



**MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS
MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR
ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

TESIS DE MAESTRÍA

JULIO ALEXANDER DELGADO DELGADO

Código 201605893

**UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE TULUÁ
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES
TULUÁ, MAYO DE 2019**



**MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS
MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR
ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

JULIO ALEXANDER DELGADO DELGADO

Código 201605893

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Magister en Educación, Énfasis Educación
Matemática y Ciencias Experimentales

Director

GILBERT CAVIEDES QUINTERO PhD.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE SEDE TULUÁ
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES
TULUÁ, MAYO DE 2019**

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Tuluá, Valle. Mayo 2019.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por la fortaleza para afrontar esta batalla; a mi familia por estar siempre a mi lado y por creer plenamente en mí; a los profes de la maestría por su paciencia, enseñanzas y consejos constantes; al profe W por todo el apoyo académico brindado, mil gracias; al Profe Gilbert por creer en esta propuesta y brindarme su apoyo en el proceso; a los directivos, docentes y estudiantes de la IEPVA por permitirme participar de este proceso y por brindarme los espacios, la paciencia y todo lo requerido para la puesta en marcha de la propuesta; a Kim por no dejarme solo y apoyarme constantemente, a mis amigos por creer en mí. A todos infinitas gracias. “La vida es de buenos amigos”

DEDICATORIA

A Dios y a mi familia, todo lo he logrado por ellos y para ellos; a Sofía que es mi motor; a Kim que con amor siempre ha estado a mi lado; a mi abuela que siempre quiso que lograra mis metas; a todos los que brindaron su apoyo para que este trabajo se lograra...

“Todo esto es gracias a ustedes y para ustedes”

TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE FIGURAS	8
LISTADO DE TABLAS	9
RESUMEN.....	10
INTRODUCCIÓN.....	12
1. NATURALEZA Y DIMENSIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	15
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	15
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	21
1.3. PREGUNTAS ORIENTADORAS.....	21
1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL ESTUDIO	22
1.5. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	25
1.6. OBJETIVOS.....	34
1.6.1. Objetivo General	34
1.6.2. Objetivos Específicos.....	34
2. MARCOS DE REFERENCIA	35
2.1. Marco teórico.....	35
2.1.1. Educación Matemática Realista (EMR).....	35
2.1.1.1. Fenomenología didáctica	37
2.1.1.2. Principio de Niveles, Matemización Progresiva	39
2.1.1.3. El proceso de matematización	43
2.1.1.4. La contextualización epistemológica	43
2.1.2. Las Relaciones Funcionales Como Construcción del Objeto Matemático.....	44
2.1.2.1. Los obstáculos Epistemológicos y los Actos de Comprensión.	46
2.1.3. Consideraciones Fundamentales para la Comprensión del Concepto de relaciones funcionales y función.....	50
2.1.3.1. Elemento de una función	51
2.1.3.2. Consideraciones con relación a la dependencia y variación en una relación funcional.....	53
2.1.3.3. Los elementos de una función lineal y su lectura.....	54
2.1.3.4. El concepto y sentido de dependencia directa e indirecta.....	56
2.1.3.5. La Representación en la Enseñanza de las Relaciones Funcionales	57
2.1.4. Los problemas de calidad del agua	59

2.1.4.1.	La Calidad del agua	60
2.1.4.2.	Los parámetros fisicoquímicos como indicadores de calidad del agua	61
2.1.4.3.	La turbiedad como indicador de calidad de agua	63
2.1.4.4.	Los sólidos como indicador de calidad del agua	64
2.1.4.5.	La temperatura como indicador de calidad del agua.....	64
2.1.4.6.	El oxígeno como indicador de calidad del agua.....	65
2.1.4.7.	Las acciones antrópicas que generan mayor alteración de los indicadores de calidad del agua	66
2.1.4.8.	Índice de calidad del agua para consumo humano.....	68
2.2.	Marco Contextual de la investigación	69
3.	METODOLOGÍA y MODELO GENERAL DE ANÁLISIS	73
3.1.	Enfoque Metodológico.	73
3.2.	Tipo de Investigación	73
3.3.	Selección de Participantes.	74
3.4.	Diseño Metodológico	75
3.4.4.	Lectura del contexto.....	76
3.4.5.	Priorización de Situaciones	77
3.4.6.	Experimentación como acto de experiencia	77
3.4.7.	Procesamiento y análisis de datos	78
3.4.7.1.	Tipo de Análisis	79
3.4.7.2.	Matematización (horizontal y vertical) y Actos de comprensión.....	81
3.5.	Instrumentos para la recolección de la información	83
3.6.	Presentación de los resultados.....	84
3.6.4.	Estructura de presentación de los análisis	84
3.6.4.1.	Descripción de la situación problema.....	84
3.6.4.2.	Objetivo de la situación problema	85
3.6.4.3.	Rejilla de relaciones	85
3.6.4.4.	Análisis y discusión de los resultados	85
4.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	86
4.1.	Análisis de la situación 1, lectura del contexto del río Guabas	86
4.1.4.	Descripción de la situación problema.....	86
4.1.5.	Objetivo de la situación Problema.....	86
4.1.6.	Rejilla de relaciones	87

4.1.7.	Análisis y discusión de los resultados	87
4.2.	Análisis de la Situación 2, El impacto de los Sólidos en el agua	99
4.2.4.	Descripción de la situación problema	99
4.2.5.	Objetivo de la situación Problema	100
4.2.6.	Rejilla de Relaciones	100
4.2.7.	Análisis y discusión de los resultados	101
4.3.	Análisis de la situación 3, La clarificación del agua.	118
4.3.4.	Descripción de la situación problema.	118
4.3.5.	Objetivo de la situación Problema.	118
4.3.6.	Rejilla de Relaciones.	118
4.3.7.	Análisis y discusión de los resultados.	119
4.4.	Análisis de la Situación 4, La incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto.....	130
4.4.4.	Descripción de la situación problema	130
4.4.5.	Objetivo de la Situación problema	130
4.4.6.	Rejilla de relaciones	130
4.4.7.	Análisis y discusión de los resultados	131
4.5.	Análisis General de los resultados de las situaciones Problema.....	138
4.6.	Logro de los Objetivos Específicos.....	140
5.	CONCLUSIONES.....	144
6.	RECOMENDACIONES	147
	BIBLIOGRAFÍA.....	150
	ANEXOS	1544
	ANEXO 1. TABLA DE OPERACIONALIZACIÓN DE CONCEPTOS	1544
	ANEXO 2 GUÍA SITUACIÓN 1	1555
	ANEXO 3 GUÍA SITUACIÓN 2	1611
	ANEXO 4 GUÍA SITUACIÓN 3	1677
	ANEXO 5 GUÍA SITUACIÓN 4	1711

LISTADO DE FIGURAS

Figura 1 Niveles de matematización, tomado de educación matemática realista bases teóricas, Bressan (et al 2016).....	40
Figura 2 Representación literal y representación cartesiana de una función lineal.....	57
Figura 3 Árbol de problemas, componente agua, municipio de Guacarí. Fuente PRAE	72
Figura 4 Esquema general de abordaje de los problemas de calidad del agua del río Guabas	76
Figura 5 Esquema general de categorización y análisis, fuente propia.....	80
Figura 6 Descripción de la estación 1, grupo de trabajo 1, G1	88
Figura 7 Descripción de la estación 2, grupo de trabajo 2, G2	89
Figura 8 Descripción de la estación 3, grupo de trabajo 4, G4	90
Figura 9 Descripción de la estación 4, grupo de trabajo 2, G2	91
Figura 10 Respuesta del grupo 5 a la pregunta número 4	93
Figura 11 Estudiantes de la IEPVA, grado noveno, trabajando en la situación problema dos	102
Figura 12 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos G1 y G3	104
Figura 13 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos G4 y G5	105
Figura 14 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos 2, G2	106
Figura 15 Respuesta del grupo 1 a los cambios observados en la experimentación	107
Figura 16 Respuesta a pregunta sobre la relación de dependencia, grupo 1	109
Figura 17 Representación tabular de la información obtenida en experimentación, grupos G1 y G5	111
Figura 18 Representación gráfica de la relación entre variables, grupos G1 y G5	112
Figura 19 Representación gráfica de la relación entre variables, grupo G2.....	113
Figura 20 Representación gráfica de la relación entre variables, grupo G4.....	114
Figura 21 Construcción de representación literal de la situación problema 2, grupos G2 y G5	115
Figura 22 Estrategias de solución para el cálculo de la turbiedad, grupos G2 y G3	116
Figura 23 Sistemas de representación empleados por los grupos G1 y G5, situación 3	123
Figura 24 Representación gráfica de la situación problema 3, grupo 2	124
Figura 25 Representación gráfica de la situación problema 3, grupo 3	126
Figura 26 Construcción gráfica propuesta por el grupo 1	135
Figura 27 Propuesta de ecuación para situación 4, grupo 1	135
Figura 28 Construcción gráfica para representar relaciones de la situación 4, grupo 4.....	136

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1 Principios estructurales de la educación matemática realista EMR	36
Tabla 2 Clasificación de los parámetros de calidad del agua	61
Tabla 3 Rejilla de análisis de contenido	82
Tabla 4 Rejilla de relaciones para situación problema uno	87
Tabla 5 Rejilla de relaciones para situación problema dos	101
Tabla 6 Rejilla de relaciones para situación problema tres	119
Tabla 7 Rejilla de relaciones para situación problema tres	131
Tabla 8 Resultados del experimento, la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto.....	133

RESUMEN

En la siguiente investigación se presenta el trabajo realizado por un grupo de 25 estudiantes y un docente del área de matemáticas donde se pone en juego la relación ciencia matemática en la identificación de relaciones funcionales, mediada a través del uso de contextos realistas asociados a la calidad del agua del río Guabas. En esta investigación, los estudiantes del grado noveno en compañía del docente del área de matemáticas de la I. E. Pedro Vicente Abadía (IEPVA), iniciaron con la identificación de los problemas de calidad del agua del río Guabas mediante la estrategia de lectura del contexto y posteriormente llevaron a la experimentación (escala laboratorio) tres de las situaciones problemas más significativas para ellos; el impacto de los sólidos en el agua, la clarificación del agua y la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto. La experimentación jugó un papel fundamental en esta propuesta ya que, gracias a la observación, la clasificación y la argumentación se pudo evidenciar el desarrollo de pensamiento científico

Todo el desarrollo de la investigación estuvo enmarcado en los postulados de la educación matemática realista (EMR) y los actos de comprensión de Sierpinska, (1992). Desde la EMR se emplearon principalmente los principios de actividad, de realidad y de niveles de matematización; desde Sierpinska se utilizaron algunos actos de comprensión (AC) y obstáculos epistemológicos dirigidos principalmente a identificación de cambios, variables, dependencias y sistemas de representación y finalmente respecto al concepto de calidad del agua se abordó la turbiedad, los sólidos, el oxígeno disuelto y la temperatura como parámetros fisicoquímicos de cambio que afectan la calidad del agua.

La metodología de trabajo estuvo enmarcada en el análisis de la producción de los estudiantes en las experimentaciones realizadas y centradas en identificación de las

relaciones funcionales de estas situaciones mediante elementos conceptuales de variación dependencia y representación vistos desde los actos de comprensión y asociados a los niveles de matematización para lo cual se construyó una rejilla de análisis de contenido.

La investigación pudo concluir que abordar situaciones reales y realizar la experimentación o réplica de las mismas en el aula favorece las condiciones del proceso de aprendizaje; los estudiantes se mostraron más interesados y cautivados por esta forma de integrar la matemática a situaciones de su contexto real, el éxito de la estrategia metodológica se fundamentó en poner al estudiantes como actor fundamental del proceso, donde podía tomar decisiones, hacer y rehacer pruebas, y sacar conclusiones propias; el estudiante se vio alejado de la enseñanza tradicional dirigida y pasó a dirigir su proceso formativo con la mediación del docente.

Palabras claves: Relaciones Funcionales, contexto realista, matematización, calidad del agua.

INTRODUCCIÓN

A partir de un recurso metodológico y didáctico surgido en la década de los años 70 del siglo pasado y conocido como “La Educación Matemática Realista” se aplicó a 25 estudiantes y un docente del área de matemáticas de la Institución Educativa “Pedro Vicente Abadía” del municipio de Guacarí, una experiencia para la enseñanza de las relaciones funcionales. El objetivo fundamental de este trabajo radica en llevar el proceso de aprendizaje del estudiante a un escenario reconocido y validado por él, pero que tenga un significado en la construcción conceptual de un objeto matemático el cual se logra a partir de diferentes actividades las cuales son seleccionadas de manera conjunta entre educandos y docente teniendo en consideración el plan de área institucional del año 2018.

Diversos estudios sobre el aprendizaje de las relaciones funcionales han puesto de manifiesto las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión de este objeto matemático debido a la falta de consideración de un contexto social e institucional en el cual se desarrolle la actividad matemática; en las aulas de clase se prioriza el uso de lenguaje matemático y se abordan los conceptos desde la matemática misma, alejada de un contexto real; situación a la que Freudenthal, (1983) llamó inversión antdidáctica; además no se hacen acercamientos a los elementos de variación, dependencia y representación como elementos fundamentales para abordar las relaciones funcionales.

Ante esta dificultad presentada y con el propósito de fortalecer los procesos de formación surge la propuesta de permitirle al estudiante la interacción con situaciones problema del contexto real llevadas al aula que al analizarlas le permitiera la comprensión de conceptos matemáticos de variación, dependencia y representación como elementos fundamentales en la identificación de relaciones funcionales. La pregunta de investigación que orientó el

trabajo cita ¿Qué tipo de relaciones funcionales logran identificar los estudiantes del grado noveno de la I.E. Pedro Vicente Abadía al analizar los problemas de calidad del agua del río Guabas?; en la pregunta de investigación se pueden identificar los conceptos a abordar en esta investigación; la calidad del agua del río Guabas y su correlación con las relaciones funcionales.

A continuación, se describe el contenido de cada uno de los apartados que conforman este trabajo

En el **primer** apartado se presentan los aspectos estructurales de la propuesta que se inicia con la naturaleza y dimensión del problema soportados en resultados de investigaciones realizadas y desde la necesidad de considerar el contexto real en procesos de formación; seguido del problema, está la justificación que muestra razones curriculares locales y académicas del desarrollo del trabajo; posteriormente los antecedentes considerados como apoyos en el proceso y finalmente los objetivos.

En el **segundo** apartado están los soportes teóricos bajos los cuales se desarrolló el trabajo de investigación; teniendo como enfoque fundamental los postulados de la educación matemática realista enfocados en los principios de actividad, de realidad y de niveles. También se consideraron los aportes de Ana Sierpiska tomando como referencia los actos de comprensión del concepto de función. El apartado dos finaliza con los elementos propios de la calidad del agua, el contexto local de la I.E. Pedro Vicente Abadía y los problemas de calidad del agua del río Guabas.

En el **tercer** apartado está la metodología la cual se desarrolló en cuatro fases, la primera lectura del contexto, la segunda la selección de las situaciones problema a trabajar, la tercera

la experimentación de experiencias y la cuarta en análisis de los resultados. Los estudiantes debían hacer un reconocimiento de los problemas de la calidad del agua del río Guabas a través de recorrido guiado por el afluente y posteriormente replicar en el laboratorio las situaciones problemas más significativas para ellos. El análisis de las producciones de los estudiantes se realizó siguiendo una rejilla de análisis de contenido propuesta donde se cruzaban los niveles de matematización con los actos de comprensión vistos desde los conceptos fundamentales de variación dependencia y representación.

El **cuarto** apartado contiene los análisis de las producciones realizadas por los estudiantes, el cual se llevó a cabo para cada una de las situaciones problema identificadas; 4 situaciones, la primera la lectura del contexto, la segunda el impacto de los sólidos en el agua, la tercera la clarificación del agua y la cuarta la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto. En todos los análisis realizados se identificaron elementos que permitieran la categorización del nivel de matematización logrado por los grupos de trabajo.

En el **quinto** y último apartado se plantean las conclusiones generales que pretenden valorar los objetivos propuestos a la luz de las producciones desarrolladas por los estudiantes en cada situación problema, adicionalmente se exponen recomendaciones y limitaciones que se presentaron en el estudio.

1. NATURALEZA Y DIMENSIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Diversos estudios sobre el aprendizaje de las relaciones funcionales, tales como los de Grueso & Gonzalez (2016), Farfán & García (2005), Angulo Vallejo (2014), Blomhoj (2004), han puesto de manifiesto las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de relación-función. Entre dichas dificultades se destaca la poca comprensión que manifiestan cuando deben modelar situaciones en donde identificar la relación funcional es un apoyo valioso para la comprensión de distintos fenómenos en contextos tanto intramatemáticos como extramatemáticos.

La enseñanza y aprendizaje del concepto de relaciones funcionales ha sido una labor dispendiosa a través de los años; aún en las aulas prevalecen prácticas netamente algebraicas y se prioriza el uso de algoritmos; estas formas de enseñanza tienden a mostrar las relaciones y las funciones como un objeto estático y desligado del verdadero contexto lo que imposibilita su interpretación y análisis. El proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto se fundamenta específicamente en proponer una fórmula, asignar valores a una de las variables y o x , y finalmente comprobar mediante la representación gráfica la forma de la expresión algebraica. También se hace creer a los estudiantes que la representación gráfica y algebraica corresponden al modelo de una situación real, alejada de su contexto como la consecución del objeto mental “relación funcional” en ellos mismos. Además, no se hacen acercamientos previos a los objetos mentales de variación y dependencia que de acuerdo con Freudenthal (1983), se constituyen en un recurso fenomenológico que permite la consecución del objeto matemático función. Tampoco se tiende a considerar el análisis y modelación de

situaciones como un recurso didáctico que permita la comprensión del concepto de relación funcional; al respecto Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996) consideran que el uso de situaciones reales, externas a las matemáticas sirven como soporte concreto para la comprensión del concepto de función.

De igual manera, no se pueden desconocer las múltiples dificultades que traen los estudiantes al realizar operaciones aritméticas básicas y reconocer el lenguaje algebraico, de allí la dificultad de representar situaciones problemáticas en lenguaje matemático. Esto genera que sea aún más difícil el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos como las relaciones funcionales y aún más si estos son enseñados sin un contexto afín por lo que el estudiante termina memorizando procesos, procedimientos y reglas y desvinculando el álgebra de las matemáticas y terminan refiriéndose a esta última como operaciones con letras.

La enseñanza del concepto de relaciones funcionales gira actualmente en torno al registro algebraico, la relación de este registro con otros registros, como el gráfico, tiende a ser limitado a una simple ejemplificación. Es por esto que se recomiendan tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (López & Sosa, 2008) (como se citó en Grueso, 2016). El concepto de función ha disipado su verdadera potencialidad en procesos de modelación y en fenómenos dinámicos, (Carlson & Oehrtman, 2005) y se ha oscurecido su esencial significado desde su carácter variacional, hacia una acción de correspondencia entre variables, es decir, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (Freudenthal, 1983, p. 497), (cómo se citó en Farfán & García, 2005).

Ahora bien, la problemática de analizar la posible potencialidad de las relaciones funcionales en el estudio de fenómenos del mundo real, tienen en este trabajo un antecedente en la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía (IEPVA) del municipio de Guacarí, donde en varias propuestas de aula se ha venido implementando un modelo que basa el currículo en el análisis de problemáticas ambientales municipales y donde las matemáticas se ponen al servicio para aportar en la solución de dichas situaciones; docentes y estudiantes han manifestado lo importante de desarrollar los procesos de formación partiendo de una situación propia, y de interés de la comunidad educativa. Los problemas ambientales que se presentan en el municipio de Guacarí pueden ser abordados por la escuela y deben ser llevados al aula de clase como modelo de formación.

La IEPVA a través del Proyecto Ambiental Escolar (PRAE) ha separado el análisis de las problemáticas ambientales del municipio de Guacarí en cuatro componentes, aire, agua, suelo y biodiversidad, enmarcados en una situación de desconocimiento del territorio por parte de sus habitantes; específicamente se ha hecho un gran esfuerzo institucional por abordar las situaciones de calidad del agua, debido a las afectaciones que ha sufrido el recurso hídrico por parte de las actividades antrópicas; la fuente de abastecimiento de agua para el municipio es el río Guabas quien hace parte de la cuenca que lleva su nombre. El acceso a este recurso en el municipio de Guacarí tiene que ver con su distribución geográfica natural y con la infraestructura de que se dispone para aprovecharlo; este último aspecto está muy relacionado con cuestiones económicas, políticas y sociales del país y de la región, por ejemplo, para satisfacer las necesidades de agua en la localidad, se usan las fuentes hídricas, de igual manera para hacer el vertimiento de aguas residuales y de desechos sólidos resultantes de las actividades domésticas y de la agricultura de subsistencia de los habitantes que se ubican en

las márgenes del río, así como del monocultivo de la caña de azúcar que, aproximadamente desde 1960, se ubicó en la zona plana del municipio e incrementó el uso de agroquímicos; adicionalmente, la explotación artesanal del oro que se realiza en la vereda La Magdalena, en zona de montaña, sobre las márgenes del río Guabas y de sus afluentes Lulos y Flautas, genera vertimientos de aguas residuales con trazas de mercurio y cianuro (CVC, 2007) y luego, de esta misma corriente, se capta el agua para el acueducto municipal.

Como consecuencia de estas actividades realizadas sin el suficiente control y manejo de los impactos ambientales, se presenta la alta contaminación de las aguas del río Guabas, cuya solución se vislumbra lejana, por la débil organización comunitaria. La contaminación del río Guabas se evidencia por el cambio de las condiciones físico-químicas del agua (cambios en el color, la turbiedad, el pH, el oxígeno disuelto, presencia de metales), el aumento en la sedimentación, que incrementan los costos de potabilización, la pérdida de caudal y el testimonio de la percepción sensorial que tiene los habitantes que día a día interactúan con la fuente (Comunicación personal funcionarios de Acuavalle S.A. 2016). Estas condiciones disminuyen la disponibilidad del agua, que se agudiza por el bajo caudal en épocas de sequía, dado el deterioro del suelo y de la cobertura vegetal, por las prácticas socioculturales ya descritas en la situación ambiental.

El panorama que presenta el recurso hídrico en el municipio de Guacarí no puede ser olvidado por la escuela, esta situación debe ser analizada, estudiada por docentes y estudiantes para entenderla y generar un cambio en este proceso de deterioro. La cuenca del río Guabas con sus múltiples relaciones puede convertirse en el laboratorio de aprendizaje de diferentes disciplinas y en especial, las matemáticas pueden aportar los conceptos y conocimientos para la interpretación de la situación logrando tres cosas, primera facilitar el

aprendizaje de conceptos matemáticos en contexto, segunda integración de áreas de conocimiento bajo la resolución de problemas y finalmente una mayor conciencia hacia el uso de los recursos naturales.

La naturaleza del problema tiene su origen en el reconocimiento de la ausencia de integrar el contexto sociocultural y ambiental a los procesos de formación, específicamente a la enseñanza de las matemáticas. La Institución Educativa Pedro Vicente Abadía (IEPVA) cuenta con un modelo curricular que propone integrar las situaciones ambientales problémicas del contexto municipal en el aprendizaje de las áreas del conocimiento de manera interdisciplinar, favoreciendo la didáctica de resolución de problemas; este modelo intenta desarrollarse ampliamente a nivel de la educación media técnica de la institución, pero presenta mayores dificultades en la educación básica debido al desconocimiento y falta de análisis didáctico de las situaciones ambientales del contexto en el cual se desarrolla la vida de la comunidad educativa. Las situaciones ambientales terminan convirtiéndose únicamente en la primera clase de cada periodo académico y son invisibilizadas el resto del tiempo de formación.

Los docentes de la institución, desconocen el contexto socio cultural del estudiante y priorizan su quehacer en potenciar los conceptos matemáticos aislados de la realidad del contexto. Según Freudenthal (1983), esta situación se conoce como “inversión antdidáctica” la cual consiste en comenzar por los conceptos y no por la actividad matemática, enfoque contrario a su propuesta de Fenomenología didáctica que toma los fenómenos del mundo real (problemas de calidad del agua por ejemplo) que precisan ser organizados y los interpreta a través de conceptos matemáticos que son los medios de organización a partir de los cuales se enseña al estudiante a manipular el concepto involucrado (como se citó en Angulo, 2014).

La enseñanza de conceptos descontextualizados, que no reconocen situaciones de la vida real de los estudiantes ni los lineamientos curriculares, hacen que el aprendizaje carezca de importancia, no se considere útil y no será significativo para quienes aprenden. En este sentido, Blomhoj, (2004) considera que el uso de situaciones del contexto se convierte en una herramienta poderosa para motivar el aprendizaje de las relaciones y funciones, es por ello que se debe buscar la problematización de los problemas de calidad del agua vistos desde las alteraciones los parámetros fisicoquímicos, su variación, el efecto de uno sobre otro (dependencia), para de esa manera construir el concepto de relaciones funcionales; en el análisis de estos problemas mediante prácticas experimentales surge la necesidad de relacionar variables, analizar correspondencias de datos, realizar generalizaciones, predecir comportamientos, relacionar e interpretar representaciones, entre otros procesos que aportan a la comprensión del concepto de relaciones y funciones.

Así pues, las matemáticas y el medio ambiente no están tan alejadas como pudiera parecer. En un nivel superior de conocimiento, esta proximidad es bastante evidente, pues casi todas las ciencias relacionadas con el medio ambiente necesitan instrumentos matemáticos para su desarrollo. Es posible encontrar múltiples conexiones, estas conexiones permiten comprender aspectos medioambientales a la vez que se contextualizan determinados contenidos matemáticos, por lo que sería provechoso intentar ponerlas de manifiesto en las matemáticas escolares comunes para todos los individuos, abriendo así un campo de trabajo en Educación Matemática (Gámiz, Flores Martínez & Gutiérrez Pérez, 2008).

Teniendo en cuenta la oportunidad que brinda el modelo curricular de la institución, las problemáticas ambientales que presenta el recurso hídrico en el municipio de Guacarí, el

interés de hacer unas matemáticas ambientales y favorecer al aprendizaje de los estudiantes nos planteamos la siguiente pregunta de investigación.

1.2.FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Qué tipo de relaciones funcionales se logran identificar cuando los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía, analizan los problemas de calidad del agua del río Guabas?

1.3.PREGUNTAS ORIENTADORAS

Para tener una adecuada ubicación conceptual y abordar la pregunta planteada a través del desarrollo de la investigación se hacen las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿De qué manera las alteraciones de los parámetros fisicoquímicos del agua del río Guabas Permiten la aproximación a los conceptos de variación y dependencia?
- ¿Cuáles son los sistemas de representación empleados por los estudiantes para mostrar la relación entre los cambios de los parámetros físicos del agua?
- ¿Qué nivel de matematización de las relaciones funcionales alcanzan los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía al integrar el análisis de los problemas de calidad del agua del río Guabas en la clase de matemáticas?

1.4.JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

Estudios como el de Angulo, (2014) sobre el aprendizaje de las relaciones funcionales y la función, han demostrado lo significativo que es el uso de contextos o situaciones reales asociadas al estudiante; esto favorece la comprensión de los objetos matemáticos y de las situaciones, además de permitir una mayor significancia a los procesos académicos e incluso, el estudiante puede predecir comportamientos y sacar sus propias conclusiones a fenómenos que lo rodean.

La Institución Educativa Pedro Vicente Abadía a través de su proyecto ambiental escolar ha realizado el gran esfuerzo de integrar las situaciones ambientales del municipio de Guacarí a su propuesta curricular; se intenta trabajar desde las diferentes áreas académicas en la comprensión de los problemas ambientales que aquejan a la comunidad; estos problemas que son conocidos y vividos por la comunidad educativa no pueden ser olvidados por la escuela, estas situaciones son el laboratorio real de aprendizaje de los estudiantes; por ello el área de matemáticas no puede ser ajena a esta rica oportunidad académica que le brinda el modelo curricular de la institución y las propias situaciones del contexto de los problemas ambientales del municipio; las matemáticas deben aparecer para brindarle al estudiante herramientas que le permitan analizar comprender y actuar frente a estas situaciones que son de su cotidianidad.

Los problemas de calidad del agua del río Guabas, en el cual se presentan acciones antrópicas que desencadenan variaciones negativas en los parámetros fisicoquímicos del río deben ser del interés de la comunidad educativa; día a día esta fuente de agua debe sobrevivir a acciones como la disposición inadecuada de residuos sólidos, el vertimiento de materiales de construcción, el vertimiento de aguas residuales industriales y domésticas, que generan

variaciones de la turbidez, aumento de sólidos disueltos, aumento de la DBO, lo que hace que sea más difícil y costoso realizar procesos de potabilización para que este líquido sea apto para el consumo de la comunidad

Todas estas acciones antrópicas que sufre un río pasan por un sin número de variables, la identificación de ellas, de encontrar relaciones de dependencia, de predecir su comportamiento, entre otras; el desarrollo de todo esto lleva a la comprensión de la situación y tomar postura frente a la misma. En el mismo sentido los estudiantes del grado noveno necesitan apropiarse del concepto de relaciones funcionales y función, sus elementos, tipos y características; es por ello que esta propuesta cobra importancia al reconocer que las situaciones problemas de calidad del agua del río Guabas son una gran oportunidad para favorecer la comprensión de situaciones y de relaciones funcionales y tomar postura frente a los impactos ambientales que sufre la fuente de agua.

Por otra parte, los lineamientos curriculares de matemáticas establecen que se deben trabajar problemas del contexto, de otras ciencias y problemas propios de las matemáticas. Muchas veces dejamos de lado los problemas de otras ciencias y estos pueden facilitar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos matemáticos. Este trabajo es un aporte para potenciar el plan de área de matemáticas desde los procesos de análisis de situaciones del contexto a través de la problemática ambiental materializada en el análisis de los fenómenos con relación a la calidad del agua de río Guabas.

Autores como Blomhoj, (2004), consideran que es relevante como práctica de enseñanza y aprendizaje, poner en relación el mundo real y la matemática. Esto puede llevar a los estudiantes a establecer “raíces cognitivas” sobre las cuales se pueden construir conceptos matemáticos de importancia; La modelación de situaciones es entonces una estrategia

potente para motivar el aprendizaje de las funciones, dado que a partir de contextos matemáticos, análisis de situaciones cotidianas o prácticas experimentales surge la necesidad de relacionar variables, analizar correspondencias de datos, realizar generalizaciones, predecir comportamientos, relacionar e interpretar representaciones, entre otros procesos que aportan a la comprensión del concepto de función y que permite hacer la descripción y análisis total del fenómeno o situación que se estudia y que además posibilita realizar predicciones en torno a la situación.

Para Sierpiska (1992), tradicionalmente en la escuela los docentes enfocan su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto función, dejando sin importancia en muchas ocasiones un análisis profundo y detallado sobre los elementos propios que permitan fundamentar un concepto con suficiente significado para ser aprendido. Consecuencia de esto es que los estudiantes terminan repitiendo rutinas sobre objetos algebraicos que poco sentido tienen para ellos.

Otros autores como Azcárate (1996), Ruiz Higuera (1998), Fiol & Fortuny (1990) consideran que planear situaciones que involucren relaciones de dependencia entre magnitudes brinda un acercamiento a la noción de relaciones funcionales y sus elementos; también recomiendan usar problemas prácticos de la vida real que puedan asociar elementos funcionales para introducir el concepto de función.

En conclusión, se considera que la articulación de los problemas de calidad del agua del río Guabas y el aprendizaje de las relaciones funcionales puede facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos en contexto, integración de áreas de conocimiento bajo la resolución de problemas y una mayor conciencia hacia el uso de los recursos naturales.

1.5.ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Para efectos de información, conocimiento, ubicación histórica, ampliación y aprovechamiento general de otras experiencias para la investigación, se hizo un recorrido y análisis conceptual a diferentes trabajos relacionados con aspectos dados en los procesos de comprensión para los estudiantes en el tema de las relaciones funcionales dentro de contextos reales; también se consideró el uso de referentes en cuanto a la calidad del agua de una fuente hídrica procesos, procedimientos e indicadores de calidad.

Se referencia en primer lugar la tesis de maestría titulada **“Conceptualización de la función lineal y afín: una experiencia de aula”** (Sánchez, 2016) teniendo en cuenta que su objetivo central se enfocó realizando una intervención de aula que permitiera a los estudiantes aproximarse a los conceptos de “variación” y “dependencia” como elementos estructurales en la comprensión de las relaciones funcionales; esta intervención se desarrolló mediante un enfoque cualitativo siguiendo los principios de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1970) a través de tareas contextualizadas y enfocadas en los sistemas de representación.

Sánchez, afirma que “las dificultades reportadas por anteriores estudios en la comprensión del objeto matemático función lineal y afín aún siguen vigentes” (p. 12) atribuyendo esto como consecuencia a la forma desarticulada y descontextualizada en que el objeto matemático ha sido presentado, donde se han desconocido conceptos transversales previos como “variación” y “dependencia” trayendo como consecuencia una falta de articulación razonada en el objeto matemático; agrega también: “ para facilitar la comprensión del concepto función lineal se requiere de hacer actividades que permitan el acercamiento a los

conceptos de variable y dependencia; que se puedan identificar, representar, generalizar en diferentes sistemas con contextos reales”. (p. 89)

Como principal conclusión del trabajo realizado por Sánchez y aporte a la investigación es haber identificado en los estudiantes de ese grado, que aunque ya tenían ideas relacionadas con las variables, que sus significados sobre funciones eran limitados y las relacionaban con expresiones estáticas, con los cuales podían realizar ciertos procedimientos de forma muy limitada, razón por la cual se realizaron tareas que permitieron tener un abordaje previo al trabajo simbólico con las variables, se seleccionaron contextos reales que permitiera a los estudiantes percibir qué cambia, cómo se produce el cambio y poder comunicar su percepción en diferentes registros de representación.

