de mantener la formalidad y exactitud requerida. De manera más precisa, la lógica proposicional de Aristóteles no ofrecía un lenguaje formal suficientemente rico que brindará la expresividad que se requería. Esta lógica era limitada para expresar los tipos de juicios que Frege pretende formular, y es por ello que este último se ve en la obligación de escribir su *Begriffsschrift*.

En *Begriffsschrift* Frege busca dar cuenta de una prueba segura fundamentada en el rigor. Aun así, no es un lenguaje que pretenda reemplazar al lenguaje natural, sino que permite llenar los

vacíos que hasta su momento existían en el lenguaje de fórmulas utilizado. Es decir, es un dominio característico del lenguaje natural que surge de la necesidad de intentar resolver las ambigüedades que presentaban algunas expresiones lingüísticas. Estas ambigüedades, eran consecuencia de la relación estrecha que se había mantenido entre la gramática, el lenguaje y la lógica, y que Frege en cierto sentido pretendía debilitar.

Frege en la construcción de su lenguaje no toma en consideración la distinción entre sujeto y predicado que se maneja desde la gramática y que constituía la estructura básica de análisis de la lógica proposicional. Su interés es demostrar que en la lógica, las distinciones gramaticales no adquieren un significado sustancial. Para aclarar su concepción veamos un ejemplo:

Carlos ganó la medalla gracias a David. (1)

David permitió que la medalla la ganará Carlos. (2)

Desde el punto de vista gramatical estos enunciados muestran un contenido conceptual distinto, puesto que el primer enunciado tiene como sujeto a Carlos y el segundo a David, así mismo el predicado en la primera es “ganó la medalla gracias a David” y en el segundo es “permitió que la medalla la ganará Carlos”. Lo anterior permite evidenciar que la diferencia entre sujeto y predicado depende de la estructura misma de la oración. No obstante, para Frege estos enunciados, desde un punto de vista lógico expresan un mismo contenido conceptual.

Así, por ejemplo, los dos enunciados anteriores se pueden escribir en uno solo, de tal manera que se exprese lo mismo y se conserve lo que es significativo en los dos enunciados. La forma de expresarlo sería: “La circunstancia de que David haya permitido ganar una medalla a Carlos, es un hecho”. Nótese que el enunciado también está compuesto por la estructura sujeto-predicado, solo que en el sujeto, “La circunstancia de que David haya permitido ganar una medalla a Carlos”, está contenida la mayor parte de lo que se está significando y el predicado “es un hecho” da solo el sentido asertórico (en este caso se toma el enunciado como una afirmación dada). De ahí que, al combinar los dos enunciados con otros enunciados, las consecuencias que se derivan del contenido

del primer enunciado, deben ser consecuencias del segundo enunciado. Esta caracterización le permite a Frege considerar que el *contenido conceptual* de cierto enunciado, sin importar su estructura misma, es uno de los componentes fundamentales para el desarrollo de su sistema. Este va a ser la base de toda su simbología.

Sin embargo, Frege se pudo percatar que no todo contenido conceptual era apto para su estudio, por lo que clasificó y definió los contenidos en *judicables*² y no *judicables*. Los primeros son aquellos enunciados que mantienen una coherencia sintácticamente hablando y que además son susceptibles de ser considerados como verdaderos (según Frege *afirmados*) o falsos (*negados*), y los segundos son aquellos que al expresarlos no es posible establecer si se afirma o se niega el enunciado.

De este modo, él acotó el terreno de su trabajo y desechó lo que para él no expresaba nada o no tiene incidencia dentro de su sistema. Su interés es expresar sólo lo necesario que da significado a la secuencia de inferencia. En este sentido, Frege determina que la estructura sujeto- predicado no es una buena rejilla de análisis para la cadena de inferencias, puesto que no permite trabajar con las relaciones complejas. Además, sujeto y predicado pueden variar en enunciados cuyo contenido conceptual es el mismo.

En lo que concierne a esto y a uno de los ejemplos que Frege propone, el cual es análogo al dado anteriormente, él afirma:

Ciertamente, también aquí se puede, si se quiere, distinguir entre sujeto y predicado, pero el sujeto encierra el contenido completo, y el predicado sólo tiene el propósito de poner a éste como juicio. Un lenguaje así, tendría únicamente un predicado para todos los juicios, a saber, “es un hecho”...

² Esta palabra se utiliza para expresar la idea de un contenido que es susceptible de ser verdadero o falso, pero no es estrictamente un juicio. Ella se conserva de la traducción textual de Hugo Padilla. Su definición se mantiene de la versión en inglés, debido a que no hay una traducción propia del término en español.

... En el primer esbozo de un lenguaje de fórmulas me dejé llevar por el ejemplo del lenguaje ordinario, componiendo los juicios con sujeto y predicado. Pero pronto me persuadí de que esto era contrario a mi propósito y de que sólo conducía a prolijidades inútiles. (1879/1972, p. 7).

Las explicaciones precedentes quieren resaltar la importancia que Frege le atribuye a los contenidos conceptuales y en particular al estudio sobre la verdad de un tipo especial de ellos: los contenidos *judicables*.

1.2. El juicio

Como se dijo anteriormente, Frege presenta enunciados en los que el sujeto abarca el contenido completo y el predicado sólo les otorga a estos el carácter asertórico. El predicado en estos enunciados es común para todos y se enuncia de las siguientes formas: “es un hecho”, “es verdad”, etc. Se puede ver que su función es otorgar la verdad a lo que se dice.

La Conceptografía (*Begriffsschrift*) es un lenguaje que trata sobre estos enunciados, en los cuales, como ya se mencionó, la distinción sujeto-predicado no tiene trascendencia. Frege toma en consideración esta perspectiva para definir la noción de juicio. Los juicios son enunciados que se componen de contenidos *judicables* a los cuales se les certifica la verdad. Los enunciados que no responden a esta condición se les llaman combinación de ideas. Para ilustrar mejor estas definiciones consideremos las expresiones: “Llueve”, “gato” y “el cielo es azul”. Todas estas expresiones son combinaciones de ideas, sin embargo, solo la primera y la última pueden convertirse en juicios. Esto es posible porque se componen de contenidos *judicables* y, por tanto, se les puede asignar un valor de verdad. De modo esquemático veamos cómo quedan las expresiones al asignarles un predicado común, el cual garantiza la verdad:

- A. Es verdad que llueve ó, también, la circunstancia de que llueve, es un hecho.
- B. Es verdad que gato ó, dicho de otra forma, la circunstancia de gato, es un hecho.

- C. Es verdad que el cielo es azul ó, expresado de otra forma, la circunstancia que el cielo es azul, es un hecho.

La expresión B no significa nada, puesto que no es posible determinar a qué se le atribuye el carácter de verdad. La palabra “gato” por sí sola no deja decidir sobre su valor de verdad, mientras que en las otras dos sí se especifica lo que se está afirmando, como dar por hecho que está lloviendo o que efectivamente el cielo es azul.

Así pues, Frege establece los símbolos $\vdash$ y $\dashv$ para diferenciar entre juicios y combinaciones de ideas. Siempre que se hace referencia al juicio de un enunciado X , este se representa así $\vdash X$. A la barra vertical se le da el nombre de barra del juicio, mientras que la barra horizontal se conoce como barra del contenido. Si se omite la barra vertical, esto convierte al juicio en una mera combinación de ideas, por lo cual será susceptible de ser verdadero o falso.

Es importante señalar que la afirmación que otorga la barra del juicio a un enunciado con contenido *judicable* se puede asignar, según sea el caso, a éste o a la combinación de símbolos que están después de la barra del contenido que son a su vez contenidos *judicables*.

Todo enunciado que le anteceda el símbolo $\vdash$ debe ser un contenido *judicable* debido a la definición de juicio, donde $\vdash$ es el predicado común para todos los juicios. Aquí el contenido *judicable* hace referencia a lo que expresan los contenidos conceptuales y no a la forma gramatical como se presentan los enunciados.

Si se retoma el ejemplo que se mostró arriba, se puede identificar que los enunciados (1) y (2) expresan e indican lo mismo, aun cuando su manera de formularse no sea la misma. Por lo cual, si se asigna a estos el carácter asertórico, es decir si se convierten en juicios, estos dos enunciados se

reducen a tener el mismo contenido *judicable*. Por esta razón no se hace necesario establecer la diferencia entre proposiciones con igual contenido *judicable*, Frege (1879/1972).

1.3. Operadores lógicos del sistema de Frege

Una vez aclaradas las nociones anteriores, Frege se dispone a simbolizar las relaciones sintácticas que se establecen entre las proposiciones. Así mismo, determina el valor de verdad que estas adquieren, el cual depende de los valores de verdad asignados a cada una de las proposiciones implicadas.

Para precisar e indicar las relaciones que se dan entre las proposiciones, él define lo que en la lógica clásica se conoce como condicionalidad, negación, disyunción exclusiva e inclusiva y conjunción. Él no define la bicondicionalidad, sin embargo, se puede inferir que su definición se da como una extensión de la condicionalidad. Estas relaciones se conocen hoy como los operadores lógicos tradicionales.

Resulta evidente que, en el marco de este sistema, Frege toma las nociones de condicionalidad y negación para representar los demás operadores lógicos y el modo de inferencia fundamental conocido actualmente como *modus ponendo ponens*. Él señala que sólo hace referencia a este modo, ya que para tener claridad y orden dentro de su sistema debe usar lo más elemental. A continuación, se definen cada uno de estos operadores.

1.3.1. Condicionalidad

Sean A y B contenidos *judicables*; existen cuatro posibles formas de combinar sus valores de verdad³:

- 1) A es afirmada y B es afirmada.
- 2) A es afirmada y B es negada.
- 3) A es negada y B es afirmada.
- 4) A es negada y B es negada.

De acuerdo a esto, Frege define la condicionalidad bajo estas cuatro formas. Es decir, la condicionalidad es el juicio en el cual los casos 1, 2, y 4 se dan, mientras que el caso 3 no. Para los primeros tres casos se certifica la verdad de la condicionalidad y para el último se certifica la falsedad de la misma.

Esta se representa mediante el símbolo $\vdash \frac{A}{B}$, la barra vertical que une las líneas horizontales se llama barra de condición. La barra horizontal que está entre la barra de condición y A es la barra del contenido de A . La barra horizontal que está entre la barra de condición y B , es la barra del contenido de B , y la barra horizontal que está en la parte superior a la izquierda de la barra de condición es la barra del contenido para el significado; esta hace referencia al contenido total de la expresión (Frege, 1879/1972). En una de las posibles interpretaciones modernas⁴, y quizá la más divulgada, el símbolo de condicionalidad de Frege, se expresa usualmente así: $B \rightarrow A$, donde B es el antecedente y A el consecuente.

De las posibles combinaciones de los valores de verdad, hay tres modalidades donde la combinación de ideas⁵ $\vdash \frac{A}{B}$ es afirmada (para el caso aquí planteado $B \rightarrow A$). En la primera

³ Frege trabaja los valores de verdad en términos de lo afirmado y lo negado. En la lógica clásica esto hace referencia a lo verdadero y lo falso respectivamente.

⁴ Desde otras lógicas es posible hacer otras interpretaciones, pero las que se hacen en este trabajo corresponden a la lógica clásica que es la que usualmente se trabaja en el aula de clase.

⁵ Es necesario recalcar que siempre que se hace referencia a una combinación de ideas, se omite la barra del juicio (barra vertical).

modalidad, se conoce que A es afirmada luego se garantiza la verdad de la combinación de ideas por los casos 1 y 2, independientemente del valor de verdad que se le asigne al contenido de B ; análogamente si B es negada se garantiza la verdad por los casos 2 y 4, sin importar el valor de verdad de A . En estas dos modalidades, según Frege, para determinar el valor de verdad de toda la expresión no es importante que exista una conexión causal entre A y B , ya que su valor de verdad se garantiza por los casos antes mencionados, por ello se rechaza la palabra “si” del lenguaje natural.

Para la tercera modalidad, es posible hacer el juicio desconociendo los valores de verdad asignados a A y B , puesto que el juicio presenta una conexión causal entre ellos⁶, así un contenido *judicable* (B) es condición suficiente para garantizar el otro (A). Esta condición se interpreta en el lenguaje natural con el conjuntivo “si”. No obstante, este conjuntivo no se simboliza en el lenguaje utilizado por Frege, pues él se halla inmerso dentro del símbolo del juicio.

Con lo dicho anteriormente es posible analizar los valores de verdad de los enunciados A, B y Γ que forman a $\begin{array}{c} \vdash A \\ \vdash B \\ \vdash \Gamma \end{array}$. Este se compone de dos partes $\begin{array}{c} \vdash A \\ \vdash B \end{array}$ y Γ . Luego teniendo en cuenta las cuatro formas mencionadas antes, no se da el caso en que $\begin{array}{c} \vdash A \\ \vdash B \end{array}$ es negado y Γ afirmado. Ahora, al negar $\begin{array}{c} \vdash A \\ \vdash B \end{array}$ indica por la definición de condicionalidad que el caso 3 se cumple y los restantes no. Este caso se refiere a A es negada y B afirmada. Por consiguiente, para el juicio dado inicialmente no se da el caso en que A es negada y B y Γ afirmadas. En una de las posibles interpretaciones modernas el juicio en cuestión se expresa así $\Gamma \rightarrow (B \rightarrow A)$.

1.3.1.1. Modo de inferencia fundamental (Modus ponens)

⁶ La conexión causal no se da entre los contenidos, sino entre los valores de verdad que se les asigna a ellos.

$$\frac{\frac{\vdash A}{\vdash B}}{\vdash A}$$

Frege en primera instancia expresa el *modus ponens*⁷ así: $\vdash A$. Este se compone de dos juicios: $\vdash B$ (condicionalidad) y $\vdash B$ (que asegura que B es verdad), a partir de los cuales se obtiene $\vdash A$. El juicio $\vdash B$ indica que sólo se pueden dar los casos 1, 2 y 4 mostrados arriba, de modo que se descarta el caso 3. Ahora, de los casos 1, 2 y 4, en virtud de $\vdash B$ se descartan los casos 2 y 4. De esta manera, sólo quedaría el primer caso, el cual señala que A es afirmada y B afirmada. Sin embargo, Frege considera que esta forma de expresar esta inferencia resultaría difícil si se trabaja en el marco de expresiones más complejas; por ello plantea una forma alternativa de representación. De ahí que designa a uno de los juicios mediante un símbolo abreviado. Para ilustrar mejor, Frege propone el siguiente caso a manera de ejemplo:

Si se tiene

$$\frac{\frac{\vdash A}{\vdash B}}{\vdash \Gamma}}{\vdash A}$$

Según Frege, lo anterior se puede escribir de forma abreviada usando el símbolo XXX para designar el juicio $\vdash \Gamma$. Este símbolo va seguido de dos pares de puntos los cuales indican el lugar donde el juicio se ubica en la inferencia:

$$(XXX):: \frac{\frac{\vdash A}{\vdash B}}{\vdash \Gamma}}{\vdash A}$$

Si se define el juicio $\vdash B$ se puede aplicar nuevamente *modus ponens* de manera que se obtiene un nuevo juicio y en su forma simplificada se expresa así:

$$(XX, XXX):: \frac{\frac{\vdash A}{\vdash B}}{\vdash \Gamma}}{\vdash A}$$

⁷ Es importante resaltar que Frege al *modus ponens* no lo nombra así, sino que se refiere a este como modo de inferencia fundamental. Pues para él todo puede ser expresado respondiendo a este.

Los símbolos $(XXX) ::$ y $(XX) ::$ designan a los juicios $\vdash \Gamma$ y $\vdash B$ respectivamente. Se debe tener presente que los dos pares de puntos a la derecha indican que el juicio que ha sido designado, es aquel que se ubica en segundo lugar en la inferencia; y cuando aparezca sólo un par de puntos, el juicio designado es el que se ubica en primer lugar en la inferencia. Las dos barras que están a la derecha del signo $(XX, XXX) ::$ denotan que se debe aplicar el *modus ponendo ponens* dos veces. En una de las posibles interpretaciones modernas, lo anterior equivale a:

$$\frac{\Gamma \rightarrow (B \rightarrow A)}{\Gamma} \quad \frac{B \rightarrow A}{B} \quad \frac{B}{A}$$

1.3.2. Negación

La negación se representa con una barra vertical que se añade en la parte inferior de la barra del contenido de un juicio⁸, y se le da el nombre de barra de negación. La barra de negación significa que el contenido de todas las expresiones que se encuentran a la derecha de ella no tiene lugar, es decir que dicho contenido no es posible. La representación está dada por el siguiente símbolo:



La barra de negación divide la barra horizontal en dos. La parte de la barra que está a la derecha de la barra de negación se le da el nombre de barra de contenido de A , y por tanto, lo que esté en ella afecta solo a A . La barra a la izquierda de la barra de negación se le llama barra del contenido de la negación de A y lo que esté en ella afecta a la negación de A . (Frege 1879/1972)

⁸ Supóngase la negación de un conjunto de ideas $\neg A$; al no ser esto un juicio no se puede asegurar nada sobre el valor de verdad de este conjunto de ideas, según el cual A no tiene lugar. En otras palabras, dicha expresión no certifica la verdad de la idea.

Por ejemplo, si se tiene el juicio $\vdash \neg B^A$ se puede determinar que la barra de negación sólo afecta al contenido de B en virtud de su ubicación. Ahora por la condicionalidad $\vdash \neg B^A$ se sabe que el caso 3 (B afirmada y A negada) no se puede dar. Pero, como en el juicio dado se niega el contenido de B , entonces no se da el caso en que A y B son negados. Por lo que se puede inferir que sólo se certifica la verdad de la condicionalidad dada ($\neg B \rightarrow A$), si se cumple una de las siguientes formas⁹:

- 1) A es afirmada y B es afirmada.
- 2) A es afirmada y B es negada.
- 3) A es negada y B es afirmada.

De manera análoga si se tiene $\vdash \neg A^B$ la barra de negación sólo afecta al contenido de A , por lo cual en este juicio, no se da el caso en que B y A son afirmadas, es decir para dicho caso se certifica la falsedad de la condicionalidad $B \rightarrow \neg A$. Para los casos restantes, se certifica la verdad de esta condicionalidad.

1.3.3. Disyunción inclusiva, exclusiva y conjunción

En este punto conviene subrayar que Frege describe la disyunción (inclusiva y exclusiva) y la conjunción, a través de letras y expresiones relacionadas con estos términos, es decir cuando habla del “o” se refiere a la disyunción inclusiva; si se trata de la disyunción exclusiva utiliza la expresión “either -or”¹⁰ (traducida al inglés), y para aludir a la conjunción emplea la letra “y”. Así mismo, para definir las y simbolizarlas toma en consideración los conceptos de condicionalidad y negación.

⁹ Estas corresponden a las que ya se mencionó en la definición de condicionalidad.

¹⁰ En virtud de que no hay una expresión en español que permita hacer la traducción, se deja el “o” exclusivo en su versión en inglés, que expresa que se da uno de los dos pero no los dos.

Frege designa a la expresión “ A o B ” por medio del símbolo $\neg \neg B^A$, que en una de las posibles interpretaciones modernas se expresa así: $\neg B \rightarrow A$. Luego por definición de condicionalidad, esto equivale a $\neg(\neg B) \vee A$; y por la equivalencia de la doble negación, es lo mismo que tener $B \vee A$. Finalmente por propiedad conmutativa, se obtiene $A \vee B$, lo que coincide con la definición de la disyunción inclusiva. Como se sabe, su valor de verdad es falso sólo cuando A y B son falsas.

Note que $\neg \neg B^A$ también expresa la disyunción inclusiva, pero dada de la siguiente forma $\neg A \vee \neg B$, por tanto su valor de verdad es falso sólo cuando A y B son verdaderas.

Posteriormente Frege establece que la expresión “either -or” une los significados de las dos combinaciones de ideas:

$$\neg \neg B^A \text{ y } \neg \neg B^A$$

En este sentido, para obtener la verdad en la disyunción exclusiva se debe considerar el valor de verdad que adquieren conjuntamente.

Así, Frege señala que $\neg \neg B^A$ evoca la posibilidad de que no tiene lugar para A y B afirmadas y que $\neg \neg B^A$ no tiene lugar para A y B negadas, luego al analizar simultáneamente el valor de verdad que estos adquieren, se puede descartar los casos 1 y 4 mencionados en la definición inicial de condicionalidad. Esto garantiza que la verdad conjunta de las dos condicionalidades se da sólo para:

- 1) A negada y B afirmada
- 2) A afirmada y B negada

De esto se confirma que las dos proposiciones A y B no pueden obtener simultáneamente el mismo valor de verdad, y es en esto que se diferencia de la disyunción inclusiva. (Frege 1879/1972).

En la disyunción exclusiva que acabamos de mostrar el “y” es expresado en términos del lenguaje natural, y siguiendo el razonamiento de Frege de utilizar o hablar sólo de la condicionalidad y la negación, se puede interpretar que él busca una forma de simbolizarlo. Para llevar a cabo esto, Frege formula el conector “y” a partir de la negación de $\neg \neg B^A$ (éste corresponde con la disyunción inclusiva) de donde obtiene $\neg \neg B^A$. Este evoca la posibilidad de que sólo puede tener lugar para A y B afirmadas. Por tanto, al formar el juicio $\vdash \neg \neg B^A$ se certifica que se da la verdad sólo para el caso en que A y B son afirmadas y la falsedad para los demás casos¹¹.

De aquí, se puede inferir que lo anterior coincide con la conjunción, $A \wedge B$, trabajada en la lógica clásica. El juicio $\vdash \neg \neg B^A$ en una de las posibles interpretaciones modernas se expresa así: $\neg(B \rightarrow \neg A)$ por definición de implicación, esto equivale a $\neg(\neg B \vee \neg A)$, por ley de De Morgan y el principio de la doble negación se obtiene $B \wedge A$, y por la conmutatividad del “ $\wedge$ ” se llega a $A \wedge B$.

