Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de la educación media

Ana María Gómez López – 0749277

Mónica Correa Ángel – 0744352

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2012

Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de la educación media

Ana María Gómez López – 0749277

Mónica Correa Ángel – 0744352

Trabajo de grado para optar por el título de

Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director

Jorge Enrique Galeano

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de la educación media
Se trata de:	*Proyecto* [ ] *Informe Final* [X]
Director:	Jorge Enrique Galeano
1er Evaluador:	Rubén Darío Corrales
2do Evaluador:	Myriam Vega Restrepo
Fecha y Hora	*Año:* 2012 *Mes:* Septiembre *Día:* 04 *Hora:* 7:15 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Ana María Gómez López	0749277	3469
Mónica Correa Angel	0744352	3469

Evaluación

Aprobado	[ ]	*Meritorio*	[X]	*Laureado*	[ ]
Aprobado con recomendaciones	[ ]	*No Aprobado*	[ ]	*Incompleto*	[ ]

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* _____ *(máximo un mes)* ***ante***:

Director del Trabajo	[ ]	*1er Evaluador*	[ ]	*2do Evaluador*	[ ]

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* _____ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones: X	Recomendaciones:	Razón del Desacuerdo – Alternativas:

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Las observaciones realizadas fueron las siguientes:

- Revisar redacción y aspectos redundantes en algunos párrafos, como también el uso de galicismos, verbos pasivos y verbos adversativos.
- Corregir la manera en cómo se referencian algunas tablas, también corregir un error de digitación en la Tabla 3.
- Cambiar algunos términos como por ejemplo: "teoría semiótica" y "enunciados-problemas" por "teoría semiótico-cognitiva" y "enunciados-problema" puesto (respectivamente) que es más apropiado el uso de éstos para no causar confusiones de tipo conceptual.
- Eliminar un objetivo específico.

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Gdb

Agradecimientos

En la finalización de esta etapa queremos agradecer a todas aquellas personas que nos apoyaron, que día a día nos motivaron y aportaron un granito de arena en nuestras vidas para alcanzar este sueño tan anhelado…

A Dios, ya que por Él muchas veces hemos logrado seguir adelante a pesar de los problemas y obstáculos presentes en el camino.

A nuestras familias, que en el transcurso de este tiempo nos acompañaron en largas noches de trabajo.

A nuestros amigos y compañeros, que hicieron parte de grandes discusiones que generaron la organización de nuestras ideas.

A nuestro tutor de trabajo de grado, por sus consejos y recomendaciones que permitieron moldear y estructurar este proyecto.

Hoy al final del camino queremos agradecer a la vida por la oportunidad del grupo que formamos, por las discusiones que tuvimos y los momentos que vivimos… porque este es el fruto de todo, este es el resultado de lo que poco a poco construimos.

Tabla de contenido

Resumen ix

Introducción 10

CAPÍTULO I. 13

PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA. 13

1.1 Planteamiento del problema 13

1.2 Objetivos 19

1.2.1 Objetivo general 19

1.2.2 Objetivos específicos 19

1.3 Justificación 20

CAPÍTULO II. 26

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL 26

2.1 Un acercamiento al estudio de la probabilidad. 27

2.1.1 Reseña histórica de la probabilidad. 27

2.1.2 Definiciones de la probabilidad. 29

2.1.3 Propiedades de la probabilidad. 32

2.1.4 Probabilidad condicional. 34

2.1.5 Probabilidad condicional en la escuela. 35

2.1.6 Algunos enunciados – problema de probabilidad condicional propuestos en los textos escolares. 38

2.1.7 Representaciones, diferentes de la lengua natural, de enunciados – problema. 44

2.2 Una perspectiva semiótica – cognitiva para el estudio de los enunciados problemas en probabilidad condicional. 48

2.2.1 Representaciones semióticas. 48

2.2.2 Formación 50
2.2.3 Tratamiento 55
2.2.4 Conversión 58
2.2.2 La lengua natural y sus funciones discursivas 64
2.2.3 La comprensión de textos. 69
2.2.4 Situaciones de lectura 74
2.2.5 Las representaciones no discursivas 75
2.3. Una mirada intermedia: La relación entre lo semiótico y didáctico. 76
2.3.1. Dificultades identificadas en el aprendizaje de la probabilidad condicional. 77
2.4. Investigación etnográfica educativa. 81
2.4.1 Generalización. 82
2.4.2 Modelo cualitativo. 85
2.4.3 Método de investigación. 87
CAPÍTULO III. 92
HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS CONDICIONES SUFICIENTES EN ENUNCIADOS – PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL. 92
3.1 Criterios de selección de enunciados – problema que permiten conocer aquellos que se proponen en la escuela. 92
3.1.1 Los enunciados – problema escogidos son realmente situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas. 93
3.1.2 El contenido cognitivo que se encuentra inmerso en cada uno de los enunciados – problema es el mismo. 94
3.1.3 Ejemplificación de algunos de los enunciados – problema propuestos en la escuela. 94
3.2. Criterios de selección de enunciados – problema para la creación de una tarea que favorezca al aprendizaje de la probabilidad condicional. 98

3.2.1 El contexto y situación de lectura de los enunciados – problema. 98
3.2.2. Las dificultades didácticas inherentes a la presentación de enunciados – problema. 99
3.2.3. De las representaciones discursivas a las representaciones no discursivas. 100
3.3. Categorización de los enunciados – problema, escogidos para la creación de la tarea. 101
3.3.1 Elementos involucrados en la categorización. 101
3.3.2 Un ejercicio de categorización de algunos enunciados – problema de los libros de texto. 102
3.3.3 Ejemplificación de la tipología en la que se agrupan las categorías de los enunciados – problema. 105
3.3.4 Presentación de enunciados – problema representantes de cada nivel, modificados. 108
3.4. Condiciones suficientes para favorecer el aprendizaje de la probabilidad condicional. 112
3.4.1 Condiciones en cuanto a la redacción. 112
3.4.2. Condiciones en cuanto a la situación de lectura. 114
3.4.3 Condiciones propias de la probabilidad condicional 114
3.5 La tarea 115
CAPÍTULO IV. 119
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 119
4.1 Conclusiones 119
4.2 Recomendaciones 122
REFERENCIAS 123

Lista de tablas

Tabla 1. Relaciones posibles entre los eventos, en una tabla de contingencia. 45

Tabla 2. Presentación general de las tablas de contingencia. 45

Tabla 3. Representación tabular del enunciado – problema E2. 46

Tabla 4. La formación en tablas de contingencia con base en el enunciado – problema E7. 51

Tabla 5. La formación en tablas de contingencia, en registro simbólico. 52

Tabla 6. El tratamiento en tablas de contingencia.....57

Tabla 7. Conversiones entre los registros de representación de la probabilidad condicional. 58

Tabla 8. Conversión del enunciado – problema E8 en lengua natural a tabla de contingencia 60

Tabla 9. La conversión desde la tabla de contingencia al registro simbólico con base al enunciado – problema E7.....62

Tabla 10. Formas asociadas a la función referencial. 66

Tabla 11. Formas asociadas a la función apofántica.....67

Tabla 12. Formas asociadas a la función de expansión discursiva. 68

Tabla 13. Situaciones de lectura 74

Tabla 14. Registros de representación movilizados en la actividad matemática. 76

Tabla 15. Categorización de los enunciados – problema. 102

Tabla 16. Marcas lingüísticas en probabilidad condicional 113

Lista de figuras

Figura 1. Presentación general de los diagramas de árbol 47

Figura 2. La formación en un diagrama de árbol con base en el enunciado – problema *E7* 54

Figura 3. La formación en diagrama de árbol con base en el enunciado – problema *E7*.....55

Figura 4. El tratamiento en diagramas de árbol con base en el enunciado – problema E7 57

Figura 5. Conversión del enunciado – problema E8 en lengua natural al diagrama de árbol. 61

Figura 6. La conversión de la tabla de contingencia al diagrama de árbol con base en el enunciado – problema E7.....63

Resumen

A partir de las distintas dificultades identificadas por Díaz y de la Fuente (2005) en su artículo "*Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística*", y experiencias académicas en cursos universitarios de Estadística en cuanto a la interpretación y comprensión de algunos enunciados – problema de probabilidad condicional, el presente trabajo hace una exposición de ciertas condiciones, ligadas a la redacción, las situaciones de lectura, y las propias de las probabilidad condicional, implícitas en la formulación de enunciados – problema de dicho objeto matemático. Para la identificación de tales condiciones suficientes, se seleccionaron diversos enunciados – problema, que fueron escogidos en momentos diferentes con propósitos distintos, en los que se expusieron criterios relacionados con el ámbito didáctico, matemático y semiótico. Estos enunciados – problema se analizaron y se modificaron bajo elementos de la teoría semiótico – cognitiva de Duval (1999, 2004), la cual es la teoría fundamental de la propuesta, en la que se asume que el acceso a los objetos matemáticos, o más bien su comprensión, no se da de manera sensible sino a través de la movilización de representaciones posibles para dichos objetos.

Tal análisis de enunciados – problema escogidos como partícipes de una tarea, propuesta para implementar en trabajos posteriores, conlleva al reconocimiento de aspectos semióticos incidentes en el aprendizaje de la probabilidad condicional, y así la identificación y caracterización de las condiciones ligadas a la redacción, las situaciones de lectura, y las propias de la probabilidad condicional que se han de tener en cuenta para la formulación de enunciados – problema que permitan la superación de algunas de las dificultades identificadas en la comprensión, por parte estudiantes de educación media.

Palabras claves: Probabilidad condicional, dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional, registros de representación semiótica, comprensión de textos.

Introducción

De acuerdo con la teoría semiótica – cognitiva de las matemáticas de Duval, el aprendizaje de éstas, es posible analizarlo bajo la forma en cómo se adquiere el conocimiento de determinado objeto matemático a través del uso de representaciones semióticas, más no en la acumulación de contenidos enseñados de dicho objeto, puesto que el acceso a ellos no es de manera sensible.

Dado esto, se presenta una problemática relacionada con el aprendizaje de la probabilidad condicional, en la que se pretende determinar ciertas condiciones ligadas a aspectos de redacción, situaciones de lectura y propias de la probabilidad, que permitan la superación de dificultades de tipo didáctico, identificadas por Díaz y de la Fuente (2005), en cuanto a la comprensión de este objeto matemático por parte de estudiantes de la educación media. Estas condiciones identificadas y resultantes, por un lado, de una teoría semiótica – cognitiva, y por otro, de una teoría matemática en unión con determinados criterios para la escogencia de enunciados – problema presentados en textos escolares, en distintos momentos, permitieron proponer una tarea que se compone de un conjunto de enunciados – problema ya analizados, categorizados y modificados para así favorecer el aprendizaje de la probabilidad condicional.

En razón de identificar aquellas condiciones que favorecen el aprendizaje de la probabilidad condicional, este trabajo se divide en cuatro capítulos, en el primero se hace una presentación de la problemática, en el que se expone el origen de la propuesta de indagación y se justifica desde distintos aspectos la necesidad de abordarla en pro de la superación de dichas dificultades.

El segundo capítulo presenta un marco de referencia conceptual que tiene como objetivo informar al lector de las teorías que orientan el desarrollo de este trabajo, las cuales justifican el proceder y realización para la determinación de aquellas condiciones presentes en los enunciados – problema para así favorecer el aprendizaje de la probabilidad condicional.

El tercer capítulo, expone ciertos criterios tanto para una selección de un inventario de enunciados – problema trabajados en las escuelas, como para la escogencia de algunos de ellos, para ser analizados, categorizados y modificados, con los que se identifican las condiciones ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, para luego presentar el conjunto de enunciados – problema que constituyen una tarea, para implementar en

trabajos posteriores, con la que se espera promover la comprensión de dichos enunciados y se favorezca el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Y finalmente las conclusiones y recomendaciones, en las que las primeras dan cuenta del cumplimiento de los propósitos de este trabajo, y las segundas resultan como aquellas afirmaciones en las que se exponen las consideraciones que se deberían tener en cuenta tanto para la mejora de distintos aspectos internos o externos al trabajo, como también para la implementación de la tarea propuesta en éste.



CAPÍTULO I

PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

CAPÍTULO I.

PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA.

En este primer capítulo se realiza la presentación de una problemática relacionada con el aprendizaje de la probabilidad condicional, en relación a la formulación de enunciados – problema y las condiciones ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, necesarias que se deben tener en cuenta en dichos enunciados para promover su comprensión y así superar algunas dificultades, de tipo didáctico, mencionadas por Díaz y de la Fuente (2005). Para ello, se muestra el origen de la problemática, su justificación desde distintos aspectos y la necesidad de abordarla en estudiantes de educación media. A su vez, se presentan los propósitos que se esperan alcanzar con este trabajo.

1.1 Planteamiento del problema

La propuesta desarrollada surge de la experiencia que se tuvo en los cursos de estadística que se ofrecen para la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, en la cual algunos estudiantes presentaron dificultades para la interpretación y compresión de enunciados – problema[1], en torno a la probabilidad condicional y, en general, de algunos enunciados que se presentan en los distintos campos de la estadística. Con la finalidad de atender a esta problemática, fue necesario revisar distintos estudios e investigaciones que teorizan las dificultades presentes en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por lo cual se realizó una búsqueda de algunos artículos que evidencian y justifican la existencia de éstas, en relación con los enunciados – problema; de lo que se concluyó que dichas dificultades están asociadas principalmente al ámbito psicológico y didáctico; el primero refiriéndose al análisis del razonamiento que puede realizar el estudiante ante una situación probabilística y, el segundo, a los posibles sesgos de comprensión frente a un enunciado – problema.

1Entendidos como aquellos enunciados que se presentan en lengua natural acompañados, o no, de otros registros de representación, y en los cuales se hace necesario la aplicación de conceptos, definiciones y procedimientos probabilísticos que permiten la solución o desarrollo de dichos enunciados.

Al considerar las diferentes perspectivas que justifican la importancia y necesidad de desarrollar y fortalecer, por un lado, la cultura estadística[2], y por otro, el razonamiento estadístico[3]; resulta necesario precisar aquellos elementos conceptuales que permean el desarrollo de éstos, es decir, posibilitan la interpretación crítica de la información estadística a la que se accede a través de los medios de comunicación, como también la discusión y reflexión frente a esta información. Del mismo modo, la importancia del aprendizaje de la probabilidad en la escuela se justifica en que ésta permite determinar el valor de ciertas situaciones de incertidumbre, por lo cual fue pertinente conocer la teoría de la probabilidad para comprender adecuadamente los métodos probabilísticos, útiles en distintos campos[4].

Para responder a tal necesidad, la escuela debe brindar espacios que promuevan y contribuyan a la formación de los educandos, éstos reconocidos como parte de una sociedad que constantemente requiere de la interpretación de la información estadística; por ello el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como ente legal, presenta como referentes vigentes los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para la orientación del proceso de enseñanza y de aprendizaje en las escuelas; los cuales ratifican la importancia del desarrollo del *pensamiento aleatorio y sistemas de datos*, dado que este pensamiento se ha encontrado a lo largo de la historia en la ciencia, la cultura y, en general, en la vida cotidiana. Tanto los estándares como los lineamientos promueven el trabajo de este pensamiento a partir de la investigación y la exploración que pueden realizar los estudiantes y los docentes en los distintos campos, lo cual da sentido y significado a los conceptos probabilísticos en contextos específicos de la realidad; espacios en los que se ha de generar un pensamiento inductivo que permite la predicción e inferencia del comportamiento de los datos dados en un enunciado – problema.

[2] La cual "implica conocer y utilizar el lenguaje y las herramientas básicas de la estadística, tales como media, símbolos estadísticos, además de ser capaz de razonar y de interpretar representaciones de datos" (Espinel, 2007, pp. 107 - 108).

[3] Entendido como "la forma en que las personas manejan las ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística. Este razonamiento supone conectar un concepto estadístico con otro […] y puede combinar ideas sobre datos y azar" (Ibíd. pp. 107 - 108).

[4] "La probabilidad y la estadística se relacionan de una manera importante. La probabilidad se emplea como una *herramienta;* permite evaluar la confiabilidad las conclusiones respecto a la población cuando sólo tiene información muestral". (Beaver, B.; Beaver R. & Mendenhall, W, 2008, p. 128).

Dado que la propuesta desarrollada se relaciona de manera directa con la probabilidad condicional, y es dirigida a estudiantes de educación media, resulta primordial la definición de este objeto matemático, puesto que el conocimiento de su definición es necesario, pero no suficiente, para el cálculo o solución de un enunciado – problema. Según Beaver et al. (2008), quien expone y retoma la definición planteada por otros autores desde los inicios de la teoría de este objeto matemático, la probabilidad condicional del evento A, dado que ha ocurrido el evento B es:

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \text{ , si } \mathrm{P(B)} \neq 0$$

Es pertinente aclarar que el intercambio de eventos en la probabilidad condicional, es decir cuando se calcula la probabilidad condicional de que ocurra el evento B dado el evento A, genera un cambio en el resultado de la probabilidad. Asimismo, el concepto de probabilidad condicional está ligado tanto a otros conceptos estadísticos como a procesos generales[5]. Tales conceptos y definiciones como la probabilidad conjunta, la dependencia e independencia de eventos, conducen a sesgos de comprensión en el aprendizaje de la probabilidad condicional, que pertenecen al ámbito didáctico y psicológico, los cuales se pueden organizar en grupos: el condicionamiento y causación, el condicionamiento y temporalidad, intercambio de sucesos en la probabilidad condicional, confusión probabilidad condicional y probabilidad conjunta y, situaciones sincrónicas y diacrónicas[6].

A partir de estos grupos, esta propuesta se enmarca en las dificultades existentes en *el condicionamiento y causación, intercambio de sucesos en la probabilidad condicional, confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta*; la cual se aborda desde la elaboración y organización de situaciones problemas que exhiban las condiciones necesarias para la comprensión de enunciados – problema de probabilidad condicional, y la teoría semiótico – cognitiva de Duval (1999, 2004) para la justificación y fundamentación de aquellas afirmaciones surgidas en la investigación; tales afirmaciones ligadas a la incidencia que tienen las variaciones redaccionales y las variables relativas al lector, es decir, por un lado los modos en que se presenta un enunciado y por

[5] Refiriéndose a los procesos generales expuestos en los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas, estos son: La resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

[6] Estos corresponden a los conceptos que se desarrollan en un artículo escrito por Díaz y de la Fuente (2005), donde realizan una revisión de las principales investigaciones en psicología y educación sobre razonamiento y compresión de la probabilidad condicional.

otro, a aquellos conocimientos que tiene el lector respecto a un conocimiento específico como la probabilidad.

Cada una de las dificultades abordadas y analizadas en esta propuesta, se entienden según Díaz y de la Fuente (2005), como:

Condicionamiento y causación: La dificultad que se presenta en esta relación se basa principalmente en el reconocimiento de cuándo un evento es causa de otro y cuándo no; este reconocimiento implica la aceptación de que la relación de dependencia entre los eventos no constituye una condición para que los eventos sean causa y efecto.

Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional: Esta dificultad se relaciona con *la falacia de la condicional transpuesta,* donde se supone que $P(A/B)$ es equivalente con $P(B/A)$; según Falk, (1986 como se cita en De la Fuente, I. & Díaz, C., 2005) ésta se fundamenta en la imprecisión y ambigüedad del lenguaje ordinario, puesto que no siempre es posible reconocer cuál es el evento condicionante y cuál es el evento condicionado. Este tipo de dificultad es más evidente cuando los enunciados – problema se presentan en contextos médicos, cuando se hace uso de tablas de contingencia, y en la interpretación del nivel de significancia en los contrastes de hipótesis.

Confusión probabilidad condicional y probabilidad conjunta: Según Falk (Ibíd., 1986), esta confusión radica en las dificultades con la sintaxis de los enunciados – problema y la forma en cómo se encuentran redactados para así dar solución a los mismos. Además, Tversky y Kahneman, (1982b como se cita en Díaz, & de la Fuente, 2005), afirman que es posible encontrar que para la mayoría de sujetos, la probabilidad conjunta resulta más probable que cada uno de los eventos por separados, lo cual se conoce como *falacia de la conjunción,* puesto que se cree que la conjunción o intersección de los eventos es más representativa, debido a que parece evocar una mayor cantidad de ejemplos de la población generadora que cada evento por separado.

Dado que estas dificultades se presentan al momento de hacer una lectura de los enunciados – problema, fue necesaria la búsqueda o selección de una teoría que permitiera el análisis de éstos en cuanto a los elementos suficientes para la realización de una lectura que garantice su comprensión y favorezca el aprendizaje de la probabilidad condicional. En razón de esta necesidad, se adopta la

teoría semiótica – cognitiva de Duval (1999, 2004), puesto que ésta parte del reconocimiento de las representaciones como único acceso posible a los objetos matemáticos, además de brindar elementos teóricos que sustentan el lugar significativo de la lengua natural en el aprendizaje de la probabilidad condicional. Tal teoría, asume que desde las diversas representaciones se potencializa la comprensión del objeto matemático, pues permite reconocer o identificar las distintas características de dicho objeto bajo cualquiera de ellas, y así lograr una distinción entre el objeto y sus diferentes representaciones. También resulta ineludible, bajo esta teoría, la conexión entre las representaciones para propiciar el paso de una representación a otra.

