



Estrategias Cognitivas en Estudiantes de Séptimo Grado Para la Generalización de Patrones Matemáticos

Didier Andres Marquinez Andrade - Cód. 201928591

Hector Sneyder Vargas Suarez - Cód. 201927273

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas
Santiago de Cali
2025



**Estrategias Cognitivas en Estudiantes de Séptimo Grado Para la Generalización de
Patrones Matemáticos**

Didier Andres Marquinez Andrade

Hector Sneyder Vargas Suarez

Trabajo de Grado Para Obtener el Título de Licenciados en Matemáticas

Director:

Mag. Jhonatan Elias Posso Torres

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

Santiago de Cali

2025

Índice de Contenido

Resumen	8
Introducción	9
Planteamiento del Problema	11
1.2 Objetivo General	15
1.2.1 Objetivos Específicos	15
1.3 Justificación	16
1.4 Antecedentes	21
Marco Teórico y Conceptual	26
2.1 La Enseñanza del Álgebra Escolar	26
2.2 El Paso de la Aritmética al Álgebra	27
2.3. Obstáculos, Errores y Dificultades en el Aprendizaje del Álgebra Escolar	29
2.4. El Estudio de Patrones Aritméticos y Algebraicos	32
2.5. Los Procesos de Generalización en la Aritmética y el Álgebra	33
2.6. La Resolución de Problemas Matemáticos	34
2.6.1 Heurísticas	35
2.6.2 La Resolución de Problemas como Estrategia, como Proceso y como Línea de Investigación	36
2.7. Los recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas	38
2.7.1 Tipos de Recursos Didácticos	39
2.7.1.1. Recursos Digitales.	40
Marco Metodológico	42
3.1. Tipo de Investigación	42
3.2. Fases de la Investigación:	43
3.2.1. Fase 1: Documentación y Articulación de la Información Sobre el Tema	43
3.2.2. Fase 2: Caracterización de la Institución	44
3.2.3. Fase 3: Adaptación de la Secuencia Didáctica	45
3.2.3.1. Secuencias Sobre Generalización de Patrones	45
3.2.3.2. Estructura de la secuencia:	52
3.3. Planificación y análisis de necesidades	54
3.3.1. Diseño del objeto virtual de aprendizaje	54
3.3.2. Implementación de la secuencia con apoyo del OVA	56
3.4. Fase 4: Análisis de los resultados y conclusiones	57
3.4.1. Recolección de datos	58
3.4.2. Resultados y análisis de resultados	59
3.4.3. Estrategias cognitivas para el estudio de patrones geométricos en el desarrollo del pensamiento variacional	120
Conclusiones	132

Recomendaciones	135
Bibliografía	137
Anexos	141
Anexo A. Secuencia didáctica diseñada para la investigación	141
Anexo B. Secuencia original 1: “Una introducción a la generalización de patrones geométricos” (Pulido Orellano, 2021)	151
Anexo C. Secuencia original 2: “Propuesta de generalización de patrones” (Perez, 2022)	164
Actividad 1	164
Actividad 3	165

Indice de Ilustraciones

Ilustración 1. Números cuadrados	14
Ilustración 2. Números triangulares	14
Ilustración 3. Actividad 6 diseñada en el OVA	51
Ilustración 4. Respuesta del estudiante en la pregunta 4	115
Ilustración 5. Respuesta del estudiante en la pregunta 5a	116
Ilustración 6. Respuesta del estudiante en la pregunta 10	117
Ilustración 7. Respuesta del estudiante en la pregunta 9	118
Ilustración 8. Respuesta del estudiante en la pregunta 14	120
Ilustración 9. Respuesta del estudiante en la pregunta 34 y 35	121

Indice de Tablas

Tabla 1. Categorías de generalización según Rico	45
Tabla 2. Categorías de generalización según Ellis	46
Tabla 3. Estructura de la secuencia	49
Tabla 4. Tipo de respuestas pregunta 1	57
Tabla 5. Tipo de respuestas pregunta 2	58
Tabla 6. Tipo de respuestas pregunta 3	60
Tabla 7. Tipo de respuestas pregunta 4	61
Tabla 8. Tipo de respuestas pregunta 5a	64
Tabla 9. Tipo de respuestas pregunta 5b	65
Tabla 10. Tipo de respuestas pregunta 6	67
Tabla 11. Tipo de respuestas pregunta 7	68
Tabla 12. Tipo de respuestas pregunta 8	69
Tabla 13. Tipo de respuestas pregunta 9	71
Tabla 14. Tipo de respuestas pregunta 10a	73
Tabla 15. Tipo de respuestas pregunta 10b	74
Tabla 16. Tipo de respuestas pregunta 11	75
Tabla 17. Tipo de respuestas pregunta 12	77
Tabla 18. Tipo de respuestas pregunta 13	78
Tabla 19. Tipo de respuestas pregunta 14	80
Tabla 20. Tipo de respuestas pregunta 15	82
Tabla 21. Tipo de respuestas pregunta 16	83
Tabla 22. Tipo de respuestas pregunta 17	85
Tabla 23. Tipo de respuestas pregunta 18	86
Tabla 24. Tipo de respuestas pregunta 19	87
Tabla 25. Tipo de respuestas pregunta 20	89
Tabla 26. Tipo de respuestas pregunta 21	91
Tabla 27. Tipo de respuestas pregunta 23	92
Tabla 28. Tipo de respuestas pregunta 24	94
Tabla 29. Tipo de respuestas pregunta 25	96
Tabla 30. Tipo de respuestas pregunta 26	98
Tabla 31. Tipo de respuestas pregunta 27	100
Tabla 32. Tipo de respuestas pregunta 28	102
Tabla 33. Tipo de respuestas pregunta 29	103
Tabla 34. Tipo de respuestas pregunta 30	106
Tabla 35. Tipo de respuestas pregunta 31	107
Tabla 36. Tipo de respuestas pregunta 32	109

Tabla 37, Tipo de respuestas pregunta 33	110
Tabla 38, Tipo de respuestas pregunta 34	112
Tabla 39, Tipo de respuestas pregunta 35	113

Resumen

En este trabajo de investigación se caracterizaron las estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes de grado séptimo del Colegio Centro Docente Parroquial San Marcos de la ciudad de Cali, al momento de resolver problemas que implicaban la generalización de patrones geométricos y numéricos, a partir de las propuestas en los estudios de Mason (1985), Ellis (2007), y otros autores.

Para poder llevar a cabo esta investigación se seleccionaron dos secuencias didácticas sobre el estudio de patrones elaboradas previamente por Pulido y Orellano (2021) y Perez (2022), las cuales se adaptaron con la intención de mejorar el desarrollo del trabajo y atender de manera más adecuada los objetivos establecidos. Uno de los ajustes relevantes consistió en transformar algunas tareas que se encontraban en formato de lápiz y papel a un formato digital en el software GeoGebra, esto con el fin de favorecer la interacción de los estudiantes y promover un acercamiento más significativo al proceso de generalización.

Respecto a los resultados, se evidenció que los estudiantes son capaces de realizar algunos procesos de generalización como los que menciona Mason (1985), por ejemplo, percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón y probar su validez. No obstante, en ciertas actividades no fue posible identificar procesos de mayor complejidad, como la formulación de una expresión general que modela situaciones con patrones geométricos o numéricos.

Palabras clave: Generalización, patrones geométricos, patrones numéricos, estrategias cognitivas.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la línea de formación en Didáctica de las matemáticas del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle y su propósito fundamental es favorecer el pensamiento variacional de los estudiantes de grado séptimo a través de una secuencia didáctica en la cual se abordan problemas de generalización de patrones geométrico y numéricos.

Para desarrollar esta propuesta se tomaron en cuenta los siguientes referentes: Butto, Rojano (2004), Medina, rojas (2016), Castro (2012), Ellis (2007), Ellis (2011), Mason (1985), Polya (1945), Rico (1997), Rico (2016), Socas (2001), Vergel (2015). Por otra parte, se tienen en cuenta los referentes curriculares, por ejemplo, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), todos estos referentes nos brindan las bases estructurales para poder llevar a cabo este proyecto de investigación.

Este documento está organizado por capítulos, los cuales se encuentran organizados de la siguiente forma: En el primer capítulo se presentan todos los aspectos generales del trabajo como problemática, objetivos, justificación y antecedentes.

En el segundo capítulo se encuentra todo lo relacionado con los referentes conceptuales, en este apartado se detalla de manera minuciosa cada uno de los aspectos importantes para el desarrollo del proyecto, por ejemplo, la enseñanza del álgebra escolar, la transición de la aritmética al álgebra, errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra el estudio de los patrones aritméticos y algebraicos, la resolución de problemas y por último los recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas.

En el tercer capítulo se encuentra todo lo relacionado con el marco metodológico, donde se encuentran aspectos como, por ejemplo, el tipo de la investigación, las diferentes fases como la documentación y articulación de la información sobre el tema, la caracterización de la institución donde se implementa, además, la estructura de la secuencia didáctica el diseño del objeto virtual de aprendizaje, la recolección de datos y el análisis de los resultados.

En el cuarto y último capítulo se presentan algunas conclusiones y reflexiones didácticas a la luz de los objetivos planteados para la investigación y finalmente se presentan las referencias bibliográficas de todos los autores que aportaron al desarrollo de este proyecto de investigación.

Planteamiento del Problema

Investigaciones en educación matemática han concluido que el aprendizaje del álgebra escolar se hace difícil para los estudiantes y esto se debe a distintos factores como, por ejemplo, la naturaleza de las dificultades a las cuales, según Brousseau (1983), se enfrentan los estudiantes en matemáticas y que están relacionadas con los obstáculos epistemológicos, entendidos como formas de pensamiento que en ciertos momentos resultan útiles para resolver problemas, pero que posteriormente pueden convertirse en impedimentos para la comprensión de nuevos conceptos. Por su parte, D'Amore (2006) señala que algunas dificultades se originan en los procesos cognitivos del estudiante, especialmente cuando se requiere realizar procesos de abstracción, generalización o uso del lenguaje simbólico propio de las matemáticas.

En este sentido, a continuación, se presentan algunas clasificaciones de aquellas dificultades que mayormente presentan los alumnos, teniendo como referencia la investigación de Wagner y Parker (1999, como se citó en Castro, 2012) mencionando que:

Las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos, aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencias involuntarias del mismo sujeto, quizá las técnicas de enseñanza. (p. 76)

En relación con lo anterior, se considera la postura de Socas (2007), quien también manifiesta que existen diferentes tipos de dificultades y las agrupa en cinco categorías, sin embargo, se tendrá en cuenta algunas de interés en esta investigación: La primera está relacionada con la complejidad del objeto matemático, por ejemplo, el lenguaje algebraico o la

simbología, puesto que los estudiantes presentan dificultades a la hora de expresar relaciones en lenguaje algebraico.

La segunda se asocia al proceso cognitivo del alumno, en este apartado lo que se sugiere es que todos los estudiantes no tienen el mismo nivel de aprendizaje, por tanto, es normal que algunas personas presenten en mayor o menor grado dificultades en su proceso de aprendizaje. Por otra parte, la tercera se basa en las dificultades que están relacionadas con los procesos de enseñanza en la institución educativa, por ejemplo, metodología del profesor, currículo, materiales y otros elementos que hacen parte en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Por último, las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, son muy interesantes porque la naturaleza de estas se podría decir que vienen de la cultura en la que se encuentran los estudiantes, es decir, las matemáticas son rechazadas por los alumnos porque la sociedad les hace creer que son complicadas de entender o que no tienen sentido en la vida cotidiana, todas estas ideas son transmitidas por otras personas y esto predispone a los alumnos a tomar actitudes de rechazo hacia las matemáticas.

Por otro lado, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares hay algunos momentos que influyen en el desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes y en su comprensión de los conceptos, por tal razón se consideran importantes, por ejemplo, el paso de la aritmética al álgebra, es un momento significativo ya que en últimas lo que el estudiante está haciendo es un salto del pensamiento numérico al pensamiento variacional. Esto conlleva que la manera de interpretar y abordar las situaciones problemas en ambas asignaturas sean diferentes.

Según Gavilán (2011), los resultados académicos que se derivan de las dificultades propias del álgebra, son desalentadores. Precisamente en los niveles en los que se inicia el estudio más formal del álgebra, es donde se encuentra mayor fracaso escolar (p. 98). Con base en lo anterior, se han visto implicaciones que trae consigo el paso de la aritmética al álgebra. La primera y más destacada es la forma en la que se trabaja en cada asignatura, por ejemplo, en aritmética los estudiantes trabajan y resuelven problemas con base en las operaciones (suma y multiplicación) o con estructuras aditivas y multiplicativas para resolver problemas. Por otra parte, cuando los estudiantes empiezan a ver álgebra cambia totalmente la manera de trabajar a pesar que también se utilizan estas estructuras, se dice que cambia porque se trabaja con relaciones, variables y otros objetos matemáticos propios del álgebra que son nuevos para los estudiantes, porque no se usaban en aritmética. Es decir, que los métodos que utilizaban para resolver problemas no son los mismos por tanto es necesario utilizar otras estrategias para poder abordar las situaciones problemas.

Debido a lo anterior, es natural que los estudiantes presenten dificultades a la hora de realizar el salto de la aritmética al álgebra, de hecho, Kieran (1989), Menciona que una de las mayores dificultades que presentan los alumnos es que ellos tratan de utilizar los mismos métodos que les funcionaba en la aritmética y como se mencionó anteriormente, la naturaleza de ambas ramas es diferente por tanto no es recomendable utilizar los mismos métodos porque se puede caer en errores.

En este sentido, podemos decir que el álgebra no es simplemente la generalización de la aritmética. Según Kieran (1989), el álgebra requiere un cambio en el pensamiento de los estudiantes puesto que va más allá de situaciones numéricas a proposiciones más generales. Por esta razón no todas las estrategias que utiliza el estudiante para resolver problemas en la

aritmética se pueden utilizar en el álgebra porque puede llevar a los alumnos a cometer errores, crear obstáculos y que presenten dificultades en su aprendizaje.

En relación con la enseñanza del álgebra escolar se han investigado diferentes metodologías para tratar de mejorar el rendimiento de los estudiantes, por ejemplo, el trabajar con la generalización de patrones y secuencias numéricas, geométricas entre otras regularidades, pero siguen apareciendo muchos errores y obstáculos que no permiten un avance significativo a la hora del aprendizaje del álgebra.

Según los Estándares Básicos de Competencia, MEN (2006), se puede utilizar la generalización de patrones para trabajar la variación puesto que esto se presta para analizar diferentes fenómenos, por ejemplo, las relaciones entre los elementos de la secuencia. A continuación, veremos algunas dificultades que se presentan al trabajar con esta propuesta.

Con respecto a las dificultades que se presentan con la generalización de patrones se puede encontrar el cambio de registro, por ejemplo, de una representación geométrica a la algebraica, según González (2012), la dificultad radica en la necesidad de traducir los conceptos y las relaciones utilizando palabras para describir expresiones algebraicas sin tener en cuenta su significado.

Otra dificultad radica en la comprensión y el uso de los conceptos, según González (2012), menciona que los estudiantes utilizan el concepto de variable, pero no lo asumen de manera adecuada, es decir, que no comprenden el significado y lo utilizan sin haberse apropiado de él, esto genera que caigan en errores, por ejemplo, en algunos casos asumen la variable como un objeto o incluso la llegan a ignorar dejándola a un lado.

Ahora, según Rojas (2015) en cuanto a la utilización de una metodología para el trabajo con el computador y los objetos virtuales de aprendizaje, es común encontrar una insuficiente formación sobre los usos apropiados, la dificultad o imposibilidad de modificar contenidos que no fueran adecuados para el grado o asignatura del profesor, y la falta de ayuda para incorporar las nuevas metodologías interactivas en sus propias necesidades de enseñanza. (p. 21)

Destacando los obstáculos comunes que enfrentan los profesores al emplear metodologías basadas en computadoras y Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), incluyendo la falta de capacitación adecuada, lo que limita su efectividad en el aula, la dificultad para adaptar los contenidos de los OVA a las necesidades específicas de los estudiantes, y la ausencia de apoyo para la integración efectiva de estas nuevas metodologías en su enseñanza.

De lo anterior se puede concluir que los estudiantes pueden enfrentar problemas para identificar variables, establecer relaciones entre ellas y formular ecuaciones que representen correctamente el problema dado, además de las dificultades relacionadas con el cambio de registro.

Por lo dicho anteriormente en el contexto educativo, se observa una preocupante tendencia, ya que muchos estudiantes enfrentan dificultades significativas en el aprendizaje del álgebra. Para finalizar este apartado se presenta la pregunta problematizadora que guiará esta investigación, la cual se presenta a continuación:

¿Qué estrategias cognitivas permiten comprender y resolver situaciones que implican el estudio y generalización de patrones geométricos y numéricos a estudiantes de séptimo grado en una institución educativa de la ciudad de Cali?

1.2 Objetivo General

Determinar estrategias cognitivas que favorecen la comprensión y resolución de situaciones relacionadas con procesos de estudio y generalización de patrones geométricos y numéricos en estudiantes de grado séptimo en una institución educativa de la ciudad de Cali.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Analizar referentes didácticos, curriculares y matemáticos relacionados con el estudio y generalización de patrones y la enseñanza del álgebra escolar.
- Articular en una secuencia dos propuestas didácticas orientadas a la comprensión y resolución de situaciones de generalización de patrones en estudiantes de séptimo grado.
- Implementar y analizar las producciones y respuestas de los estudiantes durante el estudio de la secuencia didáctica para identificar las estrategias utilizadas en la resolución de las tareas propuestas.
- Caracterizar las estrategias que favorecen la comprensión y resolución de situaciones de generalización de patrones en estudiantes de séptimo grado.

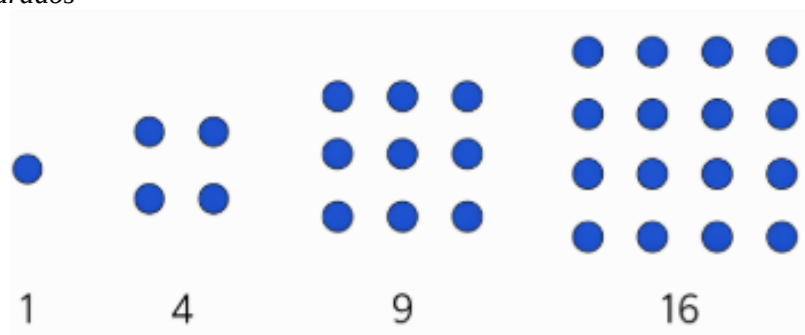
1.3 Justificación

Tomando como referencia los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), el pensamiento variacional implica reconocer, percibir y describir la variación y el cambio en diversos contextos, utilizando diferentes sistemas simbólicos. Su objetivo es construir caminos

significativos para comprender conceptos matemáticos y resolver problemas relacionados con la variación y el cambio en la vida cotidiana y diferentes situaciones MEN (2002).

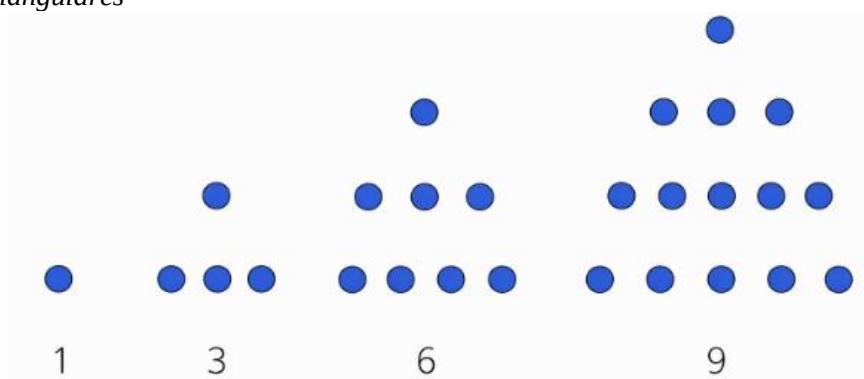
Se considera que, para el desarrollo del pensamiento variacional es necesario someter a los estudiantes en situaciones donde estos puedan trabajar distintos fenómenos relacionados con la variación, por ejemplo, por medio de actividades que encaminan al estudiante a abordar las siguientes preguntas ¿Cómo cambia? ¿Qué cambia? y ¿Qué se mantiene constante? También es importante que realicen conjeturas sobre reglas generales que describan los fenómenos. Por consiguiente, se cree que una excelente forma de abordar los aspectos mencionados es trabajando con patrones, sin embargo, para esta investigación se utilizarán patrones geométricos, dado que estos permiten analizar el cambio y las relaciones que hay en ellos de manera visual, además permiten plantear preguntas que encaminan al estudiante al estudio de la variación y por ende fortalece el pensamiento variacional de los alumnos de grado séptimo. Por otra parte, los patrones con los cuales se trabajarán serán aquellos relacionados con los números figurados de los pitagóricos entre otros, a modo de ejemplo se presentan algunos en las siguientes imágenes.

Ilustración 1.
Números cuadrados



Fuente: Pérez (2022)

Ilustración 2.
Números triangulares



Fuente: Pérez (2022)

Ahora bien, esta idea la respaldan diferentes autores, por ejemplo, Mason (1985), quien destaca que la generalización es crucial en el pensamiento matemático y algebraico. Dado que este se puede desarrollar al trabajar con patrones y regularidades, lo que facilita la aplicación en situaciones de la vida cotidiana. Para aprender álgebra es esencial que los alumnos perciban, expresen y comuniquen patrones. Para esto se proponen cuatro etapas para trabajar la generalización, las cuales se presentan a continuación: percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón y probar su validez.

En relación con lo anterior, para que un estudiante pueda percibir un patrón, primero debe analizar la situación, en este caso la secuencia que se presenta para tratar de identificar si efectivamente existe una regla que permite continuar la secuencia. Es decir, que el objetivo de esta primera etapa es lograr que los estudiantes identifiquen las relaciones que permiten continuar la secuencia. Con respecto a expresar un patrón, se cree que es sumamente importante porque una vez perciben el patrón, los estudiantes sean capaces de expresarlo como han llegado a una conclusión ya que esto permite realizar una reflexión sobre las ideas que presentan, para después dar lugar a la tercera etapa. Por tanto, en el tercer nivel se trata de registrar un patrón

bien sea con palabras, dibujos entre otros registros de representación, esta actividad es importante porque permite observar de manera más clara las ideas que tienen los estudiantes. Por último, se encuentra, probar la validez de las fórmulas, es decir, que el estudiante debe comprobar si para todos los casos posibles se cumple la regla que se identificó.

De acuerdo con lo anterior, se considera que al trabajar con situaciones donde se aborde desde la generalización se fomenta el trabajo de percibir, expresar, registrar y validar patrones. Estas cuatro etapas fortalecen la comprensión de conceptos y la habilidad de resolver problemas en álgebra. Por este motivo, el presente trabajo se llevará a cabo bajo esta perspectiva.

Por otra parte, otros autores a lo largo del tiempo han investigado los inconvenientes que se presentan en el paso de la aritmética al álgebra ejemplo, González (2012), menciona que para los estudiantes es difícil comprender e identificar de modo flexible y en diversos contextos el concepto de variable, no interpretan sus significados y presentan diversos obstáculos cuando requieren trabajo, por lo cual es importante buscar una alternativa para disminuir las dificultades que presentan los estudiantes en el aula al momento de ver álgebra.

Teniendo en cuenta lo mencionado, se evidencia gran variedad de dificultades con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, sin embargo, con este trabajo se pretende brindar estrategias para mitigar las dificultades que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra en estudiantes de séptimo grado mediante el proceso de generalización de patrones numéricos, geométricos y otros.

Ahora bien, hoy en día la población se encuentra inmersa en una época donde la tecnología tiene un gran impacto en la sociedad y casi todas las personas están familiarizadas con

ella. Por esta razón, las tecnologías de la información (TIC) en educación se encuentran en auge gracias a las ventajas que trae el trabajar con estas herramientas digitales.

Dado lo anterior diferentes autores destacan algunos aspectos positivos que trae consigo el trabajar con tecnología en el aula de clase, por ejemplo, Medina y Medina (2016), mencionan que entre las ventajas se encuentra la diversidad de metodología, la flexibilidad y el fácil acceso, además, permite una presentación atractiva de los contenidos y un ambiente dinámico donde los estudiantes pueden interactuar con el objeto matemático por medio de herramientas como el arrastre, deslizadores y la visualización. En este sentido, se considera que una forma de abordar la problemática es seleccionando una secuencia de tareas contextualizadas de generalización de patrones y adaptarla a un objeto virtual de aprendizaje (OVA), de esta manera lograr un aprendizaje significativo.

Ahora bien, los objetos virtuales de aprendizaje son creados como una estrategia pedagógica que permite a los estudiantes construir su conocimiento por medio de la interacción del sujeto con el objeto, desde otra perspectiva, se podría considerar que los OVA promueven un enfoque constructivista, debido a que promueven un aprendizaje autónomo. Ahora bien, teniendo en cuenta que en este trabajo se toman situaciones de variación de patrones geométricos, los recursos digitales permiten ampliar la visión de los estudiantes.

Ahora bien, según Collazos (2022), la propuesta de intervención Ova para el Aprendizaje de Expresiones Algebraicas en Exelearning ofrece una solución adecuada a la dificultad que presentan los estudiantes para aprender expresiones algebraicas y sus correspondientes operaciones (p. 93), ofreciéndonos una solución prometedora a las dificultades que enfrentan los estudiantes en este tema. Al proporcionar un entorno accesible, interactivo y flexible, los OVA

permiten a los estudiantes explorar y practicar conceptos de manera activa, recibir retroalimentación personalizada y avanzar a su propio ritmo.

1.4 Antecedentes

El álgebra es una parte fundamental de la educación matemática en todos los niveles, y su dominio es crucial para el éxito en una variedad de disciplinas académicas y profesionales. Por lo cual, gracias a su importancia, se han realizado numerosos estudios que han documentado las dificultades persistentes que enfrentan los estudiantes en el álgebra. las cuales no solo afectan el desempeño académico de los estudiantes, sino que también plantean desafíos significativos para los educadores y responsables de políticas educativas.

En particular, la Universidad del Valle, como institución de educación superior reconocida en la región, no es indiferente a que existe estas dificultades a nivel escolar , lo cual le ha llevado a investigar sobre este fenómeno, Sánchez (2021), con su trabajo titulado “Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje” en el cual establece una propuesta de trayectoria de aprendizaje en estudiante de octavo grado en el Liceo Campestre La Misión, este trabajo se enfoca en el reconocimiento y corrección de errores en el lenguaje algebraico. Comienza con un diagnóstico inicial para identificar las dificultades específicas de los estudiantes, seguido de una revisión de los fundamentos del álgebra y la identificación de errores comunes. Luego, se enseñan estrategias de corrección específicas y se aplican en contextos más complejos, seguido de una evaluación y seguimiento continuo, también se refuerzan y consolidan los conceptos aprendidos. Se pudo concluir a partir de este trabajo que a pesar de la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje ya desarrollada, del sin

número de investigaciones y aportes a la Educación Matemática referente a la iniciación al álgebra; los errores y las dificultades continúan apareciendo, esto nos invita a seguir investigando, y a comprender cómo los estudiantes realmente aprenden, cómo se lleva a cabo la comprensión de conceptos y al mismo tiempo nos da un buen punto de partida para identificar esas dificultades que están presente en el aula a la hora de trabajar álgebra.

Por otro lado, Carmona y Velasco (2018), se centran en investigar las características del pensamiento algebraico en estudiantes de 5° de educación básica a partir de la implementación de estrategias para la generalización de patrones. En este estudio, se observa que los estudiantes desarrollan habilidades avanzadas de identificación de patrones, generalización, razonamiento deductivo, resolución de problemas complejos y comunicación matemática. Estas habilidades muestran un progreso significativo en el pensamiento algebraico de los estudiantes de quinto grado, sentando las bases para un aprendizaje más profundo en matemáticas.

Castañeda y Castañeda (2019), propone una aproximación al álgebra escolar mediante la resolución de problemas aritméticos utilizando el concepto de ecuación. Este enfoque integra el álgebra en situaciones cotidianas, facilitando la comprensión y aplicación práctica de los conceptos algebraicos por parte de los estudiantes. Aquí miramos que, al introducir ecuaciones en contextos familiares, los estudiantes desarrollan una comprensión intuitiva de las relaciones entre cantidades y la naturaleza de las incógnitas, lo que facilita la transición de la aritmética al álgebra.

En Colombia, el álgebra ha sido tradicionalmente un pilar fundamental del currículo educativo en todos los niveles de enseñanza, desde la educación básica hasta la educación superior. Sin embargo, a pesar de su importancia, el estado del álgebra en el país presenta una

serie de desafíos que requieren atención y acción por parte de las autoridades educativas y la sociedad en su conjunto.

Por lo anterior se han realizado diversos estudios buscando reforzar el álgebra en las instituciones educativas, por ejemplo, Fernández (2013), realiza su trabajo el cual titula “Estrategias didácticas para fortalecer el aprendizaje de la aritmética al álgebra” en el cual se propone estrategias didácticas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra en el aprendizaje de las matemáticas. Estas estrategias incluyen la conexión entre ambos campos, el uso de manipulativos, el modelado de situaciones reales, la resolución de problemas como enfoque principal, la integración de tecnología, el trabajo colaborativo y la retroalimentación efectiva. Estas herramientas buscan promover una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos, facilitando así el proceso de aprendizaje para los estudiantes. Una de las primeras conclusiones que se generan al implementar este trabajo fue que las falencias no solo son por parte de los estudiantes, sino las metodologías utilizadas para la enseñanza y los prejuicios que influyen en el estudiante desde antes de ingresar al grado octavo, prejuicios que son infundados pero que, al salir de palabras de educadores o padres de familia, que llevan a estudiante a cometer diversos

Por otro lado, Vergel (2015), aborda la enseñanza del álgebra en etapas tempranas de aprendizaje. Explorando cómo los estudiantes pueden desarrollar habilidades de pensamiento algebraico desde una edad temprana, identificando patrones y regularidades en contextos matemáticos. Proponiendo estrategias pedagógicas para fomentar la generalización y el razonamiento algebraico, centrándose en actividades prácticas y ejemplos concretos para ayudar a los niños a comprender conceptos algebraicos de manera intuitiva. En este trabajo se concluye que los estudiantes pueden desarrollar habilidades de pensamiento algebraico incluso antes de

que se les presente formalmente el álgebra en el currículo escolar. Al fomentar la identificación de patrones,

Castro (2012), examina las dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar, identificando obstáculos que los estudiantes enfrentan al comprender y aplicar conceptos algebraicos. Estas dificultades incluyen la comprensión de la relación entre variables, la interpretación y resolución de ecuaciones, y la generalización de patrones; influyendo en que las causas son la falta de conexiones conceptuales, comprensión de símbolos y desarrollo de habilidades abstractas.