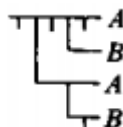
Una vez simbolizado el “y” del lenguaje natural, Frege procede a representar la disyunción exclusiva “*Either A or B*”, en términos modernos $A \vee B$, haciendo uso de un sólo símbolo que lleva implícito el “y” del lenguaje natural¹²:

¹¹ Así cómo es posible expresar la conjunción en términos de la condicionalidad y la negación, Frege establece que también se puede expresar la condicionalidad en términos de la conjunción y la negación. Para ello, introduce un nuevo símbolo para el término “y” (conjunción). De modo que el contenido total de $\Gamma \wedge \Delta$ se representa por $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \\ \Delta \end{array} \right.$,

entonces la condicionalidad $\neg \neg B^A$ quedaría expresada mediante $\left\{ \begin{array}{l} \neg \neg A \\ \neg B \end{array} \right.$. En este símbolo, la primera barra de negación afecta al contenido total de la expresión que está a la derecha de la misma, mientras que la segunda barra de negación sólo infiere en el contenido de A . En el lenguaje de la lógica clásica esto es equivalente a expresar $\neg(\neg A \wedge B)$ que por ley de De Morgan y principio de doble negación equivale a $A \vee \neg B$. Y como el operador “ $\vee$ ” es conmutativo, por la definición de implicación se llega a la expresión $B \rightarrow A$.

Frege elige utilizar la primera forma enunciada para la representación de la conjunción, pues para efectos de la inferencia es más sencilla.

¹² Nótese que para Frege la conjunción sí es un juicio, mientras que la disyunción inclusiva ni la exclusiva las toma como tal. Una explicación para ello, parecer ser que Frege utiliza la idea del juicio sólo para enunciar teoremas, es



Si se expresa en una de las posibles interpretaciones modernas esta equivale a $\neg((\neg B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B))$, por definición de condicionalidad y ley de De Morgan se obtiene $(\neg B \rightarrow A) \wedge \neg(A \wedge B)$ y aplicando nuevamente definición de condicionalidad resulta $(B \vee A) \wedge \neg(A \wedge B)$, que coincide con la definición de la disyunción exclusiva.

En relación a lo anterior, Frege hace dos aclaraciones: él considera a la disyunción inclusiva más importante que la exclusiva dentro de su razonamiento lógico; y él no hace distinción entre “y” y “pero”, pues dentro de su lenguaje esto no cobra importancia. Como sabemos, este acuerdo lingüístico se mantiene en la presentación actual de la semántica de la lógica clásica. En lo que respecta a la primera aclaración Frege (1879/1967) dice:

De las dos formas en que la expresión “ A o B ” es usada, la primera, la cual no excluye la coexistencia de A y B , es la más importante, y nosotros utilizaremos la palabra “o” en este sentido. Quizá es apropiado hacer la distinción entre “o” y “either -or” estipulando que sólo la última tiene el significado secundario de la exclusión mutua. (p. 19, según se traduce).

1.4. La identidad de contenido

La condicionalidad y la negación son operadores que afectan directamente a contenidos. Cuando Frege alude a la identidad de contenido, ésta a diferencia de los antes mencionados, se refiere a nombres y no a contenidos. En este sentido, se puede hacer referencia a un mismo objeto de diferentes formas, dependiendo de cómo se enuncie, al respecto afirma que:

decir algo que es demostrable; mientras que si es algo primitivo (no es demostrable) no lo pone en términos de juicio sino como una combinación de ideas, que es el caso de la disyunción.

La identidad de contenido difiere de la condicionalidad y la negación en que ella se aplica a nombres y no a contenidos. Mientras en otros contextos los signos son solamente representantes de sus contenidos, de modo que cada combinación en la que ellos entran expresa solo una relación entre sus respectivos contenidos, ellos de repente se muestran a sí mismos cuando son combinados por medio del signo de la identidad de contenido; ya que, ello expresa la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido. (1879/1967, p. 20, según se traduce).

Es decir, para él los símbolos (A , B etc.) son solo representantes de contenidos, de ahí que quiere mostrar que dos símbolos son distintos si no tienen el mismo contenido conceptual, pues es posible determinar el mismo contenido de diversas maneras, sin importar que sus símbolos sean necesariamente iguales.

A modo de ejemplo, considere un paralelogramo $ABCD$, cuyas diagonales AC y BD se cortan en el punto E , el cual coincide con el centro del paralelogramo. Para referirse a este punto se puede recurrir a diferentes formas de enunciarlo: como el punto medio del segmento AC o del segmento BD , como el punto de intersección entre las diagonales AC y BD , entre otras. En este sentido, se dice que todos estos nombres tienen el mismo contenido, el punto E , pero no es suficiente sólo una forma de hacer referencia a él, pues si es conocido de una forma no implica que lo sea de la otra.

Es así que para expresar lo anterior, Frege requiere de un símbolo para la igualdad de contenido, con el fin de conectar a los respectivos nombres, una de las razones es que un juicio puede tener diferentes modos de determinación, pero siguen manteniendo el mismo contenido, y otra es que para Frege es más conveniente introducir una abreviación en vez de una expresión extensa. En palabras de Frege (1879/1967):

Por tanto la necesidad de un signo para la identidad de contenido se apoya en la siguiente consideración: el mismo contenido puede ser determinado completamente en diferentes maneras; pero que en un caso particular dos maneras de determinarlo realmente producen el mismo resultado es el contenido un juicio. (p. 21, según se traduce).

De esta manera la identidad de contenido es representada por el siguiente símbolo:

$$\vdash (A \equiv B)$$

Que indica que A y B tienen el mismo contenido conceptual, de suerte que se puede remplazar A en lugar de B y viceversa.

1.5. Función y Argumento

Frege expone la idea general de función y argumento mediante la siguiente descripción:

Si en una expresión, cuyo contenido no necesita ser capaz de convertirse en un juicio, un signo simple o compuesto tiene una o más ocurrencias y si consideramos ese signo como reemplazable en todas o en algunas de sus ocurrencias por algo más (pero siempre por la misma cosa) entonces llamamos la parte que aparece invariable en la expresión una función y la parte reemplazable, el argumento de la función. (1879/1967, p. 22, según se traduce).

En la afirmación anterior se hace la distinción entre función y argumento, lo cual se aclara a partir de algunos ejemplos. Uno de ellos, propuesto por Frege, es:

La circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico.

Suponga que el argumento es la palabra “hidrógeno” entonces la función es “ser más liviano que el anhídrido carbónico”. En este caso, si en lugar de la palabra hidrógeno se coloca oxígeno o nitrógeno, el enunciado altera el sentido, ya que cambia el objeto del cual se está hablando; sin embargo, se mantiene la relación, es decir se tiene una expresión¹³ variable que se descompone en un componente estable y el símbolo. Al primero Frege lo llama función y al segundo argumento de la función.

Para Frege el componente estable representa todas las relaciones que se pueden formar en la expresión, él permite identificar los objetos que se agrupan bajo determinada condición, y el símbolo, es decir el argumento, se considera como aquello que es reemplazable por otros; es el objeto que se identifica bajo dichas relaciones.

No obstante, en la distinción entre función y argumento no se considera el contenido conceptual de la expresión. Según Frege, la distinción depende de puntos de vista, es decir, del modo en que se determina la composición de la expresión. En este sentido, un enunciado puede ser analizado en más de una forma en lo que respecta a función y argumento, conservando el mismo contenido conceptual.

Lo dicho hasta aquí supone que en el enunciado “La circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico,” puede considerarse una segunda transformación en la que “anhídrido carbónico” fuese uno de los argumentos para la función “ser más pesado que el hidrógeno”, donde anhídrido carbónico podría ser remplazado por “ácido clorhídrico” o amoníaco. Lo que es importante resaltar de la idea de Frege es que al hacer esta inversión¹⁴ entre argumento y función, aun se sigue manteniendo el contenido conceptual.

¹³ Se utiliza expresión en un sentido libre del término, para facilitar la redacción del documento, pero se advierte que para Frege, expresión es una configuración de símbolos que no denotan lo que es en sí misma la función.

¹⁴ Al respecto conviene decir que realizar la inversión de roles entre argumento y función no es tan inmediata, desde el punto de vista de la construcción del lenguaje, como supone los ejemplos que Frege propone. Esto se puede destacar en el siguiente ejemplo: Considérese la expresión “El gato es negro” Es claro que en ella se puede formar la función “*ser negro*” cuyo argumento es “*gato*”, por tanto debe poder aplicarse la norma de Frege; sin embargo, se puede notar

Así mismo, la definición de función y argumento que Frege establece deja entrever que en un enunciado puede aparecer un símbolo en uno o más lugares, dicho de otra manera, algo puede ser argumento y estar dentro de la función a la vez. Por lo cual en la función se distingue los lugares del argumento de los que hacen parte de la función.

Para entender mejor esta idea considere la proposición que Frege propone:

Caton mato a Caton

En esta proposición se distinguen tres maneras de formar la función: en la primera se toma como función “matar a Caton”, por tanto lo remplaceable está en el primer lugar donde aparece “Caton” siendo este el argumento. De esta forma si se fija como argumento “Harold”, se obtiene que “Harold mato a Caton”. Para la segunda, la función es “ser matado por Caton” entonces lo

que esta función posee ciertas particularidades: al invertirla, el sentido de la expresión no es familiar y universalmente aceptado, como sí sucede con el ejemplo del hidrógeno.

Otra particularidad que se debe resaltar es que la predicación a la que aquí se hace referencia es monádica, es decir la propiedad “ser negro” cae sobre el mismo objeto “gato”. Así pues, hay un problema en la versión invertida con la cópula “es”; ella no opera como en el caso anterior del hidrógeno, donde se trataba de una predicación diádica, una propiedad que está en relación con otra.

De igual manera en el ejemplo del hidrógeno se habla del elemento en su término general, pero en el caso del gato negro no habla de la generalidad del gato. En otras palabras, en un caso se hace referencia a una propiedad esencial del hidrógeno, mientras que en el otro no se hace alusión a una propiedad universal de los gatos. Más aun, al decir “ser más liviano que el hidrógeno” se tiene un universo definido composicionalmente (se cuenta con un universo determinado), pero “ser gato” o “ser negro” no se puede definir funcionalmente de esta forma.

Ahora bien, si volvemos al caso de “lo negro es gato”, se evidencia cierta dificultad en la coherencia y desde el punto de vista funcional esto parece forzado. En este sentido, se deben transformar las partes de tal manera que la función que se forma tras la inversión sea coherente. Por ello, se debe hacer una adecuada transformación de la frase donde se mantenga el sentido y la coherencia, una posible construcción de esta transformación sería: “los seres negros son gatos” o “algunas cosas negras son gatos”; el problema es que se debe construir no con la simplicidad del ejemplo enunciado por Frege.

En este sentido es prudente advertir que la inversión entre función y argumento depende según los términos del enunciado estén bien definidos o no. El caso del hidrógeno es el de un elemento bien determinado, en contraste con la indeterminación del gato negro. Esto en cierta medida se relaciona con lo determinado y lo indeterminado que se trabaja más adelante.

reemplazable corresponde al segundo lugar donde aparece Caton, y si se toma como argumento “Harold” se obtiene “Caton mato a Harold”. Por último, si se considera que se está haciendo referencia al mismo Caton entonces la función correspondiente sería “matarse así mismo”. Por lo tanto Caton será reemplazable en los dos lugares, pero al hacerlo debe ser siempre por lo mismo; se trabaja con el mismo argumento en ambos lugares. Así, para el argumento “Harold” se obtiene “Harold mato a Harold”.

Como se evidencia en el ejemplo anterior, el argumento corresponde a lo que es posible reemplazar en la función. Así “Catón” aparece en dos lugares y, según como se tome la función éste puede ser argumento en todos o en algunos de esos lugares. En general, si aparece un mismo símbolo en varios lugares de la función, para considerarlo como argumento en todos los lugares de dicha función, al tomar otro argumento este debe reemplazarse en todos los lugares por lo mismo.

1.5.1. Funciones con argumentos determinados e indeterminados

En el párrafo anterior, particularmente en la nota al pie de página n°14 se dejó abierto el problema de lo determinado y lo indeterminado, en el marco de la discusión de las nociones de función y argumento.

Frege no da una definición precisa que permita determinar la distinción entre lo determinado y lo indeterminado, sin embargo, presenta un ejemplo para aclarar su concepción. Considere las siguientes proposiciones:

“El número 20 es representable como la suma de cuatro cuadrados”

“Todo número entero positivo es representable como la suma de cuatro cuadrados”¹⁵

¹⁵ Es importante resaltar que esta proposición corresponde con el teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange.

A primera vista se puede suponer que ambas proposiciones forman la misma función: “Ser representable como la suma de cuatro cuadrados”, a la cual se le ha cambiado el argumento, puesto que en la primera se establece como argumento “El número 20” y en la segunda “Todo número entero positivo”. Pero al no ser estos conceptos del mismo nivel, entonces no es posible afirmar que ambas proposiciones tienen la misma función. Esto se debe a que no es posible poner en correspondencia la expresión “el número 20” con la expresión “todo número entero positivo”, pues lo que se diga de la primera no necesariamente se puede decir del segunda.

Ciertamente, para Frege los distintos modos en que se puede hacer referencia al mismo contenido conceptual a través de funciones y argumentos no tiene importancia, siempre y cuando estos dos últimos se puedan determinar explícitamente. No obstante, en el caso de las proposiciones anteriores, esto no es posible ya que el argumento de una de ellas está indeterminado. Es decir, mientras que la expresión “el número 20” alcanza en sí mismo una idea independiente, la expresión “Todo número entero positivo” no lo logra; ésta hace referencia al universo de los números enteros, y solo cobra sentido en el conjunto de proposiciones al que da lugar, esto es cuando se comienza a reemplazar por cualquier número entero positivo en la proposición. Es aquí donde la distinción entre función y argumento cobra un significado sustancial e independiente (Frege, 1879/1972).

Esto quiere decir que la distinción función y argumento adquiere importancia real cuando hay indeterminación, pues lo que se pretende es cuantificar sobre un universo del cual se puede predicar una propiedad o señalar un individuo arbitrario que cumpla una cierta condición. Frege lo que está diciendo con todo esto es que se puede tener un lenguaje tan potente que caracteriza todas estas propiedades en términos de relaciones lógicas.

Cabe resaltar que la indeterminación no afecta la función ni establece juicios sobre ella. Por ejemplo si se tiene el juicio: “usted puede tomar como argumento de la función -ser descompuesto

como la suma de cuatro cuadrados- cualquier entero positivo arbitrario”, lo que afirma este juicio es que todo número entero positivo se representa como la suma de cuatro cuadrados, por tanto puede tomar como argumento cualquier número de los infinitos números naturales, y su verdad va a estar garantizada por el juicio aun cuando el argumento sea indeterminado. La indeterminación del argumento de la función, e incluso la del juicio, no afecta la posibilidad de establecer un juicio de verdad sobre ellos, es decir se valida la indeterminación.

Lo anterior permite dilucidar que Frege está posicionando una cuantificación universal (que en términos modernos se reconoce con el símbolo “ $\forall$ ”, el cual se lee “para todo”). Su intención es establecer las condiciones formales de predicación y deducción sobre un universo de números, los naturales. Así, establecer una distinción entre argumento y función por medio de enunciados que comporten elementos indeterminados (sean funciones o argumentos), posibilita hablar de dominios de objetos y de funciones que varían en un dominio de objetos indeterminados, lo que permite la generalización de las propiedades generales y de los teoremas matemáticos como enunciados de este tipo.

Es importante retomar la advertencia de Frege (1879/1972) en la que plantea que no se debe limitar el lenguaje a la pobreza del léxico. Por lo general en el acto de hablar, quien piensa el discurso lo hace dirigiéndose a dos componentes principales: sujeto y objeto, sea consciente o inconscientemente, y a los cuales les atribuye más relevancia en comparación con los otros componentes que intervienen. Esto se hace siguiendo un dispositivo (dado por el lenguaje) que permite dotar de coherencia lo que se dice. Sin embargo esto se ve limitado por la escasez de las palabras.

Es decir, el lenguaje para referirse a esos dos componentes principales debe recurrir a un dispositivo que tiene y que usa con cierta libertad haciendo la adecuada elección de las formas del verbo, de las palabras y de los adjetivos en un reino aparentemente “libre” pero que en realidad es restringido porque de alguna manera no es infinito. Por ello, Frege destaca la pertinencia de contar

con una simbología que dote de simplicidad el lenguaje y que además pueda enriquecerlo; como un caso particular de esto, él busca justamente crear una simbología que permita trabajar con las funciones en el sentido general del término.

1.5.2. Representación simbólica de función

Frege nos ha llevado al problema de la indeterminación de las funciones en un proceso sistemático. Esto se evidencia por la forma en que él fue dando lugar a la indeterminación: primero mostró las diversas posibilidades que puede tener una función, dotando de significado a la misma para uno u otro argumento, y destacando aquello que era posible interpretar dentro de la función, y lo que no lo era; posteriormente mostró que era posible que parte de una función pudiera convertirse en un argumento,¹⁶ hasta dar cabida a una función con un argumento indeterminado, la cual tiene una especificidad o particularidad respecto al tipo de uso que se le puede dar. Justamente, es en este punto que la distinción función argumento cobra importancia. Pero, para dar cuenta de todas las formas que son posibles expresar sobre un mismo contenido, el lenguaje siempre será escaso en alguna manera; luego es preciso hablar y trabajar sobre la noción de función indeterminada, pero definiendo una simbología determinada.

Para expresar las funciones, Frege establece una simbología particular, así como una forma que le permite al lector identificar que la función tiene uno o varios argumentos. Pues bien, para representar una función que tiene un argumento indeterminado A , se utiliza el símbolo $\Phi(A)$. Note que el argumento A va encerrado entre paréntesis. Este símbolo se utiliza para representar una función que está compuesta por un solo argumento indeterminado.

De igual modo si se hace referencia a una función que consta de dos argumentos indeterminados, se utiliza un símbolo similar $\Psi(A, B)$. En este caso, se muestra que la función

¹⁶ Como en el ejemplo del hidrógeno.

tiene dos argumentos indeterminados A y B . Los espacios donde se encuentran A y B son los lugares que ellos deben ocupar.

Para el caso en que los argumentos A o B , o ambos sean determinados ocurre lo mismo y se simboliza de la misma manera. Es importante aclarar, según lo expuesto anteriormente que $\Psi(A, B)$ es distinto de $\Psi(B, A)$. Causa de esto es que la posición es determinante a menos que la relación sea simétrica¹⁷. Para simbolizar funciones con más argumentos solo se agregan lugares dentro de los paréntesis, los cuales se separan entre sí haciendo uso de una coma.

Ahora bien, si lo que se quiere es afirmar algo sobre la función, Frege (1879/1972) establece un símbolo diferente. Así, si se tiene $\vdash \Phi(A)$ significa que “ A tiene la propiedad Φ ”. De forma análoga, el símbolo $\vdash \Psi(A, B)$ indicará que “ B está en la relación Ψ respecto a A ” o “ B es resultado de una aplicación del procedimiento Ψ sobre el objeto A ”. Nótese que con esto Frege está incorporando la simbología cuando se establece un juico sobre una función que puede tener uno o más argumentos, garantizando la verdad de lo que se enuncia, ya sea para un argumento determinado o para uno indeterminado.

Hay otro aspecto fundamental que se debe resaltar en la simbología incorporada por Frege: en la expresión $\Phi(A)$, el símbolo Φ que aparece en un sólo lugar, puede estar representando otras funciones del argumento A , con lo cual sería reemplazable por los símbolos Ψ o X . Es decir, se tendrían dentro de la relación Φ otra relación inmersa del argumento A , en otras palabras se predica sobre la función¹⁸. De aquí puede considerarse que Frege sube de nivel, pasa a un segundo nivel,

¹⁷ En términos modernos se dice que cumple con la condición: $\forall x, y \in A: xRy \rightarrow yRx$ siendo R la relación binaria sobre el conjunto A

¹⁸ Frege no lo hace de forma explícita, sin embargo podría pensarse así:

$$\Phi(\Phi(A)).$$

Haciendo la sustitución se tiene $\Psi(A)$, donde inmerso en el símbolo Ψ esta el argumento $\Phi(A)$ (que a su vez es función) de la función Φ .

ya no se habla de objetos sobre los que cae la función sino que se está hablando de la función en sí misma, lo que convierte esas relaciones y esas propiedades en argumentos.

Este punto se puede destacar en la medida en que sugiere que las relaciones se pueden comprimir y trabajar de forma más simplificada dentro del lenguaje; las relaciones se convierten en objetos y se predica sobre estas. Esto es lo que permite, en matemáticas, simplificar ciertas expresiones que no se podían en el lenguaje natural, las sube de nivel y las convierte en objetos. Por ello se dice que el lenguaje lógico de segundo orden es el lenguaje de la matemática. Esta postura se apoya en la consideración según la cual la matemática no trata de objetos sino de relaciones, sean funciones o propiedades.

1.6. Introducción de la letra gótica y los cuantificadores lógicos

Frege conecta la noción de función con la de juicio. Al respecto, afirma que siempre que se hace referencia a una expresión que se ha establecido como juicio, la combinación de símbolos que está a la derecha de $\vdash$ (símbolo del juicio), puede ser considerada como función de uno de los símbolos que en ella aparece. Aunque hace la aclaración de que para hacer explícita esta cuestión se va a utilizar una simbología diferente.

Así pues, Frege utiliza el símbolo $\vdash \phi(\alpha)$ para indicar que se enuncia un juicio sobre la función $\phi(\alpha)$, lo que significa que no importa cuál sea el argumento (por quién se sustituya α) siempre la función es un hecho.