Dichas consideraciones son distinguidas por Duval (2004) como fenómenos implícitos en el análisis de las representaciones, nombrados como: *diversificación de registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado, y coordinación entre los distintos registros, respectivamente.*

Ahora, se debe recalcar que los *sistemas de representación semiótica* son aquellos que permiten cumplir tres actividades cognitivas, las cuales se caracterizan, primero, por evocar los objetos a partir de distintas representaciones que muestran algunas de sus características, la formación; segundo, dar lugar a la transformación de la representación dentro del mismo sistema, lo cual permite la efectuación de operaciones internas que conllevan a la reescritura de la información dada, el tratamiento; y tercero, posibilitar el paso de una representación en un sistema inicial a una representación en otro sistema, la conversión; respecto a esta última actividad se podría pensar que es llevada a cabo con facilidad por los estudiantes, sin embargo ésta no siempre es posible dada la falta de congruencia[7] entre los sistemas en los que se pretende hacer el paso, es decir que no es claro qué elementos que constituyen a la representación inicial corresponden con los elementos de la representación final.

En la probabilidad condicional, se promueve el uso de varias representaciones tanto para la presentación de los enunciados – problema como para su resolución, entre ellas: la lengua natural, las tablas de contingencia, los diagramas de árbol y el registro simbólico; tales representaciones establecen distancias en la comprensión que pueden ofrecer de la probabilidad condicional dentro de cada una de ellas, dada su naturaleza; por lo cual resulta indispensable caracterizar los elementos

[7] Los grados de congruencia entre dos sistemas de representación semiótica, están ligados a tres criterios: correspondencia semántica, univocidad semántica y orden del arreglo de las unidades.

propios de cada representación, y distinguir en qué condiciones éstas posibilitan la comprensión de los enunciados – problema. Asimismo, se espera identificar elementos que sustenten las siguientes hipótesis:

1. La comprensión de los enunciados – problema, que generalmente se presentan en lengua natural, se facilita cuando se hace uso de distintos registros de representación y existe una coordinación entre ellos.
2. Las variaciones redaccionales de un enunciado – problema independientemente del contexto en que se encuentra este, propicia una mayor comprensión de dicho enunciado.

Estas hipótesis constituyen elementos cruciales que determinan la situación de lectura de cada sujeto que se enfrenta a un mismo enunciado – problema, la cual varía en relación con la base de conocimientos con que se dispone para atender a éste, y la manera en cómo se presentan los elementos que conforman dicho enunciado; lo cual hace inherente el análisis de la condiciones implícitas en una situación de lectura que favorezca el aprendizaje de la probabilidad condicional.

En consecuencia, se planteó la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son las condiciones, ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, que se han de tener en cuenta para la formulación de enunciados – problema que permitan la superación de algunas de las dificultades para la comprensión, por parte de estudiantes de la Educación Media?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar las condiciones, ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, que se han de tener en cuenta para la formulación de enunciados – problema que permita la superación de algunas de las dificultades para la comprensión, por parte de estudiantes de la educación media.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar las variabilidades redaccionales presentes en los enunciados – problema de probabilidad condicional.
- Determinar los modos de explicación del contenido cognitivo de un texto que favorecen la comprensión de los enunciados – problema de probabilidad condicional.
- Reconocer el papel que juega la coordinación entre los distintos registros de representación para la comprensión de los enunciados – problema de probabilidad condicional.

1.3 Justificación

El origen de la probabilidad se ha dado, en gran parte, en los juegos de azar, los cuales han estado presentes en la historia del hombre desde épocas muy remotas; éstos han sido parte de la diversión de civilizaciones antiguas, de sociedades de la Edad Media y, aún en la actualidad son la diversión de muchos. Igualmente, el pretender predecir diferentes patrones genéticos en distintas especies, resultados de experimentos, el pronóstico del tiempo, los diagnósticos médicos, los resultados de las votaciones políticas, la conveniencia de realizar, o no, una inversión, entre otros, promovieron el interés por establecer parámetros para determinar opciones a favor o en contra de las afirmaciones hechas. Surge entonces, la teoría probabilística formal que garantiza la validez matemática de aquello que se enuncia, y en la que a partir de sus propiedades y reglas básicas es posible definir posteriormente la probabilidad condicional, que se diferencia de otras probabilidades[8] por la ocurrencia de un suceso relacionado con otro suceso que lo condiciona, es decir, no considera los eventos de manera aislada sino que uno de los eventos sucede dada la ocurrencia del otro.

Sin embargo, no todas las situaciones que dieron surgimiento a la estadística y a la probabilidad han estado ligadas a los juegos de azar, puesto que algunos de ellos son parte del desarrollo y las necesidades de las sociedades en momentos históricos puntuales, entre ellos:

- En el año 3000 y 3100 a.C. los babilónicos[9] recopilaron datos sobre la producción agrícola y, en el antiguo Egipto los faraones aplicaron distintos censos con el propósito de determinar aspectos para construir las pirámides.

- En la civilización Inca, el desarrollo de los aspectos estadísticos los llevó a utilizar "*quipus*" para organizar información.

- El uso de la estadística descriptiva fue avanzando hasta llegar a teorías como la de Jean Bodin de Francia quien explicó la importancia del censo. Igualmente, la estadística a partir del siglo XVII fue una herramienta importante para los bancos y las empresas aseguradoras, lo

[8] Tales como la unión e intersección entre eventos, y en las cuales se debe tener en cuenta el tipo de relación entre estos, es decir si son dependientes, independientes, excluyentes, no excluyentes.

[9] En la biblioteca de Nínive se guardan tablillas de arcilla cocida de 25 cm por 16 cm. con inscripciones cuneiformes en los que se condensan datos sobre la producción agrícola y los artículos vendidos o cambiados mediante trueque. Valdés y Perrero, (s.f. como se cita en MEN, 2004)

cual dio lugar a la aritmética política[10], que se propuso "fijar en números aquellos fenómenos sociales y políticos buscados por los empíricos. Tienen como hecho meritorio sus creadores, el intento de buscar leyes cuantitativas que regularan los comportamientos sociales." (MEN, 2004. p. 3).

- En Alemania, el interés por los aspectos estadísticos conllevó a considerarla como una disciplina independiente de las matemáticas y meritoria de introducirla en la universidad[11], con el propósito de describir las actividades del estado.

A su vez, en Francia surge la escuela Probabilística o enciclopedicotemática, la cual "basó su desarrollo en el empleo de la matemática particularizada en el cálculo de probabilidades como instrumento de investigación" (Ibíd., 2004, p. 4). Sin embargo, el cálculo de la probabilidad nace con Blaise Pascal y Pierre de Fermat al tratar de solucionar los problemas de azar que planteó el Caballero de Meré; en la que la teoría de Pascal fue una pauta para que otros autores desarrollaran teorías probabilísticas.

Si bien la historia universal ha mostrado la necesidad y el uso de la estadística, ésta no ha estado inmersa siempre en el currículo. Particularmente en el currículo colombiano, su enseñanza ha pasado por distintas etapas:

- En la década de los 60's, surge el movimiento llamado *Matemática Moderna*, en el que el foco de la enseñanza estuvo relacionado con la teoría de conjuntos, grupos, anillos, entre otros, lo cual conllevó por un lado, a la deserción de estudiantes en la educación secundaria y, por otro, a dificultades para que los estudiantes aplicaran lo aprendido en el contexto escolar fuera de éste.
- En respuesta a estas dificultades, según MEN (2004), en la década de los 70's surge el movimiento *Back to Basic*, en el cual se pretendió retomar los aspectos básicos de las matemáticas; no obstante, este movimiento no produjo los resultados esperados puesto que la

10Uno de sus miembros fue Graunt (1620 – 1674), quien realizó investigaciones estadísticas sobre población y por ello se le señala como el iniciador de la tendencia conocida con el nombre de estadística investigadora, la cual se oponía a la postura universitaria alemana que se conoce con el nombre de estadística descriptiva.

11 La iniciativa de considerar la Estadística como una disciplina que debía enseñarse en la universidad, fue promovida por Hermann Conring (1719-1772), dado que en este país se hizo evidente su uso, por lo cual fue importante la formación estadística en sus ciudadanos.

educación se enfocó en la aplicación de algoritmos sin darle sentido y significado a los procesos que se llevaban a cabo.

- A mediados de los 70's, en pro de superar aquellas dificultades de la educación presentes en las últimas décadas, se crea el *Programa Nacional de Mejoramiento Cualitativo de la Educación*. El propósito de éste se enfocó en "la renovación de programas, la capacitación del magisterio y la disponibilidad de medios educativos, como estrategias para mejorar la calidad de la educación" (Ibíd., 1998, p. 16.), lo cual significó un primer paso hacia la renovación curricular de las matemáticas en la que su principio es el trabajo por sistemas[12]. Particularmente, los sistemas de datos se incorporaron a los contenidos de primero a noveno, para hacer énfasis en los conceptos básicos de la estadística y en el análisis de datos; desde la recolección y organización de los datos, representación en diagramas, hasta el cálculo de medidas de tendencias central e introducción a las medidas de dispersión.
- En 1996 inicia el proceso de construcción de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas[13]. En este nuevo proceso se considera que desde los distintos pensamientos matemáticos, y específicamente desde el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, es posible hacer un aporte al desarrollo del pensamiento matemático, no sólo en la educación básica sino incluso hasta en la educación media; esto dado que la estadística y la probabilidad requieren del pensamiento inductivo para hacer inferencias a partir de datos obtenidos, los cuales pueden tomar diferentes grados de certeza en contextos específicos. Como causa de estas situaciones de incertidumbre se propuso abordar la probabilidad, y en general, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, desde situaciones significativas, en las que el estudiante explore, conjeture e infiera a cerca de la información que se le presenta.

Ahora, dado que el aprendizaje de la probabilidad condicional parte de la comprensión que el estudiante adquiera de los enunciados – problema que se le presentan, y que es justamente la ambigüedad que puede darse en la lengua natural una de las razones que genera algunas de las principales dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional, fue necesario tomar, dentro de un marco de referencia conceptual, distintos aspectos semióticos que coadyuven a su

12 En la renovación curricular se reconocieron ocho sistemas: numéricos, geométricos, métricos, de datos, lógicos, de conjuntos, operaciones y relaciones, y analíticos.
13 En los lineamientos curriculares (1998) se clasifican cinco pensamientos y cinco sistemas.

comprensión. Tales como las representaciones semióticas, la coordinación y la congruencia entre ellas, las tres actividades cognitivas fundamentales que se ponen en juego durante la movilización de los distintos registros y la influencia que toman dentro de la comprensión de un texto al analizar las distintas variabilidades redaccionales para un mismo tema, lo cual implica un estudio de las variables redaccionales relativas al lector que promuevan la comprensión de enunciados – problema; y así brindar elementos para la formulación de dichos enunciados; lo cual ha sido plasmado en el capítulo II del presente trabajo.

En este orden de ideas, se propone la elaboración de un texto que da cuenta de la relación existente entre lo didáctico y lo semiótico, en el sentido del análisis de distintos aspectos referentes a una organización de situaciones problemas en las que es posible determinar algunos elementos claves para su desarrollo y realización, como la identificación de los contextos expuestos al estudiante, los registros semióticos o las situaciones de lectura. Además, en dicho contexto se ha de incluir la definición del objeto matemático en cuestión, bajo el sustento de que su conocimiento es necesario, pero no suficiente, para la solución de aquellos enunciados – problema, y también cómo este ha sido abordado en escenarios escolares a partir de los distintos registros de representación involucrados, para posteriormente presentar aquellas dificultades que inciden en el aprendizaje de la probabilidad condicional, luego detallarlas para poder identificar y caracterizar aquellas condiciones ligadas a las situaciones de lectura, a la redacción y a las propias de la probabilidad condicional, para la formulación de enunciados-problemas de dicho objeto matemático.

Entretanto, la metodología que se recomienda para la aplicación de la tarea que se propone en este trabajo tiene en cuenta las interpretaciones significativas de los sujetos dentro de un entorno social como también la interacción de este con las demás personas, puesto que es a partir de esta interacción que el sujeto construye su realidad social, con base en el *por qué* y *para qué* de sus acciones; por tanto esta investigación se considera de tipo etnográfica y educativa[14], en la que el investigador observa los distintos comportamientos de un grupo de sujetos, en determinadas situaciones, “por todos los medios posibles, de obtener las estructuras de significado que informan y

[14]La etnografía educativa se asume como una reconstrucción analítica de escenarios en la que se formulan alternativas de tipo teóricas y prácticas, las cuales propician una mejor intervención pedagógica, así pues, tiene como meta “proporcionar un conocimiento más relevante de la realidad escolar, detectar sus deficiencias y ayudar a los profesores a tomar decisiones, de un modo reflexivo, que favorezcan la corrección de semejantes disfunciones.” (Goetz & LeCompte, 1988, p. 19).

testifican los comportamientos de los sujetos observados" (Ibíd., 1988, p. 15), y toma como ayuda diseños metodológicos de carácter cualitativo, en la que se recolecta información que no es posible calificar numéricamente en su totalidad, puesto que acontece en un espacio social y específico, lo cual no permitiría distinguir fácilmente el origen de situaciones resultantes en un contexto social, es decir, se trata de información relacionada con las ideologías, conflictos, significados y expresiones provenientes de los sujetos, mientras que el producto de todo ello, almacenado para el análisis de datos, recurre a porcentajes, grados, entre otros, para así estandarizar la información. En consecuencia, esta metodología expuesta de manera más detallada en el capítulo II, propone elementos que se deben tener en cuenta para la aplicación de los enunciados – problema que conforman la tarea planteada en este trabajo.

La tarea propuesta está constituida por un conjunto de enunciados – problema de probabilidad condicional[15] tomados y modificados de algunos textos escolares, a partir de un análisis preliminar con relación a los aspectos de tipo semiótico, didáctico y matemático, que permitieron la creación de una rejilla de análisis para la identificación de determinadas variables implícitas en dichos enunciados; lo cual dio lugar a la identificación y caracterización de ciertas condiciones, ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, que se han de tener en cuenta para la formulación de enunciados – problema que permitan la superación de algunas de las dificultades para la comprensión, por parte de estudiantes de la educación media.

[15]Para la cual se establecieron diversos criterios de selección, y se tuvieron en cuenta algunos elementos semióticos, didácticos y curriculares, que garantizaron la utilidad de éstos para lo propuesto a analizar en este trabajo.



CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

CAPÍTULO II.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Este capítulo tiene como fin presentar un marco de referencia conceptual que informe al lector sobre las teorías que fundamentan el desarrollo de este trabajo y, a su vez, justifican el proceder de esta investigación para la identificación, determinación y caracterización de las condiciones presentes en los enunciados – problema de probabilidad condicional, para así promover el proceso de comprensión de ellos.

Tales teorías son: la matemática que hace un reconocimiento de dicho objeto a través de cómo surgió en la historia y de su conceptualización, como también el tipo de conocimiento necesario en cuanto a su fundamentación axiomática y aplicación; la teoría semiótico – cognitiva de las matemáticas, de Duval, para dar cuenta y fundamentar lo propuesto en este trabajo, en el que se asume que el aprendizaje de las matemáticas, es posible analizarlo bajo la forma en cómo se adquiere el conocimiento de determinado objeto matemático a través del uso de representaciones semióticas propias, más no en la acumulación de contenidos enseñados del objeto en cuestión, puesto que el acceso a ellos no es de manera sensible. Asimismo, es a partir de esta teoría que se pueden identificar los elementos suficientes en la comprensión de textos que conllevan a representaciones no discursivas que permiten una aprehensión global del objeto matemático.

Es a partir de la teoría semiótico – cognitiva y la teoría matemática que se plantea una relación entre lo semiótico y didáctico[16] que dé cuenta de cómo intervienen distintos elementos y aspectos pertenecientes a cada uno de ellos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, y con ella ofrecer una mirada general e interdisciplinar en la búsqueda de aquellas condiciones presentes en la formulación de enunciados – problema, que favorezcan su comprensión. Finalmente, desde la relación entre los aspectos semióticos y los didácticos distinguir elementos suficientes en cuanto a la implementación, posterior, de la tarea propuesta, esto es una teoría acerca del tipo de investigación a llevar a cabo.

[16] En relación a las dificultades propuestas por Díaz y de la Fuente (2005), en cuanto a una revisión de las mayores dificultades en el razonamiento y comprensión de la probabilidad condicional.

2.1 Un acercamiento al estudio de la probabilidad.

Este apartado tiene como fin presentar información suficiente al lector que dé cuenta acerca del desarrollo y conceptualización de la probabilidad a lo largo de la historia, como también, la manera en cómo se define la probabilidad condicional a partir de la ocurrencia de eventos dependientes, posterior a una organización axiomática para la probabilidad.

Ahora, dado que la probabilidad ha estado presente en distintos ámbitos de la realidad social, se ve la necesidad de incorporarla al currículo, específicamente el colombiano, caracterizada bajo el *pensamiento aleatorio y sistemas de datos.* En este pensamiento, según la propuesta curricular vigente, se plantean diversos estándares que orientan su implementación en la escuela, y por lo cual se hace importante analizar aquellos enunciados – problema trabajados en ésta, a partir de los textos escolares, para así obtener una mirada de los enunciados – problema típicos presentes en los textos escolares e identificar en ellos algunas falencias.

2.1.1 Reseña histórica de la probabilidad.

El origen de la probabilidad se dio, en gran parte, en los juegos de azar, los cuales han estado presentes en la historia del hombre desde épocas muy remotas. En el siglo XVII, se reconoció a un gran jugador llamado De Meré, quién a través de sus apuestas logró intuir que el azar poseía reglas y junto con ellas problemas, es decir, era necesario utilizar un algoritmo matemático para poder así inferir sobre la ocurrencia de un evento.

Dichos problemas fueron expuestos y solucionados por grandes matemáticos de la época, como Blaise Pascal y Pierre de Fermat, quienes con base en la obra *Liber Duo Alae*[17], dieron inicio a la teoría de la probabilidad. Fue por el juego denominado *puntos*[18], en el que estos autores lograron formalizar, lo que anteriormente estaba definido por la experiencia e intuición de apostadores, toda una mejor descripción de las leyes del azar.

17 Obra escrita por Gerolamo Cardano, y publicada en latín en 1920. En ella se exponían distintos juegos de azar e implícitamente se daba a conocer la ley de los grandes números, junto con el cálculo de probabilidades de obtener diversos resultados como en juegos de cartas, y particularmente en el póquer medieval.

18El juego consistía en ganar puntos con los dados, y de esta forma el ganador sería quien obtuviera el número de puntos acordado. Mientras este juego se llevaba a cabo, uno de sus jugadores tuvo que retirarse por distintas cuestiones; lo cual ocasionó el interrogante de qué hacer con el dinero del premio. Pascal y Fermat, resolvieron el problema, de tal modo que la repartición del dinero fuera justa, al darse cuenta que su solución se hallaría en el poder encontrar todos los posibles resultados del juego y así asignarle una probabilidad a cada uno de éstos.

En 1654 estos matemáticos, enuncian la primera definición de probabilidad, como el cociente entre el número de casos favorables y el número de posibles. Este fue un punto de partida bastante importante para el desarrollo del cálculo de probabilidades.

Luego en distintos momentos históricos, muchos otros matemáticos dieron aportes a esta teoría hasta convertirla "en el principal instrumento de análisis de los fenómenos aleatorios." (Díaz, A. 2008, p. 81.). Por ejemplo:

- 1713: Teorema de Bernoulli y la distribución binomial.
- 1738: De Moivre analiza el primer caso particular del teorema del límite central.
- 1809: Gauss realiza el estudio de la teoría de errores.
- 1810: Laplace complementa y desarrolla totalmente la teoría anterior.
- Mediados del siglo XIX: Gregor Mendel, con su obra la *Herencia* brinda grandes aportes a las ciencias naturales, en cuanto a las aplicaciones de la teoría de la probabilidad en el cruce de plantas de diferentes características.
- Al final del siglo XIX se destacó Poincaré, por la publicación *Calcul des probabilités,* obra en la cual se aborda la solución de problemas de probabilidades geométricas.
- En el siglo XX, se avanza hacia la axiomatización[19] y aplicaciones de la teoría de la probabilidad en distintos campos, guiada por Kolmogorov en 1933, con lo cual se incorpora el paso del cálculo de probabilidades a la matemática moderna.

En consecuencia, entre las distintas teorías probabilísticas que garantizan la validez matemática de situaciones de azar e incertidumbre, surge también la probabilidad condicional, que se diferencia de otras probabilidades por la ocurrencia de un suceso relacionado con otro suceso que lo condiciona, es decir, no considera los eventos de manera aislada sino que uno de los eventos sucede dada la ocurrencia del otro.

Así pues, cada descubrimiento y aporte realizado sobre la probabilidad genera entonces nuevos resultados teóricos de ésta, y en la actualidad la estadística y la probabilidad se relación de manera importante, en la que esta última "se emplea como una *herramienta;* permite evaluar la confiabilidad

[19] Proceso necesario dentro de la teoría de la probabilidad, para evitar ambigüedades en el desarrollo y aplicación de la misma.

de las conclusiones respecto a la población cuando sólo tiene información muestral". (Beaver, et al., 2008, p. 128).

2.1.2 Definiciones de la probabilidad.

A continuación se presentan las diferentes concepciones acerca de la probabilidad, de la cuales cada una presenta ventajas en su aplicación dadas las circunstancias en que se desarrollen o se trabajen. No obstante en el orden en que se presentan, es posible deducir que cada una ha resultado de la anterior como mejora del concepto y aplicación de la probabilidad.

Concepción informal de la probabilidad.

Dadas las definiciones brindadas por el diccionario de la Real Academia Española acerca de las palabras azar e incertidumbre, es posible inferir que éstas son apreciadas como cualidades graduables, y por tanto las distintas expresiones en lenguaje ordinario, referidas a la probabilidad, guardan distintas matices de significación con cierta variedad de usos. Por ejemplo, circunstancias como *imposible, probable, seguro,* pueden expresarse a través de una gran variedad de términos, es decir, un suceso que es probable que ocurra puede expresarse desde distintos términos como: posible, factible, viable, etc., que funcionan como operadores modales que determinan en un enunciado el nivel de compromiso adquirido.