Ahora bien, el álgebra es una rama fundamental de las matemáticas, sin embargo, como se ha dicho anteriormente su enseñanza y aprendizaje enfrentan una serie de desafíos que afectan a estudiantes y sistemas educativos a nivel internacional. Una de las principales dificultades y en el que nos queremos centrar radica en la transición de la aritmética al álgebra. Esta transición puede ser abrumadora y generar confusión, lo que lleva a un menor interés y motivación por parte de los estudiantes.

Santana (2023), ofrece una visión detallada de las dificultades de los estudiantes en el uso de las reglas del álgebra, así como sugerencias prácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta importante disciplina matemática. En este trabajo se ve como la inclusión y priorizar las reglas algebraicas genera en los estudiantes una adquisición del conocimiento mucho más fluida.

Por otro lado, Zapatera (2021), con su artículo “La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria”, se centra en la importancia de utilizar la generalización de patrones como una estrategia para desarrollar el

pensamiento algebraico en niños, a la vez argumenta que el pensamiento algebraico no debe limitarse únicamente a la educación secundaria, sino que puede ser introducido de manera efectiva desde la educación primaria, por lo cual propone una serie de actividades y ejemplos que permitan al estudiante identificar y generalizar patrones numéricos. Se concluye que la generalización de patrones es una herramienta efectiva para introducir el pensamiento algebraico en la educación primaria.

Un desafío importante es la enseñanza tradicional del que se habla en las investigaciones que se centraba en la memorización de fórmulas y procedimientos, ya que este enfoque puede limitar el desarrollo del pensamiento crítico y la resolución de problemas de los estudiantes, ya que no les permite explorar y comprender los conceptos algebraicos de manera profunda, con este trabajo lo que buscamos es mejorar la enseñanza de las matemática explorando estrategias de enseñanza que mejore tanto la motivación del estudiante como la forma de ver las matemáticas.

Marco Teórico y Conceptual

En este apartado se abordarán las posturas teóricas y definiciones que sirven como base para el desarrollo del presente trabajo de investigación. Para ello, se plantean los siguientes temas: primero, la enseñanza del álgebra escolar, donde se tendrán en cuenta los obstáculos, errores y dificultades en el aprendizaje, así como el desarrollo del pensamiento variacional y el paso de la aritmética al álgebra. Segundo, se analizarán posturas didácticas, como el Early Algebra, los procesos de generalización de patrones, la resolución de problemas y los recursos didácticos para la enseñanza.

2.1 La Enseñanza del Álgebra Escolar

En los estándares básicos de competencia en matemáticas existen cinco tipos de pensamiento; sin embargo, este trabajo se desarrolla en el marco del pensamiento variacional. Como se ha mencionado anteriormente, el pensamiento variacional se relaciona con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. Además, implica describir, modelar y representar esta variación utilizando sistemas simbólicos como el lenguaje verbal, gráficos, íconos o álgebra. Este enfoque es fundamental para comprender conceptos matemáticos como funciones y sistemas analíticos, así como para resolver problemas basados en la variación y el cambio MEN (2006).

En este sentido, Vasco (2002) define el pensamiento variacional como una aproximación dinámica que busca generar mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de manera similar a los patrones de covariación observados en diversas cantidades, ya sean de la misma magnitud o de magnitudes diferentes, en los subprocesos simplificados de la realidad.

Ahora bien, el estudio de la variación se puede iniciar desde una edad temprana mediante actividades que involucran regularidades MEN (2006). Al analizar una regularidad en una secuencia, los estudiantes deben comparar las relaciones presentes en la secuencia, así como otras variables que permiten modelar. De esta manera, se fomenta el estudio de la variación.

Además, el pensamiento variacional está estrechamente relacionado con otros tipos de pensamiento. Por esta razón, existe una gran variedad de actividades que ayudan al desarrollo del pensamiento variacional en conjunto con otros tipos de pensamiento. A continuación, se presentan algunas de estas actividades.

- Con relación al pensamiento numérico se encuentra la forma cómo varía la secuencia numérica de los números cuadrados
- Con relación con el pensamiento espacial, se presentan secuencias geométricas
- Con respecto al pensamiento métrico, la diferencia entre magnitudes

2.2 El Paso de la Aritmética al Álgebra

En este apartado se presentan algunas consideraciones con respecto al álgebra y la aritmética, así como la relación entre estas dos ramas de las matemáticas.

Ahora bien, Solares (2009), mencionan que, para aprender el álgebra, se requiere combinar las herramientas y el pensamiento, indicando que ello puede ocurrir en cinco niveles los cuáles se presentan a continuación:

- Generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético
- Manipulación de formalismos guiados por sintaxis

- Estructuras abstraídas de cálculos y relaciones
- Funciones, variaciones y variación conjunta
- Modelado de lenguaje.

Respecto a los anteriores, se considerarán tres niveles: Primero tenemos la generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético, esencial para el desarrollo de habilidades matemáticas y la resolución de problemas, según Polya (1945) al identificar patrones y reglas generales facilita la comprensión de conceptos matemáticos.

Como segundo tenemos las estructuras abstraídas de cálculos y relaciones es crucial para profundizar en la comprensión conceptual de las matemáticas. Al ir más allá de los procedimientos y entender los fundamentos subyacentes, los estudiantes pueden resolver una variedad de problemas matemáticos de manera más flexible y creativa. Esta comprensión también prepara a los estudiantes para niveles educativos superiores y para aplicaciones prácticas en la vida cotidiana y profesional. Además, desarrolla habilidades críticas de pensamiento y análisis, que son valiosas en muchos aspectos de la vida.

Por último, tenemos el modelado del lenguaje que es esencial, ya que, permite expresar ideas con claridad y precisión, lo que evita malentendidos y asegura una comunicación efectiva de conceptos matemáticos. Además, fomenta el desarrollo del pensamiento abstracto al traducir problemas del mundo real a términos matemáticos y viceversa. Esto ayuda a los estudiantes a aplicar conceptos matemáticos a situaciones prácticas, preparándose para desafíos en la vida cotidiana y profesional donde se requiere interpretar y modelar problemas en términos matemáticos. Además, el modelado del lenguaje en matemáticas desarrolla habilidades de comunicación, ya que los estudiantes aprenden a expresar sus ideas de manera clara y organizada tanto verbalmente como por escrito.

Por otro lado, Kieran (2006) manifiesta que el álgebra es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar el cambio, hacer generalización, modelar, probar, conjeturar y predecir.

La aritmética es la rama de la matemática que su objeto de estudio son los números y las operaciones (suma y multiplicación) Mays (2020). Se dice también, que el álgebra no es la generalización de la aritmética, por esta razón, se debe tener cuidado al momento de realizar la transición para tratar de mitigar las dificultades.

2.3. Obstáculos, Errores y Dificultades en el Aprendizaje del Álgebra Escolar

Las dificultades, errores y obstáculos son importantes en esta investigación porque sirven como indicadores para identificar los problemas que presentan los alumnos. Como se mencionó anteriormente, el origen de las dificultades no es el mismo en todos los casos, ya que se han identificado distintas taxonomías de las dificultades, por ejemplo, están aquellas que surgen de la esencia misma del contenido matemático, las que se derivan de los procesos cognitivos de los alumnos y, por último, las que son externas tanto al contenido como al alumno. Además, es importante mencionar que las dificultades se manifiestan en forma de errores y obstáculos, Socas (2007).

De acuerdo con Rico (1997), una de las dificultades frecuentes en el aprendizaje del álgebra se relaciona con la tendencia de los estudiantes a centrarse únicamente en cálculos particulares, lo cual limita la identificación de estructuras y relaciones más generales dentro de una situación matemática. Esta situación se evidencia especialmente en tareas de generalización, donde los estudiantes pueden determinar términos cercanos de una secuencia, pero encuentran obstáculos al intentar formular una expresión que represente cualquier término del patrón.

De manera similar, investigaciones en didáctica de las matemáticas han señalado que la generalización requiere un proceso de razonamiento que va más allá de la simple observación de regularidades, ya que implica reconocer las relaciones que se mantienen constantes en una estructura y representarlas mediante distintos lenguajes matemáticos. En este sentido, Radford (2008) plantea que el desarrollo del pensamiento algebraico está estrechamente relacionado con la capacidad de los estudiantes para identificar patrones, establecer relaciones entre sus elementos y expresar dichas relaciones de forma general.

A continuación, se presentarán algunas definiciones de estos conceptos que ayudarán a identificar las características de cada uno.

2.3.1 Dificultad

una dificultad se puede definir como los retos que enfrentan los estudiantes al encontrarse con una situación. En otras palabras, sabemos que los alumnos tienen dificultades cuando la actividad que realizan requiere un esfuerzo mayor por su parte.

2.3.2 Error:

Socas (2007), define como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado por parte del estudiante, es decir, que el error es considerado como un procedimiento inadecuado ante una situación en la cual su proceder requiere otro camino.

2.3.3 Obstáculo:

Según Brousseau (1983), un obstáculo es un conocimiento que se ha aprendido de manera correcta que ha funcionado por mucho tiempo en la resolución de problemas por esta

razón, este saber se fija en la mente del estudiante, pero al momento de aplicar este conocimiento en otro contexto resulta poco útil.

Según lo anterior los obstáculos se pueden ver como barreras que generan un estancamiento en el aprendizaje, cabe resaltar que estas barreras no necesariamente se deben a la falta de comprensión, porque un obstáculo también se puede ver como la presencia de un conocimiento adecuado que se utiliza en un contexto equivocado.

Se dice que el álgebra es una rama fundamental de las matemáticas, proporciona la base para la resolución de problemas complejos y el razonamiento abstracto. Sin embargo, para muchos estudiantes, el aprendizaje del álgebra puede ser un desafío significativo debido a una variedad de factores cognitivos, pedagógicos y emocionales. Según Castro (2012).

Un motivo es de tipo cognitivo, por tanto, propio al sujeto, se refiere a que la generalización y la utilización de símbolos suponen dificultad. Otro motivo es de tipo psicológico, solamente oír la palabra álgebra ya asusta a los estudiantes, mucho más a aquellos que “no se le dan bien” las matemáticas. Un motivo pedagógico también se apunta como causante de dicha crisis, actualmente la mayoría de los estudiantes están menos motivados hacia el estudio, por lo tanto, su formación es más compleja. (p. 77)

Lo tomamos como un punto de partida para entender porque el álgebra es un problema en los estudiantes, cuando hablamos del motivo cognitivo se refiere a las dificultades que algunos estudiantes pueden experimentar al generalizar conceptos y al utilizar símbolos en el álgebra. Esto puede ser una barrera para aquellos que tienen dificultades para conceptualizar abstracciones matemáticas; el motivo psicológico señala el temor o la ansiedad que algunos estudiantes pueden experimentar solo al escuchar la palabra "álgebra". Esta barrera puede ser aún

mayor para aquellos que ya tienen una percepción negativa sobre sus habilidades matemáticas; y por luego está el motivo pedagógico apunta hacia la falta de motivación generalizada entre los estudiantes hacia el estudio en general. Cuando los estudiantes no están motivados, es más difícil para ellos comprometerse con el aprendizaje y la comprensión de conceptos difíciles como el álgebra.

2.4. El Estudio de Patrones Aritméticos y Algebraicos

El estudio de patrones aritméticos y algebraicos constituye una parte crucial en el desarrollo de habilidades matemáticas en todos los grados de escolaridad. Estos patrones sirven para comprender la estructura y las regularidades en conjuntos de números y figuras geométricas, a la vez no ofrecen una base sólida para la comprensión de conceptos algebraicos, Zapatera (2018) propone que los programas de matemáticas en los primeros años de escolarización se deben orientar a capacitar a los estudiantes para comprender patrones, relaciones y funciones.

Según Mason (1985), la capacidad de generalización marca el inicio del camino hacia la abstracción matemática y puede ser cultivada mediante el estudio y análisis de patrones o regularidades, entendiendo que al trabajar con patrones o regularidades, los estudiantes aprenden a reconocer relaciones entre diferentes variables y a formular principios generales que se aplican en una variedad de situaciones, y que la habilidad de generalizar en álgebra es fundamental para los estudiantes, ya que les permite identificar regularidades en datos o expresiones matemáticas y aplicar esas observaciones para encontrar soluciones a problemas más complejos. .

2.5. Los Procesos de Generalización en la Aritmética y el Álgebra

Kaput (1999), define que la generalización implica expandir intencionalmente el alcance del razonamiento o la comunicación más allá de los casos específicos considerados. Esto se logra identificando y destacando similitudes entre los casos, o elevando el razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el enfoque no esté en los casos o situaciones en sí, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos.

Según Masón (1985), la generalización es el proceso de ver lo general a través de lo particular y ver lo particular en lo general. Es decir, que el proceso de generalización es una acción que se puede trabajar en dos direcciones, la primera se dice que es el caso más común que se presenta en el salón de clases, por ejemplo, cuando un profesor presenta a los estudiantes un ejercicio de una secuencia, en este caso el docente está usando un caso particular para llevar a los estudiantes a una regla general. En este caso se aprecia como de una particularidad se avanza a una generalidad.

Mason (1985), destaca que una ruta para adentrar a los estudiantes al álgebra por medio de la generalización consta de cuatro etapas que los estudiantes deben cruzar para el desarrollo del pensamiento algebraico, por tanto, las etapas son las siguientes: percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón y probar la validez la validez de la fórmula.

- Ver un patrón consiste en la identificación de una unidad de repetición o relaciones en una secuencia.
- Expresar un patrón implica modelar con palabras lo que se ha reconocido en la acción de ver el patrón.

- Registrar un patrón es articular las palabras con las cuales expresan un patrón con simbolismos matemáticos, por ejemplo, letras u otros elementos que consideren apropiados, pero que están relacionadas con las variables en álgebra.
- Probar la validez de las fórmulas, hace referencias a comprobar las expresiones a la que los estudiantes llegaron en la etapa anterior, cabe resaltar, que el probar se puede realizar por diferentes métodos, por ejemplo, por medio del tanteo, es decir, los estudiantes pueden utilizar ejemplos particulares y probar que si se cumple, o también.

Cabe resaltar que, se debe dedicar tiempo en cada una de estas etapas puesto que el recorrido no es inmediato porque en el camino pueden surgir distintas dificultades, por tanto es un camino que requiere tiempo.

2.6. La Resolución de Problemas Matemáticos

La resolución de problemas matemáticos, tanto aritméticos como algebraicos es fundamental en el desarrollo del pensamiento crítico y analítico de los estudiantes. En el desarrollo de esta investigación, el enfoque de resolución de problemas matemáticos se asumió como una estrategia didáctica para promover el razonamiento de los estudiantes frente a situaciones relacionadas con la generalización de patrones. Las actividades propuestas en la secuencia didáctica fueron diseñadas de manera que los estudiantes pudieran analizar situaciones, identificar regularidades y formular posibles reglas que describieran el comportamiento de los patrones presentados. En este sentido, el proceso de resolución de problemas permitió observar las estrategias utilizadas por los estudiantes al interpretar la situación planteada, explorar diferentes procedimientos y expresar relaciones generales. De esta

manera, la resolución de problemas no solo se consideró como un medio para abordar los contenidos matemáticos, sino también como una herramienta para analizar los procesos de razonamiento involucrados en la construcción de generalizaciones.

En este apartado se abordan algunas estrategias heurísticas que facilitan la comprensión y solución de problemas, además, se examina la resolución de problemas como estrategia educativa, proceso cognitivo y línea de investigación.

2.6.1 Heurísticas

A continuación, hablaremos sobre algo que llamaremos modelos heurísticos o procesos mentales que pueden llegar a ser utilizados por los estudiantes a la hora de abordar situaciones con la generalización de regularidades y patrones. En matemáticas existen diferentes tipos de estructuras, pero las que tomaremos en cuenta serán las estructuras aditivas y multiplicativas, además de las heurísticas dado que estas son las que se manejan en aritmética y según Masón (1985), estas son las que los estudiantes suelen usar al enfrentarse a problemas algebraicos. Con esto pretendemos observar cuáles son los modelos o estructuras matemáticas que los estudiantes utilizan y cómo las utilizan al momento de realizar los cuatro pasos que menciona Masón.

La heurística es un enfoque para resolver problemas o tomar decisiones, especialmente cuando se enfrenta a situaciones complejas. Polya (1945) destaca la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas, ya que son pautas de razonamiento productivo que resultan fundamentales para avanzar en la comprensión y solución de problemas no rutinarios. Ejemplos de estas estrategias, como los presentados por Pólya, incluyen el uso de tablas o diagramas, la resolución de problemas más simples, el establecimiento de submetas y la búsqueda de relaciones, entre otras. Las estrategias heurísticas, como las ilustradas por Pólya,

ofrecen pautas claras para el razonamiento productivo, lo que facilita la comprensión y solución de problemas no rutinarios.

Por otro lado, Chavarría y Alfaro (2005) mencionan que “estrategias heurísticas son reglas o planteamientos generales que ayudan en el abordaje de un problema” (p. 3) entendiendo que son herramientas valiosas en la resolución de problemas, ya que ofrecen reglas generales o enfoques que guían el proceso de abordar situaciones complejas. Aunque no garantizan una solución perfecta, ya que según Schoenfeld (1985) argumenta que las estrategias propuestas por Polya para la resolución de problemas son limitadas en su alcance. Según su perspectiva, el proceso de resolver problemas es considerablemente más complejo y abarca una gama más amplia de factores, que incluyen aspectos emocionales, afectivos, psicológicos y socioculturales, entre otros. En otras palabras, Schoenfeld destaca que la resolución de problemas no puede reducirse únicamente a seguir un conjunto predefinido de pasos, sino que implica una interacción compleja de múltiples elementos. resalta la complejidad inherente a la resolución de problemas matemáticos. Al reconocer la influencia de factores emocionales, afectivos, psicológicos y socioculturales en este proceso, se amplía la comprensión de cómo los individuos enfrentan y abordan desafíos matemáticos. Esto subraya la importancia de considerar no solo las habilidades cognitivas, sino también el contexto y las experiencias personales de los estudiantes al diseñar estrategias efectivas para la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas.

2.6.2 La Resolución de Problemas como Estrategia, como Proceso y como Línea de Investigación

Según Espinoza (2017) La resolución de problemas es una técnica educativa que permite a los estudiantes adquirir nuevos conocimientos matemáticos a través de situaciones que requieren acciones cognitivas complejas y no inmediatas. Esta estrategia promueve el

pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Considerándola como una técnica que no solo permite a los estudiantes adquirir nuevos conocimientos matemáticos, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas complejas. Este enfoque promueve el pensamiento crítico y una comprensión profunda de los conceptos matemáticos, y puede ser analizado desde varias perspectivas: como estrategia, como proceso, y como línea de investigación.

La resolución de problemas como estrategia metodológica implica utilizar problemas matemáticos como medio para enseñar conceptos matemáticos. Según Espinoza (2017), esta estrategia fomenta el pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos matemáticos, alejándose de la mera memorización y repetición de procedimientos. Los estudiantes deben enfrentar situaciones que requieren análisis y aplicación de diversas estrategias para encontrar soluciones, lo que promueve un aprendizaje activo y significativo.

Ahora bien, como proceso la resolución de problemas se centra en las etapas y habilidades involucradas en abordar un problema matemático. De acuerdo con Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2014), este enfoque requiere que los estudiantes analicen críticamente los enunciados de los problemas, examinen los datos y manipulen distintas estrategias de resolución. Este enfoque no solo busca encontrar la solución correcta, sino también desarrollar habilidades de pensamiento lógico y analítico que son transferibles a otros contextos.

Como línea de investigación, la resolución de problemas ha sido un tema de interés significativo, investigadores como Schoenfeld (1985) han contribuido al entendimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden matemáticamente a través de la resolución de problemas complejos. Esta línea de investigación explora diversas metodologías para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante la implementación de tareas problemáticas que

desafían a los estudiantes a pensar críticamente y aplicar sus conocimientos en nuevas situaciones

La resolución de problemas se considera una estrategia central en la enseñanza de las matemáticas. Según Pólya (1979), un problema matemático implica buscar una acción apropiada para alcanzar un objetivo específico, aunque este objetivo no sea evidente inmediatamente. Un problema debe presentar un desafío para los estudiantes, estimulando su pensamiento crítico y capacidad de resolución.

2.7. Los recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas

Los recursos didácticos juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ofreciendo distintas herramientas que facilitan la comprensión de los contenidos. En este apartado se explora los distintos tipos de recursos disponibles, desde materiales impresos y audiovisuales hasta las tecnologías de la información (TIC) y su impacto en el aprendizaje.

En el marco de los recursos didácticos, la secuencia didáctica implementada en esta investigación se fundamenta en la adaptación de propuestas previamente diseñadas para la enseñanza de la generalización de patrones. En particular, se retoman las secuencias propuestas por Pulido Orellano (2021) y Pérez (2022), las cuales fueron seleccionadas por su enfoque en el desarrollo del pensamiento algebraico a partir del estudio de patrones geométricos. A partir de estas, se realizó un proceso de adaptación que incluyó la reorganización de actividades, la incorporación de elementos orientados a la resolución de problemas y la integración de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), con el propósito de favorecer la interacción de los estudiantes con los objetos matemáticos y potenciar la visualización de las regularidades. De esta manera, la secuencia didáctica no se concibe como una propuesta completamente original, sino

como una construcción fundamentada en referentes previos y ajustada a las necesidades del contexto educativo en el que se desarrolló la investigación.

2.7.1 Tipos de Recursos Didácticos

Para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, existen varios tipos de recursos didácticos que pueden ser clasificados según diferentes criterios y funcionalidades:

Según Chisag et al. (2017), los materiales impresos, como los libros de texto, cuadernos de trabajo y hojas de ejercicios, que permiten a los estudiantes leer y practicar los contenidos tantas veces como sea necesario, facilitando el proceso de aprendizaje. También están los materiales audiovisuales, que son útiles para comunicar mensajes específicos de manera más atractiva y efectiva, ayudando a los estudiantes a asimilar mejor la información. Y luego mencionan las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ofrecen una amplia gama de recursos digitales e interactivos, como software educativo, aplicaciones interactivas y plataformas en línea, que pueden hacer que el aprendizaje sea más dinámico y atractivo, fomentando una mayor participación y creatividad en los estudiantes.

Ahora bien, Murillo et al. (2016) en su documento menciona los materiales concretos, como manipulables, bloques y figuras geométricas, que ayudan a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos abstractos a través de la manipulación directa, siendo especialmente útiles en la enseñanza de la geometría y conceptos básicos como fracciones y decimales.

Pardo et al. (2020), abarcan los recursos didácticos tradicionales, como pizarras y marcadores, que, aunque sean básicos, siguen siendo fundamentales para la enseñanza diaria de las matemáticas. La disponibilidad y el uso efectivo de estos recursos pueden influir significativamente en el rendimiento académico de los estudiantes.

2.7.1.1 Recursos Digitales. Los recursos digitales, como el vídeo, la televisión digital, los videojuegos, la realidad aumentada y dispositivos móviles, entre otros, ofrecen nuevas oportunidades en la enseñanza al integrar elementos visuales, auditivos e interactivos que estimulan la comprensión y motivación de los estudiantes. Estos recursos han sido objeto de estudio en la investigación educativa debido a su potencial para mejorar los resultados de aprendizaje Garcia (2016). A continuación, se presentan algunas definiciones de un OVA a nivel nacional como internacional.

Nacional: todo material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través del internet MEN (2008).

Otra definición de OVA a nivel nacional se define como un conjunto de recursos digitales, auto contenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes, contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización Medina (2016)

Internacional: Un OVA se define como una entidad digital o no digital que puede ser utilizada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado por la tecnología Triquel (2007).

Ahora bien, debido al fácil acceso que tienen las personas en la actualidad, esto ha impulsado el uso de herramientas digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje, además aprovechando las ventajas que traen los recursos digitales. Algunas ventajas que se pueden encontrar en el momento de implementar los OVA se presentan a continuación: amplia variedad de métodos, flexibilidad, fácil acceso a aplicaciones, presentación atractiva de contenidos, creación de nuevos entornos de aprendizaje y optimización de recursos y costos Medina (2016).

A continuación, se presentan los elementos se deben tener en cuenta a la hora de diseñar e implementar un OVA: Como primero tenemos los objetivos, los cuales se deben expresar de manera clara lo que el estudiante va aprender. Segundo el contenido, se hace referencia al tema que se va a enseñar y además de las formas por la cual se van a presentar, por ejemplo, imágenes, videos, definiciones entre otros. Tercero, las actividades de aprendizaje, se refieren a las tareas que el estudiante realiza para alcanzar el objetivo, por ejemplo, juegos, retos, situaciones contextualizadas que apuntan a lograr una experiencia significativa de aprendizaje. Por último, están los elementos contextualizados, conocidos como los metadatos, que son los elementos que describen el OVA, por ejemplo, el idioma, el título su estructura interna y muy importante lo relacionado con los derechos de autor Bravo (2016).

En síntesis, este trabajo se enfoca en el desarrollo del pensamiento variacional por medio de una secuencia de tareas que abordan la generalización de patrones geométricos. Cabe resaltar que la secuencia se adaptará a un OVA debido a las ventajas que trae consigo el trabajar con estos recursos, por ejemplo, permite que los estudiantes exploren las regularidades y modifiquen las variables, permitiendo reconocer relaciones entre los elementos que rigen el patrón, de esta manera se construye un aprendizaje significativo porque el estudiante logra una mayor visualización de la variación por medio del objeto virtual. También se explora la enseñanza del álgebra escolar, abordando las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje, así como la transición de la aritmética al álgebra donde se resalta la propuesta de Early Algebra a partir del estudio de patrones y situaciones de generalización y finalmente se destaca la resolución de problemas como estrategia educativa.

Marco Metodológico

En este estudio se implementará una metodología de investigación cualitativa. Gutiérrez (2013), destaca que esta metodología se centra en entender cómo las personas construyen significado y sentido a partir de sus ideas, pensamientos y creencias, así como de las acciones en diferentes contextos, en este caso en la resolución de problemas que involucran la generalización. Esto implica que el investigador realice un acercamiento a dicha subjetividad para interpretar las descripciones de los individuos.

3.1. Tipo de Investigación

El presente estudio se enmarca dentro de un enfoque cualitativo, dado que su propósito central consiste en comprender y describir los procesos cognitivos que emergen cuando los estudiantes interactúan con tareas de generalización de patrones geométricos. Este enfoque permite analizar en profundidad las producciones de los estudiantes, sus formas de argumentar, las estrategias que emplean y los significados que atribuyen a las actividades propuestas, lo cual no sería posible mediante métodos puramente cuantitativos.

En cuanto a su alcance, la investigación se caracteriza como un estudio descriptivo–interpretativo, ya que busca identificar y caracterizar las estrategias cognitivas presentes en las respuestas de los estudiantes, interpretarlas a la luz de referentes teóricos (Rico, Ellis y otros autores del pensamiento variacional) y comprender cómo dichas estrategias se relacionan con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Asimismo, el estudio adopta elementos propios de un diseño de estudio de caso, en tanto se centra en un grupo particular de estudiantes de grado séptimo y analiza de manera detallada su

desempeño frente a una secuencia de tareas específicas, incluyendo el uso de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA). Este enfoque permite observar fenómenos educativos situados, reconociendo la singularidad de las respuestas y la importancia del contexto escolar.

3.2. Fases de la Investigación:

De acuerdo con lo anterior, en este ejercicio investigativo se llevarán a cabo cuatro fases claves para asegurar una implementación y análisis efectivo del estudio. La primera fase comprende una síntesis de cómo se va a recolectar la información en relación con la temática de estudio, la problemática y cómo estas se articulan de acuerdo al sentido que se pretende dar como parte del trabajo; en la segunda fase se hará una caracterización detallada de la institución educativa donde se implementará la propuesta de investigación, describiendo aspectos que permiten contextualizar el espacio donde se llevará a cabo la implementación. Además, se presentará un perfil demográfico y socioeconómico de la población, seguido de la selección y descripción de la muestra que participará en el estudio.

Como tercer momento, se detalla la adaptación de una secuencia didáctica a un objeto virtual de aprendizaje (OVA), para ello se tiene en cuenta los siguientes elementos: planificación y análisis de necesidades, el diseño de la secuencia, la implementación con apoyo del OVA y en la cuarta fase se tiene la recolección de datos y su análisis cualitativo, analizando los pormenores obtenidos la relación con la problemática y la caracterización de lo realizado por los estudiantes

3.2.1. Fase 1: Documentación y Articulación de la Información Sobre el Tema

Para desarrollar esta investigación se tuvo en cuenta diferentes aspectos curriculares, matemáticos y didácticos. Partiendo de los estándares básicos de competencia que brindan caminos para trabajar la variación y los lineamientos curriculares, por otra parte, está la selección

de documentos que presentan y agrupan las dificultades que mayormente presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, luego, se analizan diferentes propuestas didácticas que apuntan a disminuir dichas dificultades, llegando así a identificar aportes relevantes como el del Early Álgebra y el trabajar con la generalización de patrones geométricos. Finalmente, se toma en consideración la adaptación de una secuencia didáctica a un objeto virtual de aprendizaje, debido a las ventajas que se presentan al trabajar con las tecnologías de la información en la educación. Ventajas, por ejemplo, un ambiente más interactivo para los estudiantes que permite llamar la atención y mantenerlos enfocados, además, de herramientas de arrastre o deslizadores que generan una mayor visualización a comparación del trabajo con lápiz y papel.

3.2.2. Fase 2: Caracterización de la Institución

El colegio Centro Docente Parroquial San Marcos se encuentra ubicado en carrera 1c3 #79 - 01 de la ciudad de Cali, en el departamento del Valle del Cauca, Colombia. Esta institución educativa hace parte de la fundación San Isabel de Hungría y ofrece educación básica y secundaria, esta escuela ha sido parte integral del sistema educativo de la ciudad y la región. La institución cuenta con un cuerpo docente y administrativo comprometido con la educación y el desarrollo integral de los estudiantes y cuenta únicamente con una jornada en la mañana.

Los estudiantes del colegio Centro Docente Parroquial San Marcos en Cali, Valle del Cauca, reflejan la diversidad cultural y socioeconómica. Muchos muestran una notable resiliencia frente a las adversidades, demostrando determinación para superar obstáculos. Participan activamente en actividades extracurriculares, como deportes y clubes académicos. Además, están familiarizados con la tecnología, tienen una variedad de aspiraciones futuras, desde continuar estudios universitarios hasta ingresar al mundo laboral, proyectarse como

deportistas o emprender proyectos personales. La institución juega un papel importante en apoyarlos para alcanzar estas metas.

