



**La mirada curricular de futuros profesores en la planificación de lecciones con el uso de
una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre función cuadrática**

Tesis presentada por:

Mg. María Fernanda Mejía Palomino

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Santiago de Cali

Junio de 2025

**La mirada curricular de futuros profesores en la planificación de lecciones con el uso de
una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre función cuadrática**

Mg. María Fernanda Mejía Palomino

Tesis para optar el título de Doctora en Educación, énfasis Educación Matemática

Director de tesis Dr. Diego Garzón Castro

Universidad del Valle

Codirectora de tesis Dra. Andrea Cárcamo Bahamonde

Universidad Austral de Chile

Comisión Evaluadora

Dr. Claudio Fuentealba Aguilar

Universidad Austral de Chile

Dr. Walter Fernando Castro Gordillo

Universidad de Antioquia

Dr. Luis Ángel Bohórquez Arenas

Universidad Distrital

Francisco José de Caldas

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Santiago de Cali

Junio de 2025

Dedicatorias

Esta tesis es dedicada a mi familia, en particular a:

Milton, por creer en mí y por darnos un mejor bienestar.

Adela, por sus oraciones y por estar siempre para ayudarnos.

Sara, por las alegrías de mi infancia y valor de la letra escrita.

Fernando, por sembrar en mí el valor de la palabra, la familia y la honestidad.

Y especialmente a:

Al creador del amor y de la vida. Milagros que surgen de manera inexplicable para dar luz.

Edinsson,

Juntos en diferentes versiones del amor.

Juntos construyendo una familia y emprendiendo caminos.

Beatriz,

Te conocí fuerte e independiente.

Con los años, te volviste débil y dependiente.

Ambas versiones de mi madre me enseñaron que el amor es fuerte.

Siempre en mi corazón.

Johan David y Emmy Valentina, hijos.

Verlos crecer ha sido mi fuerza para vencer la tristeza o los momentos de desesperanza. Su vida me ha dado un amor, puro, verdadero y diferente a los amores conocidos. Cada uno de sus logros, me llena de inmensas alegrías. Son mi fuente de energía y la razón de mi vivir.

Este tiempo ha pasado entre besos y abrazos, películas y lecturas, escritura de una tesis y seminarios. La tesis me ha ocupado entre ideas claras o confusas, pero al fin se ha terminado. El después de la tesis ha llegado.

Agradecimientos

En la producción de una tesis, siempre existirá un grupo de personas e historias que fueron esenciales. Esta tesis se logró finalizar gracias al apoyo de:

Mi director Dr. Diego Garzón Castro, han sido más de dos décadas de experiencias académicas y enseñanzas. Siempre en busca de la perfección y la profundidad de las ideas. En este caminar juntos, valoró su delicadeza en sus opiniones cuando las cosas no iban bien.

Mi codirectora Dra. Andrea Cárcamo, su precisión, prontitud en las revisiones, palabras de aliento y valorar siempre lo bueno, generaron en mí, la confianza y las ganas de persistir llegar al final. Espero fructificar sus esfuerzos. Seguiremos trabajando en la divulgación de esta tesis. Me siento honrada de ser su primera doctoranda.

Futuros profesores de matemáticas, su ayuda y disposición permitieron el desarrollo de esta investigación. Orgullosa de verlos prosperar en los caminos de la educación matemática.

Dra. Ceneida Fernández, su orientación en la pasantía de investigación en Alicante nos permitió cerrar y ver el problema desde otra perspectiva. Su generosidad académica se ha extendido en el tiempo, como en la elaboración de un artículo guía para esta investigación.

Grupo GIDIMAT-UA sus valiosos comentarios durante un ensayo de sustentación de esta tesis contribuyeron a su mejora. Su producción académica ha sido gestora de esta investigación. Inolvidable acogimiento en Alicante. Fue grato conocerlos 😊.

Evaluadores de esta investigación, Dr. Walter Castro, Dr. Ángel Bohórquez y Dr. Claudio Fuentealba, sus comentarios nos ayudaron a refinar el desarrollo y escritura de esta tesis.

Compañeros y profesores del doctorado (cohorte 2017, 2018 y 2019), sus recomendaciones en las sesiones de estudio compartidas fueron valiosas. Especialmente quiero expresar mi gratitud a mis profesores: Dr. Evelio Bedoya, Dr. Hilbert Blanco, Dr. Luis Arboleda

y Dr. Edgar Guacaneme. Compañeros graduados, Humberto, Wilmer, Leonel, Arnulfo, Yonathan, Andrés y Deysi, verlos llegar al final me llenó de esperanzas. A mis compañeros que aún siguen en proceso, Wilderbrando y Edinsson, mi fuerza y deseos para que culminen su tesis.

A Leidy Cristina Cumbal por su compañía en Alicante, ayuda y acertadas sugerencias.

A mi grupo de amigas, amigos y familia, mi soporte emocional: María Inés, Olimpia, Gloria, Nohemy, Teresa, Edinsson, Valentina, Johan, Adela, Agustín, Hortensia, Olga... Mejor, gracias a cada uno de los que han estado conmigo, con su compañía, una palabra o un gesto para darme ánimo y celebrar como suyo este logro.

A los futuros lectores de esta tesis, espero que sea de utilidad. Si tienen tiempo, me gustaría conocer sus apreciaciones, dudas y comentarios. Dejo mi correo personal mafanda1216@yahoo.com.ar e institucional maría.fernanda.mejia@correounivalle.edu.co.

Quisiera terminar con esta reflexión: el futuro es un estado incierto de posibilidades. El pasado se vive en el recuerdo. De nuestro presente depende el pasado y el futuro. Así que vive un presente sin añorar el pasado y sin dejar asuntos irresueltos para el futuro. Porque cada pequeña acción del presente es el generador de una gran acción del futuro. Así que, una tesis se hace en el presente, poco a poco. Un párrafo diario es insignificante, pero al mes serán 30 párrafos y en muchos días, tendrás una tesis. Gracias Dr. Wilmer Ríos, seguí tu consejo.

Cuando culminar una tesis ha sido difícil, escuchar aprobado es fascinante. Indudablemente que este momento de mi vida fue una experiencia exigente que no voy a olvidar.

Postdata:

He escrito muchas veces la dedicatoria y los agradecimientos; parecen sencillos, pero las palabras, al estar enredadas con sentimientos, vuelven una y otra vez a mi mente, para escribir y borrar, generando círculos viciosos de cuestionamientos sobre ¿Qué escribir? ¿Cómo escribirlo?

Resumen

Este estudio caracteriza la mirada curricular de futuros profesores de matemáticas en la planificación de lecciones sobre función cuadrática con el uso de trayectoria hipotética de aprendizaje, proporcionada por la investigadora, en el contexto de una investigación de diseño.

En la fase de preparación y diseño, los futuros profesores cambiaron la trayectoria hipotética de aprendizaje al planificar por primera vez una lección sobre función cuadrática. En la fase de análisis retrospectivo y rediseño, los futuros profesores reflexionaron sobre la implementación de las actividades de aprendizaje y cambiaron la trayectoria hipotética de aprendizaje al planificar por segunda vez una lección sobre función cuadrática.

Los documentos escritos y las entrevistas semiestructuradas, centrados en los cambios realizados por los futuros profesores a la trayectoria hipotética de aprendizaje, fueron analizados en relación con las habilidades propias de la mirada curricular: atender, interpretar y decidir.

Los resultados evidencian que la atención de los futuros profesores de matemáticas se concentró en tres focos: (i) la caracterización de los artefactos, (ii) la incorporación/ eliminación de información y la formulación de preguntas específicas, y (iii) la anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes. Si bien decidieron mantener inalterado el objetivo de aprendizaje de la trayectoria hipotética de aprendizaje, modificaron las actividades correspondientes a los focos de atención (i) y (ii). Asimismo, sugirieron incorporar elementos del foco de atención (iii) en el proceso de aprendizaje hipotético. En las entrevistas semiestructuradas, los futuros profesores evidenciaron su habilidad interpretativa de la mirada curricular al justificar los cambios realizados en la trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la función cuadrática durante la planificación de una lección.

Palabras clave: mirada curricular, investigación de diseño, trayectoria hipotética de aprendizaje, función cuadrática, formación inicial de profesores de matemáticas.

Tabla de contenido

Resumen	6
Lista de tablas	11
Glosario de siglas	13
Introducción	14
Aspectos generales de la investigación	17
Planteamiento del problema	17
Objetivos de la investigación	22
Objetivo General	22
Objetivos específicos	22
Justificación	22
Antecedentes	24
Investigaciones sobre THA y formación de profesores	24
Algunas investigaciones sobre la competencia docente mirada profesional	28
Marco teórico	39
Una THA (THA0) sobre función cuadrática	39
Las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada profesional con recursos curriculares	47
Referentes metodológicos	52
Aproximación de investigación	52
Investigación de diseño	52
Participantes	58
Instrumentos de recolección de información	60
Análisis de los datos	61

Resultados de la investigación	71
Resultados del primer ciclo del experimento de enseñanza colectivo	72
Análisis de los cambios en la THA0 (THA1) propuestos por el primer grupo de FPM	72
Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.	72
Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.	73
Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.	74
Análisis de los cambios en la THA1 (THA2) propuestos por el primer grupo de FPM	78
Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.	78
Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.	79
Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.	80
Consideraciones de la mirada curricular del primer ciclo	86
Resultados del segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo	91
Análisis de los cambios en la THA0 (THA1) propuestos por el segundo grupo de FPM	91
Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.	91
Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.	95
Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.	96
Análisis de los cambios en la THA1 (THA2) propuestos por el segundo grupo de FPM	101
Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.	101
Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.	103
Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.	108

Consideraciones de la mirada curricular en el segundo ciclo	115
Comparación de los resultados entre el primer y el segundo ciclo	122
Conclusiones y discusiones	126
Construir una THA0 sobre función cuadrática	126
Aspectos a los que atienden e interpretan los FPM sobre los cambios en una THA sobre función cuadrática	128
Aspectos que deciden los FPM sobre los cambios en una THA sobre función cuadrática	131
Características de la mirada curricular de los FPM en los cambios propuestos en una THA	132
Los aspectos que atienden, interpretan y deciden los FPM en los cambios en una THA	139
Aportes de esta investigación	142
Limitaciones de la investigación	144
Proyecciones	146
Actividades académicas relacionadas con la investigación	148
Referencias	150
Anexo 1. Entrevistas semiestructuradas	166
Anexo 2. Trayectoria real de aprendizaje del segundo grupo de FPM	169
Anexo 3. Registro de observación del segundo grupo de FPM	177
Anexo 4. Primer nivel de análisis	187
Anexo 5. Encuesta de caracterización de los FPM	209
Anexo 6. Aspectos que atienden y deciden y aspectos que atienden e interpretan los FPM	221

Tabla de Figuras

Figura 1

Clasificación de lentes teóricos sobre la mirada profesional19

Figura 2.

Actividades y relaciones de las habilidades de la mirada curricular.....49

Figura 3.

Ciclo de enseñanza (Simón, 1995, p. 136).....54

Figura 4.

Resumen de la investigación de diseño para el análisis de la mirada curricular de FPM.....55

Figura 5.

Práctica docente de los FPM en el experimento de enseñanza colectivo.....58

Figura 6

Descripción de la AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA064

Figura 7.

AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA1 del primer grupo de FPM65

Figura 8.

AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA2 del primer grupo de FPM66

Figura 9.

Codificación en las entrevistas semiestructuradas del primer grupo67

Figura 10.

Codificación en las entrevistas semiestructuradas del segundo grupo.....68

Figura 11.

Ventana del software MAXQDA70

Figura 12

Número de cambios e interpretaciones de los aspectos atendidos del primer grupo de FPM.91

Figura 13.

Número de cambios e interpretaciones de los aspectos atendidos del segundo grupo de FPM...122

Figura 14.

Comparación de las habilidades de la mirada curricular de los dos grupos de FPM.....125

Figura 15.

Actividades y relaciones de las habilidades de la mirada curricular de esta investigación.136

Figura 16.

Modelo de razonamiento curricular137

Figura 17.

El modelo de razonamiento curricular con el uso de una THA en la planificación de lecciones 138

Lista de tablas

Tabla 1.

THA0 sobre función cuadrática45

Tabla 2.

Práctica docente e instrumentos de recolección de datos.....60

Tabla 3.

Resumen de los niveles de análisis de datos de la mirada curricular de FPM62

Tabla 4.

Cambios en la AA1 de la THA0 por el primer grupo de FPM respecto a los focos de atención...69

Tabla 5.

Aspectos interpretados respecto a la caracterización de los artefactos en la THA170

Tabla 6.

THA1 del primer grupo de FPM	76
------------------------------------	----

Tabla 7.

THA2 del primer grupo de FPM	83
------------------------------------	----

Tabla 8.

Habilidades de atender, interpretar y decidir en la planificación de lecciones del primer grupo de FPM	86
--	----

Tabla 9.

THA1 del segundo grupo de FPM	99
-------------------------------------	----

Tabla 10.

THA2 del segundo grupo de FPM	110
-------------------------------------	-----

Tabla 11.

Habilidades de atender, interpretar y decidir en la planificación de lecciones del segundo grupo de FPM	115
---	-----

Tabla 12.

Documentos publicados sobre la investigación doctoral	149
---	-----

Tabla 13.

Documentos en proceso de publicación sobre la investigación doctoral	150
--	-----

Glosario de siglas

Actividad de aprendizaje (AA): Son tareas o problemas propuestos a los estudiantes. Es uno de los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Futuros profesores de matemáticas (FPM): Estudiantes de una licenciatura en matemáticas que cursan los últimos semestres de su programa de formación y realizan su práctica docente en una institución educativa.

Ministerio de Educación Nacional (MEN): Entidad del gobierno de Colombia encargada de regular y vigilar la educación (Decreto 088, 2000, artículo 1 y 2).

Trayectoria hipotética de aprendizaje (THA): Es un modelo teórico para el diseño de la instrucción matemática que incluye un objetivo de aprendizaje, actividades de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simon, 1995, 2020). Las THA son productos de investigaciones de diseño (Bakker, 2018b) y recursos curriculares (Rezat, 2024).

En esta investigación de diseño se distinguen distintas versiones de THA. La THA0 corresponde a la propuesta inicial elaborada por la investigadora y presentada a los futuros profesores de matemáticas (FPM), quienes la analizan y cambian en la planificación de una lección. Estos cambios dan origen a la THA1, que representa la primera planificación de una lección elaborada por los FPM en la fase de preparación y diseño. Posterior a la implementación de las AA de la THA1, los FPM proponen la THA2, entendida como una segunda planificación de una lección que surge en la fase de análisis retrospectivo y que constituye un rediseño de la primera planificación.

Introducción

Esta investigación considera que en la formación inicial de profesores de matemáticas se deben desarrollar competencias docentes en el ejercicio de prácticas profesionales específicas (Llinares, 2023). En particular, este estudio caracteriza la competencia docente mirada curricular en la planificación de lecciones con el uso de una THA0 sobre función cuadrática.

La THA0 es un recurso curricular porque proporciona una secuencia de actividades de aprendizaje y ofrece oportunidades para aprender (Rezat, 2024). A su vez, las THA son herramientas metodológicas (Bakker, 2018b; Bakker y Smit, 2018) por su vinculación con el desarrollo de investigaciones de diseño, en particular, su uso en la planificación de lecciones ha permitido caracterizar la competencia docente mirada curricular.

Este informe final de investigación se organiza en capítulos. El primer capítulo aborda el planteamiento del problema, objetivos, justificación y antecedentes. El planteamiento del problema presenta la necesidad de indagar sobre la mirada curricular de FPM en la planificación de lecciones con el uso de una THA sobre función cuadrática. La justificación destaca la importancia del desarrollo de la competencia docente mirada profesional y el papel de las THA en la formación de profesores. Los antecedentes dan cuenta de las investigaciones sobre la formación de profesores y THA, estudios sobre la mirada profesional y los recursos curriculares.

El segundo capítulo presenta el marco teórico distribuido en dos aspectos. Se inicia con el resumen de la construcción de la THA0 y se continua con la descripción de las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada profesional al analizar recursos curriculares.

El tercer capítulo presenta los referentes metodológicos. Se establece la relación entre la THA y la investigación de diseño. En particular, se realiza un experimento de enseñanza colectivo en el que un grupo de FPM participa de la investigación al realizar su práctica docente (Wittmann, 2021). El experimento de enseñanza se centró en caracterizar la mirada curricular de

los FPM al planificar lecciones con el uso de una THA sobre función cuadrática. Los instrumentos de recolección de información fueron documentos escritos y entrevistas semiestructuradas que evidencian y justifican los cambios en la THA0 al planificar lecciones. Estos instrumentos se vinculan a la fase de preparación y diseño, y a la fase de análisis retrospectivo y rediseño de la investigación de diseño. Se usó el análisis cualitativo recursivo propuesto para el análisis de los datos (Simon, 2019). Los análisis de los cambios en la THA0 propuestos por los FPM al planificar lecciones sobre función cuadrática dieron cuenta de la competencia docente mirada curricular.

El cuarto capítulo presenta los resultados de esta investigación. La atención de los FPM sobre los cambios en la THA0 al planificar lecciones, evidenciados en los documentos escritos y entrevistas semiestructuradas, se agruparon en tres focos: (i) caracterización de los artefactos, (ii) incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas, y (iii) anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes. Por otro lado, la interpretación de los FPM sobre los cambios en la THA0 se centró en las justificaciones fundamentadas en su conocimiento profesional, las cuales fueron detectadas en las entrevistas semiestructuradas. Finalmente, los cambios en la THA0 constituyen las decisiones de los FPM en relación con la competencia docente mirada curricular.

El quinto capítulo presenta las conclusiones y discusiones sobre esta investigación. Se exponen algunas reflexiones entre los vínculos que se establecen entre la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante y la mirada curricular al usar una THA respecto a un modelo de razonamiento curricular (Dingman et al., 2021). Además, se compara el uso de la THA de este estudio con relación a otras investigaciones sobre profesores y se da cuenta de los objetivos (general y específicos) y la pregunta de esta investigación.

También, se incluye un análisis de los aportes, limitaciones y proyecciones de la investigación. Así mismo, se exponen las producciones académicas derivadas de este estudio, como artículos y capítulos de libro publicados o en proceso de publicación.

Este trabajo de investigación doctoral hace parte de la línea de investigación: Prácticas y tecnologías de la información y la comunicación en Educación Matemática (PTICEM) de la Universidad del Valle. Este trabajo es producto del convenio de cooperación en investigación y docencia de la Universidad Austral de Chile y la Universidad del Valle, de Colombia.

Aspectos generales de la investigación

Planteamiento del problema

Es creciente el número de investigaciones relacionadas con la práctica profesional de los profesores de matemáticas y la mirada profesional (Amador, 2020; Amador et al., 2021; Amador, 2022; Dindyal et al., 2021; König et al., 2022; Llinares, 2020; Stahnke et al., 2016, Wei et al., 2023; Yang et al., 2019). Estas investigaciones presentan el desarrollo de herramientas y perspectivas teóricas para desarrollar la mirada profesional de los profesores (Amador, 2020).

Algunas de las prácticas profesionales son: interactuar con recursos curriculares, describir actividades de aprendizaje, anticipar respuestas de los estudiantes, planificar una lección, interpretar las respuestas de los estudiantes al resolver un problema o gestionar las discusiones matemáticas en clase, entre otras (Groenwald y Llinares, 2022; Llinares, 2023).

La competencia docente mirada profesional es la capacidad del profesor para razonar y dar sentido a sus prácticas profesionales a partir de su conocimiento profesional (Godino y Llinares, 2018; Llinares, 2014; Zapatera, 2015). La mirada profesional puede pasar inadvertida en la práctica profesional del profesor de matemáticas (Amador, 2022; Jacobs et al., 2020) ya que no se desarrolla de manera innata y se requiere propiciar su desarrollo en la formación inicial de profesores de matemáticas (Ivars et al., 2020; Llinares, 2013, 2014; Wei et al., 2023).

La mirada curricular (o curricular noticing, Amador et al., 2017) es una perspectiva de la mirada profesional, es la competencia docente relacionada con darle sentido al contenido y a las oportunidades pedagógicas de los recursos curriculares a partir de tres habilidades interrelacionadas: atender, interpretar y decidir (Amador et al., 2017; Males et al., 2015).

La habilidad de atender de la mirada curricular selecciona lo que es relevante de los recursos curriculares para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluye acciones como buscar, localizar e inspeccionar. La habilidad de interpretar los recursos curriculares es lo que le

da sentido a lo que se atiende, conecta las ideas de los profesores sobre los recursos curriculares con su conocimiento profesional y experiencia. En tanto, la habilidad de decidir son las respuestas de lo que se atiende y se interpreta de los recursos curriculares (Dietiker et al., 2018).

Estos recursos curriculares se definen como herramientas que apoyan la instrucción de los profesores antes, durante y después de las interacciones en el aula (Remillard, 2013). En particular, consideramos las THA como un recurso curricular porque determinan actividades de aprendizaje que ayudan a la planificación de lecciones y la interacción en el aula (Remillard, 2013), se construyen a partir de la revisión de otros recursos curriculares (Cárcamo y Fuentealba, 2023) y ofrecen oportunidades para aprender (Rezat, 2024).

Las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada profesional están interrelacionadas, porque para interpretar es indispensable atender y para decidir es necesario atender e interpretar. Es así como, bajo esta postura, las habilidades estarían anidadas y pueden ocurrir de manera simultánea (Philipp et al., 2017; Lee y Lee, 2024). La habilidad de decidir sería la de mayor complejidad (Dietiker et al., 2018). Sin embargo, para estudiar el desarrollo de la competencia docente mirada profesional, los investigadores separan estas habilidades porque a nivel metodológico es útil para analizar el desarrollo inicial de esta (Stahnke et al., 2016).

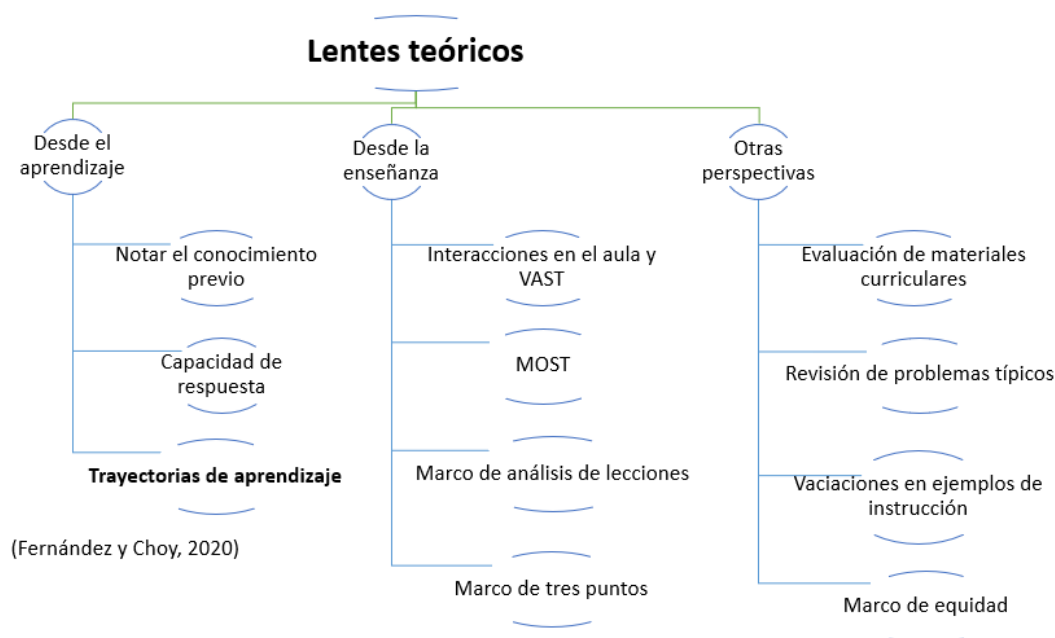
La mirada profesional se conecta principalmente con el profesor, ya que se espera que se demuestren las habilidades que la conforman (atender, interpretar y decidir), independiente del contenido que esté enseñando (Dindyal et al., 2021). Esta conexión se observa, por ejemplo, en el análisis del uso de representaciones matemáticas por parte de los profesores en situaciones de enseñanza relacionadas con fracciones y funciones (Friesen y Kuntze, 2021).

Diversos lentes teóricos han sido propuestos para analizar la mirada profesional, clasificados en relación con el aprendizaje, la enseñanza y otras perspectivas (Fernández y Choy, 2020). Entre estos lentes, las THA les permiten a los profesores comprender el pensamiento

matemático de los estudiantes y tener a su alcance un lenguaje especializado para promover descripciones centradas en el aprendizaje (Fernández y Choy, 2020). Por lo tanto, las THA puede ser usadas como un lente teórico de la mirada profesional del grupo de aprendizaje (Figura 1).

Figura 1

Clasificación de lentes teóricos sobre la mirada profesional



Nota. Lentes teóricos relacionados con la mirada profesional. Las siglas, en inglés, corresponden a: Video Analysis Support Tool (VAST) y Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Students Thinking (MOST) (Fernández y Choy, 2020).

Las investigaciones sobre el uso de THA en la formación de profesores determinaron diversos niveles de interpretación (Edgington, 2012, 2014), análisis de modelos de pensamiento del estudiante (Wilson et al., 2013), su relación con el conocimiento matemático para la enseñanza (Ivars et al., 2018; Wilson et al., 2014; Cumbal, 2020), su vínculo con prácticas de instrucción (Wilson et al., 2015), el desarrollo de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante (Damasco, 2022; Ivars et al., 2018; Ivars et al., 2020; Fernández et al.,

2018; Nickerson et al., 2017; Pechene, 2024), los cambios en el discurso (Ivars et al., 2018; Ivars et al., 2020; Wilson et al., 2017), las percepciones sobre su uso (Wickstrom y Langrall, 2020) y los análisis de su producción (Ferreira et al., 2021).

El futuro de las investigaciones se centra en identificar las acciones específicas que los profesores realizan al utilizar las THA para planificar, hacer su clase y evaluar a sus estudiantes (Edgington, 2012, 2014; Wilson et al., 2013). Además, es importante ampliar las investigaciones sobre la mirada profesional de los profesores de secundaria con THA, dado que son escasas en este nivel y en otros superiores (Nickerson et al., 2017).

Diversas investigaciones han abordado la relación entre los recursos curriculares y el desarrollo de la mirada profesional. Algunos estudios han analizado cómo los profesores enfrentan problemas típicos en la planificación e implementación de lecciones, explorando el rol de la mirada profesional productiva (Choy y Dindyal, 2021). Otros trabajos han investigado las adaptaciones que realizan los docentes a tareas matemáticas desafiantes, así como el apoyo que diferentes programas curriculares ofrecen para fortalecer la mirada profesional sobre pensamiento matemático de los estudiantes (Choppin, 2011; Machalow et al., 2020).

En cuanto a la mirada curricular, son frecuentes las investigaciones sobre profesores al utilizar programas curriculares, libros de texto o actividades de aprendizaje en la planificación e implementación de lecciones (Amador, 2019; Ivars y Fernández, 2023; Lee y Lee, 2024; Males y Setniker, 2019; Parrish et al., 2023). Por ejemplo, se ha analizado la mirada curricular de futuros profesores de primaria al resolver, explicar el razonamiento matemático involucrado y secuenciar tres problemas sobre patrones (Lee y Lee, 2024).

También, se encuentran investigaciones que abordan tanto la mirada curricular como la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Algunos estudios han analizado el trabajo de los profesores en la planificación, implementación y reflexión sobre

actividades de aprendizaje vinculadas al modelado matemático (Kang, 2022). Otros trabajos han explorado las respuestas de docentes de primaria ante cuestionarios sobre conceptos específicos como la medida (Alpizar-Vargas et al., 2024).

Se han desarrollado investigaciones que examinan la mirada curricular en torno a secuencias de actividades sobre el significado de la fracción como parte-todo y sobre el análisis de actividades propuestas en libros de texto, empleando en ambos casos una THA como lente teórico de la mirada profesional (González-Forte et al., 2024; Zorrilla et al., 2024). Asimismo, algunos estudios han incorporado el mapeo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje como parte del análisis del razonamiento curricular de los profesores (Dingman et al., 2021).

Esta investigación propone usar una THA como recurso curricular y herramienta metodológica para caracterizar la mirada curricular en la práctica docente de FPM al participar de un experimento de enseñanza colectivo. Los cambios propuestos por los FPM a la THA al planificar lecciones sobre función cuadrática en el desarrollo de un experimento de enseñanza colectivo hacen que la THA sea a su vez un recurso curricular y una herramienta metodológica.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, el problema de investigación se formula de la siguiente manera: las prácticas profesionales de los FPM al carecer de teorías del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, presentan limitaciones en su eficacia para promover el aprendizaje de sus estudiantes. Para abordar esto, se propone una práctica profesional en la que los FPM planifican lecciones al cambiar una THA sobre función cuadrática, en el contexto de un experimento de enseñanza colectivo. Esta práctica de los FPM permitirá vincular sus razonamientos basados en sus conocimientos profesionales para caracterizar su mirada curricular. Además, esta práctica docente hace parte del programa de formación inicial al que pertenecen los FPM.

Dicho lo anterior, la pregunta de investigación es: ¿Cómo los futuros profesores atienden e interpretan una THA sobre función cuadrática para decidir sobre sus cambios en la planificación de lecciones de dicho contenido matemático?

Objetivos de la investigación

Objetivo General

Caracterizar la competencia docente mirada curricular de los FPM en los cambios realizados en una THA sobre función cuadrática durante la planificación de lecciones.

Objetivos específicos

- Construir una THA (THA0) sobre función cuadrática, fundamentada en la heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes y un modelo de función, para su uso por parte de los FPM en la planificación de lecciones.
- Analizar los aspectos que los FPM atienden e interpretan en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones.
- Analizar las decisiones de los FPM en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones.

Justificación

La literatura en investigación destaca la importancia de incorporar la mirada profesional en la formación inicial de los FPM (Amador et al., 2021; Fernández et al., 2018; Llinares y Fernández, 2021). Asimismo, se reconoce que el desarrollo de esta competencia contribuiría a fortalecer la capacidad de aprender de la propia práctica profesional, considerada un eje central en la formación docente (Llinares, 2013, 2014; Santagata y Yeh, 2016).

En los estudios sobre la mirada profesional se detecta que para los profesores es difícil decidir las actividades de aprendizaje acordes al nivel de aprendizaje de sus estudiantes (Stahnke et al., 2016; Wickstrom y Langrall, 2020).

Hasta el momento, las investigaciones sobre la mirada profesional se han centrado en el progreso de diferentes herramientas y programas de formación, pero con escaso énfasis en el desarrollo de lentes teóricos. El valor de los lentes teóricos no solo radica en la especificidad de lo que se puede mirar (puntos focales), sino que también, promueve que los profesores piensen más sobre sus decisiones de enseñanza. Las THA son lentes teóricas de la mirada profesional para analizar el pensamiento matemático del estudiante (Fernández y Choy, 2020).

Las THA permiten a los profesores tener un enfoque teórico sobre el aprendizaje de los estudiantes (Gravemeijer y Van Eerde, 2009). Las THA son herramientas para propiciar el desarrollo de la mirada profesional. En concreto, el conocimiento sobre el proceso de aprendizaje hipotético ayuda a los FPM a establecer actividades de aprendizaje acordes a la progresión de los aprendizajes y a construir un discurso sobre la comprensión de sus estudiantes (Ivar et al., 2020; Fernández, 2021; Groenwald y Llinares, 2022). Wei et al. (2023) recomienda ampliar las investigaciones sobre la mirada profesional con el uso THA con otras perspectivas diferentes a las de Jacobs et al. (2010) y Van Es (2011).

Recientemente, las THA han sido consideradas recursos curriculares (Gueudet et al., 2023; Rezat, 2024). Sin embargo, hacen falta estudios que exploren la mirada curricular respecto a las THA como recursos curriculares. Además, se reconoce la necesidad de que los profesores tengan a disposición recursos curriculares específicamente diseñados para apoyar la planificación y la implementación de las actividades de aprendizaje. A estos recursos curriculares se les denomina metarecursos (Gueudet et al., 2023). En este estudio, la THA0 sobre función cuadrática propuesta a los FPM para la planificación de lecciones puede entenderse como un metarecurso.

Antecedentes

Los antecedentes están organizados en dos secciones. La primera sección se refiere a las investigaciones relacionadas con las THA en la formación o prácticas profesionales de profesores, y la segunda sección presenta las investigaciones relacionadas con la competencia docente mirada profesional. En la sección de la mirada profesional se muestran algunos estudios de literatura e investigaciones sobre recursos curriculares respecto a la mirada productiva, la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante y la mirada curricular.

Investigaciones sobre THA y formación de profesores

A continuación, se muestran en orden cronológico las investigaciones relacionadas con el uso de las THA en la formación o prácticas profesionales de profesores de matemáticas.

Se reportó el análisis cualitativo del desempeño de dos profesores al planificar e implementar una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre polinomios de segundo grado con 62 estudiantes. Los profesores en la planificación analizaron la primera versión de la THA y decidieron dejarla sin modificaciones. Después de la implementación, los profesores generaron cambios en la THA que tienen en cuenta la resolución de problemas, el uso de tecnologías y contextos interdisciplinarios y cotidianos (Mesquita, 2009).

Se investigó los usos de una THA sobre equipartición por cinco profesores de segundo grado en primaria durante la planificación, implementación y evaluación de una lección. El análisis de los usos de la THA por parte de los profesores estableció un marco de interpretación descrito en tres niveles: emergente, inicial y competente. Estos niveles se describen de manera específica respecto a: actividades y objetivos de aprendizaje, anticipación, supervisión, discusión grupal, evidencia del aprendizaje del estudiante y papel de la instrucción (Edgington, 2012).

Otros estudios analizaron los modelos de pensamiento matemático del estudiante creados por profesores de primaria al usar una THA sobre números racionales. A medida que los

profesores conocían la THA, los procesos de describir, comparar e inferir aumentaron, sus descripciones pasaron de ser genéricas a específicas, sus comparaciones incluían la teoría de la THA y sus inferencias dejaron de ser evaluativas a ver el aprendizaje como una progresión. El uso de THA les permitió a los profesores utilizar sus modelos del pensamiento matemático para explicar y predecir la actividad de los estudiantes (Wilson et al., 2013).

La relación entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el uso de THA también fue objeto de análisis en una investigación con tres profesores de primaria. En este caso, se diseñó un documento teórico que conectaba el conocimiento matemático en la enseñanza (Ball et al., 2008) con la estructura de la THA, para que los docentes anticiparan e interpretaran las acciones de los estudiantes en el desarrollo de las actividades (Wilson et al., 2014).

Se realizó el análisis de los usos de una THA de cinco profesores de primaria al planificar una lección sobre equipartición. En las reuniones de planificación los profesores eligieron las actividades de aprendizaje. En los cuestionarios y las entrevistas se describen los objetivos de aprendizaje y las anticipaciones. Se logró determinar tres niveles de uso (inicial, intermedio y competente) de la THA respecto a: actividades de aprendizaje, objetivos de aprendizaje y anticipación (Edgington, 2014).

En otro trabajo, se estudiaron 19 lecciones de 19 profesores para determinar cómo el conocimiento de una THA sobre equipartición apoyó sus prácticas de instrucción centradas en el estudiante. Estas prácticas de instrucción con una THA se analizaron a partir del referente teórico cinco prácticas para orquestar el discurso de Smith y Stein (2011, citado en Wilson et al., 2015). En el cuestionario previo a la implementación se dio cuenta de la selección del objetivo de aprendizaje, el diseño o selección de actividades de aprendizaje y la anticipación. En la clase se determinó el monitoreo o conexión. En tanto, en entrevistas posteriores a la implementación se determinaron las prácticas de secuenciar y de seleccionar (Wilson et al., 2015).

Se implementó un proyecto de instrucción basado en el uso de cuatro THA sobre el número natural y sus operaciones. Estas THA se encuentran organizadas de acuerdo con perfiles de los estudiantes, los marcadores conceptuales y los niveles. El propósito de esta estructura de las THA fue ayudar a los profesores de primaria a usarla de manera completa en el análisis de respuestas de estudiantes (Edgington et al., 2016).

Los cambios del discurso al usar una THA sobre equipartición fue objeto de análisis en un estudio donde 22 profesores de primaria realizaron entrevistas clínicas, análisis de respuestas escritas, planificación, implementación y discusión de una lección. Los resultados muestran que los profesores lograron incorporar en su discurso la THA para describir el pensamiento matemático de los estudiantes (Wilson et al., 2017).

Entre 2012 y 2018, varias tesis doctorales en la Universidad de Alicante emplearon documentos teóricos (THA), preguntas guía y representaciones prácticas para caracterizar habilidades de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante en futuros profesores. Estos trabajos identificaron perfiles de desarrollo de la competencia mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante (Fernández et al., 2018).

Se estudió el uso una THA sobre equipartición en tres profesores (de grados jardín, segundo y cuarto). Los profesores de jardín y cuarto grado implementaron las actividades de aprendizaje con variaciones del problema. En esta investigación, los profesores recolectaron evidencias del pensamiento de los estudiantes al resolver el problema dando cuenta de las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante. Los resultados revelaron que la THA apoyó la planificación y la comprensión del pensamiento del estudiante (Suh et al., 2019).

En el estudio de caso sobre las percepciones de una profesora de primaria que usa una THA sobre medición de áreas durante un programa de desarrollo profesional. La profesora

planeó e implementó una lección en conjunto con otros profesores e investigadores. La profesora participó en entrevistas con la investigadora para explicar lo que consideró importante del pensamiento matemático de los estudiantes y escribió sus reflexiones. Las entrevistas de la profesora y las reflexiones escritas fueron codificadas respecto a las tres habilidades de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante. En esta investigación, la profesora utilizó la THA para atender el pensamiento de los estudiantes, modificar las actividades y elegir objetivos de aprendizaje (Wickstrom y Langrall, 2020).

En el ámbito de la geometría dinámica, se caracterizó la práctica docente de dos profesores de bachillerato, noveles en el uso de tecnología digital, al planificar una lección con THA sobre traslación. Los resultados muestran que los profesores utilizaron la THA para atender al pensamiento matemático de los estudiantes en la implementación de las actividades de aprendizaje, emplearon su conocimiento tecnológico pedagógico de contenido (Mishra y Koehler, 2008) en sus prácticas profesionales y plantearon orquestaciones instrumentales como: (i) guía y explicación, y (ii) explicación de la pantalla (Cumbal, 2020).

En un taller de formación, se analizaron ocho THA sobre diferentes temas, realizadas por 16 profesores de educación básica (estudiantes entre los 6 a 17 años). En el proceso de aprendizaje hipotético, los profesores incluyeron sus anticipaciones de dificultades, errores y acciones de los estudiantes. En todas las THA se presentaron objetivos (generales o específicos), actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético. Sugieren implementar las THA para generar cambios y evaluarlas en relación con los aprendizajes reales (Ferreira et al., 2021).

La mirada profesional de 18 profesores de educación primaria se estudió al planificar e implementar una THA sobre ecuaciones en un programa de formación con metodología de grupo colaborativo. La mirada profesional se analizó en discusiones durante el programa de formación y con entrevistas durante la planificación y después de la implementación de las actividades de

aprendizaje. En los análisis, los profesores determinaron obstáculos epistemológicos, errores y clasificaron las actividades con mayores dificultades. Los profesores seleccionaron o diseñaron actividades de aprendizaje acordes a los niveles de progresión del aprendizaje propuestos en la THA sobre ecuaciones. Posterior a la implementación, los profesores plantearon actividades de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos epistemológicos y errores identificados en los análisis de las respuestas (Damasco, 2022).

Las decisiones de acción de FPM se indagaron al usar una THA sobre semejanza que integra recursos curriculares digitales. Los datos se obtuvieron de las interacciones estudiante – profesor en la implementación de las actividades de aprendizaje en grado noveno de secundaria triangulados con entrevistas semiestructuradas realizadas a los FPM. Los resultados de esta investigación informaron que la THA les permitió a los FPM atender al pensamiento matemático del estudiante y obtener evidencia limitada de las decisiones de acción en clase (Pechene, 2024).

A lo largo de 15 años (2009–2024), se ha consolidado una línea de investigación que muestra cómo las THA se han convertido en herramientas tanto para apoyar el pensamiento matemático del estudiante como para desarrollar competencias docentes. Varios estudios muestran que las THA permiten a los docentes anticipar errores, interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y tomar decisiones fundamentadas (Wilson et al., 2013, 2015; Suh et al., 2019; Wickstrom y Langrall, 2020). Sin embargo, es necesario analizar las THA en función de los aprendizajes efectivamente logrados por los estudiantes (Ferreira et al., 2021).

Algunas investigaciones sobre la competencia docente mirada profesional

Se retoman algunos artículos sobre revisiones de literatura sobre la competencia docente mirada profesional y que dan cuenta de las habilidades de atender, interpretar y decidir.

En un estudio se seleccionaron y analizaron 60 artículos (entre 1418¹) de revistas científicas publicadas entre enero de 1995 y enero de 2016. Estos artículos se vincularon con las siguientes líneas de investigación: (1) la habilidad de los profesores para notar situaciones en el aula, (2) la habilidad de los profesores para percibir, interpretar y responder al pensamiento matemático de los estudiantes, (3) las habilidades específicas de los profesores en situaciones de la práctica, (4) las habilidades de los profesores en relación con sus conocimientos profesionales (u otras disposiciones) y (5) la habilidad de los profesores para percibir e interpretar tareas matemáticas, así como su potencial educativo (Stahnke et al., 2016).

Con respecto a la habilidad de los profesores para percibir e interpretar tareas matemáticas, y su potencial educativo, se encuentra que los profesores no tienen en cuenta las sugerencias provenientes del currículo o de las investigaciones, ni tienen claro la diferencia entre tareas rutinarias y no rutinarias y el papel de la selección adecuada de las tareas para fomentar el aprendizaje (Stahnke et al., 2016).

Evidenciaron que la mayoría de las investigaciones se centraron en la interpretación (47 estudios), seguida de la atención (38 estudios) y la decisión (32 estudios). En concreto, un tercio de los trabajos exploró la atención y la interpretación, mientras que una cuarta parte analizó las tres habilidades. Existen pocos estudios en relación con las tres habilidades y hace falta un enfoque que conecte las habilidades que conforman la mirada profesional en términos de conocimiento y desempeño (Stahnke et al., 2016).

Afirmaron que la mirada profesional se relaciona con la experiencia y con el conocimiento matemático de los profesores y plantearon que los futuros profesores tienen mayores dificultades en el desarrollo de esta competencia docente (Stahnke et al., 2016).

¹ Artículos que se encontraron disponibles en las bases de datos ERIC, PsycINFO y MathEduc.

En otra revisión de la literatura se seleccionaron y analizaron 27 artículos (entre 611²) de revistas científicas publicadas desde el año 2000 hasta el 2017 relacionados con las perspectivas teóricas de Jacobs et al. (2010) o de Van Es (2011). Esta indagación da cuenta de los aspectos metodológicos de las investigaciones sobre la mirada profesional y FPM (Amador et al., 2021).

Las investigaciones revisadas mostraron diferentes tiempos en su desarrollo (pocos días o hasta un semestre) y momentos para recopilar datos (antes y después del desarrollo de la investigación, múltiples o únicos momentos de la intervención). Además, se detectó que, la mayoría de los instrumentos de recolección de datos fueron: documento escrito, video o audio (Amador et al., 2021).

Recomendaron expandir las investigaciones a periodos más largos (mayor a un semestre) para conocer la correspondencia entre tiempo de la experiencia y el desarrollo de la mirada profesional. También, sugieren considerar el uso de variados instrumentos de recolección de información (por ejemplo, entrevistas u otros medios tecnológicos) y solicitar a los investigadores especificar y fundamentar sus decisiones metodológicas en sus divulgaciones (Amador et al., 2021).

Otro reporte de revisión de literatura indaga 158 artículos sobre la mirada profesional desde el año 2002 hasta el 2022. En el estudio de estos documentos encontraron un aumento significativo de investigaciones sobre la mirada profesional en el año 2021, lo que muestra su importancia. La mayoría de los artículos son cognitivos-psicológicos y de enfoque cualitativo. Los instrumentos más utilizados son los videos e informes escritos. Se resalta el papel de las situaciones prácticas de enseñanza para el desarrollo de la mirada profesional. Entre los

² Artículos que se encontraron disponibles en las bases de datos ERIC y JSTOR.

resultados se encuentra que existen pocas investigaciones que relacionen la calidad de la instrucción y las creencias con la mirada profesional (Weyer et al., 2023).

Un estudio bibliométrico analizó 139 artículos sobre la mirada profesional, publicados entre 2006 y 2021 en la base de datos Scopus. Los resultados muestran que la mayoría de las publicaciones provienen de países como Estados Unidos, España y Alemania. Entre los aspectos más destacados en estas investigaciones se encuentran el uso de videos, la formación inicial de profesores y la mirada profesional de Van Es (2011) y Jacobs et al. (2010). El periodo de 2006 a 2018 registró un crecimiento constante en este campo, luego de un descenso en 2019, con un posterior repunte que evidencia un aumento de interés en el desarrollo de la mirada profesional. Recomiendan ampliar las investigaciones en: la dimensión transcultural, el uso de trayectorias de aprendizaje, la integración de tecnologías y el estudio de profesores expertos (Wei et al., 2023).

Los estudios que a continuación se presentan se relacionan con la mirada profesional y el uso de recursos curriculares.

La mirada profesional se estudió en las adaptaciones a tareas desafiantes, enfocándose en el pensamiento matemático del estudiante. En esta investigación participaron cinco profesores con tres años de experiencia en el uso de estas tareas, y se recopilieron datos a través de entrevistas y videos de clase. Los resultados presentaron que dos profesores adaptaron las secuencias de tareas conectando las estrategias de los estudiantes para mejorar el aprendizaje, mientras que tres profesores simplificaron las tareas al enfocarse solo en respuestas correctas o incorrectas. La inclusión de tareas desafiantes y la discusión docente fueron clave para desarrollar la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante (Choppin, 2011).

Aunque algunos estudios reconocieron la mirada curricular de Males et al. (2015), decidieron hacer una adaptación de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante de Jacobs et al. (2010) para analizar las percepciones de ocho profesores al utilizar dos

programas curriculares alineados a los estándares durante su planificación, implementación y reflexión de lecciones. Los datos fueron obtenidos en entrevistas realizadas antes y después de la implementación de una lección, un cuestionario y videos de clase. Los datos fueron analizados por teoría fundamentada (Roth McDuffie et al., 2018).

De igual manera, se analizó el apoyo de cinco programas curriculares de primaria (tercero a quinto) a la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante. Encontraron que dos programas curriculares apoyaron la comprensión conceptual matemática de los estudiantes, necesaria para la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante. En tanto, dos programas curriculares apoyaron la evaluación como corrección y el último tiene un enfoque que une los dos aspectos anteriores. Concluyeron que una manera de apoyar el análisis las estrategias de los estudiantes respecto a los programas curriculares se dan a partir del reconocimiento de lo procedimental, lo potencialmente conceptual y lo explícitamente conceptual (Machalow et al., 2020).

La mirada profesional productiva se analizó una profesora al utilizar problemas típicos para el desarrollo conceptual y procedimental de sus estudiantes. La profesora logró descubrir usos ocultos de problemas típicos al atender las matemáticas implícitas y relacionar su contenido matemático con el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta investigación analizó tanto la planificación como la implementación de una lección. La mirada profesional productiva de la profesora se determinó en la adaptación de los problemas, en la secuenciación de las preguntas y en las orquestaciones de las discusiones (Choy y Dindyal, 2021).

Se caracterizó la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante de dos FPM al orquestar recursos pedagógicos sobre sentido numérico (dos juegos, un domino de fracciones y focus). Los FPM planificaron e implementaron una lección con el uso de recursos pedagógicos para estudiantes entre los 11 y 12 años en el contexto de un laboratorio de

matemáticas. Los resultados de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante de los FPM determinaron las particularidades de las habilidades: identificar son los aspectos matemáticos que usan los estudiantes en cada juego, interpretar es el acercamiento a las estrategias usadas por los estudiantes en los juegos y responder son las acciones de las FPM respecto a proceder incorrectos de los estudiantes. En la implementación se identificaron oportunidades pedagógicas significativas y diferentes orquestaciones, por ejemplo, la orquestación de mayor frecuencia fue guía explicación (Gómez, 2022).