Así, los enunciados:

"Comerá mañana".
'Probablemente comerá mañana".

Describen la misma realidad, pero se diferencian en su modo de afirmación, puesto que el primero es categórico, incondicional y el segundo es gradual y cauteloso.
En el contexto de las apuestas o juegos de azar, suele apreciarse la probabilidad bajo la comparación de posibilidades a favor o en contra de un resultado, como se muestra en los siguientes enunciados:

""El caballo X tiene tres posibilidades contra una de resultar ganador".
"Las apuestas son cinco a uno a favor del equipo X"." (Batanero, Cañizares & Díaz, 1996, p. 20).

Por otro lado, la incertidumbre puede afectar también la veracidad de las proposiciones, es decir, el uso del término *verosímil* se utiliza con una finalidad específica, mientras que el término *probable* se usa en un determinado contexto lógico. Ejemplo:

““Es probable que lo que dice sea verdad”.

“Lo que dice es verosímil”.” (Ibíd. 1996, p. 20).

No obstante, de acuerdo con la variedad de situaciones y contextos, resulta necesario el uso de estos términos para así caracterizar lo incierto o verosímil de dichas situaciones, con lo cual se puede ahondar en un análisis más profundo y matemático del enunciado.

Teoría clásica: Laplace.

Laplace brinda la siguiente definición:

“Un suceso […] puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente “probables”.” (Ibíd., 1996, p. 21).

Esta definición, garantiza la equiprobabilidad de los eventos dentro de un espacio muestral, y se justifica a través del principio de indiferencia, el cual indica la asignación de la probabilidad como $\frac{1}{n}$, en la que se considera “las alternativas como equiprobables cuando hay un balance de evidencia a favor de cada alternativa.” (Ibíd., 1996, p. 21).

Teorías lógicas.

Esta clase de teorías resultan como necesarias ante las desventajas de la teoría clásica de Laplace[20], y son caracterizadas por la inferencia hecha sobre un conjunto de enunciados o proposiciones, en la que la probabilidad se interpreta como un grado de creencia racional, es decir, esta “es tratada como un tipo esencial de relación entre dos enunciados” (Ibíd., 1996, p. 23). Explica

[20] La cual no ofrecía una claridad para determinar la probabilidad cuando un conjunto de alternativas no eran equiprobables y por tanto su aplicación podría verse de manera inconsistente.

la inducción sobre una relación lógica, en la que intervienen un enunciado evidente y un enunciado hipótesis, y así generalizar relaciones de implicación y contradicción dentro de la lógica deductiva.[21]

Teoría frecuencial o empírica.

Su dominio de aplicación refiere a un conjunto de enunciados reconocidos como un conjunto de sucesos o resultados experimentales, en los que la probabilidad es calculada bajo las frecuencias relativas observadas en cada uno de los distintos resultados en pruebas repetidas. Este cálculo se realiza de manera objetiva, aislado de las creencias personales, y es demostrado de manera práctica a través de la experimentación. El proceso de calcular radica en dos momentos. El primero, relativo a que los resultados varían en cada prueba de modo imprevisible, por lo que se puede hablar de variación aleatoria; y el segundo, en el cual "se observa cómo un hecho empírico a corto plazo puede ser desordenado, pero a la larga surge una cierta regularidad." (Ibíd., 1996, p. 24).

Esta teoría puede no resultar útil, dado que no es posible evaluar una probabilidad de modo preciso, y además existen situaciones que no pueden ser tratadas siempre como ensayos repetidos bajo determinadas condiciones experimentales y por ende el número de veces en que se ensaya no es infinito.

Probabilidad subjetiva.

Esta teoría, en contraste con la anterior, es aplicable de acuerdo con el conjunto de creencias de una persona, y la probabilidad, o verdad de una proposición en particular, no está determinada unívocamente. Se relaciona un poco con las teorías lógicas de la probabilidad, en la medida en que ambas representan el grado de creencia sobre un suceso, mas no son fijadas bajo el mismo proceder, puesto que la probabilidad subjetiva consiste en el grado de creencia de una persona, a partir de su experiencia.

Dado que se trata de creencias personales, distintos resultados pueden ser atribuidos a un mismo evento, pero en el momento de ejecutarse por distintas personas dentro de un juego, cada una de ellas estará dispuesta aceptar las apuestas hechas sobre el evento. Otra condición importante, trata acerca de no realizar apuestas que muy seguramente conducirán a la pérdida, ya que "Un conjunto

[21]Tales relaciones son: a. De implicación: "si *p* es consecuencia de *q*, la proposición *q* da a *p* la probabilidad 1" (Ibíd., 1996, p. 23) b. De contradicción: si *p* y *q* son contradictorias, luego la probabilidad dada de *q* a *p* es 0.

de probabilidades asignadas por un sujeto son coherentes si entre las combinaciones de apuestas que uno está dispuesto a hacer no hay ninguna en la que la ganancia sea uniformemente negativa" (Ibíd., 1996, p. 26). Esta condición indica que no existe forma universal de seleccionar una probabilidad sobre un determinado evento, no obstante, permite derivar las leyes básicas de este objeto matemático.

Probabilidad formal.

Conocida también como la probabilidad objetiva o normativa, en la que se calcula la probabilidad con precisión a través de las leyes matemáticas y de su teoría axiomática. Kolmogorov, avanza en la teoría matemática de la probabilidad logrando así la inserción del cálculo de probabilidades a la matemática moderna. "Según este autor, los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida normada definida sobre estos conjuntos." (Ibíd., 1996 p. 27).

Esta teoría surge como consecuencia de algunas restricciones que presentaba la teoría de Laplace[22] en cuanto a la equiprobabilidad de los sucesos y a la finitud del espacio muestral correspondiente, y de la cual se llega a enunciar lo siguiente:

"si E es alguna región con una medida conocida (longitud, área, volumen) la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a un subconjunto A de E es el cociente entre la medida de A y la medida de E." (Ibíd., 1996, p. 27).

2.1.3 Propiedades de la probabilidad.

En consideración con la teoría de Laplace, y con los aportes desde distintas concepciones de la probabilidad se presenta a continuación los fundamentos de ésta:

En primera instancia es necesario partir de la definición de probabilidad[23]:

> *Dado un experimento aleatorio con un espacio muestral S y un evento A, se dice que la probabilidad de que ocurra A, simbolizada $P(A)$, se calcula mediante el cociente ente el número de elementos del evento y el número de elementos del espacio. Así,*

[22]De esta teoría, se utilizó la definición de probabilidad para realizar el cálculo de las probabilidades de sucesos con resultados infinitos.

[23]Esta definición junto con las propiedades y reglas de la probabilidad han sido tomadas del texto escolar: Estadística y Probabilidad I (2008).

$$P(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)}$$

Esta definición, se reconoce como la medida de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio, donde $n(S)$[24] representa al número de casos, diferente de cero, o resultados posibles y $n(A)$, al número de casos favorables que pueden ocurrir.

Ahora, como el espacio muestral $n(S)$ ha sido considerado como finito, es pertinente exponer los tres postulados de la probabilidad:

- La probabilidad de ocurrencia de un evento siempre debe ser un número que está entre 0 y 1. La razón de esto es que el número del evento siempre es menor o igual que el número de elementos del espacio muestral. Formalmente se puede decir que si A es cualquier evento de un experimento aleatorio , entonces:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad del evento imposible es 0 y se representa como:

$$P(\emptyset) = 0$$

- Si el evento es igual al espacio muestral su probabilidad es 1. En otras palabras, la probabilidad del evento seguro es 1, y su representación es:

$$P(S) = 1$$

A partir de los anteriores postulados es posible mencionar otras reglas básicas de la probabilidad:

- Si A es un evento, la probabilidad de que A no ocurra, equivale a encontrar la probabilidad de ocurrencia del complemento de A, es decir, $P(A')$, y se calcula así:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- Si A y B son eventos de un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurran A y B al mismo tiempo, equivale a calcular la probabilidad de la intersección , es decir:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B), si\ los\ eventos\ A\ y\ B\ son\ intersecantes.$$

$$P(A \cap B) = 0, si\ los\ eventos\ son\ disyuntos.$$

[24] Dado que en las escuelas se trabaja con espacios muestrales finitos, este trabajo ha centrado su atención en éstos.

- Si A y B son dos eventos, la probabilidad de que ocurra A o B, equivale a calcular la probabilidad de la unión, es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), si\ los\ eventos\ son\ intersecantes.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), si\ los\ eventos\ son\ disyuntos.$$

- Si A y B son dos eventos, entonces la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B, equivale a encontrar la probabilidad de la diferencia $P(A - B)$:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

2.1.4 Probabilidad condicional.

Dadas las distintas teorías probabilísticas que han surgido para garantizar la validez matemática de las situaciones de azar e incertidumbre, surge también la probabilidad condicional, que se diferencia de otras probabilidades no por la ocurrencia de los eventos de manera aislada sino que uno de los eventos sucede dada la ocurrencia del otro, puesto que con frecuencia puede ocurrir que la probabilidad de un evento puede verse afectada por el conocimiento de otro. Esta se lee como "la probabilidad de un evento dado la probabilidad de otro evento" y se expresa por medio de la siguiente ecuación:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, donde\ P(B)\ es\ diferente\ de\ 0.$$

Al enunciar que uno de los dos eventos sucede dada la ocurrencia del otro, es necesario remitir a la definición de eventos independientes y eventos dependientes, por lo que al multiplicar a ambos lados de la ecuación por $P(B)$, se obtiene la expresión conocida como *la regla de la multiplicación.* Esta regla permite calcular "el producto de la probabilidad de que uno de los eventos ocurra y la probabilidad condicional de que el otro evento ocurra considerando que el primer evento ha ocurrido (ocurre u ocurrirá)." (Freund, J. E & Simón, G. A, 2005, p. 140.):

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

O, puesto que no tiene importancia a cuál evento se refiera como A y a cuál como B, la fórmula también se puede expresar como:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

Dado esto se tiene:

- **Eventos independientes:** Los eventos A y B son independientes, si la probabilidad de que ocurra el evento A no afecta la ocurrencia del evento B.

Dada la penúltima ecuación[25], si los eventos A y B son independientes, su expresión es:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

"Si dos eventos son independientes es porque existe intersección y su probabilidad es igual a la multiplicación de las probabilidades de los eventos." (Romero, J. 2008, p. 107).

No obstante, es pertinente aclarar que la definición de eventos independientes no se relaciona con la definición de *eventos mutuamente excluyentes*, puesto que estos son eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo, por lo que su intersección es vacía, es decir su probabilidad es cero. Luego la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes está dada bajo la expresión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si los eventos *no son mutuamente excluyentes*, es decir, si éstos tienen una ocurrencia simultánea, su expresión matemática es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Eventos dependientes:** Dos eventos A y B son dependientes, si la probabilidad de que ocurra el evento A afecta o produce cambios en la ocurrencia del evento B:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

- **Eventos complementarios:** Dos eventos son complementarios cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento es complementaria a la probabilidad de la no ocurrencia de ese mismo evento. La representación simbólica de la probabilidad de ocurrencia del complemento de A, se denota por medio de $P(A')$, y se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

2.1.5 Probabilidad condicional en la escuela.

En consideración con los fundamentos, propiedades y conceptualizaciones en probabilidad, expuestas en el apartado anterior, resulta ineludible reconocer cómo este objeto matemático se incorpora y se desarrolla en la escuela, y asimismo exponer algunos de los problemas de probabilidad condicional que se trabajan en ella.

[25] Si los eventos A y B son independientes, se puede sustituir en esta ecuación a *P(A)* por *P(A/B)*.

Recorrido histórico

Dado que no solamente las situaciones o juegos de azar han hecho surgir el desarrollo de la probabilidad y su teoría, sino también la necesidad de reconocer aquella información que brindan los medios de comunicación en cuanto a aspectos sociales, políticos y económicos, la estadística y la probabilidad han sido consideradas como áreas de conocimiento importantes tanto para el desarrollo de la sociedad, como para su enseñanza y formación en las escuelas. No obstante, la enseñanza de estas áreas no ha estado siempre inmersa en el currículo, específicamente el colombiano, pues su incorporación ha atravesado por distintos momentos históricos. Luego de la crisis en movimientos como la *matemática moderna* y *Back to Basic,* se crea el *Programa Nacional de Mejoramiento Cualitativo de la Educación,* en el que se da un primer paso hacia la renovación curricular de las matemáticas a través del trabajo por sistemas, y es aquí como la estadística y la probabilidad en conjunto aparecen mencionadas como *sistemas de datos* incorporándose así a los contenidos de primero a noveno. Posteriormente, en 1998 aparecen los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, los cuales consideran que desde los distintos pensamientos, específicamente desde el *pensamiento aleatorio y los sistemas de datos*, es posible hacer un aporte al desarrollo del pensamiento matemático desde la educación básica hasta la educación media, puesto que en este pensamiento se requiere del pensamiento inductivo para la realización de inferencias a partir de datos obtenidos, los cuales permiten tomar diferentes grados de certeza en contextos específicos. En el año 2000 aparece la idea de competencias, por lo que la creación de un documento que concretará lo planteado en los *Lineamientos Curriculares* para cada grado escolar, y tuviera como propuesta el trabajo por competencias, resultó necesario, en pro de particularizar aquellas competencias para fortalecer en los distintos grados, como también una orientación para la formulación de estas mismas. Tal documento, *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (2006), además de presentar la articulación de los distintos pensamientos por medio de una coherencia vertical y otra horizontal, expone las competencias que se deben trabajar para los siguientes niveles:

- Primero a tercero,
- Cuarto a quinto,
- Sexto a séptimo,
- Octavo a noveno, y
- Décimo a undécimo.

Ahora, en relación a lo propuesto en este trabajo de grado, es conveniente anotar tales estándares que atienden específicamente a la probabilidad o a su noción, referente al *pensamiento aleatorio y sistemas de datos*, estos son:

- **Primero a tercero:**
  - ✓ Explico - desde mi experiencia - la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
  - ✓ Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
- **Cuarto a quinto:**
  - ✓ Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- **Sexto a Séptimo:**
  - ✓ Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
- **Octavo a noveno:**
  - ✓ Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático previsto.
  - ✓ Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
  - ✓ Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
- **Decimo a undécimo:**
  - ✓ Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
  - ✓ Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).
  - ✓ Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Es claro entonces, que los estándares proponen que hasta el nivel sexto a séptimo, se trabaje sólo la noción de probabilidad, sin entrar en detalle en sus propiedades o aplicaciones.; mientras que en los tres últimos niveles la probabilidad se trabaja más a fondo, y particularmente en el último nivel se introduce la probabilidad condicional, razón por la cual en el presente trabajo, la propuesta se dirige a estudiantes de la educación media. Dado esto, a continuación se presentan algunos de los

problemas de probabilidad condicional que son trabajados en las escuelas, y de los cuales se ha pretendido dar un juicio respecto a algunas ventajas y fallas durante su realización o solución.

2.1.6 Algunos enunciados – problema de probabilidad condicional propuestos en los textos escolares.

Los enunciados – problema, mencionados en el trabajo como *E1, E2, E3…,* han sido obtenidos de algunos textos escolares y son presentados[26]de la misma manera como aparece en dichos textos:

E1: Existen diez cámaras fotográficas en una caja, tres de las cuales están defectuosas. Si se van a seleccionar dos, una después de la otra. ¿Cuál es la probabilidad de escoger una cámara defectuosa seguida por otra también de la misma condición?[27]

Solución:

La primera cámara seleccionada de la caja, que resultó ser defectuosa, es el evento A: $P(A) = \frac{3}{10}$

La segunda cámara seleccionada, defectuosa, es el evento B*. Por lo tanto:*

$P(B/A) = \frac{2}{9}$*, esta expresión, puesto que la segunda cámara defectuosa depende de la primera que también haya sido defectuosa.*

De esta manera se determina que la probabilidad de que las dos cámaras sean defectuosas es:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = \left(\frac{3}{10}\right).\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{90}$$

Luego, la probabilidad de escoger una cámara defectuosa seguida de otra en la misma condición es de $\frac{6}{90}$

Aunque en este problema, no se pregunta directamente por la probabilidad condicional, es necesario el cálculo de ella para responder a la intersección de dos eventos, es decir, hallar la probabilidad de escoger una cámara defectuosa seguida por otra también en la misma condición. Por otro lado, dado que la ocurrencia del evento B depende de la ocurrencia del evento A, lo cual se reconoce como

[26]Algunos de los problemas a exponer son ejemplos en los textos escolares, y su solución se presenta de la misma forma en dichos textos.
[27] Tomado del texto escolar Álgebra (2008).

eventos dependientes, su expresión matemática fue descrita como $P(B/A) = \frac{2}{9}$, y por tanto la intersección de los eventos A y B fue calculada a partir de la regla de la multiplicación. No obstante, en este problema la palabra condición demanda a que el estudiante interprete ligeramente que se trata de un problema de probabilidad condicional, lo cual, en general, no representaría mayor dificultad para el estudiante. Se puede inferir también que al no mencionar en la pregunta del problema la palabra "*y*" en vez de "también", no resulta fácilmente claro que se trata de una intersección de eventos puesto que se puede pensar que por las palabras "*también*" y "*condición*", debe calcular la probabilidad condicional como respuesta al problema, aún ya habiéndola calculado desde el principio y suponer que ya se resolvió el problema.[28]

E2[29]*: Si W es el evento de que un empleado está bien capacitado y Q es el evento de que el empleado cubra la cuota de producción, exprese simbólicamente las probabilidades de que:*

a. *Un empleado bien capacitado cubra la cuota de producción;*
b. *Un empleado que cubra la cuota de producción no esté bien capacitado;*
c. *Un empleado que no está bien capacitado no cubra la cuota de producción.*

Solución:

a. $P(Q/W)$
b. $P(W'/Q)$
c. $P(Q'/W')$

En este problema se pretende que el estudiante a partir de la información dada represente cada una de las probabilidades pedidas en un lenguaje simbólico, es decir a través de expresiones matemáticas.

Puede suceder que para un estudiante, no sea claro que el enunciado trate acerca de probabilidad condicional, no porque le enuncien con la palabra "*condición*", sino porque suele suceder que en este tipo de problemas se escriban las etiquetas "*dado que*" y "*de los que*" por lo cual en algún momento puede existir una confusión al creer que se trata de la probabilidad de una intersección. Por ejemplo, en el enunciado *"un empleado bien capacitado cubra la cuota de producción"*, un estudiante podría simbolizarlo como la intersección de los eventos Q y W, puesto que al no estar escrito de las

[28] Esto puede suceder también, si el estudiante no identifica la dependencia entre eventos.
[29] Los enunciados-problemas del E2 al E5, son tomados del texto Estadística y Probabilidad II (2008).

siguientes maneras, puede no reconocerse fácilmente cuál es el evento que condiciona al otro , es decir no reconocer la dependencia entre estos:

- Dado que un empleado esté bien capacitado, cubra la cuota de manejo.
- Un empleado que cubra la cuota de producción dado que está bien capacitado.

E3: En relación con el ejercicio anterior, señale verbalmente las probabilidades que se expresan con:

a. $P(W/Q)$

b. $P(Q'/W)$

c. $P(W'/Q')$

Solución:

a. Un empleado que cubre la cuota de producción esté bien capacitado.

b. Un empleado que está bien capacitado no cubra la cuota de producción.

c. Un empleado que no cubre la cuota de producción no esté bien capacitado.

Este enunciado es similar al enunciado anterior, pues se pide que a partir de las expresiones matemáticas dadas, el estudiante las represente de manera verbal, es decir en un lenguaje natural. Aunque las soluciones expuestas hayan sido realizadas en consecuencia como el texto suele redactar los enunciados de probabilidad condicional, es importante reconocer que muchas otras formas pueden surgir por el estudiante, si éste hace uso de las etiquetas nombradas en el anterior problema.

Es conveniente anotar también, que en los enunciados – problema *E2* y *E3*, no se exige un cálculo numérico de las probabilidades, además en el enunciado no se ofrecen datos numéricos para poder hacerlo.

E4: Entre los 400 internos de una prisión, algunos son infractores de primera incidencia, algunos son criminales insensibles, algunos purgan condenas de menos de cinco años y algunos purgan condenas más largas, con la división exacta siguiente:

	Condenas de menos de cinco años	*Condenas más largas*
Infractores de primera incidencia.	120	40
Criminales insensibles	80	160

Si se selecciona al azar uno de los internos de la prisión para realizar una entrevista acerca de las condiciones de la prisión, H es el evento de que es un criminal insensible y L es el evento de que purga una condena más larga, determine cada una de las probabilidades siguientes con base en los conceptos y los totales de los renglones y columnas de la tabla:

a. $P(H)$
b. $P(L)$
c. $P(L \cap H)$
d. $P(H' \cap L)$
e. $P(L/H)$
f. $P(H'/L)$
g. $P(H/L)$

Solución:

a. $P(H) = \frac{240}{400}$
b. $P(L) = \frac{200}{400}$
c. $P(L \cap H) = \frac{160}{400}$
d. $P(H' \cap L) = \frac{40}{400}$
e. $P(L/H) = \frac{160}{240}$
f. $P(H'/L) = \frac{40}{200}$
g. $P(H/L) = \frac{160}{200}$

En comparación con los enunciados – problema anteriores, al actual, en su presentación lo acompaña una tabla de contingencia de doble entrada, que resume la información presentada en lenguaje natural, con el objetivo de interpretarla y dar respuesta de manera numérica a las probabilidades exigidas. La información en esta tabla muestra valores cardinales, es decir el número de elementos perteneciente a la intersección entre los eventos L y H, de tal manera la lectura de

valores, como por ejemplo 120, hace referencia al número de internos de una prisión que son infractores de primera incidencia y purgan condenan de menos de cinco años, o viceversa.[30]

Para la solución de este enunciado-problema, además de darle una interpretación a la tabla, es necesario también tener en cuenta la definición y concepción del complemento de un evento y de la probabilidad condicional, ejemplo de ello es cuando piden calcular la probabilidad $P(H' \cap L)$, en la que se debe reconocer también, que la probabilidad del evento H, obedece a la sumatoria de valores de la fila en que está este evento, es decir $\frac{240}{400}$.