Ahora bien, como se explicó antes, $\phi(A)$ puede ser una función y a su vez considerarse como el argumento de otra función. Para este último caso, el símbolo $\phi(A)$ se reemplaza por una letra

toma todos los posibles casos. La segunda es la barra del contenido que recoge el tipo de instancias concretas para que $\Phi(a)$ sea verdadero, es decir es la que valida a la función para un a determinado.

Conviene destacar los juicios a los que Frege hace alusión, en aras de resaltar la importancia de la expresión $\neg X(a)$ dentro de la combinación de símbolos, según como esta expresión se relacione con otras expresiones. Así pues, Frege hace notar que la expresión $\neg X(a)$ forma parte de los siguientes juicios:

$$\vdash \neg X(a) \quad \vdash \frac{A}{\neg X(a)}$$

El significado que se les puede asignar a estos es diferente del significado que adquiere $\neg X(a)$. Ciertamente, mientras que para $\neg X(a)$ el argumento a es arbitrario, para los dos juicios dados, el argumento a se restringe a las condiciones que validen el juicio, al tomar la totalidad de la combinación de símbolos en cada caso. Por otro lado, de estos juicios no se puede derivar juicios con menor grado de generalidad, como si es posible para el juicio $\vdash \neg \Phi(a)$.

En el caso del juicio $\vdash \neg X(a)$, como la barra de negación se halla en la barra del contenido para la función, con el argumento indeterminado, (es la barra que recoge todos los posibles casos), se niega el contenido de $X(a)$ en su generalidad. Pero esto no permite inferir, que no es posible encontrar y dotar de significado un elemento arbitrario Δ de tal suerte que al reemplazar a por Δ , $X(\Delta)$ sea un hecho.

De aquí se deduce que Frege, introduce lo que en la presentación moderna de la lógica clásica se conoce como los cuantificadores lógicos: cuantificador universal ($\forall$) y cuantificador existencial ($\exists$). De acuerdo a esto, las expresiones anteriores se pueden interpretar así: el juicio $\vdash \neg X(a)$ expresa la negación de que, para cualquier sustitución de a , $X(a)$ es siempre un hecho o que no todas las posibles sustituciones de a tienen la propiedad X^{20} . Esto equivale a afirmar $\neg \forall a (X(a))$,

²⁰ Esto es posible determinarse por la ubicación de la barra de negación, que se encuentra ubicada donde se tiene en cuenta todos los casos en que a dota de significado el juicio.

y por la equivalencia de la negación del cuantificador universal se obtiene $\exists a \neg (X(a))$, que se traduce en la afirmación que “existe al menos un a que no cumple $X(a)$ ”, lo cual no garantiza que hayan algunos que si cumplan con la propiedad.

Para el juicio $\vdash \neg X(a)$, por definición de condicionalidad no se da el caso donde $\neg X(a)$ se afirma y A se niega. Pero esto no indica que no ocurra el caso en que para un Δ dado la función $X(\Delta)$ se afirma y A se niega, pues de una implicación global no se puede inferir lo mismo que de una particular²¹.

No obstante, así como $\neg X(a)$ puede ser afirmada también puede ser negada. Esto se debe a que la forma de enunciarse permite que se sustituya a por cualquier cosa que cumpla o no las características de la función expresada. Así pues, el poner algo arbitrario en el lugar de a altera el significado del juicio. Por ello, se pretende delimitar el dominio al que hace referencia la generalidad indicada por a , y es dentro de dicho dominio que a adquiere un significado. Esta razón aclara porque en el juicio es necesario la concavidad y la letra gótica minúscula sobre esta. Estos dos caracteres son incorporados con el fin de delimitar el ámbito de predicación. En otras palabras, con ellos Frege quiere incorporar la diferencia entre una variable libre y una ligada.

Dentro de un mismo juicio se puede hacer referencia a la misma letra gótica para simbolizar los posibles argumentos para dos o más funciones, sin embargo, esto no implica que el significado que adquiere la letra gótica en una función se extienda a la otra. En otras palabras, una misma letra gótica puede aparecer en diferentes dominios con diferentes significados.

²¹ Para clarificar mejor esta idea, considere el siguiente ejemplo:

Todos los axiomas de Peano permiten formar todos los teoremas de la aritmética, no obstante, un solo axioma no permite obtener todos los teoremas de la aritmética.

Por otra parte, dentro de una letra gótica puede estar inmerso el dominio en el que se mueve otra letra gótica. Al simbolizar esto se deben escoger letras diferentes para que sea posible hacer la distinción entre ellas. Por ejemplo, si se tiene

$$\vdash^a \begin{array}{l} A(a) \\ B(a,e) \end{array}$$

Aquí la letra a aparece en los dos dominios. Si ella se reemplaza por otra letra permitida o determinada debe hacerse en todas sus ocurrencias por la misma letra. Al hacer el reemplazo debe escogerse una letra distinta a “ e ” para no confundir el ámbito de predicación de ellas. Estos reemplazos no afectan el contenido de la expresión.

Conviene sin embargo advertir, que es posible otras sustituciones de la letra gótica, bajo la condición que la concavidad esté estrictamente seguida de la barra del juicio, es decir que no haya otro símbolo entre ellas. Esto garantiza que el dominio de la letra gótica corresponda exactamente al contenido del juicio completo. Para Frege esta condición es relevante, y en virtud de ello introduce una abreviación que da cuenta de dicha condición, a través del siguiente juicio $\vdash^{X(a)}$: Como se observa, esta expresión introduce una letra latina en reemplazo de la gótica. Respecto a esta nueva simbolización del juicio, Frege señala que no es necesaria la concavidad en la barra del contenido, ya que la letra latina (a) designa el contenido del juicio completo y su respectivo ámbito, lo cual es posible cuando el dominio de la función ya está definido. A partir de este juicio también es válido sustituir en el sentido inverso: una letra latina por una gótica; pero al hacerlo se debe restituir la concavidad en seguida del juicio. Es decir, se vuelve al caso antes descrito de la expresión $\vdash^a \vdash^{X(a)}$, donde el uso de a es exclusivo para instancias de $X(a)$. Frege (1879/1972)

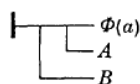
Dicho lo anterior, es pertinente examinar el siguiente juicio:

$$\vdash \vdash_A \Phi(a)$$

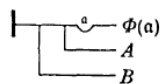
Para hacer la sustitución de la letra latina “ a ” a una gótica “ a ”, la concavidad debe restituirse en seguida de la barra del juicio, pero como el contenido de A no es afectado por el ámbito de

predicación de “ α ”, entonces el juicio anterior es equivalente a $\vdash \frac{\alpha \quad \Phi(\alpha)}{A}$. Esto se puede hacer ya que el dominio de A es un dominio libre; que es cercano a lo que hoy se conoce como variable libre. Ahora bien como ya se sabe este el caso de una condicionalidad y por tanto sea lo que fuese α , no es posible que se dé el caso para A afirmada y $\neg \alpha \quad \Phi(\alpha)$ negada. Esto aplica igual para $\Phi(\alpha)$ negada (α sustituyendo α) y A afirmada, por la equivalencia ya explicada.

Análogamente el siguiente juicio



Puede representarse haciendo explícito el dominio sobre el que se mueve la función, el cual es



simbolizado por la letra gótica α . Esto es $\vdash \frac{\alpha \quad \Phi(\alpha)}{A}$. Esta forma de representación indica que α no aparece en A y B ; ella sólo está en el argumento de $\Phi(\alpha)$ (o como se dice actualmente A y B son variables libres), lo cual se debe a la ubicación de la concavidad, pues ésta se encuentra solamente en la barra del contenido de $\Phi(\alpha)$. Una vez aclarado esto, se puede proceder a analizar el juicio en su totalidad, partiendo de la definición de condicionalidad y de los criterios del valor de verdad, de forma análoga a la realizada antes.

En resumen, lo que Frege quiere dar a entender es que el cambio de la letra α latina a α gótica en un determinado juicio, es válido sólo si se tiene presente las condiciones de la barra del contenido en la que cada símbolo interviene, para así colocar la concavidad. Es decir, que se pueda establecer que variables están ligadas al dominio delimitado por la concavidad y cuales no lo están (variables libres). Esto se puede seguir para juicios con más barras de condición y con juicios equivalentes²² a uno dado, pero manteniendo el significado.

²² Es decir aquellos que significan y representan lo mismo pero involucrando otros operadores lógicos.

1.6.1. Juicios relevantes en el análisis de Frege

A partir de estas condiciones, Frege procede a realizar ciertas combinaciones entre símbolos, para así otorgarles un significado según la estructura que conforma la formula en su totalidad. Por ejemplo, la expresión: $\vdash^a \neg X(a)$ significa que “existe un Δ para el cual se niega la propiedad $X(\Delta)$ ”. Note que la barra de negación está en la barra que recoge todo aquello que verifica que en cualquier circunstancia $X(a)$ es verdadero; es la barra que define el cuantificador ($\forall$). Y, como se dijo anteriormente, negar esto indica que “hay algunas cosas que no satisfacen la propiedad X ”.

Así mismo, Frege hace alusión al caso de la expresión $\vdash^a \neg X(a)$, la cual es evidentemente diferente de la anterior, pues en este caso la barra de negación está ubicada en la barra del contenido que recoge el tipo de instancias concretas para que $X(a)$ sea verdadero. Es decir, en este caso se niega un existencial ($\exists$). En términos de una de las posibles interpretaciones modernas, este juicio corresponde a la expresión $\neg \exists a (X(a))$; y, por la equivalencia de la negación del existencial, se tiene $\forall a \neg (X(a))$, que afirma que “ningún a tiene la propiedad X ”²³.

Otro caso al que hace referencia Frege es el de la expresión $\vdash^a \neg \Lambda(a)$. Para explicar su significado él se remite al ejemplo $\neg^a \vdash \Lambda(a)$ ²⁴ (explicado antes) el cual en la lógica clásica se expresa de manera directa como $\forall a (\neg \Lambda(a))$, y afirma que “no existen ningún a que cumpla con la propiedad Λ ”. Ahora, si se niega este último, como sucede en el caso de la expresión $\vdash^a \neg \Lambda(a)$, se obtiene que “existe Λ ” que satisface esa propiedad. En una de las posibles interpretaciones modernas el resultado de esta expresión es equivalente al de una doble negación y se expresa como $\neg \forall a (\neg \Lambda(a))$ o de forma equivalente $\exists a (\Lambda(a))$.

²³ Frege utiliza el término “anything” que es una traducción al inglés, para referirse a los términos “nada” o “ningún”, pero no en un sentido absoluto, sino que hace referencia a estos términos dentro de un dominio definido. Dicho dominio es delimitado por la concavidad y la letra gótica a .

²⁴ Este ejemplo coincide con el caso $\vdash^a \neg X(a)$, con la diferencia que para expresar la propiedad X en este caso utiliza el símbolo Λ . No obstante, en esencia X y Λ significa y se comporta igual dentro del juicio.

A continuación, conviene hacer énfasis en el siguiente juicio: $\vdash^a \begin{array}{l} P(a) \\ \neg X(a) \end{array}$. Como se observa, en este caso se establece la condicionalidad entre funciones, y para el cual la definición de condicionalidad se mantiene. Cabe notar que en este juicio la concavidad está antes de la condicionalidad, es decir que la letra gótica (α) influye en el alcance o ámbito que se le atribuye a $P(\alpha)$ y $X(\alpha)$. Por tanto, si hay algo que cumple la propiedad X entonces también cumple la propiedad P , o dicho de otra forma “todo X es un P ”.

Al corresponder este juicio con una condicionalidad, no va ser posible dar un rango de valores a α de tal forma que $X(\alpha)$ se afirme y $P(\alpha)$ se niegue. Para que se puedan cumplir los casos en que se certifica la verdad de la condicionalidad²⁵, se debe dar un rango de valores para α de tal forma que se cumpla las condiciones.

Otro caso que es importante para Frege es el del juicio siguiente:

$$\vdash^a \begin{array}{l} P(a) \\ \neg \Psi(a) \end{array}$$

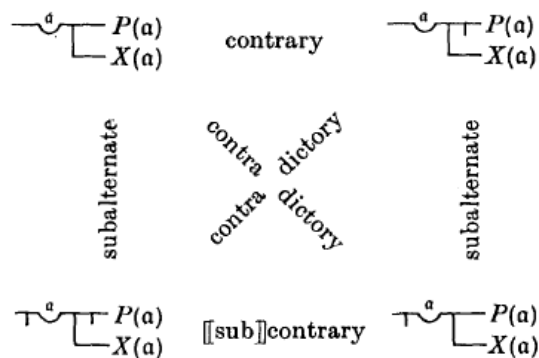
Aquí la barra de negación está en la barra del contenido de $P(\alpha)$. A partir de ello por definición de condicionalidad, no es posible dar un rango de valores de α para $\Psi(\alpha)$ y $P(\alpha)$ afirmadas. Esto lleva a decir: lo que tiene la propiedad $\Psi(\alpha)$ no lo cumple la propiedad $P(\alpha)$. En otras palabras, “ningún Ψ es P ”. En una de las posibles interpretaciones modernas el juicio dado se expresa así: $\forall \alpha (\Psi(\alpha) \rightarrow \neg P(\alpha))$.

²⁵ Los casos de los que se habla corresponden con las cuatro formas posibles de combinar los valores de verdad en la definición de condicionalidad.

Otro juicio que conviene analizar es el siguiente $\vdash^a \frac{P(a)}{A(a)}$. En este se está negando $\neg^a \frac{P(a)}{A(a)}$, y como se dijo anteriormente, esta expresión afirma que “todo A es un P ”; pero, por la barra de negación, equivale a afirmar que “algunos A no son P ”. En aras de la claridad, y según una de las posibles interpretaciones modernas este juicio se expresa así: $\neg \forall_{A,P} (A(a) \rightarrow P(a))$ y, por ley de De Morgan $\exists_{A,P} \neg(A(a) \rightarrow P(a))$, por definición de condicionalidad $\exists_{A,P} \neg(\neg A(a) \vee P(a))$, nuevamente por ley de De Morgan $\exists_{A,P} (A(a) \wedge \neg P(a))$. Lo anterior afirma “existen algunos A que no son P ”.

Del mismo modo, es preciso analizar la expresión del juicio $\vdash^a \frac{P(a)}{M(a)}$, la cual niega el conjunto de ideas $\neg^a \frac{P(a)}{M(a)}$. Como se observó antes, este último afirma que “ningún M es P ”; pero, en virtud de la negación, el juicio anterior expresa que “algunos M son P ”, entendiéndose la palabra “algunos” como el caso que incluye al menos uno. Este caso, según una de las posibles interpretaciones modernas, se puede interpretar así: $\neg (\forall_{M,P} (M(a) \rightarrow \neg P(a)))$; de manera análoga, como se hizo en el juicio anterior, aplicando las equivalencias lógicas respectivas se obtiene $\exists_{A,P} (A(a) \wedge P(a))$, lo que satisface la afirmación “algunos M son P ”.

Como síntesis de lo expuesto anteriormente con respecto a los 4 últimos juicios, Frege obtiene el siguiente cuadro de oposiciones lógicas:



Para comprender este cuadro, se analiza cada correspondencia entre las combinaciones de ideas que dan forma a los juicios.

$\neg \forall x (X(x) \supset P(x))$ es contrario a $\forall x (X(x) \supset P(x))$. El primero expresa “todos los X son P ” y el segundo “ningún X es P ”. En este sentido, son contrarios porque la palabra “Todos”, en este contexto, garantiza que lo que se enuncia es de carácter universal, y el término “ningún” hace referencia a la negación absoluta. Para la expresión $\exists x (X(x) \supset P(x))$ que afirma “algunos X son P ” y la expresión $\neg \exists x (X(x) \supset P(x))$ que afirma “algunos X no son P ”, Frege los declara como sub-contrarios (contrarios parcialmente), puesto que dejan abierta las posibilidades de que “algunos X sean P ” y que “algunos X no sean P ” respectivamente.

El caso de la expresión $\forall x (X(x) \supset P(x))$ la cual afirma “todos los X son P ”, con respecto a la expresión $\exists x (X(x) \supset P(x))$ que afirma “algunos X son P ”, son subalternas; ya que el primero hace referencia a la atribución de una propiedad de forma universal y el segundo es un caso de afirmación existencial, es decir, es una afirmación particular del universal. Lo mismo ocurre para las expresiones $\forall x (X(x) \supset P(x))$ con respecto a la expresión $\neg \exists x (X(x) \supset P(x))$, las cuales afirman que “ningún X es P ” y “algunos X no son P ” respectivamente. La explicación es análoga a la anterior.

Ahora la expresión $\forall x (X(x) \supset P(x))$, es contradictoria con $\neg \exists x (X(x) \supset P(x))$ por el hecho de que la primera afirma que “todos los X son P ”, mientras que la segunda “algunos X no son P ”. En esto consiste la relación de contradicción. Mientras en el primer caso asegura que todos los X cumplen una propiedad P , en el segundo se afirma que existen algunos que no la cumplen. Lo mismo se tiene para los casos $\neg \forall x (X(x) \supset P(x))$ y $\exists x (X(x) \supset P(x))$. Mientras en el primero se garantiza que “ningún X es P ”, en el segundo se afirma que “hay algunos X que sí son P ”.

Hasta aquí se ha mostrado la notación conceptual que Frege elabora, donde se evidencia la preocupación que él tenía por proporcionar primero que todo un lenguaje riguroso, lo cual se infiere de su forma particular de verificar la validez de las cadenas de razonamiento, en las que en lo posible se eliminan las ambigüedades provenientes del lenguaje natural.

Así mismo, la construcción de esta notación deja entrever la convicción que tiene Frege en tomar a la lógica como la ciencia fundamental para la formalización de la matemática. Por tanto, es conveniente precisar por qué la lógica es la ciencia que permite postular y proveer de rigor a la definición de número natural y, en consecuencia, fundamentar la aritmética. Este objetivo hace parte de su programa logicista, el cual se concreta en su segundo libro *Die Grundlagen der Arithmetik*, del cual se ocupa el siguiente capítulo.

CAPITULO 2

2. FORMULACIÓN DE LA TESIS LOGICISTA: DEFINICIÓN INFORMAL DE NÚMERO.

Introducción

Una vez construido y expuesto su lenguaje de fórmulas en el libro *Begriffsschrift*, con el fin de formalizar la lógica, Frege en el año de 1884 publica su libro *Die Grundlagen der Arithmetik*, en el que expone y crítica las concepciones empiristas, psicologistas y formalistas sobre los números (naturales) y las leyes aritméticas que hasta ahora se habían formulado. En particular, él se plantea la pregunta sobre la naturaleza de los números naturales, pues a su juicio no había un acuerdo claro a este respecto, e incluso algunas afirmaciones resultaban contrarias entre sí.

Estas críticas buscaban mostrar la inexactitud que provenía de estas formas de considerar los números, y así justificar la necesidad de una nueva postura. De modo que, en este libro él da algunas definiciones importantes en lo que respecta a la definición de número, pero lo hace de manera informal, apelando sólo al lenguaje natural. Este lenguaje le permite finalizar su libro enunciando su tesis logicista, la cual sostiene en síntesis que “la aritmética se reduce a la lógica”, de manera más precisa que “las leyes de la aritmética se pueden derivar de principios lógicos universales”.

En este sentido, este libro provee una mirada amplia de lo que Frege concibe por número, en un sentido general, y cómo los números deben ser fundamentados. Para tal efecto, este estudio se centra en el capítulo *Los Fundamentos de la Aritmética*²⁶.

2.1. Algunas consideraciones sobre la fundamentación de los números.

La segunda mitad del siglo XIX fue un período de importantes contribuciones dentro de las matemáticas, pues se dan nuevos aportes al álgebra y a la consolidación del análisis, y se empieza a priorizar el rigor y la formalización matemática²⁷; no obstante, faltaba definir con precisión la naturaleza de los dominios numéricos que las ciencias empleaban. Por ejemplo, aún no se había logrado a cabalidad una aritmetización del análisis.

Pues bien, lo que antes se consideraba evidente por sus diversas aplicaciones, ahora se les exige una demostración y, por tanto, una definición más precisa que delimite su validez. Esto da relevancia al proyecto de fundamentar la noción de número, es decir definir las leyes básicas que cimientan la aritmética.

Esta preocupación lleva a que Frege enfoque su programa logicista en la pregunta sobre la naturaleza de las proposiciones y los objetos de la aritmética; su objetivo principal era entonces contribuir al proyecto fundacional de las matemáticas. En este sentido, él estaba al corriente de los principales debates y concepciones que tenían sus antecesores sobre los objetos y conceptos matemáticos; pero, según él, en ninguna de estas concepciones se daban criterios claros que permitiera garantizar la verdad de los teoremas aritméticos, ni determinar a cabalidad lo que debía entenderse por número.

²⁶ El texto de apoyo es la traducción en español de Mosterín (en *Escritos Filosóficos*) de *Los Fundamentos de la aritmética* (*Die Grundlagen der Arithmetik*) de Frege, y se toman como apoyo algunas otras traducciones (al inglés, por ejemplo) e interpretaciones de esta obra.

²⁷ Algunos de estas contribuciones son: el surgimiento de las geometrías no euclidianas, la teoría general de los números complejos, la teoría de números transinfinitos de George Cantor, entre otros.

En relación a las clásicas concepciones sobre la noción de número, Frege plantea algunas discusiones, matemáticas y también filosóficas, que muestran las dificultades que presentan dichas concepciones. Para empezar, él hace alusión a aquellas concepciones que aluden a la demostrabilidad de las fórmulas numéricas. En este sentido, él retoma las opiniones de autores clásicos como Kant, Leibniz, H. Grassmann y H. Hankel y Mill.