Este trabajo permitió a los estudiantes tener una idea amplia de los objetos matemáticos “variable” y “dependencia” que gradualmente se fueron ampliando en su significado para establecer relaciones entre diferentes magnitudes. (p. 90). Se hizo énfasis en el significado de “dependencia” para abordar variados problemas en distintos campos, para modelar matemáticamente los mundos y entender que los diferentes fenómenos que ocurren en la naturaleza no son ni aislados, ni sin sentido. Como aporte didáctico Sánchez dio una mirada a los obstáculos epistemológicos, donde recomienda la necesidad de saber identificarlos a través de las experiencias en el aula para poderlos reducir al máximo en el proceso de enseñanza.

En ese proceso de revisión se abordó el documento de maestría titulado **“Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal”** (Ángulo, 2014) en el que se encuentra diversos aportes que permiten fortalecer a través de la matemática realista la adecuada comprensión de las relaciones funcionales. Inicialmente se ubica el problema a nivel local desde la institución en el grado noveno frente a la forma de

construcción de un objeto matemático, donde se reconoce el desconocimiento del factor sociocultural para el desarrollo del aprendizaje de la actividad matemática (p. 2), que es un factor adverso a lo que se pretende desde la propuesta didáctica de los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (MEN, 1998) y a lo que se conoce como “Inversión didáctica” (Freudenthal, citado por Ángulo 2014).

La propuesta más importante está en la construcción de una unidad didáctica en su forma e intención, la cual se enfoca a tener un contenido matemático específico enmarcado en un espacio socio-cultural determinado (p.5), selección de tareas significativas en contexto, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas al respecto.

El contexto en el que se desarrolló la propuesta, partió de considerar y valorar el énfasis de la institución educativa, proyectos agroindustriales (producción de pandebono), coherente al Proyecto Ambiental Escolar PRAE, identificando las problemáticas regionales para dar mayor sentido y apropiación al proyecto que tiene elementos en común con el de la IEPVA que tomó como parte del contexto los problemas de calidad del agua del río Guabas.

La investigación tuvo como resultados importantes: El abordaje del concepto función desde tres dimensiones (Estructura conceptual, Sistemas de representación, Fenomenología y Modelación matemática); mejorar el proceso de enseñanza ya que contribuyó a un conocimiento claro y completo sobre el concepto de función lineal en su estructura, formas de representación y relación con situaciones del contexto. Este resultado permite al trabajo de la IEPVA que se puede involucrar el abordaje del objeto matemático desde esas tres perspectivas y aplicando como contexto la calidad del agua del río Guabas.

Como elementos estructurales para la construcción de la unidad didáctica se tuvo en cuenta los conceptos de los Estándares Básicos de Competencia (2016): en la parte de la modelación (p. 52); situación y formulación del problema (p. 56). En el proceso de

investigación la maestra investigadora afirma que “...el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de modelación”

Se encuentra un estudio muy puntual sobre la dimensión didáctica de las relaciones funcionales, en un artículo titulado **“Aportes didácticos para el concepto de función” (2009)**, que entre todas sus consideraciones analiza un aspecto estructural para la investigación, que es el abordaje del concepto de función a partir de experiencias asociadas a un contexto más familiar en el lenguaje del estudiante sin perder su sentido matemático. En estudios precedentes a la investigación en la evaluación de una muestra de estudiantes universitarios para conocer como han interiorizado el concepto de función concluyeron:

... Las situaciones ligadas a las diferentes concepciones de los alumnos se refieren al uso de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Se utilizan fórmulas como “recetas”, sin utilizar su gran poder modelizador. Las fórmulas algebraicas son visualizadas como conjunto de técnicas eficaces para encontrar el valor de las incógnitas, esta concepción elimina el sentido de variabilidad, movilizandando incógnitas en lugar de variables” (p. 155).

Esta interpretación conduce a que se muestren aportes y recomendaciones a la forma de llevar al aula de clase los fundamentos de las relaciones funcionales, evitando caer en la “algebraización” del concepto haciendo énfasis en los significados de la implicación de los aprendizajes que tienen los términos “dependencia” y “variabilidad” para poder entender el comportamiento de cualquier fenómeno y ver la información matemática solo como un recurso que favorece la comprensión a través de la ciencia; al respecto:

... Muchas de las dificultades que tienen los alumnos aparecen cuando utilizan las representaciones del concepto de función... []

Las limitaciones están relacionadas, muchas veces, con la ausencia del potencial modelizador de la noción de función. Uno de los conceptos constitutivos de la noción de función entendida como herramienta apta para modelizar fenómenos de cambio es la noción de dependencia. La noción de dependencia implica la existencia de un vínculo entre cantidades y conlleva la idea de que un cambio en una de las cantidades tendrá efectos sobre las otras.

Pero la noción de dependencia es difícilmente identificable sin otra noción que constituye el verdadero punto de partida del concepto de función: la variabilidad. En efecto, el único medio de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar cada una por vez y constatar el efecto de la variación. Los principales elementos que integran la noción de función son, entonces, la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia, y sus distintas formas de representación. Para que las funciones puedan ser una verdadera herramienta de modelización, es necesario que no se oscurezca su esencial significado de dependencia entre variables, perdiendo su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático. (p. 156).

Desde esta perspectiva y teniendo en cuenta que una de las características de la experiencia en la IEPVA, es el trabajo colaborativo en espacios de contexto para la modelación de significados que se elaboraron en el salón de clase o en actividades de campo de manera conjunta, los trabajos planeados se aplicaron en equipos buscando la socialización de las experiencias de acuerdo con las relaciones funcionales.

Como referente del concepto de los problemas de calidad del agua se tomó el estudio realizado por (Torres, Cruz, & Patiño, 2010), titulado **“Índice de calidad del agua (ICA) en fuentes superficiales utilizadas en la producción de agua para consumo humano”**; en

este estudio se hace un análisis de los índices de calidad del agua, conocidos por su sigla ICA y su importancia para la evaluación de la calidad del agua para consumo humano. La investigación establece que a nivel nacional el deterioro del recurso hídrico está asociado principalmente a los vertimientos de aguas residuales domésticas e industriales, la producción agrícola y ganadera, la actividad minera en la parte alta de los ríos y a la mala disposición de residuos sólidos que hacen las comunidades; dado el deterioro del recurso hídrico se hace necesario determinar índices de calidad que puedan alertar a la comunidad sobre el consumo de agua no apta para consumo humano y establecer causas y consecuencias de estas acciones y las alternativas de mejoramiento.

Lo importante del análisis realizado por los investigadores, y en relación directa con esta investigación es el saber que para establecer un índice de calidad del agua, primero se deben determinar cuáles deben ser los parámetros fisicoquímicos que presentan mayor variación a la hora de presentarse acciones antrópicas que finalmente llevan a problemas de calidad del agua (mayor nivel de riesgo); de los 10 índices de calidad analizados en este estudio, al menos 7 priorizaron el oxígeno disuelto, la turbiedad, la temperatura y los sólidos totales como características fundamentales a la hora de determinar la calidad del agua; a estos parámetros les establecieron las mayores ponderaciones de la lista de 44 parámetros sugeridos; por ejemplo, la ponderación del oxígeno disuelto es la mayor con valor de 0.7, en una escala de 0 a 1 de prioridad; la temperatura, los sólidos y la turbiedad tienen un valor ponderado de importancia de 0,4.

Después del análisis de las características específicas de cada índice de calidad del agua se concluye que los parámetros mayormente empleados en los ICA presentados son el oxígeno disuelto y el pH, seguido por la DBO, los nitratos, los coliformes fecales, la temperatura, la turbiedad y los sólidos disueltos totales, lo que confirma que a la hora de

hablar de problemas de calidad de agua debemos priorizar aquellos que ocasionan variaciones en estos parámetros fisicoquímicos.

En un estudio similar realizado por (Rojas, Macías, & Fonseca, 2010) titulado **“El Índice de Calidad de Agua como herramienta para la gestión de los recursos hídricos”** se establecieron nueve parámetros como variables importantes a la hora de determinar la calidad del agua; estas variables fueron: Oxígeno Disuelto, DBO5, Coliformes Fecales, pH, Nitratos, Fosfatos, desviación de la Temperatura, Turbidez y Sólidos Totales; también se concluyó que cualquier actividad natural o antrópica que favorezca la variación de estos parámetros debe ser considerada como un problema de calidad del agua.

En el estudio realizado por (Carvajal Florez, 2009) titulado **“Impacto Ambiental y Social del Vertimiento de Residuos Sólidos y Escombros Sobre la Calidad del Río Medellín y Algunos de sus Afluentes”** se pretendía evaluar la influencia del vertimiento de residuos sólidos domiciliarios y escombros sobre la calidad del agua del río Medellín y algunos de sus afluentes; para poder llevar a cabo el trabajo, la investigadora determinó que debía priorizar algunos parámetros fisicoquímicos que le permitieran medir la influencia de las variables en juego, para ellos estableció un sistema de monitoreo de calidad del agua a través de los parámetros DBO, sólidos en el agua, pH, oxígeno disuelto, conductividad y turbiedad, además de caracterizar los residuos sólidos encontrados sobre las márgenes de cada cauce y la composición granulométrica de los escombros y materiales de arrastre.

La metodología empleada por la investigadora inicia con la revisión de información referente al comportamiento ambiental del río Medellín, sus afluentes y visitas de campo, para de esta manera poder seleccionar desde la revisión documental y la observación los lugares más críticos en cuanto a la disposición inadecuada de residuos domiciliarios,

presencia de escombros y zonas de arrastre y acumulación de materiales; una vez selecciona los afluentes a intervenir realiza un mapa de puntos de muestreo y establece un plan de muestreo de agua para determinar la variación de los parámetros DBO, Sólidos en el agua, pH, oxígeno disuelto, conductividad y turbiedad lo que finalmente le permitió evaluar la calidad del agua de la zona y dividir la cuenca de acuerdo a las variaciones encontradas. En el análisis de las muestras de agua empleó equipos portables de campo para los parámetros de turbiedad (turbidímetro), oxígeno disuelto (oxímetro), conductividad (conductímetro), pH (pHmetro), todos los análisis realizados bajo los lineamientos y procedimiento establecidos en los Standard Methods; para el caso de la DBO y los sólidos emplearon técnicas de laboratorio como la filtración, la incubación y la digestión.

Para la presentación de los resultados la investigadora entre otras, hace uso de las gráficas de dispersión que permitieron ver la variación de los parámetros fisicoquímicos en función de la presencia de acciones antrópicas que repercutían directamente en la calidad del agua de la fuente evaluada.

Finalmente, la investigación concluye que es importante realizar mediciones periódicas de diferentes parámetros fisicoquímicos para establecer relaciones entre los cambios presentados por estos parámetros y las acciones que genera la comunidad sobre las fuentes evaluadas; estas relaciones les permitirán a las entidades públicas identificar los puntos críticos o responsables directos para el diseño de acciones concretas o campañas de educación que sean requeridas.

En conclusión, los antecedentes considerados para el desarrollo de este trabajo permiten visualizar la forma de abordar las categorías conceptuales desde aspectos específicos. Para el caso de las relaciones funcionales, se concreta la importancia de trabajar este objeto matemático desde los conceptos de variación, dependencia y representación y que se deben

abordar desde una situación realista como los son los problemas de calidad del agua del río Guabas, los cuales en paralelo con la investigación realizada por (Carvajal Florez, 2009) pueden ser abordados desde la variación de los parámetros fisicoquímicos; esta investigación muestra que estas variaciones pueden ser el vehículo para el aprendizaje de las relaciones funcionales.

Los estudios de ICA realizados por (Rojas, Macías, & Fonseca, 2010) (Torres, Cruz, & Patiño, 2010) permitieron tener en cuenta que para hablar de calidad del agua se deben priorizar ciertos parámetros físicos y químicos que evidencian mayores variaciones como lo son la turbiedad, el oxígeno disuelto, la temperatura y los sólidos y que a su vez de deben considerar las técnicas de análisis empleadas y los equipos requeridos.

1.6. OBJETIVOS

1.6.1. Objetivo General

Caracterizar las relaciones funcionales que logran identificar los estudiantes del grado noveno de la I.E. Pedro Vicente Abadía, al analizar los problemas de calidad del agua del río Guabas.

1.6.2. Objetivos Específicos

- Describir las variaciones de los parámetros fisicoquímicos del agua del río Guabas que permiten mediante la experimentación la aproximación a los conceptos de variación y dependencia en el aprendizaje de las relaciones funcionales.
- Analizar los registros de representación empleados por los estudiantes para ejemplificar la relación de los parámetros físicos del agua y su influencia en la potabilización
- Identificar elementos que evidencian el nivel de matematización de las relaciones funcionales que alcanzan los estudiantes al abordar contextos realistas.

2. MARCOS DE REFERENCIA

2.1.Marco teórico

Los objetos matemáticos en el proceso de formación en el aula han generado multiplicidad de maneras en las formas de captación teórica y práctica a través del tiempo; que van desde aprendizajes bien logrados o en su defecto con resultados y consecuencias muy negativas, por una comprensión inadecuada y sin contextos lógicos. Esto ha permitido que en los campos de la didáctica y la pedagogía se genere una amplia gama de investigaciones en busca de elementos que conduzcan a que los acercamientos a las relaciones funcionales (que es de vital importancia para entender muchos fenómenos naturales y sociales) pueda convertirse en un tema de interés y necesidad en la formación básica y profesional en la educación matemática de las nuevas generaciones.

Para efectos de la investigación en la IEPVA en el tema de la comprensión de las relaciones funcionales aplicadas a los comportamientos actuales de las aguas del río Guabas, la selección epistemológica se ha enfocado desde las siguientes directrices:

2.1.1. Educación Matemática Realista (EMR)

La EMR es una corriente didáctica asociada a la enseñanza de las matemáticas, la cual se atribuye al alemán Hans Freudenthal como su fundador. Nace en los años 60 del siglo XX en Holanda en reacción a los resultados de la “Matemática Moderna” o “Conjuntista que a juicio de muchos círculos académicos del momento no produjo en los estudiantes los resultados esperados.

El fundamento o principio central de la EMR es que su enseñanza aprendizaje debe estar conectada a una realidad que vivan los estudiantes o quien la aprenda, la cual debe ser relevante para la sociedad desde una perspectiva eminentemente humana.

Los principios estructurales sobre los cuales se construye la EMR son seis, los cuales se resumen en la siguiente tabla (Tomada de Alsina, A. 2007. p. 121-122):

Tabla 1 Principios estructurales de la educación matemática realista EMR

PRINCIPIO	¿QUÉ ES?	¿CÓMO PUEDE TRABAJARSE?
De actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser del mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.
De niveles	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: • Situacional: en el contexto de la situación. • Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. • General: exploración, reflexión y generalización. • Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematización progresiva (profesor) y reinención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
De reinención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.

De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendizaje son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar
De interconexión	Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría...) no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

Teniendo en cuenta que este modelo de enseñanza es el eje central de la investigación, es necesario profundizar los conceptos de fenomenología, matematización, realidad (contexto), y reinención guiada.

2.1.1.1.Fenomenología didáctica

De acuerdo a Puig (1997), el análisis fenomenológico de Freudenthal presenta como objetivo principal la enseñanza de las matemáticas a través de la organización de los fenómenos de la naturaleza a través de los conceptos de las matemáticas, dejando de lado la explicación de la matemática como disciplina. Teniendo en cuenta lo anterior, las ideas que se forman los estudiantes sobre la matemática y las ideas que tienen los profesores de las mismas influyen de manera significativa en todo el proceso de formación que ocurre en el aula, pues estas definen las maneras en que se concibe la actividad matemática en general.

Por otro lado, el autor menciona que la idea de las matemáticas como un modo de organización de los fenómenos del mundo los cuales serán organizados a partir de sus propiedades, las acciones que se hacen sobre ellos o las propiedades de esas acciones, revelan que los conceptos matemáticos no están en un mundo necesariamente abstracto y ajeno, ni

que el estudio de las matemáticas es un reflejo de un mundo ideal estudiado de manera fragmentada.

Al ser creados como medio de organización de fenómenos, aparecen necesariamente en el mundo de la experiencia de los estudiantes, surgiendo la dupla o relación fenómenos/medio de organización o lo que matemáticamente se ha conocido como noumenon/phenomenon, donde el primero según Puig (1997) identifica con “objeto de pensamiento”, “lo que es pensado mediante la razón” o “lo inteligible” y el segundo, lo que se nos aparece de las cosas, creando así, conceptos matemáticos que ocurren una y otra vez, como sucede con el concepto de “relaciones funcionales”, el cual se puede abordar desde diferentes contextos de la vida cotidiana (p.5). De esta manera, el autor menciona que no existen dos mundos distintos, sino que hay uno solo que crece con cada resultado de la cognición humana que implica la actividad matemática.

Según Gravemeijer & Teruel (2000), para Freudenthal fue sumamente importante el campo fenomenológico de los objetos matemáticos, el cual se puede entender como el “objeto pensado” o noumenon y propone el uso de situaciones fenomenológicamente ricas para poder acceder a él a través de situaciones que puedan ser organizadas. En este tipo de didáctica, las situaciones deben ser elegidas de modo tal que se puedan organizar por medio de los objetos matemáticos que tengan los estudiantes a su alcance. En este sentido, el objetivo principal de la EMR es considerar cómo el objeto pensado describe y analiza el fenómeno, de qué manera el fenómeno permite o da acceso al cálculo y a la actividad de pensamiento.

En el campo de la didáctica fenomenológica, las situaciones en las que se aplican temas matemáticos, deben ser investigadas para proyectar la posibilidad de realizar una

matematización progresiva, es decir, deben conocerse a fondo para poder diferenciar el nivel de problematización que incluye y de esta manera buscar posibles respuestas, iniciando desde el sentido común y avanzando hasta contenidos matemáticos que ofrezcan la comprensión y resolución de los mismos. Se trata de una perspectiva pragmática de la matemática en tanto, es una forma práctica de resolver problemas, por tal razón, es muy importante que el docente postule problemas que incluyan procesos con implicaciones actuales, como es el caso del componente ambiental en el contexto de la institución educativa Pedro Vicente Abadía

Una vez se ha podido conquistar esto, se puede llegar a una matemática formal que se convierta en un proceso de generalización, apropiación y formalización de conocimiento y procedimientos matemáticos al servicio de la resolución de problemas en situaciones específicas en medio de una variedad de situaciones. La fenomenología didáctica es una ruta que consiste en investigar las diferentes manifestaciones y usos de un determinado objeto matemático en la realidad, como es el caso del objeto matemático “relaciones funcionales” que es recurrente como fenómeno en la vida real. Siempre estamos expuestos a enfrentarnos con situaciones de variación, de cambio y formas de cambio que indirectamente ponen sobre la mesa los elementos de una función, este objeto matemático es transversal a todas las áreas del conocimiento y permite la interpretación y predicción de fenómenos o situaciones en todas las ciencias, de allí la importancia de la enseñanza y comprensión de este objeto a partir del análisis de situaciones o problemas.

2.1.1.2. Principio de Niveles, Matematización Progresiva

Como se ha mencionado, Freudenthal centró su trabajo en el estudio de conocer cómo pasa un estudiante del conocimiento informal, al preformal y de ahí al conocimiento matemático, a su vez, se dedicó a estudiar las posibilidades que permiten pasar de un estado

a otro. En consonancia con una matemática accesible para todos, realizó aportes que apuntan a facilitar dichos tránsitos, profundizando en el proceso de matematización y en la construcción de secuencias didácticas que fueran posibles en las aulas, teniendo en cuenta los diferentes tipos de saberes a enseñar y las variadas formas de apropiación que pueden tener los estudiantes.

Para comprender mejor este proceso, Freudenthal (cómo se citó en Gravemeijer & Teruel, 2000) propone distintos niveles de comprensión que se caracterizan básicamente por los tipos de actividades mentales y lingüísticas. Se aclara que no se propone unos niveles que responden a una jerarquía estrictamente ordenada, pero si están relacionados con estrategias, modelos y lenguajes de diferentes categorías cognitivas que evidencian la evolución entre niveles. Es importante resaltar que el cambio de nivel se da solo cuando una actividad mental es sometida a su análisis (metacognición) en el siguiente nivel.

Según Bressan, Gallego, Pérez, & Zolkower, (2016) existen los siguientes niveles de la matematización:

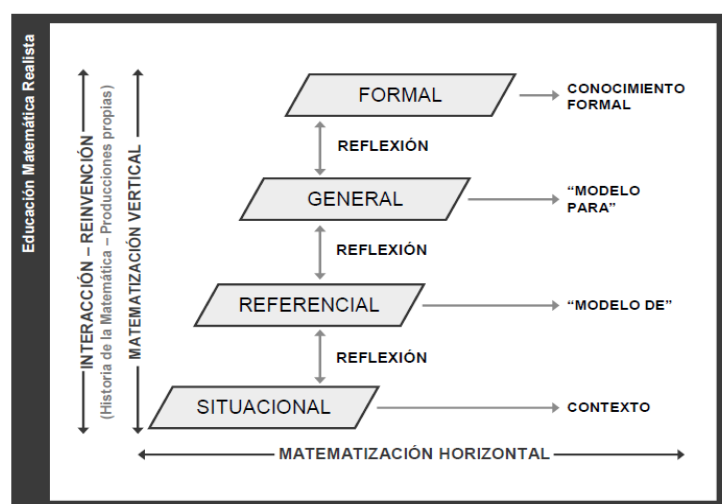


Figura 1 Niveles de matematización, tomado de educación matemática realista bases teóricas, (Bressan et al, 2016)

2.1.1.2.1. Situacional

En este nivel se da la interpretación de la situación problema y surgen las estrategias relacionadas con el contexto de la misma. En este momento los estudiantes recurren a sus conocimientos informales, el sentido común y sus propias experiencias, de esta manera pueden identificar y describir la matemática que se encuentra en dicho contexto, también se puede visualizar, esquematizar y formular el problema desde diferentes formas, revelando relaciones o encontrando regularidades, haciendo analogías con otro tipo de problemas y es aquí donde ocurre la matematización horizontal, los otros niveles de matematización se refieren a la matematización vertical, la cual incluye modelos y esquemas conceptuales que van permitiendo la formalización matemática progresiva.

2.1.1.2.2. Referencial

Aquí aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, es decir, los elementos se describen desde conceptos y procedimientos que ayudan a esquematizar el problema de manera mucho más específica.

2.1.1.2.3. General

Este nivel se desarrolla a través de la exploración, la reflexión y la generalización de lo conquistado en la etapa anterior, pero avanzando hacia un enfoque matemático que supere la referencia al contexto. Debido a esta reflexión sobre los conceptos, los procedimientos, las estrategias y los modelos utilizados en el nivel anterior, los estudiantes se percatan que pueden ser utilizables para la resolución de otros problemas similares a los que se han estudiado hasta el momento, dando lugar a los modelos para la resolución de los mismos.

2.1.1.2.4. Formal

El nivel formal implica comprender y actuar con los conceptos, procedimientos y notaciones matemáticas convencionales que hacen parte del cuerpo teórico con que se está trabajando.

A manera de conclusión, se puede decir que los niveles de la matematización son dinámicos y no responden a una jerarquización determinada pues el estudiante puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o para aspectos de un mismo contenido, llegando a ser muy útiles para rastrear los procesos globales del aprendizaje de los estudiantes.

En este campo de la matematización progresiva, es muy importante mencionar que existen diferentes modelos de la EMR y que, a partir de ellos, se puede dar cuenta del camino recorrido por el estudiante en relación con la comprensión del problema tanto desde el sentido común desde conceptos matemáticos hasta el proceso de solución del mismo.

Por otra parte, cabe mencionar que los modelos usados por los estudiantes dentro de la EMR distan del concepto generalizado de modelo matemático, el cual tradicionalmente ha hecho referencia a una traducción de situaciones problema a expresiones matemáticas que pueden usarse como modelos de referencia. Según Gravemeijer (cómo se citó en Bressan A. , s.f.) “el modelo” en la EMR es el resultado de organizar una actividad por parte del estudiante, sosteniendo una profunda implicación entre modelo y situación desde la constitución de la misma, al ser una elaboración intelectual propia del estudiante tiene una connotación particular.

2.1.1.3.El proceso de matematización

El proceso de matematización requiere desde luego unas fases de asimilación para una elaboración conceptual, sea esta simple o compleja, la generación de una idea, el planteamiento y/o solución de un problema. Dentro de la EMR en su teoría de niveles de aprendizaje, matematizar en un nivel inferior requiere o puede ser objeto de niveles más altos, quiere decir que las ideas más sencillas y primarias iniciales generadas de manera informal se vuelven formales como consecuencia de la reflexión. Pero no se puede olvidar que esos procesos de reflexión están mediados desde actos en contextos realistas, por ejemplo, los estudiantes de la IEPVA no van a llegar a entender los problemas ambientales por que se los cuentan a través de una información o porque simplemente es un problema traído al salón de clase, no, es necesario que asista a ellos una sensibilización propia que les estimule el pensamiento y se integren al contexto.

Dentro de esos niveles de comprensión se dan diferentes aprendizajes que van a conducir a una “matematización progresiva” donde los modelos matemáticos se estructuran mentalmente en términos generales. Para una mejor ilustración se toma como contexto en el grado noveno el problema actual que presenta el río Guabas para identificar y analizar un fenómeno natural en un nivel inicial de comprensión, que no necesariamente tienen que ser el más bajo, a partir de allí se dan otros niveles hasta llegar a la matematización de tal situación que se evidencia en el manejo adecuado de las relaciones funcionales en diferentes formas.

2.1.1.4.La contextualización epistemológica

La elección del contexto en un modelo de EMR, es un aspecto sobre el cual debe recaer un espacio amplio de análisis para evitar llegar a situaciones o estados de rechazo por el

aprendizaje y que de verdad cautive la atención de todos los participantes en los espacios escolares. Es un aspecto intrínseco al problema, que genere interés, que despierte la imaginación y lleve a un conocimiento aplicado y vivencial, es decir que a través de un contexto apropiado se construyan nuevos saberes por convicción y no por que exista una obligación u orden de por medio.

Con relación al contexto y a la realidad Bressan expresa que lo que se debe buscar es presentar los problemas desde contextos afines a los estudiantes de modo que pudieran recrearlos o recordarlos mentalmente y a partir de allí poner en juego procedimientos de cálculo, forma de resolución y formas de organización. Los contextos bajo los cuales se desarrollan ese tipo de problemas deben ser considerados como un aspecto importante y no solo como un solo ropaje a eliminar.

“Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo” (Freudenthal, 1973). Al ser significativos para el estudiante (Freudenthal, 1981), los contextos en la EMR se constituyen en puntos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles luego avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización. (p.8)

2.1.2. Las Relaciones Funcionales Como Construcción del Objeto Matemático

El estudio de las relaciones funcionales en matemáticas requiere de un espacio necesario y obligatorio dentro del proceso de formación básica de los estudiantes, aspecto por el cuál la construcción curricular de todo tipo de documentos (proyectos educativos, planes de área

y de clase) requieren de una amplia investigación didáctica que permita enfocar el tema de las relaciones funcionales en un modelo pedagógico que garantice al menos: un buen nivel de comprensión que genere en el estudiante la capacidad de entender la razón de ser del porqué de muchos fenómenos naturales y sociales ; asociar y generalizar el concepto hacia otras áreas de la ciencia y poder asimilar otros objetos matemáticos más complejos.

Al respecto Los lineamientos curriculares de matemáticas (1998, p.7) precisan:

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad.

Así mismo los lineamientos consideran que se hace necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones funcionales donde los datos no lleven directamente a cuestiones de regularidad absoluta, lo que llevaría a pensar que la existencia de la situación está determinada por una expresión algebraica. El abordaje de las funciones y su conceptualización deben estar precedidas por cuestiones de variación dependencia, dominio y rango `para después abordar los modelos elementales, lineal, cuadrático, exponencial entre otros.

Se induce por lo tanto que el proceso de construcción del concepto función, no debe limitarse a un tratamiento algebraico rígido y que se deben explorar muchas posibilidades para entender a partir de él la complejidad del mundo natural y otros fenómenos sociales. Validando entonces la importancia y necesidad de “aprender bien” el concepto de función que por sus implicaciones sociales y científicas y agregando los resultados y consecuencias de experiencias previas en los contextos escolares durante la construcción de preconceptos

básicos se originan una serie de factores que se conjugan de manera simultánea para la no adecuada adquisición del objeto matemático función, que se identifican como obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1971).

2.1.2.1. Los obstáculos Epistemológicos y los Actos de Comprensión.

Los obstáculos epistemológicos para el aprendizaje de conceptos científicos teniendo en cuenta la infinidad de investigaciones al respecto, se consideran inicialmente desde los planteamientos de Gastón Bachelard en su generalidad; y de manera más específica y particular para cualquier objeto matemático a Anna Sierpinska. quien los toma de forma específica para la enseñanza de las relaciones funcionales y los clasifica por su origen en tres niveles.

El concepto de obstáculo epistemológico se atribuye al francés Gastón Bachelard (1971) el cual lo relaciona a los orígenes de las dificultades que afectan la aprehensión del conocimiento científico. En su obra “La Formación del Espíritu Científico” (pág. 65) donde describe como principal obstáculo lo generado a partir de los aprendizajes cuando los estudiantes y docentes generalizan la estructuración de modelos en los comportamientos científicos considerando diferentes causas que van desde las primeras experiencias en etapas pre científicas hasta la formación de teorías y axiomas condicionadas a sentimientos y condiciones psicológicas del ser. Para una mejor ilustración conceptual de la idea de obstáculo se revisa el planteamiento de Bachelard frente a la condición cualitativa y cuantitativa de un concepto científico;

“Por otra parte nos engañaríamos si pensáramos que un conocimiento cuantitativo escapa en principio al peligro del conocimiento cualitativo. La magnitud no es objetiva automáticamente y es suficiente apartarse de los

objetos usuales para dar cabida a las determinaciones geométricas más bizarras, a las determinaciones cuantitativas más fantasiosas”. (pág. 248).

Todo conocimiento cuantitativo que se considere libre de errores y objetivo; lo que se puede contar, tiene mayor valor frente a lo que no se puede contar, generando un error típico cuando no se tiene en consideración las escalas de los problemas llevando los juicios y raciocinios experimentales de lo muy grande a lo muy pequeño. (Villamil, L. 2008).

Este tipo de consideraciones en los procesos educativos para alcanzar el logro de un objeto matemático son necesarios y conducen a que los estudiantes formulen con visión científica procesos cuantitativos y cualitativos los cuales tienen en las funciones matemáticas un enorme recurso didáctico.

Anna Sierpinska asume los obstáculos epistemológicos asociados a la enseñanza de las relaciones funcionales y los clasifica por su origen en tres niveles.

Primero: por creencias y convicciones del mundo circundante, se relaciona por el sentido común que asiste a cada persona. Son los aprendizajes asociados sin condición científica que se elaboran de forma espontánea y que de alguna forma inciden en la estructuración del saber científico.

Segundo: por los esquemas de pensamiento es asociado por lo tanto a la condición cognitiva, formas de visualizar problemas, interpretación de situaciones, cosas que son aprendidas en la escuela sin un adecuado nivel de comprensión, por lo general sin contexto ya que se dan de manera aislada. Este tipo de situaciones son muy dadas cuando los niños aprenden de memoria a solucionar las operaciones básicas.

Tercero: por el conocimiento técnico, al respecto (Halls, 1959), “...este es el conocimiento cuyo valor de validez está asegurado por criterios más racionales tales como

consistencia, aplicabilidad y las clases de relaciones con sistemas de conocimientos socialmente calificados como científicos”.

Estos niveles abarcan un espacio que van inicialmente desde las experiencias propias de cada individuo en todos los aspectos, sus características, capacidades individuales y condiciones cognitivas hasta los procesos e interacciones con la ciencia y el conocimiento; situaciones que no se dan solas, por lo cual los niveles no se dan de manera aislada, interactúan y finalmente terminan en un proceso de formación global del ser.(Oportuno aclarar que estos niveles se definen sobre los aspectos más generales en las investigaciones realizadas por Anna Sierpiska acerca de los actos de comprensión (en adelante AC) de un objeto matemático).

Describe Sierpiska:

...La verdadera naturaleza del obstáculo epistemológico es tal que ellos no pueden ser evitados y su papel en nuestro pensamiento es importante. Este papel es negativo y positivo al mismo tiempo...No podemos privarnos de nuestros esquemas de pensamiento, creencias y actitudes. Esta es la base sobre la cual nos levantamos. De otro lado, si deseamos comprender más y mejor, o ver diferentes aspectos de las cosas que estamos considerando, tenemos que tomar conciencia de estas actitudes y esquemas de pensamiento y actuar en contra de ellos. (p. 28)

Aparte de generalizar situaciones sobre los efectos de los diferentes obstáculos epistemológicos, se plantean desde los análisis de Sierpiska unas condiciones necesarias en el proceso de construcción del concepto de relaciones funcionales, reconociendo su comprensión como un esfuerzo humano para entender los cambios observados y experimentados en el mundo. Los actos de comprensión (AC) descritos son:

a. Identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.

b. Identificación de regularidades en las relaciones entre las modificaciones como una forma de tratar con los cambios

Estas dos condiciones son las que permite una conexión e interiorización para desarrollar el concepto de función, evidentemente es un proceso de matematización horizontal de acuerdo a los fundamentos de la EMR.

c. Las matemáticas no están interesadas en los problemas prácticos.

