

Sobre la exponencial de una matriz

Miguel A. Marmolejo L.

Recibido Oct. 20, 2004 Aceptado Dic. 6, 2004

Resumen

Se presenta una expresión para e^X en términos del determinante y la traza de $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la cual nos permite obtener la derivada de la función $X \rightarrow e^X$ y analizar la ecuación $e^X = A$; $X, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Palabras y frases claves: Matriz exponencial, derivada de Fréchet.

Abstract

We present an expression for e^X in terms of the determinant and the trace of the matrix $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. As an application we obtain a formula for the derivative of the function $X \rightarrow e^X$ and solve the equation $e^X = A$; $X, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Keywords: Matrix exponential, Fréchet derivative

AMSC(2000): Primary: 15A15, Secondary: 15A24

1 Introducción

El cálculo de la exponencial de una matriz es sencillo cuando se apoya en el conocimiento de sus valores propios (ver por ejemplo las secciones 7.10 a 7.15 de Apostol [1] o Putzer [5]). Sin embargo, este tipo de cálculo hace difícil abordar preguntas tales como: ¿Cuál es la derivada de la función $X \rightarrow e^X$? ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $e^X = A$? ¿Qué se requiere para que $e^X e^Y = e^Y e^X$? Este artículo responde estas cuestiones al menos para matrices reales 2×2 , lo cual ilustra lo complejo de las respuestas en general.

El trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 introducimos dos funciones matriciales y dos funciones reales que serán las herramientas básicas para el desarrollo del resto del trabajo. En la sección 3 definimos la función exponencial y damos una expresión para e^X en términos de la traza y el determinante de X . La sección 4 se dedica a la derivada de la función $X \rightarrow e^X$ y la sección 5 a dar condiciones necesarias y suficientes para que $e^X e^Y = e^Y e^X$. Finalmente, en la sección 6 analizamos la ecuación $e^X = A$.

2 Preliminares

En lo que sigue $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ denota el espacio de Banach de las matrices reales 2×2 con la norma de Frobenius. La traza, el determinante y la adjunta de $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se denotarán por $\text{tr}(X)$, $\det(X)$ y $\text{adj}(X)$, respectivamente.

Consideremos las funciones $\eta, \xi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\eta(X) = \frac{\text{tr}(X)}{2}, \quad \xi(X) = \eta^2(X) - \det(X).$$

Se sabe que η es lineal y es inmediato verificar las identidades

$$\xi(X)I = (X - \eta(X)I)^2, \quad (1)$$

$$\xi(tX) = t^2\xi(X), \quad (2)$$

donde I es la matriz idéntica y $t \in \mathbb{R}$.

De otra parte, es bien conocido que las funciones $\text{tr}(X)$ y $\det(X)$ son Frèchet diferenciables y que para $H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se cumplen las igualdades

$$[D\text{tr}(X)](H) = \text{tr}(H), \quad [D\det(X)](H) = \text{tr}(\text{adj}(X)H).$$

De esto se sigue que las funciones $\eta(X)$ y $\xi(X)$ son Frèchet diferenciables y que para $H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} [D\eta(X)](H) &= \eta(H), \\ [D\xi(X)](H) &= 2\eta(X)\eta(H) - \text{tr}(\text{adj}(X)H). \end{aligned} \quad (3)$$

También, de la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} [D\xi(X)I](H) &= [D\xi(X)](H)I \\ &= (X - \eta(X)I)(H - \eta(H)I) \\ &\quad + (H - \eta(H)I)(X - \eta(X)I). \end{aligned} \quad (4)$$

Consideremos ahora las funciones $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}), & x > 0 \\ \cos(\sqrt{-x}), & x \leq 0, \end{cases} \\ \beta(x) &= 1 + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \frac{x^3}{7!} + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \sinh(\sqrt{x}), & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin(\sqrt{-x}), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Directamente se comprueban las identidades

$$2\alpha'(x) = \beta(x), \quad \alpha^2(x) - x\beta^2(x) = 1. \quad (5)$$

$$4x\alpha''(x) + 2\alpha'(x) = \alpha(x). \quad (6)$$

Las gráficas de las funciones α y β aparecen enseguida.