Para Kant, las fórmulas numéricas no son demostrables cuando se trabaja con números pequeños, ya que estas son dadas por la intuición; pero sí es posible hacerlo con números grandes; la dificultad de esta consideración es que no se puede delimitar específicamente a partir de qué número se puede tomar como grande. Los otros autores, por su parte, defienden la idea de que las formulas numéricas son demostrables en su totalidad y, además, cada uno tiene su manera de hacerlo, aun cuando coinciden en ciertos aspectos.

Leibniz sostiene que todas las formulas numéricas pueden ser probadas mediante definiciones y un axioma dado²⁸. Sin embargo, estas definiciones reducen el conjunto de los números al uno y a la suma iterada del uno, lo que supone que cada número debe ser definido a partir del anterior a él. Esta forma de demostrar, según Frege, es adecuada pero como se observa en el procedimiento de la nota al pie de página n° 28 al suprimir el uso de los paréntesis, dicho procedimiento oculta un caso particular de lo que se conoce como la ley asociativa, la cual hasta ese entonces carecía de fundamento (no había sido demostrada).²⁹

²⁸ Leibniz demuestra que $2 + 2 = 4$, utilizando las siguientes definiciones:

“Def. 1: 2 es 1 y 1

Def. 2: 3 es 2 y 1

Def. 3: 4 es 3 y 1”

.. y el siguiente Axioma: ... “Si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste.

Prueba: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$, luego por el axioma $2 + 2 = 4$ ”. (Frege, 1884/1996. p. 46).

Def. 1. Def. 2. Def. 3.

²⁹ EL procedimiento en la prueba dada por Leibniz, a juicio de Frege (1884/1996), para mantener la formalidad debía ser escrito así:

“ $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$ luego se tiene que $(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$. Aquí falta un enunciado $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$ que es un caso especial de $a + (b + c) = (a + b) + c$. (p. 47). La cual coincide con la ley asociativa.

La idea de Leibniz coincide con la de H. Grassmann y la de H. Hankel. Aunque Grassmann, 1860, citado por Frege (1884/1996), intenta formalizar la prueba que hace Leibniz, definiendo la suma $a + b$ de la siguiente manera: “Si a y b son dos miembros cualesquiera de la serie básica, se entiende por la suma $a + b$ aquel miembro de la serie básica para el cual vale la formula $a + (b + e) = a + b + e$. Aquí e significa la unidad positiva”. (p. 48). Con esta definición, Grassmann pretende fundamentar la ley: $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ que es un caso particular de la ley asociativa. Alrededor de esto, según Frege, surgen algunas incoherencias, una de ellas es que se define la suma a partir de ella misma; otra es que la definición dada presupone la existencia de dos casos inusuales: que la suma $a + b$ dé como resultado vacío, al no ser posible encontrar un miembro en la serie que cumpla la formula enunciada en la definición; y, que la suma $a + b$ no sea única, es decir, es posible encontrar varios miembros de la serie que cumplen dicha fórmula. Por tanto, al no demostrar la inexistencia de estos dos casos, se deja en evidencia una falta de rigor.

Mill por su parte tiene una concepción algo distinta a los anteriores autores. Él define los números de la misma forma que lo hace Leibniz, e incluso cae en el mismo error de la omisión de los paréntesis, pero su particularidad se halla en la convicción de que todo saber es empírico. Esto significa, en el caso de Mill, que las expresiones y formulas no sólo poseen un significado, sino que ellas afirman un hecho observado (físico). Los hechos a los que Mill se refiere no son arbitrarios, sino que, en el caso de los números, ellos responden a una configuración sensible específica para cada número, pues si se establece una ley general para todos se perdería lo que caracteriza a cada uno. Frege acota que Mill sólo dio cuenta del caso del número 3. Pero además añade que, al dotar de significado los números mediante la observación, no es posible establecer la verdad o falsedad de lo que se enuncia, sino que sólo permite determinar el contenido al cual se refiere, es decir se hace una afirmación psicológica.

De lo anterior, Frege deduce que las formulas numéricas se pueden obtener únicamente de las definiciones de cada uno de los números y con el apoyo de algunas leyes generales sin que su

validez se vea restringida a hechos observados. Esto conduce a la pregunta por la naturaleza de estas leyes. Al respecto él afirma que es preciso hacer una distinción entre las aplicaciones y la referencia de las leyes³⁰, y no como lo hace Mill que las concibe indistintamente. Las aplicaciones determinan, en su particularidad, los casos en que las leyes pueden ser aplicadas; por su parte la referencia abarca en general el significado de la ley. Según Frege, la ausencia de esta distinción lleva a Mill a considerar las leyes aritméticas como verdades inductivas; pero como no es posible dar cuenta de un hecho observable que agrupe todas las posibles formas que abarca cada ley, se pierde la uniformidad y la garantía de lo que se enuncia. Por tanto, en la línea de Mill, no se puede obtener una conclusión general que garantice la verdad de los enunciados matemáticos.

En este sentido, para Frege (1884/1996) las leyes aritméticas deben ser deductivas, es decir que a partir de enunciados generales se deduzcan las formulas numéricas. A partir de las particularidades de cada número, no es factible deducir de ellos las leyes aritméticas generales. Esto sólo es posible si se cuenta con un concepto general de número.

Frege concluye entonces que estas leyes generales de la aritmética son analíticas *a priori* y no son, como Kant afirma, sintéticas *a priori*. Él argumenta que para acceder a ellas no es necesario apelar a la intuición; y aun cuando dichas leyes tienen aplicabilidad en el mundo exterior, ellas no son justamente propiedades de las cosas externas. En otras palabras, estas leyes se fundan en la forma lógica que determina la validez de las pruebas, la cual es ajena e independiente del pensamiento del sujeto. Mientras que la intuición, que es el principio de conocimiento para lo sintético *a priori*, requiere de lo sensible como condición de posibilidad. Esta condición lleva a concebir las leyes a partir de representaciones individuales, las cuales traen consigo un carácter subjetivo y carecen del rigor requerido.

³⁰ Frege (1884/1996) hace alusión al siguiente ejemplo:

Si se tiene la expresión $5 + 2 = 7$, no se puede decir que el significado de ella es verter sobre 5 volúmenes de un líquido 2 volúmenes del mismo, y obtener así 7 volúmenes del líquido. Este caso sólo indica una de las muchas aplicaciones que tiene la expresión.

Con relación a lo anterior Frege declara lo siguiente:

Las verdades de la aritmética serían entonces a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Cada una de ellas contendrían concentrado en su interior todo un encadenamiento deductivo para usos futuros, y su utilidad consistiría en que ya no hubiera que hacer las deducciones por separado, sino que se podría expresar de golpe el resultado de toda la cadena... ya no se podrá sostener, evidentemente, el menosprecio, tan ampliamente difundido, hacia los juicios analíticos y la leyenda de la esterilidad de la lógica pura. (1884/1996, p. 60-61).

En este párrafo Frege destaca el carácter *a priori* de los principios o leyes generales de la aritmética: ellos son juicios analíticos o productos liberados por la lógica pura. Esta perspectiva se declara en franca oposición a la tradición kantiana.

2.1.1. La naturaleza de los números naturales

Una vez Frege ha establecido la naturaleza de las leyes aritméticas, él procede a estudiar la naturaleza de los objetos primarios de la aritmética, es decir de “los números naturales”. Pero para ello, primero trae a colación algunas opiniones, diferentes entre sí, de ciertos autores en relación al concepto de número.

Por ejemplo, Hankel opina que los números naturales no son definibles; Leibniz expresa que la idea de número natural es tan clara que no necesita demostración. Otros autores como Newton, Cantor, Schroder, Mill y Baumann intentan dar una definición de ellos. Newton da una definición de número la cual, según Frege, los define en un sentido amplio del término; Newton, admite los conceptos de magnitud y de relación entre magnitudes, y por tanto de igualdad de longitudes. Y, aun cuando es posible definir magnitud sin apelar al concepto de número en Newton, esto implicaría que se restrinja sólo a una definición geométrica. El problema, según Frege, radica en que no es evidente que una definición geométrica de número pueda dar cuenta de una definición

aritmética de él. Para Frege los números reales poseen una naturaleza distinta a la de los naturales. Cantor, por su parte, defiende una postura empirista estableciendo que el número surge únicamente al hacer una abstracción de los objetos del mundo exterior. Shroder tiene una postura algo similar a la de Cantor, pues piensa que el número es extraído de la realidad, pero, a diferencia de él, esto se hace mediante la representación de las unidades, donde toma el número como una propiedad de las cosas en el mismo sentido de la forma y el color. Mill considera que el número es algo físico, en la medida en que su nombre (forma en que se designa 1, 2, 3...) es una propiedad de la totalidad de las cosas que se han designado bajo él. Esto caracteriza tanto la forma de constituirse como de descomponerse en partes. Baumann por su parte, en contra de lo anterior, afirma que los números no son conceptos que surgen de las cosas externas, puesto que, según él, estas últimas carecen de rigurosidad; según la forma cómo se conciben, las cosas llevan inmersas una multiplicidad (un mismo objeto externo puede ser definido de diversas maneras).

En relación con estas concepciones, Frege argumenta que es un error considerar los números como cosas externas, ya que esto abre la posibilidad de asignar varios números a un mismo objeto, y por tanto, a dicho objeto no le corresponde en rigor ninguno de esos números. Análogamente él no acepta que estos puedan ser propiedades de las cosas, como sí puede serlo el color y la forma. Esto en virtud de que con el número no se puede ofrecer una caracterización de esos objetos. En palabras de Frege (1884/1996): “El número no puede ser imaginado ni como objeto autónomo, ni como propiedad de una cosa externa, porque ni es algo sensible ni tampoco propiedad de una cosa externa”. (p. 101).

Para precisar sus ideas, Frege afirma que los números son objetivos, ellos son independientes de las imágenes que el sujeto se representa al referirse a ellos; al respecto hace la aclaración de que lo objetivo es distinto de lo palpable, de lo espacial o de lo real. De este modo, entre color y número existe una similitud: ambos son objetivos. Sin embargo, el color es perceptible a través de los sentidos, el número no lo es. Ahora bien, Frege debe especificar lo que entiende cuando habla de objetividad; si lo objetivo hace alusión a lo conceptual y enjuiciable, entonces es independiente de las sensaciones, intuiciones e imágenes que una persona se hace, de las representaciones

internas que se dan a causa de los recuerdos de sensaciones anteriores. Sin embargo, lo objetivo no es independiente de la razón, puesto que no es posible definir lo que son las cosas sin apelar a la razón.

En consecuencia Frege, sostiene que:

El número no es ni espacial ni físico, como los montones de guijarros o de nueces de Mill, ni tampoco es subjetivo, como las imágenes³¹, sino no sensible y objetivo. El fundamento de su objetividad no puede radicar en las impresiones sensoriales, que, en cuanto afecciones de nuestra mente, son completamente subjetivas, sino que sólo puede radicar, hasta donde alcanzo a ver, en la razón. (1884/1996, p. 72).

Así mismo, Frege considera que definir los números como conjuntos o pluralidades de cosas no es favorable, pues con ello los números 0 y 1 se excluyen del concepto número, a causa de que esto está más relacionado con montones y agrupamiento de cosas. Además, se debe precisar qué tipo de objetos son los que deben formar esos conjuntos, puesto que hay un desacuerdo en este aspecto. Mientras unos afirman que estos corresponden a cosas (como objetos causales), otros consideran que son unidades. Alrededor de la primera afirmación destaca que no se puede introducir nombres a los conjuntos de objetos, como se pretende hacer con los números, si estos no tienen un componente común que dé cuenta por medio de las denominaciones lo que es el número en sí mismo. Por ejemplo, según Frege, de los nombres de los conjuntos: 3 estrellas y 3 dedos, no es posible obtener la idea del número 3, pues no hay un componente común que dé cuenta de lo que es en general el número 3. Por tanto, es indispensable reconocer la peculiaridad de los números. En relación a la segunda afirmación, Frege considera necesario hacer una discusión detallada, de tal forma que se pueda establecer la noción de “unidad”.

³¹ Es importante aclarar que Frege hace la anotación de que las imágenes se dividen en dos tipos: las subjetivas y las objetivas. Las primeras hacen referencia a las leyes psicológicas, tienen un carácter sensible y, por tanto son demostrables de diferentes formas según el sujeto. Las segundas, son aquellas que pertenecen a la lógica, se dividen en objetos y conceptos; en lo fundamental son no sensibles y su demostración es única. Sin embargo, en el texto sólo utiliza el término imagen cuando se refiere a las imágenes subjetivas Frege (1884/1996).

2.1.1.1. Interpretación de los términos “unidad” y “uno”

En relación a la afirmación del número como conjunto de unidades, Frege destaca a Euclides como representante de esta afirmación. Euclides en su libro 7° de los *Elementos*, define al número como una reunión de unidades, y según Frege (1884/1996), la palabra unidad en Euclides “...Se refiere a un objeto que hay que contar, como a una propiedad de un objeto tal, o bien al número uno”. (p. 74). De modo que, Frege examina lo que debe entenderse por “unidad” y por “uno”. Él primero critica la idea de Schröder, (1873), citado por Frege (1884/1996), que afirma: “cada una de las cosas que hay que contar se denomina unidad”; aunque desde la forma lingüística esto podría ser una definición adecuada de número, según Frege, al considerar las cosas como unidades y a “uno” como un calificativo, se tendría entonces que la unidad es un objeto al que se asigna la propiedad “uno”. Sin embargo, por lo expuesto anteriormente, en relación con la concepción de que el número es una propiedad de las cosas, Frege afirma que esto no es correcto y añade otras razones: para Frege sería inconcebible que cada cosa tiene la propiedad “uno” y qué se pueda asignar a cada una de ellas. Además, no se cuenta con una definición precisa de lo que significa tener la propiedad “uno”.

Esta forma empírica de considerar a la unidad, supone además que en el acto de contar se le atribuye cierta igualdad a las cosas que se cuentan³². ¿Son las unidades en realidad iguales? Para dar solución a esta pregunta, Frege debe aclarar bajo qué condiciones es pertinente contar. Al respecto destaca que primero se debe tener presente que las propiedades que diferencian las cosas no tienen nada que ver con el número que se les asigna. En efecto, si se suprimen todas las peculiaridades que permiten diferenciar las cosas entre sí, se obtiene un concepto general bajo el cual caen esas cosas, indistintamente de la cantidad y las características de las cosas que caigan bajo él. Éste sigue siendo sólo un concepto³³. Pero ello no implica que las cosas distintas se hayan hecho iguales, puesto que si fuera así sólo se obtendría una cosa, y quedaría eliminada la pluralidad

³² Al contar los objetos se consideran unidades, agrupándolos en un todo sin considerar sus características particulares.

³³ A manera de ejemplo Frege propone suponer un gato negro y otro blanco; si se elimina todo aquello que los diferencia se obtendría pues el concepto “Gato”. Los dos primeros tienen el mismo derecho de caer en el concepto y llamarles unidades, sin que por ello dejen de mantener sus características. El concepto así obtenido, por medio de la abstracción, aun cuando no incluye las peculiaridades sigue siendo sólo un concepto.

por falta de la diversidad. Por lo anterior y aludiendo a Schröder, Frege deduce que el acto de contar es pertinente sólo cuando se tienen objetos que puedan distinguirse entre sí.

Ahora bien, si a cada objeto que se quiere contar se designa con la notación “1”, entonces se estaría ante un desacierto, debido a que lo distinto toma el mismo signo. Al contrario, si mediante este signo se quiere hacer notar las diferencias de los objetos esto no serviría para la aritmética, pues se perdería la unicidad del “1”. Esto sugiere que las unidades deben tener a la vez dos propiedades: la igualdad y la diferenciabilidad. Pero, por lo dicho anteriormente, esto conlleva a una dificultad, la cual Frege expresa así:

Si queremos producir el número como reunión de diversos objetos, obtendremos un amontonamiento que contiene los objetos precisamente con aquellas propiedades que los hacen distintos entre sí, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos constituir el número como reunión de lo igual, el resultado acaba por ser siempre el uno, y nunca alcanzamos una pluralidad. (Frege, 1884/1996, p. 83).

En este sentido, se debe establecer una diferencia entre unidad y uno: la unidad se refiere a las cosas que se deben contar, de modo que lleva inmerso la diversidad de ellas; el uno es el nombre propio de un objeto en la investigación matemática, que hace referencia a sólo uno, es decir es único; por tanto, no admite lo plural. Cuando se hace la agrupación o unión de las cosas para pasar a la adición aritmética, la unidad se transforma en el nombre propio “uno”, con lo cual se puede mantener la unicidad del “1”, y por tanto su igualdad. En consecuencia, con la unidad, lo diverso llega a ser igual.

No obstante, para Frege, definir los números por reunión de “unos” carece de sentido. Para precisar esto, él hace alusión a los números en el contexto de un juicio, y que llega a la convicción de que en un mismo suceso o hecho se puede hacer referencia a lo mismo, estableciendo diferentes

conceptos. A estos conceptos se les asigna diferente denominación³⁴, con lo cual Frege sostiene que asignar un número significa afirmar algo sobre un concepto. Esta asignación debe ser independiente del punto de vista del sujeto.

Es importante resaltar que los números se encuentran en los conceptos y se pueden “obtener” mediante la abstracción de las cosas, pues en los conceptos está el soporte ontológico de los números, y no en la cosa en sí misma. Así pues, sobre el concepto cae todo lo externo, interno, espacial, temporal, lo no espacial y lo atemporal. En palabras de Frege (1884/1996):

...De que a la misma cosa pueden corresponderles diversos números, se explica por el hecho de que en ellos se tomaban objetos como soportes del número. Tan pronto como instalamos en sus derechos el verdadero soporte, el concepto, los números se muestran tan exclusivos entre sí como los son los colores en su campo.

También vemos como se llega a la idea de querer obtener el número por abstracción de las cosas. Lo que se obtiene así es el concepto, en el cual se descubre el número. Por esto es frecuente que la abstracción preceda de hecho a la formación de un juicio numérico.

... Los números solo se asignan a los conceptos, bajo los cuales caen lo externo y lo interno, lo espacial y lo temporal, lo no espacial y lo atemporal. (p. 92)

Esta consideración fundamenta el hecho de que el concepto delimita en general lo que cae bajo él.³⁵ Por consiguiente, un mismo objeto no se da varias veces, sino que hay varios objetos que caen en el concepto. En este sentido, es necesario hacer la distinción entre las propiedades que se afirman de los conceptos, con relación a las características que los componen: las últimas son propiedades que se atribuyen a los objetos que caen bajo el concepto, y no son propiedades del concepto. Ahora, la existencia sí es una propiedad del concepto y no de los objetos que caen bajo él. Esto se hace evidente en el enunciado: no existe ningún triángulo rectángulo, rectilíneo y

³⁴ Frege (1884/1996) alude al siguiente ejemplo: “Frente al mismo fenómeno exterior puedo decir, con igual verdad: ... -Aquí hay cuatro compañías- y -Aquí hay 500 hombres-, en tal caso no se modifica ni lo individual, ni la totalidad”. (p. 90).

³⁵ Frege (1884/1996) expone que si se tiene el concepto “letras de la palabra dos”, los objetos que caen bajo el concepto, son “d”, “o” y “s”; en cambio, si el concepto dado es “sílabas de la palabra dos”, sólo cae bajo él la palabra “dos” en su totalidad y no sus partes.

equilátero. Este enunciado determina una propiedad del concepto “triángulo rectángulo, rectilíneo y equilátero”; sin embargo rectángulo, rectilíneo y equilátero son propiedades que corresponden a los objetos que caen bajo el concepto, pero no son propiamente del concepto.

De igual forma, Frege abre la posibilidad de que bajo un concepto dado puede caer otro de menor nivel. Él argumenta que, por ejemplo, se puede formar un concepto que agrupe todos los conceptos bajo el que sólo cae un objeto. Así pues, a través de la idea de concepto, Frege (1884/1996) define la unidad atribuyéndole a ésta las características de delimitación e indivisibilidad: “Unidad con relación a un número finito solamente la puede constituir un concepto tal que delimite claramente lo que cae bajo él y que no admita ninguna división arbitraria”. (p. 96). Con ello la unidad se reduce a definir el concepto adecuado.

2.1.2. Definición informal de los números naturales

Con base en esta línea de argumentación, Frege formula por medio de afirmaciones sobre conceptos la definición de número cero, uno y la relación sucesor que permite obtener el dominio total de los números naturales.

A un concepto le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea a , vale con toda generalidad el enunciado de que a no cae bajo este concepto.

De manera similar podría decirse: a un concepto F le corresponde el número 1, cuando, sea lo que sea a , no vale con toda generalidad el enunciado de que a no cae bajo F , y cuando de los enunciados “ a cae bajo F ” y “ b cae bajo F ” se sigue con toda generalidad que a y b son el mismo.

Solo falta definir el paso de un número al siguiente... al concepto F le corresponde el número $(n + 1)$ cuando existe un objeto a que cae bajo F y tal que al concepto “que cae bajo F , pero no a ” le corresponde el número n . (1884/1996, p.98-99).

Sin embargo, estas definiciones son limitadas pues con ellas no le es posible a Frege decidir qué es y qué no es un número, ni le permite determinar con precisión el número que le corresponde al concepto, ni mucho menos demostrar qué es $a = b$ cuando a un mismo concepto le corresponde el número a y el b . En general, no es posible probar la identidad entre números. De modo que, en el contexto de estas definiciones, él debe fijar el sentido de las ecuaciones numéricas. Para ello, primero debe fijar la forma general que permita establecer la identidad entre números; de este modo, él parte de la idea de que la relación de igualdad no solo se presenta entre los números, y que el concepto de igualdad ya ha sido dado. Por tanto, Frege retoma el concepto de identidad de Leibniz, de tal suerte que a partir de éste, él pueda determinar cuándo dos números deben ser considerados idénticos: “Dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin perjuicio de la verdad”. (Frege, 1884/1996. p. 106). De lo cual infiere que es en la sustituibilidad que están contenidas todas leyes de la identidad.