Se analiza la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de tres profesores de matemáticas rurales en la gestión del sistema de recursos pedagógicos. Los resultados mostraron que el sistema de recursos pedagógicos está influenciado por los libros de texto y que los ciclos de observación de lecciones (planificación, observación de momentos de la clase y reflexión) favorecieron ver cambios en la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de los profesores (Cruz-Rojas, 2023).

Respecto a las investigaciones sobre la mirada curricular, son escasas y recientes, este constructo teórico fue presentado por primera vez en Males et al. (2015). A continuación, se reportan algunas investigaciones sobre la competencia docente mirada curricular:

Se presenta la mirada curricular de futuros profesores en cuatro estudios exploratorios. La pregunta central de estos estudios fue: ¿Cómo prestan atención los futuros profesores a los materiales curriculares de matemáticas, los interpretan mediante análisis y evaluación y deciden planificar y ejecutar lecciones? El primer estudio abordó la comparación de dos versiones de una tarea, identificando desafíos y estrategias de resolución. El segundo estudio se centra en la interpretación de tareas rutinarias sobre fracciones para ayudar a los estudiantes a construir ideas matemáticas. En el tercero, los FPM evaluaron tres programas de estudio, alineándolos con los

estándares curriculares mediante pruebas pre y post. El cuarto estudio investigó las decisiones de los FPM al trabajar con múltiples recursos curriculares (Amador et al., 2017).

Se analizaron las decisiones de futuros profesores en el marco de la mirada profesional, al realizar su planificación e implementación de una lección sobre división de fracciones, tomando como referencia cuatro de los recursos curriculares más usados en Estados Unidos. Los datos se recogieron durante tres años en un curso semestral de formación de profesores de primaria en el que participaron 50 futuros profesores. Los instrumentos de recolección fueron la planificación escrita de una lección y respuestas a preguntas sobre las justificaciones de sus decisiones. Las justificaciones de las decisiones sobre el uso de los recursos curriculares por parte de los futuros profesores se deben a: la estructura de la lección, la idoneidad y rigor en los problemas, la concepción de la lección, ahorro de tiempo, apoyo a la comprensión de los estudiantes y a los elementos visuales y manipulativos, entre otros aspectos (Amador, 2019).

Otro estudio analizó la mirada curricular de cuatro futuros profesores de secundaria al planificar una lección de álgebra con un libro para el estudiante y otro libro para el profesor. Realizaron entrevistas sobre la planificación y el seguimiento de movimientos oculares. En los resultados, se encontró que los profesores dedicaron más tiempo a los materiales curriculares para el estudiante y en la planificación manifestaron las habilidades de atender e interpretar de la mirada curricular. Mientras que, el análisis de los profesores al material para profesor al planificar dio cuenta de la habilidad de decidir de la mirada curricular (Males y Setniker, 2019).

Se indagó el trabajo de tres futuros profesores al utilizar una herramienta de análisis de materiales curriculares que apoyó su mirada curricular al dar cuenta de atender a sus características particulares, interpretar dichas características y decidir cómo aprovechar estas características para diseñar la instrucción. La herramienta de análisis de los materiales curriculares a través de preguntas dirigidas a los futuros profesores posibilitó las adaptaciones

respecto sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de los materiales curriculares. En esta investigación, la herramienta de análisis de materiales curriculares fue valiosa y de apoyo para la mirada curricular (Amador y Earnest, 2019).

Se estudió la mirada curricular de los autores de cuatro libros de texto de Filipinas. Realizaron el análisis cualitativo al contenido de libros de texto desde jardín de infantes hasta grado duodécimo y seleccionaron cuatro libros de texto de los grados séptimo, octavo, noveno y décimo. Los libros de texto fueron realizados por profesores e investigadores y son usados en instituciones educativas públicas. Realizaron una codificación abierta para determinar aspectos del contenido. La escritura de los libros respecto al currículo observado se describió como un modelo de capas de cebolla, que consideró el desarrollo de materiales curriculares como una tarea seria, meticulosa, consciente y científica (De Guzman y Adamos, 2020).

Al realizar una secuencia de actividades sobre números racionales se analizó la mirada curricular de 26 profesores de matemáticas. Los profesores disponían de unas representaciones de la práctica, unas preguntas guía y un documento teórico. Las representaciones de la práctica son diferentes respuestas de estudiantes de secundaria sobre actividades con números racionales. Las preguntas guía pretendieron que los profesores analizarán en las representaciones de la práctica las comprensiones de los estudiantes, y diseñarán una secuencia de actividades en relación con un objetivo de aprendizaje. El documento teórico sobre el aprendizaje de los números racionales apoyó las respuestas de los profesores. Esta investigación permitió determinar cómo los profesores diseñan una secuencia de actividades para ayudar a los estudiantes en la progresión de su comprensión de los números racionales (González-Forte et al., 2021).

Se analizaron conjuntamente la mirada curricular y la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante al apoyar a profesores en planificar, implementar y reflexionar sobre actividades de aprendizaje sobre modelación. En esta investigación,

participaron ocho profesores en un curso de un semestre. Los profesores tenían a disposición un módulo adaptable y replicable, desarrollado en 15 semanas para prepararlos en el diseño e implementación de actividades sobre modelación. Los resultados de esta investigación señalaron que el contexto de la modelación fue enriquecedor para el desarrollo de la mirada curricular y la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante (Kang, 2022).

En la planificación una lección para tercer grado sobre división de tres cifras se estudiaron la mirada curricular de 28 futuros profesores de primaria. Los resultados mostraron que algunos profesores recomendaron material manipulativo (como los bloques de base diez) para el desarrollo de la lección, hicieron explícita la importancia de usar diferentes representaciones matemáticas y construyeron una secuencia de actividades de aprendizaje con diferentes niveles de dificultad. Esta investigación se centró en las interpretaciones de las oportunidades de aprendizaje de los materiales/recursos que los futuros profesores de primaria decidieron incorporar en sus lecciones (Ivars y Fernández, 2023).

Se realizó una investigación con FPM de secundaria para apoyarlos en la planificación e implementación de tareas de alta demanda cognitiva. Analizaron la interpretación y la decisión curricular de los FPM en la planificación de una lección. Para promover las tareas, a los FPM se les presentó videos de clases, con el fin de que identificaran los criterios para iniciar con éxito estas tareas. Posteriormente, los FPM planificaron e implementaron una tarea. La interpretación de los FPM se clasificó en: características contextuales, relaciones matemáticas y lenguaje adicional. En los resultados de interpretación se detectó la necesidad de apoyar a los FPM a diferenciar entre el contexto y las matemáticas, así como entre ideas generales y específicas de las tareas. En los resultados de la decisión curricular de los FPM se incluyeron varios enfoques pedagógicos centrados en el estudiante (Parrish et al., 2023).

Al utilizar una THA como un lente teórico se analizaron la habilidad de atención de la mirada curricular de 171 futuros profesores de primaria. La THA permitió a los futuros profesores reconocer oportunidades o limitaciones matemáticas de una secuencia de cinco actividades de aprendizaje relacionadas con el significado parte-todo de la fracción. Los resultados mostraron que los profesores en formación dejaron de atender algunos aspectos de las actividades de aprendizaje (elementos matemáticos, tipos de representación, tipo de actividad y tipo de fracción), lo que dificultó las habilidades de interpretar y decidir de la mirada curricular (González-Forte et al., 2024).

Sobre el tema de medida se analizaron la mirada profesional de materiales curriculares y sobre el pensamiento matemático del estudiante de profesores de primaria en ejercicio. Los datos se obtuvieron de un cuestionario organizado en tres focos: interpretar el pensamiento matemático del estudiante, proponer actividades respecto a esta interpretación y analizar las actividades respecto al currículo. Los resultados mostraron que los profesores presentaron conflictos al interpretar los errores de los estudiantes, al proponer actividades en contextos cotidianos y en diferenciar entre habilidad y proceso (Alpízar- García et al., 2024).

A partir de un cuestionario, se analizaron la mirada profesional de materiales curriculares de 60 futuros profesores de primaria. Se determinó la coherencia entre la habilidad de interpretar y decidir al proponer a profesores de primaria completar una secuencia de actividades de un libro de texto apoyado de una THA. Los resultados mostraron que las interpretaciones se agruparon en cuatro categorías: elementos matemáticos, modos de representación, tipos de fracción y tipos de actividades. Más de la mitad de los futuros profesores presentó una secuencia de actividades en coherencia con al menos una de las categorías que interpretaron. Se resalta el papel de la THA como lente teórica de la mirada profesional (Zorrilla et al., 2024).

A 155 futuros profesores de primaria se les propuso resolver tres problemas (atender), analizar los posibles razonamientos de solución (interpretar) y secuenciar los tres problemas (decidir). Los resultados de la investigación mostraron que fueron pocos los futuros profesores que lograron resolver correctamente los problemas y darle una justificación adecuada a la secuencia de problemas. En este estudio se evidencia que el conocimiento matemático es fundamental para el desarrollo de la competencia docente mirada curricular (Lee y Lee, 2024).

Al usar libros de texto al planificar una lección, se estudiaron la mirada curricular de cinco profesores de matemáticas de secundaria en el marco de aprendizaje basado en proyectos. Los resultados mostraron que existen cambios en las habilidades de la mirada curricular a lo largo del desarrollo de tres ciclos de enseñanza realizados en dos años. Los profesores transitaron de una planificación de lecciones fragmentada a una cohesiva, es decir que paulatinamente integraron los principios de un aprendizaje basado en proyectos (Qi et al., 2025).

Estas investigaciones confirman que el uso de THA articula la planificación de lecciones, el análisis del pensamiento de los estudiantes y la reflexión. Sin embargo, se requieren más estudios sobre la mirada curricular para consolidar marcos conceptuales que guíen el uso de las THA como metarecurso en la formación docente.

La mayoría de las investigaciones sobre mirada profesional y THA se han centrado en la perspectiva del pensamiento matemático del estudiante y pocos han usado las THA como lente teórica de la mirada curricular (González-Forte et al., 2024; Zorrilla et al., 2024). En esta investigación la THA0 es un recurso curricular (Gueudet et al., 2023; Rezat, 2024) para caracterizar las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada curricular de FPM al planificar lecciones sobre función cuadrática.

Marco teórico

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan la investigación. En primer lugar, se describe el proceso de construcción de la THA0 sobre función cuadrática.

Posteriormente, se muestran algunas descripciones de las habilidades de la competencia docente mirada profesional (atender, interpretar y decidir) en contextos de análisis de recursos curriculares por parte de profesores de matemáticas. Este marco teórico proporciona las bases para comprender y analizar la mirada curricular de los FPM al planificar lecciones con el uso de una THA sobre función cuadrática.

Una THA (THA0) sobre función cuadrática

Una THA es un modelo teórico relacionado con el diseño instruccional que se compone de un objetivo de aprendizaje, actividades de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (una predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje). Las componentes de la THA son interdependientes y coemergentes, por ejemplo, las actividades de aprendizaje se eligen o diseñan respecto a los procesos de aprendizaje hipotéticos y dicho proceso depende de la naturaleza de las actividades de aprendizaje (Simón, 2020).

En esta investigación se construyó una THA (THA0) sobre función cuadrática (Mejía-Palomino et al., s.f.) con un modelo, que contempla un proceso de cuatro pasos: (1) elegir enfoques teóricos, (2) seleccionar un objetivo de aprendizaje e identificar su concepto matemático de interés, (3) revisar estudios en Educación Matemática y (4) revisar material curricular (Cárcamo y Fuentealba, 2023). La THA sobre función cuadrática se presenta completa en el Mejía-Palomino et al. (s.f.). A continuación, se resumen los pasos de construcción de una THA sobre función cuadrática.

El primer paso fue elegir dos enfoques teóricos para la construcción de la THA0 sobre función cuadrática, los considerados fueron: la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) y un modelo de función (Kalchman y Koedinger, 2005).

En la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes se parte de un modelo de actividad matemática informal en un contexto significativo que involucra los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para transitar hacia un modelo para un razonamiento matemático formal (Cárcamo y Fuentealba, 2023; Gravemeijer, 1999).

Los modelos emergentes es una de las tres heurísticas del diseño instruccional de la Educación Matemática Realista que pretende dar solución a la siguiente paradoja de aprendizaje: los estudiantes para acceder a las matemáticas deben comprender los símbolos, pero el significado de estos depende de la pieza matemática a la que intentan acceder (Bereiter, 1985).

El acceso a las matemáticas requiere conocer el sentido de los símbolos que aún están en proceso de construcción por parte del estudiante. De ahí que los modelos emergentes, al igual que la historia de las matemáticas, tengan en cuenta que las simbolizaciones formales surgen de las simbolizaciones informales y situadas (Gravemeijer, 2020). Por ello, se considera importante la actividad experiencial del estudiante. En esta perspectiva, los modelos surgen en contextos que tienen en cuenta la experiencia de los estudiantes, en los que las estrategias informales conectadas al contexto transitan hacia relaciones y estrategias matemáticas más formales (Cárcamo, 2017). En consecuencia, se propone un modelo de actividad matemática informal que, posteriormente, se transforma en un modelo para el razonamiento matemático formal (Gravemeijer, 1999).

El modelo emerge como un modelo de y se transforma gradualmente hacia un modelo para, mediante los siguientes niveles de actividades (Gravemeijer, 1999): actividad situacional (en la que las interpretaciones y las soluciones dependen de la comprensión de cómo actuar en el entorno, a menudo fuera del entorno escolar), actividad referencial (en la que los modelos de se

refieren a la actividad en el entorno de la situación inicial), actividad general (en la que los modelos para hacen posible un enfoque de interpretaciones y soluciones, independientemente de las imágenes específicas de la situación inicial) y actividad formal (ya no depende del apoyo de modelos para la actividad matemática).

La heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes permitió delimitar un proceso de aprendizaje hipotético en términos de actividades mentales, vinculadas con el desarrollo de las actividades de aprendizaje (Gravemeijer, 1999). Al respecto, se expresa que las THA son parte de las acciones del profesor diseñador de una secuencia instruccional bajo la heurística de los modelos emergentes (Cárcamo, 2017).

El segundo enfoque teórico para la construcción de la THA0 fue un modelo de aprendizaje de función que integra diversas representaciones matemáticas de la función cuadrática. Este modelo de aprendizaje de las funciones se describe en cuatro niveles: en el Nivel Cero, las exploraciones se realizan en una perspectiva numérica o espacial; en el Nivel Uno, el entendimiento de la función surge a partir de la conexión entre lo numérico y lo espacial; en el Nivel Dos, los estudiantes comprenden las relaciones numéricas y espaciales de la función mediante el uso de expresiones algebraicas; y en el Nivel Tres, se logra construir modelos diferenciados de los distintos tipos o familias de funciones (Kalchman y Koedinger, 2005).

Tanto la estrategia de diseño de la heurística de los modelos emergentes como el modelo de función se describen en cuatro niveles. Por lo que las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético dan cuenta de la relación uno a uno de cada uno de los niveles de cada enfoque teórico. Por ejemplo, el nivel de la actividad situacional está relacionado con el Nivel Cero del modelo de función y el nivel de la actividad referencial está relacionado con el Nivel Uno del modelo de función, y así mismo es con los otros dos niveles de cada enfoque teórico.

El segundo paso fue seleccionar un objetivo de aprendizaje e identificar su concepto matemático. Para la THA0 el objetivo de aprendizaje es que los estudiantes usen e interpreten distintas representaciones de la función cuadrática para resolver problemas en contexto. Este objetivo de aprendizaje es coherente con el modelo de función seleccionado que muestra como la construcción del concepto de función inicia con relaciones numéricas o espaciales antes de introducir las representaciones algebraicas y generalizar el problema.

El tercer paso fue revisar estudios en educación matemática, en particular relacionados con la función cuadrática. En primer lugar, se consideró identificar en estos estudios las dificultades de aprendizaje de la función cuadrática. Se señala la complejidad que enfrentan los estudiantes al usar y conectar diferentes representaciones matemáticas de la función cuadrática (Niss, 2020). Se reportan que el desconocimiento de conceptos previos o la falta de pensamiento analítico obstaculizan la interpretación de problemas relacionados con esta función (Azizah et al., 2021, Morales et al., 2022; Ramírez et al., 2022). Por su parte, otros estudios enfatizan las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender y obtener la expresión algebraica de la función cuadrática en problemas contextualizados (González-Polo y Castaneda, 2024).

Otros aspectos considerados en la revisión de estudios fueron los posibles problemas, representaciones matemáticas y artefactos usados en la enseñanza de la función cuadrática. Por ejemplo, se tienen en cuenta: (a) los cambios en los parámetros de la expresión algebraica respecto a su gráfica (De Sousa y Alves, 2022; Jedtke y Greefrath, 2019), (b) el papel de la tecnología digital en el tipo de actividades de aprendizaje y organización de la información para ayudar a la comprensión de la función cuadrática (Bohrer y Tintin, 2021; Fatahillah et al., 2020) y (c) el uso de contextos geométricos para estudiar la función cuadrática (Azizah et al., 2021; González-Polo y Castaneda, 2024; Ramírez et al., 2022).

El cuarto paso fue revisar material curricular, por lo que se seleccionaron siete libros de texto, dos de la editorial Cengage Learning (Aufmann y Lockwood, 2013; Stewart et al., 2017) y cinco de distribución gratuita de Ediciones SM (MEN 2017a, 2017b, 2017c, 2017d, 2017e). En esta revisión se consideraron los posibles problemas, representaciones matemáticas y artefactos en la enseñanza de la función cuadrática. En los libros de texto, los problemas o ejercicios resueltos pueden incorporar hasta cuatro representaciones matemáticas: verbal, numérica, algebraica y gráfica. En algunos libros de texto se hace uso de calculadoras graficadoras (Aufmann y Lockwood, 2013; Stewart et al., 2017) o de GeoGebra (MEN 2017a, 2017b, 2017c, 2017d, 2017e). Las actividades de aprendizaje con tecnologías digitales proponen realizar gráficas de funciones. El problema matemático considerado en la THA0 es resuelto mediante procedimientos de lápiz/papel (Stewart et al., 2017).

A partir de la integración de los cuatro pasos anteriores, se establecieron cinco criterios que orientaron el diseño de las actividades de aprendizaje en la THA0. Estos criterios se seleccionaron debido a su relevancia teórica y práctica. A continuación, se mencionan y justifican estos criterios.

1. Selección del problema matemático. El problema matemático propuesto en la THA0 se eligió porque está presente en libros de texto utilizados en la educación secundaria o media de Colombia, permite el uso de diferentes representaciones matemáticas en su solución, acorde al modelo de aprendizaje de función (Kalchman y Koedinger, 2005), y facilita el tránsito de lo informal a lo formal según la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999, 2020).
2. Selección de los artefactos. La solución del problema puede abordarse mediante diferentes artefactos, como: lápiz/papel, materiales físicos (cuerda) y ambientes de

geometría dinámica. Además, el uso de diferentes artefactos permitió una exploración matemática progresiva de lo concreto a lo abstracto.

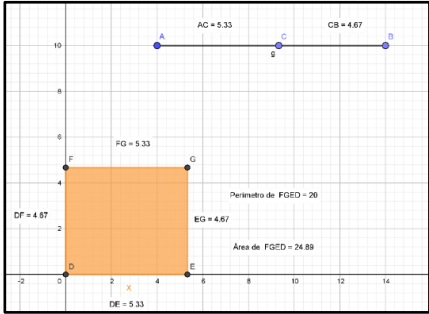
3. Selección del contexto. El contexto geométrico de una situación real (cerco de una huerta) fue elegido porque la combinación del contexto y los artefactos seleccionados favorece la exploración y experimentación matemática. También, porque conecta con situaciones familiares para los estudiantes, lo que facilita abordar la actividad situacional.
4. Dificultades de aprendizaje. Se consideraron las dificultades identificadas en investigaciones previas, como: dificultades asociadas al uso progresivo de representaciones matemáticas en el estudio de la función cuadrática, dificultades relacionadas con la interpretación y uso de representaciones algebraicas, problemas en la conexión entre diferentes representaciones de la función cuadrática y falta de la comprensión de los parámetros y su efecto en la gráfica de la función.
5. Organización de las actividades de aprendizaje. La estructura de las actividades de aprendizaje se realizó respecto al proceso de aprendizaje hipotético, por lo que están estructurados en cuatro niveles, en coherencia con los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999, 2020) y el modelo de aprendizaje de función (Kalchman y Koedinger, 2005). La exploración inicia con representaciones numéricas, espaciales y el uso de material físico y lápiz/papel. Posteriormente, se incorporan representaciones algebraicas, hasta alcanzar el estudio paramétrico de la función cuadrática en un ambiente de geometría dinámica.

Estos cinco criterios están relacionados con el objetivo de aprendizaje de la THA0. El diseño de la THA0 busca que los estudiantes usen e interpreten diferentes representaciones de la

función cuadrática para resolver problemas en un contexto, para transitar desde la exploración concreta hasta la formalización matemática. La Tabla 1 presenta THA0 sobre función cuadrática.

Tabla 1.

THA0 sobre función cuadrática

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones de la función cuadrática para resolver un problema en contexto	
Actividad de aprendizaje (AA)	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1. Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. En esta actividad se simula el cerco rectangular con una cuerda amarrada extendida con los dedos (Figura 1).  <i>Figura 1. Cuerda amarrada</i> Preguntas: Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales.
AA2. Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperimétricos. En GeoGebra se explora la construcción de rectángulos que varían al mover el punto C del segmento AB (deslizador) (Figura 2).  <i>Figura 2. Generación de rectángulos</i> Preguntas: Determine 2 rectángulos con perímetro igual a 20, diferentes a los que	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones de la función cuadrática para resolver un problema en contexto

Actividad de aprendizaje (AA)

Proceso de aprendizaje hipotético

encontró en la primera actividad. Observa los valores del área cuando se mueve el punto C
¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área?
¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad? ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?

AA3. Análisis de la traza del punto I.

En GeoGebra se explora un archivo que contiene la construcción de la AA2 pero que se agrega el plano cartesiano y un punto I que genera una traza al mover el punto C del segmento AB (Figura 3).

Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos.

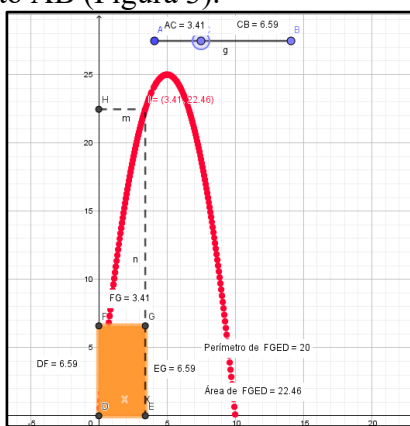


Figura 3. Taza del punto I

Preguntas: Observe el punto I, mueva el punto C
¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? ¿Dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? ¿Dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de menor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo con menor área? Determine un par de rectángulos con igual área, ¿cuáles son las características de estos rectángulos?

AA4. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos.

En GeoGebra se explora un archivo que contiene la construcción de la AA3, pero se

Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones de la función cuadrática para resolver un problema en contexto

Actividad de aprendizaje (AA)

agrega la gráfica de la función cuadrática que relaciona un lado y el área de los rectángulos (Figura 4).

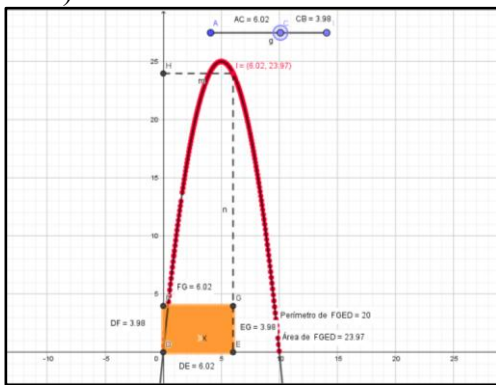


Figura 4. Gráfica del área y traza del punto I

Preguntas: Realicemos la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base y compárela con la trayectoria del punto I. ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano?

Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40?

Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto la base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n ?

Proceso de aprendizaje hipotético

las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

Las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada profesional con recursos curriculares

Se presentan las características de las habilidades de atender, interpretar y decidir al analizar recursos curriculares de algunas de las investigaciones reportadas en los antecedentes.

Las características de las habilidades que conforman la competencia docente mirada profesional

dependen de las herramientas, metodologías y recursos curriculares usados. Al final se delimitan las habilidades de la mirada curricular en el desarrollo de esta investigación.

Se considera que en la planificación de lecciones es necesario que el profesor reconozca y comprenda la complejidad del pensamiento matemático del estudiante y, por tanto, la mirada curricular tiene en cuenta el pensamiento del estudiante en las interacciones del profesor con los recursos curriculares. También, estos autores determinaron que la mirada curricular depende de las experiencias y conjeturaron que cambia con el tiempo a medida que el profesor interactúa e involucra recursos curriculares en sus prácticas profesionales (Dietiker et al., 2018).

La habilidad de atención de los recursos curriculares da cuenta de información sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La interpretación es lo que le da sentido a lo que se atiende, en esta habilidad se conectan sus ideas sobre los recursos curriculares con su conocimiento profesional y su experiencia. Las decisiones curriculares son respuestas de lo que atienden e interpretan de los recursos curriculares, por ejemplo, al determinar qué quieren hacer y cómo quieren hacerlo, es decir cómo usan los recursos curriculares al planificar o ejecutar la instrucción (Dietiker et al., 2018).

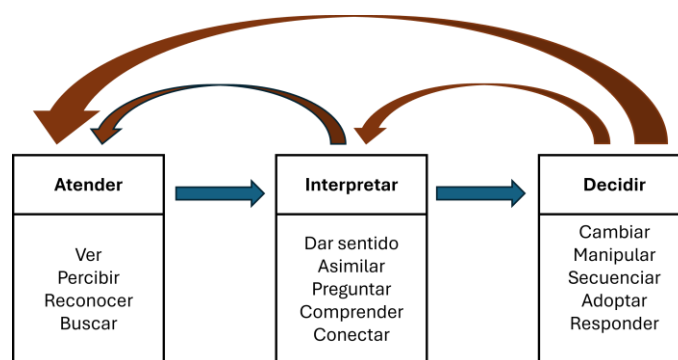
En la Figura 2 se relacionan y se determinan las interacciones de las habilidades de la mirada curricular, las flechas azules describen que los profesores interpretan lo que han atendido y deciden lo que han interpretado (Males et al., 2015). Sin embargo, las flechas de color café; determinan cómo los profesores al decidir también interpretan y atienden aspectos de los recursos curriculares (Dietiker et al., 2018). Esto quiere decir que las habilidades tienen una relación recursiva, dinámica y de retroalimentación constante (Lee y Lee, 2024).

Se caracterizaron las habilidades de la mirada curricular de los autores de libros de texto en Filipinas. Atender son los aspectos del plan de estudios reconocidos en el libro de texto, interpretar es darles sentido a los temas a través de las actividades propuestas, y decidir es la

selección de actividades y el desarrollo de habilidades que los libros de texto buscan promover en los estudiantes (Guzmán y Adamos, 2020).

Figura 2.

Actividades y relaciones de las habilidades de la mirada curricular



Nota. En la Figura se agregó color a las flechas (Lee y Lee, 2024, p. 7).

La mirada curricular de futuros profesores se analizó respecto a tres problemas de generalización. Las habilidades de la mirada curricular respecto a Dietiker et al. (2018) se particularizan de la siguiente manera: atender son las características de los problemas al desarrollar un plan de solución, interpretar son las ideas sobre el conocimiento y el razonamiento necesarios para resolver cada problema y decidir es determinar cómo secuenciar los tres problemas de generalización para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Lee y Lee, 2024).

Otro estudio analizó materiales curriculares con relación a la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante de Jacobs et al. (2010). Establecieron que atender es describir las características de los materiales curriculares, lo cual puede ser a través de declaraciones o gestos descriptivos y declarativos (por ejemplo, señalar una característica de una página de un libro de texto). Por su parte, interpretar se refiere a considerar lo que se requiere al trabajar con materiales curriculares, y es más que describir, ya que son declaraciones o preguntas

que analizan, critican, evalúan y comparan. En cambio, responder son decisiones en la planificación o en la implementación al usar materiales curriculares (Roth McDuffie et al., 2018).

En la perspectiva de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante respecto al análisis de los programas curriculares, se determinan las habilidades de la siguiente manera: 1) atender es escoger en qué centrarse 2) interpretar es darle sentido a lo que atienden y 3) decidir es adaptar su enseñanza en función de su análisis (Machalow et al., 2020).

Aunque las investigaciones sobre la mirada profesional han reportado habilidades tanto relacionadas con el currículo como con el pensamiento matemático del estudiante en relación con los recursos curriculares, no se observan grandes diferencias. Se encuentra que estas investigaciones vinculadas con la mirada profesional de Jacobs et al. (2010) conceptualizaron las habilidades de la mirada profesional de los recursos curriculares, con escasas diferencias respecto a la conceptualización de Males et al. (2015) y Dietiker et al. (2018).

Además, se reconoce que las diferencias en las presiones de cómo se caracterizan estas habilidades de la mirada curricular dependen del tipo de recursos curriculares, metodologías y herramientas utilizadas. Por ejemplo, algunos estudios usaron gafas de seguimiento de los movimientos oculares que detectaron la atención respecto al tiempo de fijación de la visión en una parte del recurso curricular (Males y Setniker, 2019) o utilizaron una herramienta analítica para el análisis de la mirada curricular (Amador y Earnest, 2019).

Otra investigación sobre el uso de la THA y la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes se centró en los análisis de los futuros profesores a las respuestas de los estudiantes, las interacciones de clase u otras representaciones de la práctica. Este análisis específico del pensamiento matemático del estudiante busca promover en los futuros profesores el uso de los niveles de progresión del aprendizaje de una THA (Fernández et al., 2018).

En esta investigación, el análisis de las respuestas de los estudiantes no se tipifica ni se particulariza para el primer grupo de FPM, sino que se analizan de manera general en entrevistas semiestructuradas para propiciar los cambios en la THA0. Por lo cual, se consideró exclusivamente el estudio de la mirada curricular de los FPM.

Por tanto, entendiendo una THA0 como un recurso curricular en la planificación de lecciones sobre función cuadrática, las habilidades de la mirada curricular de los FPM, se particularizan, en esta investigación, del siguiente modo: (i) atender es lo que reconocen relevante en los cambios en la THA al planificar una lección, (ii) interpretar es darle sentido a lo que atienden, como justificar los cambios propuestos en la THA a partir de su conocimiento profesional y su experiencia, mientras que, (iii) decidir son los cambios realizados a la THA en la planificación de lecciones (Dietiker et al., 2018; Males et al., 2015). Esta descripción de las habilidades de la mirada curricular de los FPM se relaciona con las actividades propuestas en la Figura 2. Atender se vincula con reconocer, interpretar con dar sentido y decidir con cambiar.

En esta investigación se caracteriza la mirada curricular de FPM en su práctica profesional de planificación de lecciones, específicamente a partir de los cambios propuestos a una THA0 sobre función cuadrática. Es decir que, la primera habilidad identificada fue decidir (cambios a la THA0), y a partir de esta, se delimitaron las habilidades de atender e interpretar de la mirada curricular. Si bien era posible que los FPM atendieran o interpretaran la THA0 sin modificarla, en su rol como agentes de enseñanza en una investigación de diseño, ambos grupos de FPM optaron por cambiar la THA0 al planificar lecciones, tanto en la fase de preparación y diseño como en la fase de análisis retrospectivo y rediseño. En este marco, la THA cumplió una doble función: como herramienta metodológica en el desarrollo de la investigación de diseño y como recurso curricular en la planificación de lecciones.

Referentes metodológicos

Aproximación de investigación

Se seleccionó la investigación de diseño (Bakker, 2018a, 2018b; Bakker y Smit, 2018). En particular, se describe un experimento de enseñanza colectivo respecto a sus fases, ciclos, instrumentos de recolección de información, participantes y análisis de los datos.

Investigación de diseño

Se optó por investigación de diseño³ debido a su pertinencia para caracterizar la competencia docente mirada curricular de los FPM en su práctica profesional de planificación de lecciones, específicamente en los cambios propuestos en una THA sobre función cuadrática.

La investigación de diseño se distingue por ser intervencionista y abierta. Es intervencionista porque el investigador manipula una condición en relación con una teoría del aprendizaje. Es abierta porque el control sobre los datos es limitado (Bakker, 2018a). Además, las reflexiones posteriores a la implementación de los diseños pueden generar modificaciones en las siguientes intervenciones, ya que, al aplicar los diseños, los investigadores confrontan sus hipótesis con el aprendizaje real (Bakker, 2018a). Por esta razón, la investigación de diseño es de carácter iterativo, ya que implica la revisión y refutación de hipótesis iniciales para formular nuevas y generar ciclos de mejora.

El conocimiento derivado de la investigación de diseño puede expresarse en principios de diseño, mapas de conjeturas o THA, con el objetivo de ser aplicado de manera práctica y general en nuevas situaciones (Bakker, 2018b; Bakker y Smit, 2018). Los principios de diseño constituyen prácticas generalizadas susceptibles de replicarse. Los mapas de conjeturas explican las características del proceso de diseño que conducen a ciertos resultados. Solo las THA

³También, llamada investigación basada en el diseño, diseño de experimentos, investigación de desarrollo o experimentos de diseños (Bakker, 2018a).

capturan los detalles específicos del aprendizaje (Bakker, 2018b; Bakker y Smit, 2018). Estos productos de la investigación de diseño surgen de los análisis retrospectivos, que implican revisiones detalladas de los registros, realizadas bajo parámetros previamente establecidos para dar cuenta del aprendizaje (Steffe y Thompson, 2000).

En un experimento de enseñanza, todos los participantes están inmersos en un proceso de aprendizaje, lo que permite distinguir tres niveles de investigación. El Nivel Uno se centra en los aprendizajes de los estudiantes, el Nivel Dos en los aprendizajes de los profesores y el Nivel Tres en los aprendizajes de los investigadores (Lesh y Kelly, 2000). En esta investigación, el énfasis recae en el Nivel Dos de los experimentos de enseñanza, donde se caracteriza la mirada curricular de FPM al proponer cambios a una THA en la práctica profesional de planificación de lecciones. Existen investigaciones de diseño que abarcan los Niveles Uno y Dos (Gravemeijer y Van Eerde, 2009) o integran los tres niveles de análisis (Kang, 2022).

En este experimento de enseñanza participaron: los agentes de enseñanza (dos grupos de FPM), los estudiantes (dos grupos de una institución educativa pública) y un testigo de la enseñanza (la investigadora). Para documentar el desarrollo del proceso, se empleó un método de registro basado en los audios de las entrevistas semiestructuradas realizadas a los FPM y en documentos escritos que reflejan los cambios en la THA propuestos por los grupos de FPM durante la planificación de lecciones (Steffe y Thompson, 2000; Steffe y Ulrich, 2020).

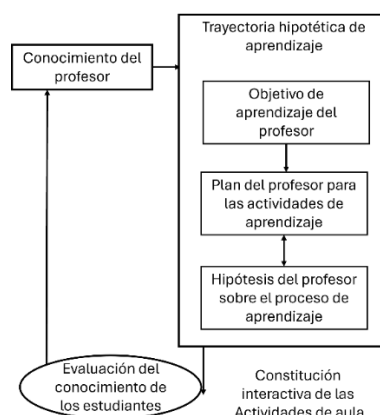
Los experimentos de enseñanza integran la práctica investigativa con la práctica docente (Steffe y Thompson, 2000; Wittmann, 2021). En particular, este experimento de enseñanza colectivo se fundamenta en la adaptación del estudio de lecciones (o estudio de clases), en el cual los investigadores plantean problemas de investigación a los profesores, quienes participan activamente a través de su práctica docente (Wittmann, 2021). Se considera fundamental generar

espacios de interacción entre los FPM que les permitan validar sus argumentos y reflexionar sobre sus acciones en el aula (Llinares y Fernández, 2021).

El uso de una THA por parte de los profesores en un ciclo de enseñanza o experimento de enseñanza involucra y genera conocimientos profesionales del profesor de matemáticas (Gravemeijer y Van Eerde, 2009; Simon 1995). Los conocimientos profesionales de los profesores generan cambios en la THA para futuras intervenciones en el aula (Simon, 1995). Para esta investigación, el razonamiento respecto al conocimiento profesional al planificar lecciones con el uso de una THA sobre función cuadrática da cuenta de la mirada curricular de los FPM. En la Figura 3 se presenta un ciclo de enseñanza con una THA.

Figura 3.

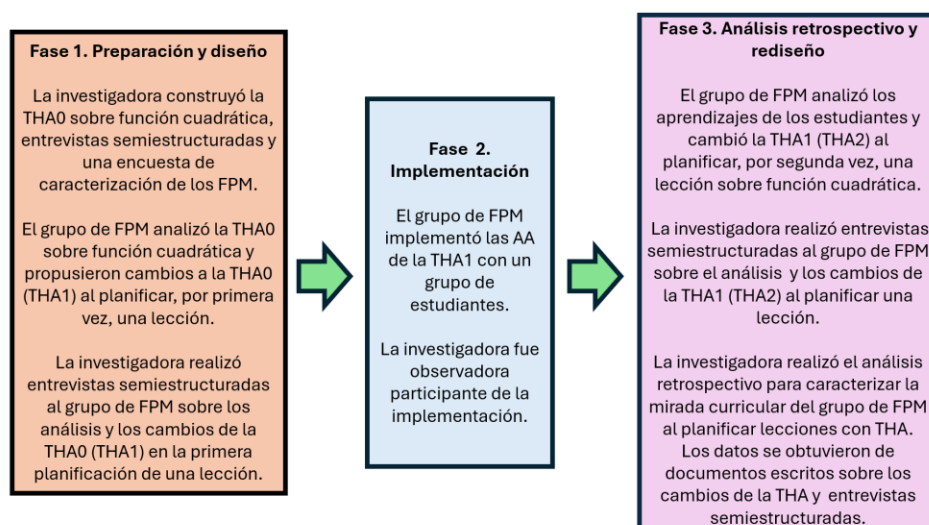
Ciclo de enseñanza (Simón, 1995, p. 136)



Se siguieron las tres fases de la investigación de diseño (Bakker, 2018b). Los FPM participaron de la investigación de diseño al realizar cambios en una THA al planificar lecciones en el desarrollo de un experimento de enseñanza colectivo. En la Figura 4 se resumen las fases de la investigación de diseño propuestas en esta investigación.

Figura 4.

Resumen de la investigación de diseño para el análisis de la mirada curricular de FPM



Nota. Descripción de un ciclo de una investigación de diseño para caracterizar la mirada curricular de dos grupos de FPM al proponer cambios en una THA sobre función cuadrática.

A continuación, se describen las fases de la investigación de diseño para este estudio:

Fase 1. Preparación y diseño. La investigadora construyó la THA0 sobre función cuadrática (Mejía-Palomino et al., s.f.). Además, creó las entrevistas semiestructuradas para los grupos de FPM (Anexo 1). Asimismo, se aplicó una encuesta de caracterización en línea, administrada mediante formularios de Google, con el propósito de recolectar información sobre los conocimientos profesionales, formación académica y experiencia docente de los FPM (Anexo 5). El resumen de esta encuesta se presenta en este capítulo, en la sección de participantes.

La investigadora presentó a los FPM a una THA0 sobre función cuadrática con el propósito de que reconocieran sus fundamentos teóricos y prácticos. El proceso de análisis de la THA0 varió según el grupo de FPM. El primer grupo realizó un análisis oral grupal de la THA0, mientras que al segundo grupo se le solicitó un análisis escrito individual antes de llevar a cabo el análisis oral grupal.

Luego del análisis de la THA0, los FPM realizaron cambios a la THA0 en la primera planificación de una lección. Los cambios efectuados en la THA0 (THA1) quedaron registrados en un documento escrito en Google Drive. Finalmente, la investigadora llevó a cabo entrevistas semiestructuradas con los grupos de FPM respecto al análisis y los cambios de la THA0 realizados al planificar, por primera vez, una lección sobre función cuadrática.

Fase 2. Implementación. Los FPM implementaron las actividades de aprendizaje de la THA1 sobre función cuadrática en un grupo de estudiantes. Las interacciones de la lección se registraron por medio de una cámara fija en el salón y registros de audio portables por los FPM. Se obtuvo el registro escrito de los estudiantes por medio de sus hojas de trabajo (respuestas a las actividades de aprendizaje en hojas en papel). La investigadora fue observadora participante de la lección. En la implementación del primer grupo, ambos FPM interactuaron con todos los estudiantes. Para el segundo grupo de FPM, los estudiantes se dividieron en tres grupos, cada uno de los FPM acompañó el trabajo de un grupo de estudiantes. Sin embargo, la socialización de las respuestas de las actividades de aprendizaje se realizó con todos los estudiantes.

Fase 3. Análisis retrospectivo y rediseño. En esta fase, los FPM analizaron las respuestas de los estudiantes en sus hojas de trabajo, así como sus acciones durante la implementación de las actividades de aprendizaje de la THA1 (mediante observación participante). A partir de esta información, realizaron cambios en la THA1, rediseñaron la primera planificación, dando lugar a la THA2, en la segunda planificación de una lección sobre función cuadrática. Para profundizar en este proceso, la investigadora llevó a cabo entrevistas semiestructuradas con los grupos de FPM, tanto del análisis de la THA1 después de su implementación como en los cambios propuestos en la THA2.

El análisis de los aprendizajes de los estudiantes varió según el grupo de FPM. Los FPM del primer grupo realizó un análisis individual de las hojas de trabajo y de las acciones de los

estudiantes durante la implementación. Las entrevistas semiestructuradas posteriores a la implementación de AA reflejaron estos análisis.

Para el segundo grupo de FPM, además de las entrevistas semiestructuradas, la investigadora les propuso elaborar un documento escrito individual en el que registraran sus observaciones sobre los aprendizajes de los estudiantes (Anexo 3). A partir de estos documentos escritos, junto con las hojas de trabajo de los estudiantes y las observaciones de la implementación de las AA, los FPM y la investigadora construyeron la trayectoria real de aprendizaje⁴ (Anexo 2).

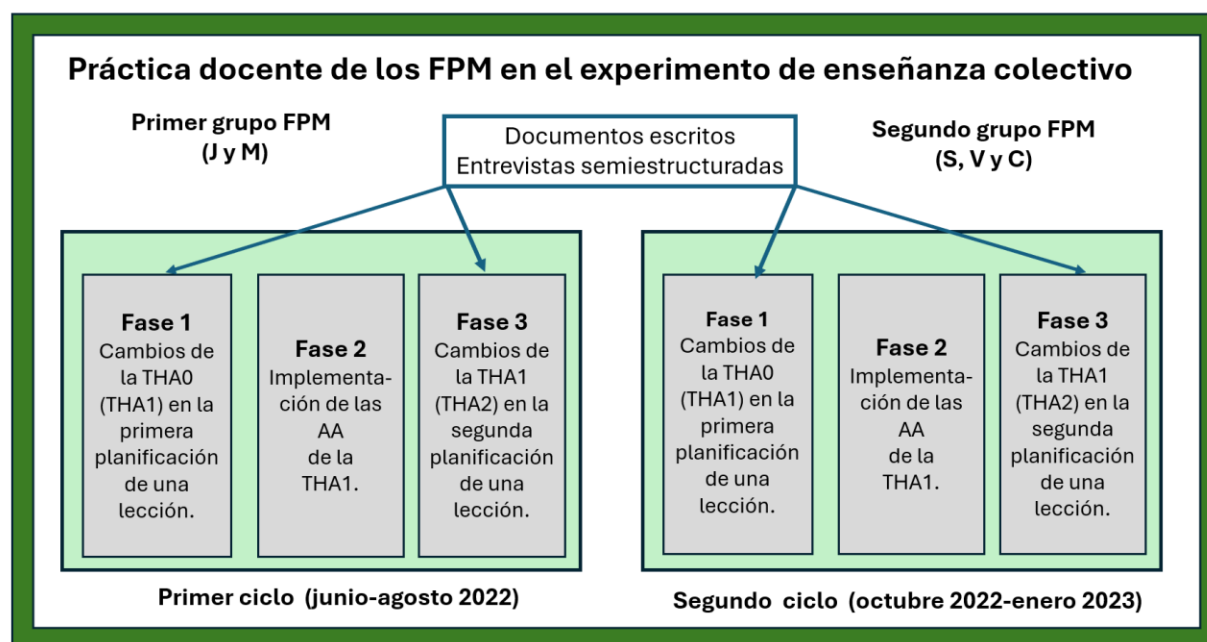
Finalmente, la investigadora realizó un análisis retrospectivo de los cambios en la THA0 (transformada en THA1 y luego en THA2) a partir de los documentos escritos y las entrevistas semiestructuradas con los FPM en las fases de preparación y diseño y análisis retrospectivo y rediseño. Este análisis permitió caracterizar la mirada curricular de los FPM en la primera y segunda planificación de una lección al usar una THA sobre función cuadrática.

Esta investigación comprendió dos ciclos del experimento de enseñanza, cada uno con un grupo de FPM y estudiantes diferentes. Ambos grupos de FPM utilizaron la misma THA0 sobre función cuadrática. A lo largo del proceso, cada grupo de FPM cambió a la THA0, dando lugar a sus propias versiones de THA1 y THA2 en la planificación de lecciones. En la Figura 5 se resume la práctica docente de los FPM en esta investigación.

⁴ En la trayectoria de aprendizaje real se describe el proceso de aprendizaje que ocurrió en el aula, y que se infiere de los datos recolectados (Cárcamo, 2017; Leikin y Dinur, 2007).

Figura 5.

Práctica docente de los FPM en el experimento de enseñanza colectivo



Nota. En cada ciclo del experimento de enseñanza colectivo se realizó con un grupo de FPM y estudiantes diferentes. Se utilizó la misma THA0 para ambos grupos de FPM. Cada grupo de FPM generó sus propias versiones de THA1 y THA2.

Participantes

Los participantes de esta investigación fueron dos grupos de FPM de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, quienes cursaban los últimos semestres de su programa de formación y estaban matriculados en las asignaturas Práctica Profesional I o Práctica Profesional II. Como parte de esta asignatura, los FPM realizaban sus prácticas docentes en instituciones educativas de la ciudad de Cali (Colombia), contexto en el cual se llevó a cabo el experimento de enseñanza colectivo.

La asignación de los FPM a la institución educativa fue realizada por un profesor de la Universidad del Valle, encargado de orientar las asignaturas de Práctica Profesional I o Práctica

Profesional II. La participación en esta investigación doctoral era voluntaria, por lo que los FPM tenían la libertad de aceptar o rechazar la propuesta de práctica docente vinculada al estudio.

El primer grupo estuvo compuesto por dos FPM, denominados M y J, quienes realizaron sus prácticas docentes entre junio y agosto de 2022, a lo largo de ocho sesiones, que se llevaron a cabo de manera virtual o presencial. La implementación de las actividades de aprendizaje de su THA1 se realizó de manera presencial, con 29 estudiantes de grado undécimo (Educación Media en Colombia), con edades entre 15 y 17 años.

El segundo grupo estuvo compuesto por tres FPM, denominados C, V y S, quienes llevaron a cabo sus prácticas docentes entre octubre de 2022 y enero de 2023, en once sesiones presenciales o virtuales. En este caso, las actividades de aprendizaje de su THA1 se implementaron de manera presencial, con 21 estudiantes de segundo semestre del programa de formación complementaria (bachilleres), con edades entre 16 y 20 años.

Los estudiantes participantes en el experimento de enseñanza colectivo provienen de una Escuela Normal pública. En Colombia, las Escuelas Normales Superiores son:

Instituciones educativas que prestan el servicio educativo en los niveles de preescolar, básica y media y que están autorizadas para ser formadoras de docentes de educación inicial, preescolar y básica primaria o como directivo docente - director rural, mediante el programa de formación complementaria. (Decreto 1236, 2020, artículo 2.3.3.7.1.3.).

La encuesta de caracterización de los FPM se presenta completa en el Anexo 5, tiene como propósito conocer algunos conocimientos profesionales, formación académica y experiencia de práctica docente relacionados con el desarrollo de este experimento de enseñanza colectivo con el uso de una THA0 sobre función cuadrática.

Los resultados de la encuesta de caracterización mostraron que la mayoría de los FPM desconocían la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes, trayectorias

hipotéticas de aprendizaje y experimentos de enseñanza. De los cinco FPM, tres manifestaron tener suficientes conocimientos sobre ambientes geometría dinámica. Todos los FPM dicen conocer mucho o suficiente sobre representaciones matemáticas.