Este proyecto se va a enfocar en los estudiantes de séptimo grado, aprovechando que uno de los autores de esta investigación labora en la institución y con los grados de interés. Además, se tiene en cuenta el grado séptimo porque es donde los estudiantes empiezan a tener un acercamiento al álgebra, por ende, empiezan a desarrollar su pensamiento variacional y más precisamente el pensamiento algebraico. Por esta razón, se considera pertinente implementar en grado séptimo de la educación secundaria y en dicha institución.

3.2.3. Fase 3: Adaptación de la Secuencia Didáctica

Se realizó una adaptación de la tarea 3 que se encuentra en la secuencia didáctica, al formato de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), con el propósito de integrar recursos digitales que facilitarán la exploración, representación y generalización de patrones geométricos. En esta etapa se reorganizaron las actividades, se diseñaron interacciones dinámicas y se incorporaron apoyos visuales que guiaron progresivamente al estudiante desde el reconocimiento del patrón. La integración del OVA permitió enriquecer la propuesta pedagógica, al ofrecer un entorno flexible y accesible que favoreció el aprendizaje autónomo, el desarrollo del pensamiento variacional y la transición hacia formas más abstractas de razonamiento algebraico.

3.2.3.1. Secuencias Sobre Generalización de Patrones. El diseño de la secuencia didáctica implementada en esta investigación se fundamentó en la adaptación de dos propuestas originales que han trabajado de manera sistemática la generalización de patrones geométricos: la secuencia elaborada por Pulido (2021) ([ver anexo #3](#)) en su tesis de maestría llamada *Una introducción a la generalización de patrones geométricos a partir de una secuencia de*

enseñanza online, y el conjunto de actividades presentado en el documento *Generalización de patrones geométricos: una propuesta para el aula* (Arredondo et al., 2013) ([Ver anexo #2](#)).

Ambos trabajos constituyen referentes sólidos en el campo de la educación matemática, pues abordan la transición entre la aritmética y el pensamiento algebraico mediante tareas centradas en la identificación, representación y generalización de regularidades.

En concordancia con el marco teórico previamente expuesto, estas secuencias retoman elementos esenciales del estudio de los patrones y de la generalización, entendidos como procesos clave para introducir a los estudiantes en el pensamiento variacional. Como lo proponen autores como Rico (1997) y Ellis (2007), el trabajo con patrones, especialmente los geométricos permiten articular diferentes formas de razonamiento: desde la percepción del cambio, la búsqueda de invariantes y la identificación de estructuras, hasta la formulación de reglas generales que trascienden los casos particulares. Precisamente, las dos secuencias originales se alinean con esta perspectiva, al proponer problemas que favorecen el tránsito progresivo desde el reconocimiento visual de una secuencia hacia la producción de conjeturas y expresiones algebraicas que modelan la relación entre la figura y su posición.

La primera secuencia de origen revisada y considerada, desarrollada por Pulido (2021), se caracteriza por su enfoque gradual y su implementación en modalidad virtual. Sus actividades están organizadas en sesiones que abordan patrones geométricos de creciente complejidad, tales como configuraciones de hexágonos, estructuras repetitivas con bloques y construcciones modulares que invitan a identificar cambios constantes entre términos. Su estructura combina tres intenciones centrales que son: favorecer la observación de regularidades visuales; promover la producción de explicaciones verbales y tabulares; y conducir al estudiante hacia la formulación de reglas generales, tanto aditivas como funcionales. Las tareas originales de esta

propuesta fueron diseñadas para fomentar, de manera explícita, estrategias de razonamiento directo e inverso y, por ello, resultaron un referente adecuado para nuestro propósito.

La segunda fuente, el documento *Generalización de patrones geométricos: una propuesta para el aula* (Perez, 2022), presenta un conjunto variado de actividades que trabajan patrones a partir de configuraciones como escaleras, cuadrículas, arreglos de puntos y construcciones con palitos. Los autores proponen un tratamiento que integra diversas representaciones, diagramas, tablas, descripciones verbales y expresiones algebraicas, articulando así los procesos de expresar, registrar y validar, coincidiendo con lo planteado en el marco teórico respecto a la necesidad de coordinar registros para mejorar el pensamiento algebraico inicial (Duval, 2006). La estructura de estas actividades busca, ante todo, que el estudiante analice el patrón desde su organización interna, identificando qué elementos permanecen constantes y cuáles varían, enfoque alineado con la noción de estructura del patrón destacada por Rico y con los mecanismos de generalización descritos por Ellis.

A partir del análisis de ambas propuestas, se seleccionaron y reorganizaron tareas que respondieran directamente a los objetivos de esta investigación. Aunque se conservaron las ideas matemáticas fundamentales de las secuencias originales, se realizaron adaptaciones en la redacción de algunas de las preguntas y/o actividades, el orden de progresión, el nivel de guía ofrecido, la inclusión de preguntas intermedias y la incorporación de representaciones adicionales. De esta manera, las actividades fueron ajustadas para favorecer un desarrollo coherente con la necesidad de abordar los cuatro procesos de la generalización que se asumieron como eje de la nueva secuencia que surge en este trabajo: identificación, expresión, registro y validación, los cuales representan componentes esenciales del pensamiento variacional y del desarrollo del razonamiento algebraico temprano.

Para el análisis vamos a tener en cuenta a Rico (1997), donde podemos identificar las siguientes categorías:

Tabla 1.

Categorías de generalización según Rico

Categoría según Rico	Descripción del aporte teórico	Qué se observa en los estudiantes (ejemplos de tu análisis)
1. Reconocimiento de la estructura del patrón	Identificación de la regularidad visual y organización de la figura en partes constantes y partes variables (Rico, 1997).	- La mayoría reconoce incrementos simples. - Algunos describen solo por conteo sin identificar estructura. - Dificultades en secuencias no lineales.
2. Establecimiento de relaciones entre términos	Comprensión del crecimiento entre una figura y la siguiente; comparación de términos consecutivos o no consecutivos.	- Comparan figura 1 con figura 2, pero pocos verifican con figura 3 o 4. - Algunos expresan relaciones como “aumenta en dos bloques en los lados”.
3. Representaciones múltiples	Uso coordinado de registros: gráfico, verbal, tabular y algebraico (Rico, 2016).	- Predominio de explicaciones verbales y dibujos. - Uso limitado de tablas. - Expresiones algebraicas solo en estudiantes con mayor dominio.
4. Descripción del patrón (nivel de formalización)	Nivel de precisión en la explicación: desde narrar lo que ven hasta justificar propiedades del crecimiento.	- Estudiantes describen “crece igual”, pero pocos justifican por qué. - Falta conectar características visuales con propiedades numéricas.
5. Formulación de la regla de generalización	Creación de una expresión que funcione para cualquier término y no solo para los primeros casos.	- La mayoría propone reglas para casos específicos. - Algunos intentan expresar una regla general, pero sin validarla. - Solo unos pocos verifican su expresión con otros términos.
6. Validación de la generalización	Comprobación de que la regla funciona para todo n mediante sustitución o argumentación (Rico, 2016).	- Muy pocos validan su fórmula. - La validación se hace solo con ejemplos cercanos ($n=4$ o $n=5$).

7. Desarrollo del pensamiento variacional	Capacidad de analizar cómo cambian las cantidades y cómo se relacionan (base del pensamiento funcional).	- Avances en reconocer el crecimiento. - Dificultad en explicar <i>por qué</i> crece así. - Tránsito incompleto entre lo geométrico y lo simbólico.
---	--	---

Fuente: Elaboración propia

También, tomando como referencia a Ellis (2007), el análisis consideró las dos dimensiones de generalización:

Tabla 2.
Categorías de generalización según Ellis

Taxonomía de las Generalizaciones según Amy Ellis (2007)				
Dimensión	Categoría principal	Subcategorías	Descripción general	Ejemplo ilustrativo (simplificado)
Acciones de generalización	Relacionar	relacionar situaciones	El estudiante establece conexiones entre problemas, contextos o representaciones que percibe como similares.	“Esto es como el problema de las piscinas de ayer.”
		relacionar objetos		
	Buscar	Buscar la misma relación	El estudiante repite acciones (como calcular, comparar o verificar) con el fin de hallar un elemento de semejanza.	Si divido los segundos por los metros, me da el mismo número cada vez.”
		Buscar el mismo procedimiento		
		Buscar el mismo patrón		
		Buscar el mismo resultado		
	Extender	Expandir el rango de aplicación	El estudiante amplía su razonamiento más allá del caso dado, creando una	“Esto no solo sirve con triángulos, también con cualquier
		Quitar detalles particulares		

		Operar sobre relaciones	estructura más general o una nueva relación.	polígono regular.”
		Continuar patrones		
Generalizaciones de reflexión	Identificaciones o enunciados	Fenómeno continuo	El estudiante verbaliza o escribe su generalización: reconoce un patrón o una propiedad común.	“Cada vez que x aumenta en 1, y aumenta en 3.”
		identificación de semejanza		
		Principios generales		
		Definiciones	El estudiante formula una definición o principio que describe la esencia de un patrón, clase o relación.	“Una función lineal es cuando la razón entre las variables es constante.”
		Influencia		
		Aplicar una idea o estrategia previa	El estudiante usa o adapta una generalización anterior para resolver una nueva situación.	“Esto se parece al ejercicio de ayer, pero ahora hay una constante diferente.”
		Modificar una idea anterior		

Fuente: Ellis 2007

De manera conjunta, las propuestas de Rico (1997) y Amy Ellis (2007) permiten comprender de manera más profunda la complejidad que implica trabajar la generalización de patrones en la educación básica y su relevancia para el desarrollo del pensamiento variacional. Ambas perspectivas ofrecen marcos conceptuales que, aunque se originan en tradiciones distintas dentro de la didáctica de la matemática, convergen en un punto fundamental: la generalización no es un producto final que se obtiene mecánicamente, sino un proceso cognitivo que exige identificar regularidades, establecer relaciones, movilizar representaciones y construir reglas que trasciendan casos particulares.

Desde el enfoque planteado por Rico (1997), se reconoce que la comprensión estructural de un patrón constituye el punto de partida indispensable para cualquier intento de generalización. Sus elementos, el reconocimiento de la estructura del patrón, las relaciones entre términos y la formulación de reglas, ponen de manifiesto que los estudiantes requieren transitar progresivamente desde una observación intuitiva hacia una organización formal del comportamiento del patrón. La propuesta de Rico destaca, además, que esta progresión se sostiene mediante tareas cuidadosamente diseñadas que favorezcan la articulación entre lo visual, lo numérico y lo simbólico. Por ello, su enfoque resulta especialmente pertinente para el trabajo con secuencias geométricas, en las que la estructura figura por figura funciona como un andamiaje conceptual para la posterior producción algebraica.

Por su parte, la perspectiva de Amy Ellis (2007) amplía esta comprensión al subrayar los mecanismos mediante los cuales los estudiantes construyen y justifican generalizaciones. Conceptos como generalización inductiva, generalización relacional y justificación estructural permiten analizar no solo el producto de las respuestas, sino los caminos cognitivos que los estudiantes recorren para arribar a ellas. Ellis introduce la importancia de la validación, tanto interna como externa, invitando a reconocer si las reglas construidas se sostienen ante múltiples casos y si son coherentes con la estructura del patrón. De esta manera, la propuesta de Ellis ofrece herramientas para diferenciar niveles de sofisticación en la generalización, permitiendo observar cuándo un estudiante se queda en un razonamiento aditivo local y cuándo logra avanzar hacia una expresión algebraica global y funcional.

La articulación de ambos enfoques resulta particularmente útil para orientar la lectura y el análisis del comportamiento de los estudiantes frente a las secuencias propuestas en este estudio. Mientras Rico (1997) aporta un marco centrado en la estructura del patrón y las representaciones

asociadas, Ellis (2007) proporciona categorías que explican cómo los estudiantes avanzan de la observación a la construcción de reglas generalizables y justificadas. Considerados en conjunto, estos marcos permiten establecer criterios más precisos para valorar el nivel de comprensión mostrado por los estudiantes, identificar obstáculos persistentes y reconocer los avances significativos en su tránsito hacia formas de pensamiento propias del álgebra temprana.

3.2.3.2. Estructura de la secuencia. La estructura de la secuencia didáctica que surge de un ejercicio de revisión y análisis de las propuestas de (Pulido Orellano, 2021) y (Perez, 2022) se organiza de manera coherente con las tareas propuestas para el estudio y generalización de patrones, articulando progresivamente actividades de identificación, expresión, registro y validación.

Tabla 3.
Estructura de la secuencia

Tarea	Actividad	Etapas
1	1 y 2	Percibir un patrón: Toda la tarea 1 gira en torno a que el estudiante sea capaz de percibir el patrón o identificar el patrón que modela la secuencia, también el estudio del cambio, al momento de identificar de la manera en la que cambia.
2	3, 4 y 5	Expresar un patrón: Si bien esta etapa está ligada a la anterior, por medio de algunas preguntas se estaría trabajando la etapa donde los alumnos deben expresar el patrón que lograron identificar, dado que se enfocan en la verbalización de las relaciones. Registrar un patrón: Estas actividades permiten que los estudiantes registren las relaciones que encontraron, este ejercicio lo pueden realizar por medio de diferentes registros de representación.
3	6 y 7	Registrar un patrón: Estas actividades permiten que los estudiantes registren las relaciones que encontraron, este ejercicio lo pueden realizar por medio de diferentes registros de representación.

Probar la validez: En esta última tarea se presenta el proceso de validación puesto que se le pide a los estudiantes que escriban expresiones que modelan la situación, esto conlleva que los estudiantes deben probar la veracidad de aquellas conjeturas.

Fuente: Elaboración propia

En este sentido, las tareas se distribuyen conforme al nivel de complejidad cognitiva que requieren, comenzando por la tarea 1 que está centrada en la percepción del patrón y el reconocimiento del cambio, siguiendo hacia la tarea 2 en la cual se trabaja la expresión verbal y tabular de las regularidades, y culminando en la tarea 3 con la formulación de reglas generales y la validación de conjeturas. Esta organización permite que el estudiante transite desde un análisis intuitivo, basado en lo perceptivo, hasta una comprensión más estructurada que incorpora representaciones múltiples y razonamientos propios del pensamiento variacional. La tabla de relación entre tareas, actividades y etapas evidencia este diseño progresivo, donde cada fase prepara conceptualmente la siguiente, asegurando que el aprendizaje fluya de manera articulada y gradual.

En cuanto a la relación con el Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), solo la tarea 3 que la comprende dos actividades, fueron integradas a este recurso digital. La inclusión del OVA en esta fase responde a la necesidad de brindar al estudiante un entorno interactivo que favorezca la manipulación dinámica de las figuras, la visualización del crecimiento y la verificación instantánea de conjeturas, elementos clave para la etapa de registro y especialmente para la fase de validación del patrón. Mientras que las actividades anteriores se desarrollan en formato impreso, priorizando la observación, el dibujo, el conteo y la construcción de tablas, las actividades del OVA permiten explorar los patrones desde una perspectiva más analítica y generalizable, apoyada en herramientas tecnológicas que potencian la comprensión estructural.

3.3. Planificación y análisis de necesidades

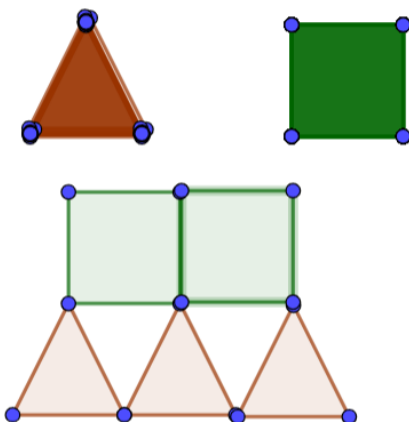
Como punto de partida para la adaptación se definen los objetivos educativos que se desean alcanzar y analizar de la secuencia didáctica original, para identificar los elementos clave de esta y que deben ser incluidos en el OVA que será apoyo para el ejercicio.

3.3.1. *Diseño del objeto virtual de aprendizaje*

En este momento, los contenidos se organizan en módulos temáticos para facilitar la progresión de la secuencia, para ello, se estructuró la secuencia en cuatro módulos fundamentales: *identificación, expresión, registro y validación*. Cada uno de ellos responde a una fase específica del razonamiento variacional, permitiendo que el estudiante avance desde la observación inicial del patrón hasta la formulación de una regla general. Este diseño modular asegura que los aprendizajes se construyan de manera gradual, articulando las demandas cognitivas de menor a mayor complejidad, tal como sugieren autores como Rico y Ellis en relación con las transiciones entre lo perceptivo, lo relacional y lo generalizable. Así, el OVA no solo organiza contenidos, sino que delimita un itinerario de aprendizaje que guía al estudiante en el desarrollo de estrategias cada vez más estructuradas. por ejemplo, la actividad 6:

Ilustración 3.
Actividad 6 diseñada en el OVA

Mueve las figuras (triángulos y cuadrados) para realizar las secuencias presentadas en la hoja.



Para potenciar esta progresión, el OVA incorpora actividades interactivas diseñadas específicamente para cada módulo, apoyadas en imágenes manipulables que favorecen la comprensión progresiva del patrón, permitiendo al estudiante visualizar el crecimiento de la secuencia, contrastar hipótesis y recibir retroalimentación por parte del docente. Estos recursos cumplen una función doble: por un lado, fortalecen la exploración visual y la observación detallada del patrón, y por otro, facilitan la transición hacia representaciones simbólicas y tabulares, aspectos clave en el pensamiento variacional. En este sentido, el OVA se convierte en un mediador didáctico que articula la experiencia concreta con la abstracción matemática, promoviendo un aprendizaje autónomo, dinámico y coherente con los requerimientos de la secuencia didáctica diseñada.

Ahora bien, el recurso se realizó en GeoGebra, permitiendo que los estudiantes interactúen de manera dinámica manipulando sus elementos para observar cambios, establecer relaciones y generar conjeturas a partir de sus exploraciones. Gracias a esta manipulación, se busca que los estudiantes puedan identificar patrones, expresarlos con claridad, registrarlos de

forma organizada y finalmente validarlos, de modo que el propio recurso se convierta en un medio que favorece el razonamiento, la experimentación y la consolidación de ideas matemáticas. Los enlaces para ingresar a las actividades generadas en OVA son:

- Actividad 6: <https://www.geogebra.org/classic/xum2uent>
- Actividad 7: <https://www.geogebra.org/classic/xum2uent>

3.3.2. Implementación de la secuencia con apoyo del OVA

Durante la implementación de la secuencia se trabajó con un grupo de 17 estudiantes de séptimo grado del colegio Centro Docente Parroquial San Marcos. A cada uno se le entrega el material en hojas de block y también se utilizó computadores y un proyector cuando se llegó a la parte del recurso en GeoGebra, su desarrollo se demoró dos sesiones una de 3 horas y la otra de 2 horas, el trabajo era individual, pero cada vez que todo el grupo responde una actividad el docente permite a los estudiantes socializar sus respuestas.

Para la segunda parte de la secuencia didáctica era necesario que los estudiantes trabajarán en computadores, debido al recurso en GeoGebra, sin embargo, no había la cantidad suficiente para todos, por esta razón se utilizó un proyector para que todos pudieran participar.

La secuencia cuenta con una estructura de tareas y actividades, donde en una tarea hay varias actividades, cabe resaltar, que esta es de carácter ascendente en cuanto a la dificultad de las preguntas. Cuenta con 3 tareas y 7 actividades para un total de 35 preguntas y desde la actividad 6 y 7 se utiliza GeoGebra.

Por otra parte, el docente participó activamente en todo el proceso, presentando las instrucciones, guiando cada fase mediante explicaciones claras, acompañando el trabajo del grupo y resolviendo dudas cuando era necesario.

Se presenta el recurso a los estudiantes y se les da un tiempo de exploración para que se familiaricen con los comandos y herramientas internas de la secuencia relacionados con el OVA. Es importante que realicen las actividades en parejas para que realicen intercambios de ideas y puedan avanzar en cada etapa de la actividad.

3.4. Fase 4: Análisis de los resultados y conclusiones

Esta fase se orienta al examen minucioso de la información recopilada durante la aplicación de la propuesta didáctica, con el propósito de reconocer las estrategias cognitivas que ponen en juego los estudiantes cuando trabajan en actividades de generalización de patrones. Con base en los datos obtenidos, producciones escritas, interacciones en el Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) y notas de clase se lleva a cabo un análisis cualitativo que permite ordenar, clasificar y comprender las respuestas de los participantes.

El proceso analítico se apoya en categorías establecidas previamente desde el marco conceptual (por ejemplo, identificación de patrones, uso de distintos tipos de representaciones, paso de lo numérico a lo algebraico y verificación de reglas). Asimismo, se consideran categorías nuevas que emergen durante la revisión inicial del material, lo que facilita describir comportamientos recurrentes, dificultades y progresos relacionados con el pensamiento variacional.

Esta etapa concluye con la formulación de conclusiones vinculadas directamente con los objetivos de la investigación, resaltando los aprendizajes evidenciados, los elementos que favorecieron la comprensión y las limitaciones encontradas en la puesta en práctica.

3.4.1. Recolección de datos

La recolección de datos se realizó durante la implementación de la secuencia didáctica y el desarrollo del Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA). Para ello se utilizaron diversos instrumentos que permitieron obtener información amplia sobre el desempeño y las estrategias de los estudiantes al trabajar con tareas de generalización de patrones.

En primer lugar, se recopilaron producciones escritas de los estudiantes, derivadas de las actividades propuestas tanto en el aula como en el OVA. Estas evidencias incluyen procedimientos, representaciones, explicaciones y posibles generalizaciones formuladas por los participantes.

En el entorno digital, el OVA permitió obtener interacciones y respuestas automatizadas, como elecciones, pasos seguidos, tiempos de respuesta y registros de navegación, las cuales aportan información adicional sobre cómo los estudiantes enfrentan las tareas cuando trabajan de manera autónoma.

La recolección de estos datos se llevó a cabo en varias sesiones distribuidas en el tiempo, siguiendo la secuencia didáctica planificada. Todos los registros fueron organizados y almacenados garantizando la confidencialidad de los estudiantes y el uso exclusivo con fines investigativos.

3.4.2. Resultados y análisis de resultados

Se aplicaron métodos de análisis cualitativo para comprender mejor la experiencia de los estudiantes y por ende reconocer y caracterizar las estrategias que utilizan a la hora de resolver los problemas propuestos, apoyándonos de referentes que permitan realizar un análisis profundo.

El análisis de los datos obtenidos permitió caracterizar la comprensión que los estudiantes desarrollaron frente a las secuencias de patrones geométricos propuestas. Esta revisión se realizó tomando como marco los aportes teóricos de Rico (1997, 2016) acerca del pensamiento variacional y el estudio de patrones, así como las categorías de generalización planteadas por Ellis (2007, 2011), lo que permitió interpretar con mayor precisión las estrategias cognitivas empleadas por los estudiantes.

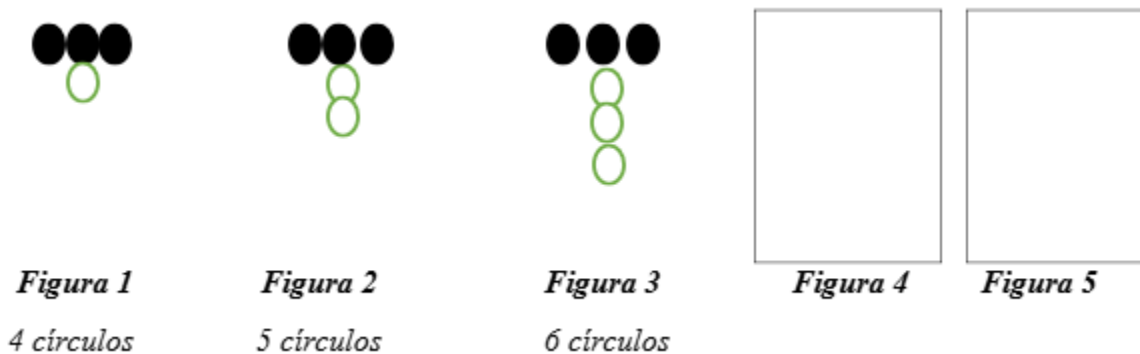
Para analizar las producciones de los estudiantes se tomaron como referencia los aportes de Rico sobre el estudio de patrones y el desarrollo del pensamiento variacional. Este enfoque permite examinar cómo los estudiantes reconocen la estructura del patrón, establecen relaciones entre los términos, utilizan diferentes representaciones y avanzan hacia la formulación y validación de reglas generales. A partir de estas categorías se organizó la información obtenida en la implementación, lo que permitió identificar tendencias, dificultades y niveles de comprensión presentes en la resolución de patrones geométricos. A continuación, se presenta un análisis de las respuestas a la secuencia con una muestra de 18 estudiantes de séptimo grado.

Tarea 1: Descubriendo los cambios y regularidades.

Actividad 1: La “T” que crece

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 1, en el caso de la Actividad 1, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #1 que decía:

A continuación, observa la forma representada por círculos negros y en blanco y la manera como esta cambia al agregar círculos, obteniéndose cada figura:



1. Completa la secuencia dibujando las figuras 4 y 5 y escribe la cantidad total de círculos que tiene cada una:

Figura 4= _____

Figura 5= _____

En la actividad previa en “La T que crece”, se pretendía que los estudiantes identificaran el patrón de crecimiento en una secuencia de figuras formadas por círculos y expresarán la cantidad total de círculos en las figuras 4 y 5. El propósito era promover la observación de regularidades. En este caso se debía completar el número de círculos de color negro y los de color blanco, de acuerdo con el orden en que aumentaba la secuencia gráfica. En este caso se obtuvieron las siguientes respuestas:

Tabla 4.
Tipo de respuestas pregunta 1

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Los estudiantes que completaron la gráfica fueron 18 que corresponde a un (100%)	Estudiantes que completaron la gráfica y escribieron el número de círculos	Estudiantes que completaron la gráfica y escribieron el número pero no contextualizan
Los estudiantes que no completaron la gráfica fueron 0	Estudiantes que no completaron la gráfica y escribieron correctamente el número de círculos	Estudiantes que no completaron la gráfica y tampoco escribieron correctamente el número de círculos

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con lo anterior, puede señalarse que, del total de estudiantes, el 83% respondió de manera adecuada, indicando la cantidad y acompañándola con una explicación pertinente, lo que evidencia comprensión del patrón aditivo y una comunicación matemática clara. Por otro lado, el 17% restante solo escribió los números sin ofrecer una explicación adicional. Aunque sus respuestas son correctas desde el punto de vista numérico, muestran un menor nivel de elaboración en la forma de expresar sus ideas.

De lo anterior, se concluye que la mayoría de los estudiantes logró reconocer y continuar el patrón de manera adecuada, mostrando avances en la identificación de regularidades. No obstante.

En el caso de la pregunta #2, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

2. *¿Qué elementos (círculos) de cada figura permanecen siempre igual? ¿Cuántos círculos tiene?*

R//

Para esta pregunta se buscaba que los estudiantes identificaran los elementos que permanecen constantes en cada figura, tanto en cantidad como en color. Con esta pregunta se pretendía que los estudiantes reconocieran la parte invariable del patrón, aspecto fundamental para avanzar en la comprensión estructural de una secuencia y en la transición hacia el pensamiento algebraico. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 5.
Tipo de respuestas pregunta 2

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta fueron 7 que corresponde al 36% del total	Identificaron correctamente la cantidad de círculos que permanecen constantes	Indicaron correctamente el color de los círculos que no cambian
La cantidad de estudiantes que respondieron parcialmente la pregunta fueron 8 y corresponde al 45%	7 estudiantes mencionaron solo la cantidad, sin relacionarla con el color (36%)	2 estudiantes mencionaron solamente el color, pero no expresaron la cantidad (9%)
La cantidad de estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta es de 3 (18%)	No identificaron la cantidad de círculos constantes	No identificaron el color de los círculos constantes

Fuente: Elaboración propia

El 36% respondieron de manera completa y correcta, indicando tanto la cantidad de círculos que permanecen iguales como su color. Otros 45% mencionaron únicamente la cantidad de círculos, sin relacionarla con el color, mientras que un 9% señaló el color, pero no expresó la cantidad correspondiente. Finalmente, dos estudiantes 18% no identificaron correctamente ni el color ni la cantidad de los círculos que permanecen constantes.

Estos resultados muestran que poco más de un tercio del grupo logró reconocer de manera integral la invarianza del patrón, mientras que el resto presentó distintas dificultades en la descripción o interpretación de las características fijas.

En el caso de la pregunta #3, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

3. *¿Es posible afirmar que cada figura aumenta en 3 círculos sucesivamente?* argumenta tu respuesta.

R//

Se planteaba si era posible afirmar que cada figura aumentaba en tres círculos sucesivamente, solicitando además una justificación. Esta pregunta tenía como propósito que los estudiantes razonaran sobre la regularidad de crecimiento, pasando del conteo directo a una argumentación basada en la observación del patrón numérico.

Tabla 6.
Tipo de respuestas pregunta 3

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta fueron 3 (17%)	Identificaron correctamente que aumenta de 1 en 1	Contextualizaron usando la palabra “círculos”
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente pero sin contextualizar fue del 50% que corresponde a 9 alumnos	Indicaron correctamente que aumenta de 1, solo con número	No usaron la palabra “círculos”
Estudiantes que respondieron incorrectamente fueron 3 (17%)	Afirmaron que aumenta de 3 en 3	
Estudiantes que respondieron de forma incompleta fueron 3 (17%)	Dijeron que “aumenta cada vez” sin especificar cuánto	No afirmaron ni negaron la proposición

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con lo anterior, el 17% de los estudiantes respondieron correctamente y contextualizaron su respuesta indicando que cada figura aumenta en un círculo. Otros 50% también identificaron correctamente el incremento de un círculo por figura, aunque no contextualizan su respuesta, limitándose a escribir solo el número. Por otro lado, 17% respondieron de forma incorrecta, afirmando que la figura aumentaba de tres en tres, mientras que otro 17% reconocieron que las figuras crecían, pero sin especificar la cantidad de círculos ni afirmar o negar la proposición planteada.

Estos resultados reflejan que cerca de dos tercios del grupo comprendió adecuadamente la estructura aditiva del patrón, aunque con diferentes niveles de formalización en su expresión. Las respuestas no esperadas o incompletas evidencian dificultades para interpretar la relación de crecimiento y para argumentar con precisión matemática.