Estas consideraciones le permiten a Frege precisar la definición de la identidad numérica, a través de una relación biyectiva entre los objetos que caen bajo dos conceptos F y G. Esto conduce a la afirmación según la cual si se da la biyectividad entonces el concepto F será equinómico con el concepto G. Él excluye del significado del término equinómico, lo que éste denota lingüísticamente.

Con relación a lo anterior, Frege (1884/1996) aclara que “el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto³⁶ ‘equinómico al concepto F’ ” (p. 109). Por tanto, la validez del enunciado “al concepto F le pertenece el mismo número que al concepto G” se garantiza si y sólo si la extensión de los conceptos “equinómico al concepto F” y “equinómico al concepto G” son iguales.

³⁶ Mosterín (1996) expone que aun cuando Frege no da una definición exacta de la noción de extensión de un concepto, se puede interpretar que él la concebía como “La clase de todos los objetos que caen bajo ese concepto”. (p. 16).

Hasta este punto para Frege la relación de biyectividad podría ser pensada como una idea intuitiva, de modo que puntualiza lo que a su juicio se debe entender por esta. Al respecto él afirma que, dentro del contenido de un juicio, dos objetos a y b pueden aparecer correlacionados si son enlazados mediante un concepto, denominado *concepto relacional*, el cual, pertenece también a la lógica pura. La forma general de expresar esto es: a está en la relación Φ con b . Por ejemplo, Frege explica que, en el enunciado “La tierra tiene más masa que la luna”, tierra y luna aparecen correlacionados entre sí por medio del *concepto relacional*: “tener más masa que”. El cual por sí solo no tiene sentido.

A partir de esto, Frege explica que los objetos de dos conceptos F y G están correlacionados por medio de una relación Φ , si todo objeto que cae bajo F se relaciona con uno de G , y para todo objeto que cae bajo G está en la relación Φ un objeto que cae bajo F . Nótese que en la definición, las extensiones del concepto F y G ³⁷ están enlazadas por medio de un *concepto relacional*, de igual manera como sucede con los objetos individuales. Aquí Frege provee la definición de relación biyectiva en términos puramente lógicos. Así pues, los objetos que caen bajo los conceptos F y G están correlacionados unívocamente en ambos sentidos (cumplen con la biyectividad) por la relación Φ , si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si d esta en la relación Φ con a , y si d esta en la relación Φ con e , entonces, en general, sean lo que sean d , a y e , a es lo mismo que e .
2. Si d esta en la relación Φ con a , y si b esta en la relación Φ con a , entonces, en general, sean lo que sean d , b y a , d es lo mismo que b . (Frege, 1884/1996, p. 114).

En este sentido, la definición arriba mencionada se redefine así: el concepto F es equinómico al concepto G si existe una relación Φ tal que, a los objetos que caen bajo F , Φ les aplica una biyección con los objetos que caen bajo G .

³⁷ El termino extensión del concepto se utiliza en el sentido especificado antes.

En consecuencia, es posible concretar la idea de número, pues la formulación de las definiciones anteriores permite su comprensión: n es un número si existe un concepto tal que n sea el número que le corresponde. Por tanto, dos números son iguales si existen dos conceptos F y G a los que les corresponde dichos números y, además, F es equinúmero con G .

A partir de estas consideraciones, Frege procede ahora a especificar las definiciones de los números, fijando un concepto adecuado al cual estos corresponden. En primer lugar, define el número 0, que es el número que corresponde al concepto “desigual consigo mismo” donde, “igual” se entiende en términos de la definición de Leibniz dada anteriormente. Este concepto debe ser entendido, no como una contradicción, sino como aquello donde ningún objeto cae sobre él. En últimas, un concepto bajo el cual nada cae le corresponde el número 0; pero Frege aclara que para fines de su trabajo él usa el concepto antes mencionado, pues este le permite dar una demostración con medios puramente lógicos.

Enseguida, él define la relación sucesor, la cual establece que un número n sigue inmediatamente a un número m si:

Existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n , y que el número que corresponde al concepto “que cae bajo F , pero no es igual a x ” es m . (Frege, 1884/1996, p. 118).

Basado en esta definición, y en el concepto fijado para el número 0, Frege determina el concepto al que corresponde el número 1. De esta forma garantiza que efectivamente el 1 sigue al 0 en la serie de los números naturales: 1 es el número que corresponde al concepto “igual a 0”. Esta forma de definir estos números, afirma Frege, no presupone que su veracidad está sometida al criterio del sujeto, sino que ellas son verdades *a priori* por tanto no dependen de ningún hecho observado.

Posteriormente, Frege plantea el juicio de que a cada número n en la serie de los números naturales le sigue otro. Para ello, establece el concepto que corresponde al número $n + 1$ como “perteneciente a la serie de números naturales que termina con n ”. De esta forma, el juicio toma un sentido puramente lógico y, con la demostración de este juicio “... quedará demostrado que existe un número que sigue inmediatamente a n en la serie de los números naturales, por tanto, que no existe ningún último miembro de esta serie”. (Frege, 1884/1996. p. 123). Es decir, se demuestra que los números naturales son infinitos. Ahora bien, aunque Frege no lo demostró estrictamente, él dio unas ciertas indicaciones que fundamentaban la demostración y que le permitían garantizar la infinitud de la serie de los números naturales y, además, que en dicha serie ningún número finito se sigue así mismo.

Con todo este análisis Frege (1884/1996) confirma que las leyes aritméticas no son aplicables a cosas externas, sino que se aplican a juicios validos sobre ellas, es decir las leyes afirman una conexión entre los juicios, de manera que las leyes aritméticas son juicios analíticos y por tanto *a priori*. En consecuencia, la aritmética es una lógica más desarrollada, en comparación con la lógica proposicional, y por tanto cada enunciado es una ley lógica. Y, aun cuando algunas de las aplicaciones de la aritmética son explicadas desde el mundo sensible, estas se justifican porque se construyen por medio de elaboraciones lógicas de hechos observados. Todo lo que sea demostrado por medios puramente lógicos es analítico.

Así mismo, Frege sostiene que todos los objetos de los que se ocupa la aritmética son dados desde la razón y no por el mundo exterior. En este sentido, las leyes de la aritmética son objetivas. En virtud de esto, los números son objetos lógicos que no pueden ser dados por lo sentidos, ni por la intuición. Estos se fundamentan en los conceptos a los cuales estos se asignan. Dichos conceptos se admiten, aunque algunos de ellos parecieran portar una contradicción (por ejemplo el concepto “no ser idéntico así mismo”), pues ellos deben ser entendidos en forma lógica, estableciendo lo que cae y no cae bajo ellos.

Cerrando este estudio, se deduce que Frege da una primera aproximación de la definición de número, explicando que la verdad de las proposiciones aritméticas deben darse sobre proposiciones estrictamente lógicas, sin embargo, esta revisión aun es incompleta dada la informalidad de sus definiciones; así pues, en el siguiente capítulo se procede a mostrar de manera formal la definición de número natural que él desarrolla. Para tal efecto, es pertinente en primera instancia estudiar la reformulación que él hace de su lenguaje de fórmulas, en la cual él termina de incorporar la simbología y definiciones necesarias para su propósito.

CAPITULO 3

3. DEFINICIÓN FORMAL DE LOS NÚMEROS NATURALES A PARTIR DE LEYES LÓGICAS UNIVERSALES

Introducción

Frege con el fin de formalizar su tesis logicista escribe los dos tomos de su libro *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. En el tomo I publicado en 1893 perfecciona su lenguaje de fórmulas y fundamenta la teoría de los números naturales; en el tomo II publicado en 1903 pretende fundamentar la teoría de los números reales y con ello el análisis matemático.

Dado que este trabajo de investigación toma como objeto de estudio los números naturales, se realiza sólo el análisis del tomo I de *Grundgesetze*, con el cual se termina de formalizar la lógica postulando las leyes lógicas universales que darán paso a la definición de los números³⁸.

3.1. Reformulación de la *Begriffsschrift*

³⁸ Para ello se trabajara sobre la versión en inglés escrita de Montgomery Furth y titulada *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Así mismo, se tendrá en cuenta algunos textos adicionales que sirven de apoyo para tener una mejor comprensión de ello. Paralelo a esto se estudia la interpretación que hace Panza M., Sinaceur H. y Sandu G. (2015) en algunos apartados de su libro *Functions and Generality of Logic Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms* en relación con el propósito que moviliza este capítulo. La revisión de este último libro tiene como finalidad aclarar ciertas nociones que de alguna manera son oscuras en Frege, una de ellas es la noción de función.

En lo que respecta a la noción de función, Frege empieza precisando que no se debe considerar a la función como una expresión, pues una expresión es sólo una combinación de signos que no denota en si misma lo que realmente expresa. Por tanto, la función debe ser considerada como aquello a lo que se hace referencia³⁹ por medio de cierta expresión. Por ejemplo, en la expresión $y = 4 + x^2$ la esencia de la función radica en la conexión que hay entre los números (los signos de ellos) por los que se sustituye x y los que resultan al hacer dicha sustitución (referencia de la expresión). Pero es importante resaltar que la esencia de la función no se altera al efectuar las sustituciones.

La función, por tanto, es una entidad no saturada, donde la letra x sólo determina los lugares vacíos que deben ser llenados y que completan la expresión dada. Estos lugares Frege los designa con la letra ξ y los conoce como lugares del argumento. Si hay múltiples ocurrencias de ξ en una misma expresión, ella debe ser siempre sustituida por lo mismo en todas sus ocurrencias. Aquello que llena la función se llama argumento de la función y, al completar dicha función con un argumento dado se obtiene un nombre del valor de la función.⁴⁰ Para Frege, *nombre* es entendido como una expresión (signos y combinaciones de signos) cuyo referente es un objeto.

Así mismo, existen funciones que al llenarlas no obtienen como nombre de su valor números, sino nombres de valores de verdad (falso o verdadero)⁴¹. Ejemplo de este caso son las ecuaciones y desigualdades que siempre designan un valor de verdad: $3^2 = 9$, $5 < 9$ y $5 + 4 = 9$ etc., son nombres de lo verdadero y, por tanto, tienen la misma referencia. Sin embargo, el sentido de estas expresiones es distinto en cada caso, puesto que la forma como el objeto es introducido a través del nombre en cada caso difiere. El sentido del nombre de un valor de verdad es para Frege el pensamiento.

³⁹ La referencia según Frege es el objeto al cual se refiere.

⁴⁰ La expresión del ejemplo del párrafo anterior se enunciaría así: $4 + \xi^2$. Si se toma como argumento el 1 entonces la expresión dada es el nombre de la función, el 1 es el nombre del argumento y lo que se obtiene al reemplazar, en este caso 5, sería el nombre del valor de la función, que solo designa un número.

⁴¹ Un caso particular se da para $\xi + 5 = 10$ en el que siempre se obtiene un nombre de valor de verdad; verdadero para 5 y falso para todos los demás casos (Frege 1893/1964).

Así pues, Frege añade que una función puede tener como argumento objetos de diversa naturaleza, conservando siempre la oposición objeto-función, es decir objeto es todo aquello que no es función; por tanto, es una entidad saturada. Frege (1893/1964) afirma que: el dominio de lo que es admitido como argumento también debe ampliarse a los objetos en general. Los objetos se oponen a las funciones. En consecuencia considero como objeto todo lo que no es función, por ejemplo, los números, los valores de verdad y los cursos de valores...”. (p. 35-36, según se traduce). Es decir, los objetos, además de ser números, valores de verdad y nombres de objetos, son también nombres propios y cursos de valores. Frege define los nombres propios como los signos que hacen referencia a un objeto, el cual se puede determinar y define, el curso de valores como todos aquellos valores que toma una función al reemplazar los lugares del argumento por cada argumento. Cuando las funciones adquieren como valor un valor de verdad, entonces se habla de extensión del concepto⁴² en vez de curso de valores, por esto Frege define el concepto como una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.

3.1.1. Clasificación de las funciones y nombre de funciones

Frege precisa que bajo las funciones, además de los objetos, pueden caer también funciones; por este motivo, él realiza una clasificación de los lugares de argumentos según el tipo de argumento que en cada caso pueda saturar una función:

- **Argumentos tipo 1:** Objetos.
- **Argumentos de tipo 2:** Funciones de primer de nivel de un argumento.
- **Argumentos tipo 3:** Funciones de primer de nivel de dos argumentos.

De este modo se tiene:

- **Lugares de argumento tipo 1:** Admiten sólo nombres de objetos

⁴² Bocardo E. (1998) da una definición de lo que para Frege esto podía ser: “la extensión de un determinado concepto F es la clase de pares ordenados (x, y) de manera que y sea el valor de verdad que resulta cuando se considera todas aquellas x ’s que caen dentro del concepto F”. (p. 49).

- **Lugares de argumento tipo 2:** Admiten sólo nombres de funciones de primer nivel de un argumento.
- **Lugares de argumento tipo 3:** Admiten sólo nombres de funciones de primer nivel de dos argumentos.

Estas clasificaciones permiten a Frege determinar que existen diversos tipos de funciones. Para simbolizarlas hace alusión a diferentes letras con el fin de distinguir entre letras que denotan funciones y letras que denotan objetos. Las letras de funciones son $f, g, h, F, G, H, \dots$, así como las letras griegas mayúsculas Φ y Ψ , además de Ω, M y ϕ que son para denotar un tipo especial de función, la función de segundo nivel, que será tratada más adelante. Así mismo, él emplea algunas letras góticas para denotar algunas funciones, diferentes a las que denotan objetos. Entre ellas, la más usual es la letra $\mathfrak{f}$ (se trata de la letra “f” del alfabeto gótico). De otro lado, entre las letras empleadas para denotar objetos se encuentran las latinas $a, b \dots$; las letras vocales góticas minúsculas $\mathfrak{a}, \mathfrak{e}, \dots$; las primeras letras griegas mayúsculas $\Gamma, \Delta, \Theta, \Xi, \dots$ y las letras vocales griegas minúsculas $\epsilon, \alpha, \dots$.

En este sentido, él caracteriza los siguientes tipos de funciones:

- **Funciones de primer nivel de un argumento:** estas sólo admiten argumentos del tipo 1, y cuando su valor es un valor de verdad se les llama *concepto*. Una forma de simbolizar este tipo de función es mediante el uso de letras mayúsculas griegas así, por ejemplo, una expresión para función de primer nivel es $\Phi(\xi)$.
- **Funciones de primer nivel de dos argumentos:** Estas sólo admiten argumentos del tipo 1, y tiene dos lugares vacíos por llenar que se denotan por las letras ξ y ζ . Estas son consideradas relaciones cuyo valor es un valor de verdad. En este caso se utiliza la expresión $\Psi(\xi, \zeta)$, y para el caso cuando dos objetos caen bajo la función se emplea la expresión $\Psi(\Gamma, \Delta)$; entonces se dice que el objeto Γ permanece con el objeto Δ mediante la relación Ψ , si $\Psi(\Gamma, \Delta)$ es verdad.

- **Funciones de segundo nivel de un argumento:** Estas sólo admiten argumentos del tipo 2; y se expresa mediante el símbolo $X(\Phi(\xi))$. Frege considera pertinente incorporar un nuevo símbolo para hacer alusión a estas funciones $M_\beta(\phi(\beta))$. Esta expresión indica que $\phi(\beta)$ representa los lugares vacíos que deben ser sustituidos por una función de primer nivel cuyo argumento es β (Aquí $\phi()$ se entiende del mismo modo como ξ en $f(\xi)$).
- **Funciones de segundo nivel de dos argumentos:** Sólo admiten argumentos del tipo 3, es decir toma como argumento relaciones, se representa de forma análoga a la anterior, pero haciendo reconocible los dos lugares del argumento.
- **Funciones de tercer nivel⁴³:** Estas admiten como argumentos funciones de segundo nivel de un argumento de tipo 2 o de tipo 3, y se representa mediante las expresiones $\mathcal{L}_{\mu_\beta}(\mathcal{L}(\beta))$ y $\mathcal{L}_{\mu_{\beta\gamma}}(\mathcal{L}(\beta, \gamma))$ respectivamente. Donde μ_β y $\mu_{\beta\gamma}$ son los lugares del argumento.

A partir de esta clasificación, Frege aclara lo que se entiende por nombres de funciones de primer nivel de uno y dos argumentos. Los primeros nombres de función, se obtienen de los nombres propios que saturan la función. Ahora bien, si se procede de manera inversa y a la función se le extrae los nombres propios, que es lo mismo que extraer sus objetos, lo que queda nuevamente reconocible en la función son los lugares vacíos para objetos (lugares del argumento tipo 1).⁴⁴

De manera análoga, si al nombre de una función de primer nivel de un argumento se le extrae un nombre propio, entonces se hace reconocible dos lugares vacíos para objetos, de modo que resulta un nombre de función de primer nivel de dos argumentos. Y si de un nombre propio se

⁴³ Aunque Frege introduce una simbología para estas funciones, él hace la anotación de que ellas no van a ser necesarias para dar la definición de número, y en consecuencia no hace un estudio detallado de ellas.

⁴⁴ $\mathcal{L}_a^a$ es un nombre propio cuya referencia es el objeto verdad. Si extraemos de él el nombre propio a , entonces los lugares donde se muestra las ocurrencias de a serían reemplazados por ξ , obteniendo así un nombre de función de primer nivel de un argumento.

extrae una función de primer nivel, entonces quedaría un lugar vacío para una función de uno o dos argumentos según sea el caso (lugares tipo 2 o 3), por tanto se obtendrá un nombre de una función de segundo nivel de un argumento.

Frege indica, además, siempre que dentro de un nombre propio se reemplace por letras de objetos, los nombres propios inmersos en el inicial, se denominan marca de objeto (si el reemplazo se hace sólo por letras latinas se habla de marca latina de objeto); de igual manera, si se reemplaza los nombres de funciones por letras de funciones, se habla de marca de funciones (en el caso de que los reemplazos sean solo por letras latinas se habla de marca latina de función).

Con base en lo anterior, Frege determina cómo se pueden formar nombres propios y nombres de funciones de primer nivel adecuados (es decir que realmente se refieren a algo), estipulando dos métodos. El primer método establece las condiciones para tener un nombre propio y nombre función de primer nivel de un argumento:

[A] Un nombre propio

[1] de un nombre propio y un nombre de una función de primer nivel de un argumento.

[2] o de un nombre de una función de primer nivel y un nombre de una función de segundo nivel de un argumento.

[3] o de un nombre de una función de segundo nivel de un argumento de tipo 2 y el

nombre $\mathcal{L}_{\mu_B}(\mathcal{K}(\beta))$ de una función de tercer nivel.

[B] El nombre de una función de primer nivel de un argumento.

[1] de un nombre propio y un nombre de una función de primer nivel de dos argumentos. (Frege, 1893/1964, p. 85, según se traduce).

El segundo método sólo permite formar nombres de funciones de primer nivel. Este método garantizar que el nombre de una función tiene referencia, bajo la condición de que dicho nombre sea obtenido a partir de un nombre formado por el primer método. De este nombre se debe extraer,

a su vez un nombre propio, de tal manera que se reconozcan los lugares de argumento del tipo 1 que quedan en el nombre inicial.

3.1.2. Juicios, horizontales, amalgamación de horizontales y Neither-or⁴⁵

Frege (1893/1964), además de retomar la idea de juicio dada en *Begriffsschrift*, aclara que este juicio es la certificación de la verdad de un pensamiento y lo denomina *proposición*. Por ello, toda proposición correctamente formada en *Begriffsschrift* es un pensamiento verdadero. Así mismo, él adopta el nombre “horizontal” para el símbolo — (que representa una combinación de ideas). Esta expresión puede ser vinculada a otros signos, como sucede en la condicionalidad, la negación y el juicio en sí mismo. Por ejemplo, la horizontal puede aparecer en el nombre de la función $\text{—}\xi$ que es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad que depende del argumento, el cual debe ser a su vez un valor de verdad. Todo lo que está a la derecha de la horizontal como, un todo, se debe considerar el lugar del argumento, siempre que no estén presentes los paréntesis.

Otro ejemplo se muestra en la expresión $\Delta = (\text{—}\Delta)$, cuya igualdad se valida siempre que el argumento Δ sea un valor de verdad. Este signo es conocido como el signo de identidad y tiene como referencia la verdad sólo si todo lo que está a la derecha del signo “=” coincide con todo lo que está a la izquierda. En general se le llama identidad al signo (nombre propio o marca de objeto) que representa el nombre de la función $\xi = \zeta$ con sus respectivos argumentos que corresponde a nombres propios o marcas de objetos.

También se da el caso de que dos horizontales pueden estar en un mismo signo como en la función $\neg\xi$, las cuales están separadas por la barra de negación. Por otro lado, se pueden encontrar otras horizontales al fijar un argumento Δ , puesto que $\neg\Delta$ va a tener la misma referencia

⁴⁵ En virtud de que no hay una expresión en español que permita hacer la traducción, se deja la negación de la disyunción en su versión en inglés, que expresa que no se da lo uno, ni lo otro.

que $\text{---} \neg \Delta$ y $\text{---} \neg (\text{---} \Delta)$ y, por tanto, cualquiera de ellas se puede usar indistintamente. Esto se da por lo que Frege denomina amalgamación de horizontales. Con relación a esto, él determina que siempre que el valor de verdad de la función $\text{---} \xi$ coincide con un argumento de ella, las horizontales pueden ser amalgamadas⁴⁶.