Otro aspecto importante en este problema refiere al cálculo de la probabilidad, en el que se ha de reconocer que dado que los valores son cardinales, éstos pertenecen a un espacio muestral definido y finito, como lo es 400, que es el número total de internos de la prisión. Además, identificar que el cálculo de las probabilidades condicionales $P(L/H)$ y $P(H/L)$ no significan lo mismo, es decir el intercambio de eventos no conduce llegar al mismo resultado.

Por otro lado, para el estudiante, el contexto en el que está dado el problema, puede resultarle desconocido, puesto que las características de acusación de los internos en ser criminales insensibles o infractores de primera incidencia, suelen ser descritas únicamente en Estados Unidos (lugar de origen del texto).

E5 Las probabilidades de que una persona que viaja por el noroeste de Estados Unidos visite Boston, Providence o ambas ciudades son 0.45, 0.36, *y* 0.18. *Obtenga las probabilidades de que*

a. Una persona que visita Boston también visite Providence;

b. Una persona que visita Providence también visite Boston.

Solución:

Sea:

- ✓ $P(B)$: *la probabilidad de que una persona visite a Boston.*
- ✓ $P(P)$: *la probabilidad de que una persona visite a Providence.*
- ✓ $P(B \cap P)$:*la probabilidad de que una persona visite a ambas ciudades.*

[30]Puesto que la intersección entre dos eventos es conmutativa.

Luego:

a. $P(P/B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}$

$$P(P/B) = \frac{0.18}{0.45}$$

b. $P(B/P) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)}$

$$P(B/P) = \frac{0.18}{0.36}$$

Para este enunciado – problema es necesario primero simbolizar los eventos, pues el enunciado a diferencia de los otros, no lo presenta. En el momento de nombrar las probabilidades, dadas en decimales, no es muy claro cuál corresponde a cada evento, por lo que puede resultar necesario el término "*respectivamente*". La palabra "*también*", en contraste al enunciado – problema *E1*, no refiere a la intersección entre eventos, sino a la condición de que si ya ha visitado una ciudad determinada, entonces visite otra, por lo cual no puede resultar claro que se trata de una probabilidad condicional, es decir, que el evento que se describe primero en el enunciado debe entenderse como el evento que condiciona. Igualmente se debe tener presente la forma como se describe matemáticamente la probabilidad condicional para dar respuesta a los enunciados.

E6: La probabilidad de que un estudiante que asiste a una universidad del oeste compre una computadora personal es 0.50 y la probabilidad de que sus calificaciones suban si compra una computadora personal es 0.72. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante que asiste a esta universidad compre una computadora personal y mejore sus calificaciones?

En un orden de ideas distinto a como se han expuesto, solucionado y comentado los anteriores enunciados – problema, es necesario referirse a este desde el comienzo puesto que aun cuando se reconoce que existen tres eventos y se simbolizan, no es posible llegar a su solución, puesto que aun cuando se identifica la información dada no es suficiente.

Sea:

- ✓ $P(U)$: *La probabilidad de que un estudiante asiste a la universidad del oeste.*
- ✓ $P(C)$: *La probabilidad de que un estudiante compre una computadora personal.*
- ✓ $P(S/C)$: *La probabilidad de que un estudiante suba sus notas si compra una computadora personal.*

Luego, la probabilidad de que un estudiante que asiste a la universidad del oeste compre una computadora personal y mejore sus calificaciones está dada por la dada expresión $P(U \cap C \cap S)$, de la cual no se conoce la probabilidad del evento U.

No obstante, es indispensable recalcar que el texto del que se ha tomado este enunciado – problema es un texto traducido y por ello puede presentar falencias en su redacción y, por lo tanto dificultar su comprensión:

2.1.7 Representaciones, diferentes de la lengua natural, de enunciados – problema.

Cada uno de los enunciados – problema ha sido expuesto con su solución y con un juicio específico acerca de distintos aspectos. La solución que se ha mostrado de ellos no es la única posible, puesto que existen otras formas de representarlos y consecuentemente de hallar las respuestas. Sin embargo, los enunciados – problema *E2* y *E3*, a pesar de no contener información numérica también son posibles de representarlos de otra manera. Esto es, hacer uso de otros registros de representación diferentes al de la lengua natural, tales como las tablas de contingencia y diagramas de árbol.

Tablas de contingencia.

Las tablas son registros de representación intermediarios, es decir, se usan generalmente como el vínculo entre dos registros (ecuaciones y gráfico, lengua natural y registros simbólicos, etc.) conformadas por filas y columnas. La información consignada en cada una de las celdas de la tabla implica relaciones diferentes entre las filas y columnas, no obstante, se suele presentar únicamente la intersección entre estas.

Cada fila y cada columna representan los eventos que intervienen en el enunciado; cada una de las celdas muestra información acerca de las relaciones entre los eventos, aunque por lo general, en la escuela no se presentan todas las relaciones posibles; es decir, que muestra las intersecciones entre los eventos, más no las probabilidades condicionales entre estos:

	A	A'	
B	$P(A/B)$ $P(A \cap B)$ $P(B/A)$	$P(A'/B)$ $P(A' \cap B)$ $P(B/A')$	$P(B)$
B'	$P(A/B')$ $P(A \cap B')$ $P(B'/A)$	$P(A'/B')$ $P(A' \cap B')$ $P(B'/A')$	$P(B')$
	$P(A)$	$P(A')$	

Tabla 1. Relaciones posibles entre los eventos, en una tabla de contingencia.

Por otra parte, en una tabla de contingencia, el valor de la última celda representa el número total de elementos del espacio muestral. Igualmente se pueden obtener otros totales en las demás celdas, que sumados deben representar el total de elementos del espacio muestral como se ejemplifica en la siguiente tabla:

	A	A'	
B	$P(A/B)$ $P(A \cap B)$ $P(B/A)$	$P(A'/B)$ $P(A' \cap B)$ $P(B/A')$	Total $P(B)$
B'	$P(A/B')$ $P(A \cap B')$ $P(B'/A)$	$P(A'/B')$ $P(A' \cap B')$ $P(B'/A')$	Total $P(B')$
	Total $P(A)$	Total $P(A')$	Total de eventos del espacio muestral.

Tabla 2. Presentación general de las tablas de contingencia.

El total de eventos del espacio muestral corresponde a la sumatoria de los totales de $P(A)$ y $P(A')$, o $P(B)$ y $P(B')$, en las que los valores de ambas sumatorias debe ser el mismo. Asimismo, el total de eventos del espacio muestral puede hallarse a partir de la sumatoria de las intersecciones:

$$P(A \cap B),\ P(A \cap B'),\ P(A' \cap B)\ y\ P(A' \cap B').$$

El total $P(A)$, resulta de la sumatoria entre $P(A \cap B)\ y\ P(A \cap B')$, de manera similar el total $P(B)$ es el valor de la sumatoria entre $P(A' \cap B) y\ P(A \cap B)$.

Ahora, la representación del enunciado – problema $E2$, queda expresado de la siguiente manera:

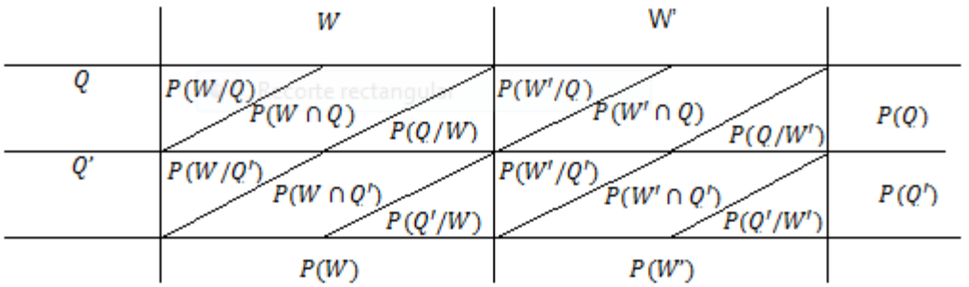


Tabla 3. Representación tabular del enunciado – problema E2.

Se sabe que W indica que un empleado esté bien capacitado y Q al evento de que el empleado cubra la cuota de manejo, entonces se puede representar cada uno de los literales de la pregunta así:

- El literal a corresponde a la representación $P(Q/W)$, en la primer celda de la tabla.
- El literal b corresponde a la representación $P(W'/Q)$, en la segunda celda de la tabla.
- El literal c correspondiente a la celda cuatro de la tabla en la que se ubica $P(Q'/W')$

Diagramas de árbol.

"El diagrama de árbol es la representación en la cual se describe gráficamente el espacio muestral y en el cual cada ramificación constituye un elemento de la muestra y cada camino corresponde a un posible resultado del experimento." (Romero, J.J., 2008, p. 79.).

Y tiene como propiedades las siguientes:

- La primera ramificación corresponde a un evento y su complemento, en este caso A y A', en la que la suma de sus valores debe ser igual al 100%, en el caso de los porcentajes; o a 1 en el caso de las fracciones o los decimales.
- La segunda ramificación indica la ocurrencia del segundo evento cuando ha sucedido el primer evento.
- La tercera parte de los diagramas de árbol, si no hay más ramificaciones, corresponden a la intersección entre los eventos, la cual es obtenida a partir de la regla de la multiplicación, razón por la que no hace parte de la ramificación del diagrama.

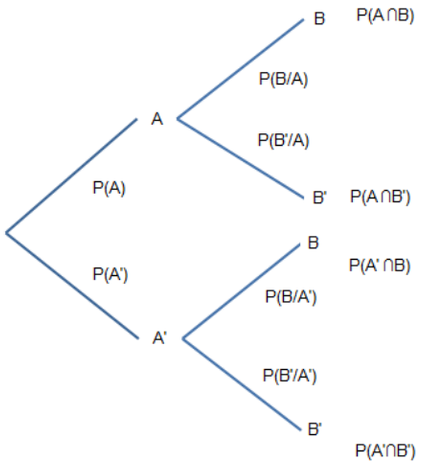


Figura 1. Presentación general de los diagramas de árbol

Para el enunciado – problema *E2*, el diagrama de árbol sería el siguiente:

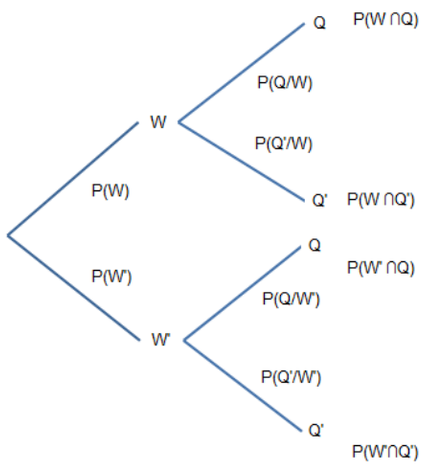


Figura 1. Representación en diagrama de árbol del enunciado – problema E2.

Entretanto cualquier enunciado-problema de probabilidad condicional puede ser representado, al mismo tiempo, por una tabla de contingencia o diagrama de árbol, y quizás también por otras representaciones[31], que enriquecen su comprensión. Estas representaciones, como se ha visto en cada una de las presentadas están dotadas de unas reglas para su uso y realización del gráfico, es decir, la tabla de contingencia muestra la misma información que un diagrama de árbol, pero bajo distintas condiciones o reglas.

[31]Como diagramas de Venn y diagramas de rejilla, los cuales no fueron abordados en este trabajo, puesto que no son de interés para las autoras, ya que el uso de éstos no es muy frecuente en las escuelas para abordar la probabilidad condicional.

2.2 Una perspectiva semiótica – cognitiva para el estudio de los enunciados problemas en probabilidad condicional.

Este apartado muestra los elementos suficientes o necesarios en la comprensión de textos, a partir de los aspectos básicos de la teoría semiótico – cognitiva de Duval, entre estos, las representaciones semióticas, las actividades cognitivas movilizadas en toda actividad matemática que permiten representar los enunciados – problema en distintos registros de representación. Igualmente se expone cuán determinante es la lengua natural en la comprensión de los enunciados – problema en cuanto a las expresiones que conforman los enunciados y los procesos de comprensión que se pueden dar en los lectores a partir de distintas condiciones.

2.2.1 Representaciones semióticas.

Una de las diferencias que se establecen entre el ser humano y los otros seres vivos, se debe a que los primeros tienen la capacidad de utilizar signos para referirse a las distintas sensaciones y objetos que lo rodean, por ejemplo se puede destacar en la vida cotidiana los números telefónicos, los códigos de seguridad, y particularmente en las matemáticas, las distintas representaciones que se utilizan para referirse a los números, las fracciones, las variables en álgebra, la probabilidad, y demás experiencias que son susceptibles de representar. Estos signos tienen sentido dentro de un sistema semiótico, que al permitir las tres actividades cognitivas[32] se nombran como registros de representación semiótica.

Además, en el análisis del papel que juegan estos registros en el aprendizaje aparecen tres fenómenos que permean tal comprensión de los enunciados – problema de probabilidad condicional; el primero, *la diversificación de los registros de representación semiótica*, el cual pone de manifiesto la existencia de varios sistemas de representación, es decir, que los distintos objetos con los que un estudiante se relaciona cumplen la propiedad de ser nombrados o identificados a partir de diferentes representaciones que muestran características, en ocasiones distintas, de los objetos que evocan, lo cual estimula en el estudiante diversas preguntas en torno al objeto matemático; el segundo, *la diferenciación entre representante y representado* determina las diferentes características que tiene el objeto en particular y que es entendido desde sus distintas representaciones, lo que contribuye a la

[32] Formación, tratamiento y conversión.

identificación de un objeto no por la representación que toma en determinado contexto, sino por las características propias de éste en sus múltiples representaciones, lo cual implica no confundir la representación con el objeto representado; y el tercero, *la coordinación entre los diferentes registros* posibilita establecer relaciones entre las distintas representaciones de un mismo objeto, lo cual da lugar a la comprensión de dicho objeto, a partir del reconocimiento del objeto en cada una de las representaciones propias de éste. Sin embargo, estos fenómenos son insuficientes para el análisis del aprendizaje, ya que tal análisis sólo es posible a partir de tres actividades cognitivas fundamentales, estas son: la formación, el tratamiento y la conversión.

Estas actividades son realizadas por los sujetos al poner en juego los distintos registros de representación semiótica, entre ellos la lengua natural, que es fundamental en el aprendizaje de cualquier objeto matemático, esto dado que es una herramienta que se utiliza para dar una explicación, expresar dudas, generar enunciados, entre otras formas de discurso en que puede ser empleada; razón por la cual es fundamental el análisis de este registro de representación utilizado en la escuela para el aprendizaje a partir de los elementos semióticos propuestos en la teoría semiótico – cognitiva de Duval (1999, 2004). Ahora, si bien es clara la importancia de la lengua natural para la comprensión de los enunciados – problema de probabilidad condicional, se debe resaltar la necesidad del uso de otros registros de representación como los diagramas de árbol, las tablas de contingencia, y las fórmulas matemáticas propias de la probabilidad condicional como parte de los fundamentos necesarios de su aprendizaje.

Lo anterior alude a la diversificación de registros de representación, la cual permite identificar las características de la probabilidad condicional presentes en cada uno de éstos, donde toma un lugar significativo la coordinación entre los diferentes registros, ya que es a partir de las conexiones que se establecen entre las representaciones que se desarrolla la comprensión. Asimismo, la *diversificación* es fundamento para entender que el estudio, de las distintas representaciones y la coordinación entre ellas, en relación con la comprensión que produce el sujeto de un objeto, implica la aceptación de un análisis complejo puesto que obedece a funcionamientos cognitivos distintos, y por tanto, la apropiación que logren hacer "*de los diferentes sistemas semióticos contribuye, sobretodo, a desarrollar, o más específicamente, a potenciar la capacidad mental de representación del sujeto"*

(Duval. 1999, p. 19); es en razón de esta diversificación y coordinación, que se alcanza el reconocimiento del objeto a los que aluden las distintas representaciones.

A continuación se presentan las tres actividades cognitivas movilizadas por los sujetos en el proceso de aprendizaje a partir de la producción de representaciones, entendidas como:

2.2.2 Formación

Los registros de representaciones semióticas están formados por signos, organizados en sistemas, que permiten evocar características de un objeto, la actividad cognitiva de *formación* posibilita el uso de distintos signos para representar un objeto matemático, es decir, que la puesta en práctica de esta actividad favorece la presentación de un mismo objeto de varias formas según la escogencia que se haga de los signos, en relación con las reglas de conformidad[33] propias de cada sistema semiótico.

Dado que, cada sistema de representación semiótica tiene sus propias reglas de conformidad, a continuación se presenta la actividad de formación y sus reglas de conformidad para los registros de tabla de contingencia, registro simbólico, diagramas de árbol y lengua natural como los registros utilizados en la presentación y resolución de enunciados – problema de probabilidad condicional.

Tablas de contingencia

Las tablas son registros de representación, conformadas por filas y columnas, las cuales se nombran a la izquierda y en la parte de arriba de la tabla, respectivamente; estas filas y columnas permiten representar diferente información[34], mediante el uso de números, ya sean decimales, naturales, porcentajes o fracciones. La información que se consigna en cada una de las celdas de la tabla implica relaciones diferentes entre las filas y columnas, aunque generalmente, la información que se presenta es la intersección entre las filas y las columnas, en la que se utilizan los cardinales como modo de representación.

Particularmente, en las tablas de contingencia, tanto las filas como las columnas representan los eventos que intervienen en los enunciados – problema de probabilidad condicional, y cada una de las

[33] Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación. Estas reglas no son generales para todos los registros de representación semiótica, además éstas no son explícitas pues se reconocen en el uso que se hace del sistema.
[34] En las tablas se puede consignar información no sólo numérica, también pueden corresponder a datos en lengua natural, sin embargo se hace referencia sólo a los datos numéricos dado el interés del trabajo.

celdas muestra información acerca de las relaciones entre los eventos, aunque por lo general en la escuela no se presentan todas las relaciones posibles. Por ejemplo, la representación tabular del siguiente enunciado – problema, muestra la información que se exhibe en la tabla 4, en la que se presentan todas las posibles relaciones entre los eventos.

E7: El coordinador académico de un colegio realizó un estudio en el cual determinó que, el 40% de los estudiantes reprueban al menos una materia en el primer semestre. Además, logra establecer que el 74% de los estudiantes que pierden alguna materia no asiste al programa de monitorias establecido en el colegio y el 12% de los estudiantes que no reprueban alguna materia no asisten al programa de monitorias

	A Reprobar al menos una materia		A' Aprobar todas las materias		
B Asistir al programa de monitorias	16,5%	10,4%	83,5%	52,8%	63,2%
		26%		88%	
B' No asistir al programa de monitorias	80,4%	29,6%	19,6%	7,2%	36,8%
		74%		12%	
	40%		60%		

Tabla 4. La formación en tablas de contingencia con base en el enunciado – problema E7.

En la tabla anterior, la información dada en el enunciado solo aporta algunos datos, los demás han de ser obtenidos mediante diversos operaciones matemáticas; se reconoce además que los eventos A y A' corresponden a las columnas, las cuales tienen sus respectivos totales al final de cada una de ellas, situación que es análoga en las filas con los eventos B y B'. También se puede identificar que cada celda se ha divido en tres secciones para representar las relaciones posibles entre los eventos, de la siguiente manera:

- La primera sección corresponde a la probabilidad de ocurrencia de los eventos de las columnas, cuando el evento de la fila lo condiciona.
- La segunda sección indica la probabilidad de la intersección de los eventos
- La tercera sección muestra la probabilidad de que ocurra el evento de las filas, cuando las columnas representan el condicionante.

Por ejemplo, en el enunciado – problema anterior esto se puede analizar, en la celda que vincula la primera columna y la segunda fila así:

- ✓ 80.4%, corresponde a la probabilidad de reprobar alguna materia dado que no se asiste al programa de monitorias; esta información ni se da en el enunciado ni se pide en las preguntas y fue calculada después de varios procesos.

- ✓ 29.6%, corresponde a la probabilidad de reprobar alguna materia y no asistir al programa de monitoria; este valor se obtiene de la multiplicación de los datos dados 40% y 74% en virtud de la regla de la multiplicación.

- ✓ 74%, corresponde a la probabilidad de que los estudiantes que pierden alguna materia no asistan al programa de monitorias, la cual fue dada en el enunciado.

- ✓ Las partes finales de las filas y las columnas, como se mencionó arriba, corresponden a un único valor que es la probabilidad de su respectivo evento. Todo lo anterior, queda presentado en la siguiente tabla:

	A Reprobar al menos una materia	A' Aprobar todas las materias	
B Asistir al programa de monitorias	$P(A/B)$ $P(A \cap B)$ $P(B/A)$	$P(A'/B)$ $P(A' \cap B)$ $P(B/A')$	$P(B)$
B' No asistir al programa de monitorias	$P(A/B')$ $P(A \cap B')$ $P(B'/A)$	$P(A'/B')$ $P(A' \cap B')$ $P(B'/A')$	$P(B')$
	$P(A)$	$P(A')$	

Tabla 5. La formación en tablas de contingencia, en registro simbólico.