En el caso de la pregunta #4, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

4. ¿Cuántos círculos negros tendrá la figura 10 si se desea dibujar? ¿Cuántos círculos blancos? ¿Cuántos círculos tendrá en total? Explica cómo lo has averiguado:

R//

Círculos negros: ____

Círculos blancos: ____

Total de círculos: ____

Justificación:

En la cuarta pregunta se pedía determinar cuántos círculos negros, blancos y en total tendría la figura 10, además de explicar cómo se había llegado a esa conclusión. El propósito de esta pregunta era promover la generalización del patrón, pasando del reconocimiento visual a la predicción de un término no representado, lo cual constituye un avance importante hacia la expresión funcional en el pensamiento algebraico.

Tabla 7.

Tipo de respuestas pregunta 4

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta fueron 2 (11%)	Respondió correctamente las cantidades	Identificó que la secuencia aumenta de 1 en 1, aunque sin contextualizar ni justificar

La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente pero con justificación parcial fue de 2 (11%)	Calculó bien las cantidades	Indicó que solo los círculos blancos aumentan, pero no explicó el procedimiento
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente pero sin argumentar es de 5 (27%)	Indicaron correctamente cantidades de círculos negros, blancos y totales	Describieron resultados sin justificar el proceso
La cantidad de estudiantes que respondieron parcialmente la pregunta es de 8 (44%)	Acertaron el número total de círculos	Dijeron que aumenta de 1 en 1, pero no especificaron qué círculo crece ni qué ocurre con los negros
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta es de 2 (11%)	Cantidades incorrectas por agregar círculos que no corresponden	No reconocieron el patrón lineal de crecimiento

Fuente: Elaboración propia

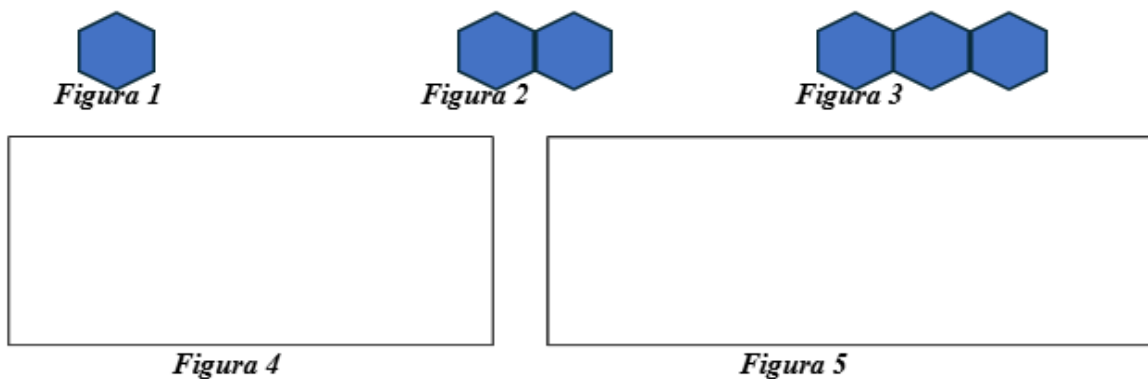
Un 11% respondió correctamente las cantidades y describió que la secuencia aumenta de uno en uno, además de reconocer que los tres círculos de arriba permanecen iguales sin especificar el color ni la orientación, tampoco explicó el procedimiento utilizado. Otro 11% también acertó en las cantidades y justificó que sólo los círculos blancos aumentan, pero tampoco especificó su razonamiento. Asimismo, 27% respondieron correctamente las cantidades de círculos negros, blancos y totales, aunque se limitaron a describir los resultados sin argumentar el proceso seguido. Por su parte, 44% identificaron correctamente el número total de círculos y mencionaron que la secuencia aumenta en uno por figura, pero no precisaron qué tipo de círculo era el que crecía ni justificaron qué ocurría con los círculos negros. Finalmente, un 11% de los estudiantes se equivocaron en las cantidades, pues agregó más círculos de los correspondientes, evidenciando que no reconoció que el patrón crece de manera lineal.

En términos generales, los resultados muestran que la mayoría del grupo logró identificar la regularidad del crecimiento y calcular correctamente la cantidad de círculos de la figura 10, aunque persisten dificultades en la argumentación y justificación del procedimiento. Esto evidencia que, si bien los estudiantes logran observar la regularidad, aún no son capaces de expresar con claridad la regla general que la gobierna.

Actividad 2: Construyendo la colmena

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 1, en el caso de la Actividad 2, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #5a que decía:

Como vemos, la siguiente secuencia de figuras se asemeja a la construcción de una colmena de abejas. Para empezar, se necesitan seis segmentos de recta para construir el hexágono de la figura 1, once segmentos para construir la figura 2 (formada por dos hexágonos) y dieciséis segmentos para construir la figura 3 (formada por tres hexágonos), organizados así:



De acuerdo con lo anterior, responde las preguntas 5 a 8:

5a. Considerando la forma en que aumenta el número de segmentos y cambian las figuras 1 a 3, dibuja las figuras 4 y 5 en los cuadros y responde:

a. ¿Cuántos segmentos se necesitan para construir cada una de las figuras?

Figura 4: _____

Figura 5: _____

Se buscaba que los estudiantes identificaran la regularidad en el número de segmentos necesarios para construir cada figura de la secuencia de hexágonos, y que completaran las figuras

4 y 5 con sus respectivas cantidades. El objetivo era que los estudiantes reconocieran el patrón de crecimiento numérico a partir de una representación geométrica, fortaleciendo así la capacidad de generalizar relaciones entre la figura y el número de elementos que la conforman.

Tabla 8.

Tipo de respuestas pregunta 5a

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta es el 44% que equivale a 8 estudiantes	Calcularon correctamente la cantidad de segmentos	Contextualizaron usando el término “segmentos”
La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente pero sin contextualizar fue de 6 que corresponde al 33%	Calcularon correctamente la cantidad	No usaron la palabra “segmentos”; uno justificó el patrón diciendo que aumenta “5 lados” (término incorrecto)
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta es de 2 y corresponde 17%	Uno dijo que aumentaba de 6 en 6 sin dar respuesta final	Otro mostró confusión en la descripción del crecimiento

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que la totalidad de los estudiantes elaboró correctamente las figuras 4 y 5, lo que evidencia una adecuada comprensión visual del patrón geométrico. Sin embargo, al momento de expresar el número de segmentos y contextualizar la respuesta, se observaron distintos niveles de desempeño. 44% respondieron correctamente y contextualizan su respuesta, usando adecuadamente el término “segmentos”. Otros 33% también calcularon correctamente la cantidad de segmentos, pero no contextualizan su respuesta; dentro de este grupo, un estudiante justificó su resultado explicando que en cada figura “se aumentan cinco

lados”, mostrando comprensión del patrón, aunque con un error en el uso del término geométrico.

Finalmente, 17% respondieron incorrectamente: uno afirmó que la figura aumentaba en seis unidades, pero no dio la respuesta numérica final, y el otro presentó confusión en la descripción del crecimiento.

En general, los resultados indican que la mayoría de los estudiantes logró identificar el crecimiento lineal del patrón, aunque persisten dificultades en la precisión del lenguaje matemático y en la contextualización de la respuesta.

En el caso de la pregunta #5b, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

5b. ¿Cuánto cambia la cantidad de segmentos empleados para construir las figuras de la 1 a la 5 de manera sucesiva? Explica tu respuesta:

R//

Se buscaba que los estudiantes identificaran el patrón de variación en el número de segmentos que se añaden al construir sucesivamente las figuras de la secuencia. El propósito era que los estudiantes reconocieran la regularidad del crecimiento y pudieran expresar verbalmente el cambio constante entre una figura y la siguiente, fortaleciendo su comprensión de la noción de razón de cambio y su vínculo con la generalización algebraica.

Tabla 9.
Tipo de respuestas pregunta 5b

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

La cantidad de estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta fue del 62% que corresponde a 11 estudiantes.	Identificaron correctamente que el patrón aumenta de 5 en 5	No contextualizaron su respuesta con el término “segmentos”
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta fue el 38% y corresponde a 7 estudiantes	dijeron que aumenta “una figura más” cada vez, confundiendo figura con segmentos	afirmó que aumenta de 6 por los lados del hexágono (interpretación incorrecta del patrón)

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que el 62% respondieron correctamente al identificar que el número de segmentos aumenta de cinco en cinco. No obstante, ninguno de ellos contextualiza su respuesta utilizando el lenguaje geométrico adecuado, es decir, mencionando que el aumento corresponde a *cinco segmentos*. Esto evidencia una comprensión del patrón numérico, pero una dificultad en la precisión conceptual y comunicativa del término matemático requerido.

Por otra parte, el 38% respondieron de forma incorrecta. Dos de ellos afirmaron que el cambio se da “porque se aumenta una figura más cada vez”, mostrando confusión entre la cantidad de figuras y la cantidad de segmentos; mientras que otro estudiante indicó que el aumento es de seis, basándose en el número de lados del hexágono, lo cual evidencia una interpretación literal del elemento geométrico, pero no del crecimiento del patrón.

En la pregunta 6,

6. *¿Cuántos segmentos se necesitarían para construir la figura número 8? Selecciona y argumenta tu respuesta:*

- a. 48
- b. 41
- c. 45
- d. 40

Explica cómo llegaste a la conclusión:

R//

Pedía determinar cuántos segmentos se necesitan para construir la figura número 8 y argumentar la respuesta.

Tabla 10.

Tipo de respuestas pregunta 6

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente: 10 (55%)	Seleccionaron b. 41	Justificaron reconociendo la secuencia 6, 11, 16, ... (crece de 5 en 5); 1 dibujó y contó segmentos
Estudiantes que respondieron incorrectamente por confusión conceptual: 3 (17%)	Seleccionaron a. 48	Justificaron con (6×8) (confusión: multiplicar lados de hexágono por número de hexágonos)
Estudiantes que respondieron incorrectamente por errores de conteo/interpretación: 5 (27%)	Seleccionaron otras opciones o cometieron errores de conteo	No dieron justificación coherente

Fuente: Elaboración propia

El 55% seleccionaron correctamente la opción b. 41, justificando su elección al identificar que la secuencia crece de cinco en cinco (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41). Uno de ellos incluso comentó en la justificación que dibujó la figura y contó los segmentos para comprobar su resultado, mostrando una comprensión visual y numérica de la regularidad.

Por otro lado, 17% respondieron 48, aplicando una multiplicación directa 6×86 bajo la idea de que cada hexágono tiene seis lados, lo que evidencia una confusión conceptual entre la estructura del hexágono y el patrón de crecimiento de la secuencia. Finalmente, 27% respondieron de forma incorrecta debido a errores en el conteo o interpretación incompleta de la regularidad.

En el caso de la pregunta #7, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

7. ¿Cuántos segmentos se necesitarían para construir la figura con 10 hexágonos? Explica tu respuesta:

R//

Pedía determinar cuántos segmentos se necesitan para construir la figura con 10 hexágonos y explicar el razonamiento.

Tabla 11.
Tipo de respuestas pregunta 7

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 10 (55%)	Siguieron la secuencia 6, 11, 16, ... hasta llegar a 51 (crece de 5 en 5)	sumaron de 5 en 5 a partir de la respuesta de la figura 8, conectando ambas preguntas
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta: 8 (45%)	multiplicaron $6 \times 10 = 60$, confundiendo lados del hexágono con el patrón de segmentos	dieron solo la respuesta numérica sin justificar el procedimiento

Fuente: Elaboración propia

55% respondieron correctamente. De ellos, cuatro siguieron la secuencia numérica ya identificada (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51), reconociendo el crecimiento constante de cinco segmentos por figura, mientras que dos a la anterior pregunta que era encontrar la figura 8 le sumaron de a 5 por figura, relacionando la anterior pregunta y esta.

Por otro lado, 45% respondieron de manera incorrecta. Dos de ellos calcularon 60 segmentos, producto de multiplicar 6 por 10, evidenciando la persistente confusión entre el número de lados del hexágono y la cantidad de segmentos necesarios en la secuencia. Los tres restantes dieron una respuesta numérica sin justificación ni explicación del procedimiento seguido, lo que sugiere una comprensión parcial del patrón o una aplicación mecánica sin razonamiento detrás.

En el caso de la pregunta #8, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

8. ¿Existe algún procedimiento matemático que permita conocer la cantidad de segmentos que se necesitan para construir cualquier figura de la secuencia a partir de la información en las primeras figuras? Escríbelo y propón un ejemplo que argumente tu respuesta:

Procedimiento matemático: _____

Ejemplo:

En la pregunta 8, se buscaba que los estudiantes identificaran un procedimiento matemático general que permitiera determinar la cantidad de segmentos necesarios para construir cualquier figura de la secuencia, a partir de la observación de las primeras figuras.

Tabla 12.

Tipo de respuestas pregunta 8

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: (0%)	Ningún estudiante formuló el procedimiento general	Ningún estudiante propuso un ejemplo válido de generalización
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta (100%)	Realizaron suposiciones sin fundamento: palabra “multiplicación”, expresiones ambiguas	Propusieron expresiones incorrectas como “ $m \cdot y =$ resultado”, sin relación con el patrón

Fuente: Elaboración propia

En este caso, ninguno de los estudiantes logró formular correctamente la expresión o el procedimiento.

Se evidencia que los estudiantes no lograron establecer una generalización algebraica ni reconocer la relación funcional entre el número de la figura y la cantidad de segmentos. La mayoría de ellos se limitó a realizar suposiciones simples o incompletas, mencionando operaciones aisladas como “multiplicación” o expresiones sin sentido matemático como “ $m \cdot y =$ resultado”. Esto indica que, aunque comprendieron que existía una regularidad en la secuencia, no lograron traducirla a un modelo matemático formal, como la expresión $S=5n+1$, que representa correctamente la relación observada.

Tarea 2: Explorando patrones

En esta tarea tendrás la oportunidad de analizar diferentes tipos de secuencias y estructuras que crecen de forma ordenada. Además, a partir de representaciones con dibujos, tablas y números, comenzarás a construir expresiones generales que explican cómo se forman estos patrones.

También, empezarás a descubrir reglas generales usando letras y símbolos. Así, poco a poco, estarás desarrollando una nueva forma de pensar matemáticamente.

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 2, en el caso de la Actividad 3, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #9 que decía:

Actividad 3: las escaleras

A continuación, se observan figuras en forma de escalera que se construyen agregando palitos en cada nueva figura. Observa las figuras 2 y 3 y completa las faltantes:



Figura 1

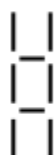


Figura 2

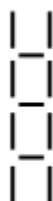


Figura 3



Figura 4



Figura 5

Con la información anterior responde las preguntas 9 a 14:

9. Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 palitos respectivamente, ¿Cuántos palitos se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 y 5 peldaños?

R//

Con 4 peldaños: _____

Con 5 peldaños: _____

En la pregunta 9, los estudiantes debían determinar cuántos palitos se necesitaban para construir una escalera con 4 y 5 peldaños, sabiendo que para 2 y 3 peldaños se requerían 8 y 11

palitos, respectivamente. Este ejercicio buscaba identificar la regularidad de crecimiento en el patrón y aplicar una secuencia numérica aditiva.

Tabla 13.

Tipo de respuestas pregunta 9

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente y justificaron: 5 (27%)	Calculó correctamente: Figura 4 = 14 palitos; Figura 5 = 17 palitos	Explicó que cada peldaño nuevo agrega 3 palitos
Estudiantes que respondieron adecuadamente pero sin justificar: 6 (33%)	Indicaron correctamente 14 y 17, pero solo escribieron los números	No ofrecieron explicación del procedimiento
Estudiantes que respondieron incorrectamente por omisión de horizontales: 3 (17%)	Contaron solo palitos verticales y dieron 10 y 12	No incluyeron los palitos horizontales en el conteo
Estudiantes que respondieron inapropiadamente con número de peldaños: 4 (22%)	Escribieron 4 y 5 (número de peldaños) en lugar de la cantidad de palitos	Confundieron la variable a reportar

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que el 60% respondieron correctamente, logrando identificar que la cantidad de palitos aumenta de 3 en 3 por cada nuevo peldaño, concluyendo así que para la figura con 4 peldaños se necesitan 14 palitos y para la de 5 peldaños, 17 palitos. Sin embargo, solo el 27% contextualizaron su respuesta, explicando que cada peldaño nuevo agrega tres palitos más, mientras que el 33% se limitaron a colocar únicamente los resultados numéricos sin justificación.

Por otro lado, 17% cometieron errores al contar únicamente los palitos verticales, omitiendo los horizontales, por lo que dieron como resultado 10 para la figura 4 y 12 para la figura 5. Finalmente, los 4 estudiantes restantes (17%) respondieron con el número de peldaños (4 y 5) en lugar de la cantidad de palitos, evidenciando una confusión entre el número de elementos de la figura y el patrón de construcción.

En el caso de la pregunta #10a, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

10a. Analizando las gráficas iniciales:

completa la siguiente tabla que relaciona el número de peldaños de una escalera y el total de palitos necesarios para construirla:

<i>Número de peldaños</i>	<i>Total de palitos</i>
1	
2	
3	11
4	
5	
6	

Los estudiantes debían completar una tabla que relacionaba el número de peldaños con el total de palitos necesarios, y luego describir la relación existente entre ambas variables. Esta actividad buscaba consolidar el reconocimiento del patrón de crecimiento y expresar verbalmente la regla general de formación de la secuencia.

Tabla 14.
Tipo de respuestas pregunta 10a

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta (100%)	Completaron correctamente la tabla con los valores de palitos correspondientes a cada número de peldaños	Reconocieron implícitamente que la secuencia crece de 3 en 3

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que la totalidad del grupo 100% completó correctamente la tabla, identificando la secuencia de crecimiento de tres palitos por cada peldaño adicional, lo cual evidencia una adecuada comprensión del patrón numérico.

Sin embargo, al analizar la parte 10b (la justificación de la relación), el desempeño fue más variado, decía:

10b. De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es la relación que existe entre la cantidad de peldaños y el total de palitos que se utilizan para construir las respectivas figuras en forma de escalera? Explica tu respuesta:

R//

Tabla 15.
Tipo de respuestas pregunta 10b

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 3 (17%)	Explicaron correctamente que si los peldaños aumentan en 1, los palitos aumentan en 3	Establecieron explícitamente la relación entre ambas columnas

Estudiantes que respondieron parcialmente: 8 (44%)	Mencionaron únicamente que “aumenta de 3 en 3”	No relacionaron el aumento con el número de peldaños
Estudiantes que no respondieron adecuadamente: 3 (18%)	Confundieron elementos: “peldaños horizontales, palitos verticales”	No respondieron a la relación matemática solicitada
Estudiantes que respondieron de forma incompleta 4 (22%)	Intentaron escribir una relación entre columnas	No mencionaron los valores concretos del aumento

Fuente: Elaboración propia

El 17% de los estudiantes justificaron correctamente, explicando que “si el número de peldaños aumenta en uno, el número de palitos aumenta en tres”, el 44% de los estudiantes mencionaron que la cantidad de palitos “*aumenta de tres en tres*”, pero no establecieron explícitamente la relación entre las dos columnas, por lo que su razonamiento quedó incompleto.

Otro 18% confundieron el tipo de elemento al afirmar que “*los peldaños son los horizontales y los palitos los verticales*”. Si bien su observación sobre la orientación es válida desde lo visual, no responde al tipo de relación matemática solicitada. Finalmente, 22% intentaron escribir una relación entre las columnas, pero omitieron los valores concretos de aumento (peldaños y palitos), lo que evidencia comprensión parcial de la proporcionalidad.

En el caso de la pregunta #11, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

11. Una persona afirma que se necesitan 29 palitos para construir una escalera con 9 peldaños, ¿esta afirmación es verdadera o falsa? Explica tu respuesta:

R//

Los estudiantes debían determinar si la afirmación “se necesitan 29 palitos para construir una escalera con 9 peldaños” era verdadera o falsa, y justificar su respuesta. Este ejercicio buscaba evaluar si los estudiantes podían aplicar la relación general entre el número de peldaños y el total de palitos utilizados en la construcción de las figuras.

Tabla 16.

Tipo de respuestas pregunta 11

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente con formalización algebraica: 6 (33%)	Identificaron que la afirmación es verdadera	Justificaron usando la expresión general $3n + 2$, mostrando comprensión simbólica
Estudiantes que respondieron adecuadamente pero con justificación no algebraica 7: (39%)	Determinaron que la afirmación es verdadera	Llegaron al resultado aumentando de 3 en 3 los palitos (procedimiento numérico, no algebraico)
Estudiantes que no respondieron adecuadamente: 5 (28%)	Dijeron que la afirmación es falsa	No presentaron una justificación válida o mostraron confusión sobre el patrón

Fuente: Elaboración propia

Aproximadamente, el 33% respondió de manera completamente correcta. Estos estudiantes identificaron que la afirmación era verdadera y la justificaron utilizando la expresión algebraica $3n + 2$, mostrando una comprensión formal del patrón y la capacidad de generalizar mediante una representación simbólica.

Por su parte, el 39% también afirmó que la proposición era verdadera, aunque llegaron al resultado mediante un procedimiento más empírico, aumentando de tres en tres los palitos hasta alcanzar el valor correspondiente. Aunque su justificación no fue algebraica, evidenciaron una comprensión intuitiva del patrón numérico y de su regularidad.

Finalmente, el 28% restante consideró que la afirmación era falsa y no presentó una justificación válida. En estos casos se observó dificultad para relacionar los datos de la secuencia con la expresión matemática correspondiente, lo que indica una comprensión parcial o errónea del patrón.

En general, los resultados muestran que el 72% del grupo logró identificar correctamente la veracidad de la afirmación, aunque solo una parte de ellos lo hizo mediante el uso de una expresión general. Esto sugiere que los estudiantes se encuentran en una etapa de transición entre el reconocimiento empírico de los patrones y la formulación algebraica generalizada, evidenciando un avance significativo en el desarrollo del pensamiento algebraico.

En el caso de la pregunta #12, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

12. ¿Cuántos palitos se necesitarán para una escalera de 50 peldaños? Explica tu respuesta:

R//

En esta pregunta se pedía determinar cuántos palitos se necesitarían para construir una escalera de 50 peldaños, aplicando el patrón o la fórmula general deducida en las preguntas anteriores.

Tabla 17.
Tipo de respuestas pregunta 12

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta:8 (44%)	Indicaron correctamente que se necesitan 152 palitos	Contextualizaron explicando el procedimiento o aplicando la expresión $3n + 2$
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta:10 (56%)	Algunos respondieron 98 palitos, confundiendo la relación lineal con una multiplicación directa o asumiendo solo palitos verticales	Otros respondieron 49 palitos, igualando número de palitos al número de peldaños (comprensión superficial del patrón)

Fuente: Elaboración propia

Del total de estudiantes, el 44% respondió correctamente, indicando que se requerirían 152 palitos, y además contextualizaron su respuesta explicando el procedimiento o utilizando la expresión general $3n + 2$. Estos estudiantes demostraron comprensión tanto del crecimiento lineal de la secuencia como de la aplicación algebraica del patrón, lo que evidencia un nivel de generalización adecuado.

Por otro lado, el 56% restante no obtuvo la respuesta correcta. Algunos de ellos respondieron 98 palitos, probablemente porque duplicaron el número de peldaños (50×2 menos una corrección), confundiendo la relación lineal con una proporcional directa, o bien, porque asumieron que cada peldaño requería dos palitos verticales sin considerar los horizontales que conectan la estructura. Otros estudiantes respondieron 49, lo cual indica que igualaron el número de palitos al de peldaños, mostrando una comprensión superficial del patrón y sin aplicar la regularidad de crecimiento establecida anteriormente.

En el caso de la pregunta #13, que se respondía de acuerdo con la secuencia inicial, que decía:

13. Si sabemos que se necesitan 335 palitos para hacer una escalera de 111 peldaños. ¿Cuántos palitos se necesitarán para hacer una escalera de 112 peldaños? Explica tu respuesta:

R//

Se presentaba una situación donde ya se conocía que una escalera de 111 peldaños requiere 335 palitos, y se pedía determinar cuántos palitos serían necesarios para construir una escalera de 112 peldaños. Esta pregunta evaluaba la capacidad de los estudiantes para reconocer el crecimiento constante del patrón (que aumenta de 3 en 3) y aplicar esa regularidad sin necesidad de recurrir a la fórmula general.

Tabla 18.

Tipo de respuestas pregunta 13

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente con justificación matemática: 5 (28%)	Explicaron que basta con sumar 3 palitos al total de la figura anterior ($335 + 3 = 338$)	Aplicaron implícitamente la expresión general (como $3n + 2$), aunque no fueran conscientes de ello
Estudiantes que respondieron adecuadamente pero sin justificar: 10 (55%)	Escribieron correctamente 338 palitos	No ofrecieron ninguna explicación del procedimiento
Estudiantes que respondieron adecuadamente pero de forma incompleta: 3 (17%)	Indicaron el número 338, sin mencionar la palabra “palitos”	Respuesta correcta numéricamente, pero comunicativamente incompleta

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que el 100% del grupo respondió correctamente el valor solicitado, indicando que para una escalera de 112 peldaños se necesitan 338 palitos, demostrando que todos identificaron que al aumentar un peldaño se agregan 3 palitos más.

Sin embargo, al analizar la calidad de las justificaciones, se observa una diferencia significativa en el nivel de argumentación. Solo el 28% de los estudiantes logró justificar su respuesta utilizando algún procedimiento matemático, ya sea sumando 3 al total inicial o aplicando la expresión general (aunque no fueran conscientes de estar usando una fórmula). Estos estudiantes mostraron una comprensión más sólida del crecimiento lineal de la secuencia.

Por otro lado, el 55% del grupo se limitó únicamente a escribir el número final de palitos, sin ofrecer explicación alguna. Aunque acertaron, su respuesta no evidencia comprensión del patrón, sino posiblemente un cálculo intuitivo o una deducción mínima sin argumentación. El 18% restante también dio el número correcto, pero lo expresó sin claridad, omitiendo especificar que el valor correspondía a “palitos”, lo cual refleja una respuesta incompleta desde el punto de vista comunicativo, aunque matemáticamente acertada.

En el caso de la pregunta #14, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

14. De acuerdo con la información anterior, ¿podrías escribir una expresión matemática como regla general para formar una escalera con “n” peldaños? Explica tu respuesta:

R//

Los estudiantes debían formular una expresión matemática general que permitiera calcular el número de palitos necesarios para construir una escalera con n peldaños, basándose en

el patrón trabajado previamente. Esta pregunta apuntaba a evaluar su capacidad para generalizar y transformar una regularidad numérica en una regla algebraica.

Tabla 19.

Tipo de respuestas pregunta 14

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente con expresión general correcta: 3 (17%)	Escribieron la fórmula $3n + 2$	Generalizaron correctamente el patrón en lenguaje algebraico
Estudiantes que respondieron adecuadamente pero solo en forma verbal: 5 (28%)	Describieron la regla: “multiplicar los peldaños por 3 y sumar 2”	No utilizaron notación algebraica formal
Estudiantes que respondieron parcialmente: 2 (11%)	Escribieron solo $3 \cdot n$, fórmula incompleta	Omitieron el término constante (+2) del patrón
Estudiantes que no respondieron adecuadamente: 8 (44%)	Mencionaron únicamente que “aumenta de 3 en 3”	No formularon ni describieron la regla general

Fuente: Elaboración propia

El 17% lograron escribir correctamente la fórmula general, identificando que la expresión adecuada es $3n + 2$, la cual relaciona de manera precisa el número de peldaños con el total de palitos. Estos estudiantes evidenciaron un nivel alto de comprensión, pues no solo reconocieron el crecimiento constante de la secuencia, sino que también fueron capaces de traducirlo al lenguaje algebraico.

Por otro lado, 28% no escribieron la fórmula como tal, pero sí lograron describirla verbalmente, explicando que el total de palitos se obtiene “multiplicando el número de peldaños

por 3 y luego sumando 2”. Aunque no expresaron la regla en notación matemática formal, demostraron que entendieron cómo se construye la relación general.

Sin embargo, 11% proporcionó una fórmula incompleta, indicando únicamente $3 \cdot n$, dejando por fuera el valor inicial de 2 palitos que caracteriza el patrón. Esto refleja una comprensión parcial del crecimiento, pero no del modelo completo.

44% respondieron mencionando únicamente que “se va sumando de 3 en 3”, sin llegar a formular o describir una regla general. Sus respuestas muestran que reconocen el patrón de crecimiento, pero aún no logran dar el salto hacia la generalización algebraica, quedándose en el razonamiento aritmético.

En conjunto, solo un reducido grupo logró construir la expresión general correctamente, mientras que una buena parte del curso aún se encuentra en etapas previas de generalización, identificando el patrón, pero sin capacidad para expresarlo simbólicamente.

Actividad 4: la serie numérica

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 2, en el caso de la Actividad 4, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #15 que decía:

Dada la siguiente secuencia, completa los números que faltan en cada línea y analiza:

_____, 78.560, 77.560, _____, _____, 74.560, _____, 72.560

Ahora responde las preguntas 15 a 19:

15. ¿Cómo cambia la secuencia entre un número y el siguiente?

R//

En la pregunta, todos los estudiantes lograron completar correctamente los números faltantes, lo cual muestra que, al menos de manera procedimental, pudieron identificar el patrón de la secuencia. Sin embargo, al analizar sus explicaciones sobre cómo cambia cada número con respecto al siguiente, se evidenciaron diferencias importantes en el nivel de comprensión.

Tabla 20.
Tipo de respuestas pregunta 15

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 4 (22%)	Explicaron que la secuencia disminuye	Indicaron correctamente que el cambio es de 1000 unidades
Estudiantes que respondieron parcialmente: 1(6%)	Dijeron simplemente que “la secuencia disminuye”	No especificaron la magnitud del cambio
Estudiantes que respondieron parcialmente identificando la magnitud pero no la dirección: 4 (22%)	Indicaron que el cambio es “de mil”	No aclararon si aumenta o disminuye
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta: 6 (33%)	Afirmaron que cambia “de a un millón”	Indicaron que cambia “el primer número” u otras ideas no relacionadas con el patrón

Fuente: Elaboración propia

Aproximadamente el 22% de los estudiantes no solo identificó el patrón correctamente, sino que también lo explicó de forma clara, señalando específicamente que la secuencia disminuye en 1000 unidades de un término al siguiente. E2

Por otra parte, alrededor de un 6% indicó que la secuencia disminuye. Otro grupo, cercano al 21%, mencionó que el cambio era “en mil”, pero sin aclarar si se trataba de un aumento o una

disminución. Estas respuestas muestran que detectan la magnitud del cambio, aunque no logran expresar con claridad la dirección de la variación, lo que deja incompleta la justificación.