Los FPM realizaron sus prácticas pedagógicas virtuales o presenciales, entre la cuales detallan el diseño, implementación y análisis de resultados de actividades de aprendizaje, elaboración y ejecución de entrevistas y observaciones de ambientes tanto escolares como no escolares. Los FPM determinaron que el diseño de actividades de aprendizaje estuvo vinculado a las asignaturas relacionadas con tecnología digital y pensamiento variacional. Sólo J tiene un mes de experiencia docente en asesorías educativas.

Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos de recolección utilizados para caracterizar la mirada curricular de los FPM incluyeron documentos escritos sobre los cambios en la THA0 y entrevistas semiestructuradas a los FPM sobre la planificación de lecciones. En la Tabla 2 se presentan estos instrumentos de recolección de datos.

Tabla 2.

Práctica docente e instrumentos de recolección de datos

Práctica docente	Descripción	Instrumentos de recolección de datos
Primera planificación de una lección	Cada grupo de FPM analizaron la THA0 sobre función cuadrática y propusieron cambios que dieron lugar a la THA1 en la primera planificación de una lección sobre función cuadrática.	1) Entrevista semiestructurada al analizar la THA0. 2) Documento escrito de la THA1 (cambios en la THA0 en la primera planificación de una lección). 3) Entrevista semiestructurada sobre la THA1.
Segunda planificación de una lección	Después de la implementación de las AA de la THA1, cada grupo de FPM propusieron cambios a la THA1, dando lugar a la THA2 en la segunda	1) Entrevista semiestructurada después de la implementación de las AA sobre el análisis de la THA1.

Práctica docente	Descripción	Instrumentos de recolección de datos
	planificación de una lección sobre función cuadrática.	2) Documento escrito de la THA2 (cambios en la THA1 en la segunda planificación de una lección). 3) Entrevista semiestructurada sobre la THA2.

El objetivo de las entrevistas semiestructuradas mencionadas en la Tabla 2 fue identificar las interpretaciones de los FPM sobre los cambios en la THA durante la planificación de una lección sobre función cuadrática. Para ello, se plantearon preguntas como: (a) ¿Cuáles pueden ser las mayores dificultades en el desarrollo de las actividades?, (b) Respecto a los artefactos, ¿Cuál es tu opinión sobre su uso en la construcción del pensamiento matemático involucrado en las actividades?, (c) En relación con el objetivo de aprendizaje actual ¿Considera que es adecuado? Explica, (d) Respecto al proceso de aprendizaje hipotético ¿Consideras que es pertinente? Explica, (e) En cuanto a las actividades de aprendizaje ¿Crees que son apropiadas? Explica.

En el Anexo 1 se presentan los detalles de algunas entrevistas semiestructuradas realizadas a los FPM.

Análisis de los datos

Los aspectos atendidos, interpretados y los cambios en la THA0 propuestos por los FPM durante la planificación de una lección fueron analizados cualitativamente en los documentos escritos y en las entrevistas semiestructuradas.

Las habilidades de la mirada curricular fueron categorías teóricas para el análisis de los datos. Los aspectos que los FPM atendieron, interpretaron y decidieron sobre los cambios en la THA0 se seleccionaron de manera deductiva, respecto a las características de las habilidades de la mirada curricular (Dietiker et al., 2018; Males et al., 2015).

Para determinar los focos de atención se empleó un proceso inductivo. Se identificaron los cambios de la THA0 en los documentos escritos, respecto a estos cambios se seleccionaron las evidencias en las entrevistas semiestructuradas y estas evidencias se codificaron de manera abierta. Del análisis del documento escrito y las entrevistas semiestructuradas surgieron tres categorías, que son los focos de atención (Figura 9 y 10).

Para el análisis de los datos provenientes del experimento de enseñanza, también se empleó un proceso de análisis recursivo de cuatro niveles (Simon, 2019). Este análisis, pretende extraer más información de los datos e ir más allá de la categorización.

En cada nivel de análisis se presentan preguntas guía. Los resultados de un nivel anterior de análisis son datos para el siguiente nivel, aunque se puede volver a los datos originales. El último nivel de análisis desarrolla constructos explicativos que pretenden dar respuesta a la pregunta de investigación (Simon, 2019).

En esta investigación, las habilidades de la mirada curricular al estar interrelacionadas y considerarse de manera conjunta posibilitaron el desarrollo del proceso de análisis recursivo. Se inicia con la habilidad de decidir de la mirada curricular, y respecto a esta, se determinan las habilidades de atender e interpretar. En el último nivel se vinculan las tres habilidades con el propósito de caracterizar la mirada curricular de los FPM al planificar lecciones con el uso de una THA sobre función cuadrática. En la Tabla 3 se presenta un resumen de estos niveles de análisis.

Tabla 3.

Resumen de los niveles de análisis de datos de la mirada curricular de FPM

Nivel de análisis	Descripción del nivel de análisis	Pregunta que orienta el análisis	Objetivo
1	Se identificaron y describieron los cambios en la THA0 provistos en los documentos escritos correspondientes a la THA1 y THA2 de cada grupo de FPM.	¿Qué cambios en la THA0 decidieron los FPM al planificar lecciones sobre función cuadrática?	Objetivo específico 3

Nivel de análisis	Descripción del nivel de análisis	Pregunta que orienta el análisis	Objetivo
2	Se analizan los cambios en la THA0 provistos en los documentos escritos. Se determinan las evidencias de estos cambios en las entrevistas semiestructuradas. Las evidencias se codifican de manera abierta. De los documentos escritos y las entrevistas semiestructuradas se infieren tres focos de atención (categorías).	¿Qué aspectos atendieron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática?	Objetivo específico 2
3	En las evidencias de las entrevistas semiestructuradas se identificaron justificaciones relacionadas con los cambios propuestos por los FPM a la THA0. Posteriormente, se analizaron estas justificaciones para inferir los aspectos interpretados por los FPM.	¿Qué aspectos interpretaron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática?	Objetivo específico 2
4	Se identificaron, analizaron y sintetizaron los aspectos atendidos, interpretados y decididos por los FPM en los cambios propuestos en la THA0 durante la primera y segunda planificación de la lección. En este nivel de análisis se integraron los datos recopilados en los tres primeros niveles.	¿Qué aspectos atendieron, interpretaron y decidieron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática?	Objetivos específicos 2 y 3. Objetivo General.

El primer nivel de análisis describe los datos relacionados con los cambios en la THA0, registrados en los documentos escritos correspondientes a la THA1 y THA2. La descripción de los datos se organiza en función de los artefactos y de cada nivel de actividad de aprendizaje. Para facilitar la comparación con la THA0, los cambios agregados en cada nivel de actividad fueron resaltados en gris. Además, este nivel de análisis responde a la pregunta: ¿Qué cambios en la THA0 decidieron los FPM al planificar lecciones sobre función cuadrática?

A continuación, se presenta un ejemplo del ciclo 1 del análisis de la AA1 de la THA0 en este primer nivel. El resumen del primer nivel de análisis para ambos grupos de FPM se encuentra en el Anexo 4, mientras que la Figura 6 muestra la descripción de la AA1 de la THA0.

Figura 6

Descripción de la AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA0

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones de la función cuadrática para resolver un problema en contexto	
Actividad de aprendizaje (AA)	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1. Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. En esta actividad se simula el cerco rectangular con una cuerda amarrada extendida con los dedos (Figura 1).  <i>Figura 1. Cuerda amarrada</i> Preguntas: Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales.

Nota. Se presentan la actividad de aprendizaje situacional y su proceso de aprendizaje hipotético.

Los cambios propuestos por los FPM en la AA1 y en su proceso de aprendizaje dentro de la THA1 se presentan en la Figura 7, donde se destacan en gris. En la AA1, los FPM precisaron la forma de los cercos, mencionaron que estos se encuentran en una finca⁵. Además, incorporaron un archivo en GeoGebra con una vista panorámica de la finca y describieron el uso de los artefactos para construir el cerco con una cuerda. En el proceso de aprendizaje hipotético, los FPM identificaron dos posibles dificultades que podrían enfrentar los estudiantes: el uso de la escala y el reconocimiento de que un cuadrado es un tipo de rectángulo.

⁵ Una finca o granja, es una propiedad de gran de extensión de terreno, ubicada en zona rural, de uso para la agronomía, ganadería, recreación, entre otras actividades.

Figura 7.

AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA1 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
Actividad situacional Se usa como herramienta una cuerda, sujeta en sus extremos, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usa chinchas sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb).  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco con mayor área. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Es posible que descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.

En la AA1 de la THA2, los FPM modificaron la redacción del uso de los materiales para simular los cercos con la cuerda. Los FPM especificaron la relación de la longitud de la cuerda con el concepto de perímetro del rectángulo, reconocieron la variación del área al delimitar una superficie con una cuerda, eliminaron el archivo GeoGebra (sólo dejaron una imagen) e hicieron explícitos los procedimientos para hallar el área y el perímetro de los rectángulos. Los cambios en este nivel de la THA2 se presentan en la Figura 8.

Figura 8.

AA1 y su proceso de aprendizaje hipotético de la THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se usa como herramienta una cuerda de tamaño 20 cm, sujeta en sus extremos por medio de una cinta, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinchetas sobre un cartón. El cartón tiene de fondo una hoja cuadriculada y en sus bordes una cinta métrica, para facilitar la medida de longitud de la cuerda y de los lados del rectángulo. En esta actividad los estudiantes determinan que es posible hallar diferentes rectángulos con una cuerda de longitud fija. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros.  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son algunos de los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Elabora estos cercos usando una cuerda, dibújalos en el cartón y determine los valores de los lados de cada rectángulo. 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco que tiene mayor área, porque los estudiantes requieren asociar la longitud de la cuerda con el perímetro de un rectángulo y determinar que los rectángulos abarcan diferentes superficies, es decir que sus áreas pueden ser diferentes. Se espera que los estudiantes den como ejemplos rectángulos cuyos lados sean de medida un número natural. En el proceso de hallar el área de los rectángulos, los estudiantes podrán usar la fórmula (la multiplicación de la base por la altura) o la cuadrícula del cartón (contar cuadrados), donde se dibujan los rectángulos. Dado que los valores de los lados son números naturales se espera que realicen cálculos a mano. Es posible que los estudiantes descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que los estudiantes simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.

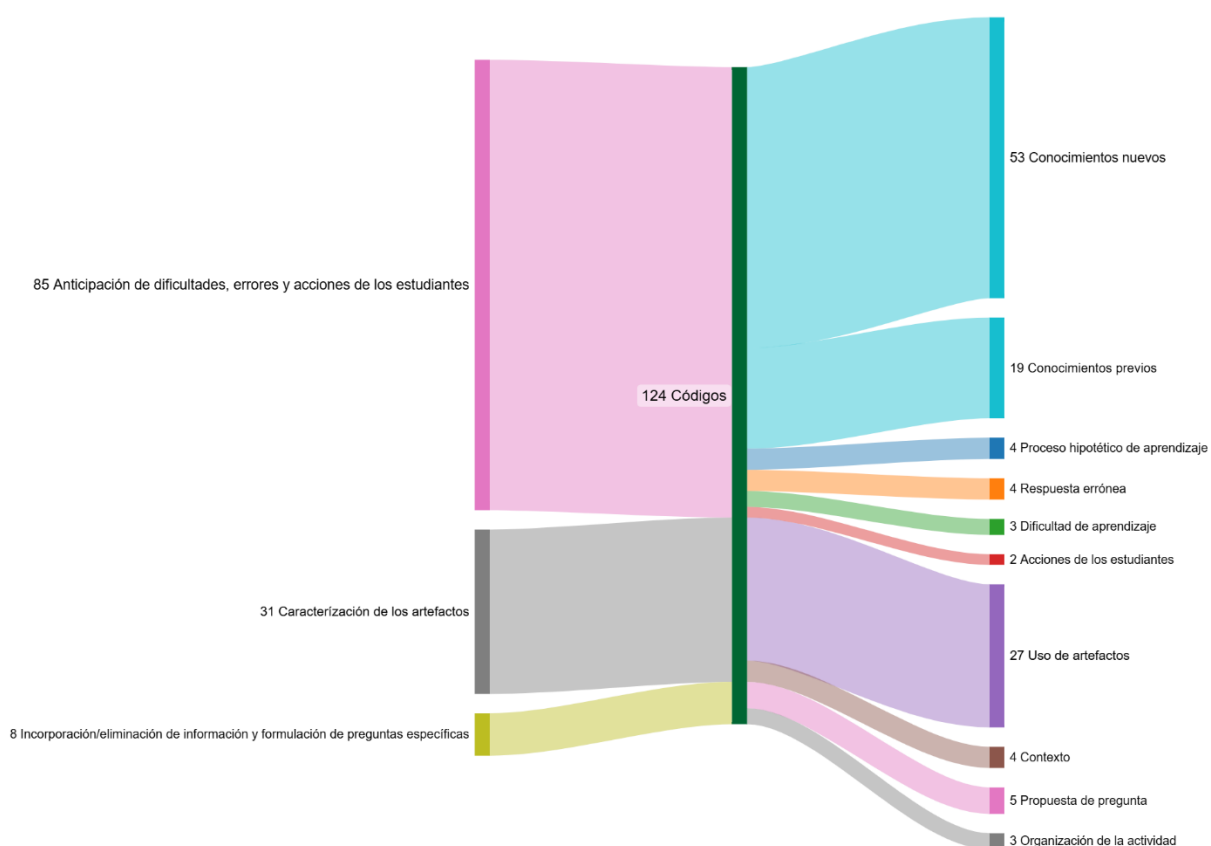
En el segundo nivel de análisis de los datos, los cambios en la THA0 se organizaron en torno a tres focos de atención (categorías):

1. Caracterización de los artefactos: Se refiere a los aspectos considerados en la selección y uso de artefactos físicos y digitales para representar los objetos matemáticos del problema propuesto en la THA.
2. Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes: Incluye los aspectos relacionados con las posibles respuestas de los estudiantes. Considera las dificultades y errores al resolver las preguntas en las actividades de aprendizaje de la THA.
3. Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas: Se centra en los cambios en la secuencia de preguntas dentro de cada actividad de aprendizaje. Abarca los niveles situacional, referencial, general y formal.

Los focos de atención 1 y 3 corresponden a los cambios de las actividades de aprendizaje, mientras que el foco de atención 2 fueron aspectos sugeridos al proceso de aprendizaje hipotético. Los focos de atención son categorías obtenidas de manera inductiva. En la Figura 9 y 10 se presentan los códigos relacionados a los focos de atención.

Figura 9.

Codificación en las entrevistas semiestructuradas del primer grupo



Nota. Diagrama de Sankey elaborado en <https://sankeymatic.com/build/>.

Figura 10.

Codificación en las entrevistas semiestructuradas del segundo grupo



Nota. Diagrama de Sankey elaborado en: <https://sankeymatic.com/build/>.

El segundo nivel de análisis de los datos respondió a la pregunta: ¿Qué aspectos atendieron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática? En la Tabla 4, se muestra un ejemplo del primer grupo de FPM sobre los cambios realizados en la AA1 de la THA0 respecto a los tres focos de atención. El análisis completo de este nivel se presenta en el Anexo 6.

Tabla 4.

Cambios en la AA1 de la THA0 por el primer grupo de FPM respecto a los focos de atención

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
1	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta: Para determinar los vértices del rectángulo, se usa chinchas ⁶ sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. Los FPM añadieron en GeoGebra el fondo de una finca.	Los FPM sugirieron agregar en el proceso de aprendizaje hipotético: Es posible que descarten como respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.	Los FPM modificaron la redacción del nombre e introducción de la actividad: Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb). En la pregunta 1 agregaron cercos rectangulares.

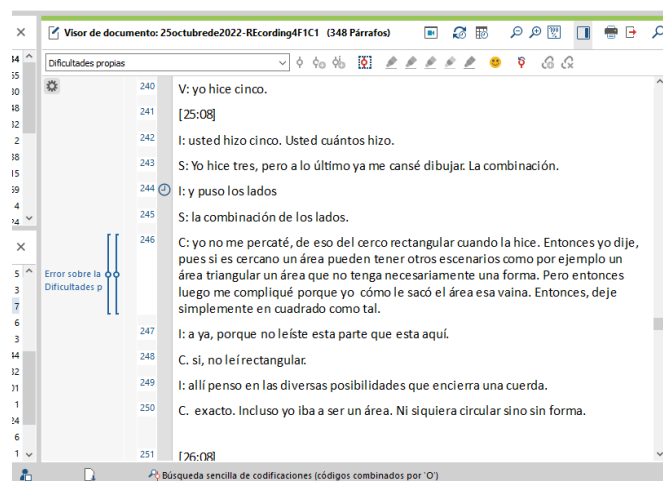
Los datos del tercer nivel de análisis se obtuvieron de las transcripciones de las entrevistas semiestructuradas. Se seleccionaron segmentos relevantes que evidencian y justifican los cambios en la THA0 realizados por los FPM. En las transcripciones, I representa a la investigadora, mientras que las letras en mayúscula corresponden a los FPM; los corchetes [] indican aclaraciones y los paréntesis (...) denotan omisiones.

Para la primera versión de las transcripciones, se utilizaron los programas Amazon Transcribe y Pinpoint de Google. Posteriormente, se llevó a cabo la revisión, corrección y selección de segmentos en MAXQDA 2020 Analytics Pro, centrando el análisis en los cambios en la THA0. La Figura 11 muestra un ejemplo de la codificación de un segmento de evidencias de los cambios de la THA provisto en las entrevistas semiestructuradas.

⁶ Conocidos como chinchetas o tachuelas. Son clavos pequeños de cabeza plana.

Figura 11.

Ventana del software MAXQDA



En el tercer nivel de análisis, se explora la pregunta: ¿Qué aspectos interpretaron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar de lecciones sobre función cuadrática?

La Tabla 5 presenta un ejemplo de los aspectos interpretados por el primer grupo de FPM en relación con el foco de atención, caracterización de los artefactos. El análisis detallado de este nivel se encuentra en el Anexo 6.

Tabla 5.

Aspectos interpretados respecto a la caracterización de los artefactos en la THA1

Caracterización de los artefactos	
Aspectos interpretados	En línea 28, J dice: Pues el tablero con la cinta métrica para que ellos puedan medir. Pero esperamos que ellos hagan la escala de veinte metros a veinte centímetros. J interpretó que el uso de la cuerda y el tablero de cartón conlleva a usar escala en medida de la cuerda para construir los rectángulos sobre el tablero de cartón.
	En línea 32, M dice: Primero porque pues las matemáticas son, de alguna forma una, no sé si voy a abusar diciéndolo como un medio. (...) Y si al principio, si al principio establecemos un contexto (...) para que se resuelva un problema y lo tratamos de resolver con matemáticas, pues la intención es que al final en las mismas matemáticas pueden dar respuesta al problema.
	En el diálogo M interpretó la necesidad de usar las matemáticas y el contexto para resolver el problema.

El cuarto nivel de análisis integra y sintetiza los resultados de los tres niveles previos para identificar los aspectos que los FPM atendieron, interpretaron y decidieron en relación con su mirada curricular al cambiar la THA0 durante la primera y segunda planificación de una lección sobre función cuadrática. Este nivel responde a la pregunta: ¿Qué aspectos atendieron, interpretaron y decidieron los FPM en los cambios en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática? Los resultados de la investigación son el cuarto nivel de análisis y se presentan en el siguiente capítulo.

Resultados de la investigación

Este capítulo expone los resultados del análisis sobre las habilidades de la mirada curricular en relación con los cambios propuestos por dos grupos de FPM a una THA0 durante la primera y segunda planificación de una lección sobre función cuadrática.

La organización del capítulo sigue una estructura en dos ciclos, cada uno correspondiente a un grupo de FPM. Los resultados de cada ciclo se presentan en función de los tres focos de atención: (i) caracterización de los artefactos, (ii) anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, y (iii) incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

En cada uno de estos focos, se seleccionaron segmentos de las entrevistas semiestructuradas que evidencian y justifican los cambios realizados en la THA0. A partir de estas justificaciones, se identificaron los aspectos que los FPM interpretaron. Las decisiones de los FPM se reflejan en los cambios efectuados en la THA0 al planificar lecciones.

Resultados del primer ciclo del experimento de enseñanza colectivo

Análisis de los cambios en la THA0 (THA1) propuestos por el primer grupo de FPM

Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.

Los FPM agregaron un tablero de cartón con fondo cuadriculado, cintas métricas, cinta pegante y chinchas en la AA1 (Tabla 6). En este caso, los FPM modificaron las representaciones matemáticas al agregar artefactos físicos en la construcción de los rectángulos con la cuerda. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo de los FPM:

I: En la actividad número 1, hacen la propuesta de entregarle a los estudiantes un tablero de cartón con una cinta métrica. Una madeja o rollo de cuerda completa, una cinta pegante y chinchas. ¿Podrían explicar de qué manera los estudiantes usarán estos materiales?

J: Pues el tablero con la cinta métrica es para que ellos puedan medir. Pero esperamos que ellos hagan la escala de veinte metros a veinte centímetros. Así fue, como lo pensamos, la cinta es para que ellos puedan unir los dos tramos de la cuerda y que quede, como por así decirlo la cuerda unida y puedan con los chinchas hacer la forma de un rectángulo.

(13junio2022, pos. 27-28)

En el anterior diálogo, J consideró que el uso de la cuerda conlleva a usar la escala en su medida para construir los rectángulos sobre el tablero de cartón.

Por otra parte, los FPM consideraron el contexto para darle sentido a la construcción del nuevo conocimiento matemático. Los FPM agregaron elementos gráficos en los applets para simular la vista frontal de una finca (Tabla 6, AA1, AA2, AA3 y AA4) al considerar que todas las actividades de aprendizaje requieren el contexto inicial del problema. A continuación, el diálogo:

I: Ustedes hicieron la propuesta de que en la actividad dos, tres y cuatro no se omitiera la relación con el contexto. ¿Podrían ampliar la razón de esta decisión?

M: Primero porque las matemáticas son, de alguna forma una, no sé si voy a abusar diciéndolo como un medio. (...) Y si al principio, si al principio establecemos un contexto (...) para que se resuelva un problema y lo tratamos de resolver con matemáticas, la intención es que al final en las mismas matemáticas pueden dar respuesta al problema. (13junio2022, pos. 31-32)

En el anterior diálogo, M reconoció la necesidad del contexto para resolver el problema y del uso de las matemáticas para interpretar ese contexto y darle un significado a la respuesta.

Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.

Los FPM identificaron posibles dificultades asociadas con los conocimientos matemáticos de los estudiantes. En relación con la AA1, reconocieron que un cuadrado es un caso particular de rectángulo y anticiparon que relacionar y distinguir cuadrado y rectángulo puede ser una dificultad para los estudiantes (Tabla 6).

Además, como se evidencia en el siguiente diálogo, los FPM detectaron otras dificultades, tales como la confusión entre área y perímetro, el uso incorrecto de la escala en la medida de la cuerda para resolver el problema y los desafíos en los tratamientos algebraicos para determinar la expresión general del área.

I: ¿Cuáles podrían ser las dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de las actividades?

J: Una las dificultades que presentan los estudiantes es que no reconozcan que un cuadrado es un rectángulo o que de pronto puedan confundir el área con el perímetro. Que piensen que el área es la suma de los lados de la figura (...). También, con lo de las escalas que piensen que tienen que utilizar literalmente los 20 metros de cuerda para poder hacer la actividad.

M: A parte de esas, un tipo de dificultad, que puede pasar, (...) los tratamientos algebraicos que haya que realizar, pues hay que hacer diferentes tratamientos (...) Creo que la más importante es la de la escala. (13junio2022, pos. 11-13)

En el anterior diálogo, los FPM determinaron que la dificultad de confundir área con perímetro se debe a que asocian el área con el procedimiento de sumar los valores de los lados. También, los FPM pronosticaron que los estudiantes no usarán la escala en la medida de la cuerda al considerar los 20 metros y consideraron las dificultades en los tratamientos algebraicos.

También, los FPM determinaron que los estudiantes descartarán que la abscisa representa el valor de la base y la ordenada el área de los rectángulos correspondientes

Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

Los FPM añadieron información o preguntas más específicas para ayudar a los estudiantes a establecer las relaciones matemáticas necesarias para resolver las actividades de aprendizaje. En concreto, los FPM agregaron una pregunta sobre el procedimiento para hallar el área y el perímetro de un rectángulo en la AA2 (Tabla 6). A continuación, se presenta el diálogo:

I: Ustedes en la actividad dos, agregaron una pregunta, que es la siguiente: ¿Por qué toman esta decisión?: ¿Qué es el perímetro de un rectángulo? ¿Cómo se halla el perímetro de un rectángulo? ¿Cuál es el área de un rectángulo? ¿Cómo se halla el área de un rectángulo? ¿Por qué deciden agregar a esta pregunta?

M: (...) Digamos que esos tienen que ser los conocimientos iniciales, la base por la cual se empieza a analizar el problema (...).

J: Si se plantea esas preguntas, ya que, bueno, pues se espera que el estudiante venga con este conocimiento, pero como en la trayectoria [THA0] no es específico hablar sobre eso, se les recuerda (...) pues como hay que hacer uso de fórmulas, que no están explícitas en

la trayectoria [THA0], porque se espera que ellos las hagan y hallen la relación entre representación algebraica y la geométrica. (13junio2022, pos. 34-36)

En el anterior diálogo, J determinó que los estudiantes necesitan las fórmulas del área y el perímetro para establecer la relación entre la representación algebraica y geométrica.

Los FPM agregaron una pregunta de una familia de rectángulos con perímetro fijo 64 porque consideraron que tener más casos particulares les ayudaría a los estudiantes en la generalización y resaltaron usar un valor distinto a decenas en la AA4 (Tabla 6). Al respecto, M expresó:

I: Ustedes agregan una nueva pregunta, que es: si se desea a modificar la longitud del cerco de malla a 64. ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 m? ¿Cómo es la gráfica del área respecto a la base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64 m? ¿Por qué deciden agregar esta pregunta?

M: Digamos que se está pensado en relación con que ellos miren varios casos particulares. Esos varios casos particulares ayudan a mirar justamente esas invariantes, digamos, encuentran el área máxima de cuando el perímetro vale veinte y después cuarenta y se escoge el sesenta y cuatro en sí, como para no cerrarlo en decenas (...) para no dar a entender de que sólo se pueda (...) resolver el problema con perímetro en decenas. (13junio2022, pos. 40-41)

En el anterior diálogo, M sugirió considerar familias de rectángulos con perímetro fijo diferente a decenas porque amplía los casos para examinar las invariantes del problema.

En la Tabla 6 se presenta la THA1 del primer grupo de FPM que corresponde a la THA0 modificada por este grupo. Los cambios efectuados por los FPM se encuentran destacados en gris y se refieren a agregar preguntas o información en la THA0.

Tabla 6.

THA1 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1: Se usa como herramienta una cuerda, sujeta en sus extremos, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usa chinchetas sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb).  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco con mayor área. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Es posible que descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.
AA2: La herramienta que se usa es un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro. 2. Familia de rectángulos con igual perímetro. Observa los posibles cercos rectangulares cuando se mueve el punto C (abre el archivo 2.ggb). 2.1. Determine 2 cercos rectangulares con perímetro igual a 20, que sean diferentes a los que encontró en la primera actividad. 2.2. ¿Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son sus medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad?	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar cual tiene mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
2.3. ¿Qué es el perímetro de un rectángulo? ¿Cómo se halla el perímetro de un rectángulo? ¿Qué es el área de un rectángulo? ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?	
2.4. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?	
AA3: La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega lo traza del punto I que relaciona la base vs área del rectángulo. 3. Análisis de la traza del punto I. Observe el punto I, mueva el punto C (abra el archivo 3.ggb). 3.1. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas del punto I? 3.2. ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? 3.3. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? 3.4. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? 3.5. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de menor área? 3.6. ¿Cuáles son las características del rectángulo con menor área? 3.7. Determine un par de rectángulos con igual área, ¿cuáles son las características de estos rectángulos?	Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos. Es posible que no relacionen los valores de las coordenadas con la base y el área del rectángulo.
AA4: La herramienta es un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. 4. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos de igual perímetro. Ingresa la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos de igual perímetro, en la parte de abajo, en entrada. 4.1. Compara la traza del punto y la gráfica de la expresión algebraica ¿Por qué el punto I no genera	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica y se espera que se generalice la expresión algebraica del área de los rectángulos con igual perímetro.

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano?	
4.2. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40?	
4.3. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64?	
4.4. Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n ?	

Análisis de los cambios en la THA1 (THA2) propuestos por el primer grupo de FPM

Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.

Los FPM emplearon los artefactos de la misma manera propuesta en la THA1, pero agregaron una descripción más detallada sobre su uso en la AA1 (Tabla 7). Además, en todas las actividades de aprendizaje, añadieron espacios en blanco delimitados por cuadros, luego de observar que los estudiantes requerían un área específica para dibujar los rectángulos que habían representado en el cartón.

A continuación, se presenta el diálogo de los FPM:

I: ¿Le dejamos estas líneas?

J: Un espacio para que puedan dibujarlo también.

I: En blanco como un cuadrito.

J y M: Sí, sí. (13 julio 2022, pos. 135-138)

Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.

Los FPM consideraron la dificultad y acciones para generalizar el problema en la AA2 (Tabla 7). En concreto, se presenta el diálogo de los FPM:

M: En el momento de generalizar. (...) se destaca esa necesidad intelectual en ellos, la de la de formalizar, generalizar las ideas. Ellos pueden ver algunos puntos tabulares y entender, digamos entender la gráfica, pero la idea de generalizar algebraicamente es algo que les cuesta mucho más

J: (...) Yo cuando M dice generalizar (...), yo me acordaba también de un texto de Mason (...) donde habla de unos procesos que tienen que hacer para uno constatar que el estudiante si aprende. Uno de esas es poder pasar de lo particular a lo general y viceversa. (6 julio 2022, pos. 92-93)

En el anterior diálogo, los FPM identificaron la generalización mediante expresiones algebraicas como una necesidad intelectual en el proceso de aprendizaje. Reconocieron, además, su elevada complejidad, ya que exige que los estudiantes analicen y establezcan patrones a partir de valores particulares de la función cuadrática, promoviendo así su razonamiento matemático.

En la THA2, los FPM mencionaron la dificultad de usar valores específicos en la AA2 (Tabla 7). Los FPM reconocieron que los estudiantes evitan usar variables porque prefieren los valores específicos. Al respecto, esto es lo que dicen los FPM:

I: ¿Por qué los estudiantes no lograron hallar la expresión algebraica de la familia de funciones con perímetro fijo veinte?

M: Sí, esa es la más difícil. (...) Yo lo que alcanzaba a mirar era que ellos tenían como la costumbre de, cómo se dice, de dar un valor (...).

M: (...) Ellos al final, lo que yo veía mucho que hacían era que cerraban los valores.

Daban un valor en específico (...).

J: Ellos colocaban, perímetro veinte y se ponían a hallar valores que sumados dieran veinte, pero no la generalizaban. (6julio2022, pos. 115- 122)

Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

Los FPM incorporaron preguntas para que los estudiantes construyan la expresión algebraica a partir de casos particulares (Tabla 7, AA2 y AA3). En el siguiente diálogo, los FPM discutieron el uso de las tablas:

I: ¿Qué revisen la tabla? O sea, ¿se les puede dar la tabla y que ellos recolecten los valores?

M: Exacto.

I: Sí, puede ser más. En vez de ponerles determine dos cercos, no, más bien determine algunos cercos rectangulares. ¿Cierto?

M: Exacto.

J: Sí.

I: Entonces completa la siguiente tabla.

M: Ah, puede ser. Démosles a algunos que tengan.

I: ¿Los valores?

M: Que tengan un valor y que ellos completen. (13julio2022, pos. 261-269)

Los FPM añadieron una pregunta con varias figuras de rectángulos con el valor de un solo lado. A continuación, las discusiones de los FPM:

M: Si uno hace una pregunta, por ejemplo, en ese sentido de si este lado vale tanto cuánto vale el otro.

I: Pero eso tiene que ver con esa tabla.

J: Hay sí.

M: O sea, se responde en la tabla, pero algunos no son conscientes de eso.

I: Entonces, ¿Tendría que hacer una pregunta?

J: No, yo creo que la socialización podríamos dibujar. Podríamos dibujar un rectángulo y solamente colocar el valor de aquí el valor de acá. Entonces cuanto mide este lado. Yo creo que ellos van a saber que mide lo mismo. Entonces, si tenemos el perímetro, o sea, ¿Qué ocurrirá allí?

I: Eso lo podemos dibujar acá ¿Darle los rectángulos y que ellos lo pongan?

M y J: También.

J: Podemos colocar un rectángulo.

I: Quitándole las medidas.

M: Colocarle dos rectángulos y al final preguntarles si este lado vale x , entonces ¿Cuánto vale el otro? (13julio2022, pos. 448-458)

En el anterior diálogo, los FPM consideraron que el uso de la tabla es insuficiente para que los estudiantes encuentren la expresión general del área. Por lo cual, los FPM agregaron una pregunta con figuras de rectángulos con valores faltantes. Los FPM analizaron que estas figuras de rectángulos les podrían ayudar a los estudiantes a relacionar los valores de los lados con la fórmula del área para obtener la expresión general del área. Al respecto, dicen lo siguiente:

I: Bueno, entonces que sean otros que no sean de los que escogieron aquí ¿No?, porque aquí ya tenemos otros.

M: Pero esa parte va a ser clave para la última generalización.

I: Sí, porque si él dice x , pues este tiene que medir diez menos x . Y ahora, entonces ¿Cuál es el área? Base por altura y no tiene que hacer ni, ¿Cómo se llama? ni sustitución. Lo que hizo M.

J: Ni reemplazar los valores en términos de otros.

M: Implícitamente lo va a hacer. Pero no va a ser consciente de eso. (13julio2022, pos. 485- 489)

Los FPM expresaron que las tablas y las figuras permiten ver diferentes casos particulares que ayudan a los estudiantes a comprender la función cuadrática. El propósito de las preguntas específicas es ayudar a los estudiantes a llegar a la expresión algebraica del área de la familia de rectángulos como generalización de casos particulares (Tabla 7, AA2 y AA3).

Los FPM cambiaron la redacción de algunas preguntas, agregaron tablas o figuras para propiciar los análisis de casos específicos y obtener la generalización (Tabla 7, AA1, AA2, AA3 y AA4). Los FPM cambiaron el nombre de las AA y dieron indicaciones del uso de los archivos GeoGebra. En AA4, los FPM dieron la expresión general del área de la familia de rectángulos para hallar su gráfica.

Los FPM eliminaron algunas preguntas de la THA1 como: en la AA2 quitaron la pregunta sobre perímetro y área y en la AA3 descartaron las preguntas tercera, quinta, sexta y séptima de la THA0 sobre la ubicación del punto I al ser el área de los rectángulos mínima o iguales. Los FPM suprimieron algunos artefactos de la THA1, en la AA1 no usaron GeoGebra y lo sustituyeron por una imagen de la finca y en la AA3 eliminaron la tabla de GeoGebra.

Tabla 7.

THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se usa como herramienta una cuerda de tamaño 20 cm, sujeta en sus extremos por medio de una cinta, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinchas sobre un cartón. El cartón tiene de fondo una hoja cuadriculada y en sus bordes una cinta métrica, para facilitar la medida de longitud de la cuerda y de los lados del rectángulo. En esta actividad los estudiantes determinan que es posible hallar diferentes rectángulos con una cuerda de longitud fija. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros.  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son algunos de los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Elabora estos cercos usando una cuerda, dibújalos en el cartón y determine los valores de los lados de cada rectángulo. 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco que tiene mayor área, porque los estudiantes requieren asociar la longitud de la cuerda con el perímetro de un rectángulo y determinar que los rectángulos abarcan diferentes superficies, es decir que sus áreas pueden ser diferentes. Se espera que los estudiantes den como ejemplos rectángulos cuyos lados sean de medida un número natural. En el proceso de hallar el área de los rectángulos, los estudiantes podrán usar la fórmula (la multiplicación de la base por la altura) o la cuadrícula del cartón (contar cuadrados), donde se dibujan los rectángulos. Dado que los valores de los lados son números naturales se espera que realicen cálculos a mano. Es posible que los estudiantes descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que los estudiantes simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.
AA2 La herramienta que se usa es un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro de los rectángulos. En esta actividad los estudiantes requieren reconocer que el perímetro de los rectángulos es fijo, mientras que el valor del área varía.	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

Familia de rectángulos.

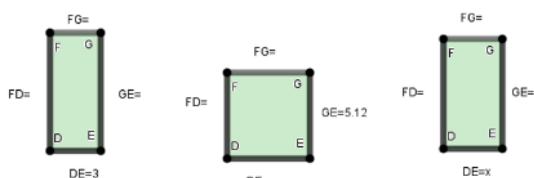
Abra el archivo familiarectangulos.ggb, mueva el punto C y observa los posibles cercos rectangulares.

2.1. Determine algunos posibles cercos rectangulares, completa la siguiente tabla:

Lado DE	Lado EG	Perímetro DEGF	Área DEGF
1			
	5		
			16
3,75			
	4,15		
		20	

2.2. ¿Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son las medidas de los lados de ese rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad? Justifica tu respuesta.

2.3. Determine el valor de los lados de los siguientes rectángulos con perímetro 20.



2.4. Si el perímetro de los rectángulos es 20, ¿cuál es la fórmula para hallar el área de esta familia de rectángulos?

Proceso de aprendizaje hipotético

rectángulo para determinar cual tiene mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro teniendo presente la fórmula del área para los rectángulos.

Los estudiantes pueden resistirse a usar variables. Se percibe una marcada tendencia a buscar respuestas exactas. Estas acciones dificultan la generalización del área con expresiones algebraicas.

AA3

La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega lo traza del punto I que relaciona la base frente al área del rectángulo.

En esta actividad los estudiantes relacionarán las coordenadas del punto I, con un lado del rectángulo y el área. Y analizarán la traza del punto I, para hallar la respuesta al problema.

3. La traza del punto I.

Abra el archivo traza.ggb, mueve el punto C, observe el punto I.

3.1. Si el punto I tiene coordenadas (x, y), determine algunos de sus valores:

x	3		7			2,84
y		24		17,6	14,3	

Los estudiantes analizan la traza del punto I, que es un conjunto de puntos que tiene como coordenadas (base, área).

Los estudiantes pueden relacionar la traza del punto I con una forma conocida, por ejemplo, una montaña o una u invertida, o determinar que es una parábola o la gráfica de una función cuadrática.

Los estudiantes pueden ratificar o encontrar que la solución al problema está en construir un cuadrado de lado 5 metros y que el punto I se encuentra en el punto máximo de la parábola, que en este caso es el vértice.

Los estudiantes pueden darse cuenta de que el área aumenta cuando C se mueve de A hacia

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
3.2. Acorde a los valores de los rectángulos, ¿qué representan las coordenadas del punto I = (x, y)? 3.3. ¿Cómo es la huella del punto I cuando se mueve el punto C? 3.4. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área?	el punto medio del segmento AB, y que disminuye cuando C pasa el punto medio de segmento AB y se mueve hacia B.
AA4 La herramienta es un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. 4. Gráfica del área frente a la base de los rectángulos de igual perímetro. Abra el archivo <code>grafica.ggb</code>, escriba $y=x(10-x)$ en la entrada. 4.1. Compara la traza del punto I y la gráfica de $y=x(10-x)$ ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano? 4.2. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? 4.3. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64? 4.4. Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo igual a n?	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica y se espera que se generalice la expresión algebraica del área de los rectángulos con igual perímetro.

Consideraciones de la mirada curricular del primer ciclo

En la Tabla 8, se resumen los aspectos atendidos, interpretados y decididos por el primer grupo de FPM respecto a los cambios en la THA0 durante la primera (THA1) y segunda planificación de una lección (THA2).

Tabla 8.

Habilidades de atender, interpretar y decidir en la planificación de lecciones del primer grupo de FPM

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la THA1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
Caracterización de los artefactos	Adición de artefactos físicos (cartón con fondo cuadriculado, cintas métricas, etc.) para simular el cerco.	El uso de la cuerda requiere de escala para construir los rectángulos sobre el tablero de cartón. (13junio2022, pos. 28)	Descripción detallada del uso de artefactos físicos.	
	Incorporación de elementos gráficos en GeoGebra para simular una finca.	La resolución del problema requiere de las matemáticas y el contexto. (13junio2022, pos. 32)	Ocultación de la hoja de cálculo con los valores de los rectángulos en GeoGebra en AA2 y AA3.	
	Adición del nombre del archivo GeoGebra en las instrucciones.		Cambios en la presentación visual (tamaño de texto y colores) en GeoGebra.	
			Adición de espacios en blanco para respuestas en hojas de trabajo.	
Anticipación de dificultades, errores y	Reconocimiento del cuadrado		Darle significado a la letra como variable.	Los estudiantes prefieren valores específicos en

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la THA1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
acciones de los estudiantes	como rectángulo.			vez de usar valores variables. (6julio2022, pos. 115-122)
	Confundir el área con el perímetro.	El área puede ser considerada como la suma de los valores de los lados. (13junio2022, pos. 12)	Reconocimiento entre el perímetro y área.	
	Uso de escala.	Los estudiantes pueden omitir el uso de la escala al considerar 20 metros de cuerda. (13junio2022, pos. 12)	Relación entre movimiento del punto C con los cambios en el área.	
	Generalización de la expresión algebraica del área.		Dificultad para generalizar algebraicamente.	Reconocer la complejidad de generalizar algebraicamente. Esta exige que los estudiantes analicen y establezcan patrones a partir de valores particulares de la función cuadrática. (6julio2022, pos. 92-93)
	Interpretación de coordenadas del punto I.			
Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas	Adición de pregunta sobre procedimientos de área y perímetro.	Reconocer el perímetro y el área como conocimientos previos para abordar el	Eliminación de algunas preguntas (ej. sobre perímetro y área).	

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la THA1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
		problema. Hacer explícito las fórmulas de área y perímetro de un rectángulo permite las relaciones entre las representaciones geométricas y algebraicas. (13junio2022, pos. 36)		
	Inclusión de un caso de una familia de rectángulos con perímetro fijo 64.	Considerar familias de rectángulos con un perímetro fijo distinto a múltiplos de diez permite ampliar el análisis de casos particulares y facilita la identificación de invariantes dentro del problema.	Adición de tablas y figuras para analizar casos particulares.	Inclusión de figuras de rectángulos con valores faltantes puede facilitar a los estudiantes la identificación de la relación entre las dimensiones de los lados y la fórmula del área. Esto les permite reconocer patrones y, a partir de ellos, derivar la expresión general del área. (13 de julio de 2022, pos. 485-489).
			Inclusión de preguntas guía para construir la expresión algebraica del área.	El uso de la tabla de valores del rectángulo es insuficiente para construir la expresión general del área. (13julio2022, pos. 448-458).

Respecto a la Tabla 8, se encuentra que, en la primera planificación de la lección, los FPM centraron su atención en las características de los artefactos para precisar la producción de representaciones matemáticas y ampliar el contexto de la huerta de una finca en GeoGebra. En este proceso, identificaron dificultades, como la distinción entre un cuadrado y un rectángulo y el uso adecuado de la escala en la medida de la cuerda.

Para abordar estas dificultades, consideraron necesario hacer explícitos algunos conceptos matemáticos en las actividades de aprendizaje. En consecuencia, incorporaron información adicional y preguntas específicas orientadas a guiar el procedimiento para calcular el área y el perímetro de un rectángulo, así como el caso particular de una familia de rectángulos con perímetro fijo de 64.

En la primera planificación de la lección, los FPM interpretaron que el uso de artefactos físicos para representar los rectángulos implica la necesidad de emplear la escala en la medida de la cuerda. Asimismo, reconocieron que el contexto es esencial para el análisis del problema y que conceptos como perímetro, área y escala deben ser explicitados como conocimientos previos. Además, identificaron posibles dificultades conceptuales, como la asociación errónea del área con la suma de los lados y el sesgo en el análisis del problema al trabajar únicamente con familias de rectángulos con perímetro decimal.

En la segunda planificación de la lección, los FPM centraron su atención en el uso de los artefactos para precisar su aplicación y mejorar la producción de representaciones matemáticas. Además, identificaron una dificultad: la generalización del problema mediante expresiones algebraicas. Para abordarla, incorporaron preguntas con tablas y figuras de rectángulos, con valores específicos y datos faltantes sobre sus lados, área y perímetro, con el propósito de guiar a los estudiantes en la construcción de la expresión algebraica del área.

En relación con los focos de atención caracterización de los artefactos y anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, los FPM tomaron en cuenta los cambios realizados en la THA0 (THA1) durante la primera planificación. Sin embargo, en lo referente a la incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas, optaron por suprimir la pregunta añadida en la THA1 sobre el procedimiento para calcular el perímetro y el área, junto con otras preguntas de la THA0.

En relación con las actividades de aprendizaje (AA) de la THA0, se observaron variaciones en la cantidad y naturaleza de los cambios a lo largo de las dos planificaciones de la lección. Durante la primera planificación, la AA2 fue la que presentó menos modificaciones. Sin embargo, en la segunda planificación, fue la actividad que experimentó el mayor número de cambios. En contraste, la AA4 fue la que menos ajustes recibió en la segunda planificación. Por su parte, la AA1 se mantuvo como una de las actividades con modificaciones constantes en ambas planificaciones.

En la segunda planificación de la lección, las interpretaciones de los FPM se centraron en la dificultad de generalización a partir de casos particulares, ya sea mediante lenguaje natural o expresiones algebraicas. Para abordar esta dificultad, los FPM propusieron el uso de diferentes representaciones matemáticas de la función cuadrática, como tablas y figuras. Además, identificaron que la dificultad de trabajar con variables surge de la tendencia de los estudiantes a utilizar valores concretos en la resolución del problema.

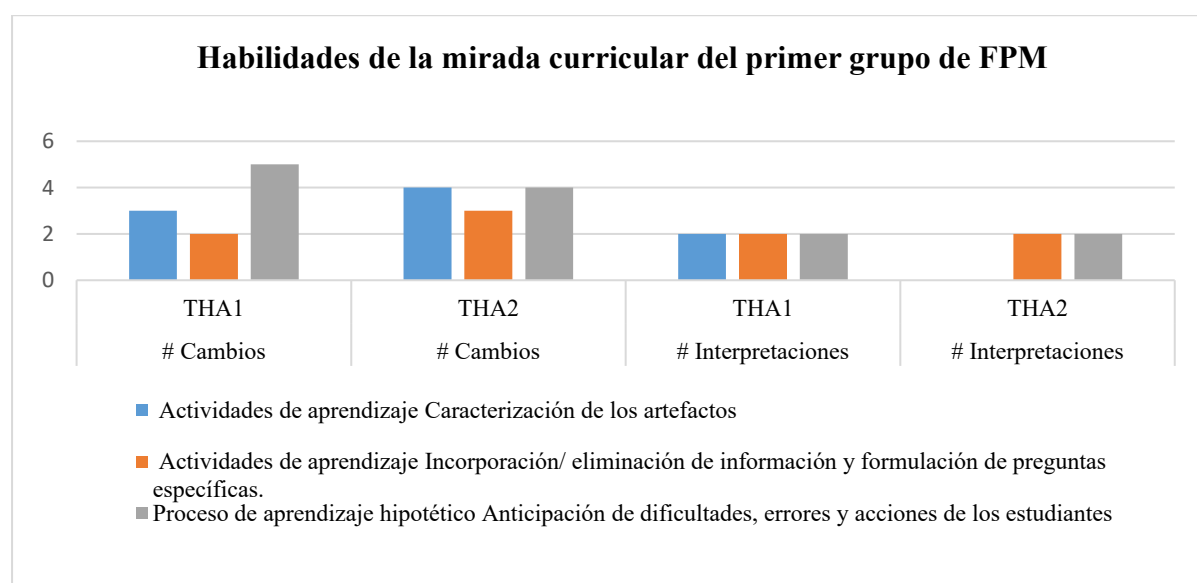
En cuanto a la caracterización de los artefactos, no se registraron nuevas interpretaciones en la segunda planificación de la lección. No obstante, surgieron nuevas interpretaciones relacionadas con la anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, así como con la incorporación/eliminación de información y la formulación de preguntas específicas.