A partir de lo anterior, él retoma su definición antes expuesta en *Begriffsschrift* de condicionalidad y negación, junto con lo que se había incluido respecto a la noción de función, e incorpora el símbolo para expresar la palabra: “ni esto ni lo otro”: $\neg \neg$. Un caso particular de esto se tiene en la proposición $\neg \neg \begin{matrix} 2^3 = 3^2 \\ 1^2 = 2^1 \end{matrix}$, la cual expresa en palabras que la tercera potencia de 2 no es la segunda potencia de 3, ni la segunda potencia de 1 es la primera potencia de 2. En una de las posibles interpretaciones modernas esto corresponde a $\neg[\neg(1^2 = 2^1) \rightarrow (2^3 = 3^2)]$ por las equivalencias lógicas, equivale a $\neg(1^2 = 2^1) \wedge \neg(2^3 = 3^2)$.

3.1.3. Negación de la generalidad y función correspondiente

Para el signo de identidad, Frege hace la aclaración de que es distinto la generalidad de una identidad como $\Phi(x) = \Psi(x)$ a la identidad de $3^2 = 9$. Así mismo, la generalidad de una negación es distinta de la negación de la generalidad. Establecer esta diferencia le permitió justificar la pertinencia de introducir un signo que diera cuenta de ello, el cual ya había sido postulado en su *Begriffsschrift*: ---^a . Éste delimita el alcance que adquiere la letra gótica dentro de una proposición. Sin la concavidad la letra gótica no adquiere significado dentro del lenguaje de fórmulas; luego sobre esta concavidad únicamente puede estar dicha letra. Nótese que a cada lado de ella se encuentra una horizontal y, por tanto, también es posible hacer amalgamación de horizontales.

⁴⁶ Es posible realizar la amalgamación pues $\text{---} \neg \Delta$ tiene como valor la verdad si su argumento $\neg \Delta$ es verdadero.

De lo anterior, Frege (1893/1964) explica que en la expresión $\forall a (2 + 3a = 5a)$ se tiene la generalidad de una negación, esto es $\forall a [\neg (2 + 3a = 5a)]$ y en $\neg \forall a (2 + 3a = 5a)$ la negación de una generalidad $\neg \forall a [(2 + 3a = 5a)]$. Posteriormente esta diferencia le permite a Frege, incorporar un signo para representar el término “existe” del lenguaje natural: $\exists$. De este modo, el juicio $\exists a (2 + 3a = 5a)$, que en lenguaje natural afirma: “existe un a tal que $2 + 3a = 5a$ ”, se puede expresar en lenguaje formal moderno como: $\neg \forall a [\neg (2 + 3a = 5a)]$, o su equivalente $\exists a (2 + 3a = 5a)$.

Dentro de este marco para una función dada, de la forma $\Phi(a)$, siempre es posible hallar una función correspondiente que debe satisfacer dos reglas generales:

1. Todos los lugares en los que se produce una letra gótica dentro de su alcance, pero, no dentro de un alcance cerrado de la misma letra, y no sobre una concavidad, están relacionadas con los lugares del argumento, a decir, los de la función correspondiente. ...
2. ...Si en el nombre de una función se producen letras góticas, dentro de cuyo alcance se encuentran lugares de argumento de esta función, entonces para formar la correspondiente expresión de generalidad una letra gótica diferente de esta deberá seleccionarse. (Frege, 1893/1964, p. 43, según se traduce).

Por ejemplo, para la función $\Phi(e) = (e + e = 2e)$, la función correspondiente va ser aquella donde el alcance de la generalidad de la letra gótica “ e ” debe ser sustituida en todas sus ocurrencias por un lugar de argumento, a excepción de la que aparece en la concavidad Φ y, la letra gótica “ a ” que tiene un alcance particular definido, así pues, se tiene que la función correspondiente es $\Phi(a) = (a + a = 2a)$.

3.1.4. Curso de valores, extensión de un concepto y función ξ

Con lo dicho hasta el momento, Frege procede a crear una notación para el curso de valores, que es uno de los más importantes aspectos que se amplían de la *Begriffsschrift* con el fin de formular una ley lógica⁴⁷: la generalidad de una identidad puede ser transformada en una identidad del curso de valores y viceversa, que se emplea incluso al hablar de extensión de un concepto. Además, los cursos de valores pueden ser considerados como argumentos de funciones.

Ahora bien, la expresión $\epsilon\Phi(\epsilon)$ en general hace referencia al curso de valores de la función correspondiente $\Phi(\xi)$. Para hallar dicha función correspondiente se debe tener presente dos reglas que son análogas a las dadas anteriormente para la expresión $\alpha\Phi(\alpha)$. La primera regla, sugiere que la vocal griega minúscula ϵ debe ser sustituida en todas sus ocurrencias por un lugar de argumento, excluyendo aquellos que están dentro de un alcance cerrado y las que aparecen con la marca diacrítica ϵ' . La segunda regla, determina que si se tiene la función correspondiente en la cual se define la ocurrencia de una vocal griega minúscula, que incorpora en su alcance lugares de argumento, para formar el curso de valores se debe elegir una vocal griega minúscula diferente (Frege, 1893/1964)

Para ilustrar esto, Frege considera que el curso de valores $\alpha(\alpha = \epsilon'(\epsilon = \alpha))$ ⁴⁸ tiene como función correspondiente $\xi = \epsilon'(\epsilon = \xi)$. Siguiendo las reglas anteriores se verifica que a partir de la primera expresión es posible obtener la segunda. Un curso de valores puede ser a su vez un argumento, por tanto un objeto; así, la función $\xi = \alpha(\alpha \cdot (\alpha - 1))$ tiene como argumento $\epsilon'(\epsilon^2 - \epsilon)$ y tras la sustitución se obtiene el nombre de su valor.

⁴⁷ Esta ley corresponde con la ley V y se simboliza más adelante.

⁴⁸ En esta expresión se ha omitido un paréntesis, que a nuestro criterio se requiere para mantener la estructura de lo que se designa, lo cual puede ser un error del traductor.

En este punto Frege insiste y llama la atención en considerar a los cursos de valores como argumentos, pues aquí se debe determinar qué valor ellos adquieren y si pueden ser un valor de verdad. Al respecto señala que los cursos de valores pueden ser valores de verdad y con base a esto introduce el curso de valores $\mathfrak{I}(\neg \epsilon)$ para referirse a la verdad y el curso de valores $\mathfrak{I}(\epsilon = (\neg^a a = a))$ ⁴⁹ para lo falso. En general, afirma que $\neg \mathfrak{I}\Phi(\epsilon)$ es verdadero sólo si la función correspondiente $\Phi(\xi)$ es un concepto bajo el cual cae sólo lo verdadero, y es falso en todos los demás casos. También cabe señalar que cada concepto bajo el cual cae el objeto falso y sólo el falso tiene como su extensión el objeto falso.

Habría que decir también que Frege determina un símbolo auxiliar para referirse a una función bajo la cual cae un único elemento: $\mathfrak{V}\xi$. A su curso de valores, por tanto, le corresponde sólo un objeto y se simboliza así $\mathfrak{V}\mathfrak{I}\Phi(\epsilon)$. Este a su vez hace referencia a ese único objeto que cae bajo el concepto $\Phi(\xi)$.

3.1.5. Componente principal y subcomponentes

- Así mismo, dentro de las proposiciones Frege añade que la combinación de símbolos que las conforman se divide en componente principal y subcomponentes. Si se tiene la expresión $\mathfrak{T}_{\Delta}^{\Theta}$, el componente principal es Θ y los subcomponentes son Δ y Λ . Sin embargo, por amalgamación de horizontales puede darse el caso en que esta expresión se entienda de manera que el componente principal sea $\mathfrak{T}_{\Lambda}^{\Theta}$ y Δ su único subcomponente. Lo que se ubica en la parte superior de la expresión es el componente principal y los de la parte inferior los subcomponentes. No obstante, estos son susceptibles de ser definidos a conveniencia con respecto a la asignación de la combinación de signos. Estos admiten la intercambiabilidad siguiendo ciertas reglas, que Frege (1893/1964) establece:

⁴⁹ Note que $\neg^a a = a$ en palabras expresa que existe a tal que a es distinto de a .

:

- Para los subcomponentes se puede hacer el intercambio entre ellos si mantienen todos el mismo valor de verdad, y cada intercambio realizado debe ser previsto, aun cuando por simplicidad algunos de estos se omiten.
- Un subcomponente puede ser intercambiado con el componente principal, si el valor de verdad de ambos cambia tras la inversión, lo cual es posible mediante el uso de la barra de negación; a esta transición se le llama Contraposición (contrarecíproca, en el lenguaje formal moderno) y es esencial en el segundo y tercer método de inferencia.

Por ejemplo, si se hace el intercambio de subcomponentes en la expresión $\vdash_{\Delta}^{\Theta}$ da como resultado $\vdash_{\Lambda}^{\Theta}$, por la primera regla. Ahora, si se tienen las funciones $\vdash_{\xi}^{\zeta}$ y $\vdash_{\zeta}^{\xi}$ por la segunda regla, es posible determinar que se hizo un intercambio entre componente principal y subcomponente. Esto es válido porque las funciones conservan el mismo valor para los mismos argumentos, lo cual se verifica por medio de la definición de condicionalidad. Para los argumentos Γ y Δ , la contraposición se escribe así:

$$\begin{array}{c} \vdash_{\Gamma}^{\Delta} \\ \times \\ \vdash_{\Delta}^{\Gamma} \end{array}$$

Esta versatilidad de los componentes, se debe a la amalgamación de horizontales que es posible hacer a las proposiciones.

3.1.6. Métodos de inferencia

Frege declara que hay un solo método de inferencia fundamental (*Modus ponendo ponens*). No obstante, para dotar de simplicidad sus cadenas de inferencia debe introducir unos métodos adicionales que no son del todo indispensables.

3.1.6.1. Primer método de inferencia

A los juicios involucrados en este primer método que había sido postulado en *Begriffsschrift*, se le añade un índice distintivo al lado de la proposición, de tal forma que sea posible identificar los juicios que darán paso a la inferencia, los cuales se utilizan incluso en los otros métodos de inferencia. Así mismo, introduce la regla general que sigue este método: “Si un subcomponente de una proposición se diferencia de una segunda proposición sólo en que carece de la barra del juicio, entonces puede ser inferida una proposición que resulta de la primera proposición suprimiendo ese subcomponente”. (Frege, 1893/1964, p. 58.).

A partir de los juicios $\frac{\Gamma}{\Delta} \Pi$ (γ) y $\vdash \Delta$ (β) se puede obtener una inferencia mediante este método, sin embargo, no es inmediato. En este sentido, Frege hace uso de la intercambiabilidad de

subcomponentes por lo que se obtiene el juicio $\frac{\Gamma}{\Delta} \Pi$. Así pues, se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\Gamma}{\Delta} \Pi & & \vdash \Delta \\
 (\beta):: \frac{\Gamma}{\Delta} \Pi & & (\gamma):: \frac{\vdash \Delta}{\Gamma} \Pi
 \end{array}$$

Es importante recordar que los dos pares de puntos que siguen al índice (β), indican que el juicio que falta es el que corresponde al índice dado y se ubica en la parte inferior; de manera análoga para el par de puntos que siguen al índice (γ), con la diferencia en este caso de que el juicio faltante se ubica en la parte superior. Así mismo, cabe señalar que para realizar la inferencia se utiliza el juicio al cual se le hizo la intercambiabilidad de subcomponentes; este juicio es implícito dentro del juicio inicial. Al realizar dos inferencias mediante este método, se puede simplificar la expresión, escribiendo los dos índices separados por una coma, y en el orden de aplicación, seguidos de dos líneas paralelas en el sentido explicado anteriormente.

3.1.6.2. Segundo método de inferencia.

Para definir este método, Frege primero establece una regla que le permite simplificar los juicios obtenidos en la inferencia, la cual sostiene que siempre que dos subcomponentes aparecen más de una vez, sólo se mantiene una dentro de la proposición ya que sigue teniendo validez lógica. A esto lo llama *Amalgamación de subcomponentes idénticos*. Una vez hecha esta aclaración, él determina que la aplicación de este método se reduce a la siguiente regla:

Si la misma combinación de signos ocurre en una proposición como componente principal, y en otra como subcomponente, entonces una proposición puede ser inferida en la cual el componente principal de la segunda es componente principal, y todos los subcomponentes de ambas, salvo la mencionada son subcomponentes. Pero los subcomponentes que aparecen en ambos, deben ser escritos sólo una vez. (Frege, 1893/1964, p. 63, según se traduce).

De lo anterior, si se tienen las proposiciones $\Pi \vdash \gamma$ y $\Sigma \vdash \epsilon$ la inferencia obtenida por este método se representa por cualquiera de las dos siguientes formas:



Aquí Λ aparece como componente principal en (ϵ) y como subcomponente en (γ) ; luego en la proposición que se infiere Λ desaparece, y su componente principal debe coincidir con el de (γ) , el cual es Γ , los subcomponentes serán entonces todos los restantes colocando Δ una sola vez. El

orden de los subcomponentes puede variar según la intercambiabilidad que se haga de los subcomponentes.

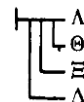
Al igual que en el método anterior si se da una doble inferencia, se colocan los dos índices entre paréntesis separados por una coma y en el orden de ubicación, seguidos de una doble línea entrecortada. Este método puede ser interpretado en la lógica clásica como la regla de inferencia

de resolución la cual enuncia $\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$.

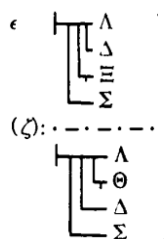
3.1.6.3. Tercer método de inferencia

El tercer método se reduce a la aplicación de la siguiente regla enunciada por Frege:

Si dos proposiciones coinciden en sus componentes principales, mientras un subcomponente de la una difiere de un subcomponente de la otra sólo en una barra de negación prefijada, entonces una proposición puede ser inferida en la cual el componente principal común a las dos, es componente principal, y todos los subcomponentes de ambas, salvo los dos mencionados, son subcomponentes. Aquí los subcomponentes que ocurren en ambas deben ser escritos sola vez (*amalgamación de subcomponentes idénticos*). (1893/1964, p. 65, según se traduce).



De acuerdo a lo anteriormente expuesto, dadas dos proposiciones $\Delta(\zeta)$ y (ϵ) es posible inferir una tercera así:



Nótese que en la proposición inferida se mantiene el componente principal y como subcomponentes sólo se excluye $\exists$ y la negación de la misma.

3.1.7. El cambio de letra gótica a latina y viceversa

Frege ajusta el significado y la pertinencia de usar, ya sea las letras latinas o las letras góticas, dentro de las funciones. Al respecto, él afirma que ambas indican que hay un objeto, pero ellas no hacen referencia a uno en particular. No obstante, él considera que las letras góticas son adecuadas para mostrar el alcance de las proposiciones, además, como se indicó antes para mostrar la diferencia entre la negación de una generalidad y la generalidad de una negación.

Las letras latinas por su parte no permiten mostrar la negación de una generalidad, ya que con ellas el alcance de la generalidad no es suficientemente delimitado, es decir, no es posible determinar hasta donde llega; pero si el alcance de dichas letras es entendido sobre toda la combinación de signos en la proposición, entonces se puede extender a otras proposiciones y, por tanto, dichas letras serán adecuadas para realizar las inferencias antes vistas. Esto no es posible mediante las letras góticas debido a su alcance delimitado (Frege 1893/1964)

A partir de estas circunstancias es posible considerar una simbología para hacer el cambio de una letra gótica por una latina y viceversa, así como justificar la pertinencia de hacer este cambio que ya había sido enunciado en *Begriffsschrift*. Esta transición se escribe mediante el símbolo

$$\frac{\vdash \Phi(x)}{\vdash^a \Phi(a)}$$

apelando a la siguiente regla:

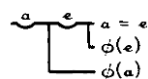
Una letra latina puede ser remplazada en todas sus ocurrencias en una proposición por una y la misma letra gótica. La letra Gótica debe ser entonces al mismo tiempo insertada sobre una concavidad en frente de un componente principal fuera del cual la letra latina no ocurre.

a la proposición $\vdash \frac{M_{\beta}(f(\beta))}{M_{\beta}(f(\beta))}$ que es la **ley IIb** y en palabras sostiene: “Lo que es valido para todas las funciones de primer nivel de un argumento debe serlo tambien para cualquier función particular entre ellas”.

- La **ley III** es expresada por la proposición $\vdash \frac{g(\frac{f(a)}{f(b)})}{g(a=b)}$, la cual en palabras manifiesta que: lo que se predique para $a = b$ se debe mantener para $\frac{f(a)}{f(b)}$, lo cual es valido pues estos dos coinciden en sus valores de verdad.
- La **ley IV** se enuncia mediante la proposición $\vdash \frac{(\text{---} a) = (\text{---} b)}{(\text{---} a) = (\text{---} b)}$, es decir afirma que $\text{---} a$ es igual a $\text{---} b$ o $\text{---} b$, lo cual se justifica por el hecho de que tanto $\text{---} a$ como $\text{---} b$ son siempre valores de verdad.
- La **ley V**, esta ley ya habia sido postulada anteriormente cuando se trato la noción del curso de valores, pero aquí se formaliza a traves del siguiente enunciado: $\vdash (\xi f(\xi) = \alpha g(\alpha)) = (\xi f(\xi) = \alpha g(\alpha))$. Es decir, si se considera a $\xi f(\xi)$ y $\alpha g(\alpha)$ como el recorrido de los valores de las funciones (conceptos) correspondientes $f(\xi)$ y $g(\xi)$ respectivamente, entonces el recorrido de los valores de la función f es igual al de la función g si y sólo si para cada argumento α , $f(\alpha) = g(\alpha)$. Ella en lenguaje natural expresa que la identidad del curso de valores es igual a la generalidad de una identidad e inversamente.
- La **ley VI** se expresa por $\vdash a = \forall \xi (a = \xi)$ y establece que a es igual al curso de valores del nombre de la funcion correspondiente $a = \xi$, bajo la cual cae un único elemento a .

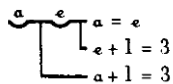
3.1.9. Funciones de segundo nivel y nivel desigual

Frege muestra algunos ejemplos utilizando su simbología. Así en la combinación de ideas



se tiene una función de segundo nivel, cuyos lugares vacíos pueden ser llenados con

funciones de primer nivel, obteniendo

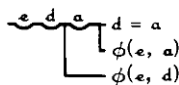


De igual forma en $\text{---} \phi(2)$ encontramos una función de segundo nivel, la cual puede tener como argumento las funciones de primer nivel $\xi + \xi$ o $\xi \times \xi$ (argumento tipo 2), cuyos lugares vacíos se saturan con el número 2. Pero, dado que su valor es siempre un valor de verdad, se podría decir que es un concepto de segundo nivel que tiene un argumento fijo; pero en aras de evitar confusiones con la definición original de concepto Frege decide llamarla: *Propiedad del número 2*.

No obstante en $\text{---} \phi(\xi)$ se tiene una función de nivel desigual puesto que ξ indica el lugar del argumento para un objeto y $\phi(\)$ el lugar del argumento que corresponde a una función de primer nivel. Esta función tiene siempre un valor de verdad, por lo cual se le llama relación de nivel desigual.

Un ejemplo de funciones de segundo nivel con lugares de argumento del tipo 3 es $\text{---} \phi(\alpha, \epsilon)$, en el que α y ϵ representan los lugares del argumento de la función de primer

nivel que llena a $\phi(\)$. Análogamente en



se encuentra una función de esta clase, con la diferencia de que esta función hace referencia a lo verdadero cuando caen todas las relaciones únicas o funciones $X(\xi, \zeta)$, tal que $\text{---} X(\xi, \zeta)$ es una relación única. Es decir, para cada argumento ξ sólo existe un argumento ζ , de tal manera que el valor de la relación X es verdadero. En lenguaje informal, esta función expresa que si ϵ es a d y ϵ es a α , entonces para todo d y todo α $d = \alpha$. La relación siempre debe ser entendida en el orden de ϵ hacia los otros argumentos.

3.1.10. Definición de la barra de definición (la doble barra)

Frege introduce el simbolo $\Vdash$ para diferenciar entre una definición y una proposición. Una definición se puede citar en la misma forma que se hace para una proposición, pero el signo del juicio se sustituye por “ $\Vdash$ ”, seguido siempre de una identidad. Al lado izquierdo de esta última van las definiciones, las cuales deben ir formadas por los nombres primitivos, para garantizar que hacen referencia a algo; al lado derecho van las aclaraciones, es decir un signo simple que es un nombre propio, el cual tiene el mismo significado de la definición implicada. En consecuencia, la definición puede ser sustituida por este nombre propio.

Frege advierte que aun falta algo por precisar, pues no se ha determinado a cabalidad cuándo un nombre hace referencia a algo. En este sentido, él debe demostrar que sus nombres primitivos: $\neg \xi$, $\neg \xi$, $\forall \xi$, $\exists \xi$, $\xi = \zeta$, $\phi(a)$ y $\phi(\epsilon)$ ⁵⁰; tienen una referencia. Esto lo hace mediante la definición de los simbolos involucrados y el uso de los valores de verdad, los cuales para él son objetos, y por tanto nombres propios. Por consiguiente, él garantiza que un nombre siempre hara referencia a algo y tambien tendra un sentido si se compone de nombres primitivos.

3.2. Definiciones particulares

3.2.1. Definición de la función $\xi \cap \zeta$ y el doble curso de valores

Frege define la función $\xi \cap \zeta$ con el fin de transformar una función de segundo nivel en una de primer nivel, y trabajar sobre esta última. La función $\xi \cap \zeta$ es una funcion de dos argumentos, que designa el valor de la funcion $\Phi(\xi)$ para un argumento Δ arbitrario; a partir de Δ y del recorrido

⁵⁰ Frege considera además los nombres de funciones de tercer nivel como nombres primitivos, sin embargo no los toma en cuenta pues no son necesarios para su propósito.