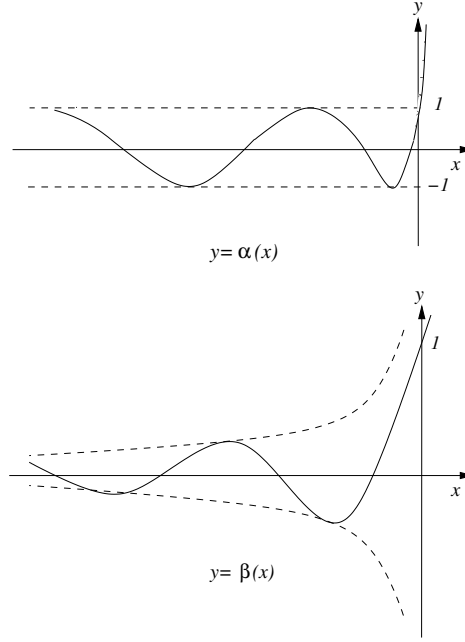


Figura 1: Gráficas de las funciones α y β

3 La función exponencial

La función exponencial $X \rightarrow e^X$ se define por la serie absolutamente convergente (ver teorema 2 p. 184 de Bellman [2])

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots.$$

De esta definición se sigue que si $XY = YX$, entonces $e^X e^Y = e^{X+Y} = e^Y e^X$. En efecto,

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} X^k Y^{n-k}}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^n}{n!} \\ &= e^{X+Y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, escribiendo $X = \eta(X)I + (X - \eta(X)I)$, obtenemos

$$e^X = e^{\eta(X)} e^{(X - \eta(X)I)}.$$

Puesto que la identidad (1) establece $(X - \eta(X)I)^2 = \xi(X)I$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
 e^X &= e^{\eta(X)} \left[I + (X - \eta(X)I) + \frac{\xi(X)I}{2!} + \frac{\xi(X)}{3!}(X - \eta(X)I) + \dots \right] \\
 &= e^{\eta(X)} \left[\left(1 + \frac{\xi(X)}{2!} + \frac{\xi^2(X)}{4!} + \dots\right)I \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 + \frac{\xi(X)}{3!} + \frac{\xi^2(X)}{5!} + \dots\right)(X - \eta(X)I) \right] \\
 &= e^{\eta(X)} \left[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I) \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con las definiciones de las funciones α y β , e^X está dada por la expresión

$$\begin{cases} e^{\eta(X)} \left[\cosh(\sqrt{\xi(X)})I + \sinh(\sqrt{\xi(X)}) \left(\frac{X - \eta(X)I}{\sqrt{\xi(X)}} \right) \right], & \xi(X) > 0 \\ e^{\eta(X)} \left[I + (X - \eta(X)I) \right], & \xi(X) = 0 \\ e^{\eta(X)} \left[\cos(\sqrt{-\xi(X)})I + \sin(\sqrt{-\xi(X)}) \left(\frac{X - \eta(X)I}{\sqrt{-\xi(X)}} \right) \right], & \xi(X) < 0. \end{cases}$$

Cuando $\xi(X) \neq 0$ la anterior expresión corresponde a la fórmula que aparece en la siguiente dirección electrónica:

<http://mathworld.wolfram.com/MatrixExponential.html>

Observaciones.

1. Para

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

obtenemos las fórmulas básicas

$$e^C = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

$$e^R = e^a \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix},$$

la primera de las cuales nos recuerda la identificación algebraica

$$a + ib \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

entre los números complejos y las matrices reales 2×2 .