En ambas planificaciones de la lección, los FPM coincidieron en que el objetivo de aprendizaje de la THA0 era pertinente. Asimismo, identificaron que la THA2 fue la que incorporó mayor diversidad de representaciones matemáticas en las actividades de aprendizaje.

Considerando la Tabla 8, se elaboró la Figura 12 que presenta la frecuencia de los cambios e interpretaciones de la THA1 y la THA2 realizado por el primer grupo de FPM.

Figura 12

Número de cambios e interpretaciones de los aspectos atendidos del primer grupo de FPM.



Resultados del segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo

Análisis de los cambios en la THA0 (THA1) propuestos por el segundo grupo de FPM

Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.

Los FPM agregaron a la AA1 un tablero de cartón con fondo de papel milimétrico, cuerdas de colores y chinchetas de cabeza (Tabla 9). Durante el análisis de sus acciones y respuestas al realizar las actividades de aprendizaje, identificaron la posibilidad de que los estudiantes no utilizaran la cuerda para representar los rectángulos.

En cuanto a las estrategias para el uso de la cuerda, los FPM consideraron la opción de entregarla con una longitud determinada; sin embargo, descartaron esta alternativa, dado que valoran el uso de la escala como un conocimiento previo esencial en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. A continuación, el diálogo:

I: Bueno en la actividad 1 ustedes decidieron entregarles a los estudiantes un tablero de cartón con papel milimétrico, cuerdas de colores y chinchas con cabecita ¿Podrían explicar de qué manera los estudiantes usarán estos materiales?

S: Pues espera que pongan los chiches en los vértices o (...)

V: Puede ser que ya no utilicen la cuerda (...). Nosotros tampoco la usamos. (...)

S: ¿La vamos a cortar?

V: Le damos la cuerda de colores y que ellos usen lo que consideren, dependiendo de la escala. (8noviembre2022- ES-Recording_10F1C1, pos. 104-115)

Los FPM exploraron diversas opciones para la medición, considerando tanto unidades convencionales (centímetros) como patrones de medida no convencionales. Posteriormente, reflexionaron sobre las implicaciones prácticas de emplear estos patrones alternativos y concluyeron que su uso podría demandar más tiempo. Esto se evidencia en el siguiente diálogo:

S: Lo hacen en escala, ¿no? aunque yo creo que la mayoría va a usar centímetros. Pero puede ser que alguien por ahí le guste pensar diferente y diga voy a hacer.

C: Va a hacerlo con los 20 metros.

S: O hace 10 cm, localizando cada unidad de 0.5 cm. (...)

C: En una actividad en el laboratorio de matemáticas nos pusieron a verificar el perímetro del salón, pero no nos dieron unidad de medida. (...)

S: ¿Como la regla?

C: No, no se podía con regla. Todos los cálculos los teníamos que hacer con esa unidad, entonces tantos teléfonos de la persona.

S: Ha está chévere.

C: Pero toma tiempo, eso también es una limitante para hacer la actividad. (8noviembre-ES-Recording_10F1C1, pos. 116-136)

Los FPM propusieron el uso de cuerdas de diferentes colores para que los estudiantes distinguieran visualmente los rectángulos construidos sobre el tablero de cartón. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

I: Recomiendan hilos de colores para diferenciar.

S: Yo sí.

C: Y visualmente uno como que lo identifica.

S: Mira esa figura ya con color. (25octubrede2022-REcording4F1C1, pos. 231-234)

Los FPM, respecto a los archivos GeoGebra, agregaron color y grosor de algunos de los objetos construidos, como el rectángulo y los valores de sus medidas, para relacionarlos (Tabla 9, AA2, AA3 y AA4). A continuación, el diálogo:

I: ¿Por qué agregan el color a los archivos? Me podrían explicar esa parte.

S: Pues yo sí tengo una razón, para eso. He leído un libro de etnomatemáticas del profesor de Ambrosio y él menciona que las matemáticas occidentales (...) ha obviado, ha quitado el color de las figuras. Por una cuestión de abstracción, pero, por ejemplo, si vemos las matemáticas que no son occidentales (...) el color hace resaltar de alguna forma las figuras.

V: Para que los estudiantes puedan ver esa relación de la base y la altura que de pronto se obviaba o quizás era más complejo verlo cuando realizaban el movimiento (...). De pronto no podrían identificar realmente cuál era el lado que crecía, cuál era la base o la

altura. Entonces es como una manera como para que ellos puedan como dar con esa relación.

C: Y además porque sin color, la manera (...) de identificar esa relación era por los números, por la longitud de los lados. Sin embargo, no era tan sencillo (...)

I: Si ustedes señalan el área y le ponen el mismo colorcito al valor.

S: Si eso también lo hicimos.

I: ¿Esto es para saber que si esto vale tanto corresponde al valor del mismo color?

C: Exactamente todo lo que está adentro de los bordes,

I: ¿El borde?

S: Eso es como cuando uno está enseñando el perímetro y área en la circunferencia (...)

Qué es círculo y qué es circunferencia, entonces ahí uno se da cuenta que círculo es el área porque está pintadito y circunferencia es el contorno. (8noviembre- ES-

Recording_10F1C1, pos. 73-86)

En el anterior diálogo, los FPM relacionaron el color de los objetos construidos en GeoGebra con los cambios de sus medidas. Los FPM consideran que el color ayudaría a los estudiantes a identificar lo que varía y no varía. También, los FPM reflexionaron que la abstracción de las matemáticas occidentales descarta el color en las figuras.

Los FPM usaron el color en los archivos GeoGebra (Tabla 9, AA1, AA2, AA3 y AA4). También, valoraron que el exceso de colores en GeoGebra puede generar desatención. Los FPM consideraron que el color podría tener un significado diferente para los estudiantes al dado por el diseñador. Al respecto el siguiente diálogo:

S: Pero también, hay que tener cuidado con los colores.

V: Exactamente.

S: Porque un exceso de colores puede causar problemas porque el estudiante puede perder la atención.

C: Sí, uno llama la atención en todos los puntos, entonces (...) puede ser significativo para el que diseña o el que modifica el recurso, pero para el estudiante puede que simplemente no tenga significado el color o se pierda de tanto de tantas cosas que están remarcadas. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 89-92)

Los FPM incluyeron espacios para las respuestas en la hoja de trabajo, consideraron la necesidad de que los estudiantes registraran sus procedimientos y soluciones. Evaluaron diferentes longitudes de los espacios en blanco y, en algunos casos, optaron por agregar hojas adicionales. Al respecto se presentan el diálogo:

I: Ustedes dejaron unos espacios en blanco ¿Qué tanto espacio considera pertinente?

S: Dependiendo de las preguntas, porque a veces preguntan solamente las coordenadas.

C: Algo muy puntual.

S: Me imagino que no van a necesitar tanto espacio.

C: En las últimas, por ejemplo, estamos pensando que era necesario hacer uso de hojas en blanco como para que ellos pudieran hacer los procedimientos si fuera necesario y que el espacio que estuviera ahí en la hoja del taller, solamente lo usaron para dar una respuesta. (8noviembre-ES-Recording_11F1C1, pos. 32-37)

Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.

Los FPM analizaron el uso del papel milimétrico y consideraron que los estudiantes podrían medir con unidades enteras o decimales (Tabla 9). A partir de esta observación,

incluyeron esta posible acción en el proceso de aprendizaje hipotético. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

C: Bueno, nosotros agregamos en la primera actividad, como vamos a entregar un material con papel milimétrico, entonces el estudiante podría trabajar con unidades enteras o unidades decimales. Entonces eso lo agregamos como en el proceso de aprendizaje hipotético donde se puede dar las dos opciones. (8noviembre-ES-Recording_11F1C1, pos. 28-30)

Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

Los FPM añadieron una tercera pregunta a la AA1 con el propósito de indagar las razones de los estudiantes al elegir el rectángulo de mayor área (Tabla 9). Anticiparon que algunos estudiantes podrían descartar la opción del cuadrado como el rectángulo con mayor superficie y consideraron relevante explorar los criterios que influyen en su selección. En particular, les interesó determinar si los estudiantes priorizan la longitud de uno de los lados en lugar de evaluar el área en relación con la base y la altura del rectángulo. Al respecto, se presenta el diálogo:

I: Por qué consideran necesario anexar esta pregunta a la actividad 1, ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?

V: (...) En la pregunta ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?, pues quizás el estudiante en ese momento no va a responder el cuadrado. Y quizás también, tenga un por qué (...) sería interesante saber por qué seleccionó precisamente este rectángulo, quizás porque un lado se vea más largo, por ejemplo. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 139- 140)

Respecto al anterior diálogo, V valoró que los estudiantes al seleccionar el rectángulo de mayor área podrían fijarse en la longitud de uno de los lados del rectángulo. En este caso, se prevé una dificultad, considerar la valoración sólo respecto a un lado del rectángulo.

Por otro lado, los FPM decidieron subrayar la palabra rectangular en la AA1, al valorar que esta podría pasar desapercibida para los estudiantes, lo que podría llevarlos a construir cercos con formas distintas a los rectángulos (Tabla 9). Este ajuste surgió a partir de un error de lectura cometido por un FPM al analizar la THA0, lo que puso en evidencia la necesidad de destacar las indicaciones para evitar confusiones. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

C: Yo no me percaté, de eso del cerco rectangular cuando la hice. Entonces yo dije, pues si es un cerco pueden tener otros escenarios como por ejemplo un área triangular o un área que no tenga necesariamente una forma. Pero entonces luego me compliqué, porque cómo le sacó el área a esa vaina. Entonces, deje simplemente un cuadrado como tal.

I: A ya, porque no leíste esta parte que está aquí.

C: Sí, no leí rectangular.

I: Pensó en las diversas posibilidades que encierra una cuerda.

C: Exacto. Incluso yo iba a hacer un área ni siquiera circular, sino sin forma.

(25octubrede2022-REcording4F1C1, pos. 246-250)

Los FPM modificaron la primera pregunta de la AA1 (Tabla 9) al agregar la indicación: Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. Esta adición responde a la necesidad de garantizar que los estudiantes no solo representen gráficamente los rectángulos en el tablero de cartón, sino que también, determinen y registren los valores de sus lados en las hojas de trabajo. Obtener los valores de los lados de los rectángulos permitiría verificar si los estudiantes consideraron el perímetro fijo 20 en la construcción de los rectángulos. Al respecto, el siguiente diálogo:

C: Sabes que se podría colocar acá como que.

S: ¿Qué tomen foticos?

C: No que tomen fotos, sino que escriban las medidas de esos rectángulos, ¿O no?

S: Pues sí, que escriban las medidas.

C: Dibujan algunos en la hoja milimétrica y que escriban las medidas.

S: Es bueno que los dibujen, sería bueno que lo dibujaran. (8noviembre2022-

Recording_9F1C1, pos. 47-52)

Los FPM incluyeron una tabla de valores de los rectángulos en la AA2 (Tabla 9) con el propósito de facilitar a los estudiantes la construcción de la expresión general del área para la familia de rectángulos. A través de esta tabla, se espera que los estudiantes identifiquen que el perímetro permanece constante, mientras que el área varía en función de los valores de sus lados.

A continuación, el diálogo:

I: ¿Cuál es la razón para incluir la tabla?

V: Pues la tabla porque lo que se espera luego es que el estudiante pueda dar como una expresión general de esos cambios que hay o que logré encontrar esa relación de lo que es el área respecto a la base. Entonces quizás el estudiante al ver el cuadrado puede ver el comportamiento que tiene la base y la altura cuando varía, qué tanto está variando y pues es como algo que uno esperaría, (...) al menos que él encuentre como esa relación y también como ahí también incluimos lo que fue el área y también el perímetro que identifiquen de alguna manera que, aunque el perímetro es constante no significa que el área también va a ser constante entonces ahí estamos también para potencializar eso.

(8noviembre-ES-Recording_11F1C1, pos. 2-3)

Respecto al anterior diálogo, V consideró que el uso de tablas facilitaría a los estudiantes la identificación de elementos invariantes y variables al analizar la relación entre las medidas de

los lados y la expresión general del área de los rectángulos. A través de esta representación, se busca que los estudiantes reconozcan qué magnitudes permanecen constantes y cuáles cambian, para fortalecer la construcción de la función cuadrática.

Los FPM eliminaron la pregunta relacionada con rectángulos de menor área de la THA0 y en las actividades de aprendizaje mencionaron el uso de un archivo GeoGebra.

Tabla 9.

THA1 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda amarrada en sus extremos para simular el cerco rectangular. Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la cuerda (lana) de colores para realizar la actividad. Construya algunos rectángulos con los materiales dados y responda las siguientes preguntas: a. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. b. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno? c. ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Los estudiantes inicialmente trabajan con unidades enteras, sin embargo, dado el recurso de los tableros construidos con hojas milimétricas se podría dar el caso que hagan uso de unidades decimales.
AA2 Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro.	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje
Proceso de aprendizaje hipotético
Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperimétricos.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas:

a. Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1.

b. Observa los valores del área cuando se mueve el punto C, ¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área?, ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad?

c. En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo.

Base	Altura	Perímetro	Área

d. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?

o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

AA3

Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega lo traza del punto I que relaciona la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada).

Análisis de la traza del punto I.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas:

a. Observe el punto I, mueva el punto C ¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C?

b. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área?

Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos.

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje
Proceso de aprendizaje hipotético

- c. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área?
- d. Determine un par de rectángulos con igual área ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?

AA4

Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos.

Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos.

Haciendo uso del archivo GeoGebra

(Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas:

- Ingresa en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encontraste en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I.
 - ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante II, III y IV del plano cartesiano?
 - Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto base de su rectángulo?
 - ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40?
 - Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo?
 - ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n ?
-

Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

Análisis de los cambios en la THA1 (THA2) propuestos por el segundo grupo de FPM
Foco de atención 1: Caracterización de los artefactos.

Los FPM usaron los artefactos físicos de la misma manera que en la THA1, pero excluyeron el uso del color en la cuerda porque observaron que los estudiantes dibujaban

rectángulos en la hoja milimétrica del tablero de cartón con diferentes colores. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

I: Entonces de esas primeras preguntas, ¿Qué cambiaríamos? Entonces el tablero con la hoja milimétrica lo seguimos trabajando así ¿Cómo está? ¿La lana de colores sigue? ¿O puede ser cualquier hilo de cualquier color? o ¿Seguimos con la lana de colores?

S: Cualquier color

I: Porque habíamos pensado que la lana de colores permitiría, ver cómo, determinar diferentes rectángulos.

V: Ellos lo hacen con lápiz o con colores, (10enero2023Voz 013F3C1, pos. 174-184)

Los FPM propusieron el uso de la hoja milimétrica en la AA1 (Tabla 10) como una herramienta para calcular el área de los rectángulos. Consideraron que los estudiantes podrían determinar el área mediante el conteo de cuadritos, lo que facilitaría la diferenciación entre área y perímetro. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

V: Y pues cuando ya se hace uso de la hoja milimétrica, (...) en el grupo, lo que hacían era diseñaban los rectángulos y los dejaban plasmados, o sea los dibujaban directamente y ya luego la misma hoja les permitía a ellos contar.

C: Yo creo que también que la hoja milimétrica posibilitó (...) que fuera explícito el conteo (...) Esos cuadritos que estaban dentro del rectángulo y de pronto sin la hoja milimétrica no hubieran llegado.

S: Les hubiera quedado muy difícil.

C: La hoja milimétrica ayudó, a que ellos también como que hicieran esa diferencia.

Bueno, tengo 20 metros de perímetro, pero esos 20 metros de perímetro me abarcan distintas superficies, entonces aquí abarca más cuadritos por conteo. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 173-191)

Los FPM aprobaron el uso de artefactos físicos para la representación de rectángulos sobre el tablero de cartón en la AA1 (Tabla 10). V determinó que la longitud fija y finita de la cuerda delimitó los bordes de los rectángulos y favoreció la comprensión de los estudiantes sobre la invariabilidad del perímetro, a pesar de las variaciones de los valores de los lados. Además, se manifestó el conteo de cuadritos del papel milimétrico como un procedimiento para hallar el área. Respecto al uso de la cuerda para representar los rectángulos con perímetro fijo, V dijo:

V: Cuando ya ellos tomaron los 20 centímetros, si ayudó un poco a que comprendieran que eso era lo que bordeaba. Pero en el momento de cuando ya entendieron, lo hicieron con el uso de los chinchas, pero no necesariamente hacían el uso del hilo, sino que ya se iba directamente a al tablero y ubicaban en cada esquina los chinchas, pero si sirvió fue como para indicar que solo con eso es que vamos a delimitar el cerco. (6diciembre2022-Recording_17F3C1, pos. 65)

Del diálogo anterior se deduce que la cuerda permitió a los estudiantes comprender que el perímetro de los rectángulos era constante y que la suma de sus lados es 20. Inicialmente, utilizaron la cuerda para construir los rectángulos; posteriormente, bastaba con ubicar los chinchas en los vértices para delimitar su forma.

Los FPM presentan imágenes de GeoGebra en cada una de las AA de la THA2 (Tabla 10, AA2, AA3 y AA4).

Foco de atención 2: Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.

Los FPM valoraron la necesidad del uso de la escala para medir la cuerda. En la implementación de las actividades de aprendizaje, una limitación de la madeja de cuerda era que su longitud era inferior a 20 metros, algunos estudiantes intentaron usar 20 metros de cuerda

midiendo aproximadamente con brazadas (longitud de la cuerda desde el hombro hasta la mano con el brazo extendido a la misma altura del hombro). Al respecto, el siguiente diálogo:

V: Desenrollaron todo y empezaron a medir, yo he visto que de aquí a aquí es un metro [brazada]. Uno, dos y empezaron. Desenrollaron todo y no les alcanzaba. Si van a utilizar los 20 metros cómo harías entonces. Ah, entonces no puede ser 20 metros, dijeron. Ah, pues es que es algo hipotético, entonces puede ser cualquier valor (...). Entonces César era que no, pues si son 20 metros pues podemos también tomar 20 centímetros.

(6diciembre2022-Recording_17F3C1, pos. 64-65)

Los FPM reconocieron el uso de la escala como un conocimiento previo para medir la cuerda y construir los rectángulos sobre el tablero de cartón. Durante la actividad, observaron que algunos estudiantes intentaron utilizar directamente los 20 metros de cuerda sin aplicar la escala; sin embargo, la cantidad de cuerda disponible impidió la ejecución de este procedimiento, lo que evidenció la necesidad de recurrir a la escala. Al respecto, C expresó:

C: Bueno, un aspecto que creo los estudiantes debía tener previo (...) fue la conversión de las unidades, es decir (...) de los 20 metros (...) la mayoría tomó 20 centímetros. (...) Nosotros tuvimos que como guiar en parte esa conversión, porque ellos lo tomaron literalmente, es un cerco de 20 metros tomemos 20 metros. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 9)

Los FPM analizaron la dificultad de diferenciar y relacionar el cuadrado con el rectángulo en la AA1 (Tabla 10). Los FPM valoraron que la exclusión del cuadrado se debe a la definición personal de rectángulo que riñe con la definición formal de rectángulo. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

C: Si eso nos ocurrió con el rectángulo y el cuadrado. Que la definición del estudiante como que, pues no permitía que se abriera a otras posibilidades. Sino que decía, no es un

rectángulo porque tiene un lado digamos más largo que el otro o más pequeño que el otro. Son desiguales necesariamente y entonces el cuadrado no empataba con esa noción que tenían de rectángulo. Y a veces es por eso se tornaba como tan complicado el hecho de que ellos aceptaran que era un rectángulo. Que un cuadrado finalmente es un rectángulo, un caso particular. (23enero2023F3C1, pos. 136-138)

Respecto a la anterior dificultad de relacionar el cuadrado con el rectángulo, C agregó en la trayectoria real de aprendizaje (Anexo 2) una cita de Aya Corredor et al. (2016) “Si una definición personal del concepto no concuerda con la definición del concepto, la posibilidad de tener éxito en la justificación se verá afectada” (p. 142). Esta información fue agregada en la THA2 porque C manifestó que fue un error agregarla en la trayectoria real de aprendizaje.

Los FPM mencionaron que, al amarrar la cuerda por sus extremos, se reduce su longitud, a pesar de que algunos estudiantes utilizaron una cuerda ligeramente mayor a 20 cm para dejar espacio al nudo. Otros, en cambio, cortaron exactamente 20 cm sin considerar la pérdida de longitud al realizar el amarre. El error surge al utilizar las medidas de los lados de los rectángulos contruidos con la cuerda amarrada, sin tener en cuenta que el perímetro fijo debe ser de 20 cm. Al respecto, se presenta el siguiente diálogo:

I: Entonces tú me dices que en algún momento se presentaban problemas de medida.

C: Bueno en mi caso se presentaron como dos dificultades, esa que era inherente del error en la medida porque al cortar la malla se cortó de 20 centímetros. Y al amarrarla, pues esos 20 centímetros, se perdió algo de esos 20 centímetros.

I: Y ellos no caen en cuenta que al hacer el nudo perdían cm.

C: Nosotros dejamos un espacio, pero, aun así, abarco más el nudo (6diciembre2022-Recording_17F3C1, pos. 55-60).

Los FPM identificaron la dificultad que pueden enfrentar los estudiantes al suponer que todos los rectángulos con el mismo perímetro poseen la misma área (AA1 de la Tabla 10). En este sentido, V interpretó que esta confusión surge de la falta de diferenciación entre el concepto de área y perímetro. Al respecto, el siguiente diálogo:

V: Al diseñar cada uno de los posibles cercos rectangulares asumían que todos tenían la misma área (...) no lograban tener una interpretación de lo que era el perímetro y el área. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 41).

Los FPM atendieron a la dificultad de los estudiantes al considerar 20 metros como la medida de un lado en la AA1 (Tabla 10). Los FPM se cuestionan sobre las razones del razonamiento del estudiante al considerar que un lado del rectángulo podría medir 20 metros. Al respecto, se presenta el diálogo:

C: Otra cosa que vi fue que ellos utilizaron todo el perímetro como un lado. (...)

V: ¿Por qué habrán hecho eso? Porque fueron casi todos los grupos.

I: Los tres hicieron lo mismo.

V: Eso fue lo curioso.

I: ¿Por qué pensaron que era un lado? (10enero2023Voz 013F3C1, pos. 702-713)

Los FPM propusieron el uso de una tabla de valores en la AA2 (Tabla 10). Sin embargo, identificaron que, aunque los estudiantes completaron correctamente los valores de los lados, el área y el perímetro, no establecieron la relación entre los datos de la tabla y la fórmula del área del rectángulo. Al respecto, el siguiente diálogo:

C: No, no, no le saca tanto provecho a la tabla porque ellos (...) no relacionaban fórmulas.

Por ejemplo, la fórmula del área con la base y la altura con el archivo (...). Luego si tomaba un poco de sentido la tabla cuando (...) necesitaba como verificar unos casos particulares de esa expresión general. (13diciembre2022-Recording_18F3C1, pos. 74)

Respecto a la dificultad de usar la tabla para encontrar la expresión general del área en la AA2 (Tabla 10). Esto es lo que dice S:

S: La tabla, por ejemplo, no se relaciona muy bien con lo que se quería. Los estudiantes casi no utilizaron la tabla como nosotros pensamos, para llegar a esa generalización.

(10enero2023Voz 012F3C1, pos. 83)

Los FPM consideraron la forma de escritura de la representación algebraica del área del rectángulo respecto a un lado en la AA2 (Tabla 10). Los FPM conjeturaron que la forma de la expresión algebraica del área que los estudiantes podrían usar es factorizada por su relación con la fórmula del área (base por altura). Al respecto el siguiente diálogo:

C: Como que es más probable que los estudiantes lleguen a la forma factorizada. (...) determinen la expresión general de manera factorizada porque se asocia a la fórmula del área. (10enero2023Voz 013F3C1, pos. 781-785)

Los FPM manifestaron las dificultades de obtener la expresión general del área de la familia de rectángulos en la AA2 (Tabla 10). Al respecto, el siguiente diálogo:

V: En la expresión general ese fue uno de los puntos en el que más tiempo abarcó (...).

Los estudiantes no fácilmente podían llegar a encontrar esa expresión general.

(23enero2023F3C1, pos. 73)

Los FPM analizaron el movimiento del punto C sobre el segmento AB para generar la variación del área y los lados del rectángulo. Los FPM manifestaron la dificultad de obtener la trayectoria parcial del punto I, al descartar el movimiento del punto C desde A hasta B en la AA3 (Tabla 10). Esta limitación en el movimiento provocó la idea errónea de que la gráfica resultante correspondía a un segmento inclinado, y no a una parábola. Al respecto el siguiente diálogo:

C: Al principio (...) como que exploraron un pedacito del deslizador (...) dicen que es como una diagonal. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 337)

Los FPM presentaron la dificultad de la aproximación del área en GeoGebra para hallar el rectángulo de mayor área porque se obtienen varios rectángulos con área 25 en la AA3 (Tabla 10). Los FPM consideraron la necesidad de usar la fórmula del área del rectángulo, como la multiplicación de la base y la altura, para comprobar la aproximación del área del rectángulo en GeoGebra. A continuación, el diálogo:

C: En mi caso no, porque ellos como que asumieron que esos valores daban aproximados. No hubo tanto conflicto con eso (...) ellos como que entendían que daba 25 por esa aproximación.

V: En mi caso sí. Relacionaban mucho lo que indicaba GeoGebra y en un inicio tenían como ese ese problema, los lados no marcaban 5 de base y 5 de altura, sino que tenían unas aproximaciones. Sin embargo, daba el área 25. Lo único que les sugerí era que verificaran si al multiplicar daba eso, entonces ya luego vieron que no. (13diciembre2022-Recording_18F3C1, pos. 343-351)

Foco de atención 3: Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

Los FPM revisaron el uso de la tabla de valores de los lados, perímetro y área y agregaron una pregunta sobre estos valores. Al respecto, el siguiente diálogo:

I: Entonces aquí seguimos con la pregunta. (...). En la siguiente tabla escribe las medidas de la base, altura, perímetro y área de rectángulo ¿Sigue igual?

S: Sigue igual, después que se haya subsanado esta dificultad que arrastraban los rectángulos.

I: Hay alguna pregunta que tenga que hacer porque habíamos mencionado que de pronto para centrar un poco la atención en la tabla era necesario hacer una pregunta respecto a los datos ¿O no?

V: Yo creo que de pronto hacer alguna pregunta (...) solamente se remiten como a llenar.

¿Cuál es la relación entre la base y la altura? ¿Qué cambios ves entre la base y la altura?

no sé, algo, así. (...)

C: Respecto a los datos de la tabla, ¿Cuál sería la relación entre la base y la altura?

S. ¿Cuál sería la respuesta a eso?

I: ¿De qué la suma da 10?

C: O incluso se podría relacionar ya con las variables, x , y y como $10-x$.

(10enero2023Voz 013F3C1, pos. 383-400)

Los FPM consideraron que la tabla de valores de los rectángulos es insuficiente para hallar la expresión general del área, se requiere agregar una pregunta sobre los valores de la tabla.

Los FPM expresaron que uso de la tabla permitiría a los estudiantes determinar la base como x y la altura como $10-x$. Esta generalización de los lados del rectángulo respecto x ayudaría a los estudiantes a hallar la expresión del área como $x(10-x)$.

Los FPM revisaron la pregunta relacionada con la trayectoria y coordenadas del punto I en la AA3 (Tabla 10). Los FPM pensaron que es irrelevante preguntar por el valor de una coordenada del punto I y eliminaron esta pregunta de la AA3. Al respecto, el siguiente diálogo:

I: O la dejamos así. ¿O hacemos una tabla? (...)

S: No, yo creo que la pregunta está bien, porque la mayoría pudieron responder en su lenguaje natural. (...)

V: Pero, por ejemplo, cuando ellos contestan ¿Cuáles son las coordenadas? pero entonces ¿Qué pasa con esa coordenada?

I: ¿Sobra una?

V. Aja

V: (...) Los chicos que más participaban pues lograron encontrar esa relación, pero otros simplemente colocaron una coordenada.

C: Igual la pregunta no da para más.

V: O una pregunta como para indicar (...) ¿Qué pasa con esa coordenada?

I: ¿O quitamos esa pregunta? y solamente preguntamos ¿Cómo es la trayectoria del punto I, cuando se mueve el punto C?

C y S: Sí, sí.

V: (...) No tienen relevancia que solamente escriban una coordenada en un punto I.

(10enero2023Voz 013F3C1, pos. 572-585)

Tabla 10.

THA2 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda para simular el cerco rectangular (Figura 1).  Figura 1. Tablero con hoja milimétrica. Elaborar un cerco <u>rectangular</u> para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la lana para realizar la actividad.	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención en los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Los estudiantes inicialmente trabajan con unidades enteras, sin embargo, dado el recurso de los tableros construidos con hojas milimétricas se podría dar el caso que hagan uso de unidades decimales. Los estudiantes requieren usar escala para usar la lana en el tablero, dado que no tienen suficiente lana para 20 metros y porque el tablero no permite la representación de dichos rectángulos.

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
Construya algunos rectángulos con los materiales dados y responda las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno? ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?	Es posible que los estudiantes no reconozcan que el cuadrado es un rectángulo y tampoco reconocen la diferencia entre perímetro y área. Es posible que interpreten que la medida de la lana es de un lado. Los estudiantes tienen definiciones erróneas del rectángulo que excluye al cuadrado porque consideran que uno de los lados debe ser mayor que el otro, esto concuerda con lo que mencionan Aya et al. (2016): una de las dificultades asociadas al proceso deductivo radica en la escasa comprensión de la naturaleza y el papel de las definiciones, y en la dificultad para decir las condiciones suficientes y necesarias de las mismas. Si una definición personal del concepto no concuerda con la definición del concepto, la posibilidad de tener éxito en la justificación se verá afectada. (p. 1) Sin embargo, al darles una nueva definición de rectángulo en la socialización y confrontarla con las características del cuadrado se acepta que el cuadrado es un rectángulo. Se llega a determinar que el cuadrado es el rectángulo de mayor área con perímetro 20. Como lo menciona Fandiño y D'Amore (2009) es posible que los estudiantes consideren que dos figuras isoperimétricas sean necesarias equiextensas.
AA2 Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro (Figura 2).	Se espera que los estudiantes relacionen el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

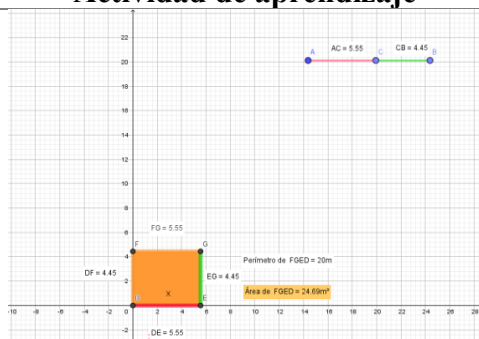


Figura 2. Imagen del archivo GeoGebra Act2.ggb.

Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperimétricos.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas:

- Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1.
- Observa los valores del área cuando se mueve el punto C ¿Cuál rectángulo tiene mayor área? ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad?
- En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo.

Base	Altura	Perímetro	Área

- Respecto a la información tabla determine:
¿Cuál es la relación entre la base y la altura de los rectángulos?

Proceso de aprendizaje hipotético

encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro. La tabla de algunos valores de la base, altura, perímetro y área permite relacionar los cambios que ocurren entre la base, altura y área. Se espera que la tabla permita ser un puente para llegar a la expresión general. Se considera que la mayoría de los estudiantes determinan la expresión general de manera factorizada porque se asocia a la fórmula del área.

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

Proceso de aprendizaje hipotético

e. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?

AA3

Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega el punto I que relaciona la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada) (Figura 3).

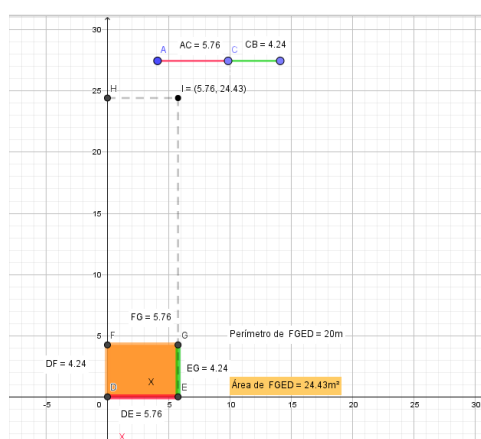


Figura 3. Imagen del archivo GeoGebra Act3.ggb

Los estudiantes analizan el movimiento del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos.

Es importante que los estudiantes realicen el movimiento del punto C desde A hasta B. En el programa GeoGebra se obtienen 3 rectángulos con área 25, por lo tanto, es necesario que los estudiantes verifiquen el área para determinar el rectángulo de mayor área.

Análisis del movimiento del punto I.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas:

- Mueva el punto C, observe el punto I. ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C?
- ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área?
- ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área?
- Determine un par de rectángulos con igual área. ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?

AA4

Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos.

Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con la trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

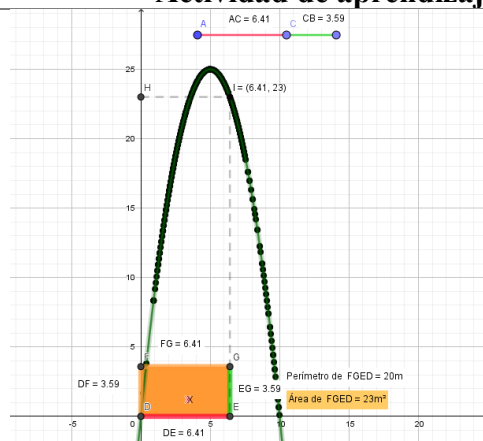


Figura 4. Imagen del archivo GeoGebra Act4.ggb.

Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas:

- Ingresa en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encontraste en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I.
- ¿Por qué el punto I genera una nube de puntos en el primer cuadrante?
- Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto base de su rectángulo?
- ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40?
- Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo?
- ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n ?

Proceso de aprendizaje hipotético

posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

Consideraciones de la mirada curricular en el segundo ciclo

En la Tabla 11 se resumen los aspectos atendidos e interpretados por el segundo grupo de FPM respecto a los cambios en la THA0 durante la primera (THA1) y segunda planificación de una lección (THA2).

Tabla 11.

Habilidades de atender, interpretar y decidir en la planificación de lecciones del segundo grupo de FPM

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la TH1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
Caracterización de los artefactos	Adición de artefactos físicos (cartón, hoja milimétrica y chinchas) para elaborar el cerco.		Uso de los artefactos físicos.	La cuerda con longitud finita delimitó el perímetro de los rectángulos. (6diciembre2022-Recording_17F3C1, pos. 65)
	Uso de escala para medir la cuerda.	El uso de la escala para medir la cuerda con diferentes unidades o patrones de medida. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 116 a 135)	Uso del papel milimétrico para obtener el área y el perímetro.	El uso de la hoja milimétrica facilita la distinción entre perímetro y área, ya que permite a los estudiantes determinar el área mediante el conteo de cuadritos encerrados por la cuerda. Este enfoque visual y manipulativo refuerza la comprensión de ambas magnitudes y reduce posibles confusiones conceptuales. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 191)

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la TH1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
	Uso de cuerda de colores para diferenciar los rectángulos.	El uso del color ayuda a relacionar los valores de las figuras e identificar lo que varía o no varía. La abstracción de las matemáticas occidentales desusa el color de las figuras. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 73-78)	Exclusión del color en la cuerda.	
	Uso de colores y grosor en los objetos contruidos en GeoGebra.			
	Adición de espacios en blanco para las respuestas de los estudiantes.	Variación de los espacios en blanco o uso de hojas en blanco, respecto a longitud estimada de la respuesta de los estudiantes. (8noviembre-ES-Recording_11F1C1, pos. 32-37)		
	Uso moderado del color en los objetos contruidos en GeoGebra.	El exceso de color puede desviar la atención o generar diferentes significados para los estudiantes. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 89-92)		
Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Uso del papel milimétrico para medir valores como los lados, área	El uso del papel milimétrico permite trabajar con números decimales o enteros. (8noviembre-ES-	El uso de la escala para medir la cuerda.	Utilización de los 20 metros de cuerda. (6diciembre2022-Recording_17F3C1, pos. 64-65)

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la TH1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
	o perímetro del rectángulo.	Recording_11F1C1, pos. 28-30)		
			Diferenciación y relación del cuadrado con el rectángulo.	La exclusión del cuadrado se debe a una concepción personal del rectángulo que entra en conflicto con su definición formal. (23enero2023F3C1, pos. 136-138)
			Perdida de la medida de la cuerda al amarrar sus extremos.	
			Crear que los rectángulos con el mismo perímetro tienen la misma área.	Diferenciación entre el concepto de perímetro y de área. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 41)
			Nulo uso de los valores del rectángulo propuestos en la tabla para hallar la expresión general del área.	Descartar la relación de los valores de la tabla de la AA2 con la fórmula del área del rectángulo. (13diciembre2022-Recording_18F3C1, pos. 74)
			Considerar 20 m como la longitud de un lado.	
			Uso de la forma factorizada para determinar la expresión general del área.	Obtención de la expresión algebraica del área en su forma factorizada por su relación con la fórmula del área del rectángulo.

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la TH1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
				(10enero2023Voz 013F3C1, pos. 781-785)
			Dificultad para obtener la expresión general del área.	
			Variación del lado y área del rectángulo a partir del movimiento del punto C sobre el segmento AB.	Trayectoria incompleta del punto I al no desplazar el punto C desde A hasta B. (10enero2023Voz 012F3C1, pos. 337)
			Aproximación del área en GeoGebra.	Uso de la fórmula del área del rectángulo para comprobar la aproximación del área en GeoGebra. (13diciembre2022-Recording_18F3C1, pos. 351)
Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas	Razones de la selección del rectángulo de mayor área.	Considerar la longitud de uno de los lados del rectángulo para seleccionar el de mayor área. (8noviembre- ES-Recording_10F1C1, pos. 140)	Pregunta relacionada con los valores de los rectángulos presentes en una tabla de la AA2.	El análisis de los valores de la tabla permitiría determinar la base como x y la altura como 10-x. (10enero2023Voz 013F3C1, pos. 400)
	Distinción de la palabra rectangular (forma del cerco).	La forma rectangular del cerco puede pasar desapercibida. (25octubrede2022-REcording4F1C1, pos. 246)	Eliminan pregunta sobre la trayectoria del punto I.	Descartan preguntar por los valores de coordenadas del punto I. 10enero2023Voz 013F3C1, pos. 585)
	Determinación de las medidas de algunos de			

<i>Foco de atención</i>	<i>Cambios en la THA1</i>	<i>Interpretaciones en la TH1</i>	<i>Cambios en la THA2</i>	<i>Interpretaciones en la THA2</i>
	los rectángulos con perímetro fijo realizados con la cuerda.			
	Adición de una tabla con valores de los rectángulos con perímetro fijo.	El uso de tablas en AA ayuda a identificar lo constante y variable. También, facilita las relaciones entre los lados y la expresión general del área en función de la base de los rectángulos. (8noviembre-ES-Recording_11F1C1, pos. 3)		
	Eliminación de la pregunta relacionada con rectángulos de menor área de la THA0.			

Respecto a la Tabla 11, se observa que, en la primera planificación de una lección, los FPM atendieron las características de los artefactos en la construcción de las representaciones matemáticas. Los FPM consideraron la medida de la cuerda y el color en las representaciones matemáticas. Los FPM interpretaron la necesidad del uso de la escala para medir la cuerda y el uso moderado del color en las representaciones matemáticas para ayudar a relacionar y reconocer los valores respecto a las figuras geométricas.

Los FPM atendieron a anticipar dificultades, errores y acciones de los estudiantes en el uso de la hoja milimétrica. En este foco de atención, los FPM interpretaron que la hoja milimétrica favorece el uso de medidas con números decimales y enteros.

También, los FPM atendieron a incorporar o eliminar información y formularon preguntas, subrayaron la palabra rectangular y agregaron una pregunta sobre las razones de selección del rectángulo de mayor área en la AA1 y plantearon una pregunta con una tabla de valores de los rectángulos en la AA2. Los FPM interpretaron que los estudiantes podrían construir cercos con diferentes formas al no percatarse de la palabra rectangular, consideraron oportuno conocer las razones de selección del rectángulo de mayor área, porque podrían fijarse en un solo valor de los lados y analizaron la necesidad de agregar una pregunta sobre la tabla de valores de los rectángulos para ayudar a la generalización del área de los rectángulos.

En la segunda planificación de una lección, en el foco de atención caracterización de los artefactos, los FPM consideraron el uso de los artefactos físicos para realizar los rectángulos con una cuerda e interpretaron la necesidad de usar la escala para medir la cuerda y crear el cerco sobre el tablero de cartón. Los FPM analizaron el uso de la hoja milimétrica como fondo del tablero de cartón e interpretaron que favoreció la diferencia entre perímetro y área, al determinar el área por conteo de cuadritos.

En el foco de atención anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, los FPM aumentaron sus apreciaciones de este aspecto; por ejemplo, los FPM atendieron la dificultad de reconocer que un cuadrado es un rectángulo e interpretaron que dicha dificultad se debía a las definiciones de estas figuras. Los FPM atendieron la creencia de que si tienen el mismo perímetro tienen la misma área e interpretaron que esta dificultad se debe a la escasez de interpretación de perímetro y área. Los FPM atendieron a la dificultad de obtener la expresión general del área respecto de la base e interpretaron que la tabla no era suficiente para ayudar al estudiante a encontrar la relación entre el área y la base.

En incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas, los FPM en la AA2 agregaron una pregunta respecto a los análisis de la tabla de valores de los

rectángulos porque interpretaron que ayudaría a los estudiantes a ver lo que varía y permanece constante para hallar la expresión general del área de los rectángulos en relación con su base cuando el perímetro es fijo y en la AA4 realizaron un cambio de redacción sobre la trayectoria del punto I y eliminaron la pregunta de coordenadas del punto I, ya que interpretaron que la pregunta es irrelevante.

En la primera y segunda planificación de una lección, los FPM consideraron adecuado el objetivo de aprendizaje de la THA0.

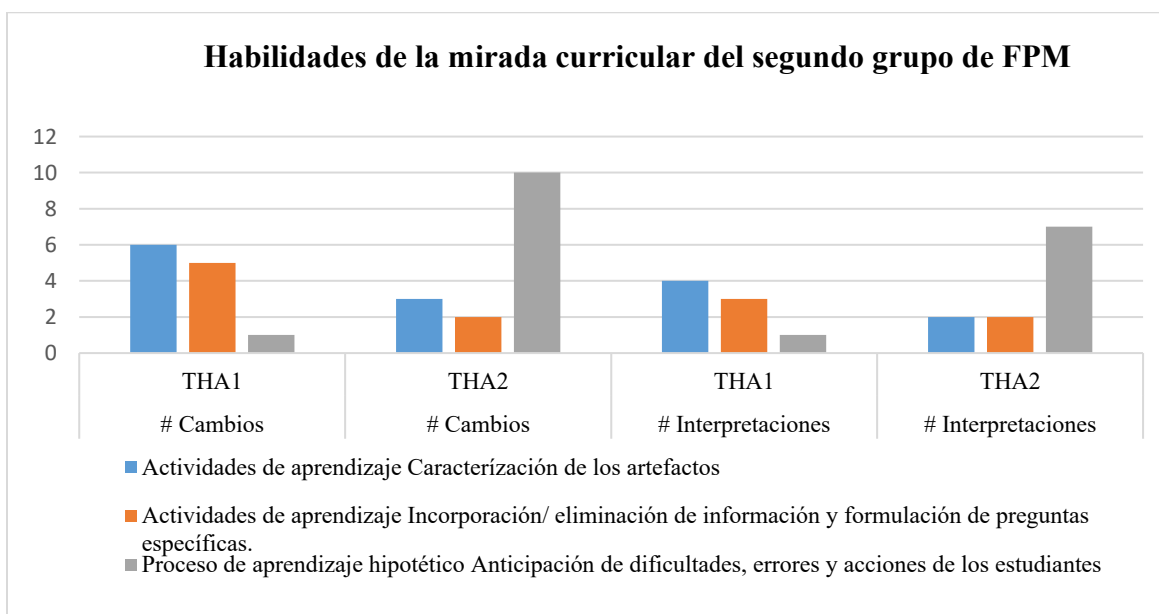
En las actividades de aprendizaje, los FPM agregaron preguntas específicas para centrar el análisis de los estudiantes en la tabla de valores y ayudar a encontrar la expresión general y eliminaron tres preguntas de la THA0. Los cambios a las actividades de aprendizaje y a los aspectos sugeridos al proceso de aprendizaje hipotético propuestos por los FPM se relacionaron con su experiencia al analizar la THA0.

En la Tabla 11 se observa que se generó un aumento en la anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes después de la implementación (segunda planificación de una lección). La elaboración de un documento escrito individual sobre la implementación y posteriormente la elaboración grupal de una trayectoria real de aprendizaje favoreció este foco de atención.

Considerando la Tabla 11, se elaboró la Figura 13 que presenta la frecuencia de los cambios e interpretaciones de la THA1 y la THA2 para el segundo grupo de FPM.

Figura 13.

Número de cambios e interpretaciones de los aspectos atendidos del segundo grupo de FPM.



Comparación de los resultados entre el primer y el segundo ciclo

Se identificaron similitudes y diferencias en cambios en la THA0 e interpretaciones de los FPM durante la primera (THA1) y segunda planificación (THA2) de la lección.

Respecto al foco de atención caracterización de los artefactos, los cambios que decidieron los FPM fueron:

- Ambos grupos de FPM identificaron que el uso exclusivo de la cuerda resultaba insuficiente, por lo que incorporaron artefactos físicos adicionales. Los chinchales permitieron fijar los vértices de los rectángulos sobre el tablero de cartón, mientras que el fondo cuadriculado o milimétrico facilitó la medición.
- En cuanto a la presentación visual en GeoGebra, los FPM realizaron modificaciones. El primer grupo de FPM integró el contexto de una finca como fondo, mientras que el segundo grupo añadió color, incrementó el tamaño del texto y ajustó el grosor de los objetos construidos para mejorar su visualización.

- La mayoría de los cambios en los artefactos se realizaron durante la primera planificación, mientras que en la segunda planificación se precisaron las indicaciones de su uso y se eliminaron elementos considerados innecesarios. El primer grupo de FPM descartó la cinta utilizada para sujetar los extremos, mientras que el segundo grupo eliminó el color de la cuerda.

Respecto a las interpretaciones de los FPM, los dos grupos consideraron la escala para medir la cuerda y hacer los cercos sobre el tablero de cartón. El primer grupo propuso el contexto del cerco de una finca en el problema. El segundo grupo consideró que el color permite diferenciar los rectángulos contruidos con la cuerda, analizaron que la hoja milimétrica favoreció la distinción entre perímetro y área, y el uso de una cuerda con longitud finita determina que el perímetro es fijo.

Respecto al foco de atención anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, los cambios que los FPM decidieron sugerir al proceso de aprendizaje hipotético y las actividades de aprendizaje fueron:

- Ambos grupos de FPM identificaron errores como la confusión entre área y perímetro, el descartar que el cuadrado es rectángulo y el uso de 20 metros de cuerda para construir el cerco rectangular.
- Los FPM destacaron la dificultad de obtener algebraicamente la expresión del área, ya que los estudiantes necesitan apoyo para generalizar a partir de valores particulares. En el segundo ciclo, esta dificultad se interpretó como de mayor profundidad y se observó que la tabla de valores por sí sola no era suficiente para guiar la generalización. Por lo tanto, se agregaron preguntas adicionales a la tabla de valores de los rectángulos.
- Para el segundo grupo de FPM, la elaboración de un documento individual sobre la implementación y la construcción grupal de una trayectoria real de aprendizaje

favorecieron el foco de atención anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes y los cambios sugeridos al proceso de aprendizaje hipotético.

Respecto a las interpretaciones de los FPM, se consideró la necesidad de construir las definiciones y diferencias entre cuadrado y rectángulo, así como entre perímetro y área. Después de la implementación, la mayoría de las interpretaciones de los FPM se centraron en obtener la expresión general del área de la familia de rectángulos.