En el proceso de formación conceptual a partir de la comprensión lo que interesa es entender la razón de ser de los diferentes fenómenos, no idealizar la matemática, esta es un recurso útil para representar sucesos del mundo real.

d. Identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.

En los diferentes comportamientos de un fenómeno natural se deben identificar y entender los cambios a través de procesos que se deben matematizar, lo cual demuestra una alta significación del fenómeno que es lo que finalmente evidencia la aprehensión de un concepto.

e. Discriminación entre las variables independientes y dependientes.

Entender el termino discriminación desde estar en la capacidad mental de poder identificar un origen, el porqué de x , o , y situación en sus reacciones. Cuando se plantea un ejemplo de función a un estudiante se debe relacionar un comportamiento desde uno o más sucesos, pero no dejarlo solo en una imagen gráfica de un plano o en la aplicación de propiedades para encontrar o despejar una incógnita.

f. Mirar el orden de las variables como irrelevante.

Es llevar el sentido de la función más allá de los formalismos, este acto evita la mecanización y descentra el concepto de función.

g. Discriminación entre diferentes formas de representar funciones y las funciones mismas.

Desde este punto, cuando la construcción del concepto de relaciones funcionales es bien llevada al estudiante, este estará en la capacidad de aplicar el sentido de la función en cualquier ciencia, puede establecer generalizaciones y apropiarse en la representación de modelos para entender muchos sucesos de la vida diaria.

2.1.3. Consideraciones Fundamentales para la Comprensión del Concepto de relaciones funcionales y función.

Para una mejor comprensión del concepto de función y valorar su importancia en la actualidad para entender su significado e importancia de aprenderlo, es necesario tener un acercamiento a su origen y desarrollo histórico.

La noción actual de función se considera que se empieza a construir en el siglo XIV, cuando los filósofos escolásticos observan la necesidad de medir y representar relaciones entre diferentes magnitudes que se dan de manera simultánea. Se cree que la primera persona que utiliza la representación gráfica para entender el comportamiento de magnitudes variables fue Nicole Oresme (1323-1382) en París y la relación matemática se atribuye a Galileo cuando desarrolla trabajos de mecánica; pero es Leibniz (1714) que por primera vez utiliza la función para designar cantidades que dependen de una variable.

Para llegar al concepto de función actual se atravesaron diferentes obstáculos, siendo los más notables: la inconmensurabilidad, la proporcionalidad, la disociación entre número y magnitud, la rigurosidad del simbolismo algebraico, entre otros. (Vargas, H. 2011. p. 5).

En la actualidad y a través de matemáticos de gran renombre como Goursat, E (1858-1936); Lebesgue, H (1875-1941); Frechet, M (1878- 1973); Bourbaki, N (1935), se ha unificado en los textos de matemática como el concepto más generalizado y aceptado:

“Una función es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B .”

Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee “ f de x ” o “ f en x ” y se llama el valor de f en x , o la imagen de x bajo f . El conjunto A se llama dominio de la función. El rango de f es el conjunto de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través del dominio, es decir, rango de $f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Así, si se escribe $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

2.1.3.1.Elemento de una función

Como se sabe, una función es una manera de relacionar dos magnitudes de forma unívoca; la primera de esas magnitudes se denomina variable independiente y la segunda variable dependiente. Además, toda función admite una expresión del tipo $y = f(x)$

Los dos principales elementos de una función son los posibles valores que pueden tomar ambas variables (dependiente e independiente).

Se llama Dominio de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. El dominio de una función del tipo $y=f(x)$ suele representarse con alguna de estas expresiones: **$D(f)$, $Dom(f)$** .

Se llama Recorrido, Rango o Imagen de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, es decir, es el conjunto de valores que puede alcanzar la función. El recorrido de una función del tipo $y=f(x)$ suele representarse con alguna de estas expresiones: **$R(f)$, $Rango(f)$, $Im(f)$** .

se llama variable a los diferentes elementos o factores que definen un objeto, una situación o fenómeno, Ejemplos; el peso, la cantidad, la velocidad, el tiempo, la temperatura, etc. Se representa con un símbolo que generalmente es una letra que representa un valor desconocido.

Los tipos de variable en una función son de carácter independiente y dependiente. La independiente es el elemento que asume un valor sin ningún tipo de dependencia e incide de manera directa en el valor de la otra variable. La dependiente, es el elemento que asume su valor de acuerdo a la relación con la variable independiente.

La asociación de los conceptos matemáticos con los significados semánticos de los términos tiene una gran importancia para que los estudiantes puedan asociar los objetos a otras áreas del conocimiento con mayor propiedad, en el caso de las relaciones funcionales los términos guardan una estrecha relación en sus definiciones matemáticas. (Duval, 2004)

2.1.3.2. Consideraciones con relación a la dependencia y variación en una relación funcional

Partiendo de reconocer como función una relación de cambio entre dos conjuntos, de tal forma que la variación que se produce en uno de ellos depende del cambio generado en el otro. Esta percepción conlleva a la identificación de variables y a su diferenciación entre las dependientes e independientes, centrando la atención en lo que cambia y en el cómo cambia para poder establecer relación consientes entre dichas variables.

Teniendo en cuenta el tratamiento y necesidad en la enseñanza de las relaciones funcionales es difícil distinguir cuando se trabaja con proporciones la identidad y la relación entre magnitudes distintas (Azcárate & Deulofeu, 1996). La proporcionalidad es un elemento que permite la apropiación del concepto de función lineal, debido a que esta lleva implícito la idea de dependencia y variación entre magnitudes de distinta o igual naturaleza y, la de incrementos iguales. (Roldán, E. 2013. p. 8). Es importante entonces para el desarrollo del concepto de función hacer evidente la comprensión de relación de dependencia y variación entre los elementos; el orden sistemático para determinar regularidades e introducir ideas sobre la variabilidad de las cantidades empleadas en la elaboración de tablas y gráficas. (Sánchez & Valdés, 2007. p. 9).

En indudable que el concepto de función no se construye de forma aislada y debe recorrer campos semánticos y lógicos para interiorizar de manera plena el objeto de relación funcional, es un proceso que debe ser dinámico para poder entender de forma integrada los aspectos de dependencia, variación y variables. Ahora dentro de la EMR tanto la dependencia como la variación se incorporan a contextos que permitan interiorizar los procesos de transformación en fenómenos de diferente índole, que conduzca a ver la dependencia como

un proceso condicionado y la variación como un proceso lógico en el interactuar de dos magnitudes.

2.1.3.3. Los elementos de una función lineal y su lectura

La función lineal es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $y = mx$, siendo m un número cualquiera distinto de 0 .

- Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen, $(0,0)$.
- El número m se llama pendiente.
- La función es creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$.

La función afín es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $y = mx + n$, siendo m y n números distintos de 0 .

- Su gráfica es una línea recta.
- El número m es la pendiente.
- El número n es la ordenada en el origen. La recta corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

“Antes de iniciar el aprendizaje de funciones, la experiencia que tienen los estudiantes con variables es aquella en la cual la distinción fundamental es entre las cantidades dadas y las desconocidas. Cuando se llega al tema de las funciones ellos deben arreglárselas para distinguir entre cantidades constantes y variables.” (Sierpiska, A. p.36)

Esta cita se expresa para entender que en el momento de presentar la función como objeto a matematizar es importante validar preconceptos fundamentales.

En estricto orden se distingue en una función lineal una variable independiente, un signo igual que expresa un mensaje único que hace del objeto matemático una igualdad y la relación

con una variable dependiente, sin olvidar que la representación es conmutativa.

Se tiene la siguiente igualdad, que representan una función: $y = f(x)$. Este esquema es una estructura simple de una función lineal, presentada a través de un esquema icónico literal. Para entender esa relación de variable dependiente e independiente es necesario recurrir a diferentes sistemas de representación, pues de acuerdo a Duval "...el aprendizaje de un concepto se realiza en una forma más efectiva si se trabaja con distintas representaciones del mismo". (Citado por Olave, T. 2008).

En una lectura simple para un estudiante es complejo y probablemente incomprensible entender esa igualdad que: $y = f(x)$, se requiere entonces de un trabajo en el aula de clase y de seguir presentado este concepto desde otras representaciones y más contenidos, como las tablas de representación de doble entrada, ejemplo: $f(x) = 2x + 1$, es una función que estructuralmente conserva el mismo comportamiento pero que adiciona otros elementos al conjunto independiente que hace por ende generar elementos diferentes en el conjunto dependiente. Se complementa con otras representaciones como el trabajo en el plano cartesiano o formas sagital, que permita tener otras visiones gráficas y concepciones mentales de los comportamientos y relaciones entre las variables.

Esto traduce: que los elementos del conjunto y , son iguales en función de lo que es el comportamiento de los elementos de x , por lo cual aquí se debe entender el concepto de variable dependiente en y e independiente en x . En este punto cuando se realiza la representación simbólica, es que se abre el espacio para evitar desde la enseñanza aprendizaje la mecanización algebraica a través de la memoria del concepto en la representación de un fenómeno o comportamiento cualquiera, en palabras de Sierpinska es cuando se genera o evita un obstáculo epistemológico.

A partir de estas experiencias, que se asocian en el aula de clase con contextos realistas

se deben identificar entonces los conceptos de dependencia, pendiente y variable, pero aparte de identificarlos es necesario interpretarlos y relacionarlos frente a un fenómeno y exteriorizar el significado de función a otros aspectos, o sea que los estudiantes tengan un acercamiento real al significado de función matemática.

El concepto de pendiente no basta con ser ni definido ni representado en lo textual ni en el grafico cartesiano, es fundamental asociarlo a relaciones con los elementos de la variable independiente.

2.1.3.4. El concepto y sentido de dependencia directa e indirecta.

La función lineal ya se sabe que relacionan dos conjuntos (X, Y) que representada en el plano cartesiano definen una línea recta, de ahí su nombre.

Toda función de la forma $y = a + bx$ determina, al representarla en el plano una línea recta, donde x e y son variables y a y b son constantes; por ejemplo: $y=3+2x$.

Explicación: a es la ordenada en el origen, es decir, es la altura donde la recta corta al eje Y en el plano cartesiano; b se denomina pendiente y es la inclinación de la recta.

En el caso anterior $y = 3+2x$, por cada unidad que incrementa la x , la y presenta un incremento medio de 2 unidades.

En la recta de regresión b recibe el nombre de coeficiente de regresión.

Si $b>0$, entonces cuando x aumenta y también lo hace (relación directa).

Si $b<0$, entonces, cuando x aumenta y disminuye (relación inversa).

Cuando las dos variables de una función aumentan en una misma proporción se afirma que hay una dependencia directa; y cuando una aumenta y otra disminuye se identifica una relación inversa.

2.1.3.5. La Representación en la Enseñanza de las Relaciones Funcionales

En todo proceso de adquisición de conocimientos, la representación se ha considerado uno de las maneras más comunes y eficaces para lograr un buen aprendizaje. El análisis de los sistemas de representación y su influencia en la comprensión de las relaciones funcionales que estudia esta investigación se direccionaron desde la perspectiva semiótica centrada en los estudios de Raymond Duval, (2004).

Se considera entonces que la disponibilidad y uso de distintos sistemas de representación semiótica son necesarios para la construcción y comprensión de las matemáticas. En el caso específico de las relaciones funcionales existen diversas formas de representación que van desde esquemas literales convencionales que el estudiante debe conocer, hasta esquemas gráficos y textuales, por ejemplo, los que muestra la figura 2

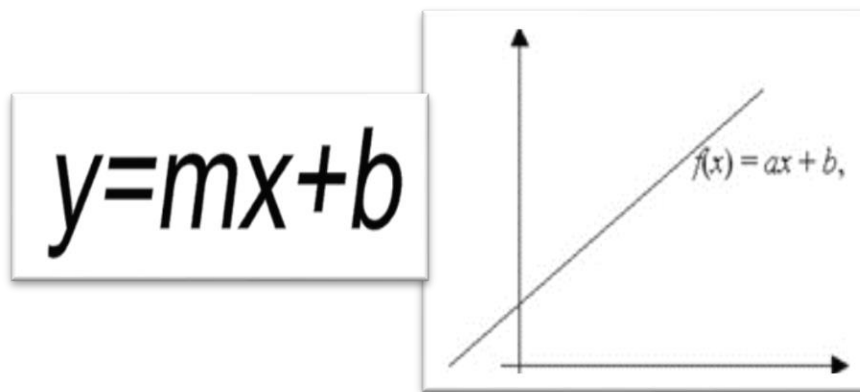


Figura 2 Representación literal y representación cartesiana de una función lineal

Duval, (2004) en su estudio llamado “*Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*” permite extraer algunas consideraciones que fueron fundamentales para el análisis de los resultados en este estudio; Duval considera, que un estudiante ha comprendido o interiorizado un concepto cuando es capaz de interpretarlo en diferentes sistemas de representación y puede pasar de un sistema a otro sin mayores dificultades

El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación. (Duval, 2004, p.62)

También resalta la importancia de identificar las habilidades que desarrolla el estudiante para pasar de un registro de representación a otro, y los alcances de interpretación que logran extraer de cada representación. Es por ello que durante el proceso de aprendizaje se debe proponer a los estudiantes situaciones en las cuales se haga necesario que el estudiante deba moverse de un registro de representación a otro para el mismo objeto matemático; por ejemplo, Duval menciona que en matemáticas los gráficos cartesianos se emplean siempre en articulación con otros registros de representación como el tabular y que la interpretación de una situación asociada a estos registros dependerá del correcto análisis de los dos sistemas de representación en conjunto.

Duval (2004) afirma que las representaciones verbales son un inicio para poder pasar a otros sistemas de representación más elaborados; cuando se inicia con representaciones verbales de un fenómeno y se debe pasar a otros registros de representación como el tabular y no se logra de la forma correcta, se genera una errada interpretación de la situación puesta en juego y se confundirán los elementos conceptuales que se estudian a través del fenómeno. La Correcta representación de una situación a través de diferentes registros se conoce como

registros articulados, los cuales brindan diferentes aproximaciones al concepto estudiado, pero en que su conjunto, estos registros facilitan de mejor manera su interpretación. Duval. (2004) también considera que es más difícil pasar del registro de representación gráfico al algebraico que viceversa debido al nivel de conocimientos propios de la matemática que se deben tener dado el grado de formalidad de este registro.

Los aportes de Duval deben ser considerados a la hora del análisis de las producciones de los estudiantes al intentar representar mediante descripción verbal y escrita, tabular, gráfica y registro algebraico las relaciones funcionales de 3 situaciones del contexto de la calidad del agua del río Guabas y su tributario la acequia La Chamba.

2.1.4. Los problemas de calidad del agua

Teniendo a la EMR como eje articulador de los conceptos de relaciones funcionales y problemas de calidad del agua y tomando de ella los principios de actividad y realidad es importante hacer una descripción conceptual de los problemas de la calidad del agua desde la definición misma del concepto y de los descriptores que la precisan, ya que estos serán el medio por el cual el estudiante se aproximará a los conceptos de variación, dependencia y representación como elementos fundamentales en el aprendizaje de las relaciones funcionales

Los problemas de calidad del agua son aquellas situaciones o acciones de origen antrópico o natural que genera alteraciones en los parámetros fisicoquímicos del agua y que a su vez pueden generar alto riesgo a la hora de su uso. Por ejemplo, la alteración de la turbiedad o el color del agua, puede ocasionar problemas en los sistemas de potabilización del agua para consumo humano y a su vez aumentar el riesgo de enfermedad.

2.1.4.1.La Calidad del agua

De acuerdo a los ministerio de medio ambiente y de la protección social, la calidad del agua se define como el resultado de comparar las características físicas, químicas y microbiológicas encontradas en el agua, con el contenido de las normas que regulan la materia (Ministerio de protección social, 2007); para la organización de las naciones unidas (ONU, 2014) el término calidad del agua se usa para describir el estado del agua, de acuerdo a sus características químicas, físicas y biológicas, generalmente con respecto a su idoneidad para un uso particular (es decir, beber, nadar o pescar).

Es por ello que cuando hablamos de calidad del agua primero debemos preguntarnos cuál será el destino o uso que se le dará a este recurso ya que, de acuerdo a su uso, los criterios de calidad cambiaran drásticamente. Dentro de los principales usos del agua están: consumo humano y doméstico, uso recreativo, uso industrial (por ejemplo, calderas), uso agrícola y pecuario; de acuerdo a los diferentes usos del agua, cada uno de ellos cuentan con indicadores específicos que determinan la calidad de la misma o las necesidades para su adecuación. Para efectos de esta investigación el concepto de calidad de agua será tomado desde la alteración de los parámetros fisicoquímicos y su influencia en los procesos de potabilización; el uso de referencia será el de agua para consumo humano que es el que presenta las mayores exigencias en los indicadores que la definen.

En esta investigación también se considera que la calidad del agua está asociada a la presencia o ausencia de población cercana a las fuentes hídricas, a su nivel educativo y a su nivel socioeconómico; la disponibilidad de agua de buena calidad es un factor principal en la definición de calidad de vida de las comunidades.

2.1.4.2. Los parámetros fisicoquímicos como indicadores de calidad del agua

Como ya se acordó a nivel conceptual, existen diferentes parámetros físicos, químicos y biológicos que determinan la calidad de agua; al respecto la ONU (2014), establece que la calidad del agua se determina comparando las características físicas y químicas de una muestra de agua con unas directrices de calidad del agua o estándares. En el caso del agua potable, estas normas se establecen para asegurar un suministro de agua limpia y saludable para el consumo humano y, de este modo, proteger la salud de las personas. Estas normas se basan normalmente en unos niveles de toxicidad científicamente aceptables tanto para los humanos como para los organismos acuáticos. Para el caso de Colombia la norma que regula los indicadores de calidad del agua para consumo humano es la resolución 2115 del 2005 de la cual hablaremos más adelante.

Los parámetros de calidad del agua se pueden clasificar en tres grandes grupos, parámetros físicos, químicos y biológicos; de acuerdo a la Resolución 2115, (2007), la clasificación es la siguiente (Tabla 2)

Tabla 2 Clasificación de los parámetros de calidad del agua

PARÁMETROS DE CALIDAD DEL AGUA		
Parámetros Físicos	Parámetros Químicos	Parámetros Biológicos
Color	pH	Bacterias
Olor y sabor	Alcalinidad	Hongos
Turbiedad	Dureza	Protozoos
Sólidos	Nutrientes (P, F)	Virus
Temperatura	Oxígeno	
Conductividad	Hierro	
	Grasas	
	DBO	
	DQO	

Cada uno de estos parámetros tiene mayor o menor relevancia a la hora de ser empleados como indicadores de calidad de agua; es así como la turbiedad, los sólidos y el oxígeno disuelto presentan las mayores ponderaciones en el cálculo de índices de calidad del agua más representativos a nivel nacional y mundial

Para Cortés, (2009), **Los parámetros físicos** son principalmente aquellos cambios que puede tener el agua y que son perceptibles por los sentidos (vista, olfato y gusto) y que tienen injerencia directa sobre el carácter estético del agua. Los parámetros físicos de mayor relevancia son la turbidez, el color, y sólidos disueltos

Para Cortés, (2009), **Los parámetros químicos** son aquellos cambios que tiene el agua pero que no necesariamente son perceptibles por los sentidos; además indica, que estos cambios generan alteraciones mayores en la composición química del agua; Cortés además indica que los múltiples compuestos químicos disueltos en el agua pueden ser de origen natural o industrial y serán benéficos o dañinos de acuerdo a su composición y concentración. Los parámetros químicos de mayor importancia son el pH, Oxígeno disuelto, la DBO, y el nitrógeno

En cuanto a los **parámetros biológicos** Cortés, (2009), considera que hacen relación a la presencia o ausencia de microorganismos en el agua y que estos son los que generan mayor riesgo en el momento de emplear el agua para consumo humano; entre los más destacados están las bacterias *E-coli*, *Salmonella*, y *Shigella* como indicadores fundamentales de calidad del agua.

Para el desarrollo de esta investigación se trabajará principalmente con los parámetros físicos debido a que sus cambios pueden ser percibidos por los estudiantes a través de los sentidos; además de considerar la posibilidad de matematización de los problemas asociados

a ellos, su medición y la experimentación con los recursos de la institución educativa. Teniendo en cuenta estas consideraciones, en esta investigación se priorizan la turbiedad, los sólidos, la temperatura, y el oxígeno disuelto como parámetros de calidad del agua a ser analizados a la luz de problemas de calidad del agua del río Guabas.

2.1.4.3. La turbiedad como indicador de calidad de agua

Para Romero Rojas, (2013), la turbidez es la interferencia al paso de la luz ocasionada por materiales en suspensión en una muestra de agua; entre más sucia está el agua mayor será el valor de la turbidez. El origen de la turbiedad en el agua es debido al arrastre de materiales ante los aumentos de caudal o a la mala disposición de residuos sólidos y vertimiento líquidos en las fuentes hídricas de origen doméstico e industrial. Los aumentos de la turbiedad en el agua generan dificultades en procesos de potabilización y son un indicador fundamental para los sistemas de tratamiento. La unidad de medida de la turbiedad es NTU (unidades nefelométricas de turbiedad) y representa la cantidad de luz dispersa por la muestra de agua con la dispersada por una solución estándar de referencia (óxido de silicio).

El método de determinación de la turbidez consiste en tomar una muestra de agua e inmediatamente exponerla a un haz de luz en un equipo denominado Turbidímetro; la organización mundial de la salud OMS establece que la turbiedad del agua para consumo humano no debe superar las 5 NTU; la turbiedad del agua de un río normalmente está entre 20 y 50 NTU, pero puede superar los 3000 NTU debido a las acciones antrópicas o naturales sobre la fuente. La alta turbidez afecta la fotosíntesis en los ecosistemas acuáticos, limita la respiración, el paso de la luz y la reproducción de la vida acuática.

2.1.4.4.Los sólidos como indicador de calidad del agua

Los sólidos en el agua son partículas presentes de naturaleza orgánica o inorgánica en forma de material flotante, sedimentable, en suspensión o disuelto. Estos materiales son los responsables del incremento de la turbidez del agua y afecta en conjunto el desarrollo de las relaciones de vida en los ecosistemas acuáticos; el incremento de estos materiales dificulta los procesos de potabilización y reducen el agua a pocos usos. (Romero Rojas, 2013)

El origen de los sólidos en el agua deriva de las actividades industriales y domésticas que descargan vertimientos líquidos y sólidos sin tratamiento previo a los cuerpos de agua; teniendo en cuenta esta situación, los sólidos en el agua pueden alterar un gran número de parámetros físicos y químicos de acuerdo a su origen

La unidad de medida de los sólidos en el agua es una unidad compuesta de concentración que relaciona la cantidad de sólidos en miligramos con el volumen de la muestra de agua, generalmente en litros (mg/l); sin embargo, también se pueden emplear solo unidades de masa como unidad de medida para este parámetro

Para efectos de esta investigación no se necesitará aplicar técnicas de laboratorio para la determinación de la cantidad de sólidos en muestras de agua debido a que este parámetro será usado para evaluar su efecto en la variación de la turbiedad, por lo tanto, el valor de los sólidos vistos como contaminantes será conocido desde el principio.

2.1.4.5.La temperatura como indicador de calidad del agua

La temperatura del agua para Romero Rojas, (2013), es un parámetro de gran importancia por su efecto sobre las características del agua, su variación se debe a la incorporación de residuos o de agua caliente proveniente de uso doméstico e industrial.

En las aguas calientes se aumenta la velocidad de las reacciones químicas, se acentúa el olor y el sabor, se reduce la solubilidad de los gases lo que ocasiona que se reduzca la concentración de oxígeno disuelto y por ende la vida acuática

La temperatura del agua se debe mantener entre 2 y 6 grados por debajo de la temperatura ambiente y para su medición se emplea un termómetro en escalas de medida como grados centígrados, Kelvin o Fahrenheit

2.1.4.6.El oxígeno como indicador de calidad del agua

Romero Rojas (2013), define el oxígeno disuelto como un gas de baja solubilidad requerido para la vida acuática aerobia, lo que lo hace importante como parámetro de calidad del agua; la unidad de medida de este parámetro es miligramos de oxígeno por litro de agua mgO_2/L , este indicador se ve afectado considerablemente por la temperatura; al aumentar esta última el oxígeno disuelto disminuye; las condiciones de oxígeno disuelto para una fuente de agua deben estar por encima de 8 mg/l y se considerará crítico cuando su valor esté por debajo de 4 mg/l . El método analítico de determinación del oxígeno es la medición in situ empleando una sonda multiparamétrica (oxímetro).

El deceso del oxígeno disuelto en el agua se ocasiona principalmente por la descarga de aguas residuales domésticas o industriales con altas temperaturas; por ejemplo, aguas de caldera, aguas de enfriado de piezas o por la alta concentración de residuos sólidos en las fuentes de agua.

2.1.4.7.Las acciones antrópicas que generan mayor alteración de los indicadores de calidad del agua

Para Cortés, (2009), Romero Rojas, (2013), y ONU, (2014) a nivel global, el principal problema relacionado con la calidad del agua lo constituye la eutrofización, que es el resultado de un aumento de los niveles de nutrientes (generalmente fósforo y nitrógeno) y afecta sustancialmente a los usos del agua. Las mayores fuentes de nutrientes provienen de la escorrentía agrícola y de las aguas residuales domésticas (también fuente de contaminación microbiana), de efluentes industriales y emisiones a la atmósfera procedentes de la combustión de combustibles fósiles y de los incendios forestales. Los lagos y los pantanos son especialmente susceptibles a los impactos negativos de la eutrofización debido a su complejo dinamismo, con un periodo de residencia del agua relativamente largo, y al hecho de que concentran los contaminantes procedentes de las cuencas de drenaje.

Para el caso de la cuenca del río Guabas se han caracterizado las siguientes acciones antrópicas como aquellas que generan mayores alteraciones de los parámetros fisicoquímicos del agua, estas acciones son:

- Disposición final de residuos sólidos a las fuentes de agua
- Vertimiento de aguas residuales domésticas e industriales
- Descargas de agua de proceso a altas temperaturas
- Actividad minera en la zona alta de los ríos
- Extracción de material de arrastre

Las fuentes de agua se han convertido en el vertedero de los residuos sólidos y líquidos de las actividades humanas; la descarga de residuos domésticos (orgánicos e inorgánicos), escombros y estiércol de animales producto de actividades pecuarias son los principales causantes de las alteraciones de los parámetros de turbiedad, color y sólidos en el agua; esta

práctica no es controlada por las entidades de gobierno y termina afectando las posibilidades de uso de las fuentes afectadas. Las comunidades aledañas al río Guabas realizan constantemente descarga de residuos domiciliarios, pecuarios y escombros directamente sobre el río.

Los vertimientos líquidos (aguas residuales domesticas e industriales) principalmente de avícolas, porquerizas, o propias del riego de cultivos generan alteraciones de los parámetros de DBO, Oxígeno disuelto entre otros, lo que finalmente ocasiona el proceso de eutrofización de las aguas y la reducción máxima del oxígeno y con ello la vida acuática. En el rio Guabas diferentes actividades productivas y domésticas descargan sus aguas residuales directamente sobre la fuente sin tratamiento previo. En algunos casos especiales los vertimientos líquidos presentan altas temperaturas lo que afecta considerablemente la disponibilidad de oxígeno, las actividades que realizan estas descargas son el sacrificio de aves y aguas de caldera de la agroindustria de la caña.

El desarrollo minero genera afectaciones a las fuentes de agua, desde la pérdida del cauce hasta la contaminación con metales pesados propios de esta actividad; el desarrollo minero genera alteraciones de los parámetros de turbiedad, oxígeno disuelto, color y contenido de mercurio principalmente; este último es el responsable de afectaciones genéticas en comunidades que consumen este recurso

Las fuentes de agua siempre han sido fuente de recursos y desarrollo de actividades productivas; la extracción de material de arrastre en los ríos es una actividad desarrollada constantemente pero cada vez sin tener presente procesos responsables ambientalmente para evitar la afectación del recurso; estas actividades generan un alto incremento de la turbiedad y el color del agua afectando posteriormente los procesos de potabilización.

2.1.4.8. Índice de calidad del agua para consumo humano

En Colombia existe la resolución 2115 de (2007) la cual establece cuales son los límites máximos permisibles de los parámetros fisicoquímicos para el consumo de agua potable; en esta reglamentación se priorizan el parámetro de turbiedad como uno de los de mayor importancia a la hora de determinar la calidad del agua; en esta resolución también se presenta la metodología para determinar el IRCA índice de riesgo de la calidad del agua para el consumo humano, metodología que evalúa 22 parámetros fisicoquímicos y biológicos donde la turbiedad, el color, los coliformes totales y la *escherichia coli* tienen 61 de los 100 puntos de riesgo posibles. El incumplimiento de los límites máximos permisibles en estos 22 parámetros automáticamente generará una calificación para el agua de la fuente evaluada que puede ir desde una clasificación sin riesgo hasta una clasificación de inviable sanitariamente.

Finalmente, y una vez puestas sobre la mesa las consideraciones teóricas de los conceptos de calidad del agua y las relaciones funcionales, articuladas con la EMR, se puede considerar que es acertado partir de los problemas de calidad del agua del río Guabas desde los cambios en los parámetros fisicoquímicos como puente para el aprendizaje de las relaciones funcionales; las variaciones en los parámetros de calidad del agua como consecuencia a las acciones antrópicas se citan ser abordados desde la escuela para su comprensión, predicción u posterior intervención.

Los referentes teóricos también permiten priorizar aquellos parámetros que tienen mayor incidencia en la calidad del agua sin olvidar que su cálculo requiere de instrumentos o técnicas que en algunos casos no se tienen; de igual manera no todos los parámetros de calidad del agua podrán ser abordados desde la escuela ya que su conceptualización es compleja, las unidades de medida no son cotidianas para los estudiantes o más importante, la

relaciones o variaciones que presentan no son lo suficientemente potentes para ser el medio para el acercamiento a las relaciones funcionales.

2.2. Marco Contextual de la investigación

El proyecto de investigación fue realizado en la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía, en el área de matemáticas sobre una dimensión didáctica en los principios teóricos de la EMR relacionándolo a una situación ambiental del contexto real y significativo para los estudiantes. El contexto sobre el cual se trabajó en el ambiente natural fue los problemas de calidad del agua del río Guabas, considerando que es una problemática de interés general a la comunidad educativa y que reúne las condiciones teóricas de todo el proceso metodológico que gira en torno a la investigación cualitativa y en el área de matemáticas el objeto tratado fue el de las relaciones funcionales.

Esta institución es de carácter oficial mixto, localizada en el municipio de Guacarí (Valle) e imparte educación formal en todos los ciclos en jornada diurna y nocturna a través de cinco sedes y tiene una población de 1650 estudiantes.

La modalidad que tiene la institución es énfasis ambiental y patrimonio arqueológico y su proyecto educativo presenta un modelo pedagógico que se identifica con el nombre de COSIRE (Comprensión Sistemática de la Realidad), en la actualidad tiene convenio con el SENA.

El proyecto de investigación se realizó con una muestra de 25 estudiantes de grado noveno de un total de 85, organizados en grupos de trabajo de cinco, los cuales se seleccionaron de manera aleatoria y se consideraron entre otras, dos condiciones; la primera que el estudiante tuviese disponibilidad de tiempo para asistir a jornadas de trabajo en horario contrario al

académico institucional; y la segunda que hubiese cursado los dos últimos años en la institución.

Las características generales de la muestra con la cual se trabajó son: ciclo de edad entre los 13 y 15 años; estos estudiantes habitan en la zona urbana del municipio y están entre los estratos de uno a tres de acuerdo a la clasificación dada por la administración municipal del año 2107; su rendimiento académico es diverso, pero predominan notas entre 3 y 3,8 en una escala de 0 a 5.

En cuanto al contexto del río guabas, este es el río titular del municipio de Guacarí y abastece de agua potable a los municipios de Ginebra y Guacarí, su caudal medio es de 7000 l/s y pertenece a la cuenca del río Guabas. A la altura del corregimiento de Guabitas el río Guabas permite una derivación de agua con caudal aproximado de 500 l/s denominada acequia La Chamba, esta derivación atraviesa todo el casco urbano del municipio de Guacarí donde los pobladores tienen relaciones directas con la fuente, ya sea para el abastecimiento de agua para actividades domésticas y pecuarias o como sitio de disposición final de vertimientos líquidos o sólidos.

La institución educativa a través de su proyecto PRAE ha realizado el análisis de los problemas ambientales del municipio desde 4 componentes principales, agua, aire, suelo y biodiversidad; en el componente agua ha identificado los problemas de calidad del agua del río Guabas y más específicamente los de la acequia la Chamba.