$\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ de la función de primer nivel $\Phi(\xi)$ (que satura a la función de segundo nivel), es decir la función original $\xi \cap \zeta$ queda $\Delta \cap \dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$. Y es debido a esta coincidencia en sus valores de verdad que una puede ser sustituida por la otra. Su valor esta determinado por dos casos: En el primero, el argumento ζ es un curso de valores (curso de valores de $\Phi(\xi)$), por lo cual el valor de la función $\xi \cap \zeta$ es el valor que adquiere la función para Δ como argumento de ξ . En el segundo, ζ no es un curso de valores, entonces el valor de la función $\xi \cap \zeta$ para cualquier argumento de ξ es $\dot{\epsilon}(\neg \epsilon = \epsilon)$ (expresa lo falso). Y en consecuencia $\xi \cap \zeta$ denota el valor de una función que tiene como referencia lo falso para cada argumento. Así para todos los posibles objetos, $\xi \cap \zeta$ en su forma general se define como sigue:

$$\Vdash \forall a \left(\neg \exists u \left[\frac{a(a) = a}{u = \dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)} \right] = a \cap u \right) \quad \text{con lo que se puede observar que el}$$

segundo caso es excluido, ya que esta definición garantiza que u es un curso de valores y, por tanto, se garantiza la verdad de la misma (Frege, 1893/1964).

Una vez incorporada esta definición, Frege ofrece algunos ejemplos que muestran la eficacia de la función $\xi \cap \zeta$, para realizar la transformación de segundo nivel a otra de primer nivel. Si se

tienen las funciones de segundo nivel $\neg \frac{a}{\phi(a)}$ y $\frac{a}{\phi(a)}$ y $\frac{a}{\phi(a)}$, ellas corresponden respectivamente a las funciones de primer nivel $\neg \frac{a}{a \cap \xi}$ y $\frac{a}{a \cap \xi}$. Esta transformación se puede hacer sólo si el argumento ξ es llenado por $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$, la cual adquiere el mismo valor que la función de segundo nivel, al tomar como argumento la función $\Phi(\xi)$. Cualquier otro argumento para ξ inválida la transformación.

Queda por aclarar que también se puede hacer la transformación de una función de primer nivel, con dos argumentos, a objetos en el sentido explicado antes; pero con la diferencia que se debe utilizar un doble curso de valores. Así por ejemplo, si se tiene la función $\xi + \Delta$ esta tiene como curso de valores $\dot{\epsilon}(\epsilon + \Delta)$, pero si se define la función $\xi + \zeta$ de tal manera que ζ varia, entonces se tiene un curso de valores dado por $\dot{\epsilon}(\epsilon + \zeta)$, que es una función de primer nivel que tiene un doble curso de valores dado por $\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}(\epsilon + a)$. En consecuencia, aplicando la definición de $\xi \cap \zeta$, se tiene

que la función $\xi(\epsilon + \zeta)$ se puede representar por un argumento Δ dado y su curso de valores. Por tanto, se tiene $\Delta \cap \dot{\alpha}\xi(\epsilon + \alpha) = \xi(\epsilon + \Delta)$.

Ahora bien, como a su vez $\xi(\epsilon + \Delta)$ expresa el curso de valores de la función $\xi + \Delta$, entonces para un argumento Γ , esta función se representa por la expresión $\Gamma \cap \xi(\epsilon + \Delta)$, es decir $\Gamma \cap \xi(\epsilon + \Delta) = \Gamma + \Delta$. Por tanto al reemplazar el curso de valores en esta última expresión por el resultado anterior, se llega a la identidad $\Gamma \cap (\Delta \cap \dot{\alpha}\xi(\epsilon + \alpha)) = \Gamma + \Delta$, donde $\Gamma + \Delta$ constituye un objeto. Al lado izquierdo de la identidad se representa la función de dos argumentos con el doble curso de valores; al lado derecho se expresa el objeto constituido que los distingue de otras sustituciones. Si dicha función es una relación, entonces se habla de extensión de la relación en lugar de doble cursos de valores.

3.2.2. Definición de la función $I\xi$

Frege introduce esta definición para mostrar de forma explícita los casos en que la extensión de una relación aparece como argumento. De manera que en la notación $I\xi$, I es el indicador que determina que lo que le sigue corresponde al argumento de la relación, lo cual coincide con el doble curso de valores (extension) de la relación.

$$\Vdash \left(\overbrace{\epsilon \quad d \quad \alpha}^{d = \alpha} \begin{array}{l} \epsilon \cap (\alpha \cap p) \\ \epsilon \cap (d \cap p) \end{array} \right) = Ip$$

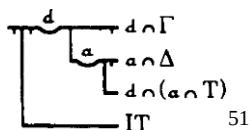
En la definición a p le debe corresponder un argumento Δ , tal que este es el doble curso de valores de la relación dada $\xi \cap (\zeta \cap \Delta)$, pues de lo contrario el valor de la función $\xi \cap (\zeta \cap \Delta)$ sería falso o $\xi(\neg \epsilon = \epsilon)$, y en consecuencia $\xi \cap (\zeta \cap \Delta)$ sería falsa. Si la relación es una de muchas de las que se puedan dar, entonces Ip es verdadero, y es en este sentido que debe ser entendida.

3.2.3. Definición de las funciones $\lambda\xi, \forall\xi$ y $\exists\xi$

Para dar estas definiciones, Frege (1893/1964) simboliza lo que ya había dicho en *Grundlagen der Arithmetik* sobre la definición de número dada a partir de la relación de equinumerosidad:

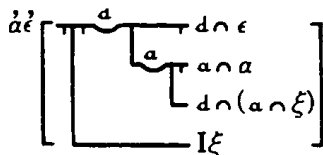
La expresión: “el concepto F es equinúmero con el concepto G” significa lo mismo que la expresión “existe una relación ϕ que correlaciona uno a uno los objetos que caen bajo el concepto F con los que caen bajo el concepto G”. (p. 97, según se traduce)

Así pues determina el concepto F y G como $\lambda\xi\Gamma$ y $\lambda\xi\Delta$ respectivamente, y como relación ϕ a $\lambda\xi(\zeta\cap T)$ (donde T es la extensión de la relación); añadiendo la condición de que esta es “una entre muchas”, en consecuencia lo anterior se reduce a:



Que corresponde con el valor de la relación $\lambda\xi(\zeta\cap T)$, si se considera a Γ como argumento de ξ y a Δ como argumento de ζ . Lo que significa que la relación T es una de muchas que correlaciona a uno de los objetos que caen bajo el concepto $\lambda\xi\Gamma$ con uno de los objetos que cae bajo el concepto $\lambda\xi\Delta$.

Pero esta relación tiene un doble curso de valores, el cual a su vez es el valor de la función



para un argumento T . De manera que esta función es nombrada de la siguiente forma:

⁵¹ $IT \wedge \forall d(\forall a[(d \cap (a \cap T)) \rightarrow (\neg(a \cap \Delta))] \rightarrow [\neg(d \cap \Gamma)])$ lo que por equivalencias lógicas es lo mismo que $IT \wedge \forall d((d \cap \Gamma) \rightarrow \forall a[(d \cap (a \cap T)) \wedge (a \cap \Delta)])$

$$\Vdash \dot{a} \dot{\epsilon}' \left[\begin{array}{c} \overline{d} \\ \overline{a} \rightarrow d \cap \epsilon \\ \overline{a} \cap a \\ \overline{d} \cap (a \cap p) \\ \hline I_p \end{array} \right] = \rangle p$$

Ésta tiene como valor la extensión de una relación. Si se apela a las definiciones de las funciones

anteriores $\Gamma \cap (\Delta \cap \rangle T)$ corresponde a $\left[\begin{array}{c} \Gamma \cap \Delta \cap \dot{a} \dot{\epsilon}' \left[\begin{array}{c} \overline{d} \\ \overline{a} \rightarrow d \cap \epsilon \\ \overline{a} \cap a \\ \overline{d} \cap (a \cap T) \\ \hline I_T \end{array} \right] \end{array} \right]$ y por tanto a $\left[\begin{array}{c} \overline{d} \\ \overline{a} \rightarrow d \cap \Gamma \\ \overline{a} \cap \Delta \\ \overline{d} \cap (a \cap T) \\ \hline I_T \end{array} \right]$. De aquí que “ $\rangle$ ” indica en la expresión $\Gamma \cap (\Delta \cap \rangle T)$ que la relación T mapea el concepto Γ sobre el concepto Δ ⁵²; donde en general, se llama a un concepto, cuya extensión es Γ , concepto Γ ; y a una relación cuya extensión es T, relación T.

Una vez definida la función $\rangle \xi$, para referirse a su recíproca, Frege añade el símbolo $\rangle \xi$. Él lo introduce bajo el argumento que, al ser la equinumerosidad definida por medio de conceptos, la relación inmersa debe validar tanto lo que se dijo antes para la relación T, como lo que corresponde al recíproco. Es decir, ahora se mapea el concepto Δ sobre el concepto Γ (intercambio de roles).

Por consiguiente, si T es la extensión de una relación, entonces $\rangle T$ es la extensión de su recíproco y se define así: $\Vdash \dot{a} \dot{\epsilon}' (a \cap (\epsilon \cap p)) = \rangle p$. De modo que la relación $\xi \cap (\zeta \cap \rangle T)$ tendrá la misma referencia que la relación $\xi \cap (\zeta \cap T)$.

A partir de este razonamiento y con las definiciones anteriores, Frege (1884/1996) simboliza lo afirmado en *Grundlagen*: “el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto

‘equinumérico al concepto F’”. (p. 109). Él parte de la expresión $\left[\begin{array}{c} \Gamma \cap (\Delta \cap \rangle T) \\ \hline \Delta \cap (\Gamma \cap \rangle T) \end{array} \right]$, que corresponde al valor de verdad de la relación T, cuando se da un mapeo biunívoco entre los conceptos Γ y Δ . Estos dos conceptos son equinumericos si existe dicha relación.

⁵² A cada elemento que cae bajo el concepto Γ se asigna un único elemento que cae bajo el concepto Δ .

Si Γ y Δ son consideradas como extensiones de conceptos y T como extensión de una relación, entonces $\text{---}\xi \wedge (\zeta \wedge T)$ es siempre una relación y cualquier objeto puede denotar a T . Por lo tanto

$\text{---}\xi \wedge (\Gamma \wedge (\Delta \wedge T))$ designa el valor de verdad de los conceptos $\text{---}\xi \wedge \Gamma$ y $\text{---}\xi \wedge \Delta$ que son equinumericos. De manera que para un argumento Γ , ella corresponde al valor de la función $\text{---}\xi \wedge (\Gamma \wedge (\Delta \wedge T))$, la cual a su vez es un concepto cuya extensión⁵³ representa el número que pertenece al concepto Δ . Esto último en su forma general, se define como:

$$\| \text{---}\xi \wedge (\Gamma \wedge (\Delta \wedge T)) \| = \#u$$

Hasta aquí, se han presentado y clarificado las nociones fundamentales del lenguaje formal que Frege construye, el cual es la base que le permite formalizar la definición de número (natural) a partir de los principios lógicos universales, que él había establecido con antelación. Por lo que sigue, sólo nos limitaremos a presentar la definición formal de número natural y algunas proposiciones aritméticas que se deducen de ellos.

3.3. Definición de los números naturales

La revisión anterior termina por fundamentar todo el sistema lógico de Frege, con lo cual él se dispone a definir los números naturales, basado en los principios lógicos antes establecidos. Para esto, define los números cero y uno, y la relación sucesor, la cual permite dar cuenta de todos los demás números naturales. Estas definiciones fueron enunciadas en su segundo libro, apelando al lenguaje natural. En su tercer libro, formaliza estas definiciones utilizando su lenguaje de fórmulas

⁵³ Para Frege, esto es lo mismo que hablar del curso de valores.

y, además deduce algunas verdades aritméticas que son esenciales y que fundamenta su definición de número natural⁵⁴.

3.3.1. Definición de 0 y 1⁵⁵

El número cero se define mediante la simbología antes vista así: $\vdash \mathcal{N}'(\neg \epsilon = \epsilon) = 0$. Donde 0 es el número que pertenece al concepto $\neg \xi = \xi$, que en lenguaje natural se expresa como: “no ser idéntico a sí mismo”, por tanto no hay ningún objeto que caiga bajo él.

El número uno lo define así: $\vdash \mathcal{N}'(\epsilon = 0) = 1$, donde 1 es el número que pertenece al concepto $\xi = 0$. Esto se puede expresar como: “ser idéntico al número cero”, bajo el cual cae sólo un objeto que es el cero.

Frege establece la existencia de dichos conceptos, incorporando el concepto de número a partir de la función $\neg \mathcal{N}u = \xi$. Esta determina que “existe un concepto u que le pertenece un número”.

3.3.2. Definición de f: Relación sucesor

⁵⁴ Se sabe que el proyecto logicista de Frege tiene unos problemas de fundamentación con relación a la ley básica V, los cuales fueron dados a conocer por Bertrand Russell, y que el mismo Frege reconoció. Esto se retomará en la conclusión de este trabajo.

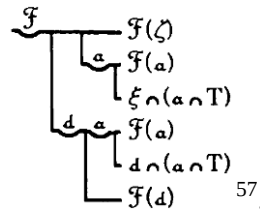
⁵⁵ Frege utiliza esta notación para los números “cero” y “uno”, para aclarar que se refiere al número como objeto lógico y no cómo el símbolo que los designa.

Tras las definiciones dadas queda por concretar qué significa que un número le siga inmediatamente a otro en una serie numérica o que le preceda, lo cual se especifica mediante:

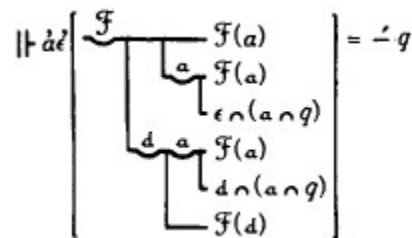
Si la proposición “si todo objeto con el cual Δ permanece en la relación T cae bajo el concepto $\text{---}^F(\xi)$, y si del hecho de que un objeto caiga bajo este concepto, se sigue generalmente que todo objeto con el cual él permanece en la relación T igualmente cae bajo el concepto $\text{---}^F(\xi)$, entonces Θ cae bajo este concepto”

se sostiene en general para todo concepto $\text{---}^F(\xi)$, entonces podemos decir que Θ sigue a Δ en la serie T. (Frege, 1893/1964, p. 102-103, según se traduce).

A partir de la proposición anterior, Frege propone una simbolización en su forma general como sigue:



Se debe hacer la observación de que ξ y ζ corresponden respectivamente a Δ y Θ . La extensión de esta relación va a ser el valor de la función que se forma al remplazar T por una relación arbitraria. Esta última función se nombra a partir de la siguiente definición:



En consecuencia, se puede decir que $\Delta \cap (\Theta \cap \text{---}^F T)$ significa que Θ sigue a Δ en la relación T, o lo que es lo mismo, Δ precede a Θ . Así, para $\Delta \cap (\Theta \cap \text{---}^F \text{---})$ se tiene que Θ sigue a Δ en la serie numérica.

⁵⁷ $\forall F(\forall d[\mathcal{F}(d) \rightarrow \forall a([d \cap (a \cap T)] \rightarrow \mathcal{F}(a))] \rightarrow [\forall a([\xi \cap (a \cap T)] \rightarrow \mathcal{F}(a)) \rightarrow \mathcal{F}(\zeta)])$ por equivalencias lógicas se obtiene: $\{\forall a([\xi \cap (a \cap T)] \rightarrow \mathcal{F}(a)) \wedge \forall a[(\mathcal{F}(d) \wedge [d \cap (a \cap T)]) \rightarrow \mathcal{F}(a)]\} \rightarrow \mathcal{F}(\zeta)$.

3.3.4. Definición de la función $\dot{\cup} \xi$

Para finalizar, Frege formaliza que “la serie de los números naturales tiene un primer elemento pero no hay un último”. Para ello, primero confirma que un número le sigue a otro en la serie numérica o coincide con este, lo que se expresa así: $\vdash_{\xi \cap (\zeta \dot{\cup} T)}$. Para un Δ y Θ argumentos de ξ y ζ respectivamente, esta expresión es interpretada como sigue: Θ pertenece a la serie T que empieza con Δ , o también Δ pertenece a la serie T que termina con Θ . Así pues, ningún número es seguido por el mismo.

La extensión de esta relación es el valor de la función $\dot{\alpha}' \left(\vdash_{\epsilon \cap (a \dot{\cup} \xi)} a = \epsilon \right)$, si se toma a T como argumento de ella. La definición de esta extensión se expresa de la siguiente forma:

$$\Vdash \dot{\alpha}' \left(\vdash_{\epsilon \cap (a \dot{\cup} q)} a = \epsilon \right) = \dot{\cup} q$$

De ahí que la expresión $\Delta \cap (\Theta \dot{\cup} T)$ tiene como referencia el valor de verdad de los Θ que están en la relación T y empiezan con Δ . Análogamente $\Theta \cap (\Theta \dot{\cup} f)$ tiene como referencia el valor de verdad de Θ que está en la serie numérica que empieza con Θ . Por tanto, Θ es un número finito. De esta manera, queda formalizado el primer número de la serie numérica.

Ahora, para la formalización del número $n + 1$, el cual es citado por la proposición: “el número que pertenece al concepto: perteneciente a la serie de los números que termina con n , sigue inmediatamente a n en la serie de números, si n es un número finito”. (Frege, 1893/1964. p. 104, según se traduce); Frege introduce el siguiente juicio:

$$\vdash_{\Theta \cap (n \dot{\cup} f)} n \cap (\dot{\alpha}'(n \dot{\cup} f) \cap f)$$

donde $\dot{\alpha}'(n \dot{\cup} f)$ representa el número del concepto “pertenecer a la serie de los números que termina con n , el cual a su vez le sigue a n ”.

3.3.5. Proposiciones aritméticas

Frege presenta algunas proposiciones aritméticas que se derivan de las definiciones anteriores y que son dadas mediante su simbología:

1. $\vdash a = 1$
 $\vdash \emptyset \cap (a \cap f)$: si a sigue inmediatamente a cero en la serie numérica, entonces a debe ser igual a uno.

2. $\vdash \overbrace{a}^{a \cap u} \emptyset u = 1$: si uno es el número que pertenece al concepto u , entonces existe un objeto a que cae bajo el concepto u .

3. $\vdash \overbrace{\overbrace{d=a}^{d \cap u}}^{d \cap u} \emptyset u = 1$: si uno es el número que pertenece al concepto u , y d y a caen bajo el concepto u , entonces d es igual a a .

4. $\vdash \overbrace{\overbrace{\overbrace{d=a}^{d \cap u}}^{e \cap u}}^{e \cap u} \emptyset u = 1$: Si existe un objeto e que cae bajo el concepto u , y si de ello se sigue que $\forall d$ y $\forall a$ que caen bajo el concepto u se deduce que a es igual a d , entonces el número que corresponde al concepto u es uno.

5. $\vdash \overline{I} f$: como la relación f es una relación entre muchas, entonces esta expresión afirma que: en la serie numérica, para cada número, sólo hay un número que le precede inmediatamente y sólo hay un número que le sigue inmediatamente.

6. $\vdash \overbrace{\overbrace{a}^{a \cap (a \cap f)}}^u \emptyset u = a$: si existe un concepto u al que le pertenece el número a , entonces a es igual a cero o existe un número al que a le sigue inmediatamente en la serie numérica.

Con la definición de los números naturales expuesta anteriormente, Frege finaliza parcialmente⁵⁸ su proyecto logicista. Es claro que una de las nociones lógicas más importantes en el desarrollo de la definición de número natural dada por Frege, es la noción de función. En este sentido, nos permitimos hacer una digresión en relación a una discusión que se ha hecho sobre ella. Esto con el fin de considerar algunos aspectos subyacentes, de orden lógico y ontológico que de cierta forma aclaran la noción de función de Frege.

3.4. La noción de función en Frege desde la perspectiva de Panza (2015)

Es claro que la noción de función ocupa un lugar importante en la matemática moderna, lo cual se manifiesta en las diferentes formas de concebirla. A pesar de ello, no es evidente la determinación de dónde surge y a qué tradición pertenece. De manera que la cuestión radica en preguntarse por la naturaleza de las funciones.

Es preciso detenerse un momento en esta cuestión, en particular para profundizar en el carácter que se le debe atribuir a la noción de función en Frege ¿es una noción matemática? ¿es filosófica? Esto es importante en la medida en que Frege considera la noción de función como el elemento central de su sistema lógico.

Con el propósito de clarificar la noción de función que Frege propone en sus escritos (*Begriffsschrift* y *Grundgesetze*), así como la naturaleza de ella, se van a tener en cuenta las interpretaciones de Panza M. (2015). Dentro de este marco de estudio, él toma como referencia el trabajo de Tappenden en relación a lo que es relevante para Frege según Tappenden, esto con el fin de generar una discusión alrededor de su postura.

⁵⁸ Aún faltaba definir los números reales. Esta definición daba fundamento al análisis matemático, Frege trabaja en esto, en el tomo II de su tercer libro.

3.4.1. La discusión sobre el origen de la noción de función de Frege

Panza (2015) establece que en el marco de un trabajo sobre Frege, Tappenden intuye que es un mito que las matemáticas del siglo XIX se puedan reducir a un proceso de aritmetización del análisis, que consiste en hacer unas reducciones del tipo de Weierstrass. Pero el mito no implica apoyar el contra-mito en el que se considera que la concepción de Frege difiere de Weierstrass y por tanto de la matemática del siglo XIX. En conclusión según Tappenden mito y contra-mito son posturas erradas puesto que Frege estaba impulsado por objetivos filosóficos más que por consideraciones matemáticas.