Finalmente, cerca del 33% de los estudiantes proporcionó explicaciones incorrectas o incoherentes con la secuencia observada. Dentro de este grupo, algunos afirmaron que la secuencia cambiaba “de a un millón”, mientras que otros mencionaron que lo que variaba era simplemente el primer dígito del número. Estas respuestas evidencian dificultades para identificar el patrón real y para relacionar los números entre sí.

En el caso de la pregunta #16, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

16.¿Cuánto cambia la secuencia entre un número y el siguiente?
R//

Al analizar las respuestas de los estudiantes de cuánto cambia la secuencia entre un número y el siguiente, se observa una distribución variada en su nivel de comprensión.

Tabla 21.
Tipo de respuestas pregunta 16

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 7 (39%)	Identificaron correctamente que el cambio es de -1000	Reconocieron magnitud y dirección de la variación
Estudiantes que respondieron parcialmente: 6 (33%)	Indicaron que el cambio es “de mil”	No especificaron si aumenta o disminuye

Estudiantes que respondieron incorrectamente: 1 (6%)	Dijeron que cambia “menos uno”	Interpretaron solo el primer dígito del número
Estudiantes que no respondieron adecuadamente: 4 (22%)	Respuestas que no explican la variación real	No relacionaron los términos de la secuencia

Fuente: Elaboración propia

El 39% de los estudiantes logró identificar correctamente que el cambio entre cada término es de -1000 , reconociendo no solo la magnitud de la variación sino también su dirección, lo cual evidencia una lectura adecuada del patrón numérico. Otro 33% señaló que el cambio era “de mil”, mostrando que entendieron la magnitud del salto, aunque no especificaron si se trataba de un aumento o de una disminución, por lo que su respuesta resulta incompleta. Un 6% de los estudiantes respondió que la secuencia cambiaba “menos uno”, interpretación incorrecta que proviene de fijarse únicamente en la primera cifra de cada número sin analizar el valor total. Finalmente, el 22% restante dio respuestas que no se relacionaban con la pregunta o no explicaban realmente la variación entre los términos, lo que indica dificultades para contextualizar y comprender el comportamiento de la secuencia numérica presentada.

En el caso de la pregunta #17, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

17. Escribe los dos siguientes números que vendrían después del último número de la secuencia:
R//

Cuyo propósito era verificar si los estudiantes podían continuar correctamente una secuencia numérica decreciente y aplicar la regla identificada en los ejercicios anteriores.

Tabla 22.
Tipo de respuestas pregunta 17

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 8 (44%)	Identificaron que la secuencia disminuye de 1000 en 1000	Escribieron correctamente los números: 71.560 y 70.560
Estudiantes que respondieron incorrectamente por interpretación del lenguaje: 6 (33%)	Interpretaron “seguir” como “aumentar”	Escribieron números mayores a los de la secuencia
Estudiantes que no respondieron adecuadamente: 4 (22%)	Copiaron los últimos números ya presentes en la secuencia	No aplicaron la regla ni continuaron la serie

Fuente: Elaboración propia

44% de los estudiantes respondieron adecuadamente. Ellos reconocieron que la serie disminuye de mil en mil y escribieron correctamente los siguientes valores: 71.560 y 70.560. Esto evidencia que lograron comprender el patrón, aplicarlo y verificar coherentemente el comportamiento de los números.

33%, en cambio, interpretaron la palabra “seguir” como sinónimo de “aumentar” y propusieron números mayores a los de la secuencia. Este error sugiere que asumieron una interpretación literal del lenguaje cotidiano sin contrastarlo con el comportamiento matemático real de la serie, lo que revela dificultades en la lectura detallada de consignas y en la verificación del patrón.

18% respondieron incorrectamente copiando los últimos números que ya aparecían en la secuencia, como si esos fueran “los que seguían”. Este tipo de error indica una lectura superficial o un intento de completar la actividad sin analizar la estructura de la serie.

En el caso de la pregunta #18, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

18. Escribe los dos números que estarían antes, según la secuencia:

R//

Cuyo propósito era evaluar si los estudiantes podían retroceder en una secuencia numérica aplicando la misma regla de variación identificada previamente.

Tabla 23.

Tipo de respuestas pregunta 18

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 5 (28%)	Identificaron correctamente que la secuencia disminuye de 1000 en 1000	Aplicaron la regla en sentido inverso: escribieron números mayores para los valores anteriores
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta: 13 (72%)	Interpretaron “antes” como “números más pequeños”	No aplicaron la regla de la secuencia y respondieron basados en intuiciones del lenguaje cotidiano

Fuente: Elaboración propia

Solo el 28% de los estudiantes respondieron correctamente. Ellos comprendieron que, dado que la secuencia va disminuyendo de mil en mil, los números que estarían antes deben ser necesariamente más grandes, por lo que aplicaron la lógica inversa a la utilizada para avanzar en

la serie. Esto muestra una adecuada comprensión del patrón y la capacidad de razonarlo en ambas direcciones.

Por otro lado, la mayoría de los estudiantes (72%) respondió de manera incorrecta. Estos interpretaron la palabra “antes” como sinónimo de “números más pequeños”, sin tomar en cuenta el comportamiento real de la secuencia. Este error revela que se guiaron por la asociación cotidiana del término antes–menor, en lugar de analizar matemáticamente la progresión dada. Esto también pone en evidencia dificultades en la comprensión lectora y en la habilidad de distanciarse de intuiciones del lenguaje común para aplicar reglas numéricas precisas.

En el caso de la pregunta #19, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

19. ¿Podrías escribir la expresión matemática o regla general para calcular y escribir un número cualquiera “n” que pertenezca a esta secuencia?

R//

Buscaba evaluar si los estudiantes eran capaces de generalizar la regla de la secuencia numérica y expresarla mediante una fórmula matemática que permitiera obtener cualquier término “n”, ninguno de los estudiantes logró escribir correctamente la expresión general. Esto indica que la abstracción hacia un modelo algebraico aún representa una dificultad importante para el grupo.

Tabla 24.
Tipo de respuestas pregunta 19

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

Estudiantes que hicieron un acercamiento parcial: 5 (28%)	Intentaron escribir una fórmula como $n \times -1000$	Reconocieron que la secuencia disminuye 1000 por cada paso, aunque la expresión no genera el término general
Estudiantes que no respondieron adecuadamente la pregunta: (72%)	Describieron verbalmente la regla (“se resta mil”, “disminuye de mil en mil”)	No lograron traducir la regularidad a una expresión matemática general

Fuente: Elaboración propia

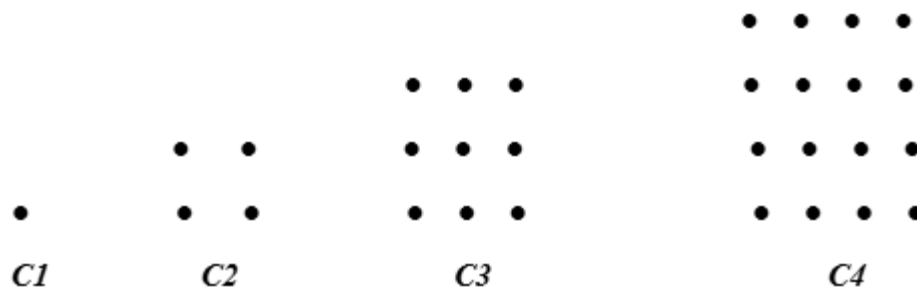
Sin embargo, 28% hicieron un acercamiento parcial al intentar escribir algo parecido a una fórmula, como $n \times -1000$, lo cual muestra que comprendieron la idea de que en cada paso existe una disminución de mil. Aunque su expresión no es correcta para generar el término general de la secuencia, evidencia que están comenzando a asociar la variación constante con una operación algebraica. Este es un avance significativo hacia la comprensión formal de una función lineal.

Por otro lado, 72% no logró acercarse a una expresión algebraica. En lugar de ello, se limitaron a describir verbalmente que “se resta mil” o “disminuye de mil en mil”, sin traducir esa relación a una expresión simbólica. Esto sugiere que, si bien reconocen la regularidad numérica, todavía no logran formalizarla, lo cual es un paso clave en el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

Actividad 5: Los números cuadrados

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 2, en el caso de la Actividad 5, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #20 que decía:

Observa la siguiente secuencia de puntos que muestra una representación del cuadrado de los cuatro primeros números naturales:



De acuerdo con lo anterior, responde las preguntas 20 a 23:

20. De acuerdo con la información anterior, escribe cuántos puntos habrá en el quinto (C5), sexto(C6) y séptimo(C7) término de la secuencia:

R//

C5= _____

C6= _____

C7= _____

Donde los estudiantes debían identificar cuántos puntos tendría el quinto (C5), sexto (C6) y séptimo (C7) término de la secuencia de números cuadrados, la mayoría mostró una comprensión adecuada del patrón.

Tabla 25.
Tipo de respuestas pregunta 20

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta:11 (61%)	Calcularon correctamente: C5 = 25, C6 = 36, C7 = 49	Reconocieron la estructura cuadrática ($n \times n$) o usaron las imágenes para obtener los valores
Estudiantes que respondieron con error por descuido: 2 (11%)	Falló solo en C7 (escribió 50 en lugar de 49)	Error de cálculo o descuido al aplicar la regla

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que aplicaron procedimiento incorrecto (crecimiento lineal):3 (17%)	Usaron diferencias constantes (sumando 4 en 4)	Se centraron en la diferencia entre primeros términos sin identificar la naturaleza cuadrática
Estudiantes cuya respuesta fue no interpretables 2(11%)	Respuesta no coherente o ilegible	No identificó ni describió el patrón

Fuente: Elaboración propia

61% de los estudiantes respondieron correctamente los tres valores, reconociendo que la secuencia corresponde a los cuadrados perfectos y que, por tanto, $C_5 = 25$, $C_6 = 36$ y $C_7 = 49$. Este grupo evidenció que supo reconocer la estructura visual de cada figura como un cuadrado formado por $n \times n$, o realizando la secuencia con las imágenes.

Sin embargo, se presentaron algunos errores significativos. Un 11% de los estudiantes falló únicamente en el valor de C_7 , escribiendo 50 en lugar de 49, lo cual sugiere que comprendió el patrón, pero cometió un error de cálculo o descuido en la aplicación de la regla. Por otro lado, 17% de los estudiantes aplicaron un procedimiento incorrecto, ya que consideraron que la secuencia crecía sumando 4 puntos en cada término, probablemente porque observaron el paso de C_1 a C_2 sin analizar la estructura cuadrática completa. Este error indica que se centraron en la diferencia entre los primeros términos en vez de identificar la propiedad general de los cuadrados. Finalmente, 11% de los estudiantes presentó una respuesta imposible de interpretar, lo que sugiere que no logró identificar ni describir adecuadamente el patrón numérico representado.

En el caso de la pregunta #21, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

21. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de puntos y la posición de la figura?

R//

El propósito era identificar si los estudiantes podían describir, de manera verbal, la relación funcional entre la posición de la figura en la secuencia y la cantidad total de puntos que la conforman, evidenciando si reconocían o no el patrón cuadrático.

Tabla 26.

Tipo de respuestas pregunta 21

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente con noción del patrón cuadrático: 5 (28%)	Expresaron que “cada vez se va aumentando de uno al cuadrado”	Reconocieron la relación funcional n^2 , aunque de forma no formalizada
Estudiantes que respondieron adecuadamente con explicación geométrica : 6 (33%)	Indicaron que “se aumenta una fila vertical y otra horizontal”	Comprendieron el mecanismo geométrico de crecimiento cuadrático
Estudiantes que respondieron incorrectamente con interpretación lineal: 2 (11%)	Dijeron que “se va aumentando de uno en uno”	Mostraron confusión entre crecimiento lineal y cuadrático
Estudiantes que respondieron de manera general sin justificar: 5 (28%)	Expresaron que “el cuadrado va creciendo”	Reconocieron el cambio pero sin establecer relación entre posición y cantidad de puntos

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a las respuestas, el 28% de los estudiantes afirmó que “cada vez se va aumentando de uno al cuadrado”. Aunque la expresión no es formal, refleja que lograron identificar la regla general n^2 , mostrando cercanía a la comprensión del patrón correcto. E3

Por otro lado, el 33% indicó que en cada figura “se aumenta una fila vertical y otra horizontal”. Esta explicación demuestra que reconocieron el mecanismo geométrico de crecimiento, entendiendo que el cuadrado se expande agregando una fila y una columna, lo cual es coherente con un patrón cuadrático.

El 11% de los estudiantes expresó que “se va aumentando de uno en uno”, lo cual representa una interpretación errónea del patrón, pues asume un crecimiento lineal que no corresponde al modelo presentado.

Finalmente, el 28% mencionó únicamente que “el cuadrado va creciendo”. Aunque esta afirmación reconoce el cambio en las figuras, resulta demasiado general y no evidencia comprensión de la regla que relaciona la posición con la cantidad de puntos.

En el caso de la pregunta #21, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

23. Es posible escribir una regla general para el cuadrado de un número “n” cualquiera?

R//

El propósito de la pregunta era verificar si los estudiantes eran capaces de generalizar formalmente el patrón observado y expresar una regla algebraica válida para el cuadrado de un número cualquiera, es decir, reconocer que la cantidad de puntos en la figura “n” puede expresarse mediante la fórmula n^2 .

Tabla 27.
Tipo de respuestas pregunta 23

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 6 (33%)	Escribieron correctamente la regla general n^2 o $n \times n$	Mostraron comprensión formal del patrón cuadrático y su generalización
Estudiantes que no respondieron adecuadamente (crecimiento lineal): 5 (28%)	Afirmaron que “se aumenta de uno en uno”	Interpretaron la secuencia como lineal en lugar de cuadrática
Estudiantes que no lograron generalizar: (17%)	Dijeron que “no tiene regla general”	No lograron transferir el análisis a un modelo generalizable
Estudiantes con respuesta incompleta (17%)	Afirmaron que “sí es posible” generalizar, pero sin escribir la fórmula	Reconocieron la idea de generalización sin expresarla formalmente

Fuente: Elaboración propia

En las respuestas, el 33% de los estudiantes logró formular correctamente la regla general, indicando expresiones como n al cuadrado o $n \times n$. Este grupo evidenció comprensión sólida del patrón cuadrático y capacidad de abstracción hacia un caso general. Por otro lado, el 25% afirmó que la secuencia “se aumenta de uno en uno”, lo que muestra una interpretación lineal del crecimiento y revela que no lograron distinguir la naturaleza cuadrática del patrón.

Asimismo, el 17% de los estudiantes sostuvo que “no tiene regla general”, lo cual indica dificultades para transferir el análisis de los casos particulares hacia una expresión generalizable. Finalmente, otro 17% respondió que “sí es posible”, pero sin justificar o escribir la regla correspondiente. Aunque reconocen la idea de generalización, no logran expresarla de manera formal.

Tarea 3: Analizando patrones

En la tarea “Analizando Patrones”, trabajarás con secuencias visuales que siguen una lógica específica. Tu reto será identificar cómo se construyen, organizar la información en tablas y descubrir la regla general que las gobierna. Esta regla, representada con letras y símbolos, es una forma de comenzar a pensar algebraicamente.

Las actividades que encontrarás a continuación se apoyan en un recurso digital realizado en el programa Geogebra, el cual permitirá interactuar y visibilizar otros aspectos dinámicos de los patrones con formas geométricas. Sigue las instrucciones en cada caso.

Actividad 6: Techos y bases

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 3, en el caso de la Actividad 6, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #24 que decía:

Observa la siguiente secuencia:



Ejercicio con Geogebra:

A continuación, haz clic en el siguiente enlace para acceder al recurso donde encontrarás un ejercicio práctico en relación con la anterior secuencia. Lee cuidadosamente cada parte y realiza lo que se te solicita. Una vez lo explores y analices, responde a continuación, según lo trabajado.

Enlace para ejercicio con Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/xum2uent>

Después de haber realizado el ejercicio en Geogebra, responde las preguntas 24 a 29:

24. Completa la información faltante en los espacios de la tabla según corresponda:

Figura	1	2	3	4	5	6			
--------	---	---	---	---	---	---	--	--	--

Número de cuadrados	1	2	3	4	5	6	20	40	n
Numero de triángulos negros	2	3	4						

Tabla 28.

Tipo de respuestas pregunta 24

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que completaron la tabla correctamente (incluyendo la n):4 (22%)	Completaron los valores numéricos y escribieron la generalización correcta: cuadrados = n; triángulos = $n + 1$	Mostraron comprensión del patrón y capacidad de generalización
Estudiantes que completaron la tabla pero fallaron en la generalización:8 (44%)	Llenaron los casos numéricos correctamente, pero en la fila “n” escribieron n en ambas columnas (triángulos = n)	Reconocieron el patrón en casos concretos, pero no formularon la regla para triángulos
Estudiantes que aplicaron una regla superficial “siguiente número”: 3 (17%)	Escribieron el número de triángulos como “el siguiente” del número de cuadrados (p. ej. si cuadrados = 4 $\rightarrow$ triángulos = 5)	No explicaron la estructura que justifica por qué hay $n + 1$ triángulos
Estudiante que no respondió la actividad: 3 (17%)	No completó la tabla ni la generalización	Posible falta de tiempo o dificultad de comprensión

Fuente: Elaboración propia

Se observó que el 22% de los estudiantes, completaron la tabla completamente bien, incluyendo el caso general para la figura “n”. Esto indica que lograron comprender el patrón de crecimiento, identificando que el número de cuadrados coincide con el número de la figura, y que el número de triángulos negros siempre es uno más, por lo que para la figura “n” corresponde escribir n cuadrados y $n + 1$ triángulos negros. Estos estudiantes muestran una comprensión sólida tanto del patrón específico como de su generalización algebraica.

Por otro lado, el 44% de los estudiantes realizaron correctamente la tabla en los casos numéricos, pero al llegar al caso general solo escribieron n en ambos espacios, sin reconocer que el número de triángulos debía expresarse como $n + 1$. Este grupo evidencia que comprendieron el patrón en los ejemplos concretos, pero aún presentan dificultades para trasladarlo a una regla general válida para cualquier figura.

Asimismo, el 17% de los estudiantes interpretaron que el número de triángulos negros debía ser simplemente “el siguiente número” respecto al número de cuadrados. Aunque esto coincide con el patrón observado, su razonamiento se quedó en una lógica superficial, sin comprender la relación estructural de la figura donde cada cuadrado requiere una base adicional para sostenerse.

Finalmente, el 17% de los estudiantes no realizó la actividad, lo cual puede estar relacionado con dificultades de comprensión, manejo del tiempo o falta de claridad respecto a la tarea.

En el caso de la pregunta #25, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

25. *¿Cómo es la relación que existe entre la cantidad de cuadrados y la cantidad de triángulos negros de acuerdo con el orden de las figuras?*

R//

Tabla 29.

Tipo de respuestas pregunta 25

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta: 10 (56%)	Explicaron correctamente que “siempre hay un triángulo más que cuadrados”	Reconocieron la relación constante y coherente con el patrón visual
Estudiantes que respondieron parcialmente: 2 (11%)	Dijeron que “siempre suma uno”	Reconocieron la diferencia constante sin expresarla con precisión
Estudiantes que respondieron de forma vaga o incompleta: 2 (11%)	Mencionaron una “condición regular”	Percibieron la existencia del patrón pero sin especificarlo
Estudiantes que respondieron incorrectamente: 3 (17%)	Afirmaron la presencia de círculos, elemento inexistente en la secuencia	Mostraron confusión en la observación de la representación geométrica
Estudiantes que no respondieron 1 (6%)	No proporcionaron respuesta o no fue relevante	—

Fuente: Elaboración propia

La mayoría de los estudiantes logró identificar correctamente la relación entre el número de cuadrados y la cantidad de triángulos negros. Un 56% de los estudiantes respondió adecuadamente, explicando que siempre hay un triángulo más que cuadrados. Esto muestra una comprensión clara del patrón representado.

Por otro lado, un 11% indicó que “siempre suma uno”, una respuesta que, aunque menos precisa, evidencia que el estudiante reconoce la diferencia constante entre ambas cantidades. Otro 11% sostuvo que existe “una condición regular”, lo cual señala que percibe la existencia del patrón, aunque no logra explicitar la relación exacta entre cuadrados y triángulos.

Además, un 17% de los estudiantes (2 estudiantes) mencionaron elementos inexistentes en la representación, afirmando que había círculos en las figuras. Esta confusión evidencia

dificultades para observar detalladamente el patrón visual y para relacionar correctamente los elementos geométricos presentes. Finalmente, el 6% restante no respondió o no proporcionó información relevante para la pregunta.

En el caso de la pregunta #26, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

26. ¿Cuál sería la medida del perímetro de los cuadrados de las figuras 1, 2 y 3 si el lado de cada cuadrado mide 1 cm?

R//

Perímetro figura 1 = _____

Perímetro figura 2 = _____

Perímetro figura 3 = _____

Cuyo propósito consistía en evaluar la comprensión del concepto de perímetro en figuras compuestas por cuadrados de lado 1 cm, se observaron patrones de respuesta que evidencian tanto aciertos puntuales como dificultades conceptuales persistentes. La intención evaluativa de esta pregunta era determinar si los estudiantes lograban diferenciar entre el perímetro de un cuadrado individual y el perímetro total de una figura formada por varios cuadrados, reconociendo que al unirse los cuadrados algunos lados dejan de ser exteriores y, en consecuencia, dejan de contabilizarse en el contorno.

Tabla 30.

Tipo de respuestas pregunta 26

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron adecuadamente la pregunta (27%)	Determinaron correctamente el perímetro total de las figuras	Utilizaron incorrectamente la unidad “m” en lugar de “cm”, mostrando confusión con la magnitud de medida

Estudiantes que aplicaron erróneamente una regla fija (45%)	Multiplicaron el número de cuadrados por 4 (perímetro individual $\times$ cantidad de cuadrados)	No reconocieron que los lados compartidos no se cuentan en el contorno total
Estudiantes con respuestas parcialmente correctas (9%)	Indicaron valores como 4, 7 y 10	Intentaron contar los lados visibles, pero sin criterio claro de selección
Estudiantes con respuestas incorrectas (9%)	Escribieron valores como 2, 3 y 4	Confundieron el concepto de perímetro con el número de cuadrados o segmentos

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que únicamente el 27% de los estudiantes respondió correctamente. Sin embargo, incluso dentro de este grupo se identificó que la totalidad de ellos utilizó la unidad “m” para expresar el resultado, a pesar de que el enunciado especificaba que cada cuadrado tiene lados de “1 cm”. Esto sugiere que, aunque comprendieron adecuadamente la estructura geométrica de las figuras, persiste una dificultad en el reconocimiento y uso apropiado de las magnitudes de medición, lo cual representa una confusión entre la noción de longitud y la unidad asociada a ella.

Por otra parte, el 45% de los estudiantes respondió aplicando de forma mecánica la idea de que “todo cuadrado tiene un perímetro de 4 unidades”, de modo que multiplicaron directamente el número de cuadrados por cuatro. Este grupo no identificó que en las figuras compuestas varios de los lados se encuentran adosados y no forman parte del borde exterior. Este comportamiento revela una concepción rígida del cuadrado, donde se asume que sus propiedades se transfieren de manera idéntica a estructuras más complejas sin considerar la composición geométrica.

Un 9% adicional presentó respuestas que, si bien no son correctas, muestran tentativa de variación entre las figuras (por ejemplo, respuestas como 4, 7 y 10). Este tipo de respuesta sugiere que los estudiantes intentaron realizar un conteo de los lados visibles, aunque de manera incompleta o sin un criterio claro para establecer cuáles lados deben incluirse en el perímetro. Finalmente, otro 9% respondió con valores como 2, 3 y 4, lo cual evidencia una confusión más profunda, probablemente asociada a la incapacidad para distinguir entre el número de cuadrados, la longitud de algunos segmentos o incluso medidas que no corresponden al concepto de perímetro.

En el caso de la pregunta #27, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

27. *¿Cuál sería la medida del perímetro de los triángulos negros de las figuras 1, 2 y 3 si cada uno de sus lados mide 1cm?*

R//

1 = _____

2 = _____

3 = _____

Se buscaba evaluar si los estudiantes comprendían adecuadamente el concepto de perímetro aplicado específicamente a triángulos equiláteros aislados dentro de figuras mayores, partiendo de la condición explícita de que cada lado medía 1 cm. El propósito conceptual de esta pregunta era verificar si el grupo lograba identificar que, a diferencia de los cuadrados adosados en la pregunta anterior, los triángulos negros son unidades geométricas independientes, por lo cual su perímetro no depende de la figura compuesta sino de la estructura propia de cada triángulo.

Tabla 31.

Tipo de respuestas pregunta 27

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron correctamente (45%)	Identificaron que cada triángulo equilátero tiene un perímetro de 3 cm, sin depender del número de figuras	Dos de ellos (18%) utilizaron erróneamente la unidad “m” en lugar de “cm”, evidenciando confusión entre magnitud y unidad
Estudiantes con razonamiento proporcional incorrecto (27%)	Indicaron secuencias como 3, 6 y 9	Asumieron que el perímetro se multiplicaba según la cantidad de triángulos presentes
Estudiantes con generalización errónea (18%)	Respondieron con valores como 3, 9 y 12	Confundieron el perímetro individual con una suma acumulativa entre figuras
Estudiantes que no respondieron (9%)	No completaron la pregunta	Posible dificultad en la identificación del triángulo o en la comprensión del concepto de perímetro

Fuente: Elaboración propia

Los resultados evidenciaron que el 45% de los estudiantes respondió correctamente. Sin embargo, dentro de este grupo se observó nuevamente una dificultad recurrente: dos estudiantes (18%) de los que respondieron bien escribieron la unidad en metros, a pesar de que el problema especificaba claramente que los lados medían centímetros. Esto confirma la problemática ya observada en la pregunta anterior respecto al uso inadecuado de las unidades de medida, lo que sugiere una confusión entre magnitud y unidad, independiente del acierto en el procedimiento geométrico.

Por otra parte, un 27% del grupo respondió utilizando secuencias como 3, 6 y 9, lo cual indica que estos estudiantes establecieron una regla proporcional basada únicamente en la cantidad de triángulos presentes, sin reconocer que cada triángulo es independiente y su perímetro no se suma ni se multiplica en función de la figura general. Este patrón sugiere una comprensión fragmentada del concepto de perímetro, donde se confunde la cantidad de triángulos con la longitud total del contorno solicitado.

Además, otro 18% presentó respuestas del tipo 3, 9 y 12, mostrando nuevamente una generalización incorrecta basada en la acumulación de triángulos o en algún tipo de serie que no guarda relación con la estructura del perímetro. Estas respuestas evidencian que estos estudiantes no lograron interpretar adecuadamente el carácter individual de cada triángulo dentro de la figura.

Finalmente, un 9% del grupo no resolvió la pregunta, lo cual puede interpretarse como una dificultad significativa ya sea en la comprensión del enunciado, en la identificación de los triángulos dentro de las figuras, o en la aplicación del concepto de perímetro a figuras simples.

En el caso de la pregunta #28, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

28. ¿Es posible identificar alguna relación entre las medidas de los perímetros de los cuadrados de las figuras indicadas? Explica tu respuesta:

R//

La pregunta buscaba identificar si los estudiantes podían reconocer la relación que existe entre los perímetros de los cuadrados en las diferentes figuras, específicamente que este perímetro aumenta siguiendo una secuencia regular de dos unidades por figura.

Tabla 32.

Tipo de respuestas pregunta 28

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron correctamente: 20%	Identificaron que el perímetro de los cuadrados aumenta de dos en dos por figura	Describieron el patrón como una secuencia regular de crecimiento lineal
Estudiantes con comprensión parcial: 20%	Reconocieron el aumento de dos unidades	Confundieron esta relación con la correspondiente a los triángulos, mezclando ambas magnitudes
Estudiantes con error puntual: 10%	Indicaron que el aumento era de cuatro unidades	Detectaron un caso particular correcto, pero no generalizaron la regla
Estudiantes con aplicación mecánica incorrecta: 30%	Aplicaron la fórmula del cuadrado aislado ($4n$)	No consideraron que los cuadrados comparten lados al formar figuras compuestas
Estudiantes con respuestas imprecisas o sin relación: 20%	Ofrecieron explicaciones vagas o irrelevantes	Evidenciaron falta de comprensión del patrón geométrico y del contexto del problema

Fuente: Elaboración propia

Solo el 20% de los estudiantes logró describir correctamente esta regularidad, mostrando comprensión del patrón geométrico y del comportamiento del crecimiento lineal en figuras compuestas.

Un 20% adicional identificó el aumento de dos unidades, pero mezcló esta relación con la correspondiente a los triángulos, lo cual evidencia una comprensión parcial: reconocen los patrones, pero no logran mantenerlos separados según la magnitud solicitada. Asimismo, un 10% señaló únicamente que el primer aumento es de cuatro unidades, lo cual es cierto en un caso puntual, pero no constituye un reconocimiento de la regla general solicitada.

Por otra parte, un 30% de los estudiantes afirmó que la relación era “ $4n$ ”, aplicando de manera mecánica la fórmula del perímetro de un cuadrado aislado, sin considerar que en las figuras los cuadrados están unidos y comparten lados. Este error revela una dificultad para analizar la estructura real de la figura y para adaptar procedimientos conocidos a nuevos contextos. Finalmente, un 20% ofreció respuestas imprecisas o sin relación con lo preguntado, lo que indica falta de comprensión o de análisis del patrón.

En el caso de la pregunta #29, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

29. *¿Es posible identificar alguna relación entre las medidas de los perímetros de los triángulos de las figuras indicadas? Explica tu respuesta:*

R// _____

Se evaluó si los estudiantes podían reconocer la relación entre los perímetros de los triángulos negros presentes en las figuras.

Tabla 33.

Tipo de respuestas pregunta 29

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

Estudiantes que respondieron correctamente: 60%	Identificaron que el perímetro aumenta de tres en tres	Demostraron comprensión del patrón lineal y del concepto de perímetro en las figuras
Estudiantes con comprensión parcial: 30%	Escribieron expresiones como “x por m” o equivalentes	Reconocieron múltiplos de tres pero usaron letras imprecisas, sin formular la expresión correcta ($3 \cdot n$)
Estudiantes con respuestas incompletas: 20%	Indicaron que sí existía una relación entre los perímetros	No ofrecieron explicación ni justificación, mostrando una comprensión implícita pero no argumentada

Fuente: Elaboración propia

El 60% de los estudiantes identificó correctamente que el perímetro aumenta de tres en tres, demostrando comprensión del patrón lineal asociado al número de triángulos que se agregan en cada figura. Este grupo evidencia dominio tanto del concepto de perímetro como de la estructura repetitiva de la secuencia.