Respecto al foco de atención incorporación y eliminación de información, formulación de preguntas específicas. Los cambios que decidieron los FPM a las actividades de aprendizaje fueron los siguientes:

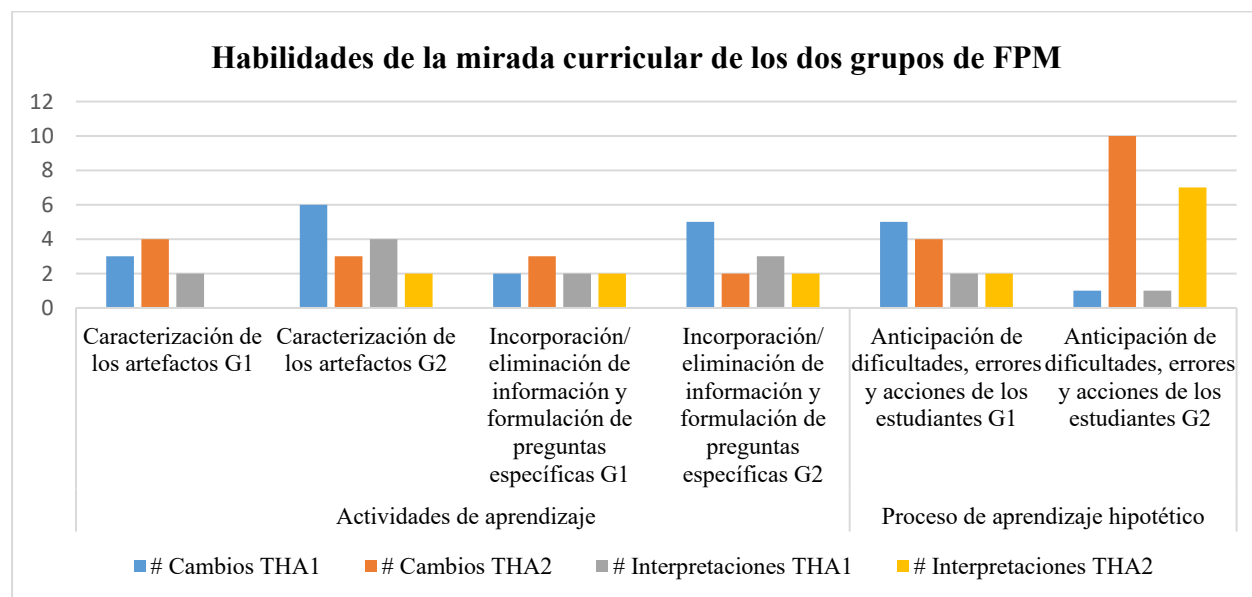
- Ambos grupos de FPM propusieron usar una tabla de valores de los datos del rectángulo en las hojas de trabajo. El primer grupo de FPM realizó este cambio en las actividades de aprendizaje en la segunda planificación, mientras que el segundo grupo de FPM la agregó en la primera planificación.
- El segundo grupo de FPM consideró sus errores al abordar las actividades de aprendizaje; uno de los FPM no se percató de la forma del cerco, por lo que subrayaron la palabra rectangular.
- Los dos grupos de FPM, conservaron la mayoría de los cambios de este foco de atención en la segunda planificación. Aunque el primer grupo de FPM eliminó la pregunta sobre el concepto de área y perímetro agregada en la primera planificación.
- Ambos grupos de FPM eliminaron la pregunta relacionada con la menor área de los rectángulos en la AA3 de la THA0.

Respecto a las interpretaciones, los dos grupos de FPM consideraron necesario agregar una pregunta adicional a la tabla de valores de los rectángulos para centrar la atención en lo que varía y permanece constante para hallar la expresión del área de la familia de rectángulos.

Con relación a las Tablas 8 y 11, se obtuvo el número de cambios e interpretaciones de la THA1 y THA2. La Figura 14, unifica y compara la información de las Figuras 12 y 13.

Figura 14.

Comparación de las habilidades de la mirada curricular de los dos grupos de FPM



Nota. Se usó G1 y G2 para diferenciar cada uno de los grupos de FPM.

Al comparar las frecuencias de los cambios de los dos grupos de FPM, el segundo grupo presentó mayor cantidad de cambios en comparación con el primer grupo de FPM. Esto puede ser debido a que, en el segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo, los FPM realizaron la observación escrita de la implementación y elaboración de la trayectoria real de aprendizaje. Estas acciones de los FPM favorecieron el aumento de los cambios e interpretaciones del foco de atención: anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes en la THA2.

Mientras que para el primer grupo de FPM, sus acciones relacionadas con los cambios e interpretaciones respecto a los focos de atención estuvieron un poco más equilibradas tanto en la primera como en la segunda planificación de la lección. Aunque fueron nulas las interpretaciones del foco de atención caracterización de los artefactos en la segunda planificación de una lección.

Conclusiones y discusiones

Esta investigación se centra en caracterizar la mirada curricular de los FPM al cambiar una THA al planificar lecciones sobre función cuadrática. De la primera a la quinta sección, se abordan los objetivos de la investigación (tanto específicos como general) y se responde la pregunta de investigación a la luz de los resultados obtenidos y las discusiones correspondientes. En las últimas secciones de este capítulo se presentan los aportes, las limitaciones, las proyecciones y las actividades académicas vinculadas a esta investigación.

Construir una THA0 sobre función cuadrática

En esta sección se da cuenta del primer objetivo específico: Construir una THA (THA0) sobre función cuadrática, fundamentada en la heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes y un modelo de aprendizaje de funciones, para su uso por parte de los FPM en la planificación de lecciones.

La construcción de THA0 sobre función cuadrática se fundamentó en la indagación de fuentes de información relacionadas con materiales curriculares (libros de texto de Colombia), estudios sobre el aprendizaje y enseñanza de la función cuadrática, los enfoques teóricos de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999, 2020) y un modelo del aprendizaje de funciones (Kalchman y Koedinger, 2005). En este modelo de construcción de THA0 la selección del concepto matemático y el objetivo de aprendizaje es lo que delimita y antecede los otros componentes de la THA0 (Cárcamo y Fuentealba, 2023). Este modelo ha permitido la construcción de THA0 en niveles de educación superior (Cárcamo, 2017) y educación secundaria con el uso de tecnologías digitales (Cumbal, 2020; Pechene, 2024).

El modelo de construcción de THA usado en esta investigación no es el único, existen otros en lo que se destaca la importancia del enfoque teórico para establecer una interrelación coherente entre el proceso de aprendizaje hipotético, las actividades de aprendizaje y el objetivo de

aprendizaje. En este modelo la construcción de la THA inicia del objetivo de aprendizaje, para luego determinar el proceso de aprendizaje hipotético. Aunque es posible considerar múltiples actividades de aprendizaje coherentes con dicho proceso, una vez seleccionadas las actividades de aprendizaje, estas contribuyen a precisar y delimitar el proceso de aprendizaje hipotético. En este sentido, la construcción de una THA evidencia la interdependencia entre sus diferentes componentes (Simon y Tzur, 2004).

Otro aspecto relevante es que las THA pueden ser construidas con enfoques teóricos diferentes a los propuestos en esta investigación. Por ejemplo, algunas THA se basan en la teoría de la abstracción reflexiva (Simon y Tzur, 2004) o el enfoque del interaccionismo jerárquico (Sarama et al., 2021).

La THA0 sobre función cuadrática abordó el problema de hallar el rectángulo de mayor área con perímetro fijo. Este problema se presenta en textos escolares para el nivel de secundaria y media de Colombia en ambientes lápiz y papel. El contexto del problema se centró en la construcción de cercos rectangulares de una huerta con una malla de longitud fija. La exploración de la variación de los posibles rectángulos se realizó a partir de una cuerda amarrada y extendida con los dedos de las manos. Posteriormente, la exploración del problema en GeoGebra vincula diferentes representaciones matemáticas dinámicas e interactivas.

Al utilizarse el modelo de aprendizaje de funciones, la construcción de la THA0 tuvo en cuenta el uso y coordinación de diferentes representaciones matemáticas (Kalchman y Koedinger, 2005). El proceso de aprendizaje hipotético consideró iniciar con experiencias matemáticas a partir de lo numérico y espacial hasta llegar a las representaciones algebraicas y el estudio paramétrico de la función cuadrática (familias de funciones).

Los modelos emergentes orientaron el diseño de las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA0 a través de los niveles de actividad (situacional, referencial,

general y formal) que facilitaron la progresión de conocimientos informales hacia razonamientos matemáticos formales (Gravemeijer, 1999, 2020). La THA0 incluye un contexto significativo para los estudiantes, en donde exploran formas rectangulares de una cerca de una huerta, a partir de una cuerda amarrada (razonamiento informal). Luego, este conocimiento evoluciona hacia un modelo para el razonamiento matemático formal, cuando los estudiantes usan, interpretan y relacionan diferentes representaciones matemáticas en GeoGebra, a partir de la exploración de la construcción de los posibles cercos rectangulares de una huerta con un segmento que controla la variación de los rectángulos, sin perder la característica de tener perímetro fijo.

Aspectos a los que atienden e interpretan los FPM sobre los cambios en una THA sobre función cuadrática

En esta sección se da cuenta del segundo objetivo específico: Analizar los aspectos que atienden e interpretan los FPM en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones.

Los dos grupos FPM lograron generar cambios en la THA0 en la fase de preparación y diseño de la investigación de diseño. Sus propuestas de cambios en la THA0 conservaron la estructura de los enfoques teóricos y revisiones bibliográficas sugeridos en el modelo de construcción (Cárcamo y Fuentealba, 2023).

En la primera planificación de una lección, ambos grupos de FPM, dentro del foco de caracterización de los artefactos, incorporaron un tablero de cartón en la AA1 para que los estudiantes construyeran rectángulos utilizando una cuerda fijada con chinchas. El primer grupo añadió al tablero un fondo de papel cuadriculado y cintas métricas, mientras que el segundo grupo optó por un fondo de hoja milimétrica. En ambos casos, el fondo del tablero facilitó la medición de los lados, el perímetro y el área de los rectángulos.

Los FPM realizaron cambios a los archivos GeoGebra. El primer grupo de FPM agregó el

contexto de la finca como fondo, mientras que el segundo grupo de FPM agregó color a los objetos geométricos y sus medidas. Los cambios propuestos a los artefactos por los dos grupos de FPM pretendían mejorar las representaciones matemáticas del problema.

Tanto el primer grupo como el segundo grupo de FPM, después de la implementación, incluyeron en su segunda planificación de una lección una descripción más detallada del uso de los artefactos, quitaron o precisaron las características de los artefactos.

El primer grupo de FPM, en la primera planificación de una lección, respecto al foco de atención dificultades, errores y acciones de los estudiantes, anticipó las dificultades del reconocimiento del cuadrado como rectángulo, el uso de la escala, la interpretación de las coordenadas del punto y la generalización del problema por expresiones algebraicas, mientras que el segundo grupo de FPM sólo agregó una acción de los estudiantes, usar números decimales o naturales al medir los lados del rectángulo en la hoja milimétrica.

Ambos grupos de FPM, en la segunda planificación de una lección respecto al foco de atención dificultades, errores y acciones de los estudiantes, consideraron tener en cuenta en la THA2 los aspectos sugeridos en la THA1. Los dos grupos de FPM agregaron dificultades relacionadas con la obtención de la expresión general del área de los rectángulos.

Cada uno de los grupos de FPM, en incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas, agregaron una tabla de valores de los lados, perímetro y área de los rectángulos y eliminaron algunas preguntas de la THA0, como la relacionada con los rectángulos de área mínima de la AA3.

Los FPM, consideraron que la tabla de valores de los rectángulos era insuficiente para que los estudiantes obtuvieran la expresión algebraica del área. Por lo tanto, el primer grupo de FPM agregó figuras de rectángulos con valores faltantes (en un rectángulo le dan el valor de x a un lado) y el segundo grupo de FPM agregó una pregunta sobre los valores de la tabla.

En las interpretaciones de los cambios en la THA0 por parte de los FPM se manifestaron sus conocimientos profesionales. Algunas interpretaciones de los FPM aludieron a teorías de la didáctica de las matemáticas.

En la primera planificación de una lección, las interpretaciones del primer grupo de FPM se relacionaron con los tres aspectos que atienden (caracterización de los artefactos, anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes e incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas). Mientras que, en la segunda planificación de una lección, no se presentaron interpretaciones en caracterización de los artefactos (Figura 12).

Para el segundo grupo de FPM, tanto en la primera planificación como en la segunda planificación de una lección, los aspectos que interpretaron están relacionados con los tres aspectos a los que atienden. Sin embargo, en la primera planificación de una lección se obtuvieron mayores interpretaciones respecto a la caracterización de los artefactos e incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas. Mientras que, en la segunda planificación de una lección se lograron mayores interpretaciones respecto a anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes e incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas (Figura 13). El aumento de este aspecto se debió a las observaciones escritas individuales y a la construcción de la trayectoria real de aprendizaje realizadas por los FPM.

Los FPM sugirieron agregar al proceso de aprendizaje hipotético los aspectos del foco de atención anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes. Después de la implementación de las actividades de aprendizaje, este foco de atención consideró los desempeños de los estudiantes, por lo que los cambios en la THA1 promueven una enseñanza que tiene en cuenta las necesidades de aprendizaje de los estudiantes (Wilson et al., 2017).

En esta práctica docente los cambios en la THA0 propuestos por los FPM sobre anticipaciones presentan estrategias, dificultades y errores de los estudiantes. Las preguntas

añadidas están en coherencia con la secuenciación de las actividades de aprendizaje. Estos aspectos dieron cuenta de los usos de una THA propuestos por Wilson et al. (2015) al enseñar matemáticas. Además, los FPM reflexionaron respecto a su conocimiento profesional en un contexto conectado con su práctica docente para enseñar un contenido curricular específico (Wilson et al., 2013).

Son varias las investigaciones que identifican que una de las acciones de los profesores de los profesores al planificar una lección con una THA es las anticipaciones de dificultades, errores y acciones de los estudiantes (Damasco, 2022; Edgington, 2012, 2014; Ferreira et al., 2021; Wilson et al., 2014; Wilson et al., 2015). Para esta investigación, las anticipaciones de dificultades, errores y acciones de los estudiantes dieron cuenta de la habilidad de atender de la mirada curricular respecto a los cambios sugeridos al proceso de aprendizaje hipotético de la THA0 al planificar lecciones.

Aspectos que deciden los FPM sobre los cambios en una THA sobre función cuadrática

En esta sección se da cuenta del tercer objetivo específico: Analizar las decisiones de los FPM en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones.

Los dos grupos de FPM decidieron conservar el objetivo aprendizaje de la THA0 y descartaron incorporar objetivos específicos para cada nivel de actividad de aprendizaje. Ambos grupos de FPM decidieron realizar cambios en la THA0 en la primera y segunda planificación de una lección, tanto en las actividades de aprendizaje como en el proceso de aprendizaje hipotético.

La mayoría de los cambios en las actividades de aprendizaje relacionados con agregar artefactos, fueron propuestos por los dos grupos de FPM en la primera planificación de una lección. Mientras que, en la segunda planificación, ambos grupos de FPM mejoraron la descripción del uso de artefactos y descartaron el uso o características de algunos artefactos físicos.

El nivel de actividad formal de la THA0 fue el de menos cambios en la primera y segunda

planificación de una lección. Respecto a los dos grupos de FPM, el primer grupo de FPM fue equitativo en los cambios en la THA0 tanto en la primera como en la segunda planificación de una lección, mientras que el segundo grupo propuso más sugerencias al proceso de aprendizaje hipotético en la segunda planificación de una lección. Después de la implementación, ambos grupos de FPM generaron cambios a la THA1 para ayudar a los estudiantes a obtener la expresión general del área. La expresión general del área es una pregunta de la AA3 y su respuesta es necesaria para continuar y realizar la actividad de aprendizaje formal (AA4).

Respecto a la práctica docente realizada por los FPM, se puede considerar que los cambios propuestos por los FPM a la THA0 determinaron un nivel de uso competente de la THA (Edgington, 2014). Además, los cambios en la THA0 pretenden ayudar a los estudiantes a solventar sus dificultades y generar aprendizajes sobre función cuadrática.

En los cambios en la THA0 propuestos por los FPM, se determinó que los FPM fueron capaces de identificar conocimientos matemáticos previos y nuevos involucrados en las actividades de aprendizaje, anticiparon, identificaron y explicaron dificultades en el aprendizaje en el desarrollo de las actividades de aprendizaje y cambiaron las actividades de aprendizaje acorde a las dificultades de aprendizaje. Esta práctica profesional de analizar y cambiar una THA cumple con una enseñanza eficaz (Lee y Lee, 2024).

Características de la mirada curricular de los FPM en los cambios propuestos en una THA

En esta sección se da cuenta del objetivo general: Caracterizar la competencia docente mirada curricular de los FPM en los cambios realizados en una THA sobre función cuadrática durante la planificación de lecciones.

Este estudio caracteriza la mirada curricular de dos grupos de FPM mediante el análisis de los cambios propuestos en una THA0 sobre la función cuadrática al planificar lecciones. Los cambios en la THA0 se documentaron y fueron complementados con evidencias de los cambios

obtenidas en entrevistas semiestructuradas.

El análisis de las habilidades de la mirada curricular de los FPM inició con las decisiones, es decir, los cambios en la THA0 al planificar lecciones en documentos escritos. Los análisis de los cambios de los FPM respecto a los componentes de la THA0, en los documentos escritos y en las entrevistas semiestructuradas, determinó tres focos de atención: (i) caracterización de los artefactos, (ii) anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes, y (iii) incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.

Las entrevistas semiestructuradas permitieron obtener evidencias de los cambios en la THA0. En estas evidencias se detectaron los aspectos que atendieron y se identificaron las justificaciones de los cambios en los que los FPM explicitaron el conocimiento profesional y experiencias. Estas justificaciones determinaron la habilidad de interpretar de la mirada curricular.

En la primera planificación de una lección para los dos grupos de FPM, el foco de atención sobre caracterización de los artefactos incluyó artefactos nuevos con la intención de mejorar las construcciones de los rectángulos con la cuerda. Además, al incorporar otros artefactos a la THA0, los FPM anticiparon dificultades adicionales, otros errores y otras acciones de las estudiantes relacionadas con su uso, que se podrían considerar en el proceso de aprendizaje hipotético.

En la segunda planificación de una lección, los FPM realizaron cambios en la THA0 para ayudar a los estudiantes a obtener la expresión algebraica. El análisis de las respuestas de los estudiantes por parte del segundo grupo de FPM incrementó los aspectos que atendieron, interpretaron y decidieron los FPM sobre los cambios en la THA0 relacionados con la anticipación de dificultades errores y acciones de los estudiantes.

En una enseñanza eficaz, no es suficiente con identificar las dificultades o errores presentes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes; es fundamental que los FPM diseñen o seleccionen preguntas que contribuyan a superar dichos obstáculos. Este aspecto se evidenció en

los cambios de la THA0 a la THA1 y de la THA1 a la THA2, donde los FPM incorporaron estrategias orientadas a apoyar el aprendizaje a partir de los errores detectados (Wilson et al., 2017).

La implementación de las actividades de aprendizaje permitió que los FPM ratificaron sus suposiciones y aprendieran de los aprendizajes de los estudiantes. Además, se consideró la planificación de lecciones, como un proceso dinámico, con ajustes continuos relacionados con la interacción de los estudiantes.

En esta investigación se ejemplifica una práctica docente en la que la THA0 cumplió una doble función: como recurso curricular y como herramienta metodológica. Esta práctica docente se desarrolló en el marco de un experimento de enseñanza colectivo, por lo que la THA0 se consideró alterable por los FPM (Gravemeijer y Van Eerde, 2009). Estos cambios propuestos por los FPM involucraron razonamientos basados en sus conocimientos profesionales y experiencia para caracterizar su mirada curricular al planificar lecciones con el uso de una THA0 sobre función cuadrática (Dietiker et al., 2018; Males et al., 2015; Simon, 1995). Se considera que las THA contribuyen a la planificación y a la investigación (Simon y Tizur, 2004).

La esencia del experimento de enseñanza colectivo fomentó el trabajo entre los FPM e investigadora. Aunque era posible que decidieran dejar la THA0 inmutable en la primera planificación de una lección (Mesquita, 2009), los FPM encontraron aspectos por cambiar respecto a su experiencia y conocimientos profesionales.

En esta investigación considera que es necesario propiciar espacios de prácticas docentes entre FPM e investigadores, para lograr aproximar a los profesores al desarrollo de investigaciones de diseño y el uso de THA en la planificación de lecciones. Además, porque este trabajo se propició los aprendizajes de todos los participantes del experimento de enseñanza colectivo: estudiantes, FPM e investigadora.

Otro aspecto es el equilibrio entre la teoría y práctica. Es necesario que los FPM incluyan en la planificación lecciones el uso de modelos teóricos como las THA, sin perder de vista la realidad del aula. Esto hace que las THA sean consideradas metarecursos curriculares porque apoyan las prácticas profesionales de los FPM (Gueudet et al., 2023).

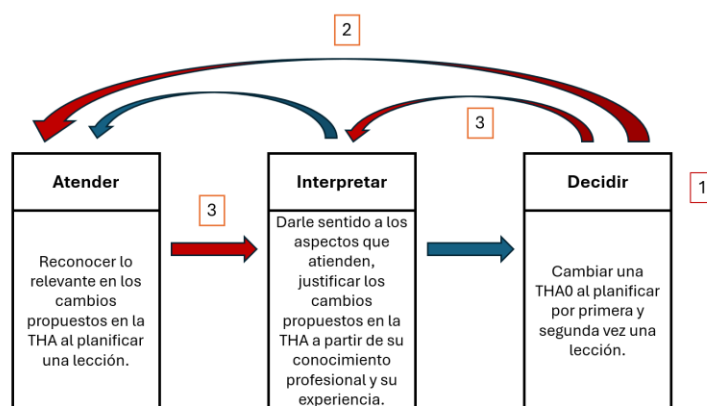
Los cambios en THA0 por parte FPM en la primera y segunda planificación de una lección son una práctica profesional relevante que vincula aspectos teóricos y prácticos. La THA0 relaciona teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y la revisión materiales curriculares (libros de texto). La THA0 es un recurso curricular diseñado para los profesores de matemáticas, pensado para que su uso y análisis generen cambios que involucren sus conocimientos profesionales (Simon, 1995). En este sentido se ratifica que la THA0 resulta ser un metarecurso (Gueudet et al., 2023).

El análisis de la THA0 realizado por los FPM en la primera planificación de una lección, les permitió conocer y profundizar teorías y metodologías como: la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999, 2020), un modelo de función (Kalchman y Koedinger, 2005), el modelo teórico de THA (Simon, 1995, 2000) y su relación con el desarrollo de un experimento de enseñanza colectivo (Wittmann, 2021).

En esta investigación, la mirada curricular de los FPM se delimita a partir de las decisiones sobre los cambios en la THA0 al planificar lecciones. Las decisiones de los FPM respecto a los componentes de la THA0 determinaron los aspectos que atienden. Los aspectos que atienden los FPM sobre los cambios en la THA0 delimitaron los aspectos que interpretaron. En la Figura 15 se presentan con flechas rojas las relaciones y actividades utilizadas en esta investigación para caracterizar la mirada curricular de dos grupos de FPM.

Figura 15.

Actividades y relaciones de las habilidades de la mirada curricular de esta investigación.

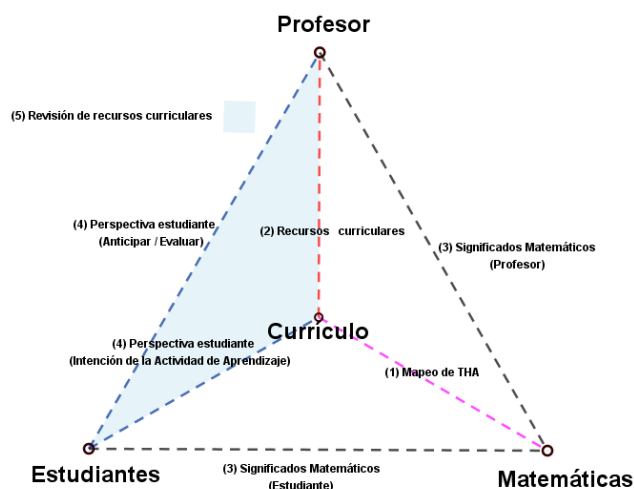


Nota. Se agregaron números relacionados con los niveles de análisis de las habilidades de la mirada curricular (Dietiker et al., 2018, Lee y Lee, 2024, Males et al., 2015).

Existe un modelo de razonamiento curricular piramidal con respecto a datos recopilados de ocho profesores de secundaria al planificar, implementar y reflexionar sobre una lección (Figura 16). El modelo de razonamiento curricular se desglosa en cinco aspectos, los cuatro primeros son aristas y el quinto es una cara (sombreada de azul). Los cinco aspectos del modelo son: 1) el mapeo de una THA (progresión de los conceptos matemáticos en una lección o la conexión de conceptos matemáticos con otros del pasado y futuro), 2) el análisis de recursos curriculares (fortalezas y limitaciones), 3) los significados matemáticos del estudiante y del profesor (cómo entienden las matemáticas), 4) observar las matemáticas en la perspectiva de los estudiantes (se divide en Anticipar/Evaluar respecto al pensamiento del estudiante) y describir la intención de la tarea y por último 5) la revisión de recursos curriculares (reflexión sobre los cambios de una lección luego de su implementación o respecto experiencias docentes pasadas) (Dingman et al., 2021).

Figura 16.

Modelo de razonamiento curricular



Nota. Se usa recursos curriculares en vez de materiales curriculares (Dingman et al., 2021).

Este modelo de razonamiento curricular integra diferentes marcos teóricos, por ejemplo, la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante se representa con la arista que une a profesor y estudiantes, mientras que la mirada curricular es la arista que une a profesor y currículo (Dingman et al., 2021).

Respecto a lo realizado en esta investigación para caracterizar la mirada curricular de los FPM al planificar lecciones con el uso de THA, en la Figura 17 se ilustran algunas posibles relaciones entre la mirada curricular y los componentes de la THA0 en el modelo de razonamiento curricular.

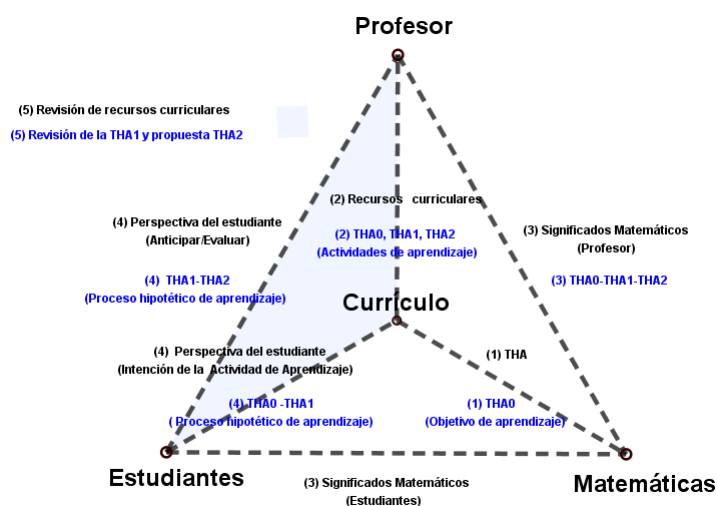
En la Figura 17, el objetivo de aprendizaje de THA0 se ubicó en la arista Matemática y Currículo, ya que delimita las matemáticas de las actividades de aprendizaje y determina las matemáticas que son conocimientos previos y las que son conocimientos nuevos para los estudiantes. El proceso de aprendizaje hipotético se relacionó con la intencionalidad de las actividades de aprendizaje y con las anticipaciones de dificultades, errores y acciones de los

estudiantes (relación con las matemáticas y la perspectiva del estudiante (intención de la tarea) y (anticipar/evaluar). Las actividades de aprendizaje se ubicaron en la arista Profesor-Currículo porque son varias las investigaciones sobre los recursos curriculares que se enfocan en ellas.

La revisión de la THA1 y propuesta de THA2 por los FPM, permitió reflexiones sobre los cambios, que alude al aspecto revisión de recursos curriculares. En los análisis de la THA0 y los cambios propuestos en la THA1 y la THA2 los FPM involucraron sus significados matemáticos. Además, en los cambios en la THA0 se analizaron los significados matemáticos de los estudiantes en las respuestas de las actividades de aprendizaje.

Figura 17.

El modelo de razonamiento curricular con el uso de una THA en la planificación de lecciones



Nota. Los nombres del modelo original se describen en negro. En tanto, los aspectos nuevos, se describen en azul, relacionan la práctica docente de los FPM al cambiar una THA0 al planificar una lección.

Respecto a las ideas presentadas sobre el modelo de razonamiento curricular, se puede decir que los cambios en la THA0 al planificar lecciones permiten dar cuenta de la mirada curricular y se relacionan con la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del

estudiante. En esta investigación, se considera que ambas perspectivas de la mirada profesional podrían ser complementarias al usar una THA para planificar lecciones (Alpizar-Vargas et al., 2024; Kang, 2022).

Los aspectos que atienden, interpretan y deciden los FPM en los cambios en una THA

En esta sección se responde a la pregunta de investigación: ¿Cómo los futuros profesores atienden e interpretan una THA sobre función cuadrática para decidir sobre sus cambios en la planificación de lecciones de dicho contenido matemático?

En esta investigación se consideraron los cambios propuestos por FPM en una THA0 al planificar lecciones sobre función cuadrática en el contexto de un experimento de enseñanza colectivo. La THA es una herramienta metodológica relacionada con el desarrollo de cada una de las fases de la investigación. En este sentido, se propiciaron espacios en que la investigadora y los FPM trabajaron en conjunto para una investigación más práctica y una enseñanza más científica (Gravemeijer y Van Eerde, 2009).

Aunque los FPM carecen de experiencia docente, lograron proponer cambios en la THA al planificar una lección por primera vez. Para ambos grupos de FPM, la experiencia de la implementación de las actividades de aprendizaje con un grupo de estudiantes permitió corroborar sus suposiciones y ampliar los aspectos relacionados con anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes. Los aprendizajes reales de los estudiantes generaron en los FPM la necesidad de explicar y conocer las razones de sus acciones.

El uso de la THA0 en la primera planificación de una lección les permitió a los FPM considerar el objetivo de aprendizaje y proceso de aprendizaje de los estudiantes al implementar las actividades de aprendizaje. La práctica docente de los FPM, inmersa en la investigación de diseño con el uso de una THA0 acercó a los FPM a procesos y actividades similares a los realizados por los investigadores (Gravemeijer y Van Eerde, 2009).

La práctica docente de los FPM se relacionó con el proceso de una investigación de diseño. Los aportes realizados por los FPM a la THA0 en la primera y segunda planificación de una lección enriquecieron la THA2 y relacionaron su práctica docente con la investigación (Gravemeijer y Van Eerde, 2009).

En la descripción de la metodología se dieron detalles del proceso de investigación relacionadas con los niveles de análisis de los datos, con el fin de contribuir a explicitar las decisiones metodológicas (Amador et al., 2021).

Esta investigación ejemplifica el uso de las THA0 como recurso curricular, ya que posibilitan el diseño, modificación y selección de actividades de aprendizaje en coherencia con los procesos de aprendizaje hipotéticos y objetivo de aprendizaje (Wickstrom y Langrall, 2020). El uso de THA transformó la planificación docente, se superó las estructuras curriculares tradicionales centradas en temas o proyectos y se favoreció una enseñanza centrada en el aprendizaje de los estudiantes (Sarama et al., 2021).

En esta investigación se resalta el trabajo colaborativo de los FPM en los cambios en la THA0 (Damasco, 2022). Las discusiones suscitadas en las entrevistas semiestructuradas y en los acuerdos grupales de los FPM en documentos escritos sobre cambios en la THA0, evidencian razonamientos basados en sus conocimientos profesionales, que permitieron dar cuenta de su mirada curricular.

Se ratifica que las entrevistas semiestructuradas fueron útiles para ampliar la caracterización de las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada curricular. Las entrevistas fueron complementarias a los documentos escritos de los cambios en la THA0 propuestos por los FPM al planificar lecciones (Lee y Lee, 2024). Aunque en los documentos escritos se precisó las habilidades de atender y decidir de la mirada curricular, fueron las entrevistas semiestructuradas las que permitieron delimitar las interpretaciones.

Los productos de la investigación de diseño pueden ser principios de diseño, mapas de conjeturas o THA (Bakker, 2018b). En esta investigación, el producto son principios de diseño, escritos con la estructura de Van Den Akker (1999) y con base en los ejemplos de Gustafsson y Ryve (2021). Los tres primeros principios de diseño son tanto del ciclo 1 como del ciclo 2, solo el cuarto principio de diseño es del ciclo 2. Los principios de diseño para esta investigación son:

Principio de diseño 1: Análisis inicial de una THA. Si quiere caracterizar la mirada curricular de un grupo de FPM, se recomienda que los FPM inicien con el análisis de una THA0 construida por los investigadores, ya que delimita los conocimientos matemáticos y didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática (Fernández et al., 2018; Fernández y Choy, 2020; González- Forte et al., 2024; Ivars et al., 2020, Zorrilla et al., 2024).

Principio de diseño 2: Cambios documentados de una THA en un ciclo de enseñanza. Si quiere promover el desarrollo de las habilidades de atender y decidir de la mirada curricular de FPM, entonces los FPM pueden cambiar una THA0 al planificar una lección en un documento escrito (THA1), implementar las AA de la THA1 con estudiantes, analizar y cambiar la THA1 en un documento escrito (THA2) al planificar por segunda vez una lección (Amador et al., 2017; Amador, 2019; Dietiker et al., 2018; Edgington, 2014; Gueudet et al., 2023; Gravemeijer y Van Eerde, 2009; Ivars y Fernández, 2023; Ferreira et al., 2021; Kang, 2022; Males et al., 2015; Rezat, 2024; Simon, 1995).

Principio de diseño 3: Articulación de las justificaciones sobre los cambios en la THA. Si quiere desarrollar la habilidad de interpretar de la mirada curricular en los FPM, entonces puede realizar entrevistas semiestructuradas a los FPM para promover la justificación explícita de los cambios realizados a la THA al planificar una lección (Damasco, 2022; Dietiker et al., 2018; Lee y Lee, 2024; Males et al., 2015; Roth McDuffie et al., 2018).

Principio de diseño 4. Análisis de los aprendizajes de los estudiantes. Si quiere fomentar las habilidades de atender, interpretar y decidir de la mirada curricular de los FPM relacionados con anticipar dificultades, errores y acciones de los estudiantes, entonces los FPM pueden realizar observaciones escritas de la implementación de las actividades de aprendizaje y construir una trayectoria real de aprendizaje (Damasco, 2022; Edgington, 2014; Gravemeijer y Van Eerde, 2009; Ferreira et al., 2021; Wilson et al., 2014; Wilson et al., 2015; Wilson et al., 2017).

Aportes de esta investigación

Esta investigación contribuye a caracterizar la mirada curricular con las THA como recursos curriculares. Hasta ahora, los estudios reportados, como los de la Universidad de Alicante, se han enfocado en las THA como lentes teóricos de la mirada profesional al determinar progresiones de aprendizaje de los estudiantes, que delimitan los conocimientos profesionales de los futuros profesores y les permiten reconocer oportunidades y limitaciones matemáticas de las actividades de aprendizaje, o bien para completar secuencias de actividades de aprendizaje (González-Forte et al., 2024; Zorrilla et al., 2024).

En esta investigación, al considerarse una THA como recurso curricular puede ser utilizada y cambiada por los FPM en la planificación de lecciones. Una característica de la THA0 dada a los FPM es que se presenta completa, es decir, que incluye sus tres componentes: objetivo de aprendizaje, actividades de aprendizaje y proceso de aprendizaje hipotético. Por tanto, cualquier cambio en la THA, como la inclusión de preguntas específicas en las actividades de aprendizaje, puede impactar tanto el proceso de aprendizaje hipotético como el objetivo de aprendizaje (Simon, 1995, 2020; Simon y Tizur, 2004).

Un aspecto común en los resultados obtenidos con los dos grupos de FPM y en los dos ciclos del experimento de enseñanza colectivo es que las THA1 y THA2 conservaron tanto los elementos del proceso de aprendizaje hipotético como el objetivo de aprendizaje de la THA0. Los

ajustes realizados a la THA0 en las propuestas de la THA1 y THA2 generaron modificaciones en las actividades de aprendizaje y sugirieron ampliar el proceso de aprendizaje hipotético. Ambas propuestas estuvieron alineadas con los enfoques teóricos, los estudios en Educación Matemática y la revisión de materiales curriculares que sirvieron de base para la construcción de la THA0. En otras palabras, las nuevas propuestas de THA1 y THA2 preservaron la esencia y la estructura teórica de la THA0. No obstante, las modificaciones realizadas a la THA0 permitieron evidenciar las habilidades de la mirada curricular de los FPM al planificar lecciones.

Teniendo en cuenta las características de esta investigación, fue necesario la adaptación de las habilidades de la mirada curricular (Dietiker et al., 2018; Males et al., 2015) respecto a los cambios en una THA propuestos por FPM al planificar lecciones (Figura 15).

Además, se destaca que la THA0, al estar inmersa en una investigación de diseño que analiza la práctica docente de los FPM para evidenciar su mirada curricular, es una herramienta metodológica y recurso curricular. Las propuestas generadas por los dos grupos de FPM de THA2 constituyen productos de una investigación de diseño de Nivel Uno, centrada en los aprendizajes de los estudiantes, que tiene el potencial de ser mejoradas mediante un análisis más riguroso de los aprendizajes.

En este sentido, los FPM, en su rol de agentes de enseñanza, pueden aproximar su práctica docente al desarrollo de investigaciones de diseño. Los análisis de los aprendizajes de los estudiantes del segundo grupo de FPM contribuyeron a que su práctica docente adquiriera un carácter más investigativo. Se resalta que esta investigación caracterizó la mirada curricular de los FPM inmersos en su práctica docente.

Se aportó al uso de THA por parte de FPM para la enseñanza de la función cuadrática en el nivel de educación secundaria y media en Colombia (estudiantes entre los 12 a 18 años), para caracterizar su mirada curricular. La práctica docente propició la mirada curricular en futuros

profesores, siendo esta una necesidad (Lee y Lee, 2024), y en particular, para los niveles superiores a la educación básica primaria (Nickerson et al., 2017).

En esta investigación, los FPM cambiaron una THA en la planificación de lecciones. Esta práctica profesional generó un proceso de aprendizaje basado en la reflexión, lo que sustenta la idea de que el desarrollo de la mirada profesional permite a los FPM aprender de su práctica docente (Llinares, 2013, 2014; Santagata y Yeh, 2016). Los cambios relacionados con el foco de atención anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes demostraron que los FPM utilizaron sus experiencias previas y las observaciones durante la implementación de las actividades de aprendizaje. Además, los FPM adoptaron una actitud investigativa, lo que refuerza la capacidad de aprender de su práctica profesional.

Esta investigación aporta al desarrollo de la mirada profesional con una perspectiva distinta a la propuesta por Jacobs et al. (2010) y Van Es (2011) con el uso de THA, tal como lo sugieren Wei et al. (2023).

Limitaciones de la investigación

En esta investigación se recolectó extensa información que hace parte del desarrollo del experimento de enseñanza colectivo. Se descartaron los análisis de las grabaciones en audio y video de la implementación de las actividades de aprendizaje de la THA1 porque el interés estaba en los acuerdos compartidos de los FPM en la primera y segunda planificación de una lección con el uso de una THA0 sobre función cuadrática.

También, se descartaron los análisis de los aprendizajes detallados de los estudiantes porque el enfoque de la investigación fue la mirada curricular de los FPM (Nivel Dos del experimento de enseñanza colectivo).

Respecto al análisis de los aprendizajes de los estudiantes por parte de los FPM en las hojas de trabajo y durante la implementación de las actividades, hay una limitación para el primer

grupo de FPM porque se descartó obtener información específica del análisis de los aprendizajes de los estudiantes. El primer grupo de FPM analizó de manera general los aprendizajes de los estudiantes en los cambios en la THA0. Estos FPM tenían el compromiso de realizar la revisión de las hojas de trabajo antes de las entrevistas semiestructuradas. Las respuestas de los FPM a las preguntas de la entrevista evidencian sus análisis generales de los aprendizajes de los estudiantes.

Mientras que, para el segundo grupo de FPM, se realizó una reunión presencial para determinar los aprendizajes de los estudiantes respecto a las hojas de trabajo y sus observaciones individuales escritas posteriores a la implementación de las actividades de aprendizaje. Las descripciones de los aprendizajes por parte de los FPM determinaron una trayectoria real de aprendizaje, que fue el precedente para que los FPM realizaran su propuesta de THA2. Este cambio en el desarrollo del experimento de enseñanza generó que el segundo grupo de FPM ampliara sus apreciaciones respecto al foco de atención de anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes en comparación al primer grupo.

Para el primer grupo de FPM, se asignaron tareas de manera individual, virtual y asincrónica como la revisión de las hojas de trabajo de los estudiantes. Mientras que para el segundo grupo de FPM, la mayoría de las sesiones de trabajo fueron grupales y presenciales, con registros de audio y documentos en drive compartidos. Esta diferencia hace que para el segundo grupo de FPM exista mayor cantidad información. Los cambios propuestos en el experimento de enseñanza colectivo para el segundo ciclo pretendían mejorar la recolección de información respecto a la experiencia del primer ciclo, dado que el experimento de enseñanza colectivo exigía el trabajo en equipo de los FPM.

Otra de las limitaciones del primer grupo de FPM era que uno de los FPM estaba por culminar su carrera. El propósito era lograr que este grupo de FPM realizaran hasta un segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo, por lo que el trabajo en un solo semestre fue arduo

y en poco tiempo. Aunque los FPM lograron realizar la implementación de las AA de la THA2, no cambiaron su THA2, para una tercera planificación de una lección sobre función cuadrática.

Para el segundo grupo de FPM, respecto a la experiencia del primer grupo, se seleccionaron tres FPM que se encontraban en noveno semestre de su programa de licenciatura en matemáticas. Se planeó que los FPM realizaran en un semestre (noveno) un primer ciclo del experimento de enseñanza y en el siguiente semestre (décimo) realizaran el segundo ciclo del experimento de enseñanza. Pero uno de los FPM no continuó en la investigación en el décimo semestre. Por lo que este segundo grupo de FPM logró realizar su THA2 sin la implementación de las AA de la THA2. Dada las diferencias, se toma la decisión de analizar para los dos grupos de FPM un solo ciclo del experimento de enseñanza colectivo.

Aunque fue una limitación no llegar hasta el segundo ciclo del experimento colectivo en al menos un grupo de FPM, es a su vez una ventaja porque se simplifica y se unifica la descripción del desarrollo metodológico de esta investigación de diseño.

Aunque se logra identificar en los cambios de la THA0 los aspectos a los que atendieron los FPM, quedaron sin explicitar algunas de las interpretaciones. Para otras investigaciones, se podría revisar y evaluar los métodos de obtención de información para obtener las interpretaciones de los FPM relacionadas con los cambios en la THA0.

Proyecciones

Dado que cada grupo de FPM realizó una propuesta de THA2, se podría relacionar en una sola THA. Esta nueva THA requiere un análisis detallado de los aprendizajes de los estudiantes en las hojas de trabajo, audios y videos de las implementaciones de las AA. En otras palabras, es necesario realizar la fase de análisis retrospectivo respecto a los aprendizajes de los estudiantes.

Por otra parte, los registros de audio, video y hojas de trabajo de la implementación de las actividades de aprendizaje pueden ser insumos para la producción de representaciones de la práctica (Bernabeu et al., 2019) para el desarrollo de la mirada profesional.

Esta investigación se centra en la mirada curricular en los cambios en una THA0 propuesta por FPM en la primera y segunda planificación de una lección, es decir, que la THA0 fue un recurso curricular. Al estar relacionada la THA0 con un experimento de enseñanza es a su vez una herramienta metodológica. También, existe la posibilidad de dar cuenta de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante cuando los FPM realizaron las observaciones escritas después de la implementación de las AA y construyeron la trayectoria real de aprendizaje para proponer la THA2.

Se vislumbra que el futuro de las investigaciones sobre la mirada profesional es extender este vínculo entre la mirada curricular y la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante, con el uso de THA0, y quizás utilizar la THA como recurso curricular respecto a otras perspectivas de la mirada profesional como la mirada productiva (Choy y Dindyal, 2021).

Respecto al modelo de razonamiento curricular (Dingman et al., 2021) en esta investigación se realizó una reflexión teórica respecto a la mirada curricular en los cambios en una THA0 en la planificación de una lección. Esta reflexión teórica muestra las potencialidades del uso de una THA0 en la práctica docente de los FPM respecto al razonamiento curricular. Sin embargo, el modelo puede ejemplificarse en la práctica docente de los FPM de esta investigación.

Otro aspecto por considerar es que, en los experimentos de enseñanza, todos los participantes generan aprendizajes, es usual el análisis del aprendizaje de los estudiantes (Nivel Uno), pero hacen falta investigaciones respecto a los aprendizajes de los profesores (Nivel Dos), de los investigadores (Nivel Tres), de tres o dos niveles en conjunto (Amador, 2022; Lesh y Kelly, 2000; Wei et al., 2023; Wilkie, 2020). Por ejemplo, se podría analizar la mirada

profesional del investigador al analizar la mirada profesional de los profesores de matemáticas. Este informe final es un posible documento para analizar el Nivel Tres de los experimentos de enseñanza colectivos sobre la mirada curricular.

Por otra parte, las interacciones entre el investigador y los FPM en la práctica docente afectaron la mirada curricular. Se podría indagar sobre cómo las interacciones investigador y FPM se relacionaron con la mirada curricular de los FPM.

Existe la necesidad de realizar investigaciones de la mirada profesional de FPM en una duración mayor a un semestre (Amador et al., 2021). Esta investigación se podría replicar en condiciones de mayor tiempo (mayor a un semestre), para garantizar un segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo con un grupo de FPM y obtener una THA3.

Otro aspecto por considerar es el refinamiento de la THA0. En lugar de iniciar el segundo ciclo del experimento de enseñanza colectivo con la THA0, se podría partir de la THA2 desarrollada por el primer grupo de FPM. Esto permitiría que, al finalizar el segundo ciclo, el segundo grupo de FPM pudiera proponer una THA4.

Respecto al modelo de construcción de THA usado en esta investigación (Cárcamo y Fuentealba, 2023), se podría considerar la revisión de recursos curriculares en vez de materiales curriculares o ambos. Este cambio podría modificar dicho modelo de construcción de una THA0.

Actividades académicas relacionadas con la investigación

En la Tabla 12 se presentan documentos publicados relacionados con la participación en eventos académicos o capítulos de libro en orden cronológico.

Tabla 12.

Documentos publicados sobre la investigación doctoral

Tipo de documento	Referencia
Memorias de evento con ISSN	Mejía-Palomino, M. F., Cárcamo, A. y Garzón, D. (2021). Competencia docente “mirar profesionalmente” el diseño de tareas sobre funciones polinómicas. En I. Sánchez y A. Meléndez (Ed.), <i>II Coloquio internacional en educación, interculturalidad y territorio</i> (p. 138). Santa Marta, Colombia: Universidad del Magdalena. https://drive.google.com/file/d/1O4_73c_ywg46AedYVBRsFMHxhdMN3AiZ/view?usp=sharing
Memorias de evento con ISSN	Mejía-Palomino, M. F., Cárcamo, A. y Garzón, D. (2022). Una experiencia sobre la práctica pedagógica de futuros profesores de matemáticas. En I. Sánchez y N. Vásquez (Ed.), <i>III Coloquio internacional en educación, interculturalidad y territorio</i> , (p. 211-212). Santa Marta, Colombia: Universidad del Magdalena. https://eventos.unimagdalena.edu.co/Content/ArchivosPublicaciones/Publicacion_3/documento_6_20231026112153.668.pdf
Memorias de evento con ISBN	Mejía-Palomino, M.F.; Cárcamo, A. y Garzón, D. (2023a). Una propuesta de investigación con una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la función cuadrática. En P. Scott; Y. Morales y A. Ruíz (Ed.), <i>Educación Matemática en las Américas 2023 Formación Inicial de Profesores, Volumen 3</i> , (pp. 385–392). https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/12/2023-Volumen3-Tema-2.pdf
Memorias de evento con ISBN	Mejía-Palomino, M.F., Cárcamo, A., y Garzón Castro, D. (2023b). La práctica pedagógica de los futuros profesores de matemáticas al usar una trayectoria hipotética de aprendizaje. En G. Morales-Ramírez, J.G. Lugo Armenta, L.R. Pino-Fan, S. Caviedes, S. Retamal y M. Márquez, M. (Eds.), <i>Actas XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática</i> (pp. 494-498). Universidad de Los Lagos. https://www.sochiem.cl/wp-content/uploads/actas-jnem-2022-osorno-xxvi-ulagos-isbn.pdf
Capítulo de libro	Mejía-Palomino, M. F., Cárcamo, A. y Garzón, D. (2024a). El diseño de actividades de aprendizaje de dos futuros profesores de matemáticas a partir de una trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar sobre función cuadrática. En I. M. Giongo, M. J. Hepp Rehfeldt, y S. E. Marchi Gonzatti (Eds.), <i>Tessituras teórico-metodológicas sobre prácticas pedagógicas em ciências da natureza e matemática</i> (pp. 22–37). Universidade do Vale do Taquari - Univates. https://drive.google.com/file/d/1ebF6FLGPUgqj5g289znMvR1H4ZTtZvy/view?usp=sharing
Memorias de evento con ISSN	Mejía-Palomino, M. F., Cárcamo, A., Garzón, D. y Fernández, C. (2024c). La mirada profesional curricular de futuros profesores de matemáticas. En <i>Actas Simposio MEM 2024</i> (pp. 188-189). Universidad Antonio Nariño. http://investigacion.uan.edu.co/images/MEM/documentos/ActaVolumen11N%C2%B01-2024.pdf

Tipo de documento	Referencia
Memorias de Evento con ISBN	Mejía-Palomino, M.F., Fernández, C., Cárcamo, A. y Garzón, D. (2025). The curricular noticing of prospective mathematics teachers when modifying a hypothetical learning trajectory. In C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri, y V. Randolph (Eds.). <i>Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: General Contributions</i> (p. 383). PME.