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Podemos utilizar la expresión (7) para calcular las exponenciales de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

En efecto, por la definición de la exponencial de una matriz

$$e^M = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1}e^NP = \begin{pmatrix} e^{A+B} & 0 \\ 0 & e^{A-B} \end{pmatrix},$$

donde la matriz $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = 2P^{-1}$ es tal que

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$

3. Sea $S = [s_{ij}]_{n \times n}$ una matriz simétrica real $n \times n$ tal que $S \neq \alpha I, \alpha \in \mathbb{R}, n = 2, 3, 4, \dots$. El teorema 3 de Marmolejo et al [4] establece que S tiene dos valores propios si y sólo si existen $\theta, d \in \mathbb{R}$ tales que $(S - \theta I)^2 = d^2 I$. Cuando existen tales números, éstos se calculan así: Si $s_{ij} \neq 0$ con $i \neq j$, entonces $\theta = (2s_{ij})^{-1}(\sum_{k=1}^n s_{ik}s_{kj})$ (si S es diagonal, digamos $S = \text{diag}(s_{11}, \dots, s_{nn})$, entonces $\theta = 2^{-1}(s_{ii} + s_{jj})$ donde $s_{ii} \neq s_{jj}$), y d representa la longitud euclidiana de cada columna de la matriz $S - \theta I$. En este caso, procediendo como en la deducción de (7) se obtiene

$$e^S = e^\theta \left[\cosh(d)I + \frac{\sinh(d)}{d}(S - \theta I) \right].$$

En relación con la inversa, la transpuesta, la adjunta, la traza y el determinante de $e^X, X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-X} &= e^{-\eta(X)} \left[\alpha(\xi(X))I - \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I) \right] \\ &= (e^X)^{-1}, \\ (e^X)^T &= e^{X^T} \quad \text{y} \quad \text{adj}(e^X) = e^{\text{adj}(X)}, \end{aligned}$$

en virtud de (2), (5) y (7). También de (5) y (7) se llega a

$$\text{tr}(e^X) = 2e^{\eta(X)}\alpha(\xi(X)), \quad \det(e^X) = e^{2\eta(X)} = e^{\text{tr}(X)}. \quad (8)$$

4 La derivada de la exponencial

Utilizando (3) y (4) obtenemos de la expresión (7) que para $H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$[De^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}M(X, H), \quad (9)$$

donde $M(X, H) = M$ está dada por

$$\begin{aligned} M = & \alpha'(\xi(X)) \left[(X - \eta(X)I)(H - \eta(H)I) \right. \\ & \left. + (H - \eta(H)I)(X - \eta(X)I) \right] \\ & + \beta'(\xi(X)) \left[(X - \eta(X)I)(H - \eta(H)I) \right. \\ & \left. + (H - \eta(H)I)(X - \eta(X)I) \right] (X - \eta(X)I) \\ & + \beta(\xi(X))(H - \eta(H)I). \end{aligned}$$

Cuando $HX = XH$, utilizando (1), (5) y (6) simplificamos $M(X, H)$ para llegar a

$$\begin{aligned} M = & \left[2\alpha'(\xi(X))(X - \eta(X)I) + 4\xi(X)\alpha''(\xi(X))I \right. \\ & \left. + 2\alpha'(\xi(X))I \right] (H - \eta(H)I) \\ = & \left[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I) \right] (H - \eta(H)I) \\ = & e^{-\eta(X)} e^X (H - \eta(H)I), \end{aligned}$$

en cuyo caso (9) se reduce a

$$[De^X](H) = e^X H = H e^X.$$

Ahora bien, si la función $t \rightarrow X(t)$ de (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ es diferenciable, entonces la aplicación $t \rightarrow Y(t) = e^{X(t)}$ es diferenciable y

$$Y'(t) = \eta(X'(t))e^{X(t)} + e^{\eta(X(t))} M(X(t), X'(t)). \quad (10)$$

Cuando $X'(t)X(t) = X(t)X'(t)$ entonces (10) se convierte en

$$Y'(t) = e^{X(t)} X'(t) = X'(t) e^{X(t)}.$$

En particular, si $t \rightarrow A(t)$ es una función continua de $[0, b]$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y si $X(t) = \int_0^t A(s)ds$ verifica $X'(t)X(t) = X(t)X'(t)$, entonces $Y(t) = e^{X(t)}$ es la solución del problema con condición inicial