Se debe tener en cuenta que aun cuando la información que se presentó en la tabla 4, corresponde a porcentajes, es posible que estos valores se presenten en otras representaciones numéricas, o simbólicas como se muestra en la tabla 5. Igualmente, se hace necesario recalcar que en la escuela no suele promoverse la presentación de todas las posibles relaciones ni la escritura de éstas a partir del registro simbólico.

Registro simbólico

En la probabilidad condicional, se toman signos específicos para nombrar los distintos objetos que están inmersos en ella, estos son:

- Los eventos, se designan con letras del abecedario en mayúscula, en ocasiones con las primeras letras de éste y en otras con la letra inicial del evento.
- La probabilidad de un evento cualquiera se denota con $P(A)$, y se interpreta como la probabilidad de ocurrencia del evento.
- La probabilidad de que se den dos o más eventos a la vez, es decir la intersección entre ellos, se representa como $P(A \cap B)$
- La probabilidad de ocurrencia de la unión de dos eventos o más se designa como $P(A \cup B)$
- La probabilidad condicional entre eventos se expresa como $P(A/B)$ en la que el evento que condiciona es el consecuente y el evento condicionado es el antecedente, esto en consideración de la probabilidad como una proporción.

Es claro, que los signos utilizados para nombrar en el registro simbólico definen de manera general a un evento y a las operaciones o relaciones entre éstos, lo cual ayuda al cálculo de las probabilidades de un modo más asertivo y efectivo, en consideración de manejar una nomenclatura que represente la información. Estas reglas de formación, propias de los registros simbólicos, se evidencian en el enunciado – problema $E7$, cuando se denota cada uno de los eventos del enunciado, como también las relaciones entre ellos, por ejemplo:

- ✓ Sea A el evento de reprobar una materia y B asistir al programa de monitorias.
- ✓ Sea $P(A \cap B)$ la intersección entre los eventos
- ✓ Sea $P(A/B)$ la probabilidad de que ocurra A dado B.

Diagramas de árbol

Los diagramas de árbol son representaciones gráficas que muestran los eventos que intervienen en un los enunciados – problema, cada uno de estos eventos está ligado a una ramificación del diagrama de árbol, en la que presenta las relaciones entre los eventos:

- La primera ramificación corresponde a un evento y su complemento, en este caso A y A', en la que la suma de sus valores debe ser igual al 100%, en el caso de los porcentajes, o a 1 en el caso de las fracciones o los decimales.
- La segunda ramificación indica la ocurrencia del segundo evento cuando ha sucedido el primer evento.
- La tercera parte de los diagramas de árbol, si no hay más ramificaciones, corresponden a la intersección entre los eventos, la cual es obtenida a partir de la regla de la multiplicación, razón por la que no hace parte de la ramificación del diagrama.

Respecto al enunciado – problema $E7$, la representación en el diagrama de árbol se muestra a continuación.

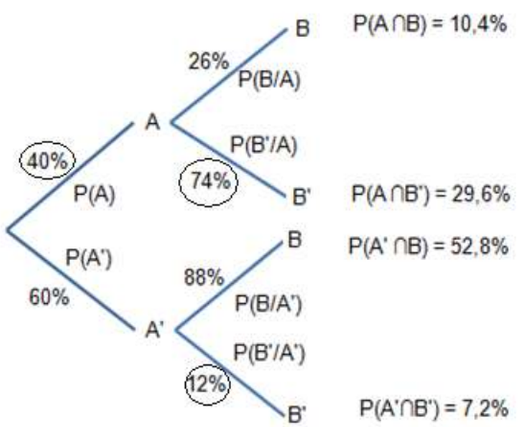


Figura 2. La formación en un diagrama de árbol con base en el enunciado – problema *E7*

Los diagramas de árbol, muestran las relaciones que se establecen entre los eventos en un único sentido, en el cual se toma como referencia un primer evento para representar todas las posibles relaciones, razón por la cual se hace necesario el diseño de un nuevo diagrama de árbol que parta del segundo evento, para representar por completo las relaciones entre los eventos. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los valores de las intersecciones son iguales en los diagramas de arboles, por lo cual se podrían identificar más de las 16 relaciones existentes, a continuación se presenta el segundo diagrama de árbol del enunciado – problema $E7$,

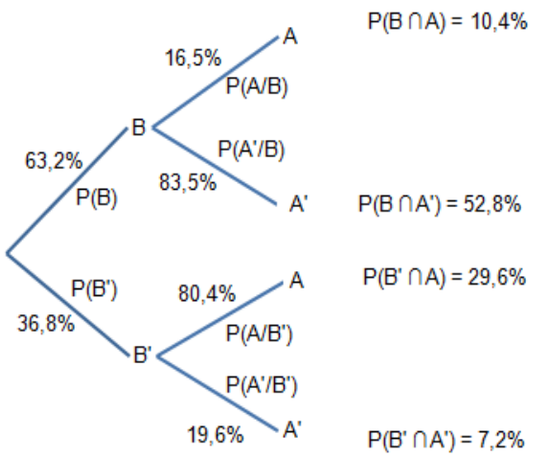


Figura 3. La formación en diagrama de árbol con base en el enunciado – problema *E7*

Lengua natural

El uso de la lengua natural en la probabilidad condicional implica dos momentos en que se pone de manifiesto la actividad de formación, el primero, la identificación de los eventos que intervienen en los enunciados – problema, y el segundo, poder reconocer el sentido al que alude cada expresión del dicho enunciado; sin embargo, la falta de reglas que indiquen el modo en que se debe presentar un enunciado – problema, genera una variedad de expresiones que da lugar a una misma interpretación. En la lengua natural es posible hacer uso de distintos signos para representar una misma situación, como también representar información diferente con un mismo signo.

2.2.3 Tratamiento

La transformación que lleva de una representación inicial a una representación final dentro de un mismo registro recibe el nombre de *tratamiento,* en el cual es posible reescribir la información inicial a partir de las reglas de expansión[35], propias de cada registro de representación. La aplicación del tratamiento como actividad cognitiva, en un contexto más específico, como la probabilidad condicional se evidencia en momentos distintos, esto dado que dentro de cada una de las representaciones se da lugar a distintas operaciones que conllevan a una información complementaria.

[35] Son reglas cuya aplicación da una representación del mismo registro que la representación de partida. (Duval, 2004, p. 45)

Lengua natural

Por lo general el tratamiento en lengua natural, no es una actividad que el estudiante realice de manera explícita, mas sí se reconoce como una actividad que propicia una mayor comprensión del enunciado al posibilitar la construcción de proposiciones equivalentes, en cuanto a la información que presentan. Por ejemplo,

> P1: La probabilidad de que un estudiante dado que aprueba todas las materias, asista al programa de monitorias.
>
> P2: La probabilidad de que un estudiante no repruebe una materia dado que asiste al programa de monitorias.
>
> P3: La probabilidad de que un estudiante dado que asiste al programa apruebe todas las materias.

P1, P2 y P3 son proposiciones a las que se les ha aplicado un tratamiento puesto que presenta una misma información, en la que la elección de los signos para designarlos es diferente para cada una de éstas. Debe ser claro que al efectuar el tratamiento en el registro de la lengua natural, se pueden elegir al menos una de las dos elecciones siguientes: realizar un cambio del verbo central del enunciado, o reformular todo el enunciado – problema, para generar una mayor comprensión de éstos.

Tablas de contingencia

Completar una tabla de contingencia a partir de la información que brinda un enunciado – problema, implica la puesta en práctica de la actividad de tratamiento, puesto que se requiere retomar la información dada y establecer conexiones con otros conocimientos, para determinar aquella información que falta mediante el reconocimiento de propiedades de la probabilidad condicional. Cabe aclarar, que no es parte de la naturaleza de las tablas de contingencia generar estos tratamientos; pues, en general, las tablas exhiben información, por lo que las operaciones necesarias para obtener la información suele realizarse aparte.

	A Reprobar al menos una materia		A' Aprobar todas las materias		
B Asistir al programa de monitorias	16,5%	10,4% / 26%	83,5%	52,8% / 88%	63,2%
B' No asistir al programa de monitorias	80,4%	29,6% / 74%	19,6%	7,2% / 12%	36,8%
	40%		60%		

Tabla 6. El tratamiento en tablas de contingencia

El tratamiento que se muestra en la tabla 6, la cual retoma la información expuesta en la tabla 4 acerca del enunciado – problema *E7,* se evidencia cuando se logra identificar que sí hay un 40% de estudiantes que reprueban al menos una materia, entonces el 60% restante aprueba todas las materias, lo que hace visible la propiedad de la probabilidad, en cuanto a que la suma total de los eventos complementarios debe ser igual a 100%.

Diagramas de árbol

La actividad cognitiva de tratamiento puesta en práctica en los diagramas de árbol, es posible en consideración con la propiedad que afirma que la suma de los valores en las ramificaciones debe equivaler al 100%, o a 1[36]

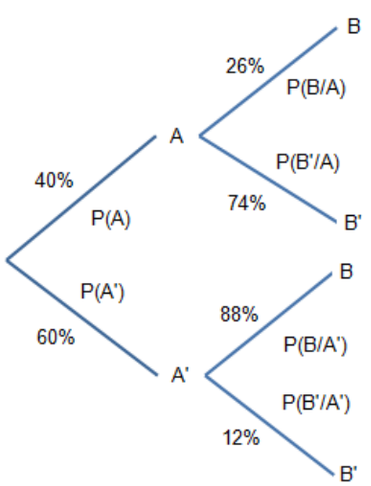


Figura 4. El tratamiento en diagramas de árbol con base en el enunciado – problema E7

[36] Estos resultados dependen de sí se hace uso de porcentajes, decimales o fracciones.

Es entonces, a partir de esta propiedad que es posible completar el diagrama de árbol de la figura 5, pues al conocer que $P(A) = 40\%$ se hace fácil determinar el valor de $P(A')$, como también ocurre en las segundas ramificaciones.

El tratamiento como actividad cognitiva posible en el registro simbólico, surge de la aplicación de las definiciones y las propiedades propias de la probabilidad. Por ejemplo, al pretender responder la pregunta:

Si el coordinador selecciona al azar uno de los estudiantes del colegio ¿Cuál es la probabilidad de que no haya reprobado materias y asista a las monitorias programadas?, que hace parte del enunciado E7, se obtiene:

$$P(B/A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')}$$

$$0{,}88 = \frac{P(A' \cap B)}{0{,}6}$$

$$(0{,}88)(0{,}6) = P(A' \cap B)$$

$$0{,}528 = P(A' \cap B)$$

2.2.4 Conversión

Se reconoce la conversión como aquella transformación en la que se ponen en juego varios registros de representación, en la que se espera poder identificar unos elementos, unidades significativas, y hacerlos corresponder con otras unidades dentro de una representación en otro sistema, para lo cual es indispensable el reconocimiento del contenido de la representación y lo que representa para establecer las correspondencias adecuadas. Las posibles conversiones entre los registros de representación de la probabilidad condicional, se resumen en la siguiente tabla:

Desde \ Hacia	Lengua natural	Tabla de contingencia	Diagrama de árbol	Registro simbólico
Lengua natural	Tratamiento	Conversión 1	Conversión 1	Conversión 1
Tabla de contingencia	Conversión 2	Tratamiento	Conversión 2	Conversión 2
Diagrama de árbol	Conversión 3	Conversión 3	Tratamiento	Conversión 3
Registro simbólico	Conversión 4	Conversión 4	Conversión 4	Tratamiento

Tabla 7. Conversiones entre los registros de representación de la probabilidad condicional.

Todos los registros de representación permiten que se dé la conversión entre ellos, sin embargo al ser ésta la actividad cognitiva más compleja, se hace necesario el reconocimiento de las distintas unidades significativas de cada registro de partida para ser representado en el registro de llegada, en el que se atienda las características propias de éste último. No obstante,

> La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registro ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales.
>
> (Duval, 2004, p. 49)

Tal conversión se hace posible sólo cuando se garantiza una correspondencia entre las unidades significantes de cada representación generando así una coordinación[37] entre éstas. Dentro de este fenómeno se reconocen dos posibilidades, la *congruencia* y la *no congruencia* entre representaciones de diferentes registros; la primera cumple la condición de permitir el paso de un registro a otro de forma inmediata mientras que en la segunda no es posible realizar de inmediato tal paso. Es entonces cuando se establecen criterios que garantizan la congruencia, y con ello la conversión. Estos son:

> El primero, es la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental […]. El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de partida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada […]. El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones.
>
> (Ibíd., 2004, p. 53).

[37] Este fenómeno junto con los otros fenómenos de *diversificación de los registros de representación semiótica, y diferenciación entre representante y representado,* de manera estrecha, son los que permiten establecer un análisis del desarrollo de los conocimientos y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, concerniente al razonamiento, comprensión de textos, adquisición de tratamiento lógicos y matemáticos.

A continuación se ejemplifica la conversión entre los registros a los que se ha referido en la tabla 8.

Conversión 1. Desde la lengua natural a los otros registros.

E8: El 40% de los aspirantes a la universidad estatal de la ciudad aprueba el examen de conocimientos. El 75% de los estudiantes que han aprobado el examen de conocimientos ha tomado un curso previo de matemáticas, mientras que el 80% de los que no aprobaron el examen de conocimientos no tomaron previamente un curso de matemáticas.

	A (Aprobar el examen de conocimientos)	**A'** (no aprobar el examen de conocimientos)
B (tomar un curso previo de matemáticas)	75%	
B' (No tomar un curso previo de matemáticas)		80%
	40%	

Tabla 8. Conversión del enunciado – problema E8 en lengua natural a tabla de contingencia

Se identifican las unidades significativas que brinda el enunciado en lengua natural y se establece una correspondencia con cada una de las celdas y secciones[38] de la tabla de contingencia, de la manera siguiente:

- El 40% de los aspirantes a la universidad estatal de la ciudad aprueba el examen de conocimientos, se transforma en el total de la columna de aquellos estudiantes que aprueban el examen de conocimientos.
- El 75% de los estudiantes que han aprobado el examen de conocimientos ha tomado un curso previo de matemáticas, se ha representado en la sección de la condicional, en la que el evento de la fila es el condicionante y el evento de la columna es el condicionado.
- El 80% de los que no aprobaron el examen de conocimientos no tomaron previamente un curso de matemáticas, se indica en la tabla la sección de la condicional, bajo las mismas características de la información anterior.

[38] Estas secciones guardan el mismo orden que se presentó en la actividad de formación.

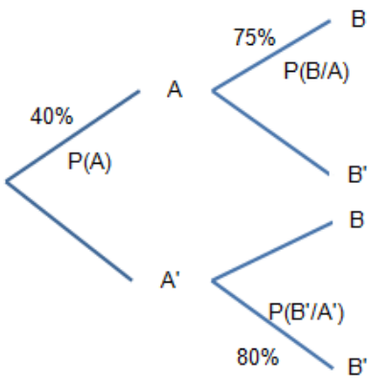


Figura 5. Conversión del enunciado – problema E8 en lengua natural al diagrama de árbol.

La representación de las unidades significantes del registro en lengua natural, tanto en la tabla de contingencia como en el diagrama de árbol, plantea dos aspectos importantes de la conversión: la congruencia y no – congruencia entre los registros de representación, pues al representar la primera unidad significante, el 40% de los estudiantes, es claro que sí se conocen las características de los diagramas de árbol y las tablas de contingencia, se puede establecer la congruencia entre los registros porque se da el cumplimiento de los criterios de ésta.

La no – congruencia entre los registros se evidencia, al no poder determinar una organización de las unidades significativas, que promueva la conversión, el cual es explícito en la presentación de segunda y tercera unidad significativa del enunciado – problema, en la tabla de contingencia y el diagrama de árbol, pues en las celdas de la tabla es posible consignar tres relaciones diferentes (de las cuales solo una es válida), y en el diagrama de árbol dado que las segundas ramificaciones representan la probabilidad condicional de los eventos (cuatro posibles), los cuales requieren de diseños diferentes según el evento que condiciona.

En cuanto, a la conversión del registro de lengua natural al registro simbólico suele estar ligada al fenómeno de no – congruencia, pues la presentación en los registros no cumple con los criterios de congruencia, ejemplo de ello es la falta de orden entre las unidades significantes en cada registro, ya que al representar simbólicamente el enunciado siguiente, que es parte del enunciado – problema *E8*:

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un estudiante, dado que ha tomado previamente un curso de matemáticas, no haya aprobado el examen de conocimientos?,

Se obtiene la expresión $P(A'/B)$, en la que es notoria que el orden en que se presenta la información no es el mismo, lo cual implica la no correspondencia entre las unidades significantes. No obstante, esta congruencia puede generarse al buscar formas de redacción que den lugar a un orden de las unidades significativas.

Conversión 2. Desde la tabla de contingencia a los otros registros.

Es poco común, que en la escuela se promueva el paso de la información que se presenta en una tabla de contingencia a un registro simbólico, esto en razón de que las actividades propuestas fomentan el uso de las tablas para obtener datos que permitan establecer relaciones entre los eventos, y no como una opción en la que el estudiante indique las posibles relaciones entre éstos. Aunque, una actividad aceptable es la presentación de una tabla que muestre las relaciones entre los eventos y se pida a los estudiantes expresar simbólicamente la información dada, por ejemplo en el enunciado $E7$.

	A Reprobar al menos una materia		A' Aprobar todas las materias		
B Asistir al programa de monitorias	16,5%	10,4% 26%	83,5%	52,8% 88%	63,2%
B' No asistir al programa de monitorias	80,4%	29,6% 74%	19,6%	7,2% 12%	36,8%
	40%		60%		

Tabla 9. La conversión desde la tabla de contingencia al registro simbólico con base al enunciado – problema E7.

Es decir, que se reconozca que $16{,}5\% = P(A/B)$, $7{,}2\% = P(A' \cap B')$, $88\% = P(B/A')$, entre las otras relaciones dadas; aunque se debe tener en cuenta que esta conversión no es inmediata debido a que la tabla presenta tres relaciones distintas en cada celda, lo que podría dificultar la comprensión de qué dato se representa en qué registro simbólico.

Entretanto, la conversión de la tabla de contingencia a un diagrama de árbol podría ser más inmediata, ya que si es claro desde qué evento se parte y qué se representa en cada ramificación, fácilmente el estudiante puede ubicar cada una de las informaciones de la tabla en el lugar que corresponde en el diagrama de árbol.

Ahora, representar en la lengua natural los datos que se presentan en la tabla de contingencia es una actividad más común en la escuela, pues por lo general, se pide que se exprese en lengua

natural la probabilidad de ocurrencia de un evento, después de hacer una presentación en la tabla de contingencia. Por ejemplo, las relaciones que se muestran entre los eventos en la tabla 4, se representan en el diagrama de árbol como se muestra a continuación:

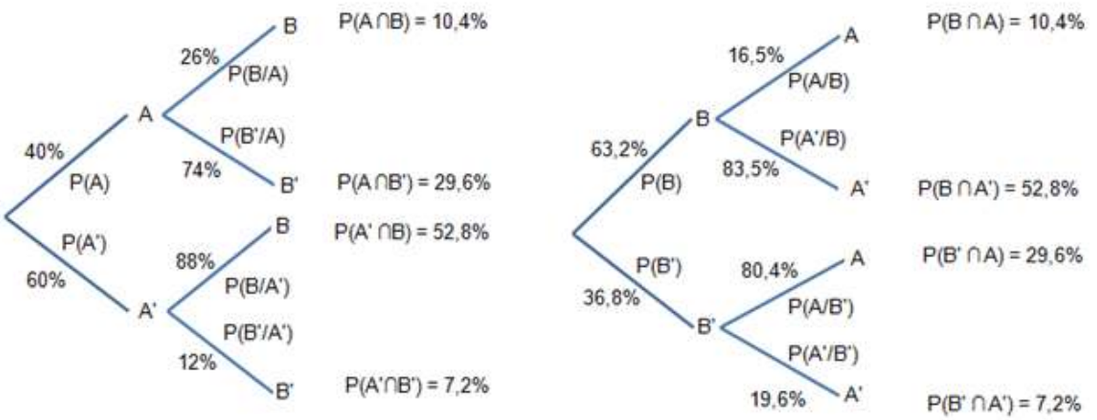


Figura 6. La conversión de la tabla de contingencia al diagrama de árbol con base en el enunciado – problema E7.