Al respecto de los problemas de calidad del agua el PRAE institucional considera que el acceso del recurso hídrico en el municipio de Guacarí tiene que ver con su distribución geográfica natural y con la infraestructura de que se dispone para aprovecharlo. Este último

aspecto está muy relacionado con cuestiones económicas, políticas y sociales del país o de la región. Por ejemplo, para satisfacer las necesidades de agua en nuestra localidad, se usan las fuentes hídricas, de igual manera para hacer el vertimiento de aguas residuales y de desechos sólidos, resultantes de las actividades domésticas y de la agricultura de subsistencia de los habitantes que se ubican en las márgenes del río. Adicionalmente, la explotación artesanal del oro que se realiza en la vereda La Magdalena, en zona de montaña, sobre las márgenes del río Guabas y de sus afluentes Lulos y Flautas, genera vertimientos de aguas residuales con trazas de mercurio y cianuro (CVC 2016) y luego, de esta misma corriente, se capta el agua para el acueducto municipal.

La contaminación del río se evidencia por el cambio de las condiciones físico-químicas del agua, como el pH, la turbiedad, el oxígeno disuelto y el aumento en la sedimentación, que incrementan los costos de potabilización, (Comunicación personal funcionarios de Acuavalle S.A. 2009) y que a través del riego afectan los productos agrícolas no industrializados (tomate, frijol, cilantro, pepino, entre otros) que son consumidos por los habitantes.

Ante esta panorámica del recurso hídrico en el municipio de Guacarí. El PRAE ha construido un árbol de problemas (figura 3) que resume las situaciones mencionadas de manera esquemática

El contexto institucional y social que presenta la I.E Pedro Vicente Abadía y el río Guabas debe convertirse en una oportunidad académica para todas las áreas del conocimiento; es aquí donde la matemática de acuerdo a los estándares y lineamientos puede sacar el mayor potencial de uso de este contexto para el abordaje de situaciones académicas que pueden ser vistas desde la realidad propia de la comunidad educativa.

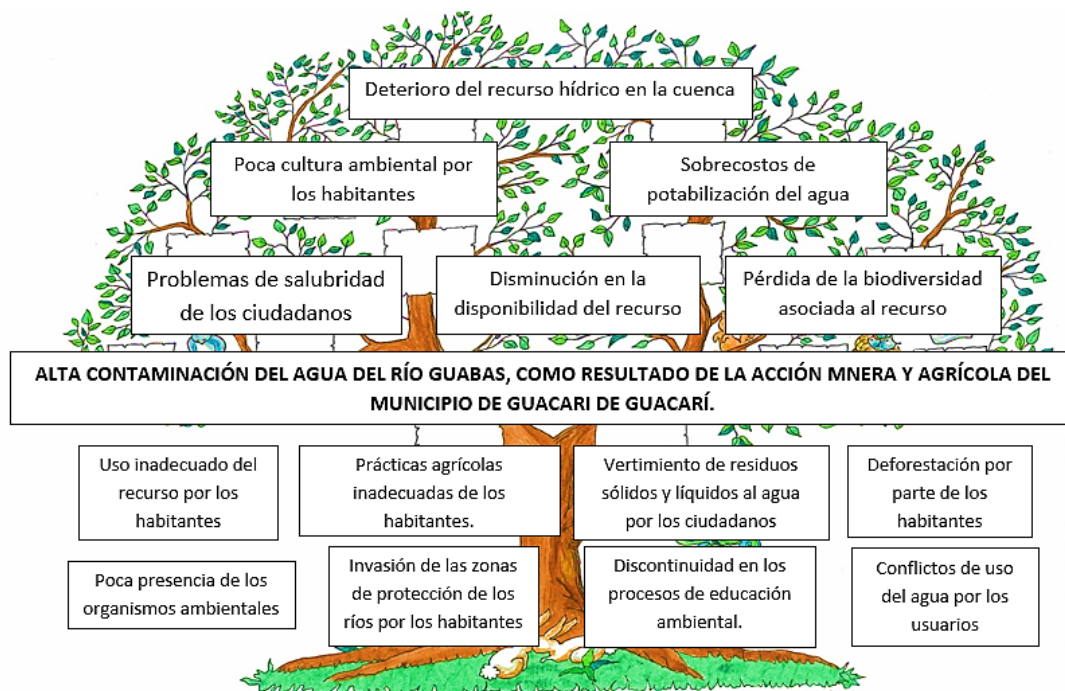


Figura 3 Árbol de problemas, componente agua, municipio de Guacarí. Fuente PRAE

Las variaciones de los parámetros fisicoquímicos del agua del río Guabas como producto de las acciones antrópicas en contra de esta fuente de agua serán los problemas de calidad del agua que se abordarán en esta investigación desde la lectura del contexto, la priorización de situaciones, experimentación y el análisis de los resultados, todo esto en una relación equilibrada entre estudiantes y docente.

3. METODOLOGÍA y MODELO GENERAL DE ANÁLISIS

Teniendo en cuenta que la pregunta que orientó el trabajo de investigación fue *¿Qué tipo de relaciones funcionales se logran identificar cuando los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía analizan de los problemas de calidad del agua en el río Guabas?*, se consideran los siguientes puntos.

3.1. Enfoque Metodológico.

La investigación se orientó desde un enfoque metodológico cualitativo, el cual se concibe como un proceso cuya información se deriva del análisis e interpretación de textos, discursos, gráficos e imágenes, recolectados mediante diversos instrumentos (cuestionarios, encuesta, entrevista) mediante los cuales se pretende estudiar diferentes hechos para comprender la vida social de los participantes a través de los significados desarrollados por este (Sampieri, Fernández & Batista, 2006). Teniendo en cuenta la complejidad de los procesos de formación en el aula, se desarrolló esta investigación a través del mencionado enfoque, permitiendo obtener la producción de los estudiantes mediante unas intervenciones (situaciones problema) las cuales fueron analizadas interpretadas y comprendidas a partir de categorías determinadas teniendo como referente la evidencia de actos de comprensión preestablecidas.

3.2. Tipo de Investigación

El tipo de investigación utilizado fue descriptivo interpretativo, como lo plantea Sampieri, Fernández & Batista (2014) y Cerda (1991), quienes dicen que una investigación de este tipo pretende dar una explicación de determinada situación desarrollando una representación del fenómeno que se estudia partiendo de características y cualidades importantes del objeto de estudio, describiéndolo desde las producciones de la población a la que hace parte el mismo.

De acuerdo a lo anterior lo que se pretende describir e interpretar son las relaciones funcionales que surgen del análisis de los problemas de calidad del agua del río Guabas; en este caso las matemáticas son una herramienta poderosa para la comprensión y predicción de estos problemas.

3.3. Selección de Participantes.

Los participantes con los que se trabajó este estudio fueron 25 estudiantes del grado noveno de un total de 85 estudiantes, que se seleccionaron bajo los siguientes criterios:

- **Repitencia:** Los estudiantes seleccionados no podían ser repitentes del grado noveno puesto que esto podría afectar los propósitos del estudio en las actividades de intervención. Los estudiantes repitentes ya tenían un concepto de función y relaciones funcionales.
- **Caligrafía Legible:** Este criterio de selección se tuvo en cuenta ya que fue indispensable acceder a una interpretación de respuestas dadas en los cuestionarios utilizados, para lo cual se requirió que los estudiantes tuvieran las mínimas condiciones de caligrafía legible.
- **Participación ininterrumpida:** Fue muy importante establecer el criterio de participación continua o ininterrumpida ya que era necesario identificar al proceso llevado a cabo por el estudiante en las diferentes secciones trabajadas

3.4. Diseño Metodológico

El desarrollo de la propuesta estuvo orientado mediante una tabla de operacionalización de conceptos que facilitó la organización y estructura de la investigación en su totalidad (Anexo 1). Para la ejecución de la propuesta y alcance de los objetivos propuestos se plantearon 4 fases las cuales se detallarán en este apartado (Figura 4.). Dichas fases están directamente relacionadas con el problema de investigación planteado y recogen todos los objetivos propuestos. Las fases son:

- Análisis global de los problemas de calidad del agua (Lectura del contexto)
- Priorización de situaciones problema
- Experimentación como acto de experiencia (3 experimentos a escala laboratorio)
- Procesamiento de datos, análisis y conclusiones

Para el diseño de las situaciones o tareas, se tomaron como referente los principios de la EMR de Freudenthal, (1983); de acuerdo a estos principios (principio 1) se trabajó con una problemática central (Problemas de calidad del agua del río Guabas); principio de niveles (matematización horizontal y vertical); además de tener en cuenta los actos de comprensión para el concepto de función establecidos por Ana Sierpiska (1992). Las problemáticas que se establecieron son ampliamente conocidas por los estudiantes, además es el eje fundamental del modelo curricular de la institución educativa; es importante aclarar que la intervención se realizó en el río Guabas y en una de sus derivaciones de mayor importancia (Acequia la Chamba) que atraviesa la cabecera municipal de Guacarí de oriente a occidente. El diseño de las intervenciones en el aula y en el contexto se llevó a cabo siguiendo la siguiente estructura general.

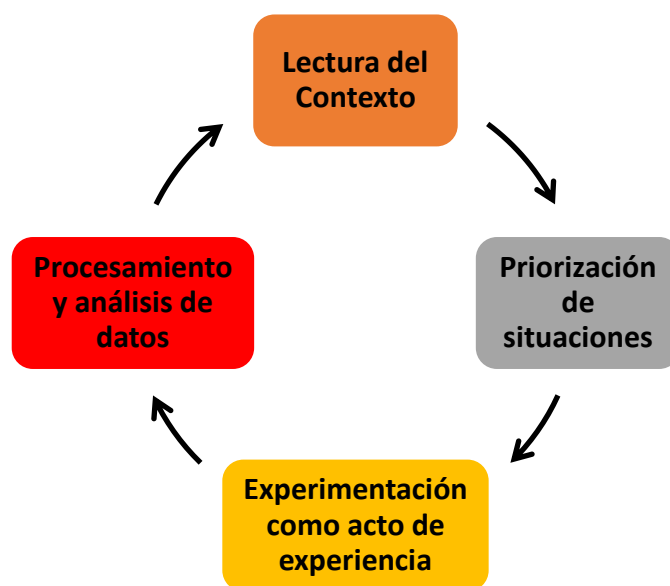


Figura 4 Esquema general de abordaje de los problemas de calidad del agua del río Guabas

3.4.4. Lectura del contexto.

Para la lectura del contexto, los estudiantes realizaron un recorrido guiado por el río Guabas y la acequia La Chamba donde pudieron reconocer todas las situaciones asociadas a la fuente de agua potable del municipio de Guacarí; este acercamiento permitió los inicios del primer nivel de matematización situacional, de igual forma se desarrolló la matematización horizontal con la identificación de aspectos que cambian y las implicaciones sobre otras características que también cambian. En esta fase los estudiantes pudieron reconocer los diferentes problemas de calidad de agua que afectan a la fuente hídrica desde la percepción sensorial en relación con la presencia de sólidos, las variaciones de color, el aumento de la turbiedad entre otros.

3.4.5. Priorización de Situaciones

Una vez los estudiantes tuvieron contacto directo con el contexto del río Guabas y con los problemas asociados a la calidad del agua, definieron de manera grupal hacer un zoom sobre aquellas situaciones o problemáticas que son más representativas; hicieron sus propias conjeturas, establecieron cantidades conocidas y desconocidas e infirieron relaciones y variaciones a nivel situacional.

En consenso entre docente y estudiantes se acordaron las situaciones problema que fueron objeto de análisis; los problemas de calidad del agua debían cumplir con los criterios de ser una problemática cercana a los estudiantes, de importancia en la comunidad, que despierte interés su comprensión y que sea replicable a nivel de laboratorio.

El grupo de estudiantes y docente concretaron 3 situaciones problemas de calidad del agua para ser replicadas bajo control en laboratorio y a partir de estas réplicas analizar las relaciones funcionales presentes en ellas. Las situaciones problema definidas fueron; el impacto de los sólidos en el agua (parámetros de sólidos y turbiedad), la clarificación del agua (cantidad de reactivo químico en el mejoramiento de la turbiedad del agua) y la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto. Estas tres situaciones problema definidas se unen a la realizada desde la lectura del contexto para un total de cuatro situaciones problemas abordadas en la investigación.

3.4.6. Experimentación como acto de experiencia

La experiencia vivida en la lectura del contexto y el acercamiento con los problemas de calidad del agua deben ser reforzados con la réplica a nivel de laboratorio. Es esta parte de la aplicación, los estudiantes replicaron de manera controlada parte de la situación observada

en el recorrido realizado por el río Guabas; se hizo especial énfasis en los aspectos de mayor relevancia para los estudiantes y se llevaron registros más precisos del comportamiento de las variables en juego. (Turbiedad, sólidos, oxígeno disuelto y temperatura principalmente)

Con la lectura del contexto y la experimentación, los estudiantes tuvieron más elementos para la comprensión de los problemas de calidad del agua; a este nivel lograron comprender que hay variables en juego, que existe una dependencia de variables, que algunas cosas no cambian y expresaron modelos con mayor carácter de formalidad tratando de matematizar las situaciones. En esta parte, la intervención del docente fue fundamental ya que aquí se empezaron a hilar los conceptos o elementos fundamentales de las relaciones funcionales; se prestó mucha atención a los sistemas de representación que los estudiantes emplearon para presentar la relación y la variación de los parámetros fisicoquímicos y se manifestó el potencial de cada uno de los sistemas de representación empleados

3.4.7. Procesamiento y análisis de datos

En este apartado se describen las unidades de análisis que se consideraron para abordar las relaciones funcionales y los problemas de la calidad del agua del río Guabas desde la perspectiva de los principios de la EMR

Para poder evidenciar estos elementos, se realizó el análisis de las producciones (análisis de contenido) elaboradas por los grupos de trabajo en cada una de las situaciones problemas analizadas; cada una de estas situaciones viene acompañada de su guía de trabajo donde se describe la práctica de laboratorio y los interrogantes específicos asociados a esta.

3.4.7.1. Tipo de Análisis

En este segmento se presenta el tipo de análisis empleado, el cual permitió la construcción de un instrumento (rejilla de análisis) que facilitó la categorización, la organización, y el análisis de los datos provenientes de las cuatro intervenciones realizadas por los estudiantes. En busca de este fin, se estableció como modelo análisis, el análisis de contenido, que de acuerdo a los postulados de Arbeláez & Onrubia (2014), citado en Díaz (2018), consiste en verificar la presencia de temas, palabras o conceptos en un contenido y su sentido dentro de un contexto; también Piñuel (2002) citado en Díaz (2018) establece que el análisis de contenido es el conjunto de procedimientos interpretativos de productos comunicativos previamente registrados y que permiten procesar datos relevantes y sus usos. Para la concreción del modelo de análisis se establecieron categorías de forma deductiva que de acuerdo a Arbeláez & Onrubia (2014), citado en Díaz (2018), consiste en establecer categorías de análisis previamente establecidas y que se construyen mediante referentes teóricos, para esta investigación corresponden a los criterios establecidos y enunciados en la rejilla de análisis.

El esquema de categorización que se empleó para el análisis de las producciones de los estudiantes es de tipo central relacional, tal como se muestra en la figura 5, este esquema tuvo como ejes fundamentales la relación entre los actos de comprensión de Sierpinska (1992), los problemas de calidad del agua y los niveles de matematización de la EMR



Figura 5 Esquema general de categorización y análisis, fuente propia

Es importante resaltar que la construcción de la rejilla de análisis de contenido, se centró en la producción de los estudiantes ante diferentes situaciones (4 situaciones) propias del contexto de los problemas de calidad del agua que surgieron como resultado de la necesidad del contexto local institucional; estas situaciones a su vez, están cruzadas con los actos de comprensión (AC) de Sierpinska (1992), que darán la luz para identificar la comprensión de las relaciones funcionales de estas situaciones; además de permitir determinar el nivel de matematización (horizontal y vertical) que lograron los estudiantes.

Las cuatro intervenciones realizadas se llevaron a cabo de la siguiente manera, la primera, fue un recorrido guiado por el río Guabas y una de sus derivaciones, la acequia La Chamba; del análisis de esta primera intervención surgieron las situaciones de interés (3 situaciones) a ser abordadas posteriormente. Las situaciones trabajadas posteriormente fueron: impacto de los sólidos en el agua, la clarificación del agua, y el impacto de la temperatura en el oxígeno disuelto del agua. Para estas intervenciones se hizo necesario hacer 3 prácticas de laboratorio de química ambiental el cual fue un espacio para que los estudiantes exploren experimenten, verifiquen y saquen conclusiones desde su propia experiencia, promoviendo el aprendizaje activo y colaborativo de los mismos.

3.4.7.2. Matemización (horizontal y vertical) y Actos de comprensión

La rejilla de análisis de contenido propuesta incluye la matemización desde 13 criterios que fueron agrupados de acuerdo al nivel (situacional, referencial, general y formal) que representaban; es así como el primer grupo de criterios se refiere a la matemización horizontal (A1, A2) donde se pretendió establecer la manera como los estudiantes identifican los cambios en un entorno real (problemas de calidad del agua del río Guabas), y expresan esos cambios a partir de registros gráficos o respuestas a preguntas; el segundo grupo de criterios corresponden al nivel referencial de matemización vertical (B1, B2) y con ellos se busca que los estudiantes concreten los sujetos de cambio en cada uno de los problemas de calidad del agua, identifiquen variables y constantes y asignen valores a esas magnitudes en su respectiva unidad de medida; para los criterios del nivel de matemización general (C1, C2, C3) se espera que la comprensión de la situación problema y lo trabajado en los niveles anteriores les permita establecer relaciones de dependencia y que éstas estén concretadas en diferentes sistemas de representación y finalmente los últimos criterios que corresponden al nivel formal de la matemización vertical (D1, D2) se espera una comprensión total de los problemas de calidad del agua estudiados, mediados a través de los sistemas de representación (gráfica, tabla y ecuación) y su uso en la predicción.

A continuación, se presentan la rejilla de análisis de contenido propuesta (Tabla 3.), en ella se hace un cruce de doble entrada que pone en juego los niveles de matemización con sus respectivos criterios desde los actos de comprensión de Sierpinska (1992), y las cuatro situaciones problema abordadas por los estudiantes desde las alteraciones de los parámetros fisicoquímicos (turbiedad, sólidos, temperatura y oxígeno disuelto).

Tabla 3 Rejilla de análisis de contenido

RELACIONES FUNCIONALES						
ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DE CALIDAD DEL AGUA (sólidos disueltos, turbiedad, color, oxígeno y temperatura)			PROBLEMAS DE CALIDAD DEL AGUA PRIORIZADOS			
			Lectura del Contexto Identificación de problemas de calidad del agua sobre el río Guabas y la acequia la Chamba	Análisis de la variación de la turbiedad en el agua en función de la cantidad de sólidos en ella	Análisis del efecto del uso de un agente químico en las variaciones de la turbiedad (clarificación de agua)	Análisis de la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto
Matematización Horizontal	Situacional	Comprende la situación a trabajar	A1			
		Percibe cambios en el contexto de la calidad del agua				
		Identifica regularidades en situaciones problema (esquemas, gráficos)	A2			
Matematización Vertical	Referencial	Nombra de manera correcta los sujetos de cambio		B1		
		Identifica qué magnitudes cambian (asigna magnitud a los sujetos de cambio)				
		Reconoce variables y constantes en cada situación		B2		
	General	Establece relaciones de dependencia		C1		
		Infiere sobre creciente o decreciente en cada situación abordaba		C2		
		toma registros y los organiza		C3		
	Formal	Organiza los datos en tablas, relaciona en una tabla la variación de las magnitudes		D1		
		Construye gráficas en el plano cartesiano que muestre la relación entre variables				
		Usa la gráfica para predecir comportamientos		D2		
		Construye o propone una ecuación algebraica para expresar la relación				

3.5. Instrumentos para la recolección de la información

Para realizar la recolección de la información se diseñaron 4 instrumentos denominados de la siguiente manera:

1. Situación 1: Corresponidió a la guía de trabajo para la lectura del contexto sobre el río Guabas y la acequia La Chamba identificación de problemas de calidad del agua. (Ver anexo 2)
2. Situación 2: Corresponidió a la práctica de laboratorio donde los estudiantes analizarían el impacto de los sólidos en el agua. (Ver anexo 3)
3. Situación 3: Corresponidió a la práctica de laboratorio número 2, donde los estudiantes evaluaron el efecto de un producto químico sobre la turbiedad de agua (clarificación de agua). (ver anexo 4)
4. Situación 4 correspondía a la práctica de laboratorio donde los estudiantes analizarían la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto. (Ver anexo 5)

Todos los instrumentos diseñados presentaban una descripción del trabajo a realizar (visita de campo o práctica de laboratorio) seguido de una serie de interrogantes o actividades que permitían evidenciar los indicadores bajo los cuales se describían los conceptos de problemas de calidad del agua y relaciones funcionales.

3.6. Presentación de los resultados

Para el análisis de los resultados se tuvo en cuenta la rejilla de análisis de contenido propuesta, con los criterios establecidos y los cruces relacionales (A, B, C, D) que fueron observados en las cuatro situaciones o tareas que desarrollaron los estudiantes.

Con el fin de proteger la identidad de los estudiantes se asignó un código para cada grupo de trabajo. En total fueron 25 estudiantes agrupados en grupos de 5, los cuales tuvieron código de identificación G1, G2, G3, G4 y G5. Para la presentación de los resultados se consideró la siguiente estructura

3.6.4. Estructura de presentación de los análisis

La estructura general para la presentación de los resultados tiene cuatro elementos fundamentales que permitieron comprender la producción de los estudiantes; cabe aclarar que cada una de las intervenciones se realizó en grupos de 5 estudiantes y que se priorizó la experimentación y observación de fenómenos en cada una de ellas.

Las situaciones o tareas propuestas contienen preguntas y actividades que realizaron los estudiantes de acuerdo a lo observado en cada una de las experimentaciones realizadas.

Los elementos de la presentación de los análisis son:

3.6.4.1. Descripción de la situación problema

En esta primera parte se realizó una descripción detallada de la situación y el instrumento propuesto al grupo de estudiantes

3.6.4.2.Objetivo de la situación problema

Se mencionó el objetivo de cada intervención a la luz de las categorías conceptuales y los objetivos de la investigación

3.6.4.3.Rejilla de relaciones

En esta rejilla se relacionaron los criterios A, B, C, D de la rejilla de análisis de contenido y las preguntas de cada instrumento que apuntaba a identificar el aprendizaje, los actos de comprensión y los criterios de los problemas de calidad del agua

3.6.4.4.Análisis y discusión de los resultados

En este apartado se mostraron las producciones de los estudiantes y la respuesta a cada una de las preguntas, su relación con los cruces de la rejilla de análisis de contenido, criterios y aprendizajes. Para el desarrollo de este apartado se tabularon todas las respuestas obtenidas de cada uno de los 5 grupos para cada una de las situaciones trabajadas

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Análisis de la situación 1, lectura del contexto del río Guabas

4.1.4. Descripción de la situación problema

La fase metodológica fundamental en el proceso de la investigación es la lectura del contexto; esta actividad de acuerdo a las consideraciones de (Gravemeijer & Teruel, 2000) consistió en un recorrido guiado por el río Guabas y uno de sus tributarios (acequia La Chamba) donde los estudiantes observaron de primera mano las diferentes situaciones asociadas al recurso hídrico. Durante el recorrido los estudiantes pasaron por 4 estaciones (4 puntos críticos identificados por el proyecto PRAE) donde se pudo observar a mayor nivel los problemas de calidad del agua, los causantes y las posibles consecuencias. En cada una de las estaciones el docente hizo una descripción de la zona y respondió a las inquietudes planteadas por los estudiantes; estos a su vez debían diligenciar un cuestionario (11 preguntas y cuatro descripciones) sobre lo observado en cada estación visitada.

4.1.5. Objetivo de la situación Problema.

El objetivo de la situación problema número uno era identificar y priorizar los problemas de calidad del agua que presenta el río Guabas y su tributario (acequia La Chamba). Es bien sabido que muchos de estos problemas ya son conocidos por los estudiantes, pero era importante que en conjunto (estudiantes y docente) definieran cuales eran los problemas más relevantes que deberían ser abordados posteriormente, además, estas situaciones problema debían cumplir con los requisitos de acercamiento al concepto de relaciones funcionales y la réplica en laboratorio con los recursos con los que cuenta la institución. Como lo manifiesta Blomhoj, (2004), las situaciones como herramientas poderosas para el surgimiento de conceptos matemáticos

4.1.6. Rejilla de relaciones

La tabla número 4 muestra la relación de las preguntas de la situación problema 1 con las categorías de análisis

Tabla 4 Rejilla de relaciones para situación problema uno

SITUACIÓN No 1 Lectura del Contexto	ESTACIÓN	PREGUNTA O ACTIVIDAD	APRENDIZAJE	DESCRIPCIÓN
	ESTACIÓN 1 La Ceiba	Descripción de la estación	A1	Representación gráfica o textual de lo que observa
		P1		Percibe cambios
		P2		Identifica regularidades
	ESTACIÓN 2 Liceo Comercial	Descripción de la estación	A1	Representación gráfica o textual de lo que observa
		P3		Percibe cambios
		P4		Identifica regularidades
	ESTACIÓN 3 Compuerta El Limonar	Descripción de la estación	A1	Representación gráfica o textual de lo que observa
		P5	A2	Compara y establece regularidades
	ESTACIÓN 4 Estación Pollo Pikú	Descripción de la estación	A1	Representación gráfica o textual de lo que observa
		P6	A2	Compara y establece regularidades
		P7		
	Preguntas finales	P8	A2, B1	Compara y establece regularidades
		P9		
		P10	B1	Nombra los sujetos de cambio
		P11		

4.1.7. Análisis y discusión de los resultados

El análisis de la situación 1, lectura del contexto, está dividida en tres partes; primero la descripción de cada una de las estaciones, posteriormente el análisis a las respuestas de las preguntas específicas de cada estación y, por último, el análisis de las respuestas a preguntas finales. Todas las preguntas, actividades o tareas citadas en este apartado, corresponden al

anexo 2. A continuación se presentan los análisis de resultados realizados desde el análisis de contenido

4.1.7.1. Análisis de la descripción de cada estación visitada

Respecto a la descripción de cada una de las estaciones, los grupos de estudiantes priorizaron el uso de dibujos representativos de la zona, acompañados de textos cortos y concretos sobre situaciones específicas que se podían observar y que a su vez generaban cambios inmediatos en la fuente de agua; esto coincide con los primeros registros de representación que manifiesta Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), que aparacen despues de observar un fenómeno o realizar una experimentación; tan solo un grupo (G3) empleó dibujos sin el uso de textos. En los dibujos se identifican representaciones gráficas de objetos extraños en la fuente de agua lo que indica que los estudiantes relacionan la presencia de elementos extraños con contaminación.

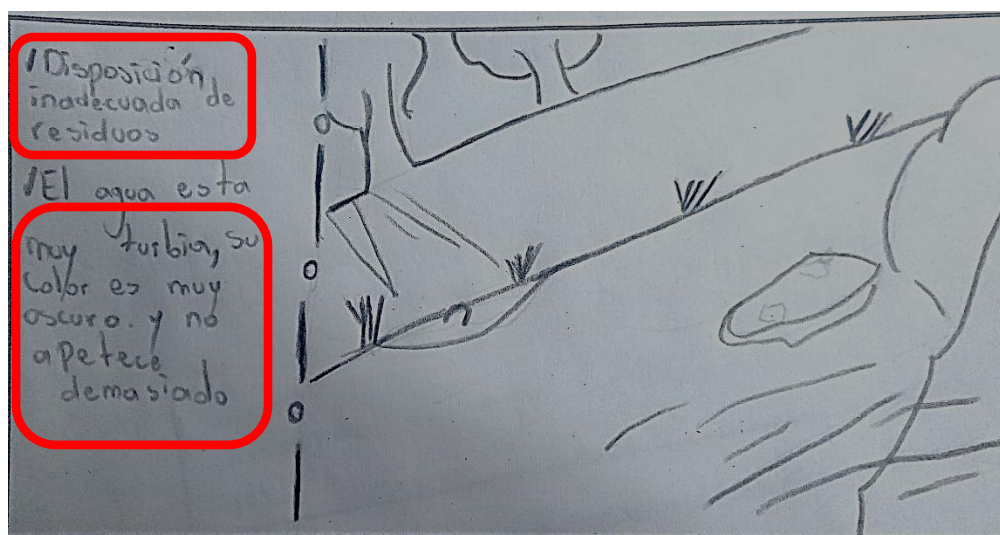


Figura 6. Descripción de la estación 1, grupo de trabajo 1, G1

En la figura 6 se observa cómo los estudiantes del G1 identifican inmediatamente 3 situaciones problema y establecen relaciones indirectas de éstas en función de la calidad del agua; también es importante mencionar que este grupo hace alusión a dos magnitudes propias de la calidad del agua como lo son la turbiedad y el color y asigna un valor textual a este último diciendo *“el color es muy oscuro”* y lo relacionan con la posibilidad de uso cuando dice *“no apetece demasiado”*, lo que deja inferir que empieza a visualizarse el acto de comprensión 1, identificación de cambios en un mundo que nos rodea (Sierpinska, 1992)

Para el G5 en esta misma estación *“el río está turbio, gracias a la lluvia”* nuevamente aparece la magnitud turbiedad como parámetro indicador de calidad como lo considera Cortés (2009), y se asigna como causa la temporada de lluvia; ambos grupos establecen relaciones de causa efecto al observar las condiciones del agua.

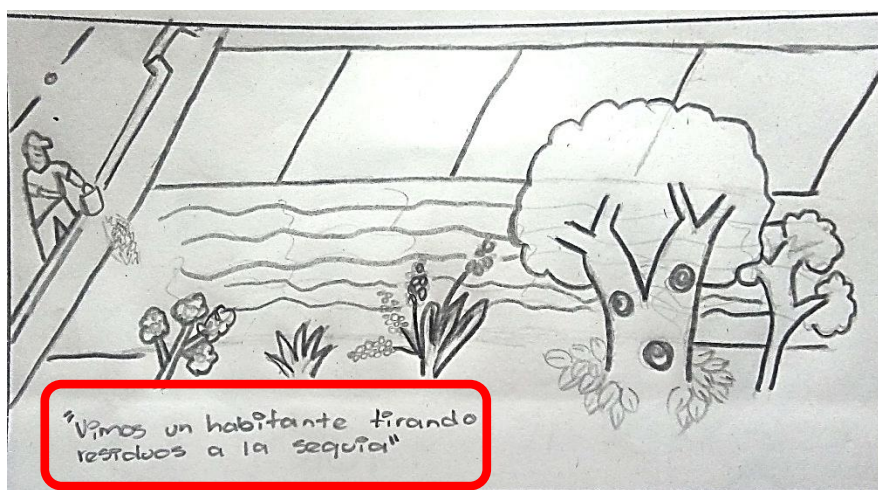


Figura 7 Descripción de la estación 2, grupo de trabajo 2, G2

En el momento de pasar por la estación dos, sucedió algo que llamó la atención de los cinco grupos y que quedó plasmado en sus respuestas y comentarios, el G2 lo mencionó así: *“vimos a un habitante tirando residuos a la acequia”* (figura 7.), esta acción inmediatamente

cambio el aspecto físico del agua; al respecto el G5 manifiesta en su descripción *“lo que hizo el señor hizo que el agua se viera más oscura”* y el G1 dice *“el agua se puso más turbia”*. Todas estas afirmaciones presentadas indican que los estudiantes observan los cambios en situaciones que los rodean lo que podríamos llamar matematización horizontal (Bressan, 2016). El uso de la frase *“el agua se puso más turbia”* indica que los estudiantes además de observar el cambio lo relacionan con una magnitud propia de la calidad del agua y tratan de encontrar una regularidad en esos cambios observados; para el G1 empiezan a aparecer respuestas que enmarcan el criterio de análisis A2. Correspondiente a los actos de comprensión 1 y 2 de Sierpinska, (1992)

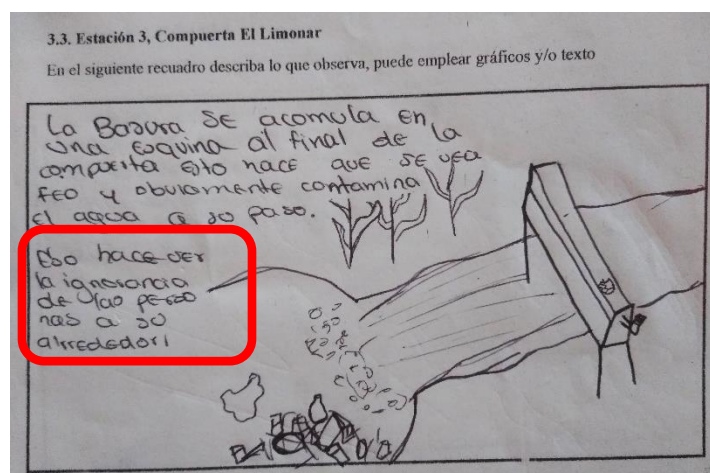


Figura 8 Descripción de la estación 3, grupo de trabajo 4, G4

En la estación número 3 la descripción realizada por los grupos nuevamente muestra gráfica y textualmente lo que observan y lo asocian a impactos antrópicos al decir *“esto hace ver la ignorancia de las personas a su alrededor”*. El G3, aunque no realiza descripciones textuales en los dibujos, trata de detallar en ellos los elementos que describen textualmente los otros grupos. (Figura 8)

Durante el recorrido, antes de llegar a la estación 3 un habitante de la zona vierte residuos de estiércol de caballo sobre la fuente de agua, lo que genera un cambio inmediato en las condiciones del agua (cambios físicos) que de acuerdo a Rojas (2003), y Cortés (2009) son estos indicadores del orden sensorial que permiten asociar de mejor manera las condiciones de calidad del agua; que posteriormente se discutirán esta situación en las preguntas realizadas a los estudiantes.