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = I.$$

Observación. En relación con el problema con condición inicial

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = Y_0,$$

donde $t \rightarrow A(t)$ es una función continua de $[a, b] \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{C}^{n \times n}$ (matrices complejas $n \times n$), el teorema 2.1 de Dollard et al [3] establece que éste tiene solución única dada en términos de la integral producto por $Y(t) = \prod_a^t e^{A(s)ds} Y_0$, siendo

$$\prod_a^t e^{A(s)ds} = (L^1) \lim_{\mu(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n e^{A(s'_k)\Delta(s'_k)},$$

donde $\mathcal{P} = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ es una partición de $[a, t]$, $s'_k \in [s_{k-1}, s_k]$ $k = 1, 2, \dots, n$ y $\mu(\mathcal{P})$ denota la medida de la partición $\mathcal{P}$. El anterior límite es difícil de calcular excepto cuando la familia de matrices $\{A(s) : s \in [a, b]\}$ es conmutativa, en cuyo caso

$$\prod_a^t e^{A(s)ds} = e^{\int_0^t A(s)ds}$$

(ver teorema 1.3 de Dollard et al [3]).

5 Conmutatividad de exponenciales

Sabemos que $e^X e^Y = e^Y e^X = e^{X+Y}$ cuando $XY = YX$. Veamos lo que sucede en general. Puesto que

$$e^{\eta(X)} [\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I)]$$

y

$$e^{\eta(Y)} [\alpha(\xi(Y))I + \beta(\xi(Y))(Y - \eta(Y)I)],$$

entonces

$$e^X e^Y - e^Y e^X = e^{\eta(X+Y)} \beta(\xi(X)) \beta(\xi(Y)) [XY - YX]. \quad (11)$$

De esto se sigue que e^X conmuta con e^Y si y sólo si X conmuta con Y o $\beta(\xi(X)) = 0$ o $\beta(\xi(Y)) = 0$. Note que cuando $\beta(\xi(X)) = 0$ se obtiene

$$e^X = e^{\eta(X)} \alpha(\xi(X))I,$$

que es un múltiplo de la matriz idéntica. Ahora bien, de la definición de la función β tenemos que

$$\beta(\xi(X)) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \xi(X) = -k^2 \pi^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

en cuyo caso $e^X = (-1)^k e^{\eta(X)} I$, $k = 1, 2, \dots$.

El siguiente ejemplo muestra que $e^X e^Y = e^Y e^X$ y sin embargo $e^X e^Y \neq e^{X+Y}$.

Ejemplo. Si

$$X = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $\xi(X) = -\pi^2$, $\xi(Y) = \pi^2$ y $\xi(X + Y) = 0$. De acuerdo con la expresión (7);

$$e^X = -I, \quad e^Y = \begin{pmatrix} \cosh \pi & \sinh \pi \\ \sinh \pi & \cosh \pi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e^{X+Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación. Dado que $\eta(XY) = \eta(YX)$ y $\xi(XY) = \xi(YX)$, a partir de (7) obtenemos la siguiente relación análoga a (11)

$$e^{XY} - e^{YX} = e^{\eta(XY)} \beta(\xi(XY)) [XY - YX].$$

6 La ecuación exponencial

Empecemos observando que para cualquier matriz $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $\text{tr}(M) = 0$ y $\det(M) = 1$ la función $t \rightarrow f(t) = e^{tM}$, con $t \in [0, \infty)$ es 2π -periódica. En efecto, por (2) se tiene $\xi((t + 2\pi)M) = -(t + 2\pi)^2$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} f(t + 2\pi) &= e^{(t+2\pi)M} \\ &= \cos(t + 2\pi)I + \text{sen}(t + 2\pi)M \\ &= \cos(t)I + \text{sen}(t)M \\ &= f(t). \end{aligned}$$

En particular, para $t = k\pi$; $k = 0, 1, \dots$ se obtiene

$$f(k\pi) = e^{k\pi M} = (-1)^k I,$$

lo que muestra que las ecuaciones $e^X = I$ y $e^X = -I$ tienen infinitas soluciones. Ahora, si $e^X = A$, entonces por (8) se deben tener las relaciones