Y algunas de las expresiones en lengua natural que muestran las relaciones en la tabla de contingencia son:

$P1$: La probabilidad de que un estudiante repruebe al menos una materia y asista al programa de monitorias. $P(A \cap B)$

$P2$: La probabilidad de que un estudiante, dado que repruebe al menos una materia no asista al programa de monitorias. $P(B'/A)$

$P3$: La probabilidad de que un estudiante repruebe al menos una materia dado que no asiste al programa de monitorias. $P(A/B')$

Es importante, reconocer que "La actividad matemática moviliza simultánea o alternativamente varios sistemas semióticos, algunos vinculados con el funcionamiento cognitivo común (la lengua natural) y otros creados por las necesidades del desarrollo de la actividad matemática" (Duval, 1999, p. 63) y que el interés principal, en cuanto al aprendizaje de las matemáticas, no radica en el número de contenidos enseñados, sino en "analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la mayoría de alumnos de todos los niveles de la enseñanza" (Ibíd., 1999 p. 15), lo cual implica que la preocupación por el aprendizaje de la probabilidad condicional se debe centrar más en los procesos de comprensión de ésta por parte del estudiante y no solo en los

aspectos matemáticos que se involucran en su aprendizaje. Dado que el acceso que el estudiante tiene a los objetos matemáticos, y particularmente a la probabilidad condicional, no es a través de lo sensible, sino a partir del uso de distintas representaciones semióticas que permiten su comprensión, puesto que es en relación con éstas que es posible el análisis de los procesos de aprendizaje de conocimientos, se hace el reconocimiento de unas afirmaciones que fundamenten la necesidad de estos registros:

1. Los tipos de representación no son irreductibles entre sí, dado que sólo tienen sentido en un único sistema, es decir, "una representación jamás puede ser considerada y analizada sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida". (Ibíd., 1999, p. 17).
2. En el cambio de un registro de representación a otro, pueden presentarse diversos problemas frente al desarrollo de los conocimientos, en tanto a los elementos característicos de toda representación; esto es, la no confusión entre lo representado, es decir el *objeto*, aquello que se dice de ese objeto, *contenido del objeto*, y la forma en cómo se presenta ese objeto, o dicho de otra manera, *el registro.*
3. Atender a distintos registros de representación para un mismo objeto, proporciona una mayor comprensión de éste, en la medida en que cada uno de ellos logre coordinarse, y se puedan reconocer las distintas informaciones que aportan cada uno de las representaciones.

En relación con lo desarrollado, es evidente que en las matemáticas se ponen en juego varios registros de representación, particularmente el registro de representación semiótica de la lengua natural y la lengua formal como los más utilizados durante las clases. Sin embargo, en la mayoría de los casos, ambos causan confusiones en los estudiantes y resultan ser complejos para éstos, pues causa dificultad poder interpretar y comprender los objetos matemáticos, las relaciones matemáticas, y demás elementos propios de las matemáticas, desde distintos registros, razón por la cual se hace necesario un análisis de éstos en el que se identifiquen sus propias características.

2.2.2 La lengua natural y sus funciones discursivas

Dado que los enunciados – problema de probabilidad condicional son expresados en lengua natural, en ocasiones acompañados de otros registros, y que la comprensión de dichos enunciados está ligado a la interpretación que se hace de lo que se expresa en lengua natural, se hace necesario el análisis de los enunciados a partir de las restricciones y los elementos propios de la lengua natural,

que desde la teoría semiótico – cognitiva está relacionado con los modos de cumplimiento de determinadas funciones de la lengua natural. Es claro entonces, que este registro de representación semiótica no sólo es empleado para comunicar, transformar y tomar conciencia[39] de aquello que enuncia, sino que permite la construcción de un discurso, que representa para los estudiantes el único acceso a los enunciados – problema de probabilidad condicional.

Una lengua se caracteriza por ser aquella que "permite un **discurso**, es decir una expresión que haga una referencia al mundo" de manera que pueda ser compartida entre los que quieren como comunicarse entre sí" según Benveniste (1966 como se cita en Duval, R. 2004), tal referencia que se hace del mundo se establece a partir del cumplimiento de cuatro funciones discursivas:

- Función referencial, para designar objetos, imaginarios o reales, mediante el uso de deícticos, nombres propios, artículos, adjetivos, sustantivos, entre otras formas de expresión.
- Función apofántica, referirse a los objetos nombrados a partir de la explicitación de sus características.
- Función de expansión discursiva, que organice los enunciados que refiere a los objetos nombrados y sus características mediante una coherencia.
- Función de reflexividad, indica la intención que el locutor tiene al emitir un enunciado.

Función referencial de designación de objetos.

El uso de una lengua debe permitir nombrar los distintos objetos a partir de diferentes signos, éstos se pueden clasificar dentro de cuatro operaciones propias de esta función: la designación pura, la categorización simple, la determinación y la descripción; cada una de estas operaciones hace uso de signos particulares que da lugar al nombramiento de objetos existentes, o no.

El uso de las operaciones de la función referencial, se asocia a ciertas formas de expresión que devienen de éstas, tales expresiones son de uso frecuente en los discursos cotidianos y tienen un papel relevante en el aprendizaje al posibilitar la referencia a un objeto matemático y conocer, en gran medida, sus características. A continuación se muestra la tabla, que presenta Duval (2004), para ilustrar las formas en que se presentan:

[39] Estos tres empleos que se hace de la lengua corresponden a las *funciones meta-discursivas* de comunicación, tratamiento y objetivación, que se plantean en Duval, 2004, como parte de las diferentes funciones cognitivas de los registros de representación semiótica.

Las operaciones de la función referencial y algunos ejemplos de formas de expresión que les están asociadas en dos registros de lenguaje

Operaciones de función referencial	Operaciones elementales de la "lógica natural" según Grize	Formas de expresión correspondientes a las operaciones en las lenguas naturales	Formas de expresión correspondientes a las operaciones en las lenguas formales
Designación pura		Deícticos, nombres propios	Símbolos de constante
Categorización	Las operaciones de anclaje: π η y las operaciones de objetos: γ θ ι ω	Sustantivos, adjetivos calificativos, verbos	Símbolos de predicado (o de función proposicional)
Descripción		Construcciones genitivas, proposiciones relativas	Conjunción o disyunción de proposiciones formadas por saturación de funciones proposicionales
Determinación		Artículos, adjetivos y pronombres indefinidos	Símbolos de cuantificación

Tabla 10. Formas asociadas a la función referencial.
Fuente: Raymond Duval, 2004, Cali: Universidad del Valle, p. 100.

Función apofántica de expresión de enunciados completos

La necesidad de analizar las condiciones en que se da la comunicación, en la que se dice algo acerca de los objetos nombrados, sugiere el origen de esta función, en la que se explícita que toda unidad apofántica tiene un valor[40] asociado. En esta función se identifican dos operaciones:

- La predicación o acto de predicación, consiste en establecer una relación entre un objeto y una propiedad, acción o relación, es decir, a las palabras u oraciones que se emiten se les puede atribuir una referencia y un sentido, un significado dentro de un contexto determinado; tal sentido y referencia dan lugar a ambigüedades propias del lenguaje ordinario, pues una misma palabra puede implicar varias significaciones. Desde la teoría de los actos de habla de Searle, J., "La predicación sólo proporciona el contenido de la expresión" (Pontón, 2012, p. 98).
- El *acto ilocutorio* o acto ilocucionario es entendido como aquel acto "que se realiza *al* decir algo"[41], Searle propone que para determinar cuál acto ilocutivo se realiza y en qué sentido se dice una proposición, es necesario tener en cuenta el indicador proposicional, es decir el

[40]Según Ducrot, 1972 (citado en Duval, 2004, p. 105) el valor puede ser: **valor lógico** de verdad o de falsedad, **valor epistémico** de certeza, de necesidad, de verosimilitud, de posibilidad o de absurdidad, o un **valor social** de pregunta que obliga a una respuesta, de orden para ejecutarse, de deseo, de promesa.
[41] Conesa, F. y Nubiola, J. (1999), pág. 176

contenido que se expresa, y el indicador de fuerza ilocutiva, los cuales muestran el sentido en el que debe interpretarse la proposición, lo cual puede generar varios actos ilocucionarios: acto expresivo, asertivo, declarativo, compromisivo o directivo. Todo acto ilocutorio pone de manifiesto dos características esenciales: son intencionales y convencionales, lo que implica que exista un propósito al expresar un enunciado, como también una forma de expresarlo que es entendida dentro de una comunidad lingüística. Estas operaciones[42] permiten construir expresiones discursivas con características intrínsecas y específicas a cada lengua, y constituye la base para distinguir las formas asociadas a esta función que se muestran en la tabla 11.

Las operaciones de la función apofántica y las formas asociadas

Operaciones de la función apofántica	**Operaciones elementales de la "lógica natural"**	**Formas de expresión en lengua natural** *Estructura remática: verbo*	**Formas de expresión en lenguas formales** *Estructura funcional Predicado-argumento(s)*
predicación	Polioperación de determinación δ	proposición	
predicación e ilocución **(valores de la unidad apofántica)**	Polioperación de determinación δ Configuraciones τ (polioperaciones de encargo σ, y modulación μ)	Frase simple, Frase compuesta (declaración, pregunta, orden...)	Proposición ("atómica" o fórmula con conectores binarios...) (aserción)
Ilocución **(valores de la unidad apofántica)**		Frase verbal o nominal, una sola palabra (orden, apelación)	

Tabla 11. Formas asociadas a la función apofántica.
Fuente: Raymond Duval, 2004, Cali: Universidad del Valle, p. 107.

Función de expansión discursiva de un enunciado completo

Una lengua además de permitir expresar enunciados completos debe admitir que estos sean organizados de manera tal que se enuncie una idea que cumpla con una coherencia semántica y sintáctica, en tal organización se ponen en juego dos elementos relacionados con la comprensión de un discurso, aquello que se deja implícito y aquello que se deja explícito en el discurso, sin pretender

[42] Las operaciones de predicación y de acto ilocutorio pueden ser efectuadas de manera independiente o simultánea.

reducir el problema de la comprensión de un discurso a la elección de cuáles elementos explicitar, y cuáles no. El número posible de operaciones de esta función, está ligado a los modos[43] en que se da un discurso, estos son:

- Sustitución, en esta operación se retoma un último resultado, y es éste el que reemplaza, mediante el uso de reglas, las proposiciones anteriores.
- Acumulación, la cohesión de unidades apofánticas permite el progreso y la continuidad de un discurso, se hace necesario tener en cuenta cada frase para constituir un todo.

En relación con estas operaciones, se distinguen cuatro formas de expansión discursivas que están ligadas a la organización de un texto, a partir de la similitud semiótica y la similitud semántica, donde también se debe considerar el uso o no de un tercer enunciado; en la siguiente tabla, tomada de Duval (2004) se muestran estas posibles formas:

Mecanismos de expansión	***Similitud interna*** (continuidad sin tercer enunciado)	***Similitud externa*** (continuidad con tercer enunciado)
Similitud semiótica (se recuperan algunos significantes)	Expansión **LEXICAL** (recuperación plurívoca de una misma unidad lexical, bajo un modo fonético-auditivo o gráfico-visual) ***Asociaciones verbales, ocurrencias, "lenguaje del inconsciente"***	Expansión **FORMAL** (recurso exclusivo a los símbolos: notaciones, escritura algebraica,...) ***Razonamiento deductivo*** (proposición de estructura funcional) ***Cálculo proposicional, cálculo de predicados,...***
Similitud semántica Ley de Frege: significantes diferentes y mismo objeto. (Invarianza referencial estricta o global)	Expansión **NATURAL** (es suficiente con el conocimiento de la lengua corriente) ***Descripción, Narración*** ***Argumentación retórica*** ***Silogismo aristotélico*** (proposición de estructura rematica predicativa) ***razonamiento por el absurdo***	Expansión **COGNITIVA** (exige el conocimiento de definiciones, reglas o leyes para un dominio de objetos) ***Explicación*** ***Razonamiento Deductivo*** (proposición de estructura rematica condicional) ***razonamiento por el absurdo***

Tabla 12. Formas asociadas a la función de expansión discursiva.
Fuente: Raymond Duval, 2004, Cali: Universidad del Valle, p. 119.

Función de reflexividad

Para el estudio de esta cuarta y última función discursiva, Duval retoma los estudios de Austin y Searle para señalar un hecho fundamental en el análisis de la lengua: se debe establecer la diferencia que existe entre la producción de un acto ilocutorio (función apofántica, tratada con

[43] Modo lógico o modo natural.

anterioridad) que además le confiere al enunciado producido un valor epistémico, y la explicitación de dicho valor mediante la función de reflexividad discursiva, que se presenta a continuación.

Austin y Searle definieron cinco tipos de actos de habla: compromisivos, directivos, asertivos, declarativos y expresivos, en los cuales es importante señalar que la fuerza ilocutiva de cada uno de éstos puede marcarse, o no, mediante expresiones lingüísticas; es el caso de las promesas, en las que se puede hacer implícita o explícita la marca que refiere al compromiso que se hace en el enunciado; los insultos, que hacen uso de expresiones que implican un insulto sin necesidad de decir "yo te insulto"; o de aquellas proposiciones en las que se hace el acto únicamente con el uso de ciertas expresiones como es el caso de los bautizos y los matrimonios, en los que sólo se cumplen cuando se pronuncian frases como "te bautizo", "los declaro marido y mujer"[44]

Se ve entonces, que la explicitación de dicha fuerza puede ser estudiada a partir de lo que Duval llama (a partir de la propuesta de Russell) verbos de actitud proposicional o "verbos cuya enunciación cumple el acto enunciado (perfomativos)" (Duval, 2004), los cuales implican, primero, que su valor lógico es independiente del valor de la proposición que lo complementa, y segundo, que su valor lógico cambia aun cuando se varía la proposición la complementa.

2.2.3 La comprensión de textos.

Los discursos que se utilizan durante una clase se dan, en general, mediante el empleo de la lengua natural, la cual puede ser analizada desde las formas en que se realicen las operaciones de cada función. Las funciones establecen, por un lado, los diferentes discursos que se pueden desarrollar a partir de las múltiples redacciones que se pueden hacer de un mismo contenido, y por otro, las diversas significaciones que puede tener aquello que se enuncia; esta diversidad es la que pone de manifiesto las ambigüedades que se pueden encontrar en la lengua natural. A partir de los numerosos discursos que se construyen en lengua natural y la importancia que tiene la comprensión de estos en la escuela, surge la necesidad de analizar este proceso, puesto que las dificultades que se encuentran no sólo están ligadas a la relación que hay entre el lector y el texto sino que debe partir de reconocer que

[44] Ejemplos retomados del texto Seis lecciones sobre teoría de la argumentación (León, A. 2006)

> la dificultad principal en la comprensión radica en que muchos estudiantes no se ponen de manera autónoma ante un texto; es decir, les falta una toma de consciencia del carácter específico y central de las unidades del discurso propias del campo de enunciados de problemas, las cuales permiten la articulación del sentido necesaria para llegar a un nivel de apropiación de la información escrita que permita hacer una conversión de las representaciones semióticas dadas en el registro pluri-funcional de la lengua natural en otras representaciones de otro registro semiótico mono-funcional como el numérico, el simbólico o el gráfico.
>
> (Pontón, 2012, pp. 130-131)

Por tanto, el análisis que se realice a la comprensión de un texto debe tener en cuenta dos aspectos, las variables relativas al lector[45] y las variables relativas al texto[46], además de la importancia que tiene la situación de lectura[47] en que se desarrolla dicha lectura. Tal análisis parte de unos elementos suficientes y necesarios en la organización de un texto: el contenido cognitivo y la organización redaccional.

Es entonces en esta relación que se determina la situación de lectura, que es diferente para cada lector, dado que se involucran dos factores cruciales, el primero, parte de la distancia que existe entre el contenido cognitivo del texto y la base de conocimientos del lector, y el segundo, que se determina por la diferencia entre la organización propia al contenido cognitivo del texto y la organización redaccional de éste. Si bien, garantizar que estos elementos estén en el nivel adecuado para que se dé la comprensión, también se debe tener en cuenta que la comprensión de cualquier texto está ligada a la transformación de éste en una representación no discursiva, puesto que "permiten una aprehensión sinóptica, global y precisa de una organización textual cuyas partes o elementos están dados solo en una linealidad que requiere una multitud de aprehensiones sucesivas" (Ibíd., 2004, p. 281), es decir que todo proceso de comprensión debe permitir representar en un todo, representaciones no discursivas, aquello que en el discurso está presentado en partes.

Evidentemente, todo discurso presenta una organización que permite determinar una continuidad y progresión del mismo, sin embargo se hace necesario distinguir entre el discurso oral y el discurso

[45] La base de conocimientos, la comprensión del vocabulario, la decodificación sintáctica que puede hacer, entre otros.
[46] "los grados y los modos de explicación del contenido cognitivo del texto, las distancias más o menos importantes entre la organización redaccional del texto y la organización discursiva de una elocución oral espontánea" (Duval, 2004, p. 278)
[47] Entendida como "el conjunto de parámetros que juegan simultáneamente en la selección de un proceso de comprensión." (Ibíd., 2004, p. 297)

escrito, puesto que sus características y análisis posibles son diferentes y amplios, lo cual requiere enfocarse en uno de ellos; con la pretensión de analizar enunciados – problema de probabilidad condicional se hará énfasis en el discurso escrito y los elementos necesarios para su comprensión, tales como la organización redaccional y los procesos de comprensión.

Organización redaccional

Todo discurso escrito cumple con la característica de permitir la elaboración de varias versiones que mantienen un mismo contenido cognitivo pero que en cada versión existen diferencias sintácticas, semánticas y pragmáticas; es la existencia de estas versiones lo que garantiza que en un texto o enunciado – problema se dé la *variabilidad redaccional,* y con ello una serie de textos que pueden, o no, acercar al lector a la compresión del texto.

Es claro que la variabilidad redaccional, está relacionada con un contenido cognitivo, el cual debe ser invariante tanto para las diversas versiones como para los diferentes lectores. Según Duval (2004), se entiende entonces, por *contenido cognitivo* como la invariante de un conjunto de variaciones redaccionales, potenciales o efectivamente realizada en diferentes versiones. Se hace necesario, en este punto, establecer diferencias entre el contenido cognitivo y la base de conocimientos del lector, pues el primero refiere al conocimiento que se desarrolla en el discurso escrito, mientras el segundo, alude a los conocimientos que posee el lector para enfrentarse al texto, los cuales son diferentes en todos los lectores puesto que cada uno de estos tiene un nivel de conocimiento variado en comparación de otro.

Además, existen tres factores relacionados con la variabilidad redaccional que determinan la organización redaccional de un texto:

- La selección de los elementos que son explícitos en el enunciado, es decir aquellos objetos que son nombrados a partir de expresiones que cumplen bien sea la función referencial o bien la función apofántica.
- La determinación de cuál o cuáles expresiones serán utilizadas para aludir a los elementos que se han hecho explícitos.
- La elección del orden en que se presentan los elementos explicitados, que da una sucesión entre las expresiones del texto.

Sin embargo, reconocer la importancia de la organización redaccional de un texto es solo una primera parte en el análisis de la compresión de un texto, puesto que éste es inseparable del proceso que realiza el lector cuando lee dicho texto.

Procesos de comprensión de un texto

Un texto puede ser abordado desde dos procesos diferentes: una práctica de lectura corriente, en que la lectura no es muy profunda y es más un recorrido rápido del texto, o un proceso de comprensión, en el que se espera haya una comprensión real del texto a partir de distintas prácticas de lectura como detenerse a reflexionar en algunas partes del texto, hacer varias lecturas, ir y venir en el texto, entre otras estrategias de lectura que dependen de la situación de lectura que se genere. No obstante, estas estrategias no resultan suficientes para garantizar una comprensión del texto, pues se hace necesario que se lleven a cabo, no de manera explícita, dos operaciones fundamentales de este proceso: la segmentación del texto en unidades y la recontextualización de las unidades segmentadas.

- La segmentación

Es fácil identificar en un texto segmentaciones relacionadas con la sintaxis de una lengua, sin embargo esta segmentación en frases, producto de una organización sintáctica, no garantiza la identificación de unidades de significación o unidades de información, y mucho menos la comprensión del texto, por lo cual se hace necesario fragmentar el texto en *unidades textuales de información*, para ello se tienen dos procedimientos que permiten hacer tal distinción:

- ✓ Segmentación cognitiva, toma como punto de partida una serie de preguntas que acotan la unidad de información textual, a partir de las “representaciones independientes de la expresión lingüística y el grado de explicitación redaccional” (Duval, 2004, p. 291). Es decir que, en relación a la fragmentación se puede determinar la función que cumplen las expresiones, ya sean referenciales o apofánticas.
- ✓ Segmentación funcional, permite identificar en cada una de las unidades segmentadas la función que cumple dentro del texto, lo cual da lugar al reconocimiento del sentido que tienen las expresiones dentro de este, y a su vez, determinar aquello que se ha mencionado y aquello que se ha dejado implícito en la redacción del texto.

Es claro, que el poder segmentar un texto, en el que se discriminan a las unidades de éste, no genera por sí sola la comprensión del texto, se hace indispensable que se efectúe una segunda operación que complemente la segmentación, y favorezca la comprensión.

- La recontextualización

Al no ser suficiente la discriminación de las unidades textuales para la comprensión de un texto, se hace inevitable un proceso que resignifique estas unidades, por lo cual el proceso de recontextualización no relaciona las unidades segmentadas en el orden de aparición inicial o en un orden lingüístico, sino que permite reubicar tales unidades de manera que se establezcan conexiones relativas a la organización redaccional del texto, para así lograr la comprensión del mismo. Este proceso de recontextualización puede ser llevado a cabo mediante dos procedimientos:

- ✓ Recontextualización cognitiva, que conlleva a la reorganización de las unidades textuales a partir del reconocimiento del conocimiento que se moviliza en el texto, permite establecer conexiones en las unidades de forma que se construyan redes conceptuales que evoquen un todo.
- ✓ Recontextualización redaccional, vincula las unidades textuales, obtenidas a partir de la segmentación funcional, ya sean aquellas expresiones apofánticas o aquellas que nombran objetos, para determinar la organización redaccional del texto, por lo cual este proceso se relaciona únicamente con la organización redaccional del texto y es independiente del contenido cognitivo.

Es claro, que todo proceso de comprensión está determinado por dos operaciones, segmentación y recontextualización; sin embargo debe tener en cuenta que aún cuando son diferentes, no son operaciones que puedan ser puestas en práctica de manera explícita e independiente, pues según Duval (2004) la comprensión de un texto puede darse desde dos procesos: inductivo y deductivo, el primero de ellos se genera cuando se moviliza la segmentación funcional y la recontextualización redaccional, y se caracteriza por tomar la organización redaccional del texto para acceder al contenido cognitivo del mismo, y el segundo, es producto de la segmentación y recontextualización cognitiva, y toma como punto de partida el contenido cognitivo del texto para rearmar la organización redaccional del texto.