Los cinco grupos en sus descripciones hacen énfasis en la presencia de estiércol de caballo y de pollo presentes en las estaciones como lo muestra la figura 9 y como estos cambian el aspecto del agua; los estudiantes en general identifican cambios ya que son perceptibles a los sentidos, (Cortés, 2009) establecen relaciones causales utilizan términos como *más qué*, *menos qué*, *debido a*, que infieren, que además de observar los cambios tratan de establecer relaciones entre ellos y asignar causas a cada uno.

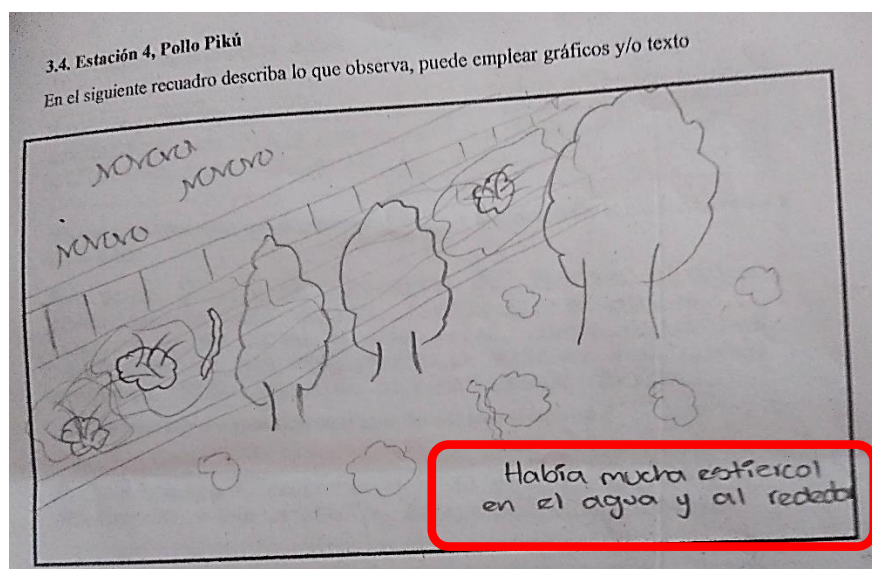


Figura 9. Descripción de la estación 4, grupo de trabajo 2, G2

En esta estación se discutió el concepto de oxígeno debido a que los estudiantes manifestaban **“aquí el agua está peor, el agua está muerta”** para ello el docente solicitó que se compararan las observaciones realizadas y mediciones de temperatura y oxígeno tomadas por ellos mismos en las estaciones visitadas. De esta discusión se establecieron dos hipótesis G1 y G5, **“donde hay más gente, más contaminada está el agua, allá en Guabitas (zona rural) el río se ve más vivo, hay peces y acá en Piku solo zancudos, el agua huele feo y se ve muy sucia”** y la segunda hipótesis corresponde a el efecto de la temperatura del agua sobre el oxígeno **“cuando el agua está caliente el valor del oxígeno mide menos y al revés”** esta última hipótesis surgió gracias a que en el momento de la visita a la estación de pollo Pikú se presentó una descarga de aguas de caldera de pelado de pollo lo que cambio de inmediato la temperatura del agua en la fuente y a su vez el valor del oxígeno; esta observación realizada corresponde con lo manifestado por Cortés (2009), sobre las causas en la disminución del oxígeno disuelto en el agua; más adelante esta situación se convertirá en una situación objeto de estudio para los estudiantes.

4.1.7.2. Análisis a las respuestas específicas de cada estación

En las preguntas realizadas a los grupos se buscaba la identificación de situaciones de cambio específicas a la calidad del agua y las comparaciones, regularidades o relaciones que pudieran surgir de ellas, actos de comprensión 1 y 2 y 3 Sierpinska (1992); las preguntas 1 a la 7 (Anexo 2) buscaban este propósito, ante esto los estudiantes respondieron:

Las preguntas 1 a 4 (Anexo 2) hacían énfasis en pedir al estudiante los impactos más significativos observados y las características de los mismos, ante esto se pueden identificar las siguientes categorías en las respuestas de los grupos; ***el agua está de color muy amarillo; disposición inadecuada de residuos que afecta el agua; el agua está turbia por la lluvia;***

en cuanto a la turbiedad, esta es menor cuando no llueve; el agua tiene un inusual color amarillo; el agua está de color café por los sólidos que botan los habitantes; un aspecto físico que tiene el agua es la turbiedad que ocurre por la tierra que desliza cayendo a La Chamba así dándole un aspecto inadecuado. Todas estas respuestas que correspondían a las estaciones 1 y 2, muestran que los estudiantes logran identificar cambios y acciones que repercuten sobre la fuente de agua; es importante destacar que todos los grupos empiezan a emplear el término turbiedad para hacer referencia al estado físico del agua en las diferentes estaciones “*más turbia o menos turbia*” son los términos más utilizados. Este tipo de representaciones Duval, (2004) las considera sistema de representación verbal y es un inicio para pasar a otros sistemas de representación

La Figura 10 muestra la respuesta del G5 que generó inquietud a los estudiantes ¿cuál aspecto físico tiene el agua en la respectiva estación? y ¿a qué cree que se debe este aspecto?

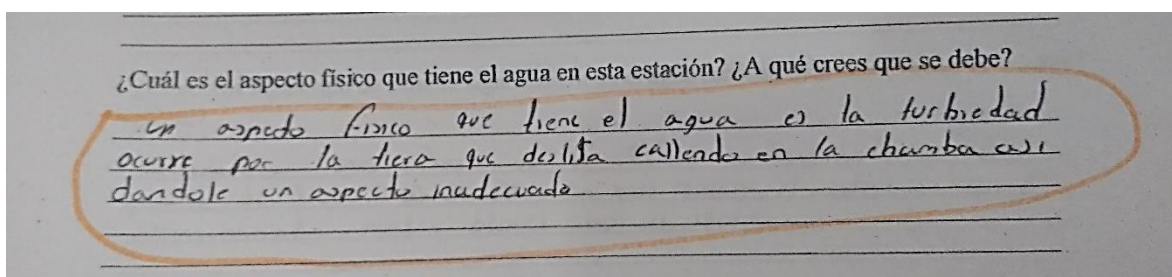


Figura 10. Respuesta del grupo 5 a la pregunta número 4

Ante esta respuesta los estudiantes consideraron que la turbiedad del agua dependía de la intensidad de lluvia porque ésta a su vez facilitaba el deslizamiento de porciones de tierra, lo que generaba los cambios en la turbiedad del agua; además asociaron esta situación como respuesta a la pregunta de por qué se iba el agua cuando llovía, realizada por uno de los estudiantes. Esta conclusión que los estudiantes construyen en comunidad evidencia la

identificación de cambios, el uso de su experiencia con el fenómeno para establecer relaciones y regularidades y finalmente afirmaciones muy acertadas como la lograda mediante esta respuesta. Claramente se puede evidenciar identificación de cambios en un mundo que nos rodea y la regularidad de estos cambios (Sierpinska, 1992)

En la pregunta número 5 (Anexo 2) se les pidió a los estudiantes que describirán algún cambio significativo que presentara el agua en comparación con lo observado en las estaciones anteriores; el G1, G3 y G4 manifiestan que el cambio de mayor significancia es el aumento de la turbiedad y el color debido a la descarga de residuos de heces fecales de animales a la fuente de agua y la disposición de residuos de construcción por parte de los habitantes de la zona; al respecto la respuesta del G3 ***“si, ya que en las estaciones anteriores el agua estaba amarilla pero en esta estación estaba bastante turbia y pudimos observar que personas de esa comunidad tiran estiércol e inmediatamente el color del agua cambió”***; los estudiantes del G2 manifiestan ***“El agua de las otras estaciones estaba con más basura pero no estaba tan oscura y no olía tan fuerte”***, estos estudiantes no emplean el termino turbiedad y por el contrario describen el cambio en el agua empleando la palabra ***“oscura y fuerte”***, sin embargo también registraron el cambio observado; para el G5 el agua está muy contaminada y presenta olores desagradables, este fue el grupo que no describió con mayor detalle los cambios que se observaron durante el recorrido.

Las preguntas 6 y 7 (Anexo 2), correspondientes a la estación 4 (pollo Pikú), estas pedían establecer algún tipo de relación, acto de comprensión 2 AC-2 (Sierpinska, 1992), entre el aspecto físico del agua y la empresas colindantes, ante estas preguntas los estudiantes de forma general y categórica establecen que la empresa pollo Pikú y criaderos de cerdos de la zona descargan sus aguas residuales a la fuente de agua, plumas, sangre, estiércol van a parar

a la fuente de agua superficial, esto genera cambios en el color, la turbiedad y se generan olores molestos, el G1 responde ***“No es raro que el agua se vea roja debido al sacrificio de los pollos”***, solo el G2 y el G3 consideran que éstas afectaciones pueden traer problemas de salud a la comunidad que vive aledaña a la fuente de agua.

En esta estación como se mencionó anteriormente se realizó la discusión de la frase ***“aquí el agua está muerta”*** y se logró establecer en comunidad una fuerte dependencia entre el oxígeno disuelto y la temperatura del agua; al respecto el grupo 1 responde a la pregunta 7 (¿cuál es el impacto más significativo en esta estación?) de la siguiente manera ***“Los desechos de los pollos y el agua caliente porque eso perjudica a la chamba y su agua queda sin oxígeno”***

4.1.7.3. Análisis a las respuestas de las preguntas finales

La últimas cuatro preguntas o preguntas finales (Anexo 2) pretendían que los estudiantes, una vez realizado el recorrido pudieran concretar los impactos ambientales observados de mayor significancia para ellos y para la comunidad (pregunta 9), además, se les pidió que nombraran los cambios identificados en todo el recorrido (pregunta 8 y 10) y que aspectos no cambiaron (pregunta 11); ante estas preguntas los estudiantes concretaron lo siguiente:

Todos los grupos consideran que las estaciones que presentaron mayores impactos ambientales fueron las estaciones 3 y 4 y que esto se debe al poco cuidado de los habitantes de la zona, recordemos que en estas estaciones los estudiantes observaron a habitantes del sector verter residuos sobre la fuente de agua y el cambio físico del recurso fue inmediato. El G2 y G3 enumeran los impactos ambientales significativos así 1. Alta turbiedad del agua, 2. Olores ofensivos, 3. Mal manejo de los residuos 4. Aumento del color del agua 5.

Disminución del oxígeno por la temperatura y la contaminación, este es el único grupo que enumera los problemas de esta manera, para el resto de los grupos el agua está muy contaminada debido a las diferentes acciones antrópicas. Esta categorización se asemeja a los parámetros empleados por el ICA para consumo humano que establece la Resolución 2115, (2007).

Respecto a la pregunta de los cambios identificados, el G3 dice ***“Se logró identificar el cambio de la turbiedad el olor del agua y el color, por ejemplo la primera estación el agua estaba amarilla y ya en la última estación el color del agua estaba más oscura, más contaminada”*** el grupo 4 respondió ***“Cada vez está aún más contaminado y el agua iba cambiando, se iba colocando más turbia”***; los grupos G1, G2 y G5 se unen a estas respuestas enfocándose en los cambios observados en la turbiedad el color y el oxígeno del agua.

Para la pregunta 11 (Anexo 2), donde se les pedía enunciar qué cosas o características no habían cambiado, ninguno de los grupos pudo concretar una característica específica, las respuestas están enmarcadas en decir por ejemplo el grupo G4 ***“la turbiedad en las dos primeras estaciones era casi igual pero después aumentó”***, el G5 dice ***“el agua tuvo un color similar pero a medida que el agua va bajando el color aumenta”***, el G2 dice que ***lo que se mantuvo igual fue la cantidad de agua que corría en cada una de las estaciones***. Al parecer a los estudiantes se les complica establecer constantes en un mundo real de cambios evidenciados mediante los sentidos.

Al finalizar la aplicación de la situación 1 (lectura del contexto), se realizó una socialización de las respuestas con todos los grupos de trabajo para de forma unánime establecer cuales habían sido esas situaciones problema asociadas a la calidad del agua que deberían ser abordadas de manera más específica; principio de actividad y de realidad

(EMR), ante esto, rápidamente los estudiantes manifestaron la necesidad de medir, entre las intervenciones algunos dijeron *“profe por ejemplo la turbiedad y el color eran muy parecidos en algunas estaciones, ¿cómo sabemos cuál era mayor?”*; para otros estudiantes era necesario repetir la salida y traer todos los instrumentos de medición. De la socialización final se concluyó lo siguiente: en palabras de los estudiantes.

- Es necesario medir (el color, la turbiedad, los residuos, los sólidos, la contaminación)
- Se debe repetir la salida o simular lo observado en el colegio
- Los problemas ambientales más críticos fueron 1. El cambio de la turbiedad, 2. El cambio de color, 3. la disminución del oxígeno, 4. los olores ofensivos, 5. Los residuos sólidos, 6. Los sólidos vertidos al río (residuos de construcción y heces fecales de animales).
- Es necesario saber cómo mejorar el estado del agua, cómo limpiarla
- Es necesario saber por qué se va el agua cuando llueve tanto

En términos generales la aplicación de la situación 1 permite inferir que el principio de actividad y de realidad enmarcado en la EMR (Bressan, 2016) favorece el aprendizaje, permite la construcción libre de conocimiento y el apoyo mutuo cuando el trabajo se hace de manera colectiva y no se trabaja de manera aislada; los estudiantes sienten la libertad de expresar sus opiniones y llegan a acuerdos entre ellos de manera más fácil, el docente solo direcciona u orienta el proceso en el aprendizaje que requiere, lo demás es la construcción libre de los grupos de trabajo.

Respecto al principio de niveles y su correspondencia o cruce con los AC (Sierpinska, 1992), los estudiantes lograron evidenciar el nivel situacional ya que desde sus conocimientos y en apoyo de grupo lograron identificar situaciones de cambio en un contexto

real, lograron priorizar las afectaciones, construir relaciones y establecer correspondencia de causa efecto, además determinaron algunas regularidades respecto a los parámetros físicos del agua, también se presentaron algunos rasgos de dependencia y mención de magnitudes pertenecientes a los sujetos de cambio en las observaciones realizadas. Por lo tanto, todos los grupos lograron ubicarse en el criterio A2 el cual incluye el criterio A1 de la rejilla de análisis propuesta, todos los estudiantes logran identificar cambios en un contexto real y problematizar estos cambios.

Respecto al Obstáculo epistemológico 1 “la matemática no tiene que ver con problemas prácticos” (Sierpinska, 1992) este emergió a la luz al finalizar la situación 1, ya que algunos estudiantes manifestaban que la clase realizada parecía más de ciencias naturales o educación ambiental que de matemáticas y cuestionaban diciendo “*¿Qué tiene que ver todo esto con las matemáticas?*” “*¿Qué vimos de matemáticas hoy?*”, ante esto, esta es la oportunidad de superar este obstáculo mediante las propuestas de trabajo que se desarrollaran posteriormente

Como parte del análisis de la situación uno, está la priorización de las situaciones que corresponde a la fase II de la metodología. Para la priorización de los problemas ambientales abordar en las situaciones posteriores y el diseño de los instrumentos, se tuvo en cuenta los siguientes criterios:

- Los resultados de la situación 1 expresados en función de las respuestas de los estudiantes
- Un análisis fenomenológico de las posibilidades o el potencial que pudiera tener cada situación a la hora de abordar el concepto de relaciones funcionales
- Los actos de comprensión de Sierpinska vistos desde tres conceptos específicos, la variación, la dependencia y los sistemas de representación

- Los criterios establecidos y asociados a los niveles de matematización de la EMR
- La experimentación como estrategia didáctica fundamental
- La disponibilidad de equipos y recursos para las mediciones de parámetros físicos y químicos del agua.

Teniendo en cuenta los criterios mencionados se determinó que los problemas de calidad del agua que podrían ser modelados a escala laboratorio y que su manejo no presentaría riesgo para los estudiantes serían los siguientes 1. La turbiedad y el color del agua en función con la presencia de sólidos en ella (sólidos vistos como contaminantes), 2. Como mejorar la calidad del agua a través de la estrategia de clarificación, 3 El impacto de la temperatura en la disponibilidad del oxígeno en el agua. Para cada una de estas tres situaciones se diseñó una guía de laboratorio que permitía a los estudiantes simular o replicar lo visto en el contexto real; pasamos de situaciones reales a situaciones realistas; las guías priorizaban la experimentación o principio de actividad y de realidad que está enmarcado en la EMR y posteriormente se realizaban preguntas de lo sucedido en cada experimento y asociado a los elementos fundamentales de las relaciones funcionales desde los actos de comprensión de Sierpinski. Es así como finalmente se construyen tres guías de trabajo para poner en juego los elementos de la investigación y poder determinar qué tipo de relaciones funcionales logran identificar los estudiantes al abordar los problemas de calidad del agua del río Guabas.

4.2. Análisis de la Situación 2, El impacto de los Sólidos en el agua

4.2.4. Descripción de la situación problema

La situación número dos se desarrolló en el laboratorio de análisis ambiental del Centro Agropecuario de Buga (SENA CAB), para esta actividad, en grupos de 5 estudiantes, debían evaluar la relación o el impacto de los sólidos en el agua (sólidos vistos como contaminantes);

para ello se requería montar un diseño experimental (principio de realidad EMR) donde, a diferentes muestras de agua potable se les aplicaba diferentes cantidades de suelo y posteriormente se medían parámetros físicos con sensores de laboratorio a cada una de las muestras. Una vez observado el experimento, los estudiantes debían responder un cuestionario, hacer registros de lo observado y manipulación de los datos obtenidos en la práctica (principio de actividad). Las variables en juego en esta situación eran la cantidad de sólidos disueltos y la turbiedad del agua. Estas variables se abordaron desde la conceptualización de Rojas (2003), y Cortés (2009)

4.2.5. Objetivo de la situación Problema

El objetivo de la situación 2 era identificar la relación funcional entre la turbiedad y los sólidos disueltos en el agua mediante proceso experimental y a través de elementos conceptuales de variación, dependencia y representación.

4.2.6. Rejilla de Relaciones

La guía de la situación dos está conformada por una descripción inicial general de la situación a abordar, 10 preguntas acerca de lo observado y 2 actividades sobre el registro de la información encontrada.

La tabla 5 muestra la relación de las preguntas de la situación dos con las categorías de análisis.

Tabla 5 *Rejilla de relaciones para situación problema dos*

SITUACIÓN 2 EL IMPACTO DE LOS SÓLIDOS EN EL AGUA	PREGUNTA O ACTIVIDAD	APRENDIZAJE	DESCRIPCIÓN
	Organización libre de la información	A1	Sistemas de representación iniciales
	P1	A1-B1	sujetos de cambio
	P2		
	P3	A2-B2	Regularidad en los cambios
	P4	C1 - C2	Establecer dependencias de acuerdo a lo observado
	P5	C2	Nociones de dominio y rango
	P6		
	P7	C2	Tipo de dependencia
	Organización de la información	C3-D1	sistemas de representación (tabla, Gráfica)
	P8	C1-D1	Establecer dependencias entre variables usando sistemas de representación
	P9	D1	Uso de los sistemas de representación
	P10	D2	Proyección, predicción

4.2.7. Análisis y discusión de los resultados

Al iniciar la parte experimental los estudiantes se percibían entusiasmados e involucrados directamente en la resolución de un problema, prueba de esto era la disposición, el ánimo, y socialización constante entre ellos; no se presentaba desorden, no había indisciplina, cada grupo estaba concentrado en montar su experimento y observar los cambios; ***“todos nos apoyamos con todos, vamos hacer esto bien muchachos”*** fue un frase enunciada por uno de los estudiantes a los que todos asistieron con un sí, un movimiento de cabeza o un pulgar arriba.

La Figura 11 muestra a los estudiantes desarrollando la práctica de del impacto de los sólidos en la turbiedad del agua



Figura 11 Estudiantes de la IEPVA, grado noveno, trabajando en la situación problema dos

Cada grupo de trabajo debía pesar diferentes cantidades de suelo (0,1g, 0,2g, 0,4g, 0,6g, 0,8g, 1g y 1,5g) (Anexo 3) y posteriormente verter cada cantidad sobre muestras de agua potable de igual volumen; a continuación, se debía mezclar hasta disolver completamente el suelo y observar lo sucedido. Después de realizado este proceso podían usar equipos de medición de turbiedad, conductividad, y pH como apoyo a la comprensión del fenómeno trabajado y finalmente responder las preguntas de la guía.

Los integrantes del G3 solicitaron al docente permitirles trabajar con gotas de tinta en vez de muestras de suelo y propusieron una escala de gotas que agregarían a cada muestra de agua (ellos querían observar que sucedía con la tinta en las muestras de agua y compararlas con lo sucedido con las muestras de suelo) ante esta solicitud el docente autoriza y continúan con su trabajo.

Antes de dar a conocer los resultados de la aplicación de la situación 2 es importante reiterar la importancia de poner al estudiante en contexto; esta experimentación le permitió a los estudiantes entender mejor el fenómeno estudiado y casi que inmediatamente al terminar

el experimento, sin leer las preguntas estaban haciendo sus conjeturas iniciales o confirmando las que ya tenían de la situación 1; frases como **“El color aumenta si los sólidos aumentan”**, **“la turbiedad depende de los sólidos”** entre otras, confirman el potencial de la experimentación en procesos de aprendizaje.

En la primera actividad se le pedía a los grupos que organizaran la información obtenida de la forma como mejor lo consideraran; ante esto todos los grupos construyeron una tabla de datos, vertical u horizontal con los valores medidos, pasaron del lenguaje textual a la representación tabular como forma de relacionar sujetos de cambio (Duval, 2004); la ubicación de los datos en las tablas fue correcta y solo emplearon unidad de medida para los sólidos (gramos) vistos como contaminantes; para el G3 la unidad de medida del contaminante fue: número de gotas del contaminante (tinta). La figura 12 muestra que los grupos G1 y G3 construyeron una tabla similar, considerando las mismas variables y la misma forma de la tabla, sin embargo, el G3 agregó una nota en la parte superior derecha de la tabla que decía (150 ml H₂O), indirectamente ponen en juego una constante dentro del experimento.

Se puede identificar que en estas construcciones los estudiantes no priorizan el uso de unidades de medida para las diferentes magnitudes, pero si consideran las muestras de suelo o las gotas de tinta como un contaminante en el agua.

Los grupos G4 y G5 a diferencia de los grupos anteriores, construyeron tablas donde los parámetros medidos se encontraban en la primera columna organizados en filas. (tabla horizontal)

Muestra	Cantidad Contaminante.	Conductividad	pH	Turbiedad	150 ml H ₂ O	Turbiedad	pH	Conductividad
					Muestra Contaminante			
M ₀	0	87.5	7	2.86	M ₀	0	1.44	6 85.3
M ₁	0,1g	88.8	7	81.9	M ₁	2	14.1	6 86.3
M ₂	0,2g	87.7	7	158	M ₂	4	35.0	6 83.4
M ₃	0,4g	91.4	7	263	M ₃	8	65.2	6 83.8
M ₄	0,6g	94.8	7	321	M ₄	12	79.2	6 84.3
M ₅	0,8g	94.4	7	581	M ₅	16	85.3	6 82.7
M ₆	1g	94.9	7	746	M ₆	20	103	6 80.2
M ₇	1,5g	103.6	7	1021	M ₇	25	114	6 83.6

Figura 12 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos G1 y G3

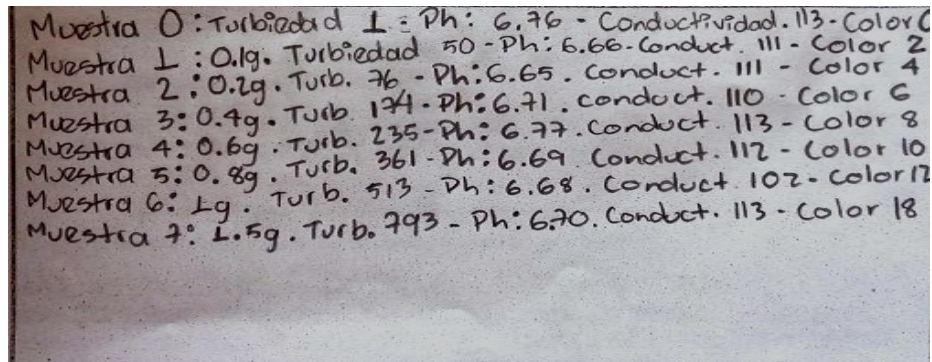
En la figura 13 se puede observar que los integrantes del G4 olvidan ubicar la cantidad de sólido que se empleó en cada muestra, esto puede dar indicios de que no reconocen esa cantidad como una variable dentro del experimento; de acuerdo a Duval (2004) esto indica la imposibilidad de pasar de un registro de representación verbal a otro como el tabular lo que conlleva a la comprensión errada del objeto matemático; estos grupos tampoco se cuestionan aun por las unidades de medida y solo el G5 emplea gramos para expresar la cantidad de sólidos en cada muestra de agua; este grupo emplea la palabra “**Cantidad de suelo**” para expresar el nombre de uno de los sujetos de cambio diferente a los grupos G1 y G3 quienes lo consideran contaminante.

	M0	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7		M0	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Cantidad sólido <	0.0g	0.1g	0.2g	0.4g	0.6g	0.8g	1g	1.5g									
Turbiedad <	3.11	80.1	980	192	360	800	954	1006	pH	6	7	7	7	7	7	7	7
Ph <	6	6	6	6	6	6	6	6	color	87.8	88.4	88.9	90.2	91.6	95.8	95.0	100.8
Conductividad <	8.8	90.1	93.8	95.8	93	94.2	94.5	99.9	Turbiedad	8.0	87.3	117	154	557	582	622	41

Figura 13 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos G4 y G5

El G2 construyó lo que se podría inferir que fue una tabla (figura 14), agruparon los datos medidos en el recuadro que proporcionaba la guía, pero no trazaron líneas divisorias entre ellos; los datos están relativamente ordenados y a diferencia de los otros grupos, estos estudiantes asumieron un valor numérico para el color del agua sin realizar la medición (no se contaba con colorímetro); al consultarles como habían decidido esa escala de valores respondieron **“el color y la turbiedad dependen de los sólidos, entonces como la turbiedad iba subiendo, lo lógico es que el color también suba, además eso se ve a simple vista.”** Lo que permite inferir que están discriminando las variables en dependientes e independientes de acuerdo a Sierpinska (1992). Al respecto se puede inferir que al observar la escala que presentaba la cantidad de contaminante (generalmente 0,2) ellos asumen el valor de 2 para la escala de color, sin embargo, el último dato del contaminante pasaba de 1g a 1.5g se perdía la escala de 0,2, a lo que los estudiantes respondieron acertadamente también aumentando la escala para el valor del color. Estas observaciones indican que los estudiantes el G2 comprenden la situación, establecieron relaciones y regularidades de las variables, asignaron de forma arbitraria pero correcta valores a una de las variables; todo ello gracias a

la experimentación previa realizada y a la asociación de conocimientos entre ellos. (Blumhoj, 2004)



Muestra 0	: Turbiedad	1	- Ph: 6.76 - Conductividad. 113 - Color 6
Muestra 1	: 0.1g.	Turb. 50	- Ph: 6.66 - Conduct. 111 - Color 2
Muestra 2	: 0.2g.	Turb. 76	- Ph: 6.65 - Conduct. 111 - Color 4
Muestra 3	: 0.4g.	Turb. 124	- Ph: 6.71 - Conduct. 110 - Color 6
Muestra 4	: 0.6g.	Turb. 235	- Ph: 6.77 - Conduct. 113 - Color 8
Muestra 5	: 0.8g.	Turb. 361	- Ph: 6.69 - Conduct. 112 - Color 10
Muestra 6	: 1g.	Turb. 513	- Ph: 6.68 - Conduct. 102 - Color 12
Muestra 7	: 1.5g.	Turb. 793	- Ph: 6.70 - Conduct. 113 - Color 18

Figura 14 Representación tabular de los datos medidos en laboratorio, grupos 2, G2

Ante esta primera actividad realizada por los grupos podemos considerar que se prioriza el uso de tablas de datos y que se asigna correctamente un dato a una variable, indirectamente se establecen relaciones de cambio entre los parámetros medidos. Lo que de acuerdo a Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), permite descubrir regularidades y establecer dependencias entre sujetos de cambio. En la medición del parámetro turbiedad el G1 gracias a la tabla que estaban construyendo lograron identificar un error de medición de este parámetro; estaban midiendo la turbiedad de la muestra 4 y el valor les daba inferior al de la muestra 3; uno de los estudiantes del grupo dijo *“ese valor no puede ser, tiene que darnos mayor porque tiene más cantidad de contaminante, midámoslo de nuevo”*; este tipo de sucesos confirman que los estudiantes rápidamente lograron establecer relaciones entre variables y regularidades entre ellas, confirme a lo que establece Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996).

Las preguntas 1 y 2 de la guía de la situación 2 (Anexo 3) pretendían que los estudiantes realizaran la identificación de sujetos de cambio, al respecto, los resultados muestran que el G1 da una respuesta contundente y ampliada sobre lo preguntado (Figura 15)

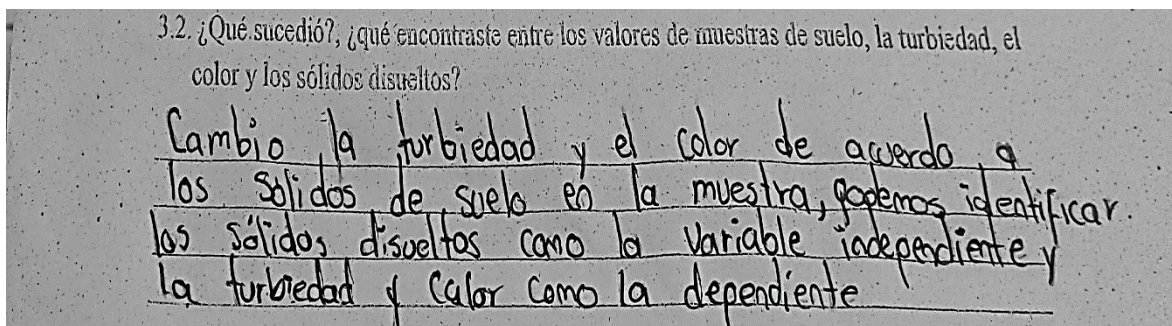


Figura 15 Respuesta del grupo 1 a los cambios observados en la experimentación

El G1 establece una relación clara de dependencia entre el color, la turbiedad y los sólidos en el agua conforme a lo considerado por Cortés (2009), y añade de forma correcta el concepto de dependencia de una variable respecto a otra al clasificarlas entre dependientes e independientes; al respecto Sierpinska (1992), manifiesta que un acto de comprensión del concepto de función es la discriminación entre variables dependientes e independientes. Este mismo grupo en la pregunta 2 responde de manera similar con la diferencia que cuando habla de turbiedad utiliza el término *“aumenta o disminuye”*, pero al hacerlo para el parámetro de color solo dice *“más oscuro”* esto se puede deber a que este parámetro no fue medido y por lo tanto no puede establecer relaciones numéricas del mismo.

Para el G3 *“se fue incrementando la turbiedad a medida que se le iba agregando el contaminante”*, este grupo no abandona el concepto del contaminante y establece una relación inicial sobre estas dos variables, el uso de gotas de tinta favorece que hayan continuado refiriéndose a esta como contaminante, concepto que abandonó el G1.

Para los grupos G2, G4 y G5 la turbiedad aumentó a medida que aumentó la cantidad de suelo aplicado a las muestras de agua; estos tres grupos, de igual manera que el G1, hacen referencia al cambio de la turbiedad con las frases *“aumenta o incrementa”* y para el color emplean las palabras *“más oscuro o más intenso”*; la razón por la que ocurre esto se debe a que no emplearon equipos de medición para este parámetro y solo expresan el cambio desde la percepción sensorial, también se debe, a que los estudiantes desconocen la unidad de medida de esta magnitud. En este caso el registro tabular fue muy importante para poder establecer estas regularidades y relaciones tal como lo considera Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), al referir que este sistema de representación permite descubrir regularidades.

Hasta este momento todos los grupos coinciden que los objetos de cambio son la turbiedad, el color, el contaminante o muestra de suelo o sólidos en el agua y que hay una relación de crecimiento de la turbiedad y el color al aumentar la cantidad de suelo o sólidos en el agua. Respecto a la conductividad y el pH los estudiantes establecen rangos de cambio y/o puntualizan diciendo donde cambio y donde no.

Con lo observado podemos decir que el G1 alcanza un nivel de comprensión C2 que se esperaba se obtuviera hasta la pregunta 4, mientras tanto los grupos G3, G2 y G5 establecen sujetos de cambio y sus regularidades de forma textual lo que corresponde a un nivel B2; para el caso del G4 les cuesta identificar completamente todos los sujetos de cambio evidentes y solo enuncian parte de ellos por lo tanto el nivel de comprensión corresponde al A2. (Sierpinska, 1992)

Las preguntas 3, 4 y 7 (Anexo 3), buscaban establecer algunas regularidades y tipos de relaciones de dependencias entre los sujetos de cambio; las respuestas muestran que los

estudiantes en su conjunto establecieron relaciones de dependencia directa entre la turbiedad, el color y la cantidad de sólidos en el agua; ninguno de los grupos establece una regularidad numérica para los sujetos de cambio pero todos emplean el término *“aumentó o es creciente”* como forma de establecer esa regularidad; nuevamente el G1 es el único grupo que discrimina los sujetos de cambio en dependientes e independientes tal como lo había mencionado en las respuestas anteriores (figura 16), además, este grupo nombra a los sujetos de cambio como variables. Freudenthal (1983), considera que el acercamiento a la variación y dependencia se convierte en parte fundamental a la hora de establecer relaciones funcionales.