Por otro lado, un 30% de los estudiantes propuso expresiones como “x por m” o enunciados similares. Aunque sus ejemplos mostraban correctamente múltiplos de tres, reflejando que comprendían el crecimiento del patrón, sustituyeron la relación específica por letras imprecisas. Esto indica una comprensión parcial: reconocen el comportamiento multiplicativo, pero no logran construir la expresión algebraica adecuada (en este caso, $3 \cdot n$).

Finalmente, un 20% afirmó que sí era posible identificar una relación entre las medidas, pero no ofreció ninguna explicación. La ausencia de justificación sugiere que estos estudiantes pueden haber notado algún tipo de regularidad, pero no cuentan con los argumentos formales o el lenguaje matemático necesario para explicitarla.

Actividad 7: Torres con polícubos

En los resultados obtenidos de la implementación respecto a la Tarea 3, en el caso de la Actividad 7, procedemos a realizar una mirada a las respuestas. Para la pregunta #30 que decía:

Carlos y sus amigos han trabajado en clase de matemáticas con polícubos y los han organizado en forma vertical de la siguiente manera. En las gráficas cada línea de los cubos se conoce como arista y cada esquina como vértice. Observa la siguiente secuencia, analiza y responde las siguientes preguntas



Figura 1

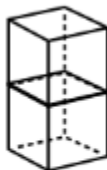


Figura 2

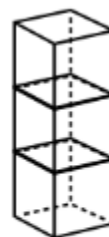


Figura 3

Ejercicio con GeoGebra:

A continuación, haz clic en el siguiente enlace para acceder al recurso donde encontrarás actividad en relación con la anterior secuencia. Lee cuidadosamente cada parte y realiza lo que se te solicita. Una vez explores y analices, responde directamente en la hoja, según lo visto en el recurso.

Enlace para ejercicio con GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/eyr8wgfk>

Después de haber realizado el ejercicio en GeoGebra, responde las preguntas 30 a 35:

30. ¿Cuántos vértices y aristas tiene la figura 2?

R// _____

El propósito de la pregunta fue evaluar la capacidad de los estudiantes para reconocer y diferenciar las aristas y los vértices en una figura tridimensional construida con polícubos. Desde una perspectiva conceptual, la intención era determinar si los estudiantes podían aplicar correctamente las definiciones geométricas asociadas a estos elementos, comprendiendo su

cantidad y disposición en el cuerpo propuesto. Este tipo de tarea permite valorar el desarrollo del pensamiento espacial y la precisión conceptual, elementos fundamentales para avanzar desde la observación concreta hacia la abstracción y el razonamiento algebraico-geométrico.

Tabla 34.

Tipo de respuestas pregunta 30

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron correctamente: 5,6%	Indicaron 12 aristas y 20 vértices	Mostraron comprensión completa de la estructura tridimensional
Estudiantes que identificaron vértices correctamente pero erraron aristas: 27,8%	Registraron 12 vértices correctamente	Cometieron errores al contar las aristas (confusión entre aristas y planos/segmentos)
Estudiantes con conteo impreciso: 11,1%	Escribieron 11 vértices y 17 aristas	Muestran un conteo visual incompleto o dificultad para distinguir aristas visibles/invisibles
Estudiantes con respuestas incoherentes: 16,7%	Entregaron respuestas sin relación clara con la consigna	Indican desconocimiento del concepto o lectura inadecuada del enunciado

Fuente: Elaboración propia

5,6% estudiantes respondió correctamente, indicando 12 aristas y 20 vértices, lo que evidencia una comprensión completa de la estructura del cuerpo geométrico. 27,8% estudiantes identificaron correctamente los 12 vértices, pero cometieron errores al contar las aristas, lo que sugiere que reconocen parcialmente la estructura tridimensional, aunque confunden los elementos lineales con los puntos de unión. 11,1% estudiantes registraron 11 vértices y 17 aristas, mostrando una interpretación errónea del número de componentes, posiblemente por un conteo visual incompleto o una dificultad para distinguir entre los planos visibles y no visibles de

la figura. Finalmente, 16,7% estudiantes escribieron respuestas incoherentes, sin relación directa con lo solicitado, lo cual refleja desconocimiento del concepto o una lectura inadecuada de la pregunta.

En el caso de la pregunta #31, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

31. En una figura formada por 4 cubos juntos, ¿cuántos vértices y aristas habrá?
R//

El propósito de la pregunta fue determinar si los estudiantes eran capaces de identificar correctamente la cantidad de vértices y aristas en una figura compuesta por cuatro cubos unidos. Conceptualmente, esta pregunta busca evaluar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes sobre las propiedades geométricas de cuerpos compuestos y su capacidad para visualizar y contabilizar elementos estructurales sin confundir las partes repetidas o compartidas entre los cubos. Esta habilidad es clave para el desarrollo del pensamiento espacial y la consolidación del razonamiento geométrico dentro de la transición del pensamiento aritmético hacia el algebraico y estructural.

Tabla 35.
Tipo de respuestas pregunta 31

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron correctamente: 5,6%	Indicaron que la figura formada por cuatro cubos tiene 20 vértices y 36 aristas	Evidenciaron comprensión completa de la estructura tridimensional y del conteo de elementos compartidos

Estudiantes que identificaron parcialmente los elementos: 33,3%	Reconocieron correctamente los 20 vértices, pero erraron el número de aristas	Demostraron comprensión parcial del cuerpo geométrico, con dificultades en la visualización espacial y el conteo de bordes
Estudiantes con respuestas incorrectas o incompletas: 22,2%	No identificaron adecuadamente ni vértices ni aristas	Reflejan limitaciones en la representación tridimensional y en la comprensión del concepto de arista

Fuente: Elaboración propia

5,6% estudiantes respondió correctamente, indicando que la figura formada por cuatro cubos presenta 20 vértices y 36 aristas, lo que demuestra una comprensión precisa de la estructura tridimensional y la capacidad para considerar los elementos comunes entre los cubos al momento de contar. 33,3% estudiantes identificaron correctamente los 20 vértices, pero cometieron errores al calcular las aristas, lo que indica un nivel de comprensión parcial: reconocen la cantidad de puntos de unión, pero presentan dificultades al visualizar o contabilizar correctamente las líneas que forman los bordes del cuerpo. Por su parte, 22,2% estudiantes no lograron identificar adecuadamente ninguno de los dos elementos, registrando respuestas incorrectas o incompletas, lo que sugiere limitaciones en la representación espacial y en la comprensión del concepto de arista.

En el caso de la pregunta #32, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

32. ¿Cuántos vértices tendrá una figura formada por 20 cubos? ¿y cuántas aristas? Explica cómo lo has hecho:

Cubos= _____

Aristas= _____

R//

Se valora la capacidad de los estudiantes para establecer una generalización en la determinación de los vértices y aristas de una figura formada por 20 cubos. Conceptualmente, la pregunta busca evidenciar si los estudiantes pueden extrapolar patrones geométricos observados en configuraciones más simples (como las de 3 o 4 cubos) hacia una figura más compleja, sin necesidad de construirla físicamente. Este ejercicio implica un nivel de pensamiento algebraico temprano, pues demanda el uso de la regularidad numérica y la comprensión estructural para anticipar los resultados en una escala mayor.

Tabla 36.

Tipo de respuestas pregunta 32

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes que respondieron correctamente: 22,2%	Indicaron que la figura formada por 20 cubos tiene 84 vértices y 164 aristas	Demostraron comprensión sólida del patrón geométrico y capacidad de generalización hacia casos mayores
Estudiantes con comprensión parcial: 22,2%	Identificaron correctamente el número de vértices, pero erraron al calcular las aristas	Mostraron reconocimiento del patrón, pero con dificultades para aplicarlo simultáneamente en ambas magnitudes
Estudiantes con errores conceptuales: 5,6%	Respondieron que la figura tendría 20 vértices y 88 aristas	Evidenciaron confusión al no considerar los vértices y aristas compartidos entre los cubos
Estudiantes que no respondieron: 11,1%	No ofrecieron respuesta ni justificación	Posibles dificultades en el razonamiento abstracto o falta de seguridad al aplicar la generalización

Fuente: Elaboración propia

22,2% estudiantes respondieron correctamente, indicando que la figura formada por 20 cubos tiene 84 vértices y 164 aristas, demostrando una comprensión sólida del patrón de crecimiento y una adecuada capacidad de generalización. Otro 22,2% identificaron correctamente el número de vértices, pero cometieron errores en el conteo o en la extrapolación del número de aristas, lo que sugiere que lograron reconocer parcialmente la regularidad, pero no consiguieron aplicarla de manera consistente en ambas variables. 5,6% estudiantes respondió que la figura tendría 20 vértices y 88 aristas, mostrando una confusión conceptual al no considerar la fusión de vértices y aristas comunes entre los cubos. Finalmente, 11,1% estudiantes no ofrecieron respuesta alguna, posiblemente debido a la complejidad del razonamiento requerido o a la falta de seguridad en el procedimiento.

En el caso de la pregunta #33, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

33. ¿Cómo cambia el número de vértices y aristas a medida que cambian las figuras en la secuencia? Explica tu respuesta:

R//

El propósito de la pregunta era valorar si los estudiantes comprenden la relación de crecimiento entre las figuras construidas con poli cubos, específicamente cómo varían los vértices y aristas cuando se incrementa el número de cubos en la torre. Esta pregunta evalúa la capacidad de identificar un patrón geométrico y expresarlo adecuadamente.

Tabla 37,
Tipo de respuestas pregunta 33

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2

Estudiantes con generalización correcta: 9%	Elaboraron una respuesta que no se ajusta exactamente a la pregunta, pero formularon una regla general sobre la secuencia	Evidencian pensamiento algebraico emergente, logrando abstraer el comportamiento general de la figura aunque no expliquen la relación directa entre vértices y aristas
Estudiantes con comprensión parcial o sin respuesta: 91%	No lograron establecer la relación de crecimiento entre los vértices y las aristas de las figuras	Reflejan dificultades en el reconocimiento del patrón geométrico y en la interpretación del cambio estructural conforme aumenta el número de cubos

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a los resultados, se evidencia que 9% de los estudiantes elaboró una respuesta que, si bien no se ajusta directamente a lo solicitado, demostró capacidad para generalizar la situación generando una regla general sobre la secuencia. Aunque no contesta de forma directa la relación entre vértices y aristas, sí muestra pensamiento algebraico emergente.

Por su parte, 27% estudiantes intentaron establecer una generalización, escribiendo expresiones como “4 por 2 + 4”. Estas respuestas sugieren que los estudiantes identificaron un patrón numérico, pero solo desde un ejemplo específico, sin explicar el cambio entre figuras ni relacionarlo explícitamente con vértices y aristas. Esto muestra comprensión parcial: reconocen regularidad, pero no logran vincularla conceptualmente al crecimiento estructural de los poli cubos.

Finalmente, 64% no respondieron la pregunta. Este porcentaje elevado sugiere una posible dificultad tanto en la interpretación de conceptos espaciales (vértices y aristas) como en la comprensión del enfoque de variación en una secuencia geométrica. También puede indicar inseguridad conceptual, pues la pregunta exige análisis más profundo que simples conteos.

En el caso de la pregunta #34, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

34. Escribe una expresión matemática o regla para calcular el número de vértices de cualquier figura en la secuencia, sabiendo el número de cubos:

R//

La pregunta buscaba evaluar la capacidad de los estudiantes para formular una expresión algebraica general que permitiera calcular el número de vértices de una figura construida con n cubos.

Tabla 38,
Tipo de respuestas pregunta 34

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes con expresión correcta: 14%	Escribieron expresiones como $4n + 4$ o $4(n - 1) + 8$, identificando correctamente el patrón de crecimiento	Demuestran comprensión sólida del razonamiento algebraico y capacidad para generalizar la relación entre cubos y vértices
Estudiantes con comprensión parcial: 7%	Intentaron generalizar mediante un ejemplo numérico (por ejemplo, $4 \cdot 2 + 4$), sin formular una expresión general	Reflejan incipiente pensamiento algebraico, aunque sin alcanzar el nivel de abstracción requerido
Estudiantes con errores conceptuales: 21%	Plantearon expresiones incorrectas como $8 \cdot 2 + 4$, confundiendo la relación entre cubos y vértices	Evidencian dificultades para identificar la estructura geométrica y para establecer relaciones proporcionales correctas
Estudiantes sin respuesta: 36%	No respondieron a la pregunta	Muestran dificultades para interpretar el enunciado y para aplicar el lenguaje algebraico a contextos geométricos

Fuente: Elaboración propia

Al analizar las respuestas, se observa que únicamente 14% estudiantes lograron proponer una expresión correcta, como $4n + 4$ o $4(n - 1) + 8$. Estas respuestas muestran que una minoría consiguió identificar adecuadamente el patrón de crecimiento y traducirlo a lenguaje algebraico, demostrando un nivel sólido de generalización. E1

Por otro lado, un 7 % de los estudiantes intentó generalizar, pero lo hizo mediante un ejemplo numérico ($4 \cdot 2 + 4$), lo cual evidencia una comprensión parcial del patrón sin alcanzar la abstracción requerida. Además, 21 % estudiantes presentaron errores conceptuales importantes, proponiendo expresiones como $8 \cdot 2 + 4$. Este tipo de respuestas sugiere dificultades para identificar la relación entre el número de cubos y los vértices, así como posibles confusiones con la estructura de la figura.

Un dato relevante es que 36 % de los estudiantes no respondieron a la pregunta. Este porcentaje significativo puede interpretarse como falta de comprensión del concepto de vértices, inseguridad frente al uso de expresiones algebraicas o dificultad para interpretar el enunciado. La ausencia de respuesta indica que la consigna presentó un desafío considerable para una parte importante del grupo.

En el caso de la pregunta #35, que se respondía de acuerdo con la secuencia anterior, que decía:

35. ¿Cómo hallamos el número de aristas en una figura con un número “n” de cubos? Escribe una expresión matemática para este caso:

R//

La pregunta pedía encontrar una expresión matemática que permitiera calcular el número de aristas de una torre formada por n cubos.

Tabla 39,
Tipo de respuestas pregunta 35

Tipos de respuesta	Variante de respuesta #1	Variante de respuesta #2
Estudiantes con expresión correcta: 36%	Propusieron expresiones como $8n + 4$ o $4(n - 1) + 12$, identificando con precisión el patrón de crecimiento en las aristas	Demuestran comprensión sólida de la estructura geométrica y capacidad para traducir regularidades en expresiones algebraicas
Estudiantes con comprensión parcial: 14%	Realizaron multiplicaciones numéricas concretas (por ejemplo, $20 \cdot 4$ o $20 \cdot 2$), sin vincularlas con el valor general de n	Reflejan intento de cálculo empírico, pero sin alcanzar la generalización algebraica requerida
Estudiantes sin respuesta: 36%	No respondieron la pregunta o dejaron el espacio en blanco	Evidencian dificultades para identificar la estructura de crecimiento o inseguridad frente al uso del lenguaje algebraico

Fuente: Elaboración propia

En este caso, 36 % de los estudiantes respondieron correctamente, ofreciendo expresiones como $8n + 4$ o $4(n - 1) + 12$. Estas respuestas muestran que lograron identificar cómo crece la figura y traducir el patrón a una regla general válida para cualquier número de cubos.

Por otra parte, 14 % estudiantes realizaron multiplicaciones como $20 \cdot 4$ o $20 \cdot 2$, lo que indica que intentaron trabajar con números pero sin relacionarlos con el valor n . Este tipo de respuestas refleja un intento de cálculo basado en ejemplos puntuales, sin llegar al nivel de generalización algebraica que exigía la pregunta.

Un grupo importante, 36 % estudiantes, no respondió la consigna. Esto podría relacionarse con dificultades para comprender la estructura de la figura, para identificar el patrón de crecimiento o para expresar regularidades mediante lenguaje algebraico. También puede indicar inseguridad frente a la formulación simbólica que requiere la tarea.

3.4.3. Estrategias cognitivas para el estudio de patrones geométricos en el desarrollo del pensamiento variacional

El estudio de estrategias cognitivas que los estudiantes despliegan al abordar las tareas designadas en la secuencia didáctica facilitó una comprensión más acabada del modo en que estos construyen sentido alrededor de los modelos, y cómo progresan, mostrando diferentes niveles de dificultad, hacia esquemas de generalización más formales. Analizar estas estrategias se estructuró teniendo en cuenta lo sucedido en cada tarea, puesto que cada una incitó procesos cognitivos particulares y reveló distintos grados de entendimiento. Adicionalmente, este análisis se vinculó con las categorías conceptuales expuestas por Rico (1997) acerca del pensamiento variacional y la comprensión de patrones, además, con las propuestas de Ellis (2007) sobre los tipos de generalización que surgen en el contexto educativo. Esta combinación posibilitó dar constancia tanto de las conductas visibles en los trabajos de los alumnos como de los mecanismos conceptuales que fundamentan sus contestaciones.

En la primera tarea, diseñada para el reconocimiento inicial del patrón geométrico, los alumnos desplegaron estrategias basadas en la observación visual y el conteo directo de los elementos de la figura, eso sí se amolda, fundamentalmente, al enfoque de Rico. La mayoría de las respuestas se distinguieron por un análisis perceptivo, donde el estudiante reconoce el crecimiento entre las figuras solamente desde lo que ve, aun sin separar la estructura en partes

fijas y variables. Esta forma de aproximación, coincide con lo descrito por Rico (1997), él subraya que, en las primeras etapas del estudio de patrones, los estudiantes se inclinan a apoyarse en regularidades que aparentan serlo, y en relaciones inmediatas entre figuras consecutivas, favoreciendo la identificación visual, por encima de establecer relaciones estructurales más profundas. Desde la perspectiva de Ellis (2007), esto se enlaza con formas tempranas de generalización inductiva, en las que el alumno entiende cómo cambia la figura, pero todavía no articula reglas explícitas ni establece conexiones entre términos no consecutivos.

Colectivamente, estas pruebas sugieren que, en esta labor de inicio, los alumnos se encontraron principalmente en niveles de reconocimiento perceptual, similares a las primeras formas de generalización estructural, tal como se muestra a continuación:

Ilustración 4.

Respuesta del estudiante en la pregunta 4

4. ¿Cuántos círculos negros tendrá la figura 10 si se desea dibujar? ¿Cuántos círculos blancos? ¿Cuántos círculos tendrá en total? Explica cómo lo has averiguado:

R//

Círculos negros: 3

Círculos blancos: 10

Total de círculos: 13

Justificación:

por la secuencia de uno en uno y los 3
de arriba siempre serán iguales

Fuente: elaboración propia

En la respuesta anterior podemos observar que se evidencia justamente el tipo de razonamiento descrito en el párrafo anterior. Su respuesta se concentra en contar directamente los círculos negros y blancos que observa en la regularidad, sin explicitar ninguna descomposición estructural del patrón ni señalar elementos invariantes y variables. En su justificación “porque las secuencias de uno en uno y los tres de arriba siempre serán iguales” se

aprecia un reconocimiento perceptivo de la regularidad, basado en lo que Rico (1997) denomina *relaciones inmediatas entre figuras consecutivas*, donde el estudiante identifica repeticiones visibles, pero todavía no formula una regla general que trascienda lo observado.

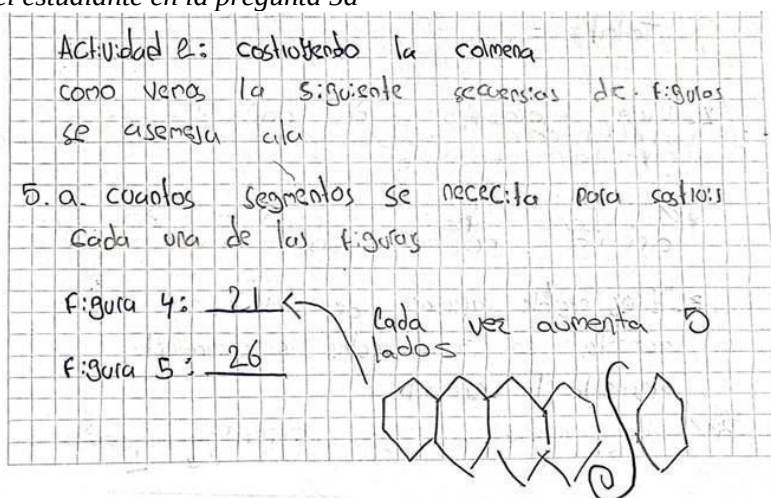
Asimismo, esta explicación refleja lo que Ellis (2007) clasifica como buscar, la cual surge cuando el estudiante reproduce un patrón porque ve que algo se repite, pero sin construir aún una justificación estructural o un argumento que considere la organización interna del patrón. En este caso, la referencia a que “siempre serán iguales” se apoya exclusivamente en la constancia visual y no en un análisis matemático de la estructura.

Sin embargo, también emergieron indicios de estrategias más avanzadas en algunos estudiantes, quienes comenzaron a analizar la figura no solo como un todo, sino en sus componentes estructurales. Al separar la figura en elementos que permanecen fijos y aquellos que cambian de una figura a otra, estos estudiantes mostraron un tránsito hacia una comprensión más formal del patrón, tal como lo planteado por Rico (1997), quien sostiene que el desarrollo del pensamiento variacional implica identificar la estructura interna de un patrón, distinguiendo entre sus partes invariantes y aquellas que varían, pues dicho reconocimiento permite avanzar hacia formas más generales y abstractas de razonamiento.

Observemos el siguiente ejemplo:

Ilustración 5.

Respuesta del estudiante en la pregunta 5a



Fuente: elaboración propia

En la respuesta anterior el estudiante deja de observar la figura como un conjunto completo y empieza a descomponerla en partes, identificando qué segmentos se mantienen y cuáles aumentan en cada paso. Esta forma de análisis coincide con lo planteado por Rico (1997) respecto al reconocimiento de la estructura del patrón, ya que el estudiante señala explícitamente el elemento que “cada vez aumenta”, lo cual indica una comprensión más formal del crecimiento de la secuencia.

En la segunda tarea, centrada en traducir el patrón a una representación tabular o verbal, se evidenciaron estrategias de mayor complejidad cognitiva. Varios estudiantes lograron establecer correspondencias entre las figuras y los valores numéricos, lo cual indica un avance hacia la coordinación de múltiples representaciones, un aspecto clave señalado por Rico (1997) en su análisis del pensamiento variacional.

Ilustración 6.

Respuesta del estudiante en la pregunta 10

10. Analizando las gráficas iniciales:

- a. completa la siguiente tabla que relaciona el número de peldaños de una escalera y el total de palitos necesarios para construirla:

Número de peldaños	Total de palitos
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

- b. De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es la relación que existe entre la cantidad de peldaños y el total de palitos que se utilizan para construir las respectivas figuras en forma de escalera? Explica tu respuesta:

R//

que los peldaños crecen en 1
y los palitos en 3

Fuente: elaboración propia

La producción de esta estudiante muestra claramente lo mencionado en el párrafo la respuesta evidencia la capacidad de establecer correspondencias numéricas entre cada figura y el total de palitos, lo cual indica que logró trasladar el patrón geométrico a una representación tabular. Este tipo de estrategia corresponde a lo que Rico (1997) denomina *coordinación de representaciones*, ya que la estudiante no se quedó solo en la observación visual del crecimiento, sino que identificó la relación funcional entre el número de peldaños y los palitos necesarios. Además, su respuesta escrita muestra un intento de describir verbalmente la regularidad, lo que refuerza el tránsito hacia una comprensión más analítica del patrón.

No obstante, muchos estudiantes continuaron dependiendo del conteo para llenar la tabla, lo que sugiere una comprensión aún muy ligada a lo concreto. Aun así, la transición hacia la representación tabular permitió que algunos estudiantes empezaran a reconocer el crecimiento

constante del patrón, expresándolo con frases como “aumenta dos cada vez”, lo que constituye un paso significativo hacia la comprensión relacional. miremos el ejemplo de la siguiente imagen:

Ilustración 7.

Respuesta del estudiante en la pregunta 9

Actividad 3: las escaleras

A continuación, se observan figuras en forma de escalera que se construyen agregando palitos en cada nueva figura. Observa las figuras 2 y 3 y completa las faltantes:

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Con la información anterior responde las preguntas 9 a 14:

9. Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 palitos respectivamente, ¿Cuántos palitos se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 y 5 peldaños?

R//

Con 4 peldaños: 14 palitos

Con 5 peldaños: 17 palitos

Fuente: elaboración propia

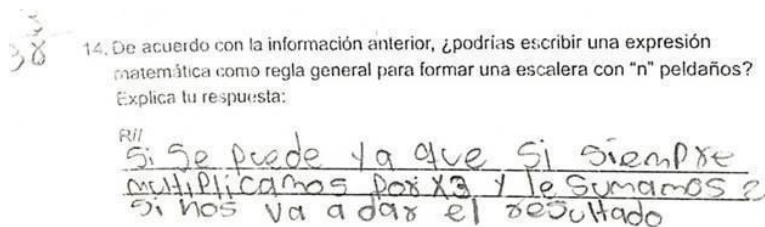
En esta respuesta se observa claramente una estrategia donde el estudiante se apoya en la percepción directa del patrón y en el conteo inmediato, sin recurrir aún a una descomposición estructural de la figura. Tal como plantea Rico (1997), el estudiante identifica regularidades visibles, lo que confirma que su razonamiento se basa en relaciones aparentes entre las partes de la figura. Esto evidencia una comprensión incipiente del patrón, centrada en lo observable y aún distante de una formulación general o estructural.

La tercera tarea, orientada a la formulación de la regla general, representó el mayor desafío para los estudiantes y, al mismo tiempo, permitió observar con claridad la diversidad de estrategias cognitivas presentes en el aula. Una parte del grupo continuó trabajando mediante repetición de casos, reproduciendo la regla solo para valores específicos de n , lo cual coincide con lo descrito por Rico (1997) en relación con los estudiantes que permanecen en un nivel aritmético de generalización, centrado en la verificación caso por caso sin llegar a establecer una relación funcional. Al mismo tiempo, esta dificultad también se alinea con lo planteado por Ellis (2007), quien señala que muchos estudiantes se quedan en procesos de razonamiento inductivo, es decir, predicen resultados basados únicamente en observar varios ejemplos, pero sin lograr construir una estructura generalizada que sea válida para cualquier término de la secuencia. Desde esta perspectiva, la tendencia a repetir casos concretos y la ausencia de una expresión algebraica general evidencian que estos estudiantes aún no consolidan la transición hacia la generalización expresiva, considerada por Ellis como un componente central del pensamiento algebraico temprano.

. Por ejemplo, en este caso que, aunque no escribió una fórmula general, la describió.

Ilustración 8.

Respuesta del estudiante en la pregunta 14



Fuente: elaboración propia

La respuesta del estudiante muestra justamente lo señalado en la literatura sobre esta fase del trabajo con patrones. De acuerdo con Ellis (2007), cuando los alumnos formulan reglas generales a partir de casos particulares suelen apoyarse en el razonamiento inductivo, es decir, en identificar una regularidad que se repite y proyectarla hacia cualquier término del patrón. En este caso, el estudiante observa que “siempre multiplicamos por 3 y le sumamos 2”, lo que evidencia un intento de construir una expresión general basada en la relación constante detectada entre las figuras. Aunque la justificación aún es parcialmente empírica, coincide con lo descrito por Rico (1997) respecto a los primeros pasos hacia la generalización algebraica, donde los alumnos empiezan a verbalizar una estructura que permanece estable a lo largo de la secuencia.

Otros estudiantes evidenciaron progresos importantes al formular reglas verbales como *“la figura n tiene dos más que la anterior”* o *“se multiplica el número de la figura por dos y se suma uno”*. Este tipo de enunciados revela un primer intento por expresar la regularidad de manera general, lo cual coincide con lo planteado por Ellis (2007) respecto a la fase de *justificación inductiva*, en la que los estudiantes comienzan a utilizar evidencias de varios casos para construir una afirmación general, aunque todavía no formalizada algebraicamente.

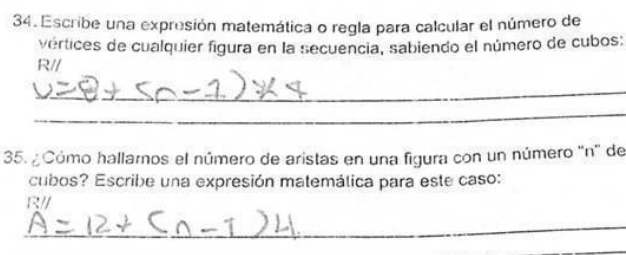
Asimismo, estas producciones se relacionan con lo que Rico (1997) denomina el establecimiento de relaciones dentro del patrón. Según esta autora, cuando un estudiante identifica cómo crece el patrón de una figura a otra y trata de expresarlo con palabras, está avanzando hacia la comprensión de la estructura funcional del patrón, aun si la representación aún no alcanza un nivel simbólico formal.

No obstante, solo un grupo reducido logró formular expresiones algebraicas apropiadas, escribiendo reglas del tipo $f(n)=2n+1$ o expresiones equivalentes. Este logro representa lo que

Ellis (2011) denomina generalización extendida, donde el estudiante no solo reconoce la regularidad, sino que además es capaz de abstraerla y expresarla mediante lenguaje algebraico. A su vez, este tipo de producción constituye, en términos de Rico, un avance hacia el tránsito desde lo numérico a lo algebraico, clave para el desarrollo del pensamiento variacional. miremos el siguiente ejemplo:

Ilustración 9.

Respuesta del estudiante en la pregunta 34 y 35



Fuente: elaboración propia

La respuesta presentada propone una expresión algebraica general para calcular una cantidad en función de n , lo que refleja un avance importante hacia la generalización formal. Este comportamiento coincide con lo señalado por Ellis (2007), quien describe que la formulación de reglas generalizables implica reconocer una relación funcional estable entre las variables del patrón. Del mismo modo, responde a lo planteado por Rico (1997) respecto a la capacidad de identificar la estructura invariante del patrón y expresarla mediante una regla simbólica.

En este caso, el estudiante deja de depender del conteo específico y construye una expresión algebraica que funciona para cualquier figura, lo que demuestra una transición clara desde el razonamiento inductivo basado en casos particulares hacia una generalización estructural, tal como lo proponen ambos autores.

Desde el enfoque de Rico, esta tarea evidencia el tercer nivel del análisis de patrones: la formulación y validación de la generalización. La mayoría de los estudiantes logró formular una regla solo parcialmente general, pero no verificó su validez para términos alejados, lo que revela la necesidad de seguir fortaleciendo la conexión entre representación visual, estructura del patrón y expresión simbólica. El OVA, en este caso, cumplió una función fundamental, pues ofreció actividades para probar la fórmula con valores grandes, permitiendo que los estudiantes detectaran inconsistencias en sus reglas cuando estas no coincidían con el comportamiento real del patrón. Este proceso constituye un acercamiento a la validación, aunque todavía no del todo formal.