2.2.4 Situaciones de lectura

La comprensión de un texto, al ser el resultado de un proceso inductivo o deductivo o de la interacción entre ellos, es susceptible de que los grados de comprensión difieran de lector a lector, esto dado que los niveles de conocimientos de las personas que se enfrentan a un mismo texto es diferente. Es entonces, que se reconoce la situación de lectura como el "conjunto de parámetros que juegan simultáneamente en la selección de un proceso de comprensión, en la exigencia de su efectuación y en sus logros" (Duval, 2004, p. 297); se reconocen dos parámetros que determinan una situación de lectura:

- La variabilidad redaccional, en la cual se determinan diferentes formas de referirse a un mismo contenido, este parámetro pone en juegos tres criterios que determinan tales variaciones, en primer lugar, la explicitación de aquellas expresiones utilizadas en un enunciado – problema, segundo, la elección de aquellas expresiones que se hacen explícitas, es decir cuál expresión elegir, aun cuando hay toda una variedad signos que permiten evocar una mismo objeto o situación, y tercero, el orden en qué se presentan los signos que se harán explícitos.
- La base de conocimientos del lector en relación al contenido cognitivo, un texto puede ser abordado por distintas personas, en distintos momentos, la comprensión que el lector haga de éste se determina por los conocimientos que el sujeto posee para enfrentarse al texto, puesto que conocer, o no, tanto del tema como del vocabulario que hace uso en el texto permitir acceder a éste. Es entonces, que se evidencia la relación e importancia que tiene los conocimientos del lector en la comprensión de un texto.

Es a partir de las posibles relaciones que se establecen entre los valores de estos parámetros, que Duval (2004) propone cuatro situaciones de lectura que se presentan en la siguiente tabla.

		TEXTO: correspondencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo	
		Congruencia	**No congruencia**
LECTOR: su base de conocimientos le hace el contenido del texto	**Familiar**	**I.** Situación trivial, *sin* riesgo de error	**II.** Situación trivial, *con* riesgo de error
	Nuevo	**III.** Situación normativa para un aprendizaje que exige tratamientos al margen del texto	**IV.** Situación que exige una búsqueda o un aprendizaje independientemente del texto

Tabla 13. Situaciones de lectura
Fuente: Raymond Duval, 2004, Cali: Universidad del Valle, p. 299.

Cada una de estas situaciones involucra un proceso de comprensión diferente que está ligado a las condiciones que se cumplen en cada situación, por ejemplo:

La situación I, promueve el proceso inductivo y no requiere de un proceso deductivo para garantizar la comprensión del texto, y se caracteriza por tener una organización redaccional del texto similar a la organización del discurso oral, lo cual implica que su comprensión sea inmediata.

En la situación II, se hace suficiente el proceso deductivo, y en caso de una no – congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo del texto, se hace necesario el uso del proceso inductivo para verificar que aquello que se comprendió en el proceso deductivo corresponde realmente a lo que expresa el texto.

La situación III, sólo permite como proceso para la comprensión el inductivo, aun en aquellos casos donde no existe la congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo; esto dado que este proceso posibilita la aprehensión de la organización redaccional y da acceso al contenido cognitivo. No obstante, la garantía de la comprensión de un texto, bajo esta situación, se da cuando de manera paralela se recurre a distintos tratamientos.

La situación IV, dado que no admite una congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo, el único proceso de partida posible, para que se dé la comprensión del texto, es el inductivo puesto que es a partir de éste que la organización redaccional permite el acceso al contenido cognitivo del texto, y con ello, la comprensión éste.

2.2.5 Las representaciones no discursivas

Es innegable que toda comprensión está vinculada al menos a un proceso de comprensión, sin embargo y dado que éstos generan diferentes situaciones de lectura, se justifica la necesidad de recurrir a algún elemento común entre estas situaciones, como lo es, el uso de un nuevo registro de representación; esto en razón de seleccionar un registro que dé una visión diferente de aquello que se muestra, y que a su vez, presente de manera global la información que el texto presenta en unidades segmentadas. Ahora bien, al atender estas exigencias de la comprensión, se evidencia la necesidad de hacer uso de las representaciones no discursivas, es decir aquellos registros que "muestran formas o ***configuraciones de formas*** así como organizaciones" (Ibíd., 1999, p. 51), lo

cual permite una aprehensión sinóptica o completa de la información textual. Los registros de representación, discursivos o no, pueden ser útiles en varios dominios, registros pluri-funcionales, o por el contrario, pertenecer a un único dominio, registros mono-funcionales.

Cabe notar que si la conversión de un registro a otro es difícil, cuando se habla del paso de un registro mono-funcional a un registro pluri-funcional presenta mayor dificultad que cuando se hace un cambio entre dos registros mono-funcionales. Los registros más privilegiados en las matemáticas[48] se muestran en la siguiente tabla:

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONALES: los tratamientos no son algoritmizables	Lengua natural *asociaciones verbales (conceptuales)* *descripción, definición, explicación* *razonamiento :* *— argumentación a partir de observaciones, de creencias,* *— deducción válida a partir de definición o de teoremas*	figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 0, 1, 2, 3 D) *aprehensión operatoria y no solamente perceptiva* *construcción con instrumentos,* *modelización de estructuras físicas* *(ej: cristales, moléculas...)*
REGISTROS MONOFUNCIONALES: los tratamientos son principalmente algoritmos	Sistemas de escritura: - numéricas (binaria, decimal, fraccionaria...) - algebraicas - simbólicas (lenguas formales) *calculo literal, algebraico, formal...*	Grafos cartesianos (visualización de variaciones) *cambio de sistema de coordenadas,* *interpolación, extrapolación*

Tabla 14. Registros de representación movilizados en la actividad matemática. Fuente: Raymond Duval, 1999, Cali: Universidad del Valle, p. 52.

2.3. Una mirada intermedia: La relación entre lo semiótico y didáctico.

Con anterioridad se ha hecho una presentación de las diversas aproximaciones a la problemática planteada, en la que se han expuesto teorías relacionados con los elementos semióticos y matemáticos inmersos en el aprendizaje de la probabilidad condicional. Es entonces, que resulta pertinente explicitar aspectos didácticos relacionados con el aprendizaje de este objeto matemático[49], y aprovechar la estrecha relación con aspectos semióticos para atender las dificultades presentes en la probabilidad condicional, y particularmente en la comprensión de los enunciados – problema de

[48] Algunos de ellos útiles en probabilidad condicional.

[49] Tales como las dificultades relacionadas con los sesgos de comprensión y los distintos contextos en los que se puede plantear un enunciado – problema, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

dicho objeto. Con base en estos fundamentos y relaciones, se pretende identificar y caracterizar las condiciones que deben tenerse en cuenta en la formulación de enunciados – problema, en los que se consideren las variables ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional, que permitan la superación de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes de la educación media.

2.3.1. Dificultades identificadas en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Con el propósito de identificar aquellas condiciones necesarias y suficientes para promover la comprensión de enunciados – problema de probabilidad condicional, se hace uso de la teoría semiótico – cognitiva de Duval, ésta en cuanto a que permite la justificación y fundamentación de las afirmaciones que surgen en la solución y análisis de algunos problemas que se presentan en los libros de texto; tales afirmaciones en torno a las características, propiedades de las distintas representaciones de los enunciados, las múltiples redacciones, y la comprensión que se tienen de los mismos. En este último se hace énfasis, debido a que este es el centro del trabajo, además de las particularidades que caracteriza el proceso de comprensión en cada lector, se conecta con otros elementos que la escuela no suele tener en cuenta al hacer uso de textos escolares, es decir no toma en consideración las variaciones redaccionales, la elección de uso de distintas representaciones, la base de conocimientos del lector y el conocimiento del vocabulario, entre otros.

Debido a la naturaleza de estos elementos, se consideran las dificultades que se muestran en el artículo "*Razonamiento sobre probabilidad e implicaciones para la enseñanza de la estadística*", de Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005), en el que se realiza una revisión de las principales investigaciones sobre el razonamiento y comprensión de la probabilidad condicional, se retoman como centro de análisis las siguientes dificultades: *el condicionamiento y causación, el intercambio de sucesos en la probabilidad condicional, la confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta*; como se presentará más adelante, tales dificultades no son exclusivas de los enunciados en lengua natural de probabilidad condicional sino que son inherentes a las distintas formas de representación de los problemas de ésta.

Ahora, dichas dificultades, son generadas a partir de la confusión o no diferenciación entre algunos conceptos significativos de la probabilidad, como la definición de probabilidad conjunta, dependencia,

independencia, exclusión o no exclusión entre eventos; sin con ello, afirmar que la superación de las dificultades se alcanza con la sola aclaración de un concepto a otro, pues es factible que conceptualmente se haga la distinción mas no se dé tal diferenciación en la comprensión de los enunciados. Cada una de las dificultades abordadas y analizadas en esta propuesta, se entienden según la presentación que hacen Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Más adelante, se muestran algunos problemas que aparecen en los libros de textos, en los que se evidencian tanto las dificultades como los aspectos semióticos y matemáticos inmersos.

Condicionamiento y causación:

Esta dificultad se presenta cuando no es posible, de manera inmediata, reconocer sí un evento es, o no, causa de otro. Ésta implica la diferenciación entre eventos dependientes e independientes, por lo que también se dificulta reconocer la probabilidad condicional en los distintos enunciados – problema. Ahora, si se hace el reconocimiento en el enunciado de la dependencia entre los eventos, el paso del enunciado en lengua natural a cualquiera de los registros posibles no es inmediato, esto dado a la falta de congruencia entre las unidades significantes de cada registro, pues la congruencia se garantiza con el cumplimiento de tres criterios:

- El primero de ellos, la correspondencia semántica, se cumple pues en los distintos registros existe un signo que se puede asociar a cada una las unidades significantes de los registros.
- El segundo, la univocidad semántica, que no se cumple en todas las posibles conversiones entre los registros, puesto que un enunciado en lengua natural al representarlo en una tabla de contingencia puede pertenecer a una de las tres secciones de las celdas. Sin embargo sí se da en la conversión de la lengua natural al registro simbólico.
- El tercero, el orden del arreglo entre las unidades es menos posible, pues la presentación que se hace en lengua natural no corresponde al orden que se da en los demás registros.

Por ejemplo, en el enunciado E2, expuesto anteriormente, ha de notarse que entre el enunciado en lengua natural y la representación en el registro simbólico respectivo, no se guarda una congruencia, puesto que no hay correspondencia en el orden en que se presentan las unidades significativas de cada uno de los registros. Esta situación es evidente en la representación $P(Q/W)$, que corresponde al enunciado *"Un empleado bien capacitado cubra la cuota de producción"*, en el que se presenta en primer lugar el evento condicionante, mientras que la representación del enunciado en el registro

simbólico, el evento condicionante, por las reglas de formación propias del registro, debe presentarse en un segundo momento.

Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional:

La probabilidad condicional da lugar a distintas relaciones entre los eventos que intervienen en un enunciado – problema, entre ellas $P(A/B)$ y $P(B/A)$, las cuales matemáticamente tienen valores diferentes y representan situaciones distintas; en la lengua natural no es tan evidente esta distinción, puesto que la imprecisión y ambigüedad de este registro no permite reconocer entre el evento condicionante y condicionado. No poder diferenciar estas situaciones es conocida como *la falacia de la condicional transpuesta*, igualmente puede notarse que esta dificultad implica la anterior, debido a que se cree que el intercambio de eventos en la probabilidad condicional conservará el resultado, lo que reafirma la dificultad anterior.

La presentación en lengua natural de un enunciado – problema, en cuanto a la organización redaccional del mismo puede, o no, favorecer la comprensión del enunciado, esto ligado tanto a la selección de las expresiones que se utilizan para nombrar y explicitar los objetos como a la forma en qué se presentan. Por ejemplo,

E9: un departamento de orientación aplica a los estudiantes varias clases de pruebas. Si I es el evento de que un estudiante obtiene una calificación alta en inteligencia, A es el evento de que un estudiante obtiene una clasificación alta en la escala de adaptación social y N es el evento de que un estudiante presenta tendencias neuróticas, exprese simbólicamente las probabilidades de que:

a. *Un estudiante que obtiene una calificación alta en inteligencia presente tendencias neuróticas.*
b. *Un estudiante que no obtiene una clasificación alta en la escala de adaptación social no obtenga una calificación alta en inteligencia.*
c. *Un estudiante que presenta tendencias neuróticas no obtenga una calificación alta en inteligencia ni en la escala de adaptación social.*

La representación simbólica de cada uno de los literales anteriores se presenta a continuación:

a. $P(N/I)$
b. $P(I'/A')$
c. $P(I' \cap A'/N)$

Sin embargo, en el proceso de resolución algunos estudiantes pueden representar simbólicamente, cada uno de los enunciados de formas diferentes:

a. $P(I \cap N)$

b. $P(A' \cap I')$

c. $P(I' \cap A' \cap N')$

d. $P(I/N)$

e. $P(A'/I')$

f. $P(N'/I' \cap A')$

La falta de signos que designen de manera explícita el evento que condiciona, conlleva a los estudiantes a varias interpretaciones, ya sean intersecciones o la probabilidad condicional inversa a la pedida. Como también es posible que al representar esta información en tabla de contingencia se dé el intercambio de sucesos, pues los valores de las probabilidades condicionales pueden intercambiarse en la ubicación de ellas en la misma celda.

Confusión probabilidad condicional y probabilidad conjunta:

Las relaciones posibles entre dos eventos son las uniones, las intersecciones y condicionales, particularmente, entre estas dos últimas relaciones se identifica una dificultad, que según Falk, (1986 como se cita en De la Fuente, I. & Díaz, C, 2005) se debe a la sintaxis y a la redacción en que se presentan los enunciados. Esto dado, que las marcas lingüísticas utilizadas que se emplean para referir a una u otra situación en la que se describe la probabilidad conjunta o la probabilidad condicional no son fácilmente distinguibles, lo cual conduce a diversas interpretaciones que no siempre son las apropiadas. Por ejemplo:

Respecto al enunciado $E10$, los valores se asignan a partir de la experiencia que se ha tenido, en la que los valores corresponden al orden en que se han presentado los eventos, pero al no ser explícito que es este el orden respectivo, es posible que algunos estudiantes asignen los valores indiscriminadamente. En cuanto a la solución, y bajo el supuesto de que los estudiantes identifican este orden, la palabra "también" puede referir a una intersección, cuando en realidad la pregunta sugiere la probabilidad condicional de que ocurra el segundo evento dado el primero.

a. $P(P/B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}$

$P(P/B) = \frac{0.18}{0.45}$

b. $P(B/P) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)}$

$P(B/P) = \frac{0.18}{0.36}$

Es claro entonces, que los enunciados – problema de probabilidad condicional, en lengua natural, pueden generar dificultades en la comprensión de este objeto matemático, y que al hacer uso de los otros registros de representación, no se realiza un paso inmediato entre ellos, pues no existe una congruencia entre los distintos registros. Por lo cual, el aprendizaje de la probabilidad condicional se debe centrar en promover la conversión de los enunciados – problema a distintos registros de representación como las tablas de contingencia y los diagramas de árbol; en los que se muestren todas las relaciones posibles entre los eventos, y no sólo algunas de las relaciones como es común en la escuela.

Igualmente, es indispensable que en el proceso de aprendizaje se tenga en cuenta que aun cuando la lengua natural está inmersa en la vida cotidiana, el uso de ella en los enunciados – problema no es tan sencillo como parece, pues las condiciones en que se presentan implican distintas consideraciones presentadas anteriormente. Como también se ve la necesidad de reconocer en cada uno de los registros de representación, características que posibilitan el reconocimiento de la probabilidad condicional, lo cual conduce a que se propongan actividades que conlleven a los estudiantes a la representación de un enunciado – problema de probabilidad condicional, no sólo en el registro simbólico sino que se pueda llevar a cualquier otro registro de representación. Cabe anotar, que el proceso que permite que el estudiante realice las conversiones que se exhibieron en la tabla 7, expuesta en este capítulo, requiere de un lugar en las clases puesto que es imprescindible hacer énfasis en sus características y no dar por sentado la comprensión y utilidad.

2.4. Investigación etnográfica educativa.

A continuación se expone acerca de la metodología recomendada para la implementación de una tarea, propuesta en este trabajo, en proyectos posteriores. Esta metodología, se concibe bajo el tipo de investigación cualitativa, en la que es necesario, primero conocer de su fundamentación para aplicarla, y segundo, identificar las estrategias de ésta, en cuanto a la recolección y almacenamiento de información, para poder entonces tener una generalización de aquello de lo que se ha observado e investigado.

2.4.1 Generalización.

La metodología cualitativa toma lugar en el ámbito educativo a partir de la década de los 80's, pese a la fuerte tradición positivista[50] que existía en el momento, lo que generó la creación de diversos espacios de reflexión[51] en torno al análisis y la manera en cómo se desarrollaron los hechos, la forma en cómo fue adquirida, tratada y manipulada la información de éstos, hasta llegar así a su conclusión y posibles usos para investigaciones posteriores. La participación que toma la metodología cualitativa dentro de la educación, fue llevada a cabo por la *teoría crítica social*[52], y tiene como argumento la ausencia de análisis y reflexión sobre la manera en cómo suceden los hechos, su producción y obtención de datos, por lo que resultó importante para autores como Hammserley, Angus, Erickson, y Woods, enunciar un proceder dentro del análisis de la información, tal que garantizará la reflexión sobre ella:

> indagar cómo los distintos actores humanos construyen y reconstruyen la realidad social mediante la interacción con los restantes miembros de su comunidad y para ello será indispensable tener en cuenta la interpretación que ellos mismos realizan de los porqués y para qués de sus acciones y de la situación en general.
>
> (1977, 1986, 1987 como se cita en Goetz, J.P. & LeCompte, M.D. 1988).

Según lo anterior, una investigación no debe dejar pasar por alto aspectos que reflejen la dimensión de la realidad social, puesto que los seres humanos constantemente crean interpretaciones de su entorno e interactúan con otros, de tal forma que sus acciones están condicionadas a través de los significados otorgados y atribuidos a los distintos objetos y personas con las que se relacionan. Así pues, las "investigaciones etnográficas son una de las alternativas que recogen esta nueva filosofía interpretativa y reconstructivista de la realidad." (Ibíd., 1988, p. 13), en la que sus diseños cualitativos resultan importantes para llevar a cabo la investigación, puesto que describen y reconstruyen de manera sistemática y detallada aquellas variables y fenómenos que inciden en el estudio, para así establecer todo un análisis complejo derivado de las validaciones, asociaciones y

[50] Esta corriente filosófica englobaba todo un conjunto de teorías, diseños de investigación y recursos instrumentales para ponerlas en marcha, en la que el conocimiento científico era el único conocimiento posible a través del método científico, dándole una fuerte importancia a pruebas documentadas.

[51] Tales espacios de reflexión deberían quedar consignados por escrito con el fin de exponer información para ser revisada y analizada por otros investigadores.

[52] Es una teoría que surge como respuesta alternativa a los postulados positivistas sobre la investigación, ya que esta se basaba en la observación de los sujetos desde un enfoque no conductista.

conceptualizaciones, en concordancia con aquellos fenómenos observados en distintos escenarios. Tal procedimiento, no es claramente medido matemáticamente, es decir, la información que se logra recolectar y analizar no es posible cuantificarla debido a que se trata de datos producidos cultural e históricamente, en tanto a que los seres humanos construyen su realidad en un espacio social definido, y por tanto la calificación numérica de esto, no da cuenta total de la contingencia y los valores inherentes al contexto social en que se producen los hechos. No obstante, el producto de todo ello, almacenado para el análisis de datos, recurre a porcentajes, grados, etc., para estandarizar la información analizada. La necesidad de desarrollar e incorporar la investigación etnográfica al campo de la educación, en vista de la fuerte presión que ganaba el positivismo y sobre la fragilidad de cuantificar la información al querer alcanzar la verdad absoluta independientemente de la manera en cómo se desarrollaban los hechos, propició considerar a los estudiantes como sujetos activos, más no como unos entes sin conocimientos previos, ni mucho menos sin historia, para así lograr una interacción entre los distintos seres y los objetos que los rodean. Por esto los diseños metodológicos de carácter cualitativo buscan ahondar en aquellas expresiones y producciones culturales de los sujetos, razón por la cual el propósito de una investigación de tipo etnográfica en el campo educativo debe estar enmarcado bajo dos direcciones convergentes:

- Analizar la realidad e intervenir en ella, de tal forma que se comprenda mejor de manera más reflexiva y eficaz, y
- Aportar a la formación y al perfeccionamiento del profesorado.

Estos proporcionan una reconstrucción del contexto cultural, junto con las creencias de los participantes, y por ello deben atender a su situación de estudio a través de los distintos medios posibles para “obtener las estructuras de significado que informan y testifican los comportamientos de los sujetos observados” (Ibíd., 1988, p. 15). No obstante, para que estos objetivos no se desvíen, es importante que cualquier investigación educativa disponga de un marco teórico que determine el fenómeno que se debe estudiar y con esto no caiga en peligro de convertirse sólo en un conjunto de técnicas, y así regresar a la corriente del positivismo.