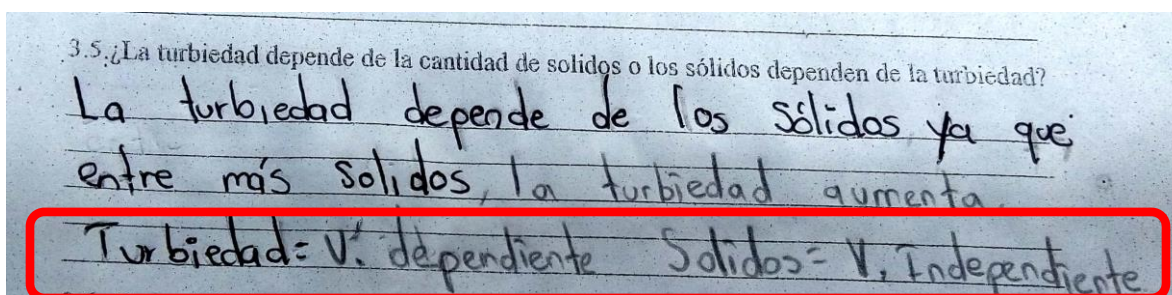


Figura 16 Respuesta a pregunta sobre la relación de dependencia, grupo 1

Esta es una evidencia de un cambio de un estado menor a un estado mayor de comprensión sobre algo que se estudia, (superación de un obstáculo epistemológico) y confirma un mayor nivel de matematización por parte del grupo de estudiantes.

En las preguntas 5 y 6 (Anexo 3), se les preguntó a los estudiantes si era posible tener valores negativos de la turbiedad y del peso de las muestras de suelo o contaminante agregados al agua; estas preguntas nos podrían inferir sobre el concepto de dominio que pudieran tener los estudiantes o el concepto que pudieran extraer de la situación abordada. Ante estas preguntas todos los grupos mencionaron que no era posible para esta situación

tener valores negativos de ninguna de las dos variables consultadas; con referencia al por qué a esta respuesta, los estudiantes tratan de dar razones impulsadas desde la realidad vivida o experimentada ***“no hay números negativos ya que es una situación real”*** respondieron los estudiantes del G2; para los integrantes del G1 ***“las muestras de suelo representan una cantidad o existencia y el valor mínimo que podrían tomar es que no hay cantidad, o sea cero”***. Los demás grupos tratan de dar razones diciendo que en lo observado la turbiedad y los sólidos o contaminantes siempre aumentaron por eso no podrían presentarse valores negativos. Los estudiantes son conscientes que desde la realidad observada no es posible tener valores negativos para la turbiedad o la cantidad de suelo, pero les cuesta establecer razones contundentes para esta afirmación.

Posteriormente a las preguntas realizadas, se les pidió nuevamente a los estudiantes organizar la información recolectada, para ello, la guía les proporcionó una tabla vertical, una tabla horizontal y un plano cartesiano de acuerdo a la consideración de establecer registros articulados (Duval, 2004) y con el propósito que fueran diligenciados con la información que tenían disponible, en los registros propuestos se colocaron variables que no se habían medido para ver su reacción y en el plano cartesiano se colocó una escala numérica diferente a la que posiblemente necesitarían.

Respecto a la construcción de las tablas de datos, los grupos G1, G3 y G5 hacen un diligenciamiento correcto de las mismas, adicionan las filas o columnas necesarias para los diferentes parámetros medidos y tachan el nombre propuesto de un parámetro no medido para colocar uno de los que si realizaron la medición; además, asignan datos numéricos al parámetro color guardando una escala y regularidad; esto se puede observar en la figura 17

Peso de las muestras (g)	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5
Valores de turbiedad (NTU)	2.86	81.9	158	263	321	581	746	1021
Valores de Color	0	5	10	20	25	30	35	45
Valores de Sólidos Ph	7	7	7	7	7	7	7	7
Conductividad	87,5	88,8	87,7	91,4	94,8	94,4	94,9	103,6

Peso de las muestras (g)	0	2	4	8	12	16	20	25
Valores de turbiedad (NTU)	1.44	14.1	35.0	65.2	79.2	85.3	103	114
Valores de Color	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.4	1.6	1.8
Valores de Sólidos	6	6	6	6	6	6	6	6
Conductividad	0	85.3	86.3	89.9	83.3	82.7	88.2	83.6

# de Muestra	Peso de muestras de suelo (g)	Valores medidos de turbiedad (NTU)	Valores medidos de color (UPC)	Valores medidos de SST (mg/l)
1	0	2.86	0	7
2	0,1	81.9	5	7

# de Muestra	Peso de muestras de suelo (g)	Valores medidos de turbiedad (NTU)	Valores medidos de color (UPC)	Valores medidos de SST (mg/l)	Conductividad
1	0	1.44	0	6	0
2	2	14.1	0.3	6	85.3

Figura 17 Representación tabular de la información obtenida en experimentación, grupos G1 y G5

Para el caso del G2, los estudiantes diligencian la tabla pero no la modificaron de acuerdo a sus propias necesidades, ponen los valores sin tener en cuenta que existe un parámetro no medido en la tabla y no completan las tablas con la información que tienen, esto se contrasta claramente con la actividad 1 de esta guía donde se evidenció que el grupo tenía dificultades a la hora de organizar la información; sin embargo los datos correspondientes a las variables turbiedad y cantidad de sólidos está bien diligenciado. El caso del grupo cuatro es bastante particular ya que ellos a pesar de tener la información y realizar las mismas mediciones que los demás grupos no logran pasar esa información a las tablas propuestas, al G4 le cuesta concretar las variables y representar la información en una tabla. Esta situación se conoce como desarticulación de los sistemas de representación (Duval, 2004)

Además de la tabla los grupos tenían la posibilidad de construir una gráfica; ante esta posibilidad todos los grupos construyeron una gráfica que relaciona la cantidad de suelo o contaminante versus la turbiedad (esta fue la relación más poderosa que ellos priorizaron) a ninguno se le ocurrió construir una gráfica adicional; Los grupos G1, G2 y G5 no presentaron

problemas al pasar de un sistema de representación a otro (Duval, 2004) (tabla a gráfica) ubicaron correctamente la variable independiente en el eje x y le asignaron nombre, lo mismo hicieron en el eje y donde ubicaron la variable dependiente; en términos generales respetaron las escalas (de acuerdo a la necesidad) de cada eje y ubicaron correctamente cada uno de los pares ordenados, lo que se conoce como registros articulados (Duval, 2004), el G2 asignó título a la tabla “*Turbiedad en las muestras de agua*”; el G1 y el G5 unieron los puntos de la gráfica con líneas continuas pero además trazaron una línea recta que tocaba algunos puntos de la gráfica (línea de tendencia) (figura 18) asumiendo que la relación funcional entre estas dos variables es de dependencia directa lineal; a diferencia del G1 y el G5, el G2 no une los puntos con líneas continuas pero si traza una línea recta de tendencia entre los puntos (figura 19). Estos tres grupos emplean la gráfica para establecer relaciones de dependencia y definen esta relación como una función lineal ajustada (regresión lineal); se puede ver como los estudiantes de acuerdo a sus conocimientos asumen la linealidad (función lineal) para esta relación. La articulación del registro tabular y el registro gráfico permitió hacer los acercamientos conceptuales mencionados (Duval, 2004)

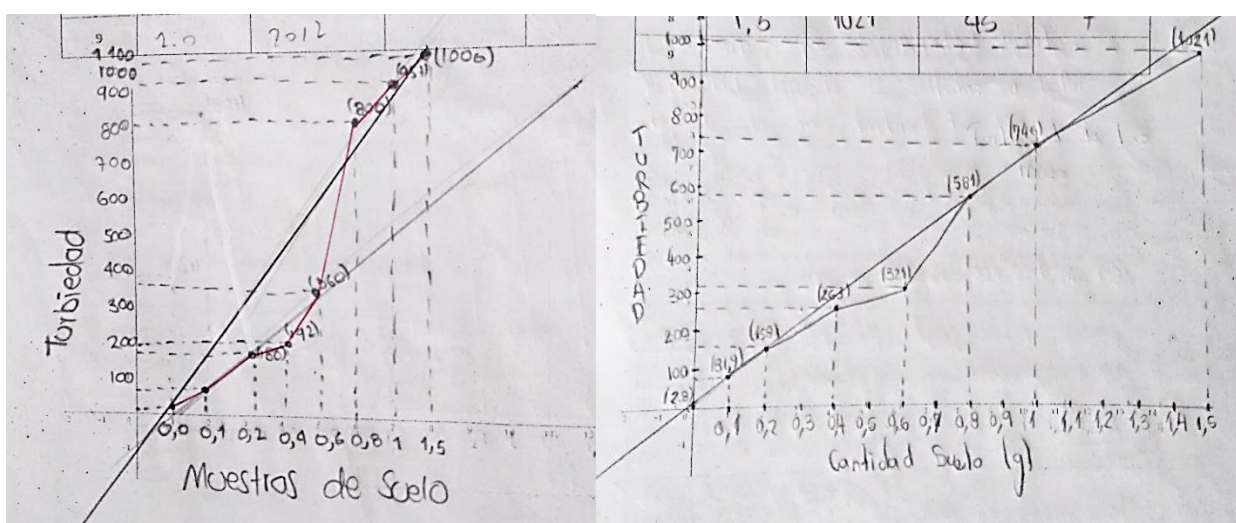


Figura 18 Representación gráfica de la relación entre variables, grupos G1 y G5

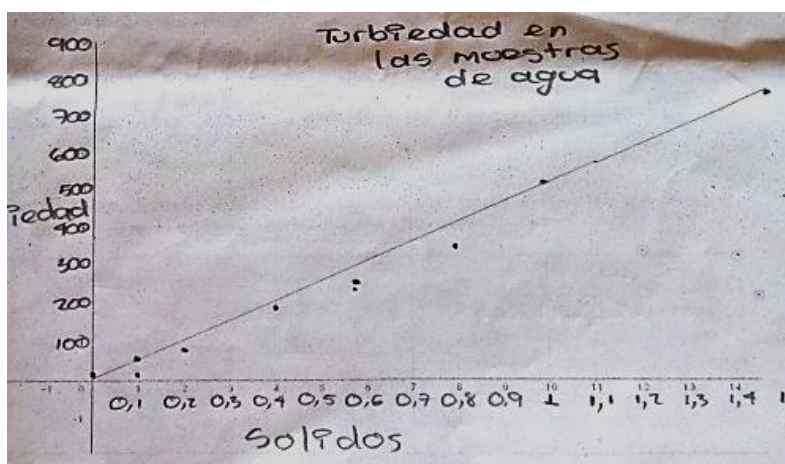


Figura 19 Representación gráfica de la relación entre variables, grupo G2

El G3, construye una gráfica donde relaciona las dos variables, las ubica correctamente, pero no modifica el valor de la escala para la variable independiente, es como si hubiera graficado la turbiedad respecto al número de la muestra (m_1 , m_2 , $m_3 \dots$), este grupo no traza línea de tendencia y se infiere que olvida los sujetos de cambio que ya había identificado anteriormente.

El G4 construye una gráfica donde relaciona la cantidad de suelo o contaminante respecto número de la muestra; claramente los integrantes de este grupo no logran concretar las variables en juego en esta situación, confunden la relación de dependencia aunque en las preguntas anteriores la habían mencionado, pero a la hora de expresarlas en este sistema de representación no lo logran; además la gráfica que construyen es similar a una gráfica estadística de barras como lo muestra la figura 20

Respecto a la pregunta 8 (Anexo 3), los estudiantes haciendo uso de la gráfica o la tabla nuevamente mencionan las relaciones de dependencia, tal como las mencionaron en la pregunta 4; aunque en esta pregunta no se encuentran diferencias marcadas, se infiere que

esto se debe a que la experimentación les permitió establecer esas relaciones. Sin necesidad de contar con una buena construcción de la gráfica o la tabla, todos encontraron las relaciones de dependencia, pero algunos solo lo hicieron con la experimentación y mediante texto, pero no lo lograron en otros sistemas de representación.

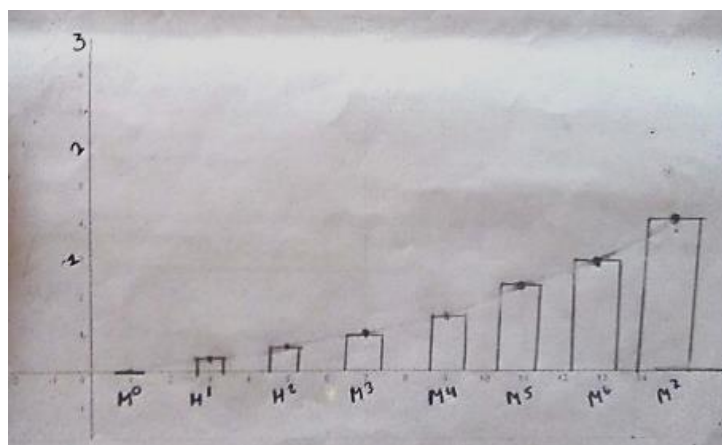


Figura 20 Representación gráfica de la relación entre variables, grupo G4

Para la pregunta 9 (Anexo 3), sobre el uso de los registros de representación, el G1 y G5 manifiestan que es más fácil interpretar la información que otorga la gráfica, que la que otorga la tabla; para estos dos grupos en la gráfica se puede ver mejor la relación de dependencia entre las variables y su tendencia.(creciente o decreciente), el registro tabular permite descubrir regularidades (Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet, 1996); para los grupos G2 y G3 es más fácil organizar la información en la tabla que construir la gráfica y en esta los datos están más directos; el G4 da una respuesta alejada de los sistemas de representación y manifiesta que es más fácil visualizar los cambios desde la experimentación

En la pregunta 10 (Anexo 3), se les solicita a los estudiantes determinar la turbiedad del agua a partir de cantidades conocidas de suelo o contaminante (3g y 5.5g), hay que recordar que la experimentación realizada solo se hizo hasta 1.5g. Ante esta pregunta los grupos G1 y

G5 decidieron construir una ecuación lineal, teniendo en cuenta que ellos habrían establecido este tipo de relación para la situación problema; la formalización matemática se desarrolló empleando el registro de representación gráfico, tomaron dos pares ordenados de la gráfica para encontrar la pendiente de la recta y también tomaron el punto de corte con el eje y; se puede observar el buen manejo que hacen del sistema de representación gráfico y como lo transfieren a un sistema de representación más formal como lo es la ecuación (ecuación de la recta), ambas ecuaciones propuestas parten se supuesto de la relación lineal y tienen una similitud a pesar de que son trabajos independientes; para dar respuesta a la pregunta planteada los grupos reemplazan los valores de 3 y 5.5g en la ecuación y así determinan la turbiedad, además consideran que con la ecuación propuesta pueden calcular cualquier turbiedad si se conoce el valor de los sólidos en ella. La figura 21 muestra el proceso desarrollado por estos grupos. Este logro es importante ya que, para Duval, (1983) es más difícil pasar del registro gráfico al algebraico.

The image shows two pages of handwritten mathematical work. The left page starts with the equation $y = mx + b$ and two points $(0, 3.11)$ and $(1.5, 1006)$. It calculates the slope $m = \frac{1006 - 3.11}{1.5 - 0} = 1,002.89$ and then the equation $y = \frac{1,002.89}{1.5}x + 3.11$. It then uses this equation to find y for $x = 3$ (labeled "con 3g") and $x = 5.5$ (labeled "con 5.5g"), resulting in $y = 2,008.89$ and $y = 3,680.373333$ respectively. The right page starts with the text "Se puede hallar la turbiedad a través de" and "hallando la pendiente con los siguientes datos: $(0, 2.8)$ and $(1.5, 1021)$ ". It calculates the slope $m = \frac{1021 - 2.8}{1.5 - 0} = \frac{1018.2}{1.5}$ and the equation $y = \frac{1018.2}{1.5}x + 2.8$. It then uses this equation to find y for $x = 3$ and $x = 5.5$, resulting in $y = 2039.2$ and $y = 3736.2$ respectively. The final text on the right page states: "La turbiedad con 3 gramos es igual a 2039.2" and "La turbiedad con 5.5g es igual a 3736.2".

Figura 21 Construcción de representación literal de la situación problema 2, grupos G2 y G5

Aunque el G2 no emplea los recursos que posee, si reconoce que la turbiedad de la muestra con 5.5g será mayor que la muestra con 3g; claramente se puede observar que los estudiantes reconocen la relación de dependencia entre variables, pero no pueden formalizar matemáticamente esa relación. (Figura 22). Tal como se sitió anteriormente estos grupos presentan dificultades para pasar del registro gráfico al algebraico.

En la figura 22 se muestra como el G3 toma el valor de la turbiedad cuando la muestra tenía 1g y lo multiplica por 3g y 5.5g respectivamente; también este grupo establece esta relación y hace uso de la tabla de datos como apoyo para encontrar valores desconocidos dentro de ella

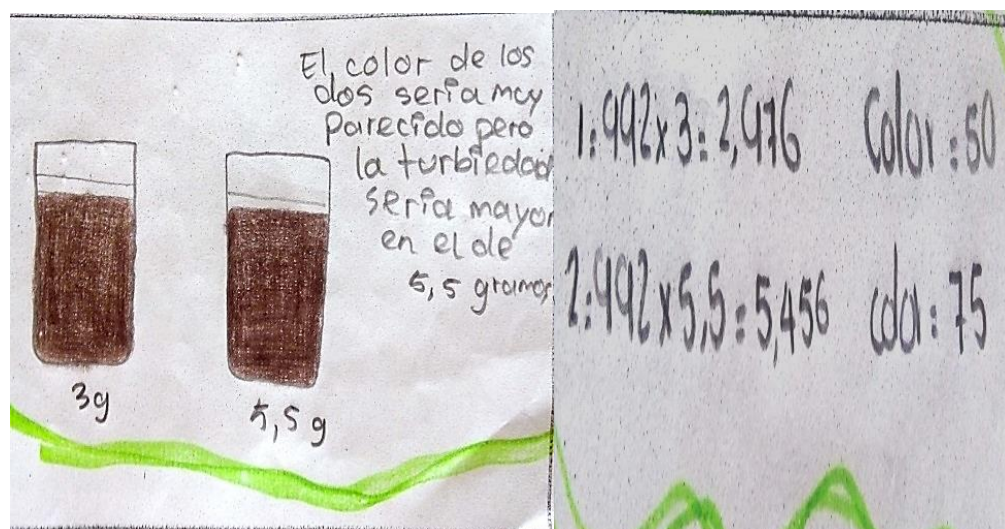


Figura 22 Estrategias de solución para el cálculo de la turbiedad, grupos G2 y G3

El G4 por el contrario propone tomar una muestra de agua agregarle las cantidades de suelo solicitado y emplear el turbidímetro para determinar el valor solicitado, aunque es una solución verás, deja ver que este grupo no tuvo una matematización progresiva de la situación y solo se queda en el nivel experimental o situacional.

En términos generales se puede concluir que al cabo de la aplicación de la situación 2 todos los grupos a su manera lograron establecer relaciones entre las diferentes variables puestas en juego. Desde la rejilla de análisis el G1 y G5 lograron una matematización progresiva de la situación problema, identificaron los cambios, asignaron estos cambios a un variable, establecieron regularidades, establecieron dependencias (dependiente e independiente), construyeron y emplearon los sistemas de representación gráfica y tabular y finalmente llegaron a una expresión matemática que para ellos era el modelo de la situación; por lo tanto estos estudiantes están en nivel D2 lo que significa que se logró evidenciar todos los AC (Sierpinska, 2009) y el nivel de matematización es Formal, (Bressan, 2016)

En los estudiantes de los grupos G2 y G3 se pudo evidenciar algunos AC (Sierpinska, 2009), y presentaron problemas en la predicción de la situación problema y en la construcción de los sistemas de representación; construyen sistemas de representación con algunas particularidades pero no pueden proyectar matemáticamente la situación problema (no formalizan la situación) por lo tanto estos estudiantes están en el nivel C3 de acuerdo a la rejilla de análisis lo que significa que el nivel de matematización de ellos es el nivel General (Bressan, 2016).

El G4 durante toda la aplicación del instrumento tuvo problema para pasar de la experimentación a la escritura y representación verbal de la situación; lograron establecer relaciones y algunas dependencias, pero olvidaron constantemente en los registros las variables fundamentales, la construcción de tablas y gráficas no fue correcta, las relaciones que establecían no eran correctas; este grupo se categoriza como B2 de acuerdo a la rejilla de análisis, lo que significa que solo lograron identificar desde la experiencia los sujetos de cambio y el nivel de matematización es el referencial (Bressan, 2016).

4.3. Análisis de la situación 3, La clarificación del agua.

4.3.4. Descripción de la situación problema.

La situación problema número tres pone en juego el cambio de las características físicas del agua al aplicar un producto químico (sulfato de aluminio) como agente clarificador del agua. Para esta situación los estudiantes debían proponer un experimento mediante el cual pudieran encontrar la dosis óptima de producto químico para clarificar el agua problema, además evaluar el cambio paulatino que este producto genera en las muestras de agua.

La actividad se llevó a cabo en el laboratorio de análisis ambiental del Centro Agropecuario de Buga SENA CAB; a la par con la experimentación, los estudiantes debían contestar unas preguntas y hacer algunos registros del experimento realizado

4.3.5. Objetivo de la situación Problema.

El objetivo de la situación 3 era identificar la relación funcional de la clarificación del agua entre la turbiedad y la cantidad de producto químico empleado, todo el proceso mediante la experimentación y a través de elementos conceptuales de variación dependencia y representación.

4.3.6. Rejilla de Relaciones.

La guía de la situación tres está conformada por una descripción inicial general de la situación a bordar, 10 preguntas acerca de lo observado y 1 actividad sobre el registro de la información encontrada.

La tabla 6 muestra la relación de las preguntas de la situación tres con las categorías de análisis.

Tabla 6 Rejilla de relaciones para situación problema tres

SITUACIÓN 3 CLARIFICACIÓN DEL AGUA	PREGUNTA O ACTIVIDAD	APRENDIZAJE	DESCRIPCIÓN
	P1	A1	Descripción del experimento
	P2	A2	Resultados iniciales del Experimento
	P3	B1-B2	Sujetos de cambio, constantes y regularidades
	P4		
	P5		
	P6	C1-C2	Tipo de relaciones
	P7		
	Organización de la información	C3, D1	uso de gráficas y/o tablas para organizar la información
	P8	D1 - D2	Proyección y predicción
	P9		
	P10		

4.3.7. Análisis y discusión de los resultados.

A la pregunta 1 (Anexo 4), de cómo se iba a llevar a cabo el experimento, los estudiantes de los grupos G1, G2, G3 Y G5 manifestaron que emplearían 8 vasos con muestras de agua problema o agua turbia y que a cada vaso le agregarían diferentes cantidades de producto químico (*“mediremos la cantidad de reactivo”*) y posteriormente se observaría qué sucede con el agua; el G1 y el G5 además mencionan qué realizarán mediciones de turbiedad, pH y conductividad antes y después para establecer los cambios. El G4 en esta oportunidad también hace mención al experimento, pero olvida mencionar el producto químico como agente de cambio.

Respecto a la pregunta 2 (Anexo 4), (resultados observados en el experimento) el G2 dice *“a cada muestra de agua le pusimos cierta cantidad de sulfato de aluminio para aclararla y sucedió que se iba aclarando a medida que aumentaba la concentración de producto hasta cierto punto, luego si aumentábamos la cantidad de producto dejaba de funcionar”*

Los grupos G1 y G5 expresan los cambios observados y establecen relaciones de cambio entre la cantidad o concentración de producto químico y la clarificación del agua *“la turbiedad se purifica a medida que el compuesto se disuelve”*. El G3 que trabajó nuevamente el agua problema con tinta no obtuvo cambios significativos, por lo cual ellos manifiestan *“queríamos ver si aclaraba pero no se obtuvo resultados, el vaso 1 aclaró pero las demás muestras no”*; el G4 establece una relación confusa de la situación, ya que escriben que a menor cantidad de producto químico, el agua queda más clara; situación contraria a lo sucedido, a los estudiantes de este grupo se les dificulta expresar las relaciones en lenguaje textual.

En las preguntas 3, 4 y 5 (Anexo 4), se les pidió describir los sujetos de cambio, como cambiaban y que constantes se observaron en el experimento. Las respuestas de los estudiantes fueron: todos los grupos identificaron como sujetos de cambio la disminución de la turbiedad, el aumento de producto químico y el cambio de color; para 4 de los cinco grupos lo que se mantuvo constante fue la cantidad de agua empleada en el experimento, el G4 no hace mención a esta. Estas afirmaciones corresponden con los actos de comprensión 1, 2 y 3 de Sierpinska, (1992).

Las respuestas del G3 nos permite pensar que estos estudiantes no están haciendo una relación entre lo observado en el experimento y lo registrado por los datos medidos, ya que, aunque el cambio de la turbiedad en sus muestras de agua no fue mayor (Pregunta 2) ellos insisten que cambió la turbiedad, al parecer solo miran el dato numérico, pero no reaccionan a nivel general pensando que los cambios fueron mínimos. Debido al poco cambio de sus valores no pudieron establecer regularidades como lo manifiesta Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996), que son propias del registro tabular.

Ante la pregunta de las formas de cambio, el G2 da una muy buena respuesta ya que aunque aplicaron la misma cantidad de producto químico, reconocen que la concentración de este era diferente ***“a todos los vasos le aplicamos la misma cantidad de producto con diferente grado de concentración del producto, de 500 en 500 mg/l o de 0,3 en 0,3g”***; los grupos G1, G3 y G5 también reaccionan al cambio expresándolo de la siguiente manera ***“que en cada muestra se fue aumentando la cantidad de producto de a 0,3”, “cambió a medida que se va agregando el químico en cantidades de 0,3 aumentando por cada muestra”***. El G4 no hace referencia numérica sobre los cambios y solo insiste que a menor cantidad de producto químico la turbiedad es menor, no identifican la regularidad, solo identifican los sujetos de cambio en la situación.

Los grupos G1 y G5 concluyeron qué a medida que se agregaba más sulfato de aluminio, la turbiedad del agua disminuía; esta respuesta no coincide con la del G2 ya que ellos manifiestan que ***“la turbiedad disminuyó por el producto hasta cierto punto, después de que aplicamos más producto, la turbiedad dejó de disminuir”***. Esta afirmación es correcta y muestra el nivel de detalle del experimento de este grupo ya que, aunque inicialmente para clarificar el agua se requiere agregar más producto químico, este llega a su punto de saturación y ocasiona el efecto contrario. (Cortés, 2009)

Las preguntas 6 y 7 (Anexo 4), buscaban establecer relaciones de dependencia entre los sujetos de cambio, ante esta pregunta los grupos G1 y G5 establecieron relaciones de dependencia lineal inversa entre la cantidad de producto químico y la turbiedad del agua ***“La turbiedad depende de la cantidad de producto químico, la turbiedad va disminuyendo cuando aumenta la cantidad de producto químico”*** para estos dos grupos la variable dependiente es la turbiedad y el color, y la variable independiente es la cantidad de producto

químico empleado. El G2 también establece una relación de dependencia entre producto químico y turbiedad del agua, pero a diferencia del G1, estos estudiantes de acuerdo a su experimento dicen que esa relación es inversa hasta cierto punto, después se convierte en una relación directa (doble relación de dependencia), estas observaciones corresponden a la discriminación entre variables dependientes e independientes de Sierpiska (1992). Para el G4 la relación de dependencia entre estas dos variables es directa ***“a menos producto, menos turbiedad y color”***, ***sin embargo***, reconocen que la turbiedad depende de la cantidad de producto químico. El G3 se une a las observaciones del grupo 1 y 5 pero no con el mismo nivel de detalle, además solo emplean el término “cambia” pero no dicen si ese cambio es de aumento o disminución, esto se puede deber a que los cambios que sufrió las muestras de agua en el experimento de este grupo fueron leves y los valores numéricos medidos no marcan un crecimiento o decrecimiento regular y constante; a este grupo no le favoreció el registro tabular debido a la situación de la experimentación tal como lo considera Freudenthal (1983), al manifestar que la variación y la dependencia son fundamentales para aproximarse al concepto de relaciones y funciones.

Respecto a la actividad de representación ¿cómo representaría la información obtenida en el experimento? (Anexo 4). Se obtuvo los siguientes registros de representación:

El G1 y el G5 construyeron tablas de datos y una gráfica, relacionando las variables cantidad de producto químico y turbiedad del agua, la gráfica siempre va acompañada del registro tabular (Duval, 2004), (figura 23), ambos grupos ubicaron correctamente las variables en los ejes correspondientes; se puede observar que no presentan dificultades para pasar de un sistema de representación a otro. El G1 y el G5 ponen unas anotaciones en la tabla de datos para relacionar la cantidad de producto químico empleado y su concentración

correspondiente, se asume que lo hicieron para poder dar respuesta rápida a una pregunta posterior sobre encontrar la turbiedad conociendo (x) cantidad de producto químico empleado. Esto confirma lo manifestado por Azcárate Giménez & Deulofeu Piquet (1996) cuando afirman que el registro tabular permite descubrir regularidades y establece relaciones de crecimiento o decrecimiento.

El G5 pone anotaciones en la parte superior de la gráfica para no olvidar el orden de las variables. El G1 traza una línea de tendencia similar a lo realizado en la situación 2 en su gráfica, esto indica que consideran que la relación entre estas dos variables es lineal inversa y que la situación problema se puede representar mediante una función lineal; el G5 en su gráfica no traza línea de tendencia y argumentan que no lo hacen debido a que la relación *“la relación no es tan lineal, quedan muchos puntos por fuera”* no es del todo lineal. Ambos grupos emplean diferentes escalas para el eje de la turbiedad y las mismas para el eje que representa la cantidad de producto químico, ambas escalas tienen regularidad acorde a la necesidad de los datos obtenidos.

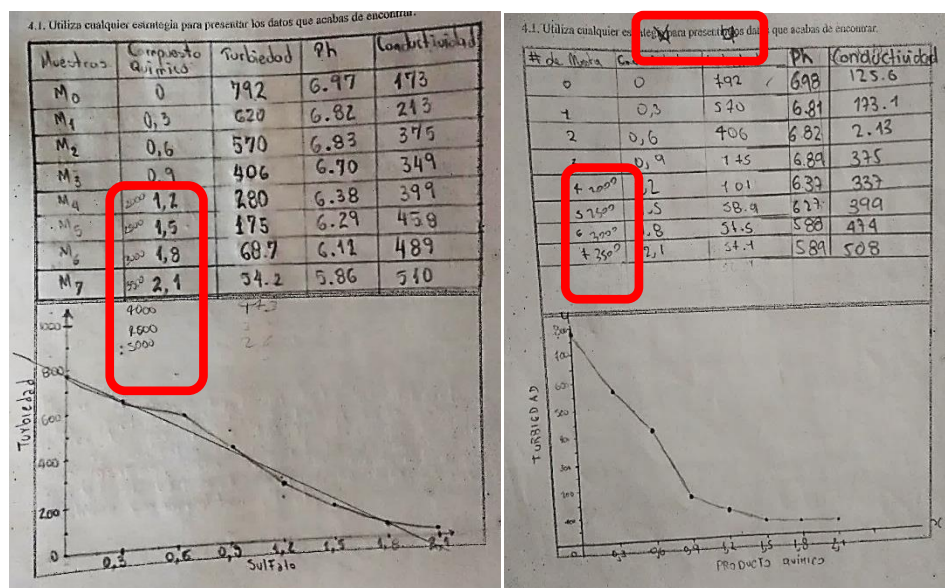


Figura 23 Sistemas de representación empleados por los grupos G1 y G5, situación 3

El G2 realiza una tabla con las variables y los datos obtenidos, posteriormente usando los datos de la concentración del producto químico y la turbiedad construye una gráfica donde relaciona correctamente las variables y se puede observar la particularidad que mencionaban en las respuestas a las preguntas anteriores, referente a que la relación entre estas dos variables primero era inversa y luego directa, además ponen un texto que infiere que este grupo está asumiendo una relación de dependencia tipo cuadrática para esta situación problema (figura 24)

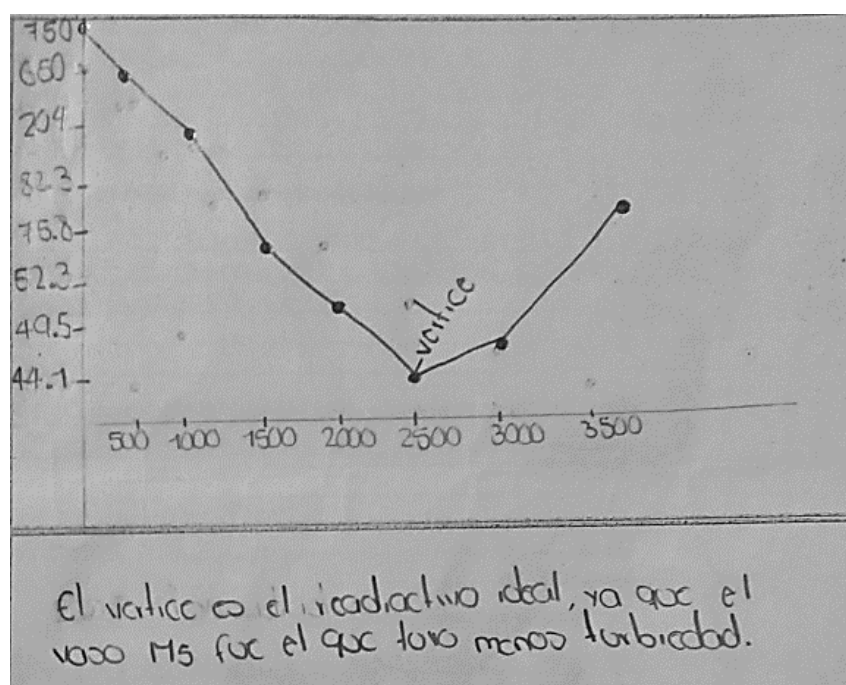


Figura 24 Representación gráfica de la situación problema 3, grupo 2

Esta forma de representar la información del experimento reúne varios elementos, primero que identifican los sujetos de cambio y que establecen relaciones entre ellos, segundo que no se dejan llevar por la relación lineal y logran establecer que hay un punto mínimo de turbiedad asociado a una cantidad de producto químico y que a partir de este las condiciones cambian, tercero que emplean diferentes sistemas de representación para la situación problema y en

todos mantienen la lógica de lo observado, registros articulados (Duval, 2004), (comprenden el fenómeno) y cuarto, que recurren a sus conocimientos de matemáticas e infieren indirectamente una relación cuadrática desde la percepción gráfica.