En la Tabla 13 se presentan los documentos pendientes de publicación. El segundo artículo de revista es producto del desarrollo de la pasantía de investigación.

Tabla 13.

Documentos en proceso de publicación sobre la investigación doctoral

Tipo de documento	Referencia
Artículo de revista	Mejía-Palomino, M.F., Cárcamo, A. y Garzón, D. (s.f.). <i>Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar sobre función cuadrática</i> . [Manuscrito presentado para su publicación]. Universidad del Valle.
Artículo de revista	Mejía-Palomino, M.F., Fernández, C., Cárcamo, A. y Garzón, D. (s.f.). <i>Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el diseño de una lección sobre función cuadrática</i> [Manuscrito presentado para su publicación]. Universidad del Valle.
Memorias de evento en Revista Praxis, Educación y Pedagogía	Mejía-Palomino y Garzón, D. (s.f.). La mirada profesional y trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la práctica pedagógica de futuros profesores. En <i>Memorias del Encuentro de Estudiantes y Egresados del Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE)</i> . Universidad Pedagógica Nacional. https://drive.google.com/file/d/1I700yCKZo9a7mj98g0RBfHhRO2R2ztrJ/view?usp=sharing

Referencias

Alpízar-García, M., Fernández, C. y Llinares, S. (2024). Competencia docente del profesorado de Educación Primaria en el área de medición en un contexto de reforma curricular.

Uniciencia, 38(1). <https://doi.org/10.15359/ru.38-1.22>

Amador, J.M., Males, L.M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular Noticing: theory on and practice of teachers' curricular use. In E., Schack, M., Fisher y J. Wilhelm (eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks. Research in*

Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Amador, J. M. (2019). Preservice Teachers' use of curricular resources for mathematics lesson design. *Mathematics Teacher Education and Development*, 21(1), 51-81.

<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1216048.pdf>

Amador, J.M. y Earnest, D. (2019). Integrating curriculum and community spaces. In Bartell, T., Drake, C., McDuffie, A., Aguirre, J., Turner, E., Foote, M. (eds), *Transforming Mathematics Teacher Education* (pp. 119-131). Springer, Cham.

<https://doi.org/10.1007/s10857-017-9374-2>

Amador, J. (2020). Noticing as a tool to analyze mathematics instruction and learning. In O. Chapman y L. Salvador (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 311–336). Brill Sense.

https://doi.org/10.1163/9789004418967_012

Amador, J., Bragelman, J. y Superfine, A. C. (2021). Prospective teachers' noticing: A literature review of methodological approaches to support and analyze noticing. *Teaching and Teacher Education*, 99, 103-256. <https://doi.org/10.1016/J.TATE.2020.103256>

Amador, J. (2022). Mathematics teacher educator noticing examining interpretations and evidence of students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 163–189. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09483-z>

Aufmann, R. y Lockwood, J. (2013). *Álgebra elemental* (8a ed.). Cengage Learning.

Aya Corredor, O., Echeverry Gaitán, A., y Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia*, 12(1), 139-158.

Azizah, N. N., Susiswo, S. y Sisworo, S. (2021). Analytical thinking process of students in solving mathematical problems of quadratic functions. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 10 (1), 328-338.

- Bakker, A. (2018a). What is design research in education? In A. Bakker. (Ed.), *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers* (pp. 3–22). Routledge.
- Bakker, A. (2018b). Design principles, conjecture mapping, and hypothetical learning trajectories. In A. Bakker. (Ed.), *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers* (pp. 46–67). Routledge.
- Bakker, A. y Smit, J. (2018). Using hypothetical learning trajectories in design research. In A. Bakker (Ed.), *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers* (pp. 255–271). Routledge.
- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Bereiter, C. (1985). Toward a Solution of the Learning Paradox. *Review of Educational Research*, 55(2), 201–226. <https://www.jstor.org/stable/1170190>
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103–123. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bohrer, A. y Tinti, D. S. (2021). Mapping of studies on the quadratic function in contexts of mathematics teaching and/or learning. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 201-230. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p201-230>
- Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. [Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona]. Digital UAB. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2017/hdl_10803_458629/acb1de1.pdf
- Cárcamo, A. y Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje Preliminares. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37 (76), 577-

701. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10>

Choppin, J. (2011). The Impact of Professional Noticing on Teachers' Adaptations of Challenging Tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 175–197.

<https://doi.org/10.1080/10986065.2010.495049>

Choy, B.H. y Dindyal, J. (2021). Productive teacher noticing and affordances of typical problems.

ZDM Mathematics Education, 53 (1), 195–213. [https://doi.org/10.1007/s11858-020-](https://doi.org/10.1007/s11858-020-01203-4)

[01203-4](https://doi.org/10.1007/s11858-020-01203-4)

Cumbal, L. (2020). *Caracterización de las prácticas de profesores nóveles en la integración de recursos digitales con una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la traslación*. [Trabajo de maestría]. Universidad del Valle.

Cruz-Rojas, A.G. (2023). *Sistemas de recursos del profesor de matemáticas en servicio y su mirada profesional en contextos rurales*. [Trabajo de doctorado]. Universidad del Valle.

Damasco, F. (2022). *Formação continuada de professores de matemática e o desenvolvimento da competência de observar com sentido*. [Tesis de doctorado]. Universidad Luterana do Brasil.

De Guzman, A.B. y Adamos, J.L. (2020). Like the layers of an onion: curricular noticing as a lens to understand the epistemological features of the Philippine K to 12 secondary mathematics curriculum materials. *Educational Research for Policy and Practice*, 19(3), 389–409. <https://doi.org/10.1007/s10671-020-09264-8>

De Sousa, R. T. y Alves, F. R. V. (2022). Quadratic functions and PhET: an investigation from the perspective of the theory of figural concepts. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 3(1), ep22010. <https://doi.org/10.30935/conmaths/11929>

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M. y Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for*

Research in Mathematics Education, 49(5), 521.

<https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresmetheduc.49.5.0521>

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 1–16.

<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y>

Dingman, S., Teuscher, D., Olson, T. y Kasmer, L. (2021). Conceptualizing Curricular Reasoning: A Framework for Examining Mathematics Teachers' Curricular Decisions. *Investigations in Mathematics Learning*, 13 (4), 267-286.

<https://doi.org/10.1080/19477503.2021.1981742>

Edgington, C. (2012). *Teachers' uses of a learning trajectory to support attention to students' mathematical thinking*. [Tesis Doctoral]. North Carolina State University, Raleigh, NC.

<http://search.proquest.com/docview/1346014792?accountid=17192>

Edgington, C. (2014). Teachers' use of a learning trajectory as a tool for mathematics planning. In J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 261-284). Cham: Springer.

Edgington, C., Wilson, P.H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, 5(1), 65-80.

Fatahillah, A., Puspitasari, I. D. y Hussen, S. (2020). The development of Schoology web-based learning media with GeoGebra to improve the ICT literacy on quadratic functions. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 5(3), 304-316.

Fandiño Pinilla, M. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro: aspectos conceptuales y didácticos*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and context. *Avances de*

Investigación en Educación Matemática, 13, 39–61.

<https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>

Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical Lenses to Develop Mathematics Teacher Noticing. In O. Chapman y L. Salvador (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education Volume 2* (pp. 337–360). Brill Sense.

https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Realidad y Reflexión*, 53(53), 40–60. <https://doi.org/10.5377/RYR.V53I53.10887>

Ferreira, P. E., Dos Santos, J. R. y Rossetto, H. H. (2021). Elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem como Oportunidade para a Formação Continuada de Professores que Ensinam Matemática. *Sisyphus-Journal of Education*, 9(1), 108-133.

Friesen, M. E. y Kuntze, S. (2021). How context specific is teachers' analysis of how representations are dealt with in classroom situations? approaching a context-aware measure for teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 181–193.

<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01204-3>

Godino, J. D. y Llinares, S. (2018). Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una “mirada profesional”. Aportes desde el interaccionismo simbólico. En A. Avila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 19–37). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

González-Forte, J.M., Ivars, P. y Fernández, C. (2021). Un estudio sobre la mirada curricular en estudiantes para profesor de matemáticas En Satorre Cuerda, R. (coord.). *REDES-INNOVAESTIC 2021, Libro de actas* (pp. 42-43). Universidad de Alicante

González-Forte, J.M., Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2024). Pre-service teachers'

- curricular noticing: Attending to fraction activities' features. In T. Evans, O. Marmur, G. Hunter, J. Leach, y J. Jhagroo (Eds.), *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1* (p. 192). Auckland, New Zealand: PME.
- González-Polo, R. I. y Castaneda, A. (2024). Progressive mathematics of functions in secondary school students using a free-fall activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(1), em0765.
- Gómez López, A. (2022). *Caracterización de las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante al orquestar recursos pedagógicos*. [Trabajo de maestría]. Universidad del Valle.
- Gustafsson, P. y Ryve, A. (2021). Developing design principles and task types for classroom response system tasks in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 3044–3065.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1931514>
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gravemeijer, K. (2020). Emergent Modeling: an RME Design Heuristic Elaborated in a Series of Examples. *Educational Designer*, 4, 1–31.
<https://www.educationaldesigner.org/ed/volume4/issue13/article50/>
- Gravemeijer, K. y Van Eerde, D. (2009). Design Research as a Means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, 9(5), 510–524.

- Groenwald, O. y Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), e202202. <https://doi.org/10.54541/REVIEM.V2I2.29>
- Gueudet, G., Pepin, B. y Rezat, S. (2023). Meta-Resources: Supporting the Design of Mathematics Teaching and Learning. In Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (eds), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education. Springer International Handbooks of Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_36-1
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11). <https://doi.org/10.29333/EJMSTE/93421>
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 105-124. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947>.
- Ivars, P. y Fernández, C. (2023). Snapshots of curricular noticing: planning a subtraction algorithm lesson in primary education. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Volume 3 (pp. 107-114). Haifa, Israel: PME.
- Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 169–202. <https://doi.org/10.2307/20720130>
- Jacobs, V., Philipp, R. y Sherin, M. (2020). Noticing of Mathematics Teachers. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 639–641). Springer International

Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_120

- Jedtke, E. y Greefrath, G. (2019). A Computer-Based Learning Environment About Quadratic Functions with Different Kinds of Feedback: Pilot Study and Research Design. In G. Aldon y J. Trgalová, J. (eds), *Technology in Mathematics Teaching. Mathematics Education in the Digital Era* (pp. 297-322). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19741-4_13
- Kang, R. (2022). *Preparing Middle and High School Teachers for Teaching Mathematical Modeling through Curricular and Professional Noticing* [Doctoral dissertation]. University of Georgia.
- Kalchman, M. y Koedinger, K. (2005). Teaching and learning functions. In S. Donovan y J. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics and science in the classroom* (pp. 351–396). National Academy Press.
- König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A.-K., Yang, X. y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, 36, 100453. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453>
- Lee, M. y Lee, JE. (2024). Investigating pre-service teachers' problem-solving ability and their curricular noticing ability through pedagogical sequencing activities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22 (7).
- Leikin, R. y Dinur, S. (2007). Patterns of Flexibility: Teachers' Behavior in Mathematical Discussion. In M. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III* (pp. 1–11). https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG11/TG11_Leikin_cerme3.pdf
- Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. In R. Lesh y A. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230).

Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

<https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9781410602725>

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117–133.

<https://doi.org/10.1590/s0104-40602013000400009>

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 26, 31–51.

Llinares, S. (2020). Tools and Ways of Thinking in Mathematics Teacher Education. In O. Chapman y S. Llinares (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 1–19). Brill Sense.

https://doi.org/10.1163/9789004418967_001

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185–205. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1625>

Llinares, S. (2023). Formación de profesores de matemáticas “basada” en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz, *Educación Matemática en las Américas. Trabajos invitados de la XVI CIAEM* (pp. 71-79). República Dominicana.

Machalow, R., Remillard, J.T., Van Steenbrugge, H. y Kim, O.K. (2020). How Curriculum Materials Support Teachers’ Noticing of Student Thinking. In J. T. Remillard y O. K. Kim (Eds.), *Elementary Mathematics Curriculum Materials. Research in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38588-0_7

Males, L. M., Earnest, D., Amador, J. M. y Dietiker, L. (2015). Examining K-12 prospective teachers’ curricular noticing. En T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, y

- H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 88-95). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Males, L. M. y Setniker, A. (2019). Planning with curriculum materials: Interactions between prospective secondary mathematics teachers' attention, interpretations and responses. *International Journal of Educational Research*, 93, 153-167.
- Mejía-Palomino, M.F., Cárcamo, A. y Garzón, D. (s.f.). *Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje preliminar sobre función cuadrática*. [Manuscrito presentado para su publicación]. Universidad del Valle.
- MEN (2 de febrero de 2000). Decreto 088. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-104863_archivo_pdf.pdf
- MEN (2017a). *Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 7*. Ediciones SM.
- MEN (2017b). *Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 8*. Ediciones SM.
- MEN (2017c). *Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 9*. Ediciones SM.
- MEN (2017d). *Matemáticas 10*. Ediciones SM.
- MEN (2017e). *Matemáticas 11*. Ediciones SM.
- MEN (14 de septiembre de 2020). Decreto 1236. <https://www.mineducacion.gov.co/portal/normativa/Decretos/400864:Decreto-No-1236-del-14-de-septiembre-2020>
- Mesquita, M. A. N. (2009). *Ensinar e aprender funções polinomiais do 2.º grau, no ensino médio: construindo trajetórias* [Trabajo de maestría]. Pontificia Universidad Católica de São Paulo.
- Mishra, P. y Koehler, M.J. (2008). Introducing TPCK. In AACTE Committee on Innovation and Technology (Ed.), *The handbook of technological pedagogical content knowledge*

(TPCK) for educators (pp. 3-29). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Morales Carballo, A., Damián Mojica, A. y Marmolejo Vega, J. E. (2022). Hypothetical Learning Trajectory for Assimilating the Articulated Concepts of Quadratic Function and Equation Through Variational Ideas and the Use of GeoGebra in Pre-University Students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(2), em0678.

<https://doi.org/10.29333/iejme/11714>

Nickerson, S. D., Lamb, L. y LaRochelle, R. (2017). Challenges in Measuring Secondary Mathematics Teachers' Professional Noticing of Students' Mathematical Thinking. In E. O. Schack, M., H. Fisher., y J. A. Wilhelm. (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 381–398). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_22

Niss, M. (2020). Functions Learning and Teaching. In Lerman, S. (eds), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_96

Parrish, C.W., Snider, R.B. y Creager, M.A. (2023). Investigating how secondary prospective teachers plan to launch cognitively demanding tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(3), 395–423. <https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/s10857-022-09534-7>

Pechene Montenegro, V. (2024). *Las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas: el caso de la semejanza*. [Trabajo de maestría]. Universidad del Valle.

Philipp, R., Fredenberg, M. y Hawthorne, C. (2017). Examining Student Thinking Through Teacher Noticing: Commentary. In E. O. Schack, M., H. Fisher., y J. A. Wilhelm. (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 113–120). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5>

Qi, C., Zuo, S. y Liu, L. (2025). Curricular noticing in Chinese lesson study: teachers'

interactions with textbooks for project-based learning. *ZDM Mathematics Education*.

<https://doi.org/10.1007/s11858-025-01679-y>

Ramírez, R., Cañadas, M.C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1393–1406. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w>

Remillard, J.T. (2013). Examining resources and re-sourcing as insights into teaching. *ZDM Mathematics Education*, 45(7), 925–927 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0549-8>

Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: a survey of the field. *ZDM Mathematics Education*, 1-15. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01559-x>

Roth McDuffie, A., Choppin, J., Drake, C., Davis, J. D. y Brown, J. (2018). Middle school teachers' differing perceptions and use of curriculum materials and the common core. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 545–577. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9368-0>

Santagata, R. y Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM - Mathematics Education*, 48(1–2), 153–165. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0737-9>

Sarama, J., Clements, D. H., Baroody, A. J., Kutaka, T. S., Chernyavskiy, P., Shi, J. y Cong, M. (2021). Testing a Theoretical Assumption of a Learning-Trajectories Approach in Teaching Length Measurement to Kindergartners. *AERA Open*, 7. <https://doi.org/10.1177/23328584211026657>

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.26.2.0114>

- Simon, M. y Tzur, R. (2004) Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2
- Simon, M.A. (2019). Analyzing Qualitative Data in Mathematics Education. In Leatham, K.R. (eds), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education. Research in Mathematics Education*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5_8
- Simon, M. (2020). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. In Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 354-357). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, 48(1), 1–27. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y>
- Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates Publishers. <https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9781410602725>
- Steffe, L. P. y Ulrich, C. (2020). Constructivist Teaching Experiment. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 134–141). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_32
- Stewart, J., Redlin, L. y Saleem, W. (2017). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo* (7ª ed.). Cengage Learning.
- Suh, J., Birkhead, S., Farmer, R. R., Galanti, T., Nietert, A., Bauer, T. y Seshaiyer, P. (2019). Split It! Unpacking the Equipartitioning Learning Trajectory. *Teaching Children*

Mathematics, 25(6), 362–369. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.25.6.0362>

- Van Den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. Van Den Akker, N. Nieveen, R. M. Branch, K. L. Gustafson y T. Plomp (Eds.), *Design methodology and developmental research in education and training* (pp. 1–14). Springer.
- Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M. G. Sherin, V. Jacobs, y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.
- Wei, Y., Zhang, Q., Guo, J. y Chen, M. (2023). Learning to teach through noticing: A bibliometric review of teacher noticing research in mathematics education during 2006–2021. *Humanities and Social Sciences Communications*, 10(1), 1-15.
- Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x>
- Wickstrom, M. H. y Langrall, C. W. (2020). The case of Mrs. Purl: Using a learning trajectory as a tool for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(1), 97–125. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9412-8>
- Wilkie, K. J. (2020). Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalization context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2), 315-336.
- Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 103-121.
- Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of*

Mathematics Teacher Education, 17(2), 149-175.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, 66(3), 227-244.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J. y Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal*, 54(3), 568-604.

Wittmann, E. C. (2021). Collective teaching experiments: organizing a systemic cooperation between reflective researchers and reflective teachers in mathematics education. In E. C. Wittmann (Ed.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science* (pp. 239–248). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_12

Yang, X., Kaiser, G., König, J. y Blömeke, S. (2019). Professional Noticing of Mathematics Teachers: A Comparative Study Between Germany and China. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(5), 943–963. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9907-x>

Zapatera, A. (2015). *La competencia “mirar con sentido” de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria* [Tesis de doctorado, Universidad de Alicante]. RUA. <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/5246>

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: coherencia entre interpretar y decidir. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 537-544). SEIEM.

Anexo 1. Entrevistas semiestructuradas

Ficha técnica

Entrevistados: Primer y segundo grupo de FPM.

Entrevistador: Investigadora.

Tipo de entrevista: Semiestructurada.

Tiempo estimado: 1 hora.

Modalidad: virtual, presencial o híbrida.

Objetivos específicos de la investigación y estructura de las entrevistas:

La primera parte de cada entrevista se vincula con el siguiente objetivo específico de la investigación: Analizar los aspectos que atienden e interpretan los FPM en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones. La segunda parte de cada entrevista se relaciona con el siguiente objetivo específico de la investigación: Analizar las decisiones de los FPM en los cambios en una THA sobre función cuadrática al planificar lecciones.

La primera entrevista indaga sobre los cambios de la THA0 (propuesta THA1 y THA2) y la segunda entrevista pretende generar el análisis de la THA1 por los FPM, después de la implementación de las actividades de aprendizaje.

Objetivo de la entrevista: Identificar las interpretaciones de los FPM sobre los cambios en la THA en la planificación de lecciones sobre función cuadrática.

Guion:

Primera entrevista semiestructurada

Fecha: _____ Hora: _____

Buenos días, en el día de hoy _____, voy a realizar algunas preguntas relacionadas con los cambios que ustedes propusieron el día _____ respecto a una THA sobre función cuadrática.

Primera parte

1) ¿Cuáles son los conocimientos previos necesarios para abordar el problema? 2) Exprese su opinión frente al contexto del problema ¿Lo considera adecuado para el grado de escolaridad seleccionado? ¿Qué otro contexto se podría vincular? 3) A medida que se van desarrollando las actividades de aprendizaje ¿Cuáles creen que son los nuevos conocimientos matemáticos que los estudiantes construirán? 4) ¿Cuáles podrían ser los procedimientos que usen los estudiantes para resolver el problema? 5) ¿Cuáles podrían ser las dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de las actividades de aprendizaje? 6) ¿Cuáles son los aspectos didácticos o cognitivos que considera indispensables en la construcción de los conceptos involucrados en el desarrollo de las actividades de aprendizaje? 7) ¿De qué manera los estudiantes podrían construir los conocimientos matemáticos relacionados con estas actividades de aprendizaje?

Segunda parte

En conversaciones realizadas el día _____, se tomaron algunas decisiones respecto a las actividades de aprendizaje, las preguntas que a continuación, se presentan tiene como propósito dejar explícitas estas decisiones:

Estas preguntas de la entrevista se relacionan con los cambios específicos que realiza cada grupo de FPM a su THA1 o THA2.

1) ¿Cuáles serían sus comentarios o sugerencias respecto a las actividades de aprendizaje?
¿Cuáles actividades de aprendizaje propondría para ayudar a la comprensión de sus estudiantes?
2) ¿Cuáles serían sus comentarios o sugerencias respecto al objetivo de aprendizaje? 3) ¿Cuáles serían sus comentarios o sugerencias respecto al proceso de aprendizaje hipotético?

Segunda entrevista semiestructurada

Fecha: _____ Hora: _____

Buenos días, en el día de hoy _____ voy a realizar algunas preguntas relacionadas con el análisis de la THA1 después de la implementación de las actividades de aprendizaje, realizadas el día _____.

Primera parte

1) ¿Cuáles fueron los aspectos matemáticos previos necesarios para el desarrollo de las actividades de aprendizaje? 2) ¿Cuáles fueron los aspectos matemáticos que se pueden construir con el desarrollo de las actividades aprendizaje? 3) ¿Son adecuadas las actividades de aprendizaje para el nivel de escolaridad de los estudiantes? Justifica tu respuesta 4) ¿Cuáles fueron los procedimientos que usaron los estudiantes para resolver el problema? 5) ¿Cuáles fueron las mayores dificultades en el desarrollo de las actividades de aprendizaje? 6) ¿Por qué los estudiantes presentan dificultades para hallar la expresión algebraica? 7) ¿Qué aprendieron los estudiantes? 8) ¿Se logró el objetivo de la clase? ¿Por qué? 9) Respecto a los artefactos (se describen los que ellos sugieran para el desarrollo de las actividades) ¿Cuál es su opinión respecto a su uso en la construcción del pensamiento matemático involucrado en las actividades de aprendizaje? 10) ¿De qué manera los estudiantes construyeron los conocimientos matemáticos relacionados con las actividades de aprendizaje?

Segunda parte – Propuesta de THA2 en la segunda planificación de una lección sobre función cuadrática.

1) Respecto al actual objetivo de aprendizaje de la THA, ¿Consideras que es adecuado? Explica. 2) Respecto al proceso de aprendizaje hipotético de la THA ¿Consideras que es adecuado? Explica. 3) Respecto a las actividades de aprendizaje, ¿Consideras que son adecuadas? ¿Cuáles actividades de aprendizaje propondría para ayudar a la comprensión de sus estudiantes? 4) ¿Qué otro aspecto considera necesario modificar la THA para una próxima implementación?

Anexo 2. Trayectoria real de aprendizaje del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje	Modelo emergente	Proceso de aprendizaje real
Elaborar un cerco <u>rectangular</u> para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la lana de colores para realizar la actividad. Construya algunos rectángulos con los materiales dados y responda las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno? ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?	Actividad situacional Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda para simular el cerco rectangular (ver figura 1).  Figura 1. Tablero con hoja milimétrica.	Algunos estudiantes intentan hacer la malla del cerco con 20 metros, para determinar un metro de lana hacen una brazada (sostienen la punta de la lana con la mano y la extienden hasta el hombro), pero la lana no alcanza, por eso buscan una escala, determinan que un 1 cm equivale a 1 m. La primera interpretación de todos los grupos de estudiantes es que 20 cm corresponde a la medida de un lado, pero al hacer la representación gráfica en el tablero obtienen un cuadrado y rechazan la respuesta porque definen que los rectángulos sólo tienen dos pares de lados iguales. Algunos estudiantes cortan la lana en 20 cm, pero al unir los extremos con un nudo no tienen en cuenta que la medida del cerco se reduce, por lo tanto, sus respuestas para esta actividad son de rectángulos con perímetro fijo 18. Otros estudiantes cortan la lana en 20 cm, pero no la unen, deciden delimitar los vértices de los rectángulos con los

chinchas o dibujan el rectángulo en el tablero y verifican que el cerco mide 20 cm superponiendo la lana sobre el borde del rectángulo o sumando los lados del rectángulo.

En todos los grupos, la medida de los lados de los rectángulos con perímetro 20 son valores enteros y descartan el cuadrado.

La mayoría de los grupos tiene la concepción de que todos los rectángulos tienen el mismo terreno (área) porque la lana del cerco mide lo mismo (perímetro) (Fandiño y D'Amore, 2009).

Un grupo de estudiantes determinan que la mayor cantidad de terreno era toda la cuadrícula del tablero, es decir 580 cuadrados de 1 cm x 1 cm.

Algunos estudiantes diferenciaron el perímetro como el borde del rectángulo y área como la superficie que se delimita el rectángulo.

En cada grupo hay uno o dos estudiantes que diferencian el área del perímetro y les explica a sus compañeros. Para hallar el área de los rectángulos usan la fórmula o cuentan cuadritos de 1 cm x 1 cm.

Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperimétricos. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas:

- a. Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1.
- b. Observa los valores del área cuando se mueve el punto C ¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área?, ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad?
- c. En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo.

Base	Altura	Perímetro	Área

Actividad referencial
Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que simula el cerco de perímetro 20, este rectángulo de perímetro 20 cambia al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro (ver Figura 2).

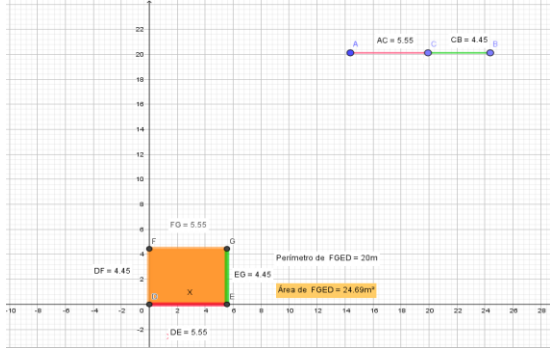


Figura 2. Imagen del archivo GeoGebra Act2.ggb.

Sólo un grupo de estudiantes tenían demasiadas dudas y buscaba la aprobación del profesor.

Algunos estudiantes no logran conectar los segmentos AC y CB con los lados del rectángulo, fue necesario la intervención del profesor para establecer la relación. Los estudiantes verifican el valor del área y perímetro realizando los cálculos a mano, no confían en los resultados que se muestran en la pantalla de GeoGebra. La exploración del problema en GeoGebra les permitió a los estudiantes descubrir muchos más casos que en la primera actividad, debido a que las medidas de los lados se daban en números decimales y enteros. Los estudiantes al buscar el rectángulo con mayor área encuentran que es posible hallar otros rectángulos con área igual 25. Un problema del uso de GeoGebra es que para algunos rectángulos cercanos al cuadrado el valor del área se aproxima a 25. Algunos estudiantes verifican que el área de algunos rectángulos es una aproximación al realizar el cálculo del área usando la fórmula. En esta actividad algunos estudiantes reconocen que el cuadrado es un rectángulo con la ayuda del profesor y la interacción con GeoGebra. Los estudiantes tienen definiciones erradas

- d. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?

del rectángulo que excluye al cuadrado porque consideran que uno de los lados debe ser mayor que el otro, esto concuerda con lo que mencionan Aya, C. et al (2016)

... una de las dificultades asociadas al proceso deductivo radica en la escasa comprensión de la naturaleza y el papel de las definiciones, y en la dificultad para decir las condiciones suficientes y necesarias de las mismas. Si una *definición personal del concepto* no concuerda con la *definición del concepto*, la posibilidad de tener éxito en la justificación se verá afectada. Pg.1 Sin embargo, al darles una nueva definición de rectángulo en la socialización y confrontarla con las características del cuadrado se acepta que el cuadrado es un rectángulo. Se llega a determinar que el cuadrado es el rectángulo de mayor área con perímetro 20.

Respecto a la tabla, algunos estudiantes completaron los datos obteniéndose de GeoGebra, pero no los relacionaban con las fórmulas del área y perímetro. Un grupo de estudiantes sólo determina dos casos en la tabla.

Para todos los estudiantes la pregunta de mayor dificultad fue la última, encontrar la expresión general. La intervención del profesor les permitió comprender que la expresión general del área no era base

		por altura, porque está se usa para todos los rectángulos y no tiene en cuenta que es la expresión general para la familia de rectángulos con perímetro 20. Para algunos estudiantes, la tabla permite ver las relaciones entre los valores de los lados de los rectángulos (que la suma de los lados es la mitad del perímetro) y obtener la expresión general con el uso de la fórmula del área para los rectángulos. Otros estudiantes relacionaron la expresión de la fórmula del perímetro y área para hallar la expresión general. Usan las expresiones del área y perímetro en términos de dos variables y las relacionan en un sistema de ecuaciones para encontrar la expresión general (tratamiento algebraico). Verifican la expresión general con los casos particulares de la tabla.
Análisis de la traza del punto I. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas: - Observe el punto I, mueva el punto C ¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área?	Actividad general Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega el punto I que tiene como coordenadas la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada) (ver Figura 3).	Para algunos estudiantes, el uso de la tabla les permitió expresar las coordenadas en términos de la base y el área de los rectángulos. Algunos estudiantes dan valores particulares para el punto I, aunque relacionan las coordenadas con la base y el área de los rectángulos. Algunos estudiantes exploran sólo una parte del movimiento del punto I porque no desplazan el punto C desde A hasta B. Es necesario que el profesor intervenga y

- c. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área?
- d. Determine un par de rectángulos con igual área ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?

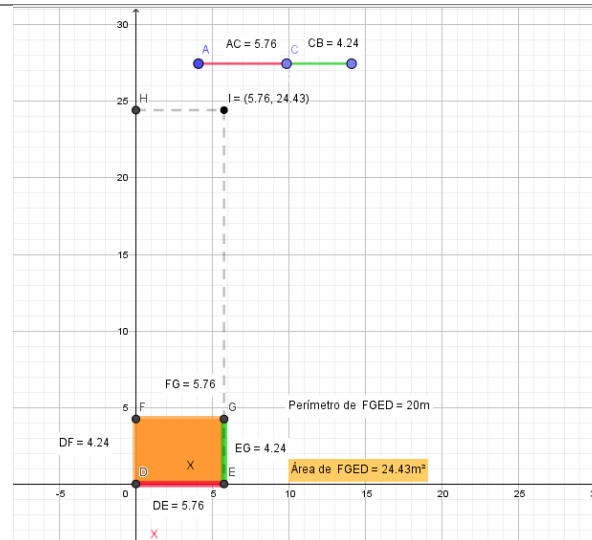


Figura 3. Imagen del archivo GeoGebra Act3.ggb.

solicite el movimiento del punto C sobre todo el segmento AB.

Los estudiantes logran visualizar el movimiento del punto I, dicen que es una parábola, otros dicen que es una curva y la dibujan y otros realizan con el dedo la gráfica sin asociar la forma a ningún objeto y dicen que es ascendente y descendente.

Uno de los grupos persiste en no aceptar que el cuadrado es un rectángulo, su respuesta del rectángulo de mayor área es un rectángulo muy cercano al cuadrado. Aunque en la socialización de la actividad anterior se había mirado la definición de rectángulo y se había determinado que el cuadrado es un rectángulo.

Los estudiantes determinan las coordenadas del punto I donde el área es mayor. Al describir el rectángulo con mayor área todos los estudiantes determinan la medida de sus lados. Algunos estudiantes dicen que el rectángulo de mayor área tiene sus ángulos internos de 90° , que es un paralelogramo y un cuadrado.

Para los estudiantes fue difícil ubicar el punto (5,25) de manera exacta, la mayoría da una respuesta aproximada,

		ellos entendían que el programa realizaba aproximaciones de las medidas, algunos no realizaron el cálculo del área. Para dar cuenta de dos pares de rectángulos con igual área lo que hacen es intercambiar los valores de la base y la altura y verifican el área realizando la multiplicación. Al principio, los estudiantes manipulan el archivo en GeoGebra para encontrar estos rectángulos, pero es difícil encontrar dos rectángulos con la misma área, los estudiantes encuentran aproximaciones.
Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas: - Ingresa en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encuentre en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I. ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante II, III y IV del plano cartesiano? - Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con	Actividad formal Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos y la traza del punto I.	Los profesores les recuerdan la expresión general de la actividad 2 y la ingresan en GeoGebra para comparar su gráfica con la nube de puntos generada por I. Los estudiantes logran ver que coinciden las dos gráficas en el primer cuadrante. Los profesores les recuerdan a algunos estudiantes la manera de nombrar los cuadrantes porque no lo tienen presente. Algunos estudiantes no se dan cuenta de porque la nube de puntos sólo se ubica en el primer cuadrante, mientras que, la gráfica de la expresión algebraica $y=x(10-x)$ también pasa por el tercer y cuarto cuadrante. Algunos estudiantes justifican que la nube de puntos pasa por el primer cuadrante porque el valor de la

- perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto base de su rectángulo?
- ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40?
 - Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo?
 - ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n ?

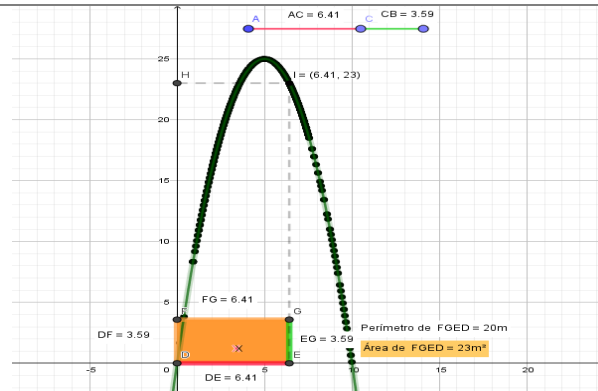


Figura 4. Imagen del archivo GeoGebra Act4.ggb.

base y el área de los rectángulos son positivas, en el problema no se pueden interpretar valores negativos para la base y área de los rectángulos.

Respecto a las preguntas c y d, los estudiantes logran encontrar de manera rápida la expresión general en su forma factorizada o estándar. Los estudiantes relacionan que en la expresión factorizada un factor es x y el otro es el valor de semiperímetro menos x . En el caso de la expresión estándar corresponde al semiperímetro por la base menos la base al cuadrado. Un grupo de estudiantes logran determinar que en el vértice se ubica el rectángulo de mayor área y determinan que es un cuadrado.

Un grupo de estudiantes realizaron la discusión con la profesora, pero no escribieron sus respuestas en la hoja de trabajo. Tampoco logran abordar la respuesta a la pregunta e.

Referencias

- Fandiño Pinilla, M., y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro: aspectos conceptuales y didácticos*. Cooperativa editorial magisterio.
- Aya Corredor, O., Echeverry Gaitán, A., y Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia*, 12(1), 139-1

Anexo 3. Registro de observación del segundo grupo de FPM

FPM C

Sesión 1/3H		Santiago de Cali, 21 de noviembre 2022	
Actividad 1/ completa		Actividad 2/ completa parcialmente	
Dificultades	Experiencia	Rediseño	
• Lo inherente al error que puede haber en la medida y el corte de la malla de 20m. • Lo inherente a la aproximación decimal del software de GeoGebra ya que no permite llegar a la mayor área de la familia de rectángulos que coincide con el cuadrado de perímetro fijo 20m.	• Los estudiantes convierten las unidades (m) en unidades más pequeñas con dificultad. [Requieren intervención del docente] • Los estudiantes presentan confusiones entre el lado del rectángulo y el perímetro de este. • Los estudiantes reconocen que contando las unidades cuadradas inscritas en el rectángulo se puede determinar el terreno abarcado en el mismo. • Los estudiantes no tienen clara la definición de rectángulo y no logran ver que el cuadrado es un caso particular del rectángulo. • La exploración con el archivo GeoGebra potencializa la exploración de la familia de rectángulos con perímetro fijo 20m. • Los estudiantes pueden expresar las respuestas a las preguntas del taller correctamente, sin embargo, a la hora de escribirlas se dificulta un poco.	• (Pro) presentar papel milimétrico contribuye a que los estudiantes asocien lo que abarca el terreno de determinado cerco con las unidades cuadradas inscritas en el mismo cerco. • (Pro) Los materiales propuestos para la primera actividad (Tablero con hoja milimétrica, chinchas de cuello largo e hilo de colores) son oportunos para lograr desarrollar las preguntas propuestas. • Se podrían agregar preguntas auxiliares del profesor con el fin de llevar un registro y guiar al estudiante a preguntarse por cosas como la definición de los rectángulos. • La actividad de tabulación no es aprovechada en el sentido que los valores requeridos son generados por el archivo de GeoGebra automáticamente y se convierte en una actividad de rellenar cuadros.	

Sesión 2/3H		Santiago de Cali, 29 de noviembre 2022	
Actividad 3/ completa		Actividad 4/ completa	
Dificultades	Experiencia	Rediseño	
- Los estudiantes no tienen claras las definiciones del rectángulo y por tanto no establecen una relación entre el rectángulo y el cuadrado. - Los estudiantes tuvieron dificultades en resolver las actividades b y c en la actividad 2.	- Los estudiantes recuerdan y reconocen los elementos que hay en las fórmulas generales de área y perímetro. (para hallar generalización) - Los estudiantes entienden que las unidades lineales se multiplican y adquieren un carácter espacial. 2D - Los estudiantes en la actividad de tabular reconocen que las áreas rectangulares se pueden construir con decimales. - En particular los estudiantes no encontraron regularidades en con la tabla de valores, sin embargo, si usaron esos valores para comprobar la expresión general. - En general, los estudiantes (con ayuda de los docentes) lograron llegar a la generalización por distintos caminos. (Idea) Cuestionar a los estudiantes las razones por las que ellos dicen que un cuadrado no es un rectángulo. (Idea) construir la definición de rectángulo a partir de las ideas que tienen los estudiantes. (Nota) Se notó que algunos estudiantes intentaron explicar a sus demás compañeros, haciendo la labor de profesor en cada mesa.	- Hacer énfasis en la definición de rectángulo (se podría hacer en la actividad introductoria) - Mejorar redacción o modificar la instrucción en la actividad b y c de la actividad 2. (¿Por qué se dio esta situación?) - Ingresar las fórmulas generales en el archivo GeoGebra para visualizarlas cuando sea necesario, perímetro fijo n metros y 40m.	

FPM V

Observaciones – Implementación I.

Descripción general:

El día 21 de noviembre del 2022, siendo las 7:40 de la mañana se da inicio a la primera implementación. El lugar donde se desarrolla la actividad corresponde al laboratorio de matemáticas de la institución educativa escuela Normal Superior Farallones de Cali, se cuenta con un total de 16 estudiantes aproximadamente y 3 profesores en formación que guiaran la actividad, los estudiantes se organizaron en grupos de 6 y 5 personas, para ello cada profesor en formación se encargó de un grupo y uno de los profesores tomaba la vocería en los momentos de socialización con los demás grupos. En el diseño de la actividad se tenía como objetivo abarcar por completo el punto 1 y 2 de la propuesta de trabajo diseñada, se logró trabajar el punto 1 y parcialmente el punto 2 de la propuesta inicial. La actividad finaliza siendo las 10:00 de la mañana, culminando la sesión e indicando su continuidad para el día 29 de noviembre del 2022.

Observaciones del punto 1 de la actividad:

El grupo en el que se trabajó corresponde a 5 estudiantes del ciclo de formación de la institución educativa escuela Normal Superior Farallones de Cali. Dentro del grupo se forman 2 subgrupos de dos y tres estudiantes, para dar comienzo a la actividad se les entrega una copia con las indicaciones que se deben seguir para iniciar con la primera parte de la actividad, en este grupo se hace entrega de dos copias por los dos subgrupos que se formaron.

En la primera actividad se hace uso de un tablero diseñado por los profesores en formación, en el que consta como base una hoja milimétrica, 4 chinchas e hilo de lana. En la actividad se les pide a los estudiantes que construyan diferentes cercos rectangulares con 20 metros de malla para delimitar la huerta. Cuando inician con la elaboración de los posibles cercos, se confunden con las indicaciones y realizan las siguientes acciones.

- Los estudiantes creen que el cerco debe tener 20 metros en cada lado del cerco rectangular.
- Los estudiantes toman el hilo y haciendo uso de su brazo miden aproximadamente un metro y tratan de repetirlo 20 veces para trabajar literalmente con los 20 metros.
- Los estudiantes piensan que como es un caso hipotético, la medida de los 20 metros no es importante y hacen uso de otra medida diferente.
- Los estudiantes hacen uso de los 20m hipotéticos en la construcción de los rectángulos, con la particularidad de tomar 10m en un lado y 10m en otro y si, hicieran uso de los 20 metros dentro de la construcción del cerco.

Luego de intentar comprender como se realiza la actividad se procede a realizar aclaraciones sobre las dudas que se están presentando, a partir de la intervención los estudiantes hacen una escala tomando los 20m como 20 cm y por medio del tablero con la hoja milimétrica, los chiches y el hilo realizan los diseños y los dibujan los cercos con lápiz y colores directamente en la table, llegan a un total de 4 posibles cercos rectangulares, no considera el cerco de 5 cm de lado, ya que forma un cuadrado y esta figura no corresponde a un rectángulo (afirma el grupo de estudiantes).

La dificultad que prima en ese momento de la actividad es el desconocimiento de las propiedades de las figuras geométricas, tiene arraigado una representación figural del rectángulo enmarcándolo con un diseño en particular dejando por fuera el cuadrado que también hace parte de las figuras rectangulares. Esto se debe porque desde los primeros años escolares se maneja una representación particular de los rectángulos haciendo que

esta significación se evidencie hasta grado superiores, la diferenciación de atributos y las propiedades del objeto en cuestión no es clara para el estudiante.

La segunda parte del punto 1, se les pregunta a los estudiantes sobre cuál de los cercos que encontraron abarca más terreno, varios integrantes del grupo acordaron que la pregunta no tenía sentido puesto que se hace uso de 20 metros de malla para todos los diseños, por lo tanto, cambia la forma de los cercos rectangulares pero el terreno sería lo mismo. Uno de los estudiantes con base a los dibujos que plasmo directamente en la tabla, se ayuda con la hoja milimétrica y cuenta la cantidad de cuadros que encierra cada cerco rectangular y el mismo estudiante les explica a sus demás compañeras que si existe un cerco que ayuda abarcar más terreno. Esta acción que realiza el estudiante sorprende, ya que el mismo realiza este procedimiento para encontrar la respuesta, pues evidencia que un cerco de 9 cuadros de ancho con un cuadro de largo abarca en total 9 cuadros y el cerco de 6 cuadros de ancho con 4 cuadros de largo abarca en total 24 cuadros, lo cual hace esta relación para todos llegando así a la respuesta y dando un indicio de la relación de área ya que en las demás figuras no cuenta la cantidad de cuadros si no que procede a multiplicar la base con la altura de los cercos rectangulares.

La dificultad que prima en este segundo momento es la poca claridad de los conceptos de área y perímetro de las figuras geométricas, en un inicio los estudiantes consideran que existe una relación de igualdad entre estos dos conceptos, por eso llegan a esas primeras afirmaciones de indicar que las figuras ocupan el mismo terreno. A los estudiantes les cuesta en su gran mayoría establecer atributos dentro de las figuras para medir y establecer las propiedades de área y perímetro.

Para culminar con la última actividad, los estudiantes tienen claridad para determinar el rectángulo que abarca más terreno a partir del conteo de los cuadros que encierra la malla y haciendo uso de la fórmula del área para llegar a la respuesta. Los estudiantes que hace parte del grupo exponen las acciones en la socialización con los demás grupos del curso, indicando los pasos que realizaron para realizar cada uno de los puntos, dando a conocer sus equivocaciones, sus retroalimentaciones y los saberes aprendidos en ese punto de la actividad.

Observaciones del punto 2 de la actividad:

Para dar paso a la segunda actividad del trabajo propuesto, se hace uso de computadores para realizar la actividad en cada uno de los computadores se ha dejado los puntos del taller en la plataforma de GeoGebra, como procede a dar a cada grupo dos computares para que exploren la construcción en GeoGebra y puedan responder las preguntas que se les hace en relación con la exploración.

La actividad que está construida en GeoGebra corresponde a la construcción del primer punto, en el cual ellos pueden observar a partir del arrastre los diferentes cercos que pueden encontrar en la situación, visualizando la medida de cada lado, el perímetro que tiene y las diferentes áreas que ocupa con relación a su figura.

En el momento de realizar la exploración, no lograron vincular la actividad anterior con la actividad que están realizando en este segundo punto, ya que el estudiante en un primer momento realizó la actividad haciendo uso de números enteros, en GeoGebra visualizaron que la representación indicaba tanto números enteros como también decimales y por esa razón no logran vincular los avances que tuvieron en la primera actividad, algunas de las particularidades que se presentaron en la actividad fueron las siguientes:

- Los estudiantes buscan la multiplicación de dos números cuyo resultado fuera 20 ejemplo: 8×2.5 , entonces concluían que otro posible cerco es aquel que tenga 8m de largo y 2.5 m de ancho.

- Los estudiantes buscaban los lados de manera aleatoria y manual, para luego pasar a verificar en el programa si cumplía o no con lo requerido.
- Los estudiantes hacían uso de la representación computacional que les presentaba el programa, pero se remitían a verificar de manera escrita si los valores que se evidenciaba ahí correspondían a la situación.

Para culminar sobre este punto, los estudiantes terminan realizando los procedimientos de manera manual y hacen uso del programa para verificar sus respuestas.

Los estudiantes no logran vincular las diferentes representaciones en estos dos contextos, al pasar de trabajar en un campo manipulativo a un campo computacional, los conceptos o nociones que logran establecer en un primer momento no los vinculan, haciendo que vean el ejercicio como uno nuevo y estableciendo otros mecanismos para poder llegar a la solución. La vinculación de las diferentes representaciones semióticas que puede abarcar un concepto matemático causa dificultad en los estudiantes porque tienden a asumir cada representación por individual y como consecuencia se tiende a pensar que, por tener un concepto visto, los estudiantes pueden asimilarlo sin problema.

Para la segunda parte de la actividad, se les pide observar los cambios cuando deslizan el punto C, para observar los diferentes tipos de rectángulos que se forma e indicar cuál de las figuras vistas abarca más terreno. Para esta actividad se vuelve y se presenta la misma complicación que el primer punto, los estudiantes no llegan a establecer el rectángulo que más abarca terreno, porque su figura corresponde a un cuadrado y por ello seleccionan y tienen en cuenta valores muy cercanos a él, para no tomar el cuadrado como la respuesta final.