Desde la perspectiva de Ellis, en esta tarea se observó un comportamiento heterogéneo: algunos estudiantes permanecieron en la generalización inductiva, otros avanzaron hacia la relacional, y solo unos pocos alcanzaron la generalización basada en propiedades, que implica justificar por qué la expresión propuesta funciona para cualquier término del patrón. Las producciones de este grupo pequeño se caracterizaron por explicar principios estructurales de la figura y no únicamente por extrapolar la regularidad observada en los primeros casos.

El análisis integral de las tres tareas desarrolladas por los estudiantes muestra un tránsito progresivo desde estrategias centradas en la percepción inmediata hacia formas más estructuradas de razonamiento, coherentes con los planteamientos teóricos de Rico (1997) y Ellis (2007, 2011) sobre el estudio de patrones y la emergencia del pensamiento algebraico temprano. En conjunto, los resultados indican que los estudiantes iniciaron su aproximación a las secuencias geométricas apoyándose mayoritariamente en procedimientos intuitivos y de carácter aditivo, pero que, a través del trabajo sistemático y del soporte brindado por el Objeto Virtual de

Aprendizaje (OVA), fueron capaces de avanzar hacia comprensiones más organizadas y, en algunos casos, hacia la formulación de reglas generales.

Desde la perspectiva de Rico (1997), este proceso refleja el desplazamiento desde una comprensión superficial del patrón, basada en la apariencia visual, hacia una comprensión estructural, que exige identificar elementos invariantes, reconocer relaciones sistemáticas y construir conexiones entre distintos registros de representación. Los resultados obtenidos confirman esta trayectoria: las primeras tareas se caracterizaron por la observación perceptiva y el conteo, tal como predice Rico para las fases iniciales del pensamiento variacional, mientras que las tareas posteriores evidenciaron intentos de descomponer las figuras en partes fijas y variables y de relacionar dichos componentes con el término general de la secuencia.

Por su parte, los aportes de Ellis (2007, 2011) permiten interpretar el avance de los estudiantes desde la perspectiva del razonamiento generativo, especialmente en lo que respecta a la identificación de regularidades, la construcción de argumentos inductivos y el uso parcial o completo de generalizaciones. De acuerdo con esta autora, los estudiantes suelen comenzar elaborando generalizaciones aritméticas locales, centradas en cambios entre términos consecutivos, y solo posteriormente desarrollan generalizaciones globales que permiten formular expresiones para cualquier figura n . La evidencia obtenida es coherente con dicha progresión: aunque muchos estudiantes permanecieron en un nivel aditivo-local, otros lograron construir expresiones verbales o simbólicas que expresaban relaciones globales, lo cual constituye un indicio claro de generalización emergente según la clasificación de Ellis.

Asimismo, el papel del OVA fue importante para favorecer estos avances. Siguiendo lo expuesto por Rico sobre la importancia de articular distintos sistemas de representación, el

entorno digital permitió a los estudiantes visualizar las figuras, manipularlas dinámicamente y contrastar sus conjeturas con retroalimentación inmediata. A su vez, en línea con Ellis, el recurso digital proporcionó un espacio propicio para que los estudiantes justificaran sus observaciones, ensayaran reglas y confrontaran inconsistencias, aspectos esenciales para el desarrollo del razonamiento inductivo y la validación de generalizaciones.

No obstante, aunque el progreso fue evidente, también se identificaron dificultades coherentes con las reportadas en la literatura especializada. Tanto Rico como Ellis subrayan que la formulación del término general y su justificación representan uno de los desafíos más complejos para los estudiantes, y dicha tendencia se confirmó en este estudio. La mayoría logró identificar regularidades y expresar relaciones locales, pero solo un pequeño grupo fue capaz de traducir esas observaciones a una regla general formalmente correcta y aplicable a cualquier n . Este hallazgo coincide con la afirmación de Rico sobre la dificultad que supone el tránsito del patrón concreto a la expresión algebraica, y con la postura de Ellis, quien señala que la generalización simbólica requiere un nivel de abstracción y control operativo que no todos los estudiantes alcanzan en las primeras experiencias con patrones.

Conclusiones

En relación con cada objetivo específico y con el objetivo general, además, con la pregunta problematizadora, los resultados obtenidos a lo largo de la implementación y el análisis permiten responder de manera integrada al objetivo general y a los objetivos específicos del proyecto, mostrando cómo las actividades diseñadas, el uso del Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) y los marcos teóricos de Rico (1997) y Ellis (2007) contribuyeron a caracterizar y comprender las estrategias cognitivas que los estudiantes emplearon en el estudio de patrones geométricos, así como el papel de estas prácticas en el desarrollo del pensamiento variacional y en la introducción temprana al razonamiento algebraico.

En primer lugar, se evidenció que los estudiantes movilizan una amplia gama de estrategias cognitivas cuando trabajan con patrones geométricos. Estas estrategias no se presentan de manera homogénea, sino que emergen progresivamente en función de las demandas de cada tarea, de su familiaridad con las representaciones involucradas y de la complejidad conceptual de la actividad. Desde los niveles iniciales, los estudiantes recurren a procedimientos intuitivos basados en la observación visual y el conteo directo; no obstante, conforme avanza la secuencia de tareas, comienzan a emplear procesos de análisis estructural, identificación de invariantes, comparación de términos y formulación de regularidades que superan la mera reproducción de casos. En este sentido, el estudio permitió describir cómo los estudiantes transitan desde estrategias puramente descriptivas hacia aproximaciones más abstractas, propias del pensamiento funcional y algebraico.

En cuanto a identificar las estrategias cognitivas evidenciadas en cada tarea, los análisis mostraron que el reconocimiento de la estructura del patrón, el establecimiento de relaciones

entre términos y la formulación de reglas de generalización fueron procesos clave que orientaron el trabajo de los estudiantes. Estas acciones coinciden con los elementos propuestos por Rico como pilares del pensamiento variacional. Las producciones iniciales evidenciaron un predominio de estrategias perceptivas e inductivas; sin embargo, con el apoyo de las actividades, los estudiantes empezaron a descomponer las figuras, analizar componentes fijos y variables y explorar correspondencias entre representaciones geométricas, tabulares y verbales. El avance hacia la generalización fue gradual y mostró distintos niveles de sofisticación, hecho que confirma la pertinencia de analizar estas estrategias desde una perspectiva cualitativa que reconozca la diversidad de trayectorias cognitivas posibles.

Relacionado con el análisis del papel del OVA como herramienta de apoyo, la implementación evidenció que los recursos digitales no solo facilitaron la interacción con las figuras, sino que también promovieron procesos de reflexión, verificación y ajuste de estrategias. El entorno virtual permitió que los estudiantes visualizaran dinámicamente las variaciones, exploraran patrones con mayor autonomía y probaran sus conjeturas en tiempo real, lo que favoreció la validación de generalizaciones y la identificación de inconsistencias en las reglas propuestas. En términos pedagógicos, el OVA actuó como un mediador significativo entre las representaciones concretas y simbólicas, ofreciendo un puente entre la observación intuitiva y la construcción formal de expresiones generales.

En relación con la interpretación de las estrategias observadas a partir de los referentes teóricos de Rico y Ellis, los resultados muestran una correspondencia clara con las categorías planteadas por ambos autores. Desde el enfoque de Rico, las estrategias observadas dan cuenta de un avance progresivo en el pensamiento variacional, manifestado en la capacidad de los estudiantes para reconocer regularidades, abstraer relaciones entre los términos y proponer reglas

que describen el comportamiento del patrón. De manera complementaria, el marco de Ellis permitió clasificar los tipos de generalización presentes en las respuestas: inicialmente predominó la generalización inductiva, basada en la observación de casos particulares; posteriormente aparecieron manifestaciones de generalización relacional, donde los estudiantes compararon términos no consecutivos y describieron relaciones estructurales; y en menor medida se observaron formas incipientes de generalización basada en propiedades, propias de niveles más avanzados de razonamiento algebraico.

El trabajo con patrones geométricos constituye una vía privilegiada para introducir los conceptos fundamentales del álgebra en grados básicos, dado que permite a los estudiantes explorar regularidades, formular conjeturas, representar relaciones y construir reglas generales a partir de situaciones visuales y manipulativas. Estas prácticas son esenciales para el desarrollo del pensamiento variacional, entendido como la capacidad de analizar cómo cambian las cantidades y cómo se relacionan entre sí, y cuya presencia temprana es determinante para la comprensión del álgebra escolar. La evidencia generada muestra que, cuando los estudiantes participan en tareas que articulan exploración visual, traducción entre representaciones y formulación de generalizaciones, logran avances significativos en su comprensión de los patrones y en su capacidad para expresar relaciones funcionales.

Todo esto, permite afirmar que el proyecto logró caracterizar de manera sólida las estrategias cognitivas empleadas por los estudiantes, demostrando que el estudio de patrones geométricos no solo potencia la comprensión de regularidades, sino que constituye un eje fundamental en la formación del pensamiento algebraico. Asimismo, el uso del OVA se consolidó como un recurso didáctico eficaz, capaz de potenciar la reflexión, fortalecer la argumentación y ampliar las oportunidades de aprendizaje. Los hallazgos invitan a continuar

profundizando en propuestas pedagógicas que integren actividades de generalización con tecnología educativa, con el fin de fortalecer el pensamiento variacional desde los primeros años de escolaridad y favorecer una transición más natural, significativa y sólida hacia el estudio formal del álgebra.

Recomendaciones

A partir del análisis realizado y de los avances y dificultades identificados en los estudiantes durante el estudio de patrones geométricos, se proponen diversas recomendaciones orientadas a fortalecer tanto los procesos de enseñanza como el diseño de futuras intervenciones didácticas relacionadas con la generalización algebraica y el desarrollo del pensamiento variacional.

En primer lugar, se sugiere integrar de manera progresiva tareas que permitan transitar desde el reconocimiento visual del patrón hacia una comprensión estructural, siguiendo los planteamientos de Rico sobre la importancia de distinguir los elementos constantes y variables en una secuencia. En este sentido, es conveniente diseñar actividades que no solo exijan contar o comparar figuras consecutivas, sino que obliguen al estudiante a identificar la estructura profunda del patrón, analizar su organización interna y justificar la relación entre sus componentes. Ello favorece que el aprendizaje no se limite a una regularidad superficial, sino que se oriente hacia un razonamiento más formal y generalizable.

En segundo lugar, se recomienda fortalecer el uso articulado de múltiples representaciones, de acuerdo con lo propuesto por Ellis, quien resalta la necesidad de que el estudiante conecte lo visual, lo numérico, lo tabular y lo algebraico para avanzar hacia procesos de generalización más sólidos. En las actividades observadas, varios estudiantes lograron

establecer estas conexiones, pero otros permanecieron anclados en representaciones únicas, principalmente el conteo directo, lo cual evidencia la importancia de promover tareas que obliguen a coordinar distintas formas de expresar la misma relación.

Asimismo, se aconseja profundizar en actividades específicas de justificación y argumentación matemática. Aunque muchos estudiantes lograron identificar la regla de crecimiento, la explicación de por qué dicha regla funciona para cualquier término de la secuencia es un aspecto que aún requiere consolidación. Incluir momentos de discusión colectiva, análisis de errores y comparación de estrategias puede fortalecer la comprensión de las razones detrás de una generalización, tal como lo demanda la literatura en pensamiento variacional.

En lo referente al Objeto Virtual de Aprendizaje, se sugiere continuar desarrollándolo y ampliándolo para que permita un trabajo más autónomo del estudiante y ofrezca retroalimentación inmediata en cada fase del proceso. El OVA demostró ser un recurso valioso para apoyar la exploración visual y la verificación simbólica, pero puede enriquecerse incorporando simulaciones dinámicas, explicaciones paso a paso y actividades que inviten a formular hipótesis antes de validar una regla. De este modo, se potenciaría aún más la transición desde la observación hacia el razonamiento estructural.

Por otra parte, resulta pertinente incluir evaluaciones formativas intermedias que permitan identificar con mayor precisión los momentos en que el estudiante se queda anclado en estrategias básicas, como el conteo, y ofrecer apoyos oportunos que faciliten avanzar hacia niveles superiores de abstracción. Estas evaluaciones deben privilegiar la reflexión sobre el proceso, más que sobre la respuesta final.

Bibliografía

- Alsina, Á., & Pincheira Hauck, N. G. (2022). El cambio: un conocimiento esencial del álgebra temprana= Change: essential knowledge of early algebra. *Revista científica ecociencia*, 2022, vol. 9, núm. 6, p. 49-76.
- Bravo, R. N. (2016). Diseño, construcción y uso de Objetos de Aprendizaje OVA.. [info:eu-repo/semantics/bachelorThesis, Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD]. Repositorio Institucional UNAD.
<https://repository.unad.edu.co/handle/10596/8892>
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148.
- Cabrera Medina, J. M., Sánchez Medina, I. I., & Rojas Rojas, F. (2016). Uso de objetos virtuales de aprendizaje OVAs como estrategia de enseñanza – Aprendizaje Inclusivo y Complementario para los cursos teórico–prácticos . *Revista Educación En Ingeniería*, 11(22), 4–12. <https://doi.org/10.26507/rei.v11n22.602>
- Carmona Trujillo, A y Velasco García, M. (2018). Características del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de quinto grado de la educación básica a partir de tareas sobre generalización de patrones. Universidad del Valle.
- Castañeda Martínez, C, Castañeda Martínez, S y Torres Rengifo, L. (2019). Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM
- Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S., & Paternina, Y. (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del álgebra temprana: Primary School Students' arguments in early algebra context. *Educación y Humanismo*, 21(37), 120-138.
- Chavarría, J., & Alfaro, C. (2005). Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld. In Ponencia presentada ante el IV Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC). Instituto Tecnológico de

Cartago, Costa Rica. Recuperado de <http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/Resolución De Problemas.pdf>.

- Chisag, J. C. C., Lagla, G. A. F., Álvarez, G. S. V., Moreano, J. A. C., Pico, O. A. G., & Chicaiza, E. M. I. (2017). Utilización de recursos didácticos interactivos a través de las TIC'S en el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de matemática. *Boletín Redipe*, 6(4), 112-134.
- Collazos, J. A. (2022). Ova para el Aprendizaje de Expresiones Algebraicas en Exelearning en la I.E San Antonio de Padua en Timbío cauca. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11371/6178>
- Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-105.
- Espinoza, J., Lupiáñez J. L. & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en Educación Matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* (14)2, 1-12
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. & Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal or Research in Educational Psychology*, 14(2), 368-392.
- Fernández Palechor, F. (2014). Estrategias didácticas para fortalecer el aprendizaje de la matemática en la transición de la aritmética al álgebra.
- Gavilán Bouzas, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar:¿ puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?. *Revista de Investigación en la Escuela*, 73, 95-108.
- González Trujillo, E. S. (2012). Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas (Doctoral dissertation).
- González, J. E. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, 3(39), 64-79.

- Mason, J., A. Graham, D. Pimm y N. Gower (1985), *Routes of Roots of Algebra*, Gran Bretaña, The Open University Press.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. V1. Bogotá, Colombia
- Murillo, F. J., Román, M., & Atrio, S. (2016). Los recursos didácticos de matemáticas en las aulas de educación primaria en América Latina: Disponibilidad e incidencia en el aprendizaje de los estudiantes. *Education Policy Analysis Archives/Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, 24, 1-22.
- Pardo, J. C. O., Quituzaca, E. C. C., & Freire, E. E. E. (2020). ¿ Se emplean recursos didácticos en la enseñanza de matemáticas en la educación básica elemental? Un estudio de caso. *Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas*, 3(3), 48-55.
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press
- Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Rico, L. (1997). *Los patrones en la educación matemática*. UNO, 13, 17–27.
- Rico, L. (2016). *Pensamiento matemático y razonamiento variacional en la educación obligatoria*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 5–34.
- Rojas Hincapié, C. (2015). *Objetos virtuales de aprendizaje como herramienta para la enseñanza del álgebra en el grado octavo de la Institución Educativa Ana de Castrillón*.
- Santana, M. A. L., Ulloa, F. J. J., & Alcalá, M. T. C. (2024). Dificultades de los Estudiantes en el uso de las reglas del Algebra. *Matemáticas, Ingeniería y Ciencias Ambientales*, 7(12), 16-26.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.
- Solares, M. J. A. S. (2009). Introducción temprana del álgebra, una oportunidad para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas.
- Torres, Y. S. Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8 del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje.
- Trigo, M. S. (2019, April). La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital. In XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.
- Vergel Causado, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. Pna.
- Zapatera Llinares, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*.

Anexos

Anexo A. Secuencia didáctica diseñada para la investigación

TAREA 1: Descubriendo los cambios y regularidades

En esta tarea te invitamos a observar cómo ciertas regularidades numéricas y visuales se repiten y crecen de manera ordenada, mientras otras cambian. A partir de estas observaciones, aprenderás a describir esas regularidades usando lenguaje algebraico, dando un primer paso hacia la comprensión del álgebra como una herramienta para pensar, analizar y predecir.

En esta tarea, tu desafío será identificar patrones y tratar de representarlos. De esta manera, comenzarás a construir el puente entre la aritmética que ya conoces y el álgebra que estás por descubrir.

Actividad 1: La “T” que crece

A continuación, observa la forma representada por círculos negros y en blanco y la manera como esta cambia al agregar círculos, obteniéndose cada figura:



Figura 1

4 círculos

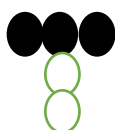


Figura 2

5 círculos

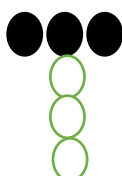


Figura 3

6 círculos

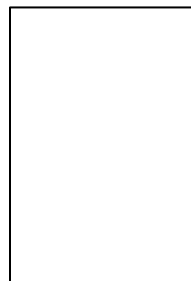


Figura 4

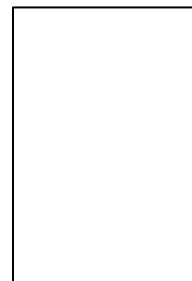


Figura 5

A continuación, responde las preguntas 1 a 4 con la anterior información:

1. Completa la secuencia dibujando las figuras 4 y 5 y escribe la cantidad total de círculos que tiene cada una:

Figura 4= _____

Figura 5= _____

2. ¿Qué elementos (círculos) de cada figura permanecen siempre igual? ¿Cuántos círculos tiene?

R//

3. ¿Es posible afirmar que cada figura aumenta en 3 círculos sucesivamente? argumenta tu respuesta.

R//

4. ¿Cuántos círculos negros tendrá la figura 10 si se desea dibujar? ¿Cuántos círculos blancos? ¿Cuántos círculos tendrá en total? Explica cómo lo has averiguado:

R//

Círculos negros: ____

Círculos blancos: ____

Total de círculos: ____

Justificación:

Actividad 2: Construyendo la colmena

Como vemos, la siguiente secuencia de figuras se asemeja a la construcción de una colmena de abejas. Para empezar, se necesitan seis segmentos de recta para construir el hexágono de la figura 1, once segmentos para construir la figura 2 (formada por dos hexágonos) y dieciséis segmentos para construir la figura 3 (formada por tres hexágonos), organizados así:



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4



Figura 5

De acuerdo con lo anterior, responde las preguntas 5 a 8:

5. Considerando la forma en que aumenta el número de segmentos y cambian las figuras 1 a 3, dibuja las figuras 4 y 5 en los cuadros y responde:

- a. ¿Cuántos segmentos se necesitan para construir cada una de las figuras?

Figura 4: _____

Figura 5: _____

- b. ¿Cuánto cambia la cantidad de segmentos empleados para construir las figuras de la 1 a la 5 de manera sucesiva? Explica tu respuesta:

R//

6. ¿Cuántos segmentos se necesitarían para construir la figura número 8? Selecciona y argumenta tu respuesta:

- a. 48
- b. 41
- c. 45
- d. 40

Explica cómo llegaste a la conclusión:

R//

7. ¿Cuántos segmentos se necesitarían para construir la figura con 10 hexágonos? Explica tu respuesta:

R//

8. ¿Existe algún procedimiento matemático que permita conocer la cantidad de segmentos que se necesitan para construir cualquier figura de la secuencia a partir de la información en las primeras figuras? Escríbelo y propón un ejemplo que argumente tu respuesta:

Procedimiento matemático: _____

Ejemplo:

Tarea 2: Explorando patrones

En esta tarea tendrás la oportunidad de analizar diferentes tipos de secuencias y estructuras que crecen de forma ordenada. Además, a partir de representaciones con dibujos, tablas y números, comenzarás a construir expresiones generales que explican cómo se forman estos patrones.

También, empezarás a descubrir reglas generales usando letras y símbolos. Así, poco a poco, estarás desarrollando una nueva forma de pensar matemáticamente.

Actividad 3: las escaleras

A continuación, se observan figuras en forma de escalera que se construyen agregando palitos en cada nueva figura. Observa las figuras 2 y 3 y completa las faltantes:



Figura 1



Figura 2



Figura 3

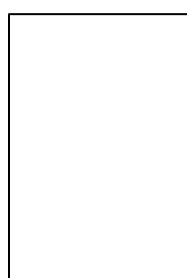


Figura 4

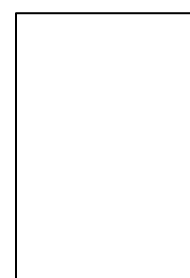


Figura 5

Con la información anterior responde las preguntas 9 a 14:

9. Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 palitos respectivamente, ¿Cuántos palitos se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 y 5 peldaños?

R//

Con 4 peldaños:_____

Con 5 peldaños:_____

10. Analizando las gráficas iniciales:

- a. completa la siguiente tabla que relaciona el número de peldaños de una escalera y el total de palitos necesarios para construirla:

Número de peldaños	Total de palitos
1	
2	
3	11
4	
5	
6	

- b. De acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es la relación que existe entre la cantidad de peldaños y el total de palitos que se utilizan para construir las respectivas figuras en forma de escalera? Explica tu respuesta:

R//

11. Una persona afirma que se necesitan 29 palitos para construir una escalera con 9 peldaños, ¿esta afirmación es verdadera o falsa? Explica tu respuesta:

R//

12. ¿Cuántos palitos se necesitarán para una escalera de 50 peldaños? Explica tu respuesta:

R//

13. Si sabemos que se necesitan 335 palitos para hacer una escalera de 111 peldaños. ¿Cuántos palitos se necesitarán para hacer una escalera de 112 peldaños? Explica tu respuesta:

R//

14. De acuerdo con la información anterior, ¿podrías escribir una expresión matemática como regla general para formar una escalera con “n” peldaños? Explica tu respuesta:

R//

Actividad 4: la serie numérica

Dada la siguiente secuencia, completa los números que faltan en cada línea y analiza:

_____, 78.560, 77.560, _____, _____, 74.560, _____, 72.560

Ahora responde las preguntas 15 a 19:

15. ¿Cómo cambia la secuencia entre un número y el siguiente?

R//

16. ¿Cuánto cambia la secuencia entre un número y el siguiente?

R//

17. Escribe los dos siguientes números que vendrían después del último número de la secuencia:

R//

18. Escribe los dos números que estarían antes, según la secuencia:

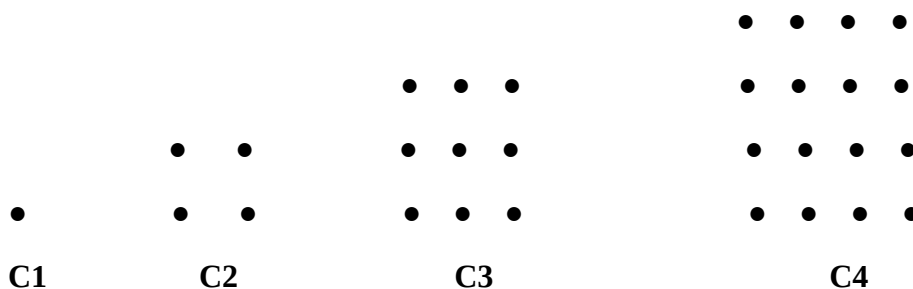
R//

19. ¿ Podrías escribir la expresión matemática o regla general para calcular y escribir un número cualquiera “n” que pertenezca a esta secuencia?

R//

Actividad 5: Los números cuadrados

Observa la siguiente secuencia de puntos que muestra una representación del cuadrado de los cuatro primeros números naturales:



De acuerdo con lo anterior, responde las preguntas 20 a 23:

20. De acuerdo con la información anterior, escribe cuántos puntos habrá en el quinto (C5), sexto(C6) y séptimo(C7) término de la secuencia:

R//

C5=_____

C6=_____

C7=_____

21. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de puntos y la posición de la figura?

R//

22. ¿Puedes explicar la relación que hay entre un número cuadrado y el siguiente?¿cómo aumenta y cómo se organiza?

R//

23. Es posible escribir una regla general para el cuadrado de un número “n” cualquiera?

R//

TAREA 3: Analizando patrones

En la tarea “Analizando Patrones”, trabajarás con secuencias visuales que siguen una lógica específica. Tu reto será identificar cómo se construyen, organizar la información en tablas y descubrir la regla general que las gobierna. Esta regla, representada con letras y símbolos, es una forma de comenzar a pensar algebraicamente.

Las actividades que encontrarás a continuación se apoyan en un recurso digital realizado en el programa Geogebra, el cual permitirá interactuar y visibilizar otros aspectos dinámicos de los patrones con formas geométricas. Sigue las instrucciones en cada caso.

Actividad 6: Techos y bases

Observa la siguiente secuencia:



Figura 1



Figura 2



Figura 3

Ejercicio con Geogebra:

A continuación, haz clic en el siguiente enlace para acceder al recurso donde encontrarás un ejercicio práctico en relación con la anterior secuencia. Lee cuidadosamente cada parte y realiza lo que se te solicita. Una vez lo explores y analices, responde a continuación, según lo trabajado.

Link para ejercicio con Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic/xum2uent>

Después de haber realizado el ejercicio en Geogebra, responde las preguntas 24 a 29:

24. Completa la información faltante en los espacios de la tabla según corresponda:

Figura	1	2	3	4	5	6			
Número de cuadrados	1	2	3	4	5	6	20	40	n
Numero de triángulos negros	2	3	4						

25. ¿Cómo es la relación que existe entre la cantidad de cuadrados y la cantidad de triángulos negros de acuerdo con el orden de las figuras?

R//

26. ¿Cuál sería la medida del perímetro de los cuadrados de las figuras 1, 2 y 3 si el lado de cada cuadrado mide 1 cm?

R//

Perímetro figura 1 = _____

Perímetro figura 2 = _____

Perímetro figura 3 = _____

27. ¿Cuál sería la medida del perímetro de los triángulos negros de las figuras 1, 2 y 3 si cada uno de sus lados mide 1cm?

R//

1 = _____

2 = _____

3 = _____

28. ¿Es posible identificar alguna relación entre las medidas de los perímetros de los cuadrados de las figuras indicadas? Explica tu respuesta:

R//

29. ¿Es posible identificar alguna relación entre las medidas de los perímetros de los triángulos de las figuras indicadas? Explica tu respuesta:

R//

Actividad 7: Torres con policubos

Carlos y sus amigos han trabajado en clase de matemáticas con policubos y los han organizado en forma vertical de la siguiente manera. En las gráficas cada línea de los cubos se conoce como arista y cada esquina como vértice. Observa la siguiente secuencia, analiza y responde las siguientes preguntas

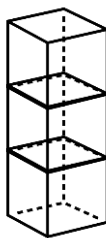
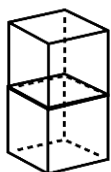
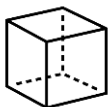


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Ejercicio con Geogebra:

A continuación, haz clic en el siguiente enlace para acceder al recurso donde encontrarás actividad en relación con la anterior secuencia. Lee cuidadosamente cada parte y realiza lo que se te solicita. Una vez explores y analices, responde directamente en la hoja, según lo visto en el recurso.

Link para ejercicio con Geogebra: [CUBOS](#)

Después de haber realizado el ejercicio en Geogebra, responde las preguntas 30 a 35:

30. ¿Cuántos vértices y aristas tiene la figura 2?

R// _____

31. En una figura formada por 4 cubos juntos, ¿cuántos vértices y aristas habrá?

R// _____

32. ¿Cuántos vértices tendrá una figura formada por 20 cubos? ¿y cuántas aristas?. Explica cómo lo has hecho:

Cubos= _____

Aristas= _____

R//

-
-
33. ¿Cómo cambia el número de vértices y aristas a medida que cambian las figuras en la secuencia? Explica tu respuesta:

R//

34. Escribe una expresión matemática o regla para calcular el número de vértices de cualquier figura en la secuencia, sabiendo el número de cubos:

R//

35. ¿Cómo hallamos el número de aristas en una figura con un número “n” de cubos? Escribe una expresión matemática para este caso:

R//

Anexo B. Secuencia original 1: “Una introducción a la generalización de patrones geométricos” (Pulido Orellano, 2021)

Link: https://drive.google.com/file/d/1Wm_cJ0GAZodD7xWeOQqmvQeEYnv1GdFG/view

Tarea. La planta. Fuente: Adaptación (Arbona et al., 2018).

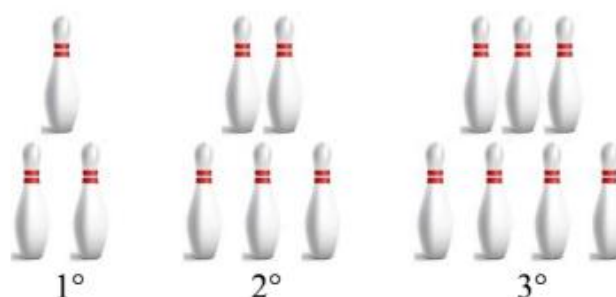
Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los primeros tres días. Las hojas representan el crecimiento de la planta, guíate de ellas y responde los interrogantes.



- ¿Cuántas hojas ha crecido la planta el 1° día, el 2° día y el 3° día?
- ¿Qué diferencia hay en la planta entre lo que creció del día 1 al 2°?
- ¿Es la misma diferencia que hay del día 2 al día 3°?
- ¿Cómo se verá la planta el 5° día? Dibújala
- Continúa la secuencia hasta llegar al día 8. Explica cómo encontraste la respuesta.

Tarea. Juego de bolos. Fuente: Adaptación Arbona et al. (2017).