Para el caso del G3, emplea el sistema de representación gráfico y tabular muestran claramente la relación entre las variables en ambos sistemas; ubican bien las variables en los ejes correspondientes, emplean escalas de regularidad conforme a las necesidades de la situación problema, registros de representación articulados (Duval, 2004). Al analizar la construcción gráfica de este grupo se puede inferir que posiblemente realizaron una mala composición de las muestras o una mala medición de la turbiedad dado que el valor de esta fluctúa entre 105 y 120 como lo muestra la figura 25 y su cambio no es constante, sin embargo, los dos últimos dos datos tienden a presentar la misma regularidad que encontró el G2, pero el comportamiento de los otros datos no les permitió llegar a conclusiones similares como las de este grupo; también es claro que hay una relación entre las respuestas textuales que da este grupo ante el fenómeno y sus representaciones (gráfica y tabla), para ellos no fue claro el tipo de cambio de la turbiedad, solo afirmaban que cambiaba pero no podían concretar con que tendencia.

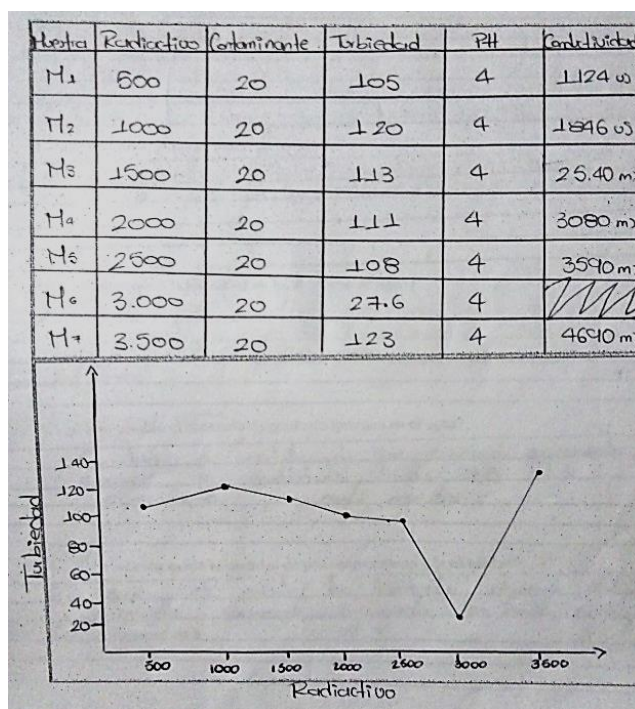


Figura 25 Representación gráfica de la situación problema 3, grupo 3

El G4 también hace una construcción gráfica y tabular para representar la información, pero al igual que en la situación 2 olvida poner una de las variables de importancia como lo es la cantidad de producto químico empleado en la clarificación del agua. Este grupo comprende las situaciones, realiza la experimentación, pero no establece claramente las relaciones de dependencia y el reconocimiento de variables o sujetos de cambio al representarlos en diferentes sistemas de representación. Al construir la gráfica se observa que la tendencia de la turbiedad era decreciente en la medida que aumentaba la cantidad de producto químico, diferente a lo expresado por ellos en las respuestas anteriores y aunque construyeron la gráfica esta no fue representativa para ellos pues no modificaron las respuestas realizadas; no se les facilita reconocer la importancia de los registros de representación, se les dificulta hacer la interpretación de ellos.

Las preguntas 8, 9, y 10 (Anexo 4), están dirigidas a evidenciar la proyección y predicción, usando los sistemas de representación construidos, los Grupos G1 y G5 usan la tabla de datos para dar el valor de la turbiedad para una concentración de 2000 ppm, ya que dentro de sus datos, tienen esta concentración; para el caso de la concentración a 5000 ppm tratan de establecer una regularidad en los datos para aproximarse a una respuesta, es por esta razón que en el registro tabular presentado por estos grupos se evidencia una continuación de valores, tratando de buscar el dato de la turbiedad solicitada; los estudiantes manifiestan que no emplearon el registro gráfico, debido a que el valor de la turbiedad les daría negativo al proyectar la línea de tendencia, *“hay algo en la gráfica que no está bien”* manifestó un integrante del G1 pero no le dieron mayor importancia a esa situación. Teniendo en cuenta la relación funcional que establecieron estos grupos, las respuestas se ajustan a lo que proponen desde el análisis de problema y los resultados obtenidos en el laboratorio. También es importante mencionar que el G1 intentó formalizar matemáticamente la situación a través de la ecuación de la recta tomando dos puntos del plano y encontrando la fórmula, pero al reemplazar el valor de la concentración de sólidos, la turbiedad les daba negativa, ante esto deciden borrar el registro realizado y asumir un valor desde la representación tabular; con esto se dieron cuenta que la relación no era lineal y que quizás habían cometido algún error. Para estos grupos la concentración ideal de producto químico fue aquella que les dio menos valor de turbiedad 2,1g de producto químico.

El G2 emplea la gráfica para dar los valores de turbiedad solicitados, para el caso de la concentración a 5000 ppm es el único grupo que considera que la turbiedad aumentaría ya que a partir de 2500 ppm la relación entre estas dos variables deja de ser inversa para ser directa, el valor aproximado que dan es de 600 ppm unidades de turbiedad; ellos consideran

que la concentración ideal de producto químico es de 2500 ppm, unidades por encima de este valor la turbiedad aumenta igual que para los valores por debajo ***“la concentración ideal es 2500 ppm ya que si le agregamos más químico aumenta la turbiedad y si ponemos menos también”***

El G3 afirma que los valores obtenidos en el experimento y los cambios tan leves no le permiten dar un valor próximo a lo solicitado en la pregunta ***“sabemos que la turbiedad depende de la cantidad de producto aplicado, pero en el caso de nosotros no nos cambió mucho, subía y bajaba la turbiedad, por eso no podemos dar un dato”***

Dado que el G4 no registró los valores de la variable (cantidad de producto químico) en los registros de representación tabular o gráfico, esto hizo imposible que pudieran dar una respuesta a las preguntas de proyección y predicción empleando sistemas de representación.

Una vez finalizada la aplicación de la situación problema número 3, se puede inferir lo siguiente: nuevamente los grupos G1 y G5 hacen buen trabajo de matematización progresiva, comprenden la situación a trabajar perciben los cambios, identifican regularidades y establecen dependencias, toman registros y los consignan en tablas y gráficas y los emplean para predecir comportamientos; además ellos mismos pudieron concluir que la relación entre estas dos variables no podría ser lineal puesto que la representación gráfica y el intento de construir una ecuación cuando intentaban predecir un valor les daba como resultado un valor negativo el cual no era lógico dentro del experimento realizado; a nivel de la rejilla de análisis, en estos grupos se logran evidenciar los actos de comprensión de Sierpinska, especialmente el manejo de los sistemas de representación y el movimiento entre estos sistemas, por lo tanto el nivel desde la rejilla de análisis sería D1 y el nivel de matematización formal.

En este caso, el G2 logró establecer la relación funcional más próxima con el experimento propuesto al inferir una relación doble (inversa hasta un punto y posteriormente directa) que posteriormente ellos llamarían relación funcional cuadrática, hasta se animaron a nombrar un vértice el registro gráfico que realizaron. Este grupo estableció sujetos de cambio, reaccionó de manera positiva al experimento y registro correctamente lo que observó, analizó y utilizó los sistemas de representación acorde con su necesidad e infirió proyecciones correctas cuando así se le solicitó. De acuerdo a la rejilla de análisis el G2 está en un nivel D1, evidencia los 5 actos de comprensión (Sierpiska, 1992) y los criterios asociados a los niveles de matematización Formal (Bressan, 2016)

El G3 no logró hacer una buena toma de datos o es posible que hayan cometido errores en el montaje del diseño experimental, lo que resultó en datos poco cambiantes que confundían la interpretación que hacían de los mismos; a pesar de la dificultad presentadas este grupo valiéndose de lo observado en el trabajo de los compañeros, establecieron de manera textual una relación de dependencia entre la cantidad de producto químico empleado y el valor de la turbiedad sin concretar que esta última disminuía o aumentaba. De acuerdo a la rejilla de análisis se ubican en el nivel B2 que corresponde a nivel de matematización referencial asociado al AC de identificación de sujetos de cambio, (Sierpiska, 1992).

El G4 de acuerdo a lo producido no establece una relación de dependencia acorde al experimento y los datos medidos, confunde la dependencia inversa con la dependencia directa y no construye sistemas de representación adecuados, olvida variables principales y establece las relaciones en estos registros desde la turbiedad y el número de la muestra tal cual como les sucedió en la situación problema número 2; esto los ubica de acuerdo a la rejilla de análisis en el nivel A2, identifica cambio y algunas regularidades.

4.4. Análisis de la Situación 4, La incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto

4.4.4. Descripción de la situación problema

La situación cuatro puso en juego las variables de oxígeno disuelto, respecto a la temperatura en muestras de agua potable, mediante la experimentación. Para este experimento se empleó un volumen de agua conocido y se puso a fuego lento en una estufa; posteriormente cada x cantidad de tiempo se midió la temperatura del agua y el oxígeno disuelto con el fin de establecer relaciones entre estas dos magnitudes. Esta situación surgió de la hipótesis planteada por los estudiantes en la lectura del contexto, la cual planteaba que la descarga de agua caliente de la empresa Pikú afectaba la temperatura del agua y esta a su vez disminuía el oxígeno disponible, afectando la vida acuática.

Para esta Situación se retomaron los datos medidos en la situación 1 sobre los cuales se plantearon algunas preguntas y al final se trabajó con los datos de la experimentación realizada por los estudiantes.

4.4.5. Objetivo de la Situación problema

Identificar la relación funcional entre la temperatura del agua y el oxígeno disuelto, mediante la experimentación y a través de la evidencia de elementos conceptuales de variación, dependencia y representación.

4.4.6. Rejilla de relaciones

La tabla 7 muestra la relación de las preguntas de la situación problema cuatro con las categorías de análisis.

Tabla 7 Rejilla de relaciones para situación problema tres

SITUACIÓN 4 LA INCIDENCIA DE LA TEMPERATURA EN EL OXÍGENO DISUELTO	PREGUNTA O ACTIVIDAD	APRENDIZAJE	DESCRIPCIÓN
	P1	A1, A2, B1, B2	Sujetos de cambio y relaciones
	P2		
	P3	C1, C2	Dependencia entre variables
	P4	C3	Propuesta inicial de tratamiento de datos
	Actividad Final	D1 - D2	Tratamiento libre de datos y experimento
	P5		Proyección e impacto
	P6		

4.4.7. Análisis y discusión de los resultados

Las preguntas 1, 2, y 3 (Anexo 5), en su conjunto buscaban que los estudiantes rápidamente reconocieran los sujetos de cambio (variables) y las relaciones entre las mismas; las respuestas a estas preguntas surgen después del análisis a los datos tomados por los estudiantes en la situación problema uno (lectura del contexto).

A la pregunta número 1, (anexo 5) los estudiantes responden que los sujetos de cambio que se evidenciaron en los datos recolectados son la temperatura y el oxígeno disuelto y que entre ellos hay una relación de dependencia, el respecto el G1 dice ***“la situación presenta dos variables, la primera es el oxígeno disuelto y la segunda la temperatura, podemos inferir que cuando la temperatura aumenta el oxígeno disuelto disminuye”***, el G4 ***“la variable es cuantitativa: oxígeno y temperatura y su relación es que mientras la temperatura aumenta el oxígeno disminuye***. Se puede inferir que, gracias a las experiencias vividas con las otras situaciones, los estudiantes han desarrollado mayor habilidad para identificar sujetos de cambio mediante datos agrupados en tablas; no solo nombran los sujetos, le asignan la

categoría de variable y establecen relaciones de dependencia identificando las regularidades entre ellos, estas observaciones de acuerdo a la rejilla de análisis corresponden al criterio B2 para todos los grupos. Es de resaltar la respuesta del G4 que reconoce los sujetos de cambio, determina que son de tipo cuantitativo, y establecen la relación desde el aumento y la disminución.

Ante la solicitud de expresar situaciones de la vida cotidiana donde se presente esta misma relación los estudiantes manifiestan que una posible relación es: a mayor esfuerzo físico (jugando futbol) menos energías se tendrá o por lo contrario a mayor horas de sueño, más energía disponible; estas observaciones de los grupos G1 y G2 permiten evidenciar que pueden establecer relaciones entre situaciones que no son propias de la calidad del agua pero que presentan el mismo comportamiento observado (“el modelo para” según la EMR)

En la pregunta 3 (Anexo 5), los estudiantes en conjunto, manifiestan acertadamente que la relación entre estos dos sujetos de cambio es de tipo dependiente, para ellos el oxígeno depende de la temperatura del agua. G1 ***“la relación es: temperatura como variable independiente y el oxígeno disuelto es la dependiente”*** G3 ***“la relación de dependencia que se presenta entre las variables son el oxígeno depende de la temperatura y esta es independiente”***; a los grupos en general se les facilitó la interpretación de las tablas de datos en esta situación, quizás porque ya se había discutido al respecto en comunidad y este era un impacto bastante significativo para ellos. Es esta respuesta se evidencia el AC 5 (Sierpinska 1992) sobre discriminar entre variables dependientes e independientes.

Ante la pregunta 4 (Anexo 5), sobre qué propuesta tendría para el tratamiento de los datos, los estudiantes valiéndose de las situaciones problema trabajadas anteriormente, proponen, primero construir una gráfica para comprobar de manera gráfica la relación entre las variables

y posteriormente buscar alguna regularidad entre los datos para encontrar valores que no se conozcan o establecer una regularidad numérica.; el G1 da como respuesta lo siguiente: ***“podemos representar la situación por medio de gráfica donde (y) es igual a la variable dependiente es decir al oxígeno disuelto y (x) es igual a la variable independiente es decir la temperatura”***; El G1 y el G5 también manifiestan la posibilidad de linealizar la relación de acuerdo a la representación gráfica en el plano, para posteriormente construir una función lineal.

La segunda parte de esta situación problema partió de los datos obtenidos en laboratorio “experimentación” (datos iguales para todos los grupos); a continuación, la tabla 8 muestra los resultados del experimento donde se pretendía comprobar la relación entre la temperatura del agua y el oxígeno disuelto disponible.

Tabla 8 Resultados del experimento, la incidencia de la temperatura en el oxígeno disuelto

Temperatura (C°)	25	35	45	55	65	75	85
Oxígeno (UO)	10	8,5	6,5	5	3,5	2	1
Tiempo (Horas)	9:00	9:05	9:10	9:15	9:20	9:25	9:30

A partir de los resultados de la experimentación se les pidió a los grupos que le dieran manejo libre a la información y que concretaran la hipótesis suscitada en la situación 1; al respecto los grupos realizaron lo siguiente:

Todos los grupos escribieron sus conclusiones a partir de los datos producto de la experimentación; entre estas respuestas se puede evidenciar que todos validaron la hipótesis de relación entre la temperatura y el oxígeno disuelto; por ejemplo el G4 que anteriormente había tenido problemas con la identificación de variables y la regularidad entre ellas dijo ***“la temperatura cambia de 10 en 10, el oxígeno también cambió, el tiempo cambia de 5 en 5,***

la variable es cuantitativa, el oxígeno depende de la temperatura si la temperatura aumenta el oxígeno disminuye"; el G1 hace una descripción más específica diciendo *“el cambio del oxígeno varía entre 1.5, 2.5 estas son las diferencias entre cada dato. Podemos identificar la temperatura como una variable independiente y el oxígeno disuelto como la dependiente, el tiempo también es independiente, la temperatura depende del tiempo y el oxígeno de la temperatura, concluimos que conforme avanza el tiempo la temperatura aumenta y el oxígeno disuelto disminuye*; se puede evidenciar en la respuesta del G1 que lograron agregar de manera correcta la variable tiempo en los análisis que proponen, además establecen sus relaciones de manera textual.

El G3 también relaciona las tres variables encontradas de manera correcta y además lleva la situación a la vida real y concluye que es necesario que las fuentes de agua tengan temperaturas bajas o estables para mantener el oxígeno disuelto y de esta manera se mantenga la vida acuática de la cuál dependemos; el G5 relaciona los cambios observados diciendo que la primera relación (oxígeno temperatura) se puede expresar mediante una función lineal decreciente y que otra relación (temperatura tiempo) se podría representar en una función lineal creciente, relación de dependencia directa. El G2 también considera que las relaciones encontradas son de tipo lineal y que la gráfica es la mejor forma de representar los datos obtenidos.

La propuesta gráfica del G1 sobresale de las otras debido a la propuesta de una función lineal construida a partir de los datos de la gráfica (ecuación de la recta que pasa por los puntos)

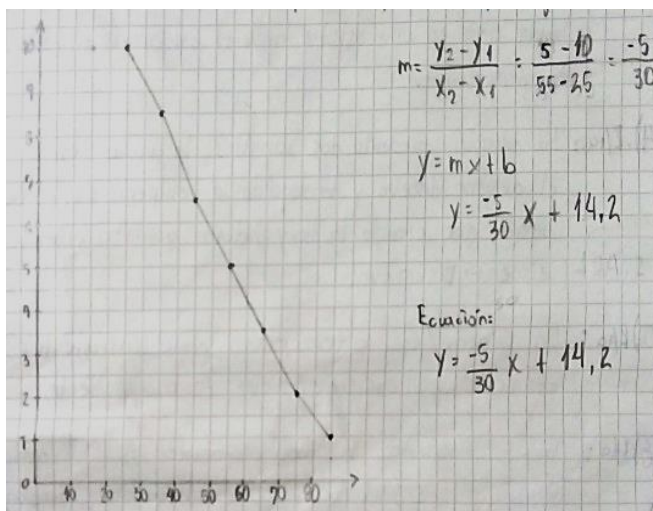


Figura 26 Construcción gráfica propuesta por el grupo 1

En la figura 26 se puede observar la construcción gráfica propuesta por el G1 y la matematización que hacen de la misma; finalmente proponen una función lineal como modelo de la situación problema; en la figura 27 los estudiantes del G1 concretan la relación encontrada cambiando la representación algébrica x y y por las variables propias de la relación funcional; además escriben *“podemos determinar cuál sería el oxígeno disuelto a una temperatura específica a través de la ecuación propuesta”*

Ejemplo: $y = \frac{-5}{30} (0) + 14.2 = 14.2$

El oxígeno disuelto en 0 temperatura es igual a 14.2.

• Oxígeno es igual a $\frac{-5}{30}$ por temperatura más 14.2

Figura 27 Propuesta de ecuación para situación 4, grupo 1 G1

El G1 logró formalizar la situación haciendo uso de elementos matemáticos bien manejados y dejando ver que no pierden la noción de realidad de la situación planteada.

El G2, G3 y el G5 también construyen graficas que muestran correctamente la relación entre las variables encontradas, emplean escalas para los ejes x, y acorde a la necesidad y concluyen de manera adecuada sobre la importancia del control de la temperatura en las fuentes de agua; estos grupos construyen dos gráficas, una para la relación temperatura oxígeno y otra para la relación temperatura y tiempo, en estas graficas trazan líneas de tendencia confirmando lo escrito por ellos (relación de dependencia lineal)

El G4 en esta oportunidad logra construir una gráfica que representa la relación; ubica correctamente los datos de acuerdo a la dependencia entre variables y la escala empleada en los ejes corresponde a la necesidad de la situación. (Figura 28)

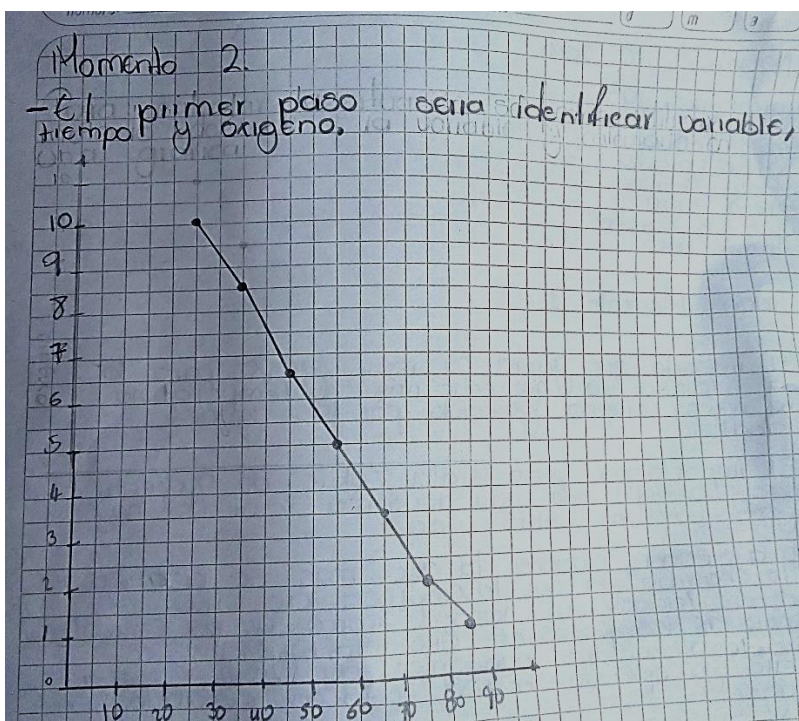


Figura 28 Construcción gráfica para representar relaciones de la situación 4, grupo 4

Respecto a las preguntas 5 y 6 (Anexo 5), los estudiantes de forma unánime afirman que el impacto de la temperatura sobre un ecosistema acuático es negativo, ya que esta afecta la disponibilidad de oxígeno para las especies que dependen de este para vivir; las respuestas más representativas de esta afirmación son G1 ***“La temperatura tiene un papel muy importante, pues su impacto radica en que si es muy alta elimina el oxígeno disuelto, por lo tanto, no permite el desarrollo de la vida acuática”*** y G5 ***“el impacto de la temperatura en el desarrollo de la vida es negativo, ya que mientras el agua tiene un mayor grado de temperatura, menor será la cantidad de oxígeno lo que perjudica la vida acuática que no tendría una buena cantidad de oxígeno para respirar”***. Finalmente, todos los grupos también establecieron una nueva relación diciendo que a medida que el oxígeno aumenta se espera tener más vida representada en especies acuáticas y que de lo contrario esta diversidad disminuiría afectando el ecosistema y a quienes depende de él.

Al finalizar la aplicación de la situación problema 4 se puede considerar lo siguiente: todos los grupos tuvieron mayor facilidad para identificar sujetos de cambio y asignarles la categoría de variables, encontraron regularidades y las describieron de manera textual o numérica, establecieron la relación de tipo dependiente y consideraron que la situación podría matematizarse mediante una función lineal decreciente; emplearon sistemas de representación gráfica y tabular de forma correcta para mostrar la situación, proyectaron lo estudiado a contextos de la vida real y además lograron concluir la importancia de estas variables en ecosistemas acuáticos. El G1 fue el único grupo que planteó una función algebraica para representar la situación haciendo uso de los conceptos de la función lineal. El G4 mejoró considerablemente el análisis de la situación y logro avanzar a sistemas de representación más elaborados

De acuerdo a estas consideraciones, para esta situación, el G1 se encuentra en un nivel D2 ya que logró formalizar la situación con elementos matemáticos, nivel de matematización formal (Bressan, 2016); los grupos restantes se ubican en el nivel D1 ya que se logró evidenciar el manejo e interpretación de los sistemas de representación y sus proyecciones a través de estos

4.5. Análisis General de los resultados de las situaciones Problema

En términos generales se puede inferir que el uso de contextos reales y situaciones realistas favorecen el aprendizaje y la comprensión de objetos matemáticos; sin embargo, la construcción de las guías en las actividades debe ser bien medida de acuerdo a las necesidades específicas de los grupos; no todas las situaciones pueden ser abordadas de la misma manera. Esta forma de trabajo en el aula favorece los comportamientos, disminuye los miedos y genera expectativas por aprender; los estudiantes lograron identificar relaciones funcionales en cada una de las situaciones; estas relaciones eran principalmente de tipo dependiente (directa o inversa).

Al expresar las situaciones mediante sistemas de representación gráfica (el más empleado) los estudiantes tienden a trazar líneas de tendencia pues consideran que todas las relaciones son del tipo funcional lineal. Hay una fuerte relación entre los datos que les infiere directamente construir una gráfica, y ya construida la gráfica tienden a unir los puntos buscando la linealidad.

Para el primer problema de calidad de agua identificado y llevado a la experimentación, donde se pretendía establecer la relación de la cantidad de sólidos presentes en el agua y su impacto en la alteración de la turbiedad, los estudiantes identificaron que existía una relación

funcional de tipo dependiente directa; ellos en conjunto manifestaron que al incrementar el contaminante en el agua, así mismo aumentaría el valor de la turbiedad, por lo tanto manifestaban que la turbiedad del agua dependía de la cantidad de sólidos presentes en ella; la mitad de los grupos de trabajo emplearon la tabla y el gráfico cartesiano para mostrar esta relación de dependencia directa y al realizarlo, tomaron la representación gráfica y trazaron líneas de tendencia entre los puntos y asumieron la relación de estas variables como lineal, dos de los grupos que abordaron esta situación problema construyeron una ecuación para representar la relación experimentada empleando los elementos de la función lineal

Para el segundo problema de calidad del agua identificado y llevado a la experimentación, la relación encontrada por los grupos se pudo dividir en dos partes; la primera fue que 3 de los 5 grupos consideraron que la relación funcional presente era de tipo dependiente inversa ya que al aumentar la cantidad de producto químico coagulante la turbiedad del agua disminuía considerablemente; las representaciones gráficas construidas muestran las relaciones establecidas por los grupos; sin embargo uno de los grupos identificó que al continuar aumentando la cantidad de producto químico empleado en la clarificación la turbiedad nuevamente emplazaba a incrementarse, lo que les hizo pensar y concluir que en esta situación problema de la calidad del agua del río Guabas existía una relación de dependencia doble marcada por un punto de cambio, a medida que la cantidad de producto químico aumentaba la turbiedad disminuía y posteriormente la turbiedad aumentaba conforme aumentaba la cantidad de producto químico; este grupo en su representación gráfica manifestó que el punto de cambio era la dosis ideal de producto para la clarificación del agua y que la relación se asemejaba a una función cuadrática; en la representación gráfica los estudiantes de este grupo consideraron que el punto de cambio era el vértice de la parábola

Para el tercer problema de calidad del agua identificado y llevado a la experimentación, los cinco grupos que lo abordaron consideraron que la relación funcional existente era de tipo dependiente inversa, el oxígeno del agua disminuía a medida que la temperatura de agua aumentaba (a mayor temperatura menos oxígeno). Al igual que en la situación dos, los estudiantes plantearon una función de tipo lineal para representar el comportamiento.

Las tres situaciones problema abordadas desde la experimentación en el laboratorio y la actividad inicial de lectura del contexto, permitieron que los estudiantes lograran establecer relaciones de dependencia entre los sujetos de cambio puestos en juego, que posteriormente los estudiantes llamarían variables; se lograron identificar relaciones de dependencia directa en el problema 1, relaciones de dependencia directa e inversa en el problema 2 y relación de dependencia inversa en el problema 3; para llegar a estas relaciones los estudiantes emplearon el concepto de variación de los sujetos de cambio y gracias a los datos recolectados por ellos y consignados mediante tablas de datos pudieron inferir estas relaciones que posteriormente gracias a la gráfica en el plano cartesiano fueron confirmadas. Se encontró que los estudiantes tienden a linealizar las relaciones y asumen esta forma como la de mayor relevancia en las situaciones del contexto real; esto se puede deber a que la función lineal es la más abordada en la escuela y no se trabaja sobre otras funciones.

4.6. Logro de los Objetivos Específicos

Respecto al **objetivo específico número 1** se puede concluir lo siguiente:

El uso de los problemas de calidad del agua abordados desde la experimentación facilitó el acercamiento a los conceptos de variación y dependencia; los estudiantes fácilmente podían establecer cambios y relaciones entre ellos desde la percepción sensorial el cual era

confirmado con la toma de datos; los cambios que presentaba la turbiedad fueron los más fácilmente detectados por los estudiantes, ellos establecieron que esta variable dependía de la cantidad de sólidos presentes en el agua y a esta relación le asignaron una dependencia lineal, estas variaciones se expresaban mediante frases como: **aumentó, se ve más oscuro, es más turbio, depende de y cambió**; para el caso de la clarificación del agua también de manera sensorial se identificaba como iban mejorando las condiciones de la misma a medida que se agregaba reactivo químico; la identificación sensorial de estas relaciones y su respectiva dependencia le permitía a los estudiantes predecir el valor siguiente en las pruebas y encontrar errores de medición en la práctica; sin embargo al pasar de la representación escrita de las relaciones de variación y dependencia al registro gráfico algunos grupos (dos de ellos principalmente) olvidaban registrar la relación con los sujetos de cambio correspondiente; se debe aclarar que el error estaba en la construcción de la gráfica o tabla pero no en la identificación de las relaciones de dependencia. Al abordar la experimentación que ponía en juego la temperatura y el oxígeno disuelto los estudiantes describieron la variación y dependencia empleando las palabras **“aumenta, disminuye, depende de, cambió, disminuye cuando aumenta”**; nuevamente la experimentación les permitía determinar datos posteriores o inferir el dato que seguía o el dato que correspondía a cierto valor de una de las variables.

Respecto al **objetivo específico número 2** se puede concluir lo siguiente:

El trabajo de las relaciones funcionales abordado desde los problemas de calidad del agua posibilita una gran variedad de representaciones donde la estudiante amplía la visión del concepto desde diferentes expresiones icónicas (gráficas, tablas, ecuaciones.), situación que permiten dinamizar la comprensión del objeto estudiado.

Se encontró que los estudiantes del grado noveno de la IEPVA tienden a pensar que todas las relaciones en las situaciones reales son de tipo lineal y tienden a linealizar las construcciones gráficas que realizan trazando líneas de tendencia que abarquen la mayor cantidad de puntos posibles (regresión lineal). Para los estudiantes fue más fácil la construcción de tablas de datos que gráficos cartesianos sin embargo la interpretación de la situación se evidenciaba mejor en la construcción gráfica.

En algunas construcciones de los estudiantes se olvidaba ubicar correctamente la variable independiente pues la confundían con el número de la prueba; para otros el paso de un sistema de representación a otro permitía establecer mayores interpretaciones de la situación; principalmente, los grupos 1 y 5 lograron tener una matematización progresiva de la situación desde la descripción verbal de los sujetos de cambio, sus relaciones expresadas textualmente y confirmadas mediante las representaciones gráfica y tabular, estas últimas les permitió sugerir comportamientos y establecer tendencias que finalmente concretaron con una ecuación matemática que para ellos era la máxima representación matemática de la situación pues podrían determinar cualquier valor de la variable dependiente teniendo el valor de la variable independiente. El sistema de representación que prevaleció en las construcciones de los estudiantes fue la tabla de datos, aunque la gráfica les permitió mejores explicaciones del fenómeno estudiado; pocos grupos pudieron proponer una expresión algebraica de los problemas

Respecto al **objetivo específico número 3** se puede concluir lo siguiente:

Teniendo presente los niveles de matematización, los criterios de los actos de comprensión empleados para la rejilla de análisis y las situaciones problema abordadas se pudo considerar que: el grupo 1 y el grupo 5 lograron ubicarse en un nivel de matematización

formal ya que lograron el desarrollo de una matematización progresiva, esto quiere decir que lograron identificar los sujetos de cambio, establecieron relaciones entre ellos, expresaron las relaciones de forma oral escrita, tabular y gráfica, pudieron predecir los comportamiento y construir una representación algebraica de los problemas empleando los elementos de la función lineal.

Los grupos 2 y 3 alcanzaron la comprensión de las situaciones problema desde la identificación de los sujetos de cambio, establecieron dependencias entre ellos, emplearon magnitudes para nombrar a las variables y representaron las relaciones mediante tablas de datos y gráficas en plano cartesiano, predijeron comportamientos de manera general pero presentaron algunas dificultades en la construcción gráfica de las relaciones respecto a la extracción de las variables a graficar; además no lograron construir una representación algebraica del problema y sus predicciones eran muy generales. Estas observaciones y los elementos identificados pertenecen al nivel de matematización general.