Existe esa gran dificultad para poder asimilar la relación del cuadrado con el rectángulo, pues para ellos corresponde a dos figuras geométricas muy distintas y aunque se les indique la definición es complejo para los estudiantes asimilarlo, esto se debe a que son muchos años escolares en los que los estudiantes tienen esas nociones arraigadas, por esa razón es muy recurrente encontrar estudiantes que piensen de esta manera.

Para la actividad siguiente, se busca que los estudiantes a partir de la tabla completen e indiquen los valores que corresponde encada uno de los ítems, con la finalidad de hacer más explícitos los cambios que ocurren cuando cambia de rectángulo, en esta actividad no tuvieron complicaciones, pero al pasar al último punto donde se les pide dar la expresión general para el área con el perímetro 20 fijo, es donde los estudiantes se frenaron y que era para ellos algo totalmente nuevo. Algunos de los estudiantes escribieron la ecuación general del área de los rectángulos, otros simplemente abordaron un rectángulo particular y en explicaron la relación del área y el perímetro, hubo muchas dificultades para saber cómo elaborar este punto en particular. Por razones de tiempo se procede a finalizar la actividad siendo la 10:00am y se deja la actividad para la próxima sesión en donde se culmina este punto y se busca terminar los demás puntos restantes de la actividad diseñada.

Observaciones – Implementación II.

Descripción general:

El día 29 de noviembre del 2022, siendo las 7:30 de la mañana se da inicio a la segunda implementación. El lugar donde se desarrolla la actividad corresponde al laboratorio de matemáticas de la institución educativa escuela Normal Superior Farallones de Cali, los 3 profesores en formación guiarán la actividad y se continúa el trabajo con los mismos grupos que se trabajó en la primera implementación, los estudiantes que no lograron participar en la primera implementación y llegaron a la segunda, se organizó en un grupo aparte de los 3 grupos iniciales

y la profesora María Fernanda se encargó de orientarlos en el trabajo que se desarrolló en la implementación I. Se toma esta decisión ya que los nuevos estudiantes estaban descontextualizados del tema que se estaba trabajando en un comienzo. La actividad finaliza siendo las 9:45 de la mañana aproximadamente, culminando la sesión de la actividad propuesta.

Observaciones de la continuación del punto 2 de la actividad:

El grupo está conformado por 4 estudiantes, el cual deciden trabajar dentro del mismo grupo en parejas. Para la continuación del punto 2 de la actividad, que corresponde a dar la expresión general del área con perímetro fijo de 20 metros, los estudiantes no logran asimilar que significa “expresión general”

- Los estudiantes asumen el término a una operación adicional.

El docente interviene para que logren hacer una mejor precisión del término y comprendan que es lo que se está solicitando para poder culminar con el último punto de la sesión. Para ello se hace uso de la tabla y de la exploración de la gráfica en GeoGebra (se retoma para recordar conceptos y nociones abarcadas en la implementación I). Los estudiantes encuentran la relación que existe en dos lados del rectángulo (base y altura), cuya suma es igual a 10m, se parte de esa relación para que los estudiantes puedan llegar a encontrar esa expresión general que se solicita en el punto.

La dificultad que prima en ese momento de la actividad es el desconocimiento del término “expresión general” lo que implica que el estudiante hace un esfuerzo cognitivo por comprender el significado de lo que se solicita. El estudiante sabe cómo realizar una operación, por ejemplo, para encontrar el área de un cuadrado, conoce que lados tomar para realizar la operación, pero no tiene una aprehensión del concepto y su significado (Se logra percibir un acto de memorización de fórmula sin conocimiento absoluto sobre lo que significa estos conceptos).

Se culmina el último punto de la actividad dos socializando la actividad con los demás grupos, en el que se logra evidenciar como existe la dificultad de aceptar el cuadrado como un rectángulo, en los demás grupos se evidencia que comparte también esa concepción.

Observaciones del punto 3 de la actividad:

Para la elaboración del tercer punto de la actividad, se inicia con la primera parte donde se les pide establecer las coordenadas del punto I, para ellos los estudiantes reconocen las coordenadas que tiene el punto I, adicional logran encontrar la relación que tiene esta coordenada con la situación ya que identifican los cambios que ocurren en su exploración y encuentran que la coordenada x corresponde a la base del rectángulo y la coordenada y corresponde al área, por esa razón expresan la coordenada I haciendo una generalización de dicho punto, también observan el movimiento que tiene este punto y todos manifiestan que su movimiento es ascendente y descendente en el plano.

Los estudiantes expresan de manera general la coordenada logrando identificar la relación de la coordenada con la situación lo cual no se esperaba a que llegaran a enunciar ese punto de esa manera, se esperaba por el contrario que tomaran un caso particular y escribieran la coordenada de ese punto.

Para la segunda y tercera parte de la actividad, fácilmente encuentran la coordenada que obtiene el rectángulo con mayor área y describen las características que tiene ese rectángulo en particular.

Hay una asimilación de nociones por parte del grupo de estudiantes, con relación a los puntos desarrollados en la actividad, pueden identificar que el cuadrado es un rectángulo, a partir de su definición establecen esa relación que tiene con el cuadrado y por consiguiente lograron asimilar que esta figura geométrica en particular es el que mejor terreno abarca.

Para la última actividad del punto 3 los estudiantes llegan a identificar los rectángulos que tiene el mismo área, esto lo hacen a través de la operación de multiplicación, proceden a multiplicar valores para encontrar el área, en un comienzo dan valores que se salen del problema, por ejemplo toman el rectángulo con base 6 y altura 4 y otro rectángulo con base 12 y altura 2, luego reflexiona sobre estos valores y se dan cuenta de su error, buscan entonces un par de números que se ajuste al problema, es decir que estos dos números sumados den 10 y consideran el primer caso, solo que para el segundo rectángulo toman de base 4 y altura 6.

Se evidencia en este punto que el estudiante resuelve la actividad considerando las operaciones matemáticas en este caso la multiplicación, para encontrar el área, como la multiplicación es una operación conmutativa en palabras de los estudiantes enuncian que (no importa el orden que se multiplique, siempre va a dar lo mismo). Con ello dan solución al punto sin recurrir a una exploración gráfica de la situación, pues solo se remitieron a los procedimientos algorítmicos de la multiplicación.

Observaciones del punto 4 de la actividad:

Para este punto de la actividad por cuestiones de tiempo los docentes trabajan en conjunto con los estudiantes para que ellos puedan culminar con la actividad. Para ello se explora la gráfica del punto 4 en GeoGebra. En un primer momento de la actividad se ingresa la expresión general que encontraron los estudiantes en el segundo punto, lo cual concuerda con la gráfica que arroja el programa de GeoGebra y con el visualizan que esta grafica corresponde a una parábola comprendiendo el movimiento que expresaron en el tercer punto (ascendente y descendente). Para la segunda parte, los estudiantes identifican que en el primer cuadrante del plano corresponde a números positivos en sus dos ejes, desconocen por qué solo se genera en ese cuadrante y junto con el docente descubren que su relación se debe a las magnitudes trabajadas en la situación.

En el tercer momento se pide establecer una expresión general para el área con perímetro de 40m fijo, en este punto los estudiantes vuelven a tener un poco de dudas cuando se les solicita la “expresión general”, se le ayuda a recordar los procedimientos que hicieron para encontrar la expresión general para la situación inicial y con ello una estudiante ve la relación de la mitad del perímetro enunciando correctamente la ecuación para este nuevo caso y justifica la respuesta indicando que ahora solo se debía cambiar el valor por la mitad como se hizo en un inicio, explicándolo de esta manera.

Expresión general, con perímetro 20 fijo: $A = (10-a) \cdot a$ (se usa la mitad del perímetro)

Expresión general, con perímetro 40 fijo: $A = (20-a) \cdot a$ (se usa la mitad del perímetro)

Cuando se comprende de esta manera logran todos encontrar esa relación y así pueden desarrollar con mayor claridad el punto realizando los mismos pasos que hicieron en un primer momento. Como ya tienen la concepción que el cuadrado es la figura geométrica que mejor terreno abarca, encontraron las dimensiones del nuevo cuadrado con perímetro de 40m, sin mayor problema.

Para realizar los últimos puntos donde ahora el perímetro es n , los estudiantes realizaron una comprensión muy general del problema, es decir, como es n perímetros puede ser cualquier valor y así mismo su mitad es cambiarlo por otro valor, pero luego a partir del análisis anterior llegaron a la conclusión que era realizar el mismo procedimiento y con ello realizaron el mismo análisis, desarrollaron el punto de la misma manera y encontraron los valores del cuadrado con perímetro n .

FPM S

Registro de la actividad 1 y 2 de la THA

Aspectos organizativos

El día 21 de noviembre de 2022, a las 7:30 a.m. se inicia la implementación de la THA, esta se dio de la siguiente manera: primeramente, se realizó una presentación de los tres profesores en formación inicial de la Universidad del Valle, los cuales están encargados de desarrollar la actividad con el curso de formación profesional (FPC) del colegio Normal Farallones de Cali, el cual contaba con aproximadamente 16 estudiantes. Después se procedió a hablar y entregar la primera actividad (actividad situacional) a desarrollar con los estudiantes. Para tal fin, el curso se dividió en tres grupos, aproximadamente de 5 integrantes por cada grupo. Los tres profesores encargados, eligieron un grupo, es decir, le correspondió un grupo a cada profesor en formación inicial. La actividad 1 con sus respectivos objetos materiales se entregó a cada grupo. Las preguntas o dudas que tuvieran los grupos eran respondidas o atendidas por el profesor a cargo. Finalizando la primera actividad se realiza una socialización con todo el curso, es decir, entre los tres grupos conformados.

Durante la implementación de la THA

Las dudas o preguntas que atendí, las narraré en el orden lineal de los sucesos. Pocos minutos después de entregada la actividad 1 con sus respectivos implementos, el grupo que me correspondió, me solicita para aclarar la siguiente cuestión, que tiene que ver con la longitud de la cuerda de 20 m (en este caso) que representaba la malla, la cual se compraría para encerrar una huerta de forma rectangular. Los estudiantes confundieron la longitud de 20 m que es el perímetro de la forma rectangular, con unos de sus lados, por ejemplo, en vez de formar rectángulos con lados de longitud 7 y 3 respectivamente, lo formaban con un lado de 20 cm (entiéndase que la escala es de metros a centímetros), y el otro si vario los hicieron de 15 cm, lo que se infiere de este error es que en un primer acercamiento el perímetro trae dificultad. El error lo traté de la siguiente manera: volví a la actividad situacional, y al ejemplo en concreto el de comprar una malla para encerrar un terreno en forma rectangular para una huerta, mencione que para este ejercicio la cuerda hacia el papel de malla y los 20 metros de 20 cm, entonces recalque que esos 20 cm de cuerda son los que se necesitan (esos cm no más ni menos) para delimitar la huerta en forma rectangular, por ende, al considerar un lado de 20 cm, ya no tenemos más cuerda para formar un rectángulo, pues tan solo alcanzo para formar un lado de este. Los estudiantes al parecer entendieron rápidamente esta cuestión.

La siguiente situación que se presentó fue con respecto al área, en esta los estudiantes relacionaron que el terreno es igual al área. Ellos hallaron el terreno más amplio aplicando la fórmula algebraica para el área del rectángulo ($A = b \cdot h$). Los estudiantes en la construcción de los distintos rectángulos no utilizaron medidas decimales, (acción que permitía hacer la hoja milimétrica) tan solo fueron medidas enteras. De esta manera ellos hallaron que se formaban cuatro rectángulos (sabían que eran ocho, sin embargo, mencionaban que el rectángulo por ejemplo de base 7 y altura 3 (horizontal) es el mismo que el de base 3 y altura 7). Los estudiantes no consideraron el rectángulo de lado 5, el cual es un cuadrado. Por ende, para ellos el cuadrado no es un rectángulo, son figuras geométricas diferentes.

Más adelante, en la socialización que se hizo con los tres grupos de la primera actividad, algunos estudiantes mencionaron que para hallar el terreno más amplio contaron los cuadritos, cuestión que permitía la hoja milimétrica. Además, con las participaciones de los estudiantes en esta sección de la clase, se infiere que en las actividades en la que convergen dos conceptos que son cercanos como el perímetro y el área, esta es una convergencia no obvia para el estudiante, debido a la fragmentación que se tiene de los contenidos matemáticos (primeramente, el perímetro y después el área, o viceversa). El hecho de que estos dos conceptos se reúnan en una sola actividad causa una sensación de confusión e interés para los estudiantes, pues, un comentario final de un estudiante fue: ¿Por qué si consideramos un perímetro fijo (20 m) el área cambia? Cuestión que se resolverá con ayuda de las siguientes dos actividades (3 y 4). Por último, cabe mencionar que la actividad 2, la cual pasaba de la acción manipulativa al registro computacional (actividad en GeoGebra), se presentó faltando 30 minutos para la culminación de la clase. De tal manera tanto la socialización nivel grupal como la general (con todo el curso) no se dio. La actividad 2, específicamente su socialización, quedó pendiente para retomar en la próxima clase, junto con la actividad 3 y 4.

Registro de la actividad 3 y 4 de la THA

Aspectos organizativos

El martes 29 de noviembre se desarrolló la segunda implementación de la THA, en esta se realizaron las actividades 2, 3 y 4. La actividad 2, se retomó de la primera sesión de implementación, con el fin de desarrollar la socialización al curso. Los estudiantes fueron nuevamente el grupo de FPC del colegio La Normal Farallones de Cali, los cuales estuvieron en la primera sesión de la implementación. De nuevo, se dividen en tres grupos el curso y cada profesor practicante se encargó de un grupo. La socialización con todo el curso toma la misma dinámica, un profesor practicante se encarga de leer las preguntas de las actividades y cada grupo decide participar con sus respuestas.

Durante la implementación

Como en la primera sesión de la implementación (actividad 1 y parte de la 2), atendí algunas dudas, preguntas e inquietudes del grupo que me correspondió (el mismo en la primera implementación). Lo primero que se realizó en esta ocasión fue reanudar la actividad 2, específicamente la última pregunta, la cual trata sobre la expresión general del área respecto a la base del rectángulo en cuestión. Los estudiantes tuvieron 15 minutos para recordar o “echar un vistazo” a la actividad 2, pues, después de los 15 minutos se pasó a hacer la socialización con todo el curso. En esta actividad, los estudiantes con ayuda de los profesores practicantes llegaron a la expresión general requerida. Los caminos que eligieron en su mayoría fueron en el registro

algebraico, es decir, utilizaron las fórmulas de perímetro y área del rectángulo, para despejar en la del perímetro un lado del rectángulo y reemplazarlo en la del área. En la socialización, se mostró y explicó en el tablero un camino diferente, este fue a través del registro figural, específicamente, fue el segmento que correspondía al deslizador en GeoGebra de la actividad 2, el que brindaba un “camino” para llegar a la expresión general requerida. Los estudiantes al parecer entendieron y calificaron como más fácil el método “figural”.

Después, se pasa a la actividad 3 de la THA, para esto se decide seguir en la misma dinámica, es decir, se facilita la hoja de taller de la actividad 3 y el archivo en GeoGebra de la actividad. Nuevamente se da un tiempo prudente (30 minutos) a los grupos para la exploración y solución de la actividad. Durante este tiempo ellos pueden socializar con cada profesor practicante. Lo significativo en este lapso se da en la socialización con el curso (en general), precisamente es en la pregunta: ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? Un grupo de estudiantes responden que precisamente el rectángulo de mayor área es un cuadrado, cuestión que en la primera sesión de implementación se dificultó. Los estudiantes en un principio no relacionaban el rectángulo con el cuadrado, para ellos, son figuras totalmente diferentes. Lo interesante del grupo de estudiantes es que reconocieron que el cuadrado es precisamente un caso particular de un rectángulo mediante sus características, como lo son: cuatro ángulos de 90 grados y cuatro lados, los cuales son paralelos dos a dos. De esta manera, reconocieron que el cuadrado cumple con estas características que son las mismas que la del rectángulo, con tan solo una pequeña diferencia, que los lados no paralelos (perpendiculares) son iguales, así todos sus lados son iguales.

Como la socialización fue con todo el curso, así los otros grupos atendieron y entendieron que las dos figuras están relacionadas y que una es un caso particular de la otra. Por otro lado, durante esta actividad en a pregunta: ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? también, los estudiantes reconocieron que la ecuación o expresión general encontrada en la actividad 2, correspondía a una curva en específico, la cual es una función cuadrática. Ellos lo expresan mediante expresiones como: “es una U al revés” o “dibujan” con su dedo una curva que sube y baja.

La actividad 4 por cuestiones de tiempo (quedaban tan solo 15 minutos para terminar la clase), se llegó a la decisión de que cada profesor practicante se encargará de resolver la actividad con el grupo que le correspondió, es decir, no se hizo socialización general.

En el desarrollo de la actividad 4, los estudiantes mostraron mejor “soltura” sobre lo que se preguntaba. Esta actividad buscaba la formalidad de la THA, ya no se tenía en cuenta un perímetro fijo 20 m, si no uno diferente 40 m para después generalizar a un rectángulo con n metros de perímetro. Los estudiantes, lograron identificar los patrones numéricos que involucraba las relaciones entre el área y el perímetro y llegaron a solucionar la actividad sin mayor dificultad.

Anexo 4. Primer nivel de análisis

Primer grupo de FPM

En primer lugar, se describen los cambios de los artefactos de la THA0 y luego se comparan los cambios en la THA0 por cada uno de los niveles de actividad en la THA1 y THA2 tanto en la primera y segunda planificación de una lección.

Artefactos

En la THA0, los FPM sugirieron entregar a los estudiantes una cuerda amarrada en sus extremos que al doblar a la mitad su longitud sea de 10 cm. Se propone medir regla la longitud de la cuerda con una escala de 1 cm=1m. Los FPM en la THA1 sugirieron entregar una madeja completa de piola, un tablero de cartón (15cmx15cm) con fondo cuadriculado, cintas métricas, chinchas de cabeza y cinta pegante (Figura 1). En la THA2 los FPM decidieron usar los mismos materiales, pero modificaron las descripciones de uso de estos artefactos en la hoja de trabajo para los estudiantes.

En cuanto al uso de GeoGebra en la THA1 los FPM agregaron imágenes de fondo y color para extender el contexto de la finca (Figura 2). En la THA2, los FPM fijaron las imágenes, cambiaron el color de fondo, aumentaron el tamaño de la letra y engrosaron el contorno de la huerta (Figura 3).

Figura 1.

Artefactos físicos de la THA0 (izquierda) y THA1 – THA2 (derecha) del primer grupo de FPM

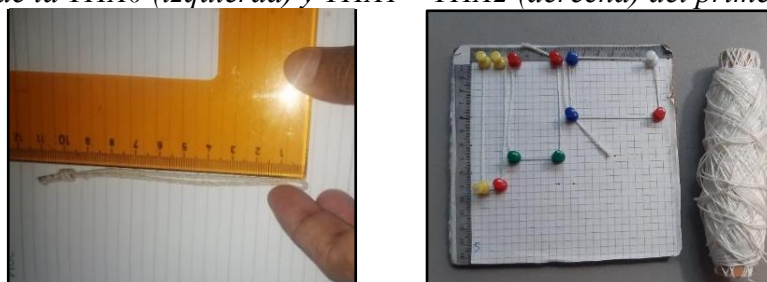
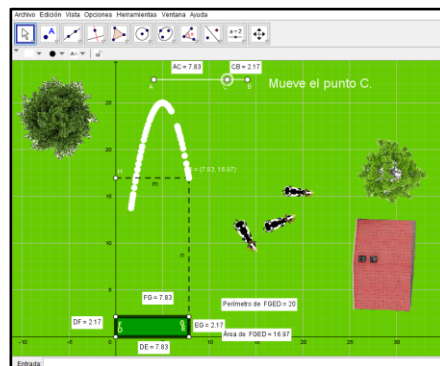


Figura 2.

Fondo de GeoGebra de la THA0 (izquierda) y THA1 (derecha) del primer grupo de FPM

**Figura 3.**

Cambios de los archivos GeoGebra en THA2 del primer grupo de FPM



En la hoja de trabajo, los FPM decidieron agregar líneas para las respuestas (Figura 5) en la THA1 y cuadros en blanco en la THA2 (Figura 6). En la THA los FPM especificaron en la hoja de trabajo que los estudiantes pueden hacer las representaciones de los rectángulos en el tablero de cartón. Los FPM agregaron números para generar lista de preguntas.

Cambios en los niveles de actividad de la THA0 del primer grupo de FPM

Se muestran figuras de cada uno de los niveles de actividad de la THA0, THA1 y THA2. Los cambios en la THA0 (THA1 y THA2) son subrayados en gris en cada una de las figuras.

AA1

Se presenta la actividad situacional de la THA0 en la Figura 4 y los cambios de esta actividad propuestos en la THA1 (Figura 5).

Figura 4.

AA1 de la THA0

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se usa una cuerda amarrada en sus extremos para simular el cerco rectangular (Figura 1). Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales.



Figura 1 - Cuerda sujeta en los extremos

Los cambios propuestos por los FPM en la actividad situacional (AA1) de la THA1 se relacionaron con precisar la forma de los cercos, mencionaron que el cerco se encuentra en una finca, agregaron un archivo en GeoGebra con la vista panorámica de la finca, descripción del uso de los artefactos para hacer el cerco con la cuerda y mencionaron dos posibles dificultades relacionadas con el uso de la escala y con reconocer que un cuadrado es un rectángulo (Figura 5).

Figura 5.

AA1 de la THA1 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1: Se usa como herramienta una cuerda, sujeta en sus extremos, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usa chinchas sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb).  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco con mayor área. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Es posible que descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.

En la AA1 de la THA los FPM modificaron la redacción del uso de los materiales para simular los cercos con la cuerda, especifican la relación de la longitud de la cuerda con el concepto de perímetro del rectángulo, se reconoce la variación del área al delimitar una superficie con una cuerda, eliminan el archivo GeoGebra sólo dejan una imagen y hacen explícito los procedimientos para hallar el área y el perímetro de los rectángulos (Figura 6).

Figura 6.

AA1 de la THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se usa como herramienta una cuerda de tamaño 20 cm, sujeta en sus extremos por medio de una cinta, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinches sobre un cartón. El cartón tiene de fondo una hoja cuadriculada y en sus bordes una cinta métrica, para facilitar la medida de longitud de la cuerda y de los lados del rectángulo. En esta actividad los estudiantes determinan que es posible hallar diferentes rectángulos con una cuerda de longitud fija. 1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros.  1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son algunos de los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Elabora estos cercos usando una cuerda, dibújalos en el cartón y determine los valores de los lados de cada rectángulo. 1.2. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo para encontrar el cerco que tiene mayor área, porque los estudiantes requieren asociar la longitud de la cuerda con el perímetro de un rectángulo y determinar que los rectángulos abarcan diferentes superficies, es decir que sus áreas pueden ser diferentes. Se espera que los estudiantes den como ejemplos rectángulos cuyos lados sean de medida un número natural. En el proceso de hallar el área de los rectángulos, los estudiantes podrán usar la fórmula (la multiplicación de la base por la altura) o la cuadrícula del cartón (contar cuadrados), donde se dibujan los rectángulos. Dado que los valores de los lados son números naturales se espera que realicen cálculos a mano. Es posible que los estudiantes descarten en su respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que los estudiantes simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.

AA2

En la Figura 7 se presenta la actividad situacional (AA2) de la THA0 y en la Figura 8 los cambios propuestos por FPM en la THA1. Los FPM sugirieron hacer explícita la indicación de abrir el archivo en GeoGebra en la hoja de trabajo y agregaron dos preguntas relacionadas con cómo hallar el perímetro y el área de los rectángulos.

Figura 7.

AA2 de la THA0 del primer grupo de FPM

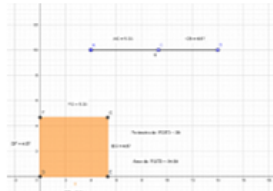
Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA2 Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro (Figura 2). Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperímetros. Determine 2 rectángulos con perímetro igual a 20 diferentes a los que encontró en la primera actividad. Observe los valores del área cuando se mueve el punto C. ¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área? ¿Cuáles son sus medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad? ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base? 	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

Figura 2.- Archivo en GeoGebra con la construcción de rectángulos con perímetro fijo.

Figura 8.

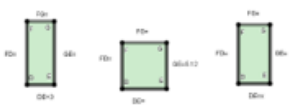
AA2 de la THA1 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA2: La herramienta que se usa es un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro. 2. Familia de rectángulos con igual perímetro. Observe los posibles cercos rectangulares cuando se mueve el punto C (abra el archivo 2.ggb). 2.1. Determine 2 cercos rectangulares con perímetro igual a 20, que sean diferentes a los que encontró en la primera actividad. 2.2. ¿Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son sus medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad? 2.3. ¿Qué es el perímetro de un rectángulo? ¿Cómo se halla el perímetro de un rectángulo? ¿Qué es el área de un rectángulo? ¿Cómo se halla el área de un rectángulo? 2.4. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?	Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar cual tiene mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

En la Figura 9 se presenta los cambios que realizaron los FPM a la THA2, eliminaron algunas preguntas como la relacionada con hacer explícito el procedimiento para hallar el perímetro y el área. Los FPM cambiaron la redacción de las preguntas y el nombre de los archivos GeoGebra. Los FPM modificaron la pregunta 2.1 al agregar una tabla con valores faltantes de área, perímetro y valores de los lados de los rectángulos. Los FPM crearon una nueva pregunta en la que colocan figuras con algunos valores de los lados para hallar el valor de los lados faltantes y calcular el área. En uno de estos rectángulos un lado vale x , se espera que los estudiantes generalicen el valor de los otros lados para hallar la expresión general del área como el producto de los lados del rectángulo.

Figura 9.

AA2 de la THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:																			
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.																			
Actividad de aprendizaje		Proceso de aprendizaje hipotético																	
AA2 La herramienta que se usa es un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro de los rectángulos. En esta actividad los estudiantes requieren reconocer que el perímetro de los rectángulos es fijo, mientras que el valor del área varía. Familia de rectángulos. Abra el archivo familiarectangulos.ggb mueva el punto C y observa los posibles cercos rectangulares. 2.1. Determine algunos posibles cercos rectangulares, completa la siguiente tabla:		Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar cual tiene mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro teniendo presente la fórmula del área para los rectángulos.																	
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Lado DE</th><th>Lado EF</th><th>Perímetro DEEF</th><th>Área DEEF</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5</td><td>5</td><td></td><td>25</td></tr> <tr> <td>4,75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td>5,25</td><td>20</td><td></td></tr> </tbody> </table>		Lado DE	Lado EF	Perímetro DEEF	Área DEEF	5	5		25	4,75					5,25	20			
Lado DE	Lado EF	Perímetro DEEF	Área DEEF																
5	5		25																
4,75																			
	5,25	20																	
2.2. ¿Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son las medidas de los lados de ese rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad? Justifica tu respuesta.																			
2.3. Determine el valor de los lados de los siguientes rectángulos con perímetro 20.																			
																			
2.4. Si el perímetro de los rectángulos es 20, ¿cuál es la fórmula para hallar el área de esta familia de rectángulos?																			

AA3

En la Figura 10 se presenta la actividad general (AA3) de la THA0 y en la Figura 11 los cambios propuestos por FPM en la THA1. En los cambios en AA3, los FPM sugirieron hacer explícita la indicación de abrir el archivo en GeoGebra en la hoja de trabajo, cambiaron la redacción respecto al uso del archivo GeoGebra y presentaron una dificultad de relacionar las coordenadas del punto I.

Figura 10.

AA3 de la THA0 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA3 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la traza del punto I que relaciona la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada). Análisis de la traza del punto I. Observe el punto I, mueva el punto C ¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de menor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo con menor área? Determine un par de rectángulos con igual área, ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?	Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos.

Figura 11.

AA3 de la THA1 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA3: La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega lo traza del punto I que relaciona la base vs área del rectángulo. 3. Análisis de la traza del punto I. Observe el punto I, mueva el punto C (abra el archivo 3.ggb). 3.1. ¿Cuáles son los valores de las coordenadas del punto I? 3.2. ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? 3.3. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? 3.4. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? 3.5. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de menor área? 3.6. ¿Cuáles son las características del rectángulo con menor área? 3.7. Determine un par de rectángulos con igual área, ¿cuáles son las características de estos rectángulos?	Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos. Es posible que no relacionen los valores de las coordenadas con la base y el área del rectángulo.

En la actividad general de la THA2 (Figura 12), la pregunta 3.1 de la THA1 se divide en dos preguntas la 3.1 y 3.2. En la pregunta 3.1 los FPM agregaron una tabla para encontrar algunos valores del punto I y en la pregunta 3.2 pretendieron encontrar la relación de las coordenadas del punto I con los valores de los rectángulos. Los FPM eliminaron algunas preguntas relacionadas con las características de los rectángulos cuando el área se hace mínima o cuando tienen igual área. Los FPM cambiaron el término trayectoria por huella. En la descripción del programa GeoGebra detallaron lo que esperan que los estudiantes relacionen del punto I y los valores del rectángulo. En el proceso de aprendizaje hipotético relacionaron la forma de la parábola con objetos físicos, ratifican que el valor máximo del área es cuando el rectángulo es cuadrado y establecen la relación del movimiento del punto C con los cambios del área de los rectángulos.

Figura 12.

AA3 de la THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

AA3

La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega la traza del punto I que relaciona la base frente al área del rectángulo.

En esta actividad los estudiantes relacionarán las coordenadas del punto I, con un lado del rectángulo y el área. Y analizarán la traza del punto I, para hallar la respuesta al problema.

3. La traza del punto I.

Abra el archivo traza.ggb, mueve el punto C, observe el punto I.

3.1. Si el punto I tiene coordenadas (x, y) , determine algunos de sus valores:

x	3		7			2,84
y		28		17,6	14,8	

3.2. Acorde a los valores de los rectángulos, ¿qué representan las coordenadas del punto I = (x, y) ?

3.3. ¿Cómo es la huella del punto I cuando se mueve el punto C?

3.4. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área?

Proceso de aprendizaje hipotético

Los estudiantes analizan la traza del punto I, que es un conjunto de puntos que tiene como coordenadas (base, área).

Los estudiantes pueden relacionar la traza del punto I con una forma conocida, por ejemplo, una montaña o una u invertida, o determinar que es una parábola o la gráfica de una función cuadrática.

Los estudiantes pueden ratificar o encontrar que la solución al problema está en construir un cuadrado de lado 5 metros y que el punto I se encuentra en el punto máximo de la parábola, que en este caso es el vértice.

Los estudiantes pueden darse cuenta de que el área aumenta cuando C se mueve de A hacia el punto medio del segmento AB, y que disminuye cuando C pasa el punto medio de segmento AB y se mueve hacia B.

AA4

En la Figura 13 se presenta la actividad formal (AA4) de la THA0 y en la Figura 14 los cambios propuestos por FPM en la THA1. Los cambios en AA4 en la THA1 fueron agregar una pregunta de una familia de rectángulos con perímetro fijo 64, ajustes de redacción en el nombre de la actividad y hacen explícita la necesidad de generalización de la expresión del área para rectángulos con igual perímetro.

Figura 13.

AA4 de la THA0 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA4 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos. Realicemos la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base y compárela con la trayectoria del punto I. ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano? Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n?	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

Figura 14.

AA4 de la THA1 del primer grupo de FPM

4. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos de igual perímetro. Ingresar la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos de igual perímetro, en la parte de abajo, en entrada. 4.1. Compara la traza del punto y la gráfica de la expresión algebraica ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano? 4.2. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? 4.3. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64? 4.4. Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n?	Actividad formal La herramienta es un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos.	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica y se espera que se generalice la expresión algebraica del área de los rectángulos con igual perímetro.
--	---	--

En la actividad formal de la THA2 los FPM agregaron el nombre del archivo y hacen explícito la expresión algebraica del área de los rectángulos con perímetro 20 (Figura 15).

Figura 15.

AA4 de la THA2 del primer grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA4 La herramienta es un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. 4. Gráfica del área frente a la base de los rectángulos de igual perímetro. Abra el archivo grafica.ggb, escriba $y=x(10-x)$ en la entrada. 4.1. Compara la traza del punto I y la gráfica de $y=x(10-x)$ ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano? 4.2. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? 4.3. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64? 4.4. Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base del rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo igual a n	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica y se espera que se generalice la expresión algebraica del área de los rectángulos con igual perímetro.

Primer análisis del segundo grupo de FPM

Se describieron los cambios en la THA1 y la THA2. Previo a los cambios en la THA2, los FPM realizaron una trayectoria real de aprendizaje en los que presentan las acciones, estrategias y dificultades de los grupos de estudiantes al realizar las AA en la primera implementación. La

trayectoria real de aprendizaje se construyó respecto a las observaciones escritas de los FPM luego de la implementación de las actividades de aprendizaje. En una reunión presencial entre los FPM y la investigadora se escribió la trayectoria real de aprendizaje acorde a las observaciones escritas de los FPM y respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo. En la escritura de la trayectoria real de aprendizaje se generaron acuerdos entre los FPM respecto a los aprendizajes reales de los estudiantes (aspectos en común y diferencias).

Artefactos

Los FPM en la THA1 y THA2 sugirieron simular el cerco con una cuerda y una tabla. Los FPM elaboraron una tabla en cartón (35 cm x 29 cm) con fondo milimétrico (29 cm x 20 cm) (Figura 16). La tabla es hecha de doble cartón para evitar que la punta del chinche traspase. La hoja milimétrica es fijada al tablero de cartón con cinta transparente. Para sostener la cuerda en la tabla usaron chinches de cuello largo. Sugirieron cuerdas de colores para diferenciar los rectángulos.

Figura 16.

Tablero de cartón con fondo milimétrico.



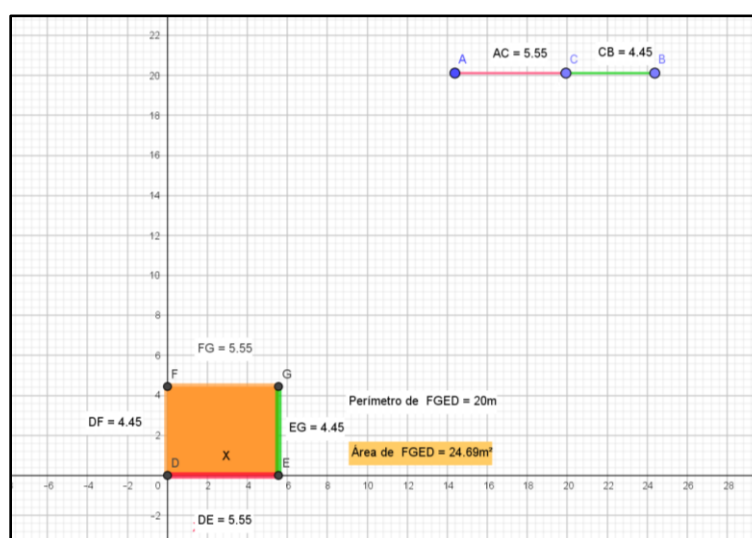
En cuanto al uso de GeoGebra los FPM, en la THA1 y THA2, realizaron algunos ajustes relacionados con el color y el grosor. Para relacionar el área del rectángulo con su medida, resaltaron el valor del área del mismo color que el rectángulo. Para relacionar los lados del

rectángulo y el deslizador (segmento AB) pintan de color rojo y verde los segmentos que se corresponden. Cambiaron el grosor de los lados del rectángulo y del deslizador (Figura 17).

En las hojas de trabajo los FPM listaron las preguntas con el uso de letras, dejan espacios en blanco para las respuestas y consideraron el uso adicional de hoja en blanco. Además, los FPM organizaron cada nivel de actividad en una hoja de trabajo independiente.

Figura 17.

Archivo GeoGebra de la THA1 y THA2 de la AA1



Cambios en los niveles de actividad de la THA0

Se muestran figuras de cada uno de los niveles de actividad de la THA1 y THA2. Los cambios en la THA1 respecto a la THA0 y los cambios THA2 respecto a la THA1 son resaltados en gris en la imagen.

AA1

En la AA1 de la THA1, los FPM subrayaron la palabra rectangular y cambian la descripción de los artefactos para elaborar el cerco. Tuvieron en cuenta el uso de la hoja milimétrica, los FPM consideraron posible que los estudiantes usaran números decimales en las

medidas de los lados del rectángulo. Agregaron una pregunta que intenta justificar cómo determinan el rectángulo que abarca mayor terreno (Figura 18).

Figura 18

AA1 de la THA1 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda amarrada en sus extremos para simular el cerco rectangular.	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención a los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales.
Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la lana de colores para realizar la actividad. Construya algunos rectángulos con los materiales dados y responda las siguientes preguntas:	Los estudiantes inicialmente trabajan con unidades enteras, sin embargo dado el recurso de los tableros construidos con hojas milimétricas se podría dar el caso que hagan uso de unidades decimales.
a. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. b. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno? c. ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?	

En el nivel de actividad situacional (AA1) de la THA2 los cambios propuestos por los FPM se concentraron en el proceso de aprendizaje hipotético (Figura 19). Los FPM reconocieron la necesidad de usar escalas, la dificultad de reconocer que un cuadrado es un rectángulo, la dificultad de diferenciar perímetro de área, la interpretación de determinar que la longitud de la malla corresponde al valor de un lado del cerco rectangular y la creencia de considerar que los rectángulos con igual perímetro tienen igual área. Los FPM agregaron la imagen del tablero de cartón y hoja milimétrica.

Figura 19.

AA1 en la THA2 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA1 Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda para simular el cerco rectangular (Figura 1).  Figura 1. Tablero con hoja milimetrada. Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la lana para realizar la actividad. Construya algunos rectángulos con los materiales dados y responda las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno? ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?	Los estudiantes activan sus conocimientos previos de área y perímetro de un rectángulo, para encontrar el cerco rectangular con mayor área y perímetro fijo. Los estudiantes pueden centrar su atención en los aspectos numéricos de cómo hallar el perímetro y área, descartando la relación de lo numérico con la figura. Se espera que en sus cálculos de perímetro y área se realicen a mano, usando números naturales. Los estudiantes inicialmente trabajan con unidades enteras, sin embargo dado el recurso de los tableros construidos con hojas milimétricas se podría dar el caso que hagan uso de unidades decimales. Los estudiantes requieren usar escala para usar la lana en el tablero, dado que no tienen suficiente lana para 20 metros y porque el tablero no permite la representación de dichos rectángulos. Es posible que los estudiantes no reconozcan que el cuadrado es un rectángulo y tampoco reconocen la diferencia entre perímetro y área. Es posible que interpreten que la medida de la lana es de un lado. Los estudiantes tienen definiciones erradas del rectángulo que excluye al cuadrado porque consideran que uno de los lados debe ser mayor que el otro, esto concuerda con lo que mencionan Aya et al. (2016): una de las dificultades asociadas al proceso deductivo radica en la escasa comprensión de la naturaleza y el papel de las definiciones, y en la dificultad para decir las condiciones suficientes y necesarias de las mismas. Si una definición personal del concepto no

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
	concuera con la definición del concepto, la posibilidad de tener éxito en la justificación se verá afectada. (p. 1) Sin embargo, al darles una nueva definición de rectángulo en la socialización y confrontarla con las características del cuadrado se acepta que el cuadrado es un rectángulo. Se llega a determinar que el cuadrado es el rectángulo de mayor área con perímetro 20. Como lo menciona Fandiño y D'Amore (2009) es posible que los estudiantes consideren que dos figuras isoperimétricas sean necesarias equiextensas.

AA2

En la AA2 de la THA1, agregaron la indicación de usar un archivo en GeoGebra, adicionaron una pregunta con una tabla para determinar los valores de los lados, área y perímetro de algunos rectángulos (Figura 20).

Figura 20.

AA2 de la THA1 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:

Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.

Actividad de aprendizaje

AA2

Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro.

Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperimétricos.

Haciendo uso del archivo GeoGebra (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas:

a. Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1.

b. Observa los valores del área cuando se mueve el punto C, ¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área?, ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo?

¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad?

c. En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo.

Base	Altura	Perímetro	Área

d. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?

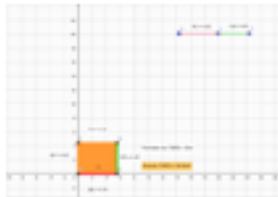
Proceso de aprendizaje hipotético

Los estudiantes relacionan el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro.

En la AA2 de la THA2 agregaron una pregunta posterior a la tabla de datos sobre base, altura, perímetro y área que busca relacionar la base respecto a la altura. Los FPM agregaron una figura, que es la imagen del archivo GeoGebra. Los FPM ampliaron los posibles errores y procedimientos de los estudiantes al resolver las preguntas (Figura 21).

Figura 21.

AA2 en la THA2 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:																					
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.																					
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético																				
AA2 Se usa un archivo en GeoGebra con la construcción de un rectángulo que cambia su tamaño al mover el punto C que se encuentra en el segmento AB, que mide 10 y representa la mitad del perímetro (Figura 2).  Figura 2. Imagen del archivo GeoGebra Act2.ggb. Exploración de la construcción de la familia de rectángulos inoperimétricos. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas: - Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1. - Observe los valores del área cuando se mueve el punto C. ¿Cuál rectángulo tiene mayor área? ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad? - En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo. <table border="1" data-bbox="467 1486 815 1633"> <thead> <tr> <th>Base</th> <th>Altura</th> <th>Perímetro</th> <th>Área</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	Base	Altura	Perímetro	Área																	Se espera que los estudiantes relacionen el segmento AC y CB, respecto a las medidas de la base y la altura del rectángulo. Ellos reconocen que al mover el punto C, el rectángulo cambia y se van obteniendo diferentes medidas de la base, altura y área. Estas medidas son números decimales y se pueden observar en una tabla o en los objetos de la construcción. Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar el rectángulo con mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro. La tabla de algunos valores de la base, altura, perímetro y área permite relacionar los cambios que ocurren entre la base, altura y área. Se espera que la tabla permita ser un puente para llegar a la expresión general. Se considera que la mayoría de los estudiantes determinan la expresión general de manera factorizada porque se asocia a la fórmula del área.
Base	Altura	Perímetro	Área																		

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.				
Actividad de aprendizaje				Proceso de aprendizaje hipotético
d. Respecto a la información tabla determine: (¿Cuál es la relación entre la base y la altura de los rectángulos?)				
e. ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?				

AA3

En la AA3 de la THA1 los FPM sólo agregaron la indicación de usar el archivo GeoGebra y separaron las preguntas con espacios y diferenciándolas con letras (Figura 22).

Figura 22.

AA3 en la THA1 del segundo grupo de FPM

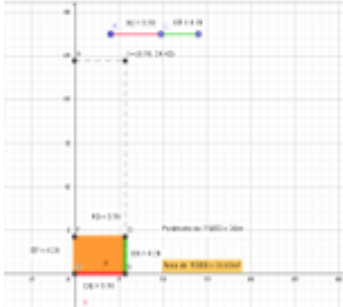
Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA3 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega lo traza del punto I que relaciona la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada). Análisis de la traza del punto I. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas: a. Observe el punto I, mueva el punto C ¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? b. ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? c. ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? d. Determine un par de rectángulos con igual área, ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?	Los estudiantes analizan la traza del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos.

En la AA3 de la THA los FPM indicaron la necesidad de realizar el movimiento del punto C del segmento AB desde el punto A hasta el punto B. Mencionaron que existe un problema de aproximación en GeoGebra que arroja tres valores máximos, por lo que es necesario usar la

fórmula del área para verificar la aproximación del sistema. Los FPM modificaron la redacción de la primera pregunta (Figura 23).

Figura 23.

AA3 de la THA2 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA3 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega el punto I que relaciona la base (abscisa) y el área del rectángulo (ordenada) (Figura 3).	Los estudiantes analizan el movimiento del punto I que tiene como coordenadas (base, área), respecto a una característica dada de los rectángulos. Es importante que los estudiantes realicen el movimiento del punto C desde A hasta B. En el programa GeoGebra se obtienen 3 rectángulos con área 25, por lo tanto es necesario que los estudiantes verifiquen el área para determinar el rectángulo de mayor área.
	
Figura 3. Imagen del archivo GeoGebra Act3.ggb	
Análisis del movimiento del punto I. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas: - Mueva el punto C, observe el punto I ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? ¿En dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? - Determine un par de rectángulos con igual área, ¿Cuáles son las características de estos rectángulos?	

AA4

En la AA4 de la THA1 los FPM agregaron las indicaciones de abrir el archivo en GeoGebra, cambiaron la redacción de la primera pregunta, desagruparon las preguntas relacionadas con la familia de rectángulos con perímetro fijo 40 y perímetro fijo n, dejaron a parte la pregunta relacionada con cuál es el rectángulo de mayor área (Figura 24).

Figura 24.

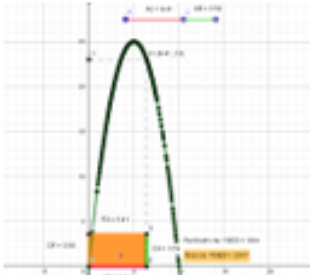
AA4 en la THA1 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA4 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas: a. Ingresar en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encontraste en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I. b. ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante II, III y IV del plano cartesiano? c. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto base de su rectángulo? d. ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? e. Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? f. ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n?	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

En la AA4 de la THA2 los FPM sólo modificaron la pregunta b, la simplificaron, solicitan la explicación de la nube de puntos en el primer cuadrante. Los FPM agregaron la imagen del archivo de GeoGebra (Figura 25).

Figura 25.

AA4 en la THA2 del segundo grupo de FPM

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
AA4 Se usa un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos.  Figura 4. Imagen del archivo GeoGebra Act4.ggb. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos. Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas: - Ingresa en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encontraste en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I. ¿Por qué el punto I genera una nube de puntos en el primer cuadrante? - Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? - Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las	Los estudiantes comparan la gráfica de la expresión del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos con la trayectoria del Punto I, para analizar cuál sería las restricciones de la gráfica respecto al problema. Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica.

Objetivo de aprendizaje:	
Usar e interpretar diferentes representaciones matemáticas de una función cuadrática en la búsqueda de solución a un problema.	
Actividad de aprendizaje	Proceso de aprendizaje hipotético
áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n?	

Anexo 5. Encuesta de caracterización de los FPM

6/6/22, 17:28

Encuesta de caracterización

Encuesta de caracterización

Esta encuesta se realiza en el marco del proyecto de doctorado: La mirada profesional del futuro profesor al seleccionar y diseñar tareas sobre funciones polinómicas.

Se espera que sus respuestas sean honestas y acordes a sus conocimientos, experiencias y realidades.

***Obligatorio**

1. Correo *

2. 1. Nombre completo *

3. 2. Correo electrónico de uso frecuente. *

4. 3. Número de celular *

5. 4. Nombre y número telefónico de un familiar o persona cercana, para comunicaciones de emergencia. Sólo si usted lo considera conveniente.

6. 5. Nombre de la licenciatura que actualmente se encuentra cursando en la Universidad del Valle (agregar número del plan): *

7. 6. Fecha de iniciación de la licenciatura que actualmente se encuentra cursando (puede ser una fecha estimada).

Ejemplo: 7 de enero del 2019

8. 7. ¿Tiene otros estudios de educación superior finalizados o en proceso? ¿Cuáles? *

9. 8. ¿Tiene experiencia laboral relacionada en educación? Si su respuesta sea afirmativa realice una breve descripción de su actividad, teniendo en cuenta el tiempo de esta experiencia.

10. 9. Realice una breve descripción de su práctica pedagógica vinculada a los procesos de formación de la licenciatura que se encuentra cursando. *

11. 10. Realice una breve descripción de sus expectativas investigativas relacionadas con su trabajo de grado. *

12. 11. Durante su formación en la licenciatura, mencione los cursos cuyo énfasis haya sido en el diseño de tareas matemáticas o la enseñanza del álgebra escolar. *

13. 12. Respecto a los siguientes temáticas indique su nivel de conocimiento: *

Marca solo un óvalo por fila.

	Nulo	Poco	Suficiente	Mucho
Ambientes de Geometría o Matemáticas dinámicas	☐	☐	☐	☐
Representaciones matemáticas	☐	☐	☐	☐
Trayectorias hipotéticas de aprendizaje	☐	☐	☐	☐
Modelos emergentes	☐	☐	☐	☐
Experimentos de enseñanza	☐	☐	☐	☐

14. 13. Realice una breve descripción de las temáticas anteriores (pregunta 12),
cuya valoración haya sido suficiente o mucho. *

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios

Señale en la malla curricular las asignaturas que está cursando y los que le faltan por cursar.