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \quad \alpha(\xi(X)) = \frac{\eta(A)}{\sqrt{\det(A)}}. \quad (12)$$

De esto se sigue que cuando $\det(A) \leq 0$ la ecuación $e^X = A$ no tiene solución. También, dado que $\alpha \geq -1$, la ecuación sólo puede tener solución cuando $\frac{\eta(A)}{\sqrt{\det(A)}} \geq -1$. Por ésto, en lo que sigue suponemos que $\det(A) > 0$ y que $\frac{\eta(A)}{\sqrt{\det(A)}} \geq -1$. También, en lo que sigue haremos $\delta(A) = \frac{\eta(A)}{\sqrt{\det(A)}}$.

El comportamiento de las funciones α y β sugiere analizar los casos $\delta(A) > 1$, $-1 < \delta(A) < 1$ y $\delta(A) = \pm 1$.

Caso $\delta(A) > 1$

En este caso las relaciones (12) se reducen a

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \quad \cosh(\sqrt{\xi(X)}) = \delta(A), \quad \xi(X) > 0.$$

De aquí obtenemos

$$\sqrt{\xi(X)} = \cosh^{-1}(\delta(A)) = \ln \left(\frac{\eta(A) + \sqrt{\xi(A)}}{\sqrt{\det(A)}} \right)$$

y

$$\beta(\xi(X)) = \frac{\sinh(\sqrt{\xi(X)})}{\sqrt{\xi(X)}} = \frac{\sqrt{\xi(A)}}{\cosh^{-1}(\delta(A))\sqrt{\det(A)}}.$$

Ahora, de la expresión

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)} \left[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I) \right] \\ &= \sqrt{\det(A)} \left[\delta(A)I + \frac{\sqrt{\xi(A)}}{\cosh^{-1}(\delta(A))} \left(\frac{X - \ln(\sqrt{\det(A)})I}{\sqrt{\det(A)}} \right) \right] \\ &= A, \end{aligned}$$

despejamos X para obtener la única solución

$$X = \ln(\sqrt{\det(A)})I + \cosh^{-1}(\delta(A)) \left(\frac{A - \eta(A)I}{\sqrt{\xi(A)}} \right).$$

Caso $-1 < \delta(A) < 1$

En este caso las relaciones (12) se convierten en

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \quad \cos(\sqrt{-\xi(X)}) = \delta(A), \quad \xi(X) < 0.$$

De esto se sigue que $\sqrt{-\xi(X)}$ pertenece al conjunto

$$\{(\theta(A) + 2k\pi), \quad (2(k+1)\pi - \theta(A)) \quad ; k = 0, 1, \dots\},$$

donde $\theta(A) = \cos^{-1}(\delta(A))$, y que

$$\beta(\xi(X)) = \frac{\sin(\sqrt{-\xi(X)})}{\sqrt{-\xi(X)}} = \frac{\sqrt{-\xi(A)}}{\sqrt{-\xi(X)}\sqrt{\det(A)}} \neq 0.$$

Ahora, para cada valor de $\sqrt{-\xi(X)}$ despejamos X de la expresión

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)} \left[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I) \right] \\ &= \sqrt{\det(A)} \left[\delta(A)I + \frac{\sqrt{-\xi(A)}}{\sqrt{-\xi(X)}} \left(\frac{X - \ln(\sqrt{\det(A)})I}{\sqrt{\det(A)}} \right) \right] \\ &= A, \end{aligned}$$

para obtener

$$X = \ln(\sqrt{\det(A)})I + \sqrt{-\xi(X)} \left(\frac{A - \eta(A)I}{\sqrt{-\xi(A)}} \right),$$

lo que indica que hay infinitas soluciones.