El grupo 4 presentó bastantes dificultades para establecer relaciones entre sujetos de cambio, constantemente olvidaba las relaciones entre las variables y la representación más empleada solo fue la oral o escrita; no logró concretar sistemas de representación tabular o gráfico acorde a las condiciones de cada problema abordado; desde la expresión oral entendieron los sujetos de cambio y la dependencia entre estos, pero a la hora de expresarlo en diferentes sistemas no les fue posible; sus resultados se quedaron en la experimentación y no trascendieron a la formalización matemática esto hace que su nivel de matematización alcanzado sea el situacional; sin embargo en el último problema abordado lograron alcanzar el nivel de matematización referencial.

5. CONCLUSIONES

El Trabajo de investigación realizado en La IEPVA con una muestra de 25 estudiantes de grado noveno, un docente de matemáticas, el proceso de formación disciplinar en la Universidad del Valle en Educación Matemática y Ciencias Experimentales y la relación con un contexto físico natural del municipio de Guacarí en una de sus mayores problemáticas como lo es la calidad del agua del río Guabas, permitió un ejercicio dinámico de reflexión por parte del docente investigador.

En la experiencia vivida para caracterizar las relaciones funcionales que identificaban los estudiantes de grado noveno al analizar contextos realistas, la conclusión más importante es haber podido reconocer y valorar el impacto de asumir los procesos de enseñanza a través de trabajos realizados fuera del salón de clase (principio de actividad y realidad), pero debidamente planeados y evaluados, ya que esta situación generó cambios en los comportamientos de los estudiantes que se evidenciaron en la atención, la participación, el trabajo en equipo, la producción y confianza del estudiante en tener aportes de opinión que facilitaron los actos de retroalimentación por parte del docente en la formalización de conceptos del objeto matemático, que finalmente condujeron en varios espacios a la matematización como un verdadero ejercicio de aprendizaje, en este caso la comprensión de los elementos básicos de las relaciones funcionales.

Fue contundente como los procesos de experimentación de situaciones problema permitieron a los estudiantes reconocer rápidamente elementos fundamentales como la variación y dependencia y su relación con otras situaciones de contextos extramatemáticos; el proceso de experimentación permitió involucrar al estudiantes como actor fundamental del aprendizaje, ser responsable de quehacer académico, facilitó la toma de registros, el uso de

sistemas de representación y una mejor explicación verbal de los fenómenos; algunos estudiantes que tienen dificultades para expresar sus ideas en público lograron manifestarlas gracias a la seguridad que les brindaba la experimentación realizada.

El concepto de relaciones funcionales no hace parte de las matemáticas como una simple casualidad, este tiene un papel principal como herramienta para describir y comprender diferentes fenómenos o situaciones problemas de diferentes áreas de conocimiento, dado esto, es completamente necesario acercar el área de matemáticas a las áreas de química o ciencias naturales para articular conceptos y poder desarrollar un proceso de formación interdisciplinario donde el estudiantes aleje la idea de las áreas independientes sin relaciones entre ellas.

Es muy difícil desarrollar este trabajo con grupos numerosos en cantidad debido a la necesidad de realizar prácticas de laboratorio donde no se cuenta con grandes cantidades de instrumentos de medición o reactivos para su desarrollo, esta es quizás la mayor limitante de poder acercar los problemas del contexto real al aula de matemáticas.

Debe ser motivo de análisis posterior el hecho de que los estudiantes tienen una concepción errada de la relación de los fenómenos de la naturaleza; para ellos todas las relaciones son de tipo lineal creciente; tienden a buscar la linealización de las construcciones gráficas que realizan. Adicional se debe pensar para mejorar esta propuesta en incluir un recurso tecnológico (GeoGebra, Excel) que facilite a los estudiantes la construcción de las representaciones gráficas y tabulares para poder así hacer procesos de regresión que permitan una mejor comprensión de fenómenos y el acercamiento a la expresión algebraica que fue tan difícil de evidenciar en este trabajo.

Los acercamientos a los conceptos de variación y dependencia fueron indispensables para poder lograr los acercamientos al concepto de relación función; las preguntas que apuntaban a este propósito sirvieron de soporte para la construcción de diferentes registros de representación, identificación de errores y predicción de la situación ante el cambio de alguna variable. El éxito de estos conceptos se fundamentó en poner en conflicto al estudiante mediante experimentación, donde no sabía qué tipo de resultado iba a obtener.

La experimentación como acción científica que se desarrolló en la propuesta, donde se puso en interacción las ciencias naturales y la matemática desde la experimentación generó el surgimiento de habilidades para los estudiantes desde lo analítico, lo argumentativo y la predicción; el uso de situaciones reales llevadas a diseños experimentales facilitó su comprensión, el reconocimiento de actores que influyen en ella y permitió proyectar un panorama y las posibles acciones que deben implementarse para menguar los impactos ambientales.

Es más beneficioso para la escuela desarrollar los procesos de formación mediante el uso de situaciones donde se pueda dar la integración de las áreas del conocimiento, donde los aprendizajes de un área específica me permitan dilucidar o apoyar a comprender los aprendizajes de otra; quizás esta tarea permita que los estudiantes puedan desarrollar mejores habilidades para enfrentar la vida y no solo acumulemos conocimientos desarticulados y sin propósitos sustanciales para el que aprende.

6. RECOMENDACIONES

El uso de contextos realistas favorecen los procesos de formación en el aula, sin embargo es muy importante seleccionar aquellas situaciones que faciliten el surgimiento de los objetos matemáticos, de lo contrario se puede correr el riesgo de perder el objetivo de aprendizaje y confusión entre los estudiantes; se debe prestar total atención al proceso de réplica o experimentación de los problemas dado que es posible que no se cuente con los equipos o herramientas para poder desarrollar las actividades lo que limitaría las aplicaciones.

Se debe tener mucho cuidado con las unidades de medida empleadas en los sujetos de cambio; para el caso de esta investigación fue difícil lograr que los estudiantes se familiarizaran con unidades como NTU, para turbiedad, UPC para color o mg/l para oxígeno, en este caso se recomienda inicialmente asumir como unidades de color o de turbiedad sin especificar el origen o el patrón de estas unidades de medida.

Se deben proponer relaciones funcionales que no solo correspondan a la dependencia lineal ya que esto reafirmaría entre los estudiantes la teoría que todos los fenómenos de la naturaleza se pueden expresar desde la función lineal. Para esto se podría emplear las variaciones que presenta el caudal de un río respecto al tiempo en una temporada de lluvia o los cambios del pH en diferentes concentraciones de una solución.

Se deben fortalecer los procesos de construcción de representaciones gráficas desde la ubicación de las variables y la correspondencia de datos entre las variables dependientes e independientes; además se debe apoyar al estudiante en la comprensión de este registro y sus potencialidades, existen estudiantes que tienen marcado la construcción de un gráfico con un

diagrama de barras y este último es el que siempre intentan construir cuando se les pide proponer una gráfica.

Que los docentes y los estudiantes tengan un contacto directo con el río y puedan identificar desde las matemáticas y otras áreas no significa necesariamente que se vayan a garantizar el cambio de conductas, pero sí permite una mayor posibilidad de análisis a los diferentes fenómenos, también ampliar el horizonte de ver la escuela como un espacio diferente al de solo enseñar conceptos y dar información.

Identificar un contexto para asumir un proceso de enseñanza que interese a los estudiantes no es una tarea sencilla, es un trabajo que se debe hacer en conjunto, analizado desde varias ópticas y sobre todo incorporado a una problemática que posibilite interés y necesidad, no debe obedecer solo al esnobismo ni a intereses particulares, que genere un verdadero proyecto en beneficio de la comunidad escolar y sin perder los referentes institucionales los cuales deber ser considerados en una identidad nacional y visión global de la ciencia en general.

La I.E. Pedro Vicente Abadía puede encontrar en este trabajo de investigación una muestra clara y concreta de la integración del componente ambiental al currículo de matemáticas; esta propuesta permite aportar a la consolidación del modelo curricular COSIRE ya que aquí se pudo llevar a cabo un proceso interdisciplinar de análisis y comprensión sistémica de una de las realidades de mayor importancia para la comunidad educativa como lo es la calidad del agua de una fuente hídrica. Esta propuesta deja bases sólidas desde lo metodológico para continuar mejorando el currículo de las cátedras en la media técnica y empezar la concreción real del modelo curricular en la básica. Los resultados muestran que el trabajo logra buenos elementos de sistematización de experiencias que

pueden aprovecharse desde el modelo pedagógico, el cual tiene una orientación hacia la educación ambiental.

Finalmente consideramos que esta investigación abre las puertas a otros cuestionamientos sobre el uso de los contextos en la enseñanza de las matemáticas escolares, entre ellas se consideran las siguientes preguntas ¿De qué manera articular los problemas de la calidad del agua del río Guabas en una propuesta de aula para el aprendizaje de las funciones con los estudiantes del grado noveno? Y ¿Cuáles registros de representación emplean los estudiantes del grado noveno de la IEPVA para establecer relaciones de dependencia entre variables fisicoquímicas?, ¿Qué tipo de situaciones con relaciones funcionales permiten que el estudiante construya expresiones matemáticas con un nivel de matematización formal?, ¿Cómo hacer para que el estudiante supere la tendencia a linealizar las relaciones de dependencia que se grafican en una representación cartesiana?

BIBLIOGRAFÍA

- Alagia, H., Bressan, M., & Sadavsky, P. (2005). *Reflexiones teórica para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T.González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM.
- Angulo Vallejo, O. (Enero de 2014). Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal. Santiago de Cali, Colombia: Universidad de Valle, Instituto de educación y pedagogía..
- Arbelaez, M., & Onrubia, J. (2014). Análisis bibliométrico y de contenido. Dos metodologías complementarias para el análisis de la revista colombiana Educación y cultura. *Revista de Investigaciones UCM*, 14 - 31.
- Azcárate Giménez, C., & Deulofeu Piquet, J. (1996). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Bachelar, G. (2000). *La formación del Espíritu Científico*. Siglo XXI Editores. México D.F.
- Blomhoj, M. (2004). *Modelización Matemática - Una teoría para la práctica*. Recuperado el 20 de octubre de 2018, de Universidad Nacional de Córdoba: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf
- Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (enero de 2016). *Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática*. Recuperado de: Educación Matemática Realista Bases Teóricas: <http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/>
- Bressan, A. (s.f.). Los principios de la educación matemática realista.
- Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*. Research Sampler.

- Carvajal Florez, E. (2009). Impacto Ambiental y Social del Vertimiento de Residuos Sólidos y Escombros Sobre la Calidad del Río Medellín y Algunos de sus Afluentes. (U. S. Buenaventura, Ed.) *El ágora USB*, 9(1), 225-265.
- Cortés, L. E. (2009). *Química ambiental, componente agua*. Universidad Nacional de Colombia, Palmira.
- Dalci, Olave, Testa. (2009). Registros de representación semiótica. Instituto de profesores. Artigas. México.
- Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones.
- Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación . *La Gaceta de la RSME* , 143-168.
- Farfán, R., & García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, 18, 489-494.
- Fiol, M., & Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad Directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gámiz, L. M., Flores Martínez, P., & Gutiérrez Pérez, J. (2008). Matemáticas ambientales. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.
- Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en didáctica y teoría curricular. *J. Currículo Studies*, 32(6), 777-796.
- Grueso, R., & González, G. (octubre de 2016). El concepto de función como covariación en la escuela. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del valle, Instituto de educación y pedagogía.

- Hernández Sampieri, Roberto; et al. Metodología de la Investigación. 6ª. ed. McGraw-Hill. México, D.F., 2001. Pág. 52 - 134.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN.
- Ministerio de protección social. (2007). *Decreto 1575, por el cual se establece para la protección y control de la calidad del agua para consumo humano*. Bogotá.
- Nacional, M. d. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- ONU, O. D. (2014). *Departamento de asuntos económicos y sociales de las naciones unidas*. Obtenido de <https://www.un.org/spanish/waterforlifedecade/quality.shtml>
- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. *La educación matemática en la enseñanza secundaria (págs.61-94)*. Barcelona: Universidad de Valencia.
- Radford, L. (2006). Semiótica y Educación Matemática. *Relime*, 7-21.
- Resolución 2115. (2007). *Resolución 2115, por medio de la cual se señalan características, instrumentos básicos y frecuencias del sistema de control y vigilancia para la calidad del agua para consumo humano*.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 1 -14.
- Rojas, L., Macías, N., & Fonseca, D. (2010). El Índice de Calidad de Agua como herramienta para la gestión de los. (C. d. nuclear, Ed.) *Medio ambiente y desarrollo*, 5. Recuperado de:
<http://repositorio.geotech.cu/jspui/bitstream/1234/2639/1/Indic>
- Roldan, C. (2013). “El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8º y 9º de educación básica. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- Roldán Cruz, E. O. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de octavo y noveno grado de educación básica. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias.

- Romero Rojas, J. A. (2013). *Tratamiento de aguas residuales, teoría y principios de diseño*. Bogotá: Escuela colombiana de ingeniería.
- Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Tesis de doctorado publicada*. España: Universidad de Jaén, Colección Juan Pérez de Moya.
- Sánchez Peña, D. M. (2016). Conceptualización de la función lineal y afín: una experiencia en el aula. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de ciencias y educación.
- Sierpiska, S. (1992). Understanding the notion of function. En Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, 25.
- Sierpiska, A. (1998). Sobre la comprensión de la noción de función. Concordia University. Traducción Delgado, C.
- Torres, P., Cruz, C., & Patiño, P. (2010). Índices de calidad del agua en fuentes superficiales utilizadas en la producción de agua para consumo humano. *Revista Ingenierías, Universidad de Medellín*, 8(15), 79-94. Recuperado de <http://C:/Users/Admin/Downloads/Dialnet-ndicesDeCalidadDeAguaEnFuentes>
- Vargas, M. (2011). “El concepto de función y sus explicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos. Universidad Nacional de Colombia
- .

ANEXOS

ANEXO 1. TABLA DE OPERACIONALIZACIÓN DE CONCEPTOS

¿Qué tipo de relaciones funcionales logran identificar los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Pedro Vicente Abadía, cuando analizan los problemas de calidad del agua del río Guabas?		
CONCEPTO	DESCRIPTOR	INDICADOR
Problemas de calidad de agua del río Guabas	Alteraciones de los parámetros físicos del agua en diferentes puntos de la fuente hídrica	Alto contenido de sólidos en el agua (sólidos disueltos)
		Variaciones en el color del agua como indicadores de reacciones químicas y afectaciones de calidad de agua
		Variaciones en la turbiedad en el agua por arrastre de sedimentos
	Alteraciones de los parámetros químicos del agua en diferentes puntos de la fuente hídrica	Vertimiento directo de aguas residuales sin tratamiento a fuentes de agua
		Aumento en la temperatura del agua por descarga de aguas de proceso
		Pérdida de oxígeno disuelto por materia orgánica o incrementos de temperatura
	Procesos de potabilización deficientes	Sistemas de potabilización obsoletos o poco tecnificados
		Uso de reactivos químicos convencionales.
		Problemas en la definición de dosis óptima de reactivo en procesos de clarificación
		Presencia de sólidos en el agua que afectan el paso de la luz, indicador de clarificación
Relaciones funcionales	Identificación de sujetos de cambio (variación)	Comprende una situación del contexto después de interactuar con ella
		Percibe cambios y regularidades en contexto
		Reconoce variables y constantes en una situación
		Asigna una magnitud a cada sujeto de cambio que observa en contexto
	Establecer dependencia entre sujetos de cambio	Establece relaciones entre variables o sujetos de cambio
		Expresa las relaciones en términos de dependencia directa
		Expresa relaciones en términos de dependencia inversa
		Infiere las relaciones empleando términos textuales como (aumenta, disminuye, crece o decrece)
	Emplear diferentes sistemas de representación para evidenciar la relación entre sujetos de cambio	Toma registros y los organiza
		Organiza los datos en tablas, relaciona en una tabla la variación de las magnitudes
		Construye gráficas en el plano cartesiano que muestre la relación entre variables
		Usa la gráfica para predecir comportamientos
		Construye o propone una ecuación algebraica para expresar la relación

ANEXO 2 GUÍA SITUACIÓN 1

MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ME-EEM&CE – II Cohorte

Maestrante: Julio Alexander Delgado Delgado

Nombre del grupo: _____

SITUACIÓN 1, LECTURA DEL CONTEXTO *“IDENTIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS.*

La tarea número uno tiene como propósito la identificación de situaciones problema o problemas ambientales asociados a la calidad del agua que suceden alrededor del río Guabas y sus derivaciones, es importante que el estudiante tenga contacto directo con la situación para posteriormente replicarle en el aula.

1. Materiales:

Para el correcto desarrollo de la salida pedagógica usted deberá llevar en grupo de 5 personas los siguientes materiales

- Recipientes plásticos transparentes con tapa
- Una tabla de apoyo
- Cámara fotográfica (opcional)
- Una botella de plástico pequeña
- Algodón, tijeras, hidratación
- Vasos plásticos transparentes.

2. Recomendaciones

Los estudiantes deben llevar ropa cómoda, refrigerio e hidratación, por ningún motivo se permitirá que los estudiantes se alejen del grupo.

3. Metodología

Para el desarrollo de la actividad se conformarán grupos de 5 estudiantes, se realizará un recorrido guiado por la acequia la chamba y el río Guabas, como fuentes de abastecimiento de agua en el en el municipio de Guacarí; durante el recorrido se realizarán paradas estratégicas donde el docente explicará algunos aspectos generales relacionados con las situaciones ambientales observadas y responderá a las dudas que surjan de parte de los estudiantes. En cada una de las paradas se deberá realizar un registro textual de lo observado.

3.1. Estación 1 Barrio Ceibas

En el siguiente recuadro describa lo que observa, puede emplear gráficos y/o texto

P1 ¿Cuál consideras que son los dos impactos ambientales más significativos que puedes observar en esta primera estación?

P2 ¿Qué característica particular encuentras en estas problemáticas?

3.2. Estación 2, Liceo Comercial Juan Pablo Segundo

En el siguiente recuadro describa lo que observa, puede emplear gráficos y/o texto

P3 ¿Cuáles son las afectaciones más significativas sobre la acequia la chamba?

P4 ¿Cuál es el aspecto físico que tiene el agua en esta estación? ¿A qué crees que se debe?

3.3. Estación 3, Compuerta El Limonar

En el siguiente recuadro describa lo que observa, puede emplear gráficos y/o texto

P5 ¿Observas algún tipo de cambio significativo en el agua respecto a las estaciones anteriores? ¿Cuál?

3.4. Estación 4, Pollo Pikú

En el siguiente recuadro describa lo que observa, puede emplear gráficos y/o texto

P6 ¿Qué relación encuentras entre pollo Pikú y la acequia la Chamba?

P7 ¿Cuál consideras que es el impacto ambiental más significativo que se presenta en esta estación? ¿Por qué?

P8 ¿Qué cambios logras identificar durante el recorrido?

P9 ¿En qué estaciones crees que se presentaron mayores impactos sobre el recurso hídrico y a qué se debe?

P10 ¿Qué cambios lograste identificar en el agua durante todo el recorrido?

P11 ¿Qué cosas se mantuvieron igual?

ANEXO 3 GUÍA SITUACIÓN 2

MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ME-EEM&CE – II Cohorte

Maestrante: Julio Alexander Delgado Delgado

SITUACIÓN 2, LA ALTERACIÓN DE LOS SOLIDOS EN LA CALIDAD DEL AGUA

EXPERIMENTACIÓN 1.

La tarea número 2 tiene como propósito brindar un acercamiento específico a algunas de las características de la problemática ambiental abordada; se realizará un zoom de la situación problema y se tomará total atención en aquellas variables de interés situacional y se suprimirá la interferencia de otras menos significativas; pasamos de situaciones reales a situaciones realistas.

1. Materiales

Estas actividades también se desarrollarán en grupos de 5 estudiantes, además, para el desarrollo de las prácticas de laboratorio se requiere de los siguientes elementos

- Elementos de protección personal (EPP)
- Equipos y herramientas de laboratorio (gramera, turbidímetro, probetas, beakers, varillas de agitación, termómetro).
- Tabla de apoyo, calculadora, cuaderno.
- Muestras de suelo
- Vasos plásticos transparentes
- Computador portátil

2. Recomendaciones

Para el correcto desarrollo de la práctica debe mantener todo el tiempo con los EPP correctamente usados, no debe ingerir alimentos durante la práctica, debe ser cuidadoso al manejar los equipos y herramientas del laboratorio y deben diligenciar completamente la guía; no deben ingerir ni abrir ni probar ninguno de los reactivos que se emplearan en el laboratorio o alguno que no conozca o que no se encuentre etiquetado

3. Metodología

Para el desarrollo de cada una de las prácticas se conformarán grupos de 5 estudiantes y realizaran el experimento que se les asigne, deben tomar los datos necesarios y responder a cada uno de los interrogantes planteados; el docente estará en constante contacto con los estudiantes para brindar apoyo y aclarar sus dudas.

SITUACIÓN PROBLEMA 2. La primera experiencia llevada a la práctica nos ayudará a responder la siguiente pregunta:

¿Cuál es la relación o el impacto que generan los sólidos en la calidad del agua?

Cada grupo de estudiantes va a pesar diferentes cantidades de suelo previamente acondicionado (secado, triturado y tamizado) 0,1g, 0,2g, 0,4g, 0,6g, 0,8g, 1g, 1,5g, y los va a colocar cada uno en un vaso plástico transparente seco y limpio.



Posteriormente va a agregar agua en cada uno de los vasos, van a mezclar y finalmente después de observar lo sucedido van a medir con ayuda del turbidímetro el valor de la turbidez del agua, el contenido de sólidos disueltos totales y el color; no olvidar dejar un vaso sin muestra de suelo para realizar las comparaciones pertinentes.

3.1. Organice los datos iniciales y los datos obtenidos de la forma que usted considere más adecuada

P1 ¿Qué sucedió?, ¿qué contraste entre los valores de muestras de suelo, la turbiedad, el color y los sólidos disueltos?

P2 ¿Qué cambios observo en las muestras de agua con suelo? ¿Qué es lo que cambia?

P3 ¿Qué comportamiento tuvo la turbiedad el color y los sólidos en las muestras?

P4 ¿La turbiedad depende de la cantidad de sólidos o los sólidos dependen de la turbiedad?

P5 ¿Es posible obtener valores de turbiedad negativa? ¿Por qué?

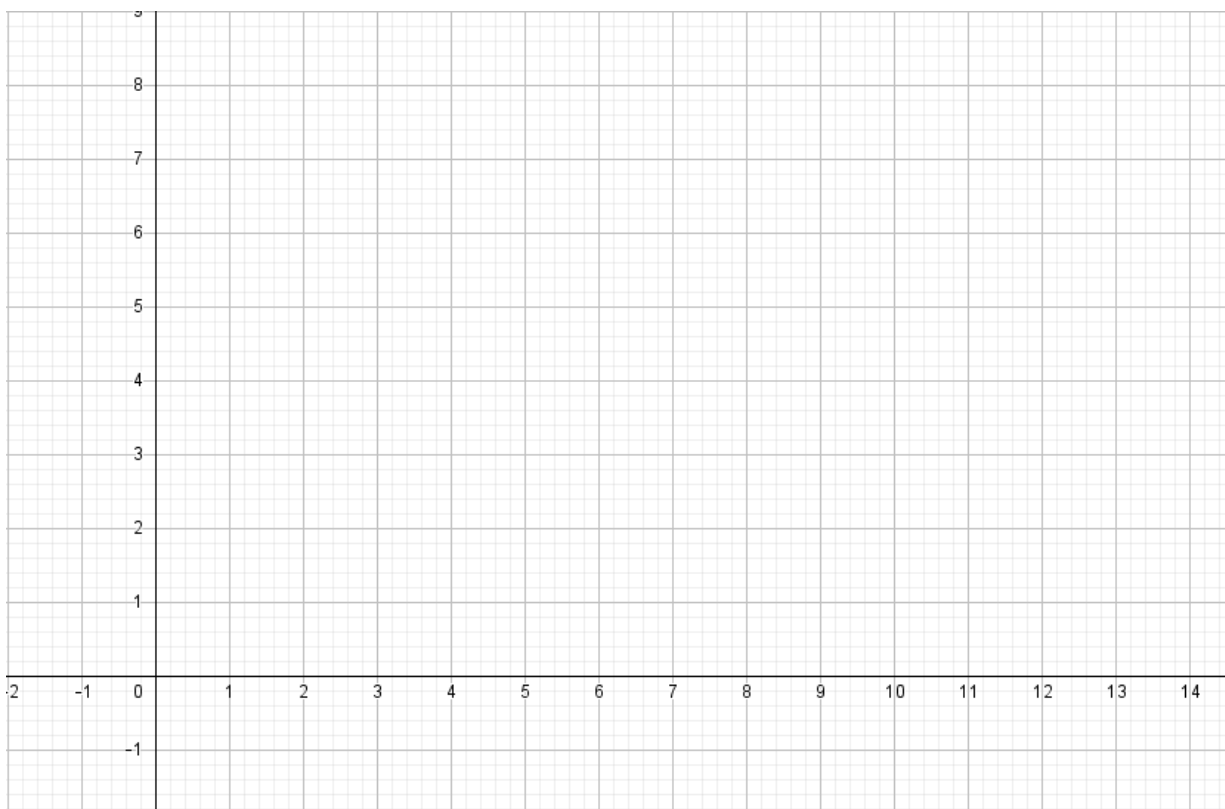
P6 ¿Es posible obtener pesos de muestras de suelo negativas? ¿Por qué?

P7 ¿Qué cambió y cómo cambió? ¿Encontraste alguna dependencia?, ¿Cuál?

3.2. Ahora trata de organizar la información de los pesos de suelo y los valores de turbiedad medida en las siguientes alternativas.

Peso de las muestras (g)									
Valores de turbiedad (NTU)									
Valores de Color									
Valores de Sólidos									

# de Muestra	Peso de muestras de suelo (g)	Valores medidos de turbiedad (NTU)	Valores medidos de color (UPC)	Valores medidos de SST (mg/l)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				



P8 Define con tus propias palabras lo que sucede entre la cantidad de sólidos y la turbiedad, entre la turbiedad y los sólidos disueltos, la turbiedad y el color en el agua,

P9 ¿En cuál de las anteriores opciones consideras que se te facilitó organizar la información y por qué? ¿Cuál de las opciones anteriores representa mejor la situación recreada en el laboratorio?

P10 ¿Cómo hallarías la turbiedad y color para una muestra de agua que le aplicaron 3 gramos de suelo y otra a la que le aplicaron 5,5 gramos?



ANEXO 4 GUÍA SITUACIÓN 3

MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ME-EEM&CE – II Cohorte

Maestrante: Julio Alexander Delgado Delgado

SITUACIÓN 3, CLARIFICACIÓN DEL AGUA

EXPERIMENTACIÓN 2. La segunda experiencia llevada a la práctica nos ayudará a responder la siguiente pregunta:

¿Cómo mejorar la calidad de una muestra de agua en función de la turbiedad?

Cada grupo de trabajo recibirá una muestra de agua problema con una alta turbiedad y alto contenido de sólidos disueltos; el trabajo consistirá en encontrar la dosis óptima de un producto químico para mejorar las condiciones de calidad de agua y encontrará las relaciones de consumo de reactivo químico para cualquier cantidad de agua a clarificar.



© Can Stock Photo - csp20153741

Para empezar, deberá montar un diseño experimental con 10 muestras de una cantidad constante de agua y aplicarle diferentes cantidades del producto químico. Contará con 10 concentraciones diferentes del producto químico que podrá usar en su diseño experimental, desde los 300 ppm hasta los 3000 ppm

P1 ¿Describe cómo vas a montar el experimento y que datos vas a medir y qué registros vas a tomar?

P2 Describe con tus propias palabras lo que sucedió en la práctica.

P3 ¿Qué cambió y que se mantuvo constante?

P4 ¿Cómo cambió la turbiedad en las muestras de agua?

P5 ¿Cómo cambió el consumo de producto químico en el agua?

P6 ¿Qué relación existe la cantidad de producto químico y la turbiedad?

P7 ¿Qué relación existe la cantidad de producto químico y el color?

Utiliza cualquier estrategia para presentar los datos que acabas de encontrar.

P8 ¿Cuál sería la turbiedad de una muestra de agua si la concentración de producto químico empleado 2000 o de 5000?

P9 ¿Cuál es la concentración ideal de producto químico a emplear en la muestra de agua problema?

P10. Si se quisieran clarificar 10000 litros de agua, ¿cuántos litros de producto químico en la concentración ideal se necesitarían?

ANEXO 5 GUÍA SITUACIÓN 4

MODELIZACIÓN REALISTA DE LA CALIDAD DEL AGUA DEL RÍO GUABAS MEDIANTE RELACIONES FUNCIONALES: UNA RELACIÓN DISCIPLINAR ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ME-EEM&CE – II Cohorte

Maestrante: Julio Alexander Delgado

SITUACIÓN 4, LA INCIDENCIA DE LA TEMPERATURA EN EL OXÍGENO DISUELTO

EL municipio de Guacarí, ubicado en el centro del departamento del Valle del Cauca con el transcurso de los años ha sufrido un considerable deterioro de sus recursos naturales, esto debido al desconocimiento de territorio por parte de sus habitantes, la mala administración de los recursos y el poco control que ejercen las autoridades.

El municipio cuenta con un humedal (Humedal Videles) que presta el servicio ecosistémico de regulación del caudal del río Cauca y que sirve de habitat para especies migratorias; también posee un río de gran caudal (río Guabas) que garantiza entre otras el suministro de agua potable de sus habitantes, pero infortunadamente se ha venido deteriorando debido a prácticas sociales que se desarrollan en la comunidad guacariseña; el río Guabas se ha convertido en el vertedero de aguas residuales domésticas e industriales, sitio de disposición de residuos sólidos y suministro de agua para el cultivo de la caña de azúcar, situaciones que lo que pone en riesgo la calidad y disponibilidad del recurso para la comunidad en general.

Parte 1

En la situación 1 y otras visitas realizadas por estudiantes, los estudiantes de grado noveno establecieron que uno de los parámetros que permitían determinar la calidad del agua en una fuente hídrica era la disponibilidad de oxígeno disuelto, puesto que este se hace necesario en la respiración de los peces; debido a ello, tomaron algunos registros del contenido de oxígeno disuelto y la temperatura del agua en diferentes puntos del recorrido, los resultados fueron los siguientes.

	<i>Punto 1</i>	<i>Punto 2</i>	<i>Punto 3</i>	<i>Punto 4</i>	<i>Punto 5</i>	<i>Punto 6</i>	<i>Punto 7</i>
Oxígeno (UO)	12	12	9	6	9	5	3
Temperatura (C°)	22	22	24	28	24	30	31

Características de los puntos de toma de datos

Punto 1: Zona rural, punto de mayor altura (msnm) de los 7 puntos de muestreo

Punto 2: Zona rural, cerca de bocatoma Acuavalle

Punto 3: Cerca hacienda la esmeralda

Punto 4: Contiguo a ingenio Pichichi (descarga de aguas de proceso)

Punto 5: Corregimiento Guabitas

Punto 6: Zona urbana de Guacarí (punto de descarga de aguas residuales domésticas)

Punto 7: Barrio el Limonar, descarga de aguas de proceso de la empresa pollo Pikú

De acuerdo a la información anterior, responder las siguientes preguntas:

P1 ¿Qué variables presenta la situación y que tipo de relación se puede inferir entre ellas?

P2 ¿Con qué situaciones de su cotidianidad relaciona usted la situación?

P3 ¿Qué relación de dependencia se presenta entre las variables?

P4 ¿Es posible matematizar esta situación tal como se presenta? ¿Cómo lo haría? ¿Qué representaciones utilizaría?

EXPERIMENTACIÓN 4

Los estudiantes con el apoyo del docente y de acuerdo al análisis realizado a la situación, recrearon en el laboratorio de la siguiente manera:

- **Variables a medir:** Temperatura tiempo y oxígeno disuelto
- **Materiales:** Recipiente metálico, oxímetro, termómetro, diario de campo.
- **Hipótesis:** “La temperatura afecta el oxígeno del agua, lo disminuye”

Se organizó una prueba de laboratorio que consistía en poner dos litros de agua en un recipiente, posteriormente se realizó la medición de oxígeno disuelto de la muestra de agua e inmediatamente se llevó a una estufa y se calentó a fuego constante; cada X cantidad de tiempo los estudiantes midieron la temperatura del agua y el contenido de oxígeno disuelto hasta que el agua se acercó a los 100°. Los resultados fueron los siguientes:

Temperatura (C°)	25	35	45	55	65	75	85
Oxígeno (UO)	10	8,5	6,5	5	3,5	2	1
Tiempo (Horas)	9:00	9:05	9:10	9:15	9:20	9:25	9:30

Actividad de desarrollo libre: Usted como estudiantes de grado noveno y sin olvidar la situación de calidad de agua desde donde surge esta situación, ¿qué propondría para el análisis de estos datos y manejo matemático de esta información?

P5 ¿Qué impacto tiene la temperatura en el desarrollo de la vida acuática?

P6 ¿Qué impacto tiene el oxígeno disuelto en el desarrollo de la vida acuática?