3492 - Licenciatura en Matemáticas (Res. 111)

Líneas de formación	Semestre I	Semestre II	Semestre III	Semestre IV	Semestre V	Semestre VI	Semestre VII	Semestre VIII	Semestre IX	Semestre X
Matemáticas	Elementos de Lógica Matemática (4) 405047m	Conjuntos Numéricos (4) 405130m Matemáticas Fundamental (4) 405129m	Álgebra Lineal (3) 111048m Geometría (4) 405137m	Álgebra Moderna 405085m Cálculo I (4) 111097m	Ecuaciones Diferenciales (3) 111049 m Cálculo II (4) 111096m	Física General (3) Análisis mat (3)	Estadística (4)	Topología (3) 405147m	Tópicos de MaSs Modernas y Contemporáneas (3) 405148m PRÁCTICA profesional I AEM (6/6) 405146M TRABAJO DE GRADO I (4/1) 405095m PROFESIO. III (3/1)	PRÁCTICA profesional II (6/6) AEM 405149M TRABAJO DE GRADO II (4/1) 405083m PROFESIO. IV (3/1)
Historia y Filosofía de las Matemáticas			Historia de las Matemáticas Griegas (3/1) 405054m			Historia y Epistemología de las Matemáticas (3/1) 405087m		Filosofía de las Matemáticas (3/1) 405144M		
Didáctica de las Matemáticas	Elementos de Educación Matemática (3/1) 405004m	Aspectos Socioculturales de la Educad. Matemática (3/1) 405051m		Didáctica I (4/2) 405133m	Didáctica II (3) 405136m	Didáctica III (3/2) 405142m	Didáctica IV (3/2) 405143m	Didáctica V (3/1) 405140m		
Razonamiento Y Lenguaje	Conocimiento y Cultura (4/2) 405131m	Conocimiento y Desarrollo 405066m (3/1)		Lenguaje y Comunicación (4/2) 405132m		Discurso Mat en el Aula (4/2) 405128m		Razonamiento Matemático (3/2) 405084m		
TIC			TDEM (3/2) 405134m		Integración de las TIC con el Currículo (3/2) 405135m		Diseño de Actividades de Aprendizaje con Apoyo de las TIC (4/2) 405141m	Implementación de las TIC en la Enseñanza de las Matemáticas (4/4) 405145m		
Pedagogía		Introducción a la Pedagogía (3/1) 403026m			Historia de la Educación y Pedagogía (3/1) 411102M				TRABAJO DE GRADO I (4/1) 405095m PROFESIO. III (3/1)	TRABAJO DE GRADO II (4/1) 405083m PROFESIO. IV (3/1)
Idiomas	Inglés I 204355MC (3)	Inglés II 204357MC (3)	Inglés III 204363M (3)	Inglés IV 204368M (3)						
Electivas Complementarias y Profesionales	COMPLEMEN. I 3	COMPLEMEN. II 3	COMPLEME. III 3	COMPLEMEN. IV 3	PROFESIONA. I 3		PROFESIO. II (3/1)		PROFESIO. III (3/1)	PROFESIO. IV (3/1)
	Deporte -- 404001m(2)									
PP(50)	3	3	3	4	3	5	5	8	8	8

Resultados de algunas de las preguntas de la encuesta de caracterización de FPM

Todos los FPM pertenecían al plan de licenciatura en matemáticas según la Resolución 111. Solo M cursaba Práctica Profesional II, ya que se encontraba en su último semestre de formación, mientras que los demás FPM cursaban Práctica Profesional I. Durante el semestre en el que participaron, S estaba inscrito únicamente en Práctica Profesional I y Trabajo de Grado I, mientras que los otros FPM cursaban más de tres asignaturas en el semestre (Tabla 1).

Tabla 1.

Asignaturas cursadas y por cursar de los FPM de su malla curricular

FPM	Asignaturas que cursaban mientras se realizaban práctica docente	Asignaturas que faltaban por cursar mientras realizaban su práctica docente
J	Práctica Profesional I, Trabajo de Grado I	Práctica Profesional II, Trabajo de Grado II y Física General.
M	Práctica Profesional II, Trabajo de Grado II, Historia de la educación y pedagogía, inglés IV y Complementaria IV.	
C	Práctica Profesional I, Trabajo de Grado I, inglés IV y Tópicos de modernas y Contemporáneas.	Práctica Profesional II, Trabajo de Grado II y
S	Práctica Profesional I y Trabajo de Grado I,	Práctica Profesional II y Trabajo de Grado II
V	Práctica Profesional I y Trabajo de Grado I, inglés III, Profesional IV (Matemáticas Recreativas) y Constitución Política de Colombia.	Práctica Profesional II y Trabajo de Grado II, inglés IV, Complementaria III (Vida Universitaria) y Complementaria IV (Primera Infancia).

Los FPM iniciaron el programa de formación de licenciatura de matemáticas en el primer semestre entre los años 2016 a 2018. S inició en el 2016, M y J en el 2017 y C y V en el 2018.

Respecto a la pregunta relacionada con su práctica pedagógica sus respuestas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2.

Apreciaciones de los FPM respecto a su práctica pedagógica

FPM	9. Realice una breve descripción de su práctica pedagógica vinculada a los procesos de formación de la licenciatura que se encuentra cursando.
J	Mi practica pedagógica me permite conocer más de cerca la realidad en la que se desarrollan los estudiantes y poder mejorar mis métodos de enseñanza, la práctica que he realizado en mi formación de la licenciatura se ha basado en la implementación y diseño de actividades mediadas por tecnología las cuales hemos desarrollado de manera virtual por cuestiones de la pandemia sin embargo han sido muy fructíferas para mi formación profesional.
M	En los diferentes cursos de didáctica y las TIC hubo experiencias relacionadas con la práctica pedagógica; por un lado, en los cursos de didáctica se contó con experiencias virtuales debido a la contingencia sanitaria, y, por otro lado, en el caso particular del curso de Implementación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas se contó con un espacio presencial para la práctica pedagógica.
C	He tenido experiencia en algunos cursos de la línea de lenguaje, realizando algunas entrevistas y observando algunas interacciones sociales en ambientes escolares y no escolares, también, en el marco de los cursos relacionados con tecnología y didáctica he realizado algunos diseños de secuencias que han sido implementados en grupos pequeños de estudiantes, los datos ahí recogidos fueron en su momento analizados a la luz de referentes teóricos que se han desarrollado en clase.
S	Durante los primeros semestres de la licenciatura, se ha tenido la oportunidad de realizar prácticas (pequeños acercamientos) pues, en la línea de lenguaje se cuenta con cursos que tienen en cuenta experiencias pedagógicas, por ejemplo, el curso de conocimiento y cultura, realizamos observaciones, aunque esta fue en las interacciones sociales, en mi experiencia se realizó en el aula. Otro ejemplo, es el curso de lenguaje y comunicación, en este se realizaron entrevistas entorno a una actividad matemática (esta tenía que ver con el pensamiento algebraico). Por último, tuve la oportunidad de brindar un curso introductorio a los estudiantes de primer semestre de la licenciatura en matemáticas.
V	La práctica pedagógica dentro de la carrera de licenciatura ha sido muy poca, tuve la oportunidad en el curso de "implementación" de tener ese primer acercamiento de una práctica, proponer una serie de actividades e implementar, para pasar a un segundo momento de analizar los resultados.

En la Tabla 2, los FPM manifestaron las diferentes modalidades de práctica pedagógica (virtual y presencial) y las actividades que consideraron hacen parte de este aspecto (diseño, implementación y análisis respuestas de estudiantes relacionadas con actividades de aprendizaje,

diseño y realización de entrevistas, acompañamiento a futuros profesores nuevos en el programa de formación y observación).

En la Tabla 3 se presentan las respuestas de los FPM relacionadas con la temática de investigación de sus trabajos de grado.

Tabla 3.

Trabajo de grado

FPM	10. Realice una breve descripción de sus expectativas investigativas relacionadas con su trabajo de grado.
J	Mis expectativas investigativas en mi trabajo de grado es poder encontrar nuevas estrategias que me permitan presentar a los estudiantes un objeto matemático de una manera más agradable teniendo en cuenta los posibles errores y obstáculos que pueden presentar los estudiantes , además de que puedan reconocer la importancia y aplicación en contexto de las matemáticas para que le den sentido y mejore la enseñanza y aprendizaje, además espero que la secuencia que yo diseñe cumpla con los objetivos y tenga buenos resultados.
M	Principalmente, rescato el análisis de las prácticas matemáticas (entendidas en el campo de la filosofía de las matemáticas) que se puedan percibir en las acciones que realizan los estudiantes. Por lo que, al hacer la relación teoría-práctica me interesa identificar esas tendencias que se presentan en las acciones de los estudiantes para validar lo que teóricamente se estudia.
C	Me interesa trabajar con pensamiento variacional, concretamente el proceso de modelación relacionado con el contenido matemático de inecuaciones, la idea es realizar un diseño que pueda ser implementado, para posteriormente analizar los datos que se recolectan con el fin de caracterizar que aspectos del PV se fortalecen después de aplicar el diseño, este análisis se haría bajo la luz del enfoque teórico de EMR en la línea de investigación de didáctica de las matemáticas.
S	Las expectativas investigativas que tengo relacionadas con el trabajo de grado, relaciona tanto la práctica como la teoría, me explico: estoy realizando el trabajo de grado basándome en la educación matemática crítica y la relación matemática-sociedad, en la teoría es algo que toca problemáticas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en la práctica es donde se pone en juego dicha teoría, así que, mis expectativas giran en torno a una relación simbiótica entre teoría y práctica.
V	Las expectativas investigativas dentro del trabajo de grado es conocer cómo a partir de un diseño de actividades se puede lograr favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria de la zona rural (en el modelo de Escuela nueva), ya que es un campo que generalmente se deja para bachillerato y por ello una de las dificultades que se identifica es precisamente cuando se da el paso de la aritmética al álgebra.

La pregunta sobre trabajo de investigación tenía como propósito identificar si el desarrollo de la práctica docente vinculada al desarrollo del experimento de enseñanza colectivo podría ser parte del desarrollo de sus trabajos de investigación. Sólo C y V estaban interesadas en el diseño de actividades de aprendizaje relacionadas con pensamiento variacional en secundaria y primaria en temáticas diferentes a función cuadrática.

Dado que la THA0 es sobre función cuadrática, se quería conocer las asignaturas relacionadas con diseño de actividades de aprendizaje o enseñanza del álgebra. La pregunta 11 indaga este aspecto, las repuestas se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4.

Cursos relacionados con el diseño de actividades de aprendizaje (tareas matemáticas) o la enseñanza del álgebra.

FPM	11. Durante su formación en la licenciatura, mencione los cursos cuyo énfasis haya sido en el diseño de tareas matemáticas o la enseñanza del álgebra escolar.
J	1) TIC 2,3 y4 2) Didáctica 4 (pensamiento variacional)
M	A nivel general, el curso de Didáctica IV tuvo el énfasis del pensamiento variacional, por lo que el álgebra tiene un papel relevante para el desarrollo del curso. Por otro lado, en los cursos de TIC sí se hizo especial énfasis en el diseño de tareas matemáticas pero no en el pensamiento variacional o la enseñanza del álgebra, cada estudiante tuvo la libertad de escoger el énfasis en su trabajo; en particular, en el curso de Diseño de actividades de aprendizaje con apoyo de las TIC hice una propuesta histórica y epistemológica para la enseñanza del concepto de grupo en la educación superior y en particular en el curso de álgebra moderna.
C	Didáctica v, Implementación de las TIC al currículo, Diseño de las TIC.
S	Diseño de actividades de aprendizaje. Didáctica IV, pensamiento Variacional. Historia y epistemología del Álgebra. Implementación de actividades de aprendizaje.
V	- Implementación de las TIC (diseño de actividades) - Didáctica IV (pensamiento variacional y sistemas algebraicos)

En las respuestas de los FPM se evidenció que el diseño de actividades de aprendizaje ha estado vinculada a los cursos de tecnología digital y pensamiento variacional.

Las respuestas sobre el conocimiento de los FPM relacionado con algunos de los aspectos teóricos relacionados con la construcción de la THA0 sobre función cuadrática se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5.

Conocimientos sobre algunos aspectos teóricos relacionados con la construcción de la THA0

12. Respecto a las siguientes temáticas indique su nivel de conocimiento (mucho es escala de mayor nivel de conocimiento, nulo es la escala de menor nivel de conocimiento):					
FPM	Ambientes de Geometría o Matemáticas dinámicas	Representaciones matemáticas	Trayectorias hipotéticas de aprendizaje	Modelos emergentes	Experimentos de enseñanza
J	Suficiente	Suficiente	Poco	Poco	Suficiente
M	Suficiente	Mucho	Poco	Poco	Poco
C	Poco	Suficiente	Suficiente	Poco	Poco
S	Suficiente	Suficiente	Nulo	Poco	Poco
V	Poco	Suficiente	Poco	Nulo	Poco

En la Tabla 5 se determina que todos los FPM tenían pocos o nulos conocimientos sobre modelos emergentes, 4 de los FPM pocos o nulos conocimientos sobre trayectorias de aprendizaje y experimentos de enseñanza, 3 FPM dicen tener conocimientos suficientes relacionados con ambientes de geometría o matemática dinámicas y todos los FPM manifestaron tener muchos o suficientes conocimientos sobre representaciones matemáticas. En la escala de valoración de la pregunta 12, mucho es la valoración más alta y nulo la más baja.

Para corroborar si los FPM conocían los aspectos de la pregunta 12 evaluados como suficiente o mucho, se les pidió a los FPM escribir un párrafo sobre estas estos aspectos. En la Tabla 6 se presentan sus respuestas.

Tabla 6.

Conocimientos sobre algunos aspectos relacionados con la THA0

FPM	13. Realice una breve descripción de las temáticas anteriores (pregunta 12), cuya valoración haya sido suficiente o mucho.
J	En ambientes de geometría o matemáticas dinámicas conozco diferentes softwares como GeoGebra, Wolfram, GeogebraTube, Colombia aprende que permiten presentar a los estudiantes la geometría desde diferentes representaciones ya sea en 2d y 3d cosas que son mucho más rápidas que en papel y lápiz, además de ser dinámicas facilitan la enseñanza pues permiten que el estudiante pueda visualizar Las representaciones en matemáticas pueden ser de diferentes tipos ya sea: grafica, tabular, algebraica o en lenguaje natural. Estas representaciones pueden tener el mismo significado solo que se representan de manera diferente.
M	En cuanto a los ambientes de geometría o matemáticas dinámicas, considero que son recursos que no necesariamente están centrados en la enseñanza y el aprendizaje, sin embargo, estos sirven como potenciadores. Los ambientes de geometría o matemáticas dinámicas sugieren vida en los objetos que se movilizan aquí, son objetos que cambian y que puede mostrar muchas variantes que tiene un objeto. Por otro lado, el concepto de representaciones matemáticas lo asocio a dos nociones, la primera está vinculada con la teoría de Duval respecto a las representaciones semióticas de un objeto, estas representaciones muestran características de los objetos en matemáticas debido a que son objetos abstractos y no se pueden definir solo con una representación; la segunda noción que asocio respecto al concepto de representación matemática es a las diferentes creencias o nociones comunes que tiene un estudiante o una comunidad de estudiantes.
C	Referente a las representaciones matemáticas este es un tema en el que la carrera y particularmente la línea de lenguaje se ha preocupado por resaltar su importancia, insistiendo desde diferentes perspectivas como la teoría de Duval en cuáles son las representaciones matemáticas, porqué se deberían tener en cuenta en la educación matemática y en los aportes que está hace al desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante. Respecto a las THA, conozco que es un modelo de diseño útil para los docentes, se hace un trabajo secuenciado y estructurado teniendo en cuenta diferentes referentes teóricos, curriculares y matemáticos los ayudan a estructurar el diseño de las mismas. Las THA han sido trabajadas anteriormente en los cursos que brinda la carrera, particularmente he analizado algunas, pero no he tenido la oportunidad de diseñar ninguna.
S	Los ambientes de geometría dinámica son herramientas que facilitan la comprensión de la actividad matemática, pues estos, permiten arrastrar, cambiar de forma, trasladar, etc. Los objetos con los que se está trabajando, brindando dinamismo al acto de enseñar, cuestión que es difícil de lograr en el ambiente tradicional de lápiz y papel. Por otro lado, las representaciones matemáticas al igual que los ambientes de geometría dinámico permite la comprensión de los

FPM	13. Realice una breve descripción de las temáticas anteriores (pregunta 12), cuya valoración haya sido suficiente o mucho.
	conocimientos matemáticos, están muy relacionados, por ejemplo, en el software de geometría es posible ver un objeto matemático en sus distintas representaciones, algebraica o gráfica y en representaciones auxiliares como lo son, las tablas o los esquemas. El identificar el objeto matemático en sus distintas representaciones y una buena coordinación entre estas, podrá garantizar el aprendizaje de estos.
V	Las representaciones matemáticas, es aquello que se refiere el objeto matemático representado, entender que dicha representación consta de un significado y que a partir de la significación que se le dé, se puede interpretar y darle un uso.

Todos los FPM dieron cuenta de algunas características de los aspectos evaluados como suficientes o muchos en la pregunta 12. Sólo J omite en sus respuestas alguna apreciación respecto a los experimentos de enseñanza.

Anexo 6. Aspectos que atienden y deciden y aspectos que atienden e interpretan los FPM

En la Tabla 1, se presentan separados los cambios en la THA0 del primer grupo respecto a los focos de atención.

Tabla 1.

Resultados de los focos de atención respecto a los cambios en la THA0 del primer grupo de FPM

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
1	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta: Para determinar los vértices del rectángulo, se usa chinchas sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. Los FPM añadieron en GeoGebra el fondo de una finca.	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Es posible que descarten como respuesta, el cerco cuadrado, porque pueden desconocer que el cuadrado es un rectángulo. Al pedir que simulen el cerco rectangular con una cuerda, podrán tener dificultades en trabajar con escalas y requerir 20 metros de cuerda.	Los FPM modificaron la redacción del nombre e introducción de la actividad: Un cerco rectangular para delimitar una huerta. En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb). En la pregunta 1 agregaron cercos rectangulares.
2	Los FPM añadieron en GeoGebra el fondo de una finca.		Los FPM modificaron la redacción del nombre e introducción de la actividad: Familia de rectángulos con igual perímetro. Observa los posibles cercos rectangulares cuando se mueve el punto C (abre el archivo 2.ggb). Los FPM agregaron la pregunta: ¿Qué es el perímetro de un rectángulo? ¿Cómo se halla el perímetro de un rectángulo? ¿Qué es el área de un rectángulo? ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?
3	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta:	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético:	Los FPM en las actividades de aprendizaje modificaron la redacción:

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
	La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega la traza del punto I que relaciona la base vs área del rectángulo. Los FPM añadieron en GeoGebra el fondo de una finca.	Es posible que no relacionen los valores de las coordenadas con la base y el área del rectángulo.	La herramienta es otro archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero se agrega la traza del punto I que relaciona la base vs área del rectángulo. Los FPM agregaron a la introducción de la actividad abra el archivo 3.ggb. Los FPM cambiaron la redacción de la primera pregunta: ¿Cuáles son los valores de las coordenadas del punto I?
4	Los FPM añadieron en GeoGebra el fondo de una finca.	En el proceso de aprendizaje hipotético los FPM agregaron: Los estudiantes exploran otras posibles expresiones algebraicas teniendo en cuenta si el perímetro de la familia de los rectángulos isoperimétricos se modifica y “se espera que se generalice la expresión algebraica del área de los rectángulos con igual perímetro”.	Los FPM modificaron la redacción del nombre e introducción de la actividad: Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos de igual perímetro. Ingresa la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos de igual perímetro, en la parte da debajo de la entrada. Los FPM cambiaron la redacción de la primera pregunta: Compara la traza del punto y la gráfica de la expresión algebraica ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el mismo cuadrante III y IV del plano cartesiano? Los FPM añadieron: Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64?

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
			Los FPM modificaron la redacción del nombre de la actividad: Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos de igual perímetro.

En la Tabla 2 se resumen los aspectos que interpretaron los FPM del primer grupo en relación con focos de atención en los cambios en la THA0.

Tabla 2.

Resultados de las interpretaciones del primer grupo de FPM respecto a los focos de atención de los cambios la THA0

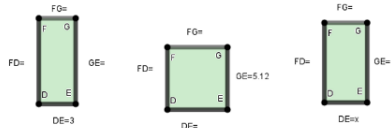
	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.
Interpretaciones	En línea 28, J dice: Pues el tablero con la cinta métrica para que ellos puedan medir. Pero esperamos que ellos hagan la escala de veinte metros a veinte centímetros.	En línea 12, J dice: Que piensen que el área es la suma de los lados de la figura (...). También con lo de las escalas que piensen que tienen que utilizar literalmente los 20 metros de cuerda para poder hacer la actividad.	En línea 36, J dice: Si se plantea esas preguntas, ya que, bueno, pues se espera que el estudiante venga con este conocimiento, pero como en la trayectoria no es específico hablar sobre eso, se les recuerda (...) pues como hay que hacer uso de fórmulas, que no están explícitas en la trayectoria, porque se espera que ellos las hagan y hallen la relación entre representación algebraica y la geométrica.
	J interpretó que el uso de la cuerda y el tablero de cartón conlleva a usar escala en medida de la cuerda para construir los rectángulos sobre el tablero de cartón.	J interpretó que el área puede ser considerada como la suma de los valores de los lados.	
		J interpretó que los estudiantes pueden omitir el uso de la escala al considerar 20 metros de cuerda.	J interpretó que es necesario reconocer el perímetro y área como un conocimiento previo. J consideró que se debe hacer explícito las fórmulas del área y perímetro para establecer las relaciones entre las

Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas.
En línea 32, M dice: Primero porque pues las matemáticas son, de alguna forma una, no sé si voy a abusar diciéndolo como un medio. (...) Y si al principio, si al principio establecemos un contexto (...) para que se resuelva un problema y lo tratamos de resolver con matemáticas, pues la intención es que al final en las mismas matemáticas pueden dar respuesta al problema. En el diálogo M interpretó la necesidad de usar las matemáticas y el contexto para resolver el problema.		representaciones algebraicas y geométricas del problema. En línea 40, M dice: (...) Esos considerar familias de rectángulos con perímetro fijo diferente a decenas amplia los casos particulares para mirar las invariantes del problema. si uno hace una pregunta particular ayudan a mirar justamente esas invariantes, digamos, encuentran el área máxima de cuando el perímetro vale veinte y después cuarenta y se escoge el sesenta y cuatro en sí, como para no cerrarlo en decenas (...) para no dar a entender de que sólo se pueda (...) resolver el problema con perímetro en decenas. M interpretó que considerar familias de rectángulos con perímetro fijo diferente a decenas amplia los casos particulares para mirar las invariantes del problema.

En la Tabla 3, se presentan separados los cambios en la THA1 del primer grupo de FPM respecto a los focos de atención.

Tabla 3.*Resultados de los focos de atención sobre los cambios en THAI del primer grupo de FPM*

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades o acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
1	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta: Se usa como herramienta una cuerda de tamaño 20 cm, sujeta en sus extremos por medio de una cinta, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinchas sobre un cartón. El cartón tiene de fondo una hoja cuadriculada y en sus bordes una cinta métrica, para facilitar la medida de longitud de la cuerda y de los lados del rectángulo. En esta actividad los estudiantes determinan que es posible hallar diferentes rectángulos con una cuerda de longitud fija.	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Los estudiantes requieren asociar la longitud de la cuerda con el perímetro de un rectángulo y determinar que los rectángulos abarcan diferentes superficies, es decir que sus áreas pueden ser diferentes. Se espera que los estudiantes den como ejemplos rectángulos cuyos lados sean de medida un número natural. En el proceso de hallar el área de los rectángulos, los estudiantes podrán usar la fórmula (la multiplicación de la base por la altura) o la cuadrícula del cartón (contar cuadrados), donde se dibujan los rectángulos.	Los FPM, en las actividades de aprendizaje cambiaron la redacción de: Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son algunos de los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Elabora estos cercos usando una cuerda, dibújalos en el cartón y determine los valores de los lados de cada rectángulo.
2	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta: En GeoGebra se fijaron las imágenes que aluden a la finca. Se amplía el tamaño del texto Nuevo el punto C y se elimina la tabla de valores. En esta actividad los estudiantes requieren conocer que el perímetro de los rectángulos es fijo,	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Los estudiantes pueden relacionar los valores obtenidos con las características del rectángulo para determinar cual tiene mayor área y encontrar la expresión general del área de la familia de rectángulos con igual perímetro teniendo	Los FPM cambiaron el nombre e introducción de la actividad: Familia de rectángulos Abra el archivo familiarectangulos.ggb, mueva el punto C y observa los posibles cercos rectangulares. Los FPM modificaron la redacción y agregaron una tabla con valores faltantes de los lados, perímetro y área de los rectángulos:

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades o acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas																								
	mientras que el valor del área varia.	presente la fórmula del área para los rectángulos.	Determine algunos posibles cercos rectangulares, completa la siguiente tabla: <table border="1" data-bbox="1029 449 1430 575"> <thead> <tr> <th>Lado DE</th><th>Lado EG</th><th>Perímetro DEGF</th><th>Área DEGF</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td>3,75</td><td></td><td></td><td>16</td></tr> <tr> <td></td><td>4,15</td><td></td><td></td></tr> <tr> <td></td><td></td><td>20</td><td></td></tr> </tbody> </table> Los FPM cambiaron la redacción de la pregunta: ¿Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son las medidas de los lados de ese rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad? Justifica tu respuesta. Los FPM agregaron la pregunta: Determine el valor de los lados de los siguientes rectángulos con perímetro 20.  The diagram shows three rectangles. The first rectangle has height FQ= and width DE=3, with area FD=. The second rectangle has height FQ= and width DE=, with area FD= and perimeter GE=5.12. The third rectangle has height FQ= and width DE=, with area FD= and perimeter GE=. Los FPM cambiaron la redacción de la pregunta: Si el perímetro de los rectángulos es 20 ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de esta familia de rectángulos?	Lado DE	Lado EG	Perímetro DEGF	Área DEGF	1					5			3,75			16		4,15					20	
Lado DE	Lado EG	Perímetro DEGF	Área DEGF																								
1																											
	5																										
3,75			16																								
	4,15																										
		20																									
3	Los FPM cambiaron el nombre del archivo de GeoGebra por traza.ggb. Los FPM eliminaron la tabla de valores de GeoGebra. Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta:	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Los estudiantes pueden relacionar la traza del punto I con una forma conocida, por ejemplo, una montaña o una u invertida o determinar que es una parábola o la gráfica de una función cuadrática.	Los FPM cambiaron el nombre e introducción de la actividad: La traza del punto I Abra el archivo traza.ggb, mueve el punto C, observe el punto I. Los FPM cambiaron la redacción y agregaron tabla de valores a la primera pregunta:																								

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades o acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas														
	En esta actividad los estudiantes relacionarán las coordenadas del punto I, con un lado del rectángulo y el área. Y analizarán la traza del punto I, para hallar la respuesta al problema.	Los estudiantes pueden ratificar o encontrar que la solución al problema está en construir un cuadrado de lado 5 m y que el punto I se encuentra el punto máximo de la parábola, que este caso es el vértice. Los estudiantes poder darse cuenta de que el área aumenta cuando C se mueve de A hacia el punto medio del segmento AB, y que disminuye cuando C pasa el punto medio del segmento AB y se mueve hacia B.	Si el punto I tiene coordenadas (x, y), determine algunos de sus valores: <table><tr><td>x</td><td>3</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>2,84</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>24</td><td></td><td>17,6</td><td>14,3</td><td></td></tr></table> Acorde a los valores de los rectángulos, ¿Qué representan las coordenadas del punto I = (x, y)? Los FPM cambiaron la redacción de la segunda pregunta: ¿Cómo es la huella del punto I cuando se mueve el punto C?	x	3		7			2,84	y		24		17,6	14,3	
x	3		7			2,84											
y		24		17,6	14,3												
4	Los FPM cambiaron el nombre del archivo de GeoGebra por grafica.ggb.		Los FPM cambiaron el nombre e introducción de la actividad: Gráfica del área frente a la base de los rectángulos de igual perímetro. Abra el archivo grafica.ggb escriba $y=x(10-x)$ en la entrada. Los FPM modificaron la redacción de la pregunta: Compara la traza del punto I y la gráfica de $y=x(10-x)$ ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano?														

En la Tabla 4 se resumen los aspectos que interpretaron el primer grupo de FPM respecto a los focos de atención de la segunda planificación de una lección.

Tabla 4.

Resultados de las interpretaciones del primer grupo de FPM respecto a los focos de atención de los cambios en la THA1 (THA2)

Interpretaciones	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
	En la línea 92 y 93, los FPM expresaron: M: En el momento de generalizar. (...) se destaca esa necesidad intelectual en ellos, la de la de formalizar, generalizar las ideas. Ellos pueden ver algunos puntos tabulares y entender, digamos entender la gráfica, pero la idea de generalizar algebraicamente es algo que les cuesta mucho más. J: (...) Yo cuando M dice generalizar (...), yo me acordaba también de un texto de Mason (...) donde habla de unos procesos que tienen que hacer para uno constatar que el estudiante si aprende. Uno de esas es poder pasar de lo particular a lo general y viceversa. Los FPM interpretaron que la generalización por medio de expresiones algebraicas es una necesidad intelectual, es de gran dificultad y requiere que los estudiantes analicen los valores particulares de la función cuadrática.	De la línea 448 a 458, los FPM expresaron: M: Que la generalización por medio de expresiones algebraicas es una necesidad intelectual, es de gran dificultad y requiere que los estudiantes analicen los valores particulares de la función cuadrática., por ejemplo, en ese sentido de si este lado vale tanto cuánto vale el otro. I: Pero eso tiene que ver con esa tabla. J: Hay sí. M: O sea, se responde en la tabla, pero algunos no son conscientes de eso. I: Entonces tendría que hacer una pregunta. J: No, yo creo que la socialización podríamos dibujar. Podríamos dibujar un rectángulo y solamente colocar el valor de aquí el valor de acá. Entonces cuanto mide este lado. Yo creo que ellos van a saber que mide lo mismo. Entonces, si tenemos el perímetro, o sea, ¿Qué ocurrirá allí? I: ¿Y eso no lo podemos dibujar acá?, darle los rectángulos y que ellos lo pongan. M y J: También. J: Podemos colocar un rectángulo. I: Quitándole las medidas. M: Colocarle dos rectángulos y al final preguntarles si este lado vale x, entonces, ¿Cuánto vale el otro? Los FPM interpretaron que el uso de la tabla de valores del rectángulo es insuficiente para construir la expresión general del área.
	De la línea 115 hasta la 122, expresaron lo siguiente:	De la línea 485 a 489, expresaron lo siguiente:

Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
I: ¿Por qué los estudiantes no lograron hallar la expresión algebraica de la familia de funciones con perímetro fijo veinte? M: Sí, esa es la más difícil. (...) Yo lo que alcanzaba a mirar era que ellos tenían como la costumbre de, cómo se dice, de dar un valor (...). M: (...) Ellos al final, lo que yo veía mucho que hacían era que cerraban los valores. Daban un valor en específico (...). J: Ellos colocaban, perímetro veinte y se ponían a hallar valores que sumados dieran veinte, pero no la generalizaban. Los FPM interpretaron que los estudiantes evitan usar variables y prefieren valores específicos	I: Bueno, entonces que sean otros que no sean de los que escogieron aquí no, porque aquí ya tenemos otros. M: Pero esa parte va a ser clave para la última generalización. I: Sí, porque si él dice x, pues este tiene que medir diez menos x. Y ahora, entonces ¿Cuál es el área? Base por altura y no tiene que hacer ni ¿Cómo se llama? ni sustitución. Lo que hizo M. J: Ni reemplazar los valores en términos de otros. M: Implícitamente lo va a hacer. Pero no va a ser consciente de eso. Los FPM interpretaron que, al colocar figuras de rectángulos con valores faltantes, les puede ayudar a los estudiantes a relacionar los valores de los lados con la fórmula del área y obtener la expresión general del área para una familia de rectángulos con perímetro fijo 20.

En la Tabla 5, se presentan separados los cambios en la THA0 del segundo grupo de FPM respecto a los focos de atención.

Tabla 5.

Resultados de los focos de atención respecto a los cambios en THA0 del segundo grupo de FPM

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
1	Los FPM agregaron en la descripción de la herramienta: Se hace uso de un tablero construido a partir de una hoja milimétrica, chinchas (de cuello largo) y una cuerda amarrada en sus extremos para simular el cerco rectangular.	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Los estudiantes inicialmente trabajan con unidades enteras, sin embargo, dado el recurso de los tableros contruidos con hojas milimétricas se podría dar el caso que hagan uso de unidades decimales.	Los FPM subrayaron la palabra cerco rectangular de la introducción de la AA1. Los FPM modificaron la relación de la introducción. Haga uso del tablero con la hoja milimétrica, los chinchas y la lana de colores para realizar la actividad. Construya algunos rectángulos con los

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas																												
	Los FPM agregaron espacios después de cada pregunta en las hojas de trabajo.		materiales dados y responda las siguientes preguntas: Los FPM agregaron a la primera pregunta la manera de que deben dar respuesta: a. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? Escriba las medidas de algunos de esos rectángulos. Los FPM agregaron la tercera pregunta: c. ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno?																												
2	Los FPM añadieron color y grosor al archivo GeoGebra para relacionar las figuras y sus valores. Los FPM agregaron espacios después de cada pregunta en las hojas de trabajo.		Los FPM agregaron el nombre del archivo de GeoGebra en la introducción: “Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act2.ggb) responda las siguientes preguntas”. En la primera pregunta precisan el número de rectángulos de la pregunta: “a. Determine dos rectángulos con perímetro igual a 20m diferentes a los que encontró en la actividad 1”. Los FPM agregaron una pregunta para que los estudiantes determinen algunos valores de los lados, perímetro y área de los rectángulos.																												
			c. En la siguiente tabla escribe los cambios de las medidas de la base, altura, perímetro y área del rectángulo. <table border="1"> <thead> <tr> <th>Base</th><th>Altura</th><th>Perímetro</th><th>Área</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	Base	Altura	Perímetro	Área																								
Base	Altura	Perímetro	Área																												
3	Los FPM añadieron color y grosor al archivo		Los FPM agregaron el nombre del archivo de GeoGebra en la introducción:																												

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
	GeoGebra para relacionar las figuras y sus valores. Agregan espacios después de cada pregunta en las hojas de trabajo. Los FPM agregaron una hoja en blanco para procedimientos.		“Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act3.ggb) responda las siguientes preguntas”. Los FPM cambiaron la redacción de la primera pregunta: “a. Ingresa en GeoGebra la expresión algebraica del área con respecto a la base que encuentre en la actividad 3. Compare la gráfica con la trayectoria del punto I.” Separan la última pregunta de la familia de rectángulos de perímetro 40 y n.
4	Los FPM añadieron color y grosor al archivo GeoGebra para relacionar las figuras y sus valores. Los FPM agregaron espacios después de cada pregunta en las hojas de trabajo. Los FPM agregaron una hoja en blanco para procedimientos.		Los FPM agregaron el nombre del archivo de GeoGebra en la introducción: “Haciendo uso del archivo GeoGebra: (Act.4.ggb) responda las siguientes preguntas”.

En la Tabla 6, se presentan las interpretaciones sobre los cambios en la THA1 del segundo grupo respecto a los focos de atención.

Tabla 6.

Resultados de las interpretaciones del segundo grupo de FPM respecto a los focos de atención de los cambios en la THA0

	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
Interpretaciones	De la línea 115 a 135, los FPM expresaron: V: Le damos la cuerda de colores y que ellos usen lo que consideren, dependiendo de la escala. S: lo hacen en escala, ¿no? aunque yo creo que la mayoría va a usar centímetros. Pero puede ser que alguien por ahí le guste pensar diferente y diga voy a hacer C: Va a hacerlo con los 20 metros. S: O hace 10 cm, localizando cada unidad de 0.5 cm. (...) Los FPM interpretaron el uso de la escala para medir la cuerda con unidades o patrones de medida. C plantea algunas actividades sobre unidades de medida no convencionales.	De la línea 28 a la 31 C expresó: Bueno, nosotros agregamos en la primera actividad, como vamos a entregar un material con papel milimétrico, entonces el estudiante podría trabajar con unidades enteras o unidades decimales. C interpretó que uso del papel milimétrico permite trabajar con números decimales o enteros.	En la línea 246, C expresó: Yo no me percaté, de eso del cerco rectangular cuando la hice. Entonces yo dije, pues si es un cerco pueden tener otros escenarios como, por ejemplo, un área triangular o un área que no tenga necesariamente una forma. Pero entonces luego me compliqué, porque cómo le sacó el área a esa vaina. Entonces, deje simplemente un cuadrado como tal. C interpretó que la palabra rectangular puede pasar desapercibida y los estudiantes podrían hacer, como le pasó a ella, cercos con otras formas.
	De la línea 73 a la 78, los FPM expresaron: I: ¿Por qué agregan el color a los archivos? Me podrían explicar esa parte. S: Pues yo sí tengo una razón, para eso. He leído un libro de etnomatemáticas del profesor de Ambrosio y él menciona que las matemáticas occidentales		En la línea 140, esto es lo que expresa V respecto a la pregunta ¿Por qué consideras que el cerco anterior abarcó más terreno? V: (...) En la pregunta ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?, pues quizás el estudiante en ese momento no va a responder el cuadrado. Y quizás también

Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
(...) ha obviado, ha quitado el color de las figuras. Por una cuestión de abstracción, pero, por ejemplo, si vemos las matemáticas que no son occidentales (...) el color hace resaltar de alguna forma las figuras. V: Para que los estudiantes puedan ver esa relación de la base y la altura que de pronto se obviaba o quizás era más complejo verlo cuando realizaban el movimiento (...). De pronto no podrían identificar realmente cuál era el lado que crecía, cuál era la base o la altura. Entonces es como una manera como para que ellos puedan como dar con esa relación. C: Y además porque sin color, la manera (...) de identificar esa relación era por los números, por la longitud de los lados. Sin embargo, no era tan sencillo (...) Los FPM interpretaron que el uso del color ayuda a relacionar los valores de las figuras e identificar lo que varía o no varía. S interpretó que la abstracción de las matemáticas occidentales		tenga un por qué (...) sería interesante saber por qué seleccionó precisamente este rectángulo, quizás porque un lado se vea más largo, por ejemplo. V interpretó que los estudiantes podrían fijarse en la longitud de uno de los lados del rectángulo para determinar el rectángulo de mayor área.

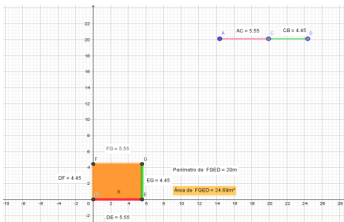
Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
desusa el color de las figuras. De la línea 32 a la 36 los FPM expresaron: I: Ustedes dejaron unos espacios en blanco ¿Qué tanto espacio considera pertinente? S: Dependiendo de las preguntas, porque a veces preguntan solamente las coordenadas. C: Algo muy puntual. S: Me imagino que no van a necesitar tanto espacio. C: En las últimas, por ejemplo, estamos pensando que era necesario hacer uso de hojas en blanco como para que ellos pudieran hacer los procedimientos si fuera necesario (...). Los FPM interpretaron la longitud de la respuesta de los estudiantes al variar el espacio en la hoja de trabajo o considerar el uso de hojas en blanco.		En la línea 3, esto fue lo que expresó V respecto a la tabla: V: Pues la tabla porque lo que se espera luego es que el estudiante pueda dar como una expresión general de esos cambios que hay o que logré encontrar esa relación de lo que es el área respecto a la base. Entonces quizás el estudiante al ver el cuadro puede ver el comportamiento que tiene la base y la altura cuando varía, qué tanto está variando y pues es como algo que uno esperaría, (...) al menos que él encuentre como esa relación y también como ahí también incluimos lo que fue el área y también el perímetro que identifiquen de alguna manera que, aunque el perímetro es constante no significa que el área también va a ser constante entonces ahí estamos también para potencializar eso. V interpretó que agregar una tabla de valores permitiría ver lo que varía o permanece constante y relacionar las medidas de los lados con la expresión general del área.
De la línea 89 a la 92, los FPM expresaron.		

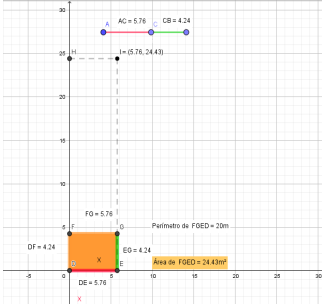
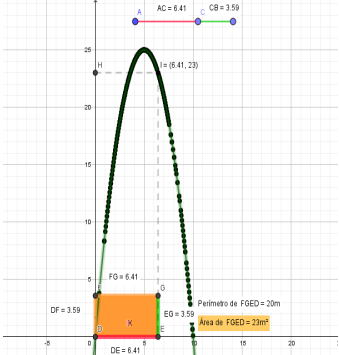
Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
S: pero también hay que tener cuidado con los colores. V: Exactamente. S: Porque un exceso de colores puede causar problemas porque el estudiante puede perder la atención. C: Sí, uno llama la atención en todos los puntos, entonces (...) puede ser significativo para el que diseña o el que modifica el recurso, pero para el estudiante puede que simplemente no tenga significado el color o se pierda de tanto de tantas cosas que están remarcadas. Los FPM interpretaron que el exceso de color puede desviar la atención o generar diferentes significados para los estudiantes.		

En la Tabla 7, se presentan separados los cambios en la THA1 del segundo grupo de FPM respecto a los focos de atención.

Tabla 7.

Resultados de los focos de atención de los cambios en la THA1 del segundo grupo de FPM

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
1	Los FPM agregaron la imagen de la figura 1 correspondiente al tablero de cartón. 	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Los estudiantes requieren usar escala para usar la lana en el tablero, dado que no tienen suficiente lana para 20 metros y porque el tablero no permite la representación de dichos rectángulos. Es posible que los estudiantes no reconozcan que el cuadrado es un rectángulo y tampoco reconocen la diferencia entre perímetro y área. Es posible que interpreten que la medida de la lana es de un lado. Como lo menciona Fandiño y D'Amore (2009) es posible que los estudiantes consideren que dos figuras isoperimétricas sean necesarias equiextensas.	
2	Los FPM agregaron la imagen de la figura 2, correspondiente al archivo GeoGebra. 	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: La tabla de algunos valores de la base, altura, perímetro y área permite relacionar los cambios que ocurren entre la base, altura y área. Se espera que la tabla permita ser un puente para llegar a la expresión general.	Los FPM agregaron la pregunta: d. Respecto a la información tabla determine: ¿Cuál es la relación entre la base y la altura de los rectángulos?

AA	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
		Se considera que la mayoría de los estudiantes determinan la expresión general de manera factorizada porque se asocia a la fórmula del área.	
3	Los FPM agregaron la imagen de la figura 3, correspondiente al archivo GeoGebra.	Los FPM agregaron en el proceso de aprendizaje hipotético: Es importante que los estudiantes realicen el movimiento del punto C desde A hasta B. En el programa GeoGebra se obtienen 3 rectángulos con área 25, por lo tanto, es necesario que los estudiantes verifiquen el área para determinar el rectángulo de mayor área.	Los FPM modificaron la redacción de la pregunta: a. Mueva el punto C, observe el punto I ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C?
			
4	Los FPM agregaron la imagen de la figura 4, correspondiente al archivo GeoGebra.		Los FPM cambiaron la redacción de la pregunta: b. ¿Por qué el punto I genera una nube de puntos en el primer cuadrante?
			

En la Tabla 8 se resumen los aspectos que interpretaron el primer grupo de FPM respecto a los focos de atención en la segunda planificación de una lección.

Tabla 8

Resultados de las interpretaciones del segundo grupo de FPM respecto a los focos de atención de los cambios en la THA1

	Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
Interpretaciones	En la línea 64 y 65, V expresó: Desenrollaron todo y empezaron a medir, yo he visto que de aquí a aquí es un metro (brazada). Uno, dos y empezaron. Desenrollaron todo y no les alcanzaba. Si van a utilizar los 20 metros cómo harías entonces. Ah, entonces no puede ser 20 metros, dijeron. Ah, pues es que es algo hipotético, entonces puede ser cualquier valor (...). Entonces César era que no, pues si son 20 metros pues podemos también tomar 20 centímetros. Los FPM interpretaron el uso de la escala como un conocimiento previo para medir la cuerda y representar los rectángulos con la cuerda sobre el tablero de cartón.	En la línea 136 a 138 C expresó: Si eso nos ocurrió con los con el rectángulo y el cuadrado. Que la definición del estudiante como que pues no permitía que se abriera a otras posibilidades. Sino que decía, no es que un rectángulo porque tiene un lado digamos más largo que el otro o más pequeño que el otro. Son desiguales necesariamente y entonces el cuadrado no empataba con esa noción que tenían de rectángulo. Y a veces es por eso se tornaba como tan complicado el hecho de que ellos aceptaran que era un rectángulo. Que un cuadrado finalmente es un rectángulo, un caso particular. C interpretó que estudiantes diferencian el rectángulo y el cuadrado porque tienen una definición personal del rectángulo que riñe con su definición formal.	En la línea 378 a 387 los FPM expresaron: V: Yo creo que de pronto hacer alguna pregunta (...) solamente se remiten como a llenar. ¿Cuál es la relación entre la base y la altura? ¿Qué cambios ves entre la base y la altura? no sé, algo, así. (...) C: Respecto a los datos de la tabla, ¿Cuál sería la relación entre la base y la altura? S. ¿Cuál sería la respuesta a eso? I: ¿De qué la suma da 10? C: O incluso se podría relacionar ya con las variables, x, y y como 10-x. Los FPM interpretaron que la tabla de valores de los rectángulos es insuficiente para obtener la expresión general del área. Es necesario agregar una pregunta sobre los valores de la tabla. C interpretó que es posible que los estudiantes, respecto a la tabla, consideren, la base como x y la altura como (10-x).
	En la línea 191 C expresó: La hoja milimétrica ayudó, a que ellos también como que	En la línea 41 V expresó: Al diseñar cada uno de los posibles cercos rectangulares asumían que	

Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
hicieran esa diferencia. Bueno, tengo 20 metros de perímetro, pero esos 20 metros de perímetro me abarcan distintas superficies, entonces aquí abarca más cuadritos por conteo. C interpretó que la hoja milimétrica ayuda a diferenciar perímetro de área porque los estudiantes contaron los cuadritos encerrados por la cuerda para determinar el área.	todos tenían la misma área (...) no lograban tener una interpretación de lo que era el perímetro y el área. V interpretó que considerar que figuras con igual perímetro tienen la misma área se debe a que no interpretan que es perímetro y área.	
	De la línea 769-773 C expresó: Como que es más probable que los estudiantes lleguen a la forma factorizada. (...) determinen la expresión general de manera factorizada porque se asocia a la fórmula del área. C interpretó que los estudiantes van a usar la expresión algebraica factorizada por su relación con la fórmula del área (base por altura).	
	En la línea 337 C expresó: Al principio (...) como que exploraron un pedacito del deslizador (...) dicen que es como una diagonal. C interpretó que los estudiantes al no mover el punto C desde A hasta B	

Caracterización de los artefactos	Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Incorporación/eliminación de información y formulación de preguntas específicas
	ven una trayectoria incompleta del punto I. En la línea 372 V expresó: En mi caso sí. Relacionaban mucho lo que indicaba GeoGebra y en un inicio tenían como ese ese problema, los lados no marcaban 5 de base y 5 de altura, sino que tenían unas aproximaciones y, sin embargo, daba el área 25. Lo único que les sugerí era que verificaran si al multiplicar daba eso, entonces ya luego vieron que no. V interpretó que los estudiantes requieren realizar la multiplicación de la base y la altura de los rectángulos para entender la aproximación del área en GeoGebra.	

“Nuestros mayores enseñan que el tiempo no es una línea recta, sino una corriente viva que siempre vuelve sobre sí misma buscando lo que aún no se ha dicho.”

Mg. Bárbara Muelas, sabedora del pueblo Misak,
Discurso de ingreso a la Academia Colombiana de la lengua,
Bogotá, 27 de junio de 2025.