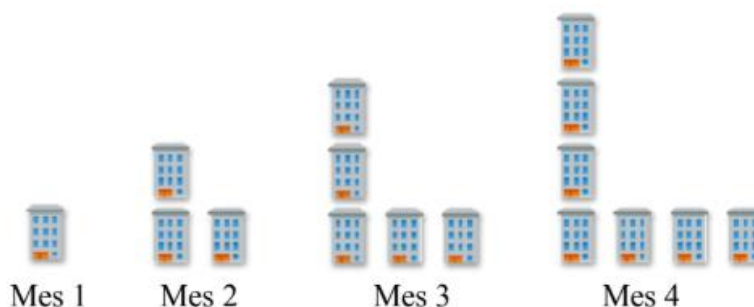
Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Entre cada tiro hemos acordado que vayan aumentando poco a poco del siguiente modo.



- ¿Cuántos bolos colocaron la 1o vez, la 2° vez y la 3° vez?
- ¿De qué manera el grupo de amigos quieren aumentar el número de bolos?
- ¿Cuántos bolos habrá colocados la 4o vez? Explica cómo llegaste a la respuesta.
- ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5o vez? Explica cómo encontraste la respuesta.

Tarea. La constructora. Fuente: Adaptación Rivera (2013)

Una constructora está diseñando un conjunto residencial que sea diferente a los otros que han realizado. Su idea se encuentra plasmada en el siguiente bosquejo, donde cada cuadrado hace referencia a un apartamento. Además, en la imagen es posible observar el progreso de la construcción mes a mes, así como se muestra a continuación. Observa y responde:



a) ¿Cuántos apartamentos tiene terminados la constructora en el mes 1? ¿cuántos en el mes 2? Y ¿cuántos en el mes 3?

b) ¿Qué cambio observas en la construcción del mes 1 al mes 2? ¿Es el mismo cambio del mes 2 al mes 3? ¿sí? ¿no? ¿por qué?

c) ¿Cuántos apartamentos serán construidos en el mes 6, en el mes 7 y en el mes 8?

Explica cómo encontraste la respuesta.

Tarea. Fiesta de sabores. Fuente: Adaptación Arbona et al. (2017).

¡Nos han invitado a una fiesta! En la invitación nos han informado que se trata de una fiesta de los sabores y, por tanto, cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar cupcakes con crema por encima. Vamos sacándolos poco a poco del horno y colocándolos de la siguiente forma para decorarlos:

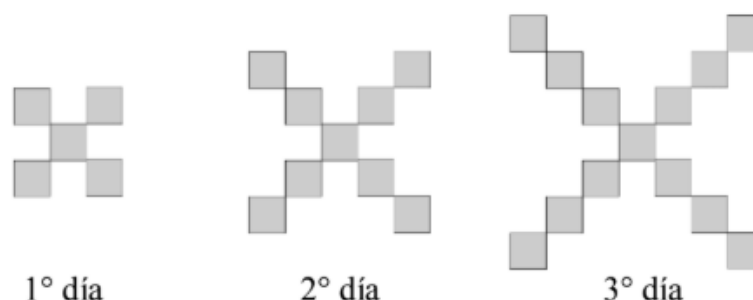


¿Cuántos cupcakes habrá la cuarta vez que los saquemos del horno?

¿Cuántos cupcakes habrá la sexta vez que los saquemos del horno?

Tarea. Raíces del árbol. Fuente: Rivera (2013).

Un grupo de científicos está investigando un árbol cuyas raíces crecen de manera muy rápida. En los primeros tres días ha crecido de la siguiente forma. Los científicos han utilizado cuadrados para dibujar el crecimiento de las raíces en esos días.

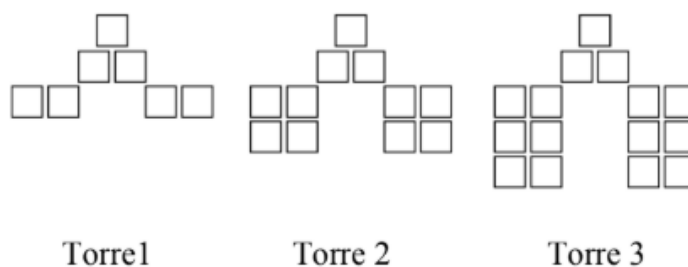


- a) De acuerdo a la información anterior ¿cuántos cuadrados utilizarán los científicos para dibujar las raíces del árbol en el día 4? ¿Cómo lo sabes?
- b) ¿Cómo se verán las raíces el día 5? Realiza el dibujo y comparte la foto al WhatsApp de la profesora.

Tarea: Fichas lego. Fuente: Pulgarín (2015).

Pablo mientras jugaba con sus fichas lego ha construido la siguiente secuencia y ha retado a su hermanito menor a continuarla. Pero él está confundido y no sabe cómo hacerlo. Por tal motivo Pablo lo ha guiado formulándole las preguntas que se encuentran a continuación.

Ayuda al hermano de Pablo a responder los interrogantes y a continuar la secuencia.



- a) ¿Qué parte de la figura es la que cambia en la secuencia? ¿Cuál parte es la que no varía?
- b) ¿La cantidad de fichas LEGO entre cada torre aumenta o disminuye? ¿En qué cantidad?
- c) ¿Qué cantidad de fichas LEGO se necesitan para construir la torre 4?
- d) A Pablo también se le ocurrió otro reto y es representar la secuencia de las torres empleando una operación. ¿Tú podrías hacerlo? Él facilitó la siguiente tabla como pista.

Figura	Número	Signo	Número	Signo	Número	Signo Igual	Resultado
Torre 1							
Torre 2							
Torre 3							
Torre 4							

De acuerdo a la respuesta en la tabla anterior, ¿cuál es la cantidad que se mantiene constante? ¿Tiene alguna relación con la que habías dicho en la representación gráfica? ¿Sí o no? ¿Por qué?

Tarea. Edificio con palillos. Fuente: Arbona et al. (2017)

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



- En la representación gráfica ¿Qué parte de los edificios no varía? En la representación gráfica ¿Qué parte de los edificios es la que varía?
- ¿La cantidad de palillos entre cada edificio aumenta o disminuye? ¿En qué cantidad?
- ¿Cómo se vería el edificio de 4 plantas? Dibújalo.
- Completa la siguiente tabla:

Número de plantas	Número de palillos
1	
2	
3	
4	

- Ahora vamos a representar la secuencia empleando una operación.

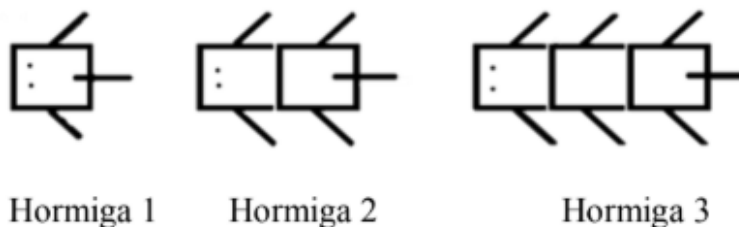
Número de plantas	Operación y resultado
1	
2	
3	
4	

f) ¿Qué tuviste en cuenta para plantear las operaciones en la tabla anterior?

g) De acuerdo a lo que respondiste en la tabla ¿Cuál es la cantidad que se mantiene constante? ¿Tiene alguna relación con lo que habías dicho en la representación gráfica? ¿por qué?

Tarea grupal: Tarea. Las hormigas. Fuente: Adaptación Pulgarín (2015)

Robert y sus amigos están dibujando hormigas utilizando pitillos y cada vez van haciendo una hormiga la van haciendo más grande a la anterior, así como se muestra a continuación:

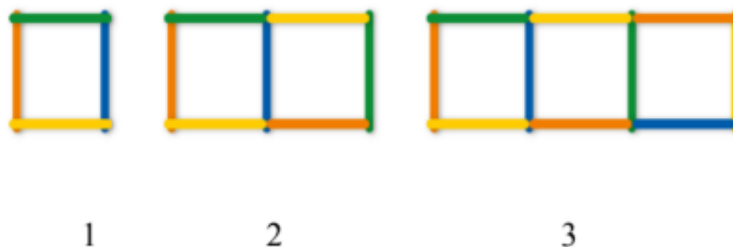


a) Si Robert y sus amigos quieren dibujar la hormiga número 14 ¿cuántos palillos necesitan? ¿Cómo lo sabes?

b) Si quieren dibujar la número 22 ¿Cuántos palitos necesitan?

Tarea Individual: Tarea. Cuadrados con palitos. Fuente: Adaptación Rivera (2013).

A Miranda le gustan mucho los juegos matemáticos, por eso ha inventado una secuencia utilizando palitos de paletas para formar varios cuadrados, como lo puedes observar a continuación.



a) Si Miranda quiere realizar 15 cuadrados ¿Cuántos palitos de paleta necesita? ¿Cómo lo sabes?}

b) Y si quisiera realizar 20 ¿Cuántos palitos de paleta necesita? Explica cómo llegaste a la respuesta.

Si el estudiante no encuentra la manera de proceder, se plantean los siguientes interrogantes como guía:

a) ¿Cuántos palitos se utilizaron para realizar un cuadrado? ¿Cuántos para realizar dos cuadrados? y ¿Cuántos se utilizaron para realizar tres cuadrados?

b) ¿En qué cantidad de palitos aumenta la secuencia?

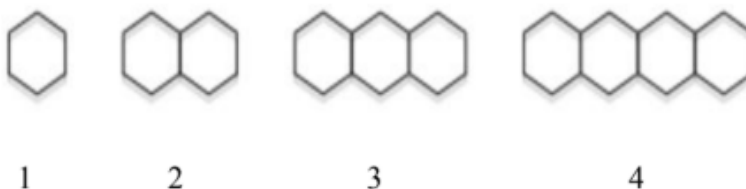
c) Observa cuidadosamente cada una de las gráficas e identifica en ella lo que cambia y lo que no cambia en ellas.

d) ¿Cuántos palitos se necesitan para realizar cuatro cuadrados? ¿Cuántos palitos se necesitan para realizar cinco cuadrados?

Tarea grupal: Tarea. La Cenefa. Fuente: Adaptación Rivera (2013).

Juanita quiere decorar la cenefa de su habitación colocando tiras de cinta a cada lado de los hexágonos que hacen parte del diseño.

Ayuda a Juanita a saber ¿Cuántas tiras de cinta necesita para decorar su cenefa? Ten en cuenta que cada tira tiene la misma medida de cada lado del hexágono.



- a) Comienza averiguando ¿cuántas tiras se necesitan para colocar en cinco hexágonos?
- b) ¿Cuántas tiras de cinta son necesarias para 16 hexágonos? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Y para 22 hexágonos? ¿Cuántas tiras se necesitan?
- d) Si tuviera 56 tiras de cinta para ¿Cuántos hexágonos le alcanzaría? ¿De qué manera lo hiciste?
- e) Si tuviera 126 tiras de cinta para ¿Cuántos hexágonos le alcanzaría? ¿De qué manera lo hiciste?

Tarea individual: Tarea. Diseño con palillos. Fuente: Adaptación Rivera (2013).

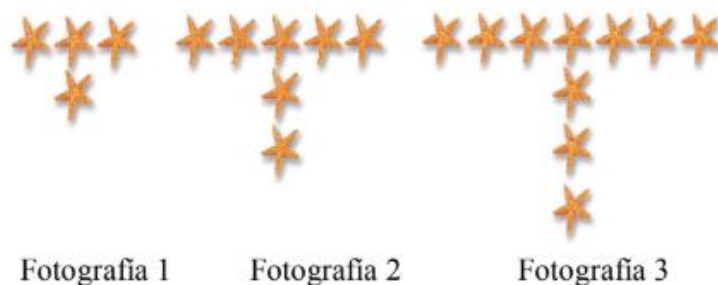
Unos artesanos están elaborando lo que sería su nuevo diseño para sus mochilas. Ellos están utilizando palillos para representarlo, colocando cada palillo como un lado del triángulo, de la siguiente manera:



- a) ¿Qué cantidad de palillos se necesitan para realizar el paso 4?
- b) ¿Qué cantidad de palillos son necesarios para realizar el paso número 17? ¿qué hiciste para saberlo?
- c) ¿Qué cantidad de palillos son necesarios para realizar el paso número 23? ¿qué hiciste para saberlo?
- d) Uno de los artesanos utilizó 21 palillos en uno de los pasos que realizó ¿En qué paso crees que lo hizo? Explica tu respuesta.
- e) Otro de los artesanos utilizó 53 palillos en uno de los pasos que realizó ¿En qué paso lo hizo? Explica tu respuesta.

Compromiso: Tarea. Estrellas marinas. Fuente: Adaptación Rivera (2013).

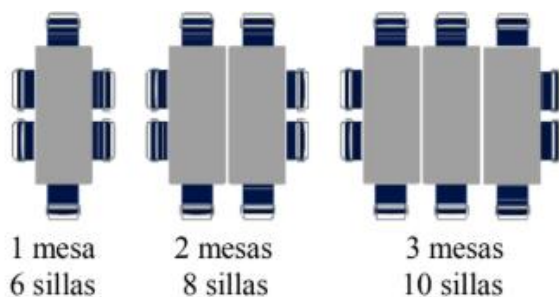
Unos biólogos marinos han descubierto en el fondo del mar un grupo de estrellas marinas organizadas de una manera bastante particular y decidieron hacer un registro fotográfico para ver lo que ocurría durante los próximos días. Los resultados son los siguientes:



- a) ¿Cuántas estrellas quedarán registradas en la fotografía del día 7? Explica de qué manera llegaste a la respuesta.
- b) ¿Cuántas estrellas quedarán registradas en la fotografía del día 31? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Si en una fotografía aparecen 55 estrellas marinas ¿qué día tomaron la fotografía? ¿Qué hiciste para saberlo?
- d) ¿Si en otra fotografía aparecen 121 estrellas marinas ¿qué día tomaron la fotografía? ¿Cómo encontraste la respuesta?

Tarea grupal: Tarea. Fiesta de cumpleaños. Fuente: Adaptación Zapatera (2018).

Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y sus padres le ayudan a colocar las mesas y las sillas de la siguiente manera.



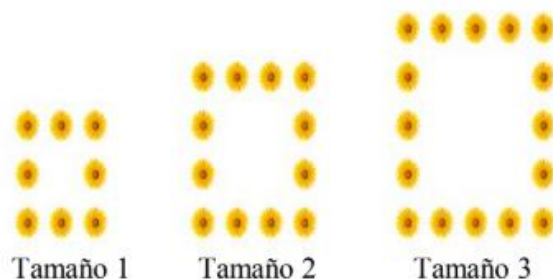
- a) Si en una mesa se pueden colocar 6 sillas, en dos mesas se pueden colocar 8 sillas y en 3 mesas se pueden colocar 10 sillas. Si se necesitan ubicar 24 niños ¿cuántas mesas se necesitan?
- b) Los padres de Juan quisieron organizar en una tabla la cantidad de sillas que necesitan, según el número de invitados. Ayúdalos a completar la tabla.

Número de mesas	15	29	44	107
Número de sillas				

Después de la fiesta Juan y sus padres quisieron encontrar un procedimiento matemático que le permita calcular el número de sillas necesarias conociendo el número de mesas, para tenerlo en cuenta en sus próximas reuniones ¿De qué manera lo harías tú?

Tarea individual: Tarea. La floristería. Fuente: Adaptación Arbona et al. (2018).

En la floristería Dalia están promocionando un nuevo arreglo con girasoles, el cual se puede adquirir en diferentes tamaños. En la siguiente figura, se muestran los tres primeros de ellos.



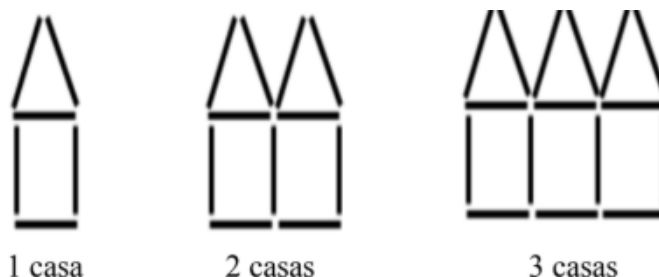
- a) El arreglo del tamaño 1 tiene 8 girasoles, el arreglo de tamaño 2 tiene 12 girasoles y el arreglo floral del tamaño 3 tiene 16 girasoles. Si un arreglo tiene 44 girasoles, ¿a qué tamaño corresponde? Explica cómo encontraste tu respuesta.
- b) Los dueños de la floristería quisieron organizar en una tabla la cantidad de girasoles que necesitan para hacer arreglos grandes, ayúdalos a continuarla. Explica cómo encontraste las respuestas.

Tamaño	12	23	35	110
Cantidad de girasoles				

Después de este lanzamiento del arreglo floral, a la floristería Dalia le han aumentado los pedidos y a raíz de eso están buscando un procedimiento matemático que les permita averiguar el número de girasoles necesarios para realizar un arreglo de cualquier tamaño. Ayúdalos a encontrarlo y explícales cómo lo harías tú.

Compromiso: Tarea. La urbanización. Fuente: Arbona et al. (2018)

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo.

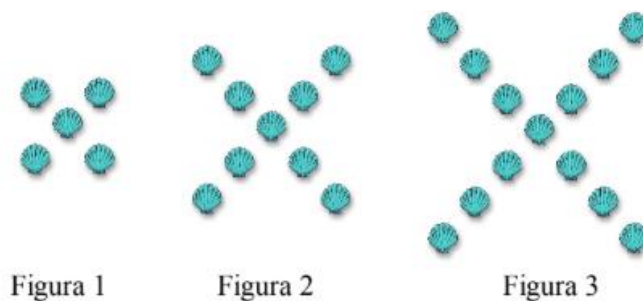


- a) Para dibujar una casa utilizaron 6 palillos, para dibujar dos casas utilizaron 11 palillos y para dibujar 3 casas utilizaron 16 palillos. Si en un dibujo utilizaron 66 palillos ¿Cuántas casas dibujaron? ¿Cómo lo sabes?
- b) Marc y su amigo quisieron registrar en una tabla la cantidad de palillos que necesitan conociendo el número de casas. Completa la tabla y explica ¿cómo lo hiciste?

Número de casas	18	27	42	106
Cantidad de palillos				

El amigo de Marc todavía no ha entendido cómo se puede hallar el número de palillos conociendo el número de casas. Por eso Marc está pidiendo que lo ayudes redactando una carta a su amigo en la que le expliques cómo lo debe hacer. Te sugiero que seas bastante claro y escribas todo detallado para que él pueda entenderte.}

El amigo de Marc todavía no ha entendido cómo se puede hallar el número de palillos conociendo el número de casas. Por eso Marc está pidiendo que lo ayudes redactando una carta a su amigo en la que le expliques cómo lo debe hacer. Te sugiero que seas bastante claro y escribas todo detallado para que él pueda entenderte.



- a) ¿Cuántas conchas marinas tendrá la figura número 5?
- b) ¿Cuántas conchas marinas se utilizarán en la figura número 14? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Cuántas conchas se necesitan para la figura número 29? ¿Cómo lo sabes?

- d) ¿Cuántas conchas tendrá la figura número 92? Explica tu respuesta
- e) ¿Cómo le explicas a Lucía y su familia de qué manera puede calcular el número de conchas marinas que necesitan para realizar cualquier figura?
- f) La familia ha contado 141 conchas en una de las figuras que hicieron ¿Cuál de ellas fue? ¿Cómo lo sabes?
- g) En otra de las figuras contaron 433 conchas marinas ¿Cuál figura fue? Explica tu respuesta.
- h) ¿Cómo le explicas a la familia cómo puede calcular el número de la figura conociendo la cantidad de conchas utilizadas?

Tarea individual: Tarea. Jardín. Fuente: Adaptación Arbona (2016).

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día.



- a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
- b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
- d) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 89? ¿Cómo lo sabes?
- e) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?
- f) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?
- g) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede encontrar el número del día conociendo la cantidad de macetas que tiene el jardín?



Figura 1



Figura 2



Figura 3

- a) Describe cómo se vería la figura cuatro y ¿cuántos palitos tendría?
- b) ¿Cuántos palitos tendría la figura 5? ¿Cómo lo sabes?
- c) ¿Cuántos palitos tendría la figura 6? ¿Cómo obtuviste el resultado?
- d) Mira cuidadosamente cada una de las figuras e identifica ¿qué es lo que permanece igual de una figura a otra? ¿por qué lo crees?
- e) ¿Qué es lo que cambia de una figura a otra?
- f) ¿Cuántos palitos de bom bom necesita Mauricio para realizar la figura número 14? ¿Cómo lo sabes?
- g) ¿Cuántos palitos de bom bom son necesarios para realizar la figura número 19? ¿Cómo lo sabes?
- h) ¿Cuántos palitos necesita Mauricio para realizar la figura número 23?
- i) Mauricio empleó 54 palitos de bom bom para realizar una de las figuras ¿Cuál de ellas fue? ¿Cómo lo sabes?
- j) Y si empleó 87 palitos de bom bom ¿Cuál figura realizó? ¿Cómo lo sabes?
- k) Mauricio quiere realizar figuras muy grandes, se le ha ocurrido realizar la figura número 115. ¿Cuántos palitos necesita?
- l) También quiere realizar la figura número 160. ¿Cuántos palitos necesita?
- m) Finalmente él quiere hallar un procedimiento que le permita calcular la cantidad de palillos que necesita para realizar cualquier figura. ¿Cómo lo harías tú? Escríbele un mensaje donde le expliques qué debe hacer.
- n) También quiere encontrar un procedimiento matemático que le permita encontrar el número de la figura que puede hacer, sabiendo la cantidad de palillos con los que dispone. ¿Tú cómo lo harías? Escríbele un mensaje donde le expliques tu procedimiento.

Anexo C. Secuencia original 2: “Propuesta de generalización de patrones” (Perez, 2022)

Link: <https://drive.google.com/file/d/1RZ2CqAlk5pHA03D2JrOFzMP7WurY8Tc5/view>

ACTIVIDADES PARA 5º DE PRIMARIA

Actividad 1

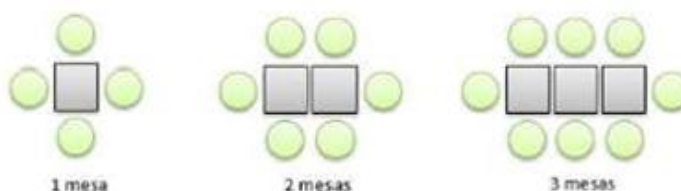
Un grupo de amigos ha decidido jugar a los bolos. En cada tirada, se va a aumentar el número de bolos que tienen que tirar.



1. ¿Cuántos bolos habrá colocados en la 5ª tirada? ¿Qué has hecho para saberlo?
2. ¿Y cuántos bolos habrá colocados en la 10ª tirada? ¿Sabrías resolverlo sin hacer el dibujo?
3. ¿Sabrías expresar el número de bolos que habrá en la n-ésima tirada? Es decir, en la tirada número 'n'.

Actividad 2

Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y sus padres le van a ayudar a colocar las mesas y las sillas. En un principio han pensado en usar mesas cuadradas y colocarlas como en la siguiente imagen:

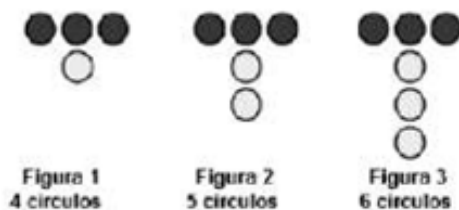


1. Dibuja 4 mesas juntas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas?
2. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 5 mesas?

ACTIVIDADES PARA 6º DE PRIMARIA

Actividad 1

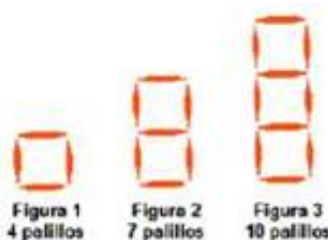
Observa cómo crece la letra T al colocar más círculos.



1. Dibuja las Figuras 4 y 5.
2. ¿Qué parte de la letra permanece siempre igual? ¿Cuántos círculos tiene?
3. ¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?
4. ¿Cuántos círculos oscuros tendrá la Figura 10? ¿Y cuántos círculos grises? ¿Y en total? Explica cómo lo has averiguado.

Actividad 2

En una clase están jugando a formar, con palillos, figuras cada vez más grandes. El equipo de Lucía ha formado los siguientes cuadrados:



1. Dibuja las Figuras 4 y 5. ¿Cuántos palillos tiene cada una de ellas?
2. ¿Cuántos palillos tendrá la Figura 10?
3. ¿Cuántos palillos tendrá la Figura 20? Explica cómo lo has hecho.

ACTIVIDADES PARA 1º Y 2º DE ESO

Actividad 1

Dada la siguiente secuencia de números:
78.560, 77.560, ... , 74.560, 73.560.

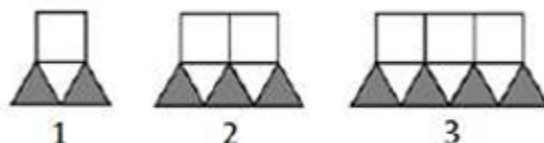
1. Rellena los números que faltan.

78.560, 77.560, _____, _____, 74.560, 73.560,

2. Escribe los dos siguientes números.
3. Escribe la regla general para calcular el siguiente número de un número cualquiera 'n' según la secuencia anterior.

Actividad 2

Observa el siguiente patrón y responde a las siguientes preguntas:



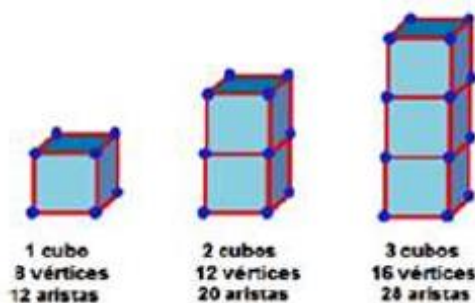
1. Completa la tabla:

Número de cuadrados blancos	1	2	3	4	20	n
Número de triángulos grises	2	3	4			

2. Describe el patrón que ves.
3. ¿Cuántos cuadrados blancos hay si tenemos 50 triángulos grises?

Actividad 3

Carla y sus amigos han trabajado en clase con policubos. Los han colocado en vertical, de la siguiente manera:



1. Dibuja 4 cubos y cuenta el número de vértices y aristas.
2. ¿Cuántos vértices tendrían 20 cubos? ¿Y cuántas aristas? Explica cómo lo has hecho.
3. Escribe una regla para calcular el número de vértices sabiendo el número de cubos (n) y otra para hallar el número de aristas.

- Intenta escribir la regla algebraicamente. ¿Cómo hallarías el número de vértices en n cubos? ¿Y de n aristas?
- ¿Cuántos cubos necesitarías para formar una estructura con 44 vértices? ¿Y con 44 aristas?

ACTIVIDADES PARA 3º DE ESO

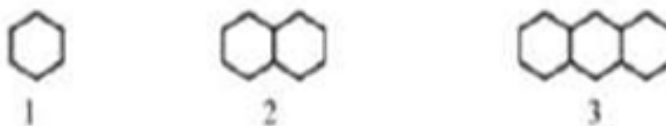
Actividad 1

Observa la siguiente secuencia:



- ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 cuadrados?
- ¿Y para formar 5 cuadrados?
- ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar ' n ' cuadrados?

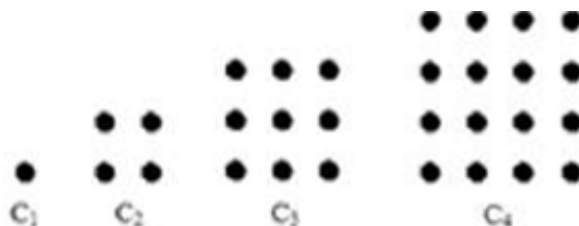
Ahora, como vemos en la siguiente figura, se necesitan 6 segmentos para construir un hexágono, 11 segmentos para construir dos hexágonos y 16 para construir 3 hexágonos, colocados de la siguiente manera:



- ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 hexágonos?
- ¿Y para formar 5 hexágonos?
- ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar ' n ' hexágonos?

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia y contesta a las siguientes cuestiones:



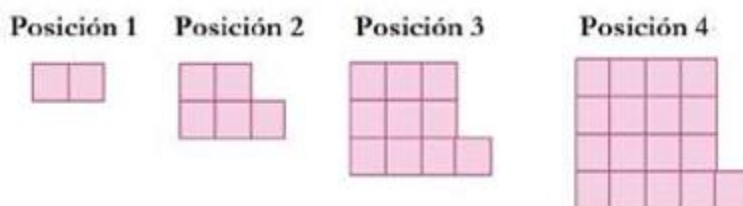
Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 4 puntos, en el tercer término hay 9 puntos y en el cuarto término hay 16 puntos.

- ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?

2. ¿Podrías escribir una regla general para el n -ésimo término?

Actividad 3

Observa la siguiente tabla:



1. Realiza una tabla de valores que relacione el número de la posición con la cantidad de cuadrados dada.
2. ¿Cuántos cuadrados habrá para la quinta posición?
3. Describe la regla general que sigue el patrón anterior.
4. Si tengo 50 cuadrados, ¿En qué posición estoy?

ACTIVIDADES PARA 4º DE ESO

Actividad 1

Observa la siguiente figura:

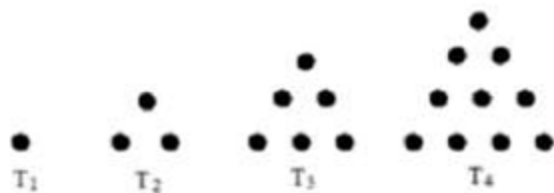


Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 barras respectivamente.

1. ¿Cuántas barras se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 peldaños?
2. ¿Y para hacer una escalera de 5 peldaños?
3. Si sabemos que se necesitan 335 barras para hacer una escalera de 111 peldaños, ¿cuántas barras se necesitarán para hacer una escalera de 112 peldaños?
4. ¿Sabrías escribir la regla general para formar una escalera con ' n ' peldaños?}

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia y contesta a las siguientes preguntas:

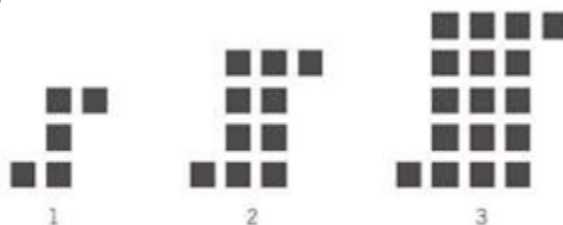


Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 3 puntos, en el tercer término hay 6 puntos y en el cuarto término hay 10 puntos.

1. ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?
2. ¿Podrías escribir una regla general para el n -ésimo término?

Actividad 3

Observa la siguiente imagen:



1. Dibuja las dos siguientes figuras.
2. Escribe una ecuación (regla general) que se pueda usar para definir cualquier figura.