Caso $\delta(A) = \pm 1$

En este caso las relaciones (12) están dadas por

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \quad \cos(\sqrt{-\xi(X)}) = \pm 1, \quad \xi(X) \leq 0.$$

De aquí obtenemos $\xi(X) \in \{-k^2 \pi^2; k = 0, 1, 2, \dots\}$, y que

$$\beta(\xi(X)) = \begin{cases} 0, & \xi(X) < 0 \\ 1, & \xi(X) = 0. \end{cases}$$

Cuando $\delta(A) = 1$ y escogemos X tal que $\xi(X) = 0$, la igualdad $e^X = A$ se reduce a

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)} [I + (X - \eta(X)I)] \\ &= \sqrt{\det(A)} [I + (X - \ln(\sqrt{\det(A)}) I)] \\ &= A, \end{aligned}$$

que conduce a

$$X = [\ln(\sqrt{\det(A)}) - 1] I + \frac{A}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Cuando $\delta(A) = \pm 1$ y escogemos X tal que $\xi(X) < 0$ la igualdad $e^X = A$ se reduce a

$$e^X = e^{\eta(X)} \cos(\sqrt{-\xi(X)}) I = A,$$

lo que conduce a $\pm \sqrt{\det(A)} I = A$. Así cualquier matriz X tal que $\eta(X) = \ln(\sqrt{\det(A)})$ y $\xi(X) \in \{-k^2 \pi^2; k = 1, 2, \dots\}$ satisface la correspondiente ecuación $e^X = \pm \det(A) I$.

Observaciones.

1. Como la función $\alpha : (-\pi^2, \infty) \rightarrow (-1, \infty)$ es invertible con

$$\alpha^{-1}(x) = \begin{cases} (\cosh^{-1}(x))^2, & x > 1 \\ -(\cos^{-1}(x))^2, & -1 < x \leq 1, \end{cases}$$

entonces la función $X \rightarrow e^X$ del conjunto abierto $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \xi(X) \in (-\pi^2, \infty)\}$ en el conjunto abierto $\mathcal{C} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) > 0, \delta(A) > -1\}$ es invertible, y su función inversa queda descrita por el análisis anterior. Explícitamente; si $A \in \mathcal{C}$ y si X está dada por

$$\begin{cases} \ln(\sqrt{\det(A)}) I + \cosh^{-1}(\delta(A)) \left(\frac{A - \eta(A) I}{\sqrt{\xi(A)}} \right), & \delta(A) > 1 \\ \left[\ln(\sqrt{\det(A)}) - 1 \right] I + \frac{A}{\sqrt{\det(A)}}, & \delta(A) = 1 \\ \ln(\sqrt{\det(A)}) I + \cos^{-1}(\delta(A)) \left(\frac{A - \eta(A) I}{\sqrt{-\xi(A)}} \right), & -1 < \delta(A) < 1, \end{cases}$$

entonces $e^X = A$.

2. Si $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son matrices dadas y $M = e^A e^B$, podemos utilizar el análisis anterior para resolver la ecuación $e^X = M$.
3. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (matrices complejas $n \times n$) es tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la ecuación $e^X = A$ tiene solución en $\mathbb{C}^{n \times n}$ (ver teorema 10 p. 224 de Bellman [2]).

Una amplia bibliografía reciente sobre la exponencial de una matriz aparece en la siguiente dirección electrónica:

<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/MatrixExponentialBib.html>

Agradecimientos Al profesor Jaime Arango C. por llamarme la atención sobre el tema de la derivada de la exponencial de una matriz y a los revisores por sus valiosas sugerencias y por comunicarme las direcciones electrónicas que aparecen en el artículo.

Referencias

- [1] Apostol T. M.. Calculus. Volumen II, segunda edición. Editorial Reverté, S.A., 1980.
- [2] Bellman R.. Introducción al análisis matricial. Editorial Reverté, S.A., 1965.
- [3] Dollard J. D. and Friedman C. N.. Product integration with applications to differential equations. Encyclopedia of mathematics and its applications. Editor, Gian-Carlo Rota, 1979.
- [4] Marmolejo M. A. y Espinosa A.. Matrices simétricas con dos valores propios. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol 4, N.1,2, p.85-98, 1995.
- [5] Putzer E. J.. Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients. American Mathematical Monthly. Vol 73, N. 1, pp. 2-7, 1966.

Dirección del autor: Miguel A. Marmolejo L. Universidad del Valle, Cali, Colombia, mimarmol@univalle.edu.co