En efecto, Tappenden afirma que la perspectiva de Frege difiere de Weierstrass. Sin embargo, esto no implica que haya una separación entre Frege y los matemáticos del siglo XIX, pues había algunos matemáticos que tenían concepciones distintas a las de Weierstrass. Uno de ellos era Riemann y según Tappenden, Frege se ubica en la tradición Riemanniana.

Para justificar lo anterior, Tappenden se refiere a la noción de función de cada uno. Así pues, señala que Riemann da una definición de función en la que se requiere de una prueba de existencia, pero separada de cualquier expresión simbólica. Con respecto a Frege, afirma que la cuantificación de la función deja entrever la noción de función en su sentido más general, pero independiente de las expresiones y definiciones. Esto permite a Tappenden afirmar que tanto para Riemann como para Frege, las expresiones no son significativas en la definición de función.

No obstante, Panza (2015) plantea una interpretación que no coincide con la de Tappenden. Así pues, él señala que aunque Frege estuvo preocupado por dar una rigorización del análisis, sus trabajos no están en esta dirección, y por tanto no pueden ser inscritos en el proceso de reducciones sucesivas (por ejemplo, derivadas a límites de reales y enteros a conjuntos). Esta es una de las

razones por las cuales su programa fundacional no implica reducir los números naturales a conjuntos, ni es necesario apelar a ellos para dotar de claridad la noción de función.

Al contrario, considera Panza, para Frege la noción de función es independiente de una noción de número; pero para ofrecer una definición de este último, es necesario recurrir a la noción de función. Pues bien, los números deben ser definidos dentro de un sistema lógico y se considera para su exposición sólo algunas nociones fundamentales, como la de función, que son anteriores a los principios matemáticos.

Así mismo, Panza (2015) cuestiona el hecho de considerar a Frege como parte de la tradición Riemanniana, desde el punto de vista de la noción de función en sí misma. Él considera que no hay razones suficientes para determinar que la noción de función de Frege sea correspondiente con la de Riemann, dado que este último da una noción matemática, y la noción de función de Frege no lo es.

Para Panza, sin duda alguna, el pensamiento de Frege está fuera de la matemática del siglo XIX. Sin embargo, Frege conoció muy bien las discusiones matemáticas de su época, y en sus trabajos toma en consideración los desarrollos matemáticos de aquel momento, por lo cual es probable que esto haya incidido en el rol que él le da a su noción, sin ser estrictamente una extrapolación de aquella tradición matemática. De hecho, la razón por lo cual Frege pudo tomar como eje central de su sistema lógico la noción de función, fue justamente porque concibió una noción no matemática. Por esto, según Panza, la noción de función en Frege puede no haber sido ni la de Riemann ni la de Weierstrass.

Además, para Panza tampoco podría corresponder con la noción de función de Lagrange. Esto se debe en cierta medida a la diferencia que existe en la forma de introducirla en sus respectivos programas fundacionales. Él considera que el sistema formal (*Begriffsschrift*) de Frege es un

sistema significativo, es decir, no sólo presenta los elementos de su lenguaje, sino que fija el significado de ellos y justifica la relevancia de las reglas; por esta razón, la noción de función no debe ser explicada tomando como base nociones previas, ni cómo una noción que deba ser necesariamente posterior a *Begriffsschrift*. Pues la misión de *Begriffsschrift* es dotar a la noción de función de significado. En el caso de Lagrange, se entiende la función como una cantidad abstracta que se forma, a su vez, por medio de operaciones entre cantidades fijas y variables (expresiones). Por tanto, se considera que las funciones son objetos formadas por objetos. Y esto contradice la concepción original de Frege. De lo anterior, es posible señalar que la diferencia entre Lagrange y Frege radica esencialmente en la forma en cómo cada uno concibe un sistema formal. El primero considera a las funciones como objetos y el segundo todo aquello que no es un objeto.

3.4.2. Discusión del programa fundacional de Frege

Todo lo anterior permite abrir la discusión alrededor del programa fundacional de Frege, el cual inicia con la creación de un sistema formal. Panza (2015) hace referencia a este sistema afirmando lo siguiente “...La fundamentación de la aritmética en la lógica significa reducir las nociones matemáticas de conjunto y correspondencia a las nociones lógicas de concepto y relación. Esto es justo el objetivo de *Begriffsschrift* ”. (p. 72, según se traduce). Para hacer la reducción se debe recurrir a los principios básicos de la lógica, los más simples. En otras palabras, esto significa que antes de tales principios no puede haber más reducciones. Ahora bien, una vez son fijados tales principios, no se puede ir más atrás de ellos, pero se necesita de algo previo, para comunicarlos, que Frege llama “exposición”. Dicha exposición se debe entender como una elucidación, cuyo papel primordial es facilitar los saberes necesarios para preparar el estudio de la lógica y las matemáticas, es decir es una propedéutica de éstas, aunque no puede ser explicada por medios lógicos.

Tal elucidación, afirma Panza, toma un roll diferente dependiendo de si se trabaja con contenidos reducibles o irreducibles. En los reducibles (por ejemplo los conceptos y las relaciones

que son funciones de uno y dos argumentos respectivamente, y los cuales tienen como valor los valores de verdad) la elucidación da claridad y permite que surjan algunas definiciones explícitas, pero informales. En los irreducibles sólo puede dar claridad si se conjetura sobre ellos. Un ejemplo de contenidos irreducibles es la noción de función en general, que según Frege es contraria a los objetos. Esto significa que ella no puede ser ni cantidad, ni conjunto, ni número, ni expresión; los primeros son objetos y el último una configuración de ellos. Por lo tanto, se considera que la noción de función precede a la matemática, lo que implica que es una noción lógicamente primitiva (Panza, 2015).

Esta consideración, unida con la elucidación expuesta anteriormente, permite excluir el modo de entender a las funciones como conjunto de pares. Sin embargo, Frege no puede precisar qué tipo de entidades son las funciones, pues para él todo lo que no es función es objeto y viceversa. Por ello, él solo puede limitarse a explicar cómo trabajan las funciones dentro del lenguaje natural y las versiones recopiladas que son usadas en matemáticas; en particular, él explica la forma cómo dichas funciones se han diseñado en el marco de *Begriffsschrijf*. Para Frege, es necesario recurrir a las funciones para poder dar cuenta de los avances dentro de su lenguaje formal; no obstante, ellas no son componentes reales de dicho lenguaje. Esto se evidencia en el hecho de que la función sólo cobra sentido cuando hace referencia a algún objeto, sea concreto o abstracto, pues por sí misma no se sostiene.

En relación a lo anterior, Panza (2015) afirma:

En mi opinión ... la afirmación de que las funciones no son objetos sólo se explica parcialmente: según Frege, apelar a las funciones es indispensable para fijar el modo en que su lenguaje formal se ejecuta, pero las funciones no son como tal componentes reales de este lenguaje. En general, las funciones se manifiestan a sí mismas haciendo referencia a objetos –ya sea concretos o abstractos–, y afirmaciones sobre ellos, pero no son como tal habitantes reales de un mundo *concreto* y *abstracto*. (p. 75, según se traduce)

En resumen, para Panza, la función en Frege es una manera objetiva de explicar, es un marco explicativo que no es concreto ni abstracto sino que sirve para esclarecer la estructura lógica del lenguaje y del pensamiento. Para precisar esta idea general, Panza hace un análisis de la noción de función que Frege introduce en sus escritos. Él dice que para formar una afirmación dentro del sistema formal, se debe anteceder el signo $\vdash$ a los términos apropiados. Estos términos pueden ser nombres de un valor de verdad (verdadero o falso) o formulas apropiadas; las últimas comprometen letras latinas (a , b , etc.) y son adecuadas sólo cuando se transforman en un nombre de valor de verdad, luego de realizar las sustituciones adecuadas de esas letras. En consecuencia, se obtienen dos casos: en el primero, el signo $\vdash$ precede a un nombre de valor de verdad y en el segundo este signo precede a una fórmula apropiada (conocida hoy como fórmula bien formada). El primer caso indica que se obtiene un nombre de la verdad obtenida, es decir se certifica la verdad de lo que se predica. Sin embargo, como Frege considera lo verdadero y lo falso como objetos que existen previamente, entonces los nombres de valores de verdad equivalen a nombres propios que son nombres de objetos. En el segundo caso, afirma que se obtiene lo que la formula constituye para cada reemplazo de las letras latinas, la cual es transformada en un nombre de la verdad.

En lo que respecta al primer caso, Panza señala que no todo nombre propio es adecuado para formar una afirmación en el sistema formal, y que sólo son aptos aquellos nombres de valores de verdad que corresponden a un concepto o a una relación; es decir, si se forma una función cuyos valores son los valores de verdad. Esto indica que no se hace referencia sólo al valor de verdad, sino también a la función, lo cual depende de la naturaleza de ella.

Cuando Frege habla de la naturaleza de la función se refiere a lo siguiente “...Los nombres de sus valores son nombres de valores de una determinada función primitiva, o son generados de una manera determinada componiendo reiterativamente estos últimos nombres y, posiblemente, apoyándose en otros nombres propios introducidos por definición explícita” (Panza, 2015, p. 76, según se traduce). Panza advierte que esta explicación no es aceptada totalmente, puesto que si no

se considera las funciones como componentes reales dentro de *Begriffsschrift*, es inconcebible que ellas puedan ser elementos primitivos o agrupaciones de ellos.

De lo anterior, se deduce que un nombre propio es un nombre de un valor de una determinada función. Para aclarar esto, Panza toma como objeto de estudio a las funciones primitivas que son las funciones de primer nivel, es decir aquellas que tienen por argumento objetos, y son introducidas por definiciones explícitas apropiadas. Algunas de ellas son: La horizontal, la identidad, la negación y la implicación. En este sentido, Panza muestra como Frege recurre a los nombres esquemáticos de los valores de las funciones, para dar la definición de estas funciones mencionadas y que se basan esencialmente en determinar todos los nombres de los posibles valores de verdad que se les puede asignar. En relación a esto, Panza expone que estas definiciones hacen parte del lenguaje de *Begriffsschrift*, pero no los nombres esquemáticos con los que se hace referencia a ellas.

Estos nombres esquemáticos se componen por letras mayúsculas griegas (Γ , Δ , etc.) que pueden ser reemplazadas dentro de *Begriffsschrift* por objetos particulares o por letras latinas. Éstas se utilizan para expresar generalidad y corresponde es el segundo caso mencionado anteriormente.

De esta manera, Panza anota que las letras latinas constituyen una formula bien formada si están dentro de una afirmación, es decir si el símbolo $\vdash$ las antecede; en caso contrario, la formula no tiene validez dentro de *Begriffsschrift*. De modo que sólo se obtiene un nombre esquemático de la verdad si esta letra latina es sustituida por una letra mayúscula griega y si se descarta el símbolo $\vdash$. Lo anterior no aplica para las letras latinas. Así, como la exposición del sistema de *Begriffsschrift* permite trabajar con nombres propios, también lo hace con los nombres de las funciones (f- nombres). Esto es pertinente desde lo notacional, si se considera que algunos términos tales como implicación, negación, identidad y horizontal son utilizados para referirse a esas funciones en particular. Ahora bien desde lo sustancial, las funciones no son objetos y por tanto no pueden tener nombres.

Así pues, para Panza, Frege explica lo anterior desde lo notacional, pues designa un tipo especial de letra⁵⁹ que tiene como propósito mantener lugares vacíos para ser ocupados por otras letras apropiadas, que permiten obtener nombres de valores de las funciones o fórmulas adecuadas que entran en las afirmaciones. Es necesario resaltar que estas letras no son ni esquemáticas, ni variables ni constantes. En síntesis, Panza (2015) afirma lo siguiente:

... Por lo poco que he dicho, debería ser claro que para que las funciones se manifiesten en *Begriffsschrift*, no es necesario que ellas sean componentes reales de su lenguaje. Aunque las cosas son menos claras para el lenguaje de la exposición de este sistema, debido a la presencia de f -Nombres, no hay duda de que, para Frege, estos nombres son herramientas para la formación de los nombres propios y afirmaciones, o para el análisis de ellos. A mi entender, esto es justo lo que quiere decir con su conocida metáfora sobre la naturaleza de las funciones insaturadas. (p. 79, según se traduce).

En conclusión, para Panza, no es trivial hacer un análisis de la noción de función en Frege, y más cuando ella es el elemento central de su sistema lógico, aunque no sea posible asignarle una naturaleza definida. Lo que es relevante es la forma en como ellas deben ser trabajadas, según Frege, tanto en su sistema formal como en su exposición, y todo lo que es posible representar bajo esta estructura lógica que dota de rigor la operatividad entre las formulas.

⁵⁹ Las letras a las que aquí se hace referencia coinciden con las letras minúsculas griegas ζ y ζ̇.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se constató la importancia que tuvo para Frege el pensamiento deductivo, como un proceso de consolidación de la aritmética. Es decir, mediante este tipo de pensamiento en Frege, se puede observar su interés en dar un fundamento a la matemática, la cual hasta el siglo XIX tenía una base aún muy débil, pues no había una buena comprensión de la naturaleza de los objetos fundamentales con los que ella trabajaba, en particular no existía un acuerdo claro de lo que eran los números naturales.

Sumado a lo anterior, el sistema lógico de Frege permitió introducir la lógica de segundo orden, pues, como se evidenció durante el desarrollo de este trabajo, Frege incorporó una notación para referirse a los cuantificadores y desarrolla una teoría de la cuantificación, para predicar no sólo sobre objetos sino sobre relaciones; además, en dicho sistema él simboliza y garantiza la verdad de algunos enunciados del lenguaje natural, como lo son: “y”, “o”, “ni”, “ningún”, etc. Es por ello que Frege es considerado como pionero de la lógica clásica.

Así mismo, gracias al trabajo de Frege, la lógica es la ciencia que permite garantizar el rigor y la formalización de las definiciones dadas en las ciencias, pues con ella se puede determinar la verdad, en un sentido clásico, de las proposiciones científicas, eliminando en lo posible las ambigüedades provenientes del lenguaje natural. En este sentido, se interpreta su proyecto de demostrar que las verdades de la matemática son deducibles de las verdades de la lógica. Aunque este trabajo, como se sabe, se centró en una pequeña porción de su programa: estudiar los principios de la aritmética, como principios derivados de la lógica.

En consecuencia, las leyes aritméticas son analíticas, luego las fórmulas numéricas deben ser deducidas a partir de enunciados universales. Por tanto, para Frege, se debe partir de una definición

general de número. Una definición particular no permite dar cuenta de la generalidad de dichas leyes porque carecería de rigor.

En lo que concierne a lo ontológico, en la definición de número natural de Frege se concluye que los números naturales son objetos abstractos, pues estos son obtenidos mediante los conceptos y no de las cosas. En efecto, estos no pueden ser considerados como algo subjetivo, no son propiedades de las cosas y no provienen del mundo exterior, pues aquí las leyes aritméticas quedarían sometidas a las representaciones mentales, y por tanto, perderían rigurosidad y validez.

En este sentido, se justifica la postura de Frege cuando considera los números como algo objetivo proveniente de la razón y, en consecuencia independiente de nuestras percepciones y configuraciones mentales que sólo sirve para hacerse una representación vaga de ellos. La existencia de los números y de las verdades aritméticas es independiente del sujeto, su verdad se funda antes de la actividad pensante, lo que corrobora que deban ser definidos en términos puramente lógicos. Esto puede calificarse como un “platonismo lógico”. En este sentido, se reconoce los números como objetos y no causales, pertenecientes a los conceptos; conceptos que son a su vez funciones, como entidades predicativas insaturadas y los números como entidades completas saturadas.

En relación a lo epistemológico, se tiene que los números son definidos desde un principio de abstracción, identidad entre los conceptos (equinumerosidad), el cual permite acceder, en cierta forma, a la naturaleza de los objetos–número y dan cuenta de la existencia de ellos. Esto explica y responde a la pregunta que desde la formulación del proyecto se planteó: ¿Cómo un sujeto causal puede acceder a objetos de naturaleza abstracta o no causal? Así pues esta relación explica el vínculo filosófico e históricamente problemático entre lo concreto causal y lo abstracto no causal.

Efectivamente el número se deriva de los conceptos, y es en los conceptos que esta su soporte; pero esto se da mediante la abstracción, pues sobre ellos cae todo lo externo, interno, lo espacial, temporal, lo no espacial y lo atemporal.

Para Frege, las leyes aritméticas tienen aplicabilidad en el mundo exterior pero no son propiamente propiedades de las cosas externas, ya que se fundamentan en la forma de validación de la prueba que es independiente del pensamiento del sujeto, y por tanto de las intuiciones. Estas aplicaciones que son explicadas en el mundo sensible, tienen fundamento pues se construyen a partir de elaboraciones lógicas de hechos observados; sin embargo, no se desconoce que aquí se evidencia un puente entre lo concreto y lo abstracto.

Finalmente es preciso aclarar que, a pesar de que el trabajo de Frege hizo grandes aportes al desarrollo de la lógica, antes de terminar el segundo volumen de su tercer libro, Bertrand Russell envía una carta a Frege informando que una de sus leyes básicas conducía a contradicciones. Esta corresponde a la ley V, la cual, como vimos, establece una relación de equivalencia entre los conceptos y sus extensiones. El problema con la ley V de Frege es que supone que para todo concepto se puede establecer la cantidad de objetos que caen bajo estos, pero esto no se cumple para toda función. Bertrand Russell muestra a Frege un caso particular de esta paradoja. Las extensiones, según Frege, pueden caer bajo un concepto. En este sentido, si se tiene el concepto “clase que no se pertenece a sí misma”, Russell pregunta si su extensión “clase de todas las clases que no se pertenecen a sí misma” cae bajo el concepto antes definido. La respuesta conduce a dos casos:

- Si se pertenece a sí misma, no debería caer bajo este concepto puesto que ahí solo están las que no se pertenecen a sí misma, pero como la extensión abarca todas las que no se pertenecen a sí misma, entonces ella no se pertenece a sí misma.

- Y si no se pertenece a sí misma, sí debería caer por cómo está definido el concepto, pero como la extensión recoge todas las que no se pertenecen a sí mismas entonces ella debe pertenecerse a sí misma. (Mosterín, 1996)

Lo que significa que se pertenece a sí misma si y sólo si no se pertenece a sí misma, es decir se tiene una contradicción. Así pues, no siempre es posible pasar de un concepto a su extensión sin caer en contradicción. De esta circunstancia resulta que Frege debería hacer una redefinición de los componentes esenciales de su sistema lógico, entre ellos: concepto, extensión, función y curso de valores; los cuales le permiten dar su definición de número. Esto ocasiona que todo su sistema sea alterado. (Ávila, 1992). Por esta razón, él termina abandonando su tesis logicista.

Sin embargo, con todo esto Frege sigue siendo considerado como uno de los pensadores que dio una de las definiciones más cercana de lo que debe considerarse como número natural. Además, estudios posteriores han mostrado que es posible que su sistema tenga validez bajo ciertos parámetros. A causa de ello se han propuesto una variedad de sistemas, que se derivan del sistema propuesto por Frege, cada uno con una teoría consistente que permite el desarrollo de una porción significativa de las matemáticas (Los neofregeanos Bob Hale y Crispin Wright, por ejemplo). Entre estos, Burgess, J. (2005) expone esos sistemas y los métodos que se pueden usar para poner en juego el sistema de Frege, y determinar hasta qué punto las matemáticas pueden ser construidas en ellos. El estudio de estas reformulaciones del trabajo de Frege, se deja abierto para una futura investigación.

Bibliografía

- Andrade, J. (2009). Una investigación filosófica, dos tradiciones: Frege y Husserl. Universidad Javeriana, Bogotá D.C, Colombia.
- Ávila, A. (1992). La definición de número en Gottlob Frege. CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía, XXIV (72), 73-101.
- Bocardo, E. (1998). La definición de los numerales de Frege. Thémata, Revista de Filosofía, (19), 41-58.
- Burgess, J. (2005). *Fixing Frege*, Princeton University Press, Princeton: New Jersey.
- Frege, G. (1879). “Begriffsschrift”. In Jean van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel* (pp. 1-27) Cambridge: Harvard University Press, 1967.
- Frege, G. (1879). *Conceptografía: Los Fundamentos de la aritmética*. [Traducción de Hugo Padilla]. México DF: UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, 1972.
- Frege, G. (1884). Los Fundamentos de la Aritmética [Traducción J. Mosterín]. In J. Mosterín (Ed.), *Escritos filosóficos* (1ed., pp. 30-144). Barcelona: CRÍTICA, 1996.
- Frege, G. (1893). The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System [Traducción de Montgomery Furth]. Berkeley and Los Ángeles, California: UNIVERSITY OF CALIFORNIA PRESS, 1964.

- Frege, G. (1903). Translation of parts of Frege's Grundgesetze Der Arithmetik: Selection from Volume I [Traducción P. E. B Jourdain y J. Stachelroth]. In P. Geach And M. Black (Ed.), *Translations From The Philosophical Writings Of Gottlob Frege* (pp. 137-159). Oxford: Blackwell, 1960. Recuperado de: <http://www.olimon.org/uan/frege-writings.pdf>
- Kenny, A. (1995). Introducción a Frege (Traducción de Carmen García Trevijano). Madrid. 1997.
- Mosterín, J. (1996). Introducción al pensamiento de Frege. En J. Mosterín (Ed.), *Escritos filosóficos* (1ed., pp. 7-28), Barcelona: CRÍTICA, 1996.
- Panza, M. (2015). From Lagrange to Frege: Functions and Expressions. En Panza, M., Sinaceur H. & Sandu, G., *Functions and Generality of Logic: Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms* (pp. 59-93), Paris: Springer, 2015.
- Serení, A. & Panza, M. (2013). From Frege to Gödel (Through Hilbert). En M. P. Sereni, *Plato's Problems* (págs. 45-54). New York: PALGRAVE MACMILLAN.