De esta manera la investigación educativa, caracterizada por su dimensión práctica, apoya fuertemente los procesos de reflexión y crítica para el mejoramiento del proceso de aprendizaje, específicamente para este trabajo, se propone que en la implementación de la tarea planteada en

éste se actúe de manera directa sobre las dificultades presentes en el aprendizaje de la probabilidad condicional, respecto a la comprensión de los enunciados – problema de este objeto matemático. Dada esta dimensión práctica, es el proceso de intervención, ya sea explícito o implícito, el que logra una relación entre la teoría y la práctica, puesto que como se mencionó anteriormente, toda investigación debe basarse en un marco conceptual que defina sus objetos de estudio; razón por la cual la investigación etnográfica resulta útil para la reflexión constante de los educadores y sugiere alternativas teóricas y prácticas que propicien la reconstrucción social y reflexiva del actuar del maestro respecto a los fenómenos analizados por éste.

Por otro lado, el papel del investigador obedece a ser un sujeto activo en la medida en que adopte una postura de indagación en su práctica, mediante la conciencia y autonomía de sus acciones. A diferencia de autores como Tyler y Taba, Stenhouse (como se cita en Rico, L. s.f.) reconoce que el profesor no es un instructor, es un profesional, en el que su discurso viene de una tradición pública y por lo tanto, respeta las tradiciones de una cultura, es decir, su participación entre los investigados no puede ser aislada de las bases culturales que lo rodean, junto con la creación del currículo a partir de las creencias culturales impregnadas en sus estudiantes, de acuerdo con ello:

> Las relaciones entre cultura y currículum no siguen una dinámica lineal. Los sistemas dinámicos lineales se caracterizan porque en cada momento el estado del sistema es función del estado anterior. Esto significa que no se pueden establecer relaciones causales en estos sistemas ni tampoco conocer los límites de esas causas.
>
> (Moreno, 2004)

O dicho de otra forma, no es una relación que se comporte de manera estática.

Igualmente, es pertinente destacar que en toda investigación de carácter etnográfico el papel que se le otorga al estudiante también es significativo, pues éste no es un sujeto pasivo en espera de lo que desarrolla el profesor, es un sujeto dotado de conocimientos previos y creencias culturales dentro de un entorno social.

Respecto a la evaluación, la investigación educativa de tipo etnográfica y la *investigación básica*[53], aportan directamente a este proceso, ya que en el momento de llevarse a cabo y ofrecer un

53La cual se preocupa más por la dimensión teórica que práctica.

conocimiento más relevante de la realidad escolar, detectan deficiencias en este contexto y ayudan a los profesores en la corrección y la toma de decisiones de manera reflexiva acerca de las deficiencias encontradas en la investigación. Es por ello, que la investigación etnográfica, se centra tanto en los procesos cognitivos y meta-cognitivos de los estudiantes, como en sus dimensiones morales, sociales y afectivas. “En resumen, la tradición etnográfica y los modelos cualitativos constituyen una decisiva ayuda para un mayor entendimiento crítico de las situaciones y fenómenos educativos, y por consiguiente, para una más adecuada y consciente intervención” (Goetz, J.P. & LeCompte, M.D., 1988, p. 20), por lo cual, la etnografía educativa es la que aporta datos valiosos de tipo descriptivo en las distintas actividades, contextos y creencias producidas por los participantes en escenarios escolares.

2.4.2 Modelo cualitativo.

En la etnografía como análoga de la investigación cualitativa, se pueden incluir modelos de este mismo tipo, por lo que resulta imprescindible definir un modelo cualitativo para la aplicación futura de la tarea planteada en este trabajo, tal como el estudio de casos. Éste, se refiere a un análisis profundo de uno o pocos fenómenos educativos, específicamente a las dificultades identificadas en cuanto el aprendizaje de la probabilidad condicional, puesto que este tipo de modelo permite centrarse en un tema en particular.

Pese a que los estudios de casos han sido criticados por distintos autores, por su carencia de rigor científico que no posibilita el generalizar sus resultados[54], este modelo de investigación analiza de manera profunda actividades complejas presentes en un contexto social, aporta a la reconstrucción de los hechos donde fueron desarrollados, y al mismo tiempo se pueden identificar otros casos quizás más importantes:

> Estos permiten al investigador tener una visión holística de un cierto fenómeno o una serie de eventos y puede proveer una mirada general ya que muchas fuentes de evidencia han sido usadas.
>
> Otra ventaja es que el estudio de casos puede ser útil para capturar las propiedades de vida emergentes e inmanentes en organizaciones y el flujo y reflujo de la actividad organizacional, especialmente donde el cambio es muy rápido.

54Ya que esta modalidad se aparta de los parámetros cuantitativos que caracterizan a las investigaciones convencionales.

> Los estudios de casos también permiten generalizaciones como aquellas que resultan en los hallazgos en los que se hace uso de múltiples casos que pueden conducir o llevar a algunas formas de replicación.[55]

No obstante, este tipo de modelo cualitativo utiliza tanto información cuantitativa como cualitativa, por lo menos durante su etapa preliminar, por medio de actividades exploratorias, descriptivas o explicativas, por lo que se exige un marco de referencia para así analizar los datos recolectados en el modelo. Y son las técnicas exploratorias de recolección de datos, las que permiten superar el limitante de generalización en la investigación, puesto que identifican y definen los datos que se han de estudiar.

Para ello, el autor Carlos Sabino, (s.f. como se cita en Cerda, H. 2002.) expone una serie de criterios para la escogencia de un caso y así resulte de gran interés para una comunidad en particular, como los aportes que logre hacer en determinado campo de conocimiento:

- Buscar casos típicos: Consiste en la exploración de objetos en tanto a que su previa información resulte ser la mejor expresión de su campo de estudio, es decir, la elección de un buen marco de referencia que responda al objeto de estudio que se quiere analizar.
- Seleccionar casos extremos: "Tomar alguna de las variables involucradas y escoger casos que se ubiquen cerca de los límites de las mismas. Así podríamos considerar una universalidad muy antigua y otra de reciente creación, o una grande y otra pequeña, etc." (Ibíd., 2002, p. 87). Lo cual significa que dentro de lo que se escoja, se puede tener una visión de los límites en que se encuentra la investigación.
- Tomar casos marginales: El encontrar casos anormales, para con ello poder comparar con los casos normales, las posibles causas de desviación en cuanto a sus modos de proceder.

De esta manera, el caso elegido resume detalladamente aspectos de la situación u objeto escogido, en lo que *típico* significa lo característico de una situación, persona o grupo social, y tipificar, el ajuste

---

[55] It enables the researcher to gain an holistic view of a certain phenomenon or series of events and can provide a round picture since many sources of evidence were used.

Another advantage is that case study can be useful in capturing the emergent and immanent properties of life in organizations and the ebb and flow of organizational activity, especially where it is changing very fast.

Case studies also allow generalizations as that result of findings using multiple cases can lead to some form of replication

(Mohd, K. B. 2008, p. 1603).

hecho a cosas semejantes a un tipo o norma común, es decir, resumir en un caso las distintas características del objeto, situación, o grupo social del que se estudia.

2.4.3 Método de investigación.

Dado que el método etnográfico se centra en la interpretación de las acciones humanas y busca indagar acerca de cómo construyen y reconstruyen su realidad, su puesta en marcha toma ayuda de algunas estrategias metodológicas, con el fin de recolectar y analizar la información que se genera en un determinado escenario. Tales estrategias pueden clasificarse en dos tipos: interactivas y no interactivas. Las primeras refieren a la participación del investigador dentro del mismo escenario, en el que el investigador puede obtener información fácilmente de su objeto de estudio[56]; y las segundas, también llamadas no intrusivas o poco reactivas, exigen un poco de interacción o nula entre participantes e investigadores[57].

Ahora, en la aplicación de la tarea planteada en el presente trabajo se propone hacer uso de las estrategias interactivas, como son la *observación participante* y *la entrevista,* de las cuales se presenta a continuación su definición.

Observación participante.

Esta estrategia es reconocida como una de las más importantes en cuanto a la recolección de los datos, tiene como postulado pasar el mayor tiempo con sus participantes como también la identificación y vivencia de su contexto. Su objetivo es obtener de sus participantes las definiciones y los constructos que organizan de su mundo y realidad; para ello la elaboración de notas de campo permite tener un registro de lo observado, y así poder efectuar una reflexión sobre lo desarrollado en el escenario de análisis.

La observación participante tiene como condición para su puesta en práctica, que el investigador debe estar familiarizado con las variantes lingüísticas o jerga de los estudiantes, es decir, reconocer aquellas expresiones lingüísticas con las que los estudiantes fijan sus opiniones, dudas, etc.

[56]Estas estrategias pueden considerarse también *reactivas* o *intrusivas,* puesto que el efecto del observador hacia sus participantes, de manera inconsciente o deliberadamente, puede arrojarle datos falsos o desorientadores.
[57] Las cuales son: observación no participante y recogida de artefactos.

Dado que en un determinado momento, la observación participante fue considerada "como una estrategia no valorativa de recogida de datos cuyo objeto es la descripción autentica de grupos sociales y escenas culturales" (Goetz, J.P. & LeCompte, M.D., 1988, p. 127), y algunos problemas en el tratamiento de la información durante un proyecto realizado por el Centro para las Escuelas Nuevas[58], fue necesario adoptar otra herramienta de recolección de datos, tal como la entrevista, para así en cierta medida garantizar la fiabilidad de estos y poder cuantificarlos. De ello, también se desprende entonces, la elaboración de unos criterios que encaminen el modo de proceder en una observación participante, y luego enfrentarse en la realidad de su escenario de estudio.

Tales criterios planteados por Goetz, J.P. & LeCompte, M.D., (1988), muestran las posibles formas de abordar una investigación cualitativa desde este tipo de estrategia, y muchos de éstos, no son acatados de forma total, puesto que logran convertirse en una serie amplia y dispendiosa para ejecutar. Los criterios que se han de tomar en cuenta para la aplicación de la tarea propuesta en esta investigación[59] son:

- ¿***Quiénes*** están en el grupo o en la escena?: Se hace énfasis a la cantidad y caracterización del grupo población con el que se trabaja.
- ¿***Qué*** sucede aquí?: Remite a la identificación de los fenómenos y comportamientos sucedidos entre los participantes, en la que se presta mayor atención a los efectuados entre los estudiantes, como por ejemplo, cómo se decidió, qué relatos o anécdotas han sido intercambiados, cómo llegaron a la solución de una enunciado – problema de probabilidad condicional, entre otros.

De acuerdo con lo anterior, es recomendable que para el buen desarrollo de esta estrategia, el investigador interactúe con una población desconocida, puesto que la cercanía o familiaridad que tiene con ella, puede permear de subjetividad su estudio, o más bien, los participantes pueden sentir presión, o no, por parte del investigador y de esta manera, no actuar naturalmente.

[58] Proyecto realizado en 1972, con el fin de verificar el cumplimiento de los objetivos de una institución, planteados por ella misma.
[59] Es importante aclarar que el orden en que han sido tomados estos criterios no coincide con los expuestos de manera original por Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1988), puesto que son utilizados a interés y necesidad de la investigación presente.

La entrevista.

La entrevista es otra de las estrategias preferidas por los investigadores, puesto que se desarrolla a manera de conversación y representa una modalidad de la interrogación. Ésta es considerada como:

> Una conversación que tiene un propósito muy definido, y este propósito se da en función del tema que se investiga. En general se plantea como un proceso de transacción de dar y recibir información, de pregunta – respuesta, […], hasta alcanzar los objetivos que se propongan los investigadores.
>
> (Cerda, H. 2002, p. 259).

Tres formas de entrevista han sido consideradas por Denzin (1978 como se cita en Goetz, J.P. & LeCompte, M.D. 1988): la entrevista estandarizada presecuencializada, la entrevista estandarizada no presecuencializada y la entrevista no estandarizada. Esta última, a diferencia de las otras, se caracteriza por ser de manera informal, ni sus preguntas ni su contexto están prefijados, sólo resultan en la medida en que el investigador considere necesario anticiparse a ellos, y así obtener la información deseada y pertinente que busca reunir. Pese a que esta clase de entrevista es la que se recomienda para la aplicación de la tarea es ineludible que ella puede tomar forma de: entrevista a informantes clave, historia profesional y encuesta. Para la identificación y caracterización de las condiciones que promueven el aprendizaje de la probabilidad condicional, se recomienda atender y hacer uso de la entrevista a informantes clave, puesto que ésta es la que permite conocer acerca de los procesos realizados por los estudiantes frente a la solución de enunciados – problema, como también acerca de sus creencias y vivencias en torno al objeto matemático en cuestión. Se consideran como informantes clave aquellos sujetos en disposición de cooperar con el investigador y quienes poseen conocimientos y destrezas comunicativas especiales, en el sentido de poder dar cuenta de los éxitos o fracasos frente a la tarea que ha de implementar en proyectos posteriores. La elección de estos sujetos radica, en el momento de la observación, son vistos como personajes que pueden aportar información valiosa y susceptible de ser analizada bajo distintas variables de la investigación. Cabe anotar, que un infórmate clave en la recolección de información cuando se aplique la tarea, no es exactamente quien ha desarrollado ésta de manera exitosa, sino también aquel estudiante atípico, del que se puede obtener mayor información acerca de sus dificultades en cuanto el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Entretanto, la elección de los informantes clave y reflexivos, permite al investigador poner en consideración aquellos aspectos e intuiciones culturales que tal vez éste no había tenido en cuenta en un principio, es decir, la información brindada por los estudiantes puede, en algunos casos, ir más allá de lo esperado por el investigador, lo cual propicia el planteamiento de nuevos problemas que se pueden analizar de manera posterior, sin perder el rumbo de la investigación.

Por otra parte, realizar una entrevista implica también admitir unas pautas para ello, pues el hecho de que sea informal no significa que puede darse de manera arbitraria, es decir, es necesario tener en cuenta algunos elementos de ella que la doten de un horizonte y un sentido. Cerda, H. (2002), plantea una serie de pasos para el desarrollo de una entrevista, de la cual sólo se ha tomado uno de ellos, por tratarse de una entrevista informal.

Este paso se nombra como *principios directivos de la entrevista* y refiere a interrogantes que dan cuenta del valor y precisión de los datos que se deben recolectar, algunos de ellos son:

- ¿Qué datos e información debo recoger para resolver el problema, comprobar las hipótesis y cumplir con los objetivos?
- ¿Para qué esos datos e información?
- ¿Cuánta información se debe recoger para alcanzar los propósitos, metas y resultados?

Con estos interrogantes, es posible definir la mayoría de los aspectos que participan en el proceso de una entrevista, es decir, permiten tener claridad de los objetivos y propósitos fijados en ella. Del mismo modo, la transcripción de una entrevista deberá reflejar, por un lado, lo que se quiere alcanzar con ella, y por otro, la realidad de lo que se cuestionó, y para ello es recomendable:

- Anotar todo tipo de gestos producidos por el entrevistado, los cuales poseen una significación dentro de lo que ofrece como respuesta.
- No realizar ninguna modificación sobre lo que el entrevistado ha dado como respuesta, es decir, no cambiar palabras, ni mucho menos resumir o parafrasear sus respuestas.
- Resaltar todo tipo de respuesta, que por el tono del entrevistado parezca ofrecer una significación más fuerte para él.



CAPÍTULO III

HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS CONDICIONES SUFICIENTES EN ENUNCIADOS – PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

CAPÍTULO III.

HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS CONDICIONES SUFICIENTES EN ENUNCIADOS – PROBLEMA DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Este capítulo tiene como propósito la presentación de una tarea, conformada por un conjunto de situaciones problemas, que bajo distintas consideraciones teóricas tiene los elementos suficientes para favorecer el aprendizaje de la probabilidad condicional, en cuanto a la comprensión de los enunciados – problema, y así superar aquellas dificultades didácticas, identificadas en la lectura de éstos.

Para la identificación de estos elementos se procedió en dos momentos bajo criterios diferentes que orientaron la selección de enunciados – problema, que cumplieron propósitos distintos según el momento desarrollado: un primer momento, en el que se exploró en algunos libros de textos los diferentes problemas expuestos en éstos; y un segundo, en el que se escogieron algunos de los enunciados – problema del primer momento, que cumplieran nuevos criterios para ser parte de la tarea. Además, los enunciados – problema que pertenecen a la tarea, responden a las condiciones suficientes en la formulación de enunciados – problema que favorecen la comprensión de éstos y con ello el aprendizaje de la probabilidad condicional.

3.1 Criterios de selección de enunciados – problema que permiten conocer aquellos que se proponen en la escuela.

Dado que algunas de las dificultades presentes en la solución de enunciados – problema, radican tanto en la redacción y en los aspectos gramaticales como en el contexto en que son expuestos, fue necesario determinar ciertos criterios útiles para la selección, en un primer momento, de un grupo de enunciados – problema que se presentan en los libros de textos, y que permitieron conocer una amplia gama de aquellos que se utilizan en la escuela para el aprendizaje de la probabilidad condicional, con lo cual se obtuvo una mirada general de estos enunciados – problema y una posible entrada para identificar aquellas dificultades que teóricamente se han presentado con anterioridad.

Los criterios de selección tenidos en cuenta, en la construcción del inventario de enunciados – problema, que permitieron conocer la forma en cómo se enuncian éstos en los libros de texto, cómo se presentan y qué registros se utilizan para abordar la probabilidad condicional, se muestran a continuación:

3.1.1 Los enunciados – problema escogidos son realmente situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas.

Según Duval (2004) se hace necesario proponer en la escuela no sólo problemas sino campos de enunciados de problemas para garantizar el aprendizaje de un objeto matemático, pues no es suficiente plantear problemas, sino, que debe existir la realización de un trabajo sobre un campo de enunciados – problema; lo cual conlleva a la identificación de las distintas variables redaccionales que influyen no sólo en la comprensión de los enunciados sino en la actividad cognitiva de la conversión, fundamental en cualquier actividad matemática.

Por otro lado, se reconoce la necesidad de las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, entendidas como:

> situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.
>
> (MEN, 2006, p. 72)

Tales situaciones, generan un contexto inmediato donde cobra sentido el quehacer matemático, en tanto se aborden y se relacionen con experiencias cotidianas del estudiante, para así crear una significación de dichas situaciones, y representen un desafío para quién las resuelve.

De acuerdo con lo anterior, resulta pertinente la distinción entre situación y actividad: una situación es un “conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes.” (Ibíd., 2006, p. 72), mientras que la actividad representa el trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes al solucionar o analizar una situación; de lo

que se puede deducir que es la situación la que estimula la actividad, en la que esta última es la que permite avanzar e ir más allá de las competencias matemáticas.

Por tanto, los enunciados – problema que hagan parte del inventario deben presentar un vocabulario asequible a los estudiantes en pro de que estas situaciones sean significativas y representen un desafío para cada estudiante.

3.1.2 El contenido cognitivo que se encuentra inmerso en cada uno de los enunciados – problema es el mismo.

El objeto matemático de estudio en este trabajo de indagación es la probabilidad condicional, por lo que los enunciados – problema escogidos deben estar ligados a este tema, en diferentes variaciones redaccionales en las que se presente un mismo contenido cognitivo, el cual según Duval (2004) indica los conocimientos expresados en el texto; esto dado que en los enunciados – problema de probabilidad condicional, resulta productivo y beneficioso preguntar acerca de los diferentes conceptos con que se relaciona, tales como eventos dependientes e independientes, entre otros. Por otra parte, estos enunciados en lengua natural pueden estar acompañados, o no, de diferentes registros de representación, de los cuales se espera, según su modo de redacción y momento de solución, conlleven a la actividad de conversión.

En relación con lo anterior, es fundamental que los enunciados – problema seleccionados en el inventario, presenten en sus distintas preguntas contenidos cognitivos relacionados con la probabilidad condicional, con lo cual se espera que el estudiante reconozca este objeto matemático en algunas de sus representaciones.

3.1.3 Ejemplificación de algunos de los enunciados – problema propuestos en la escuela.

A partir de estos criterios, se escogieron determinados enunciados – problema, que han sido presentados con anterioridad en distintos apartados de este trabajo, para ejemplificar tanto elementos matemáticos como elementos semióticos tenidos en cuenta. Otros problemas que hacen parte de esta primera selección, y que son presentados con su respectiva solución, son:

E10: El 57% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio, el 40% de los estudiantes del colegio utiliza bicicleta para trasladarse. Además el 37% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio y utiliza la bicicleta para trasladarse.

a. *Si el rector del colegio selecciona al azar un estudiante del colegio, dentro de los que viven cerca, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la bicicleta para trasladarse?*
b. *Si la mañana de ayer un estudiante llegó al colegio en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un barrio cercano al colegio?*

Solución, *sea:*

- ✓ $P(C)$: *La probabilidad de que los estudiantes vivan en barrios cercanos al colegio (57%).*
- ✓ $P(B)$*: La probabilidad que los estudiantes utilicen bicicleta para trasladarse (40%).*
- ✓ $P(B \cap C)$: *La probabilidad de los estudiantes que viven en barrios cercanos al colegio y utilizan bicicleta para trasladarse (37%).*

a. $P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$

$$P(B/C) = \frac{0.37}{0.57} = 0{,}649$$

b. $P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$

$$P(C/B) = \frac{0.37}{0.4} = 0{,}925$$

En este problema se dan tres valores de probabilidad, los cuales son los necesarios para hallar cada una de las probabilidades condicionales pedidas, es decir, que para cada literal se dan los datos suficientes para calcular dicha probabilidad. Estas probabilidades pedidas son claras puesto que presentan la marca lingüística "si", el cual ha sido aceptado por convención que indica un si condicional, por lo que se reconoce inmediatamente que el primer evento, en cada pregunta, es el condicionante.

Además, a partir de los elementos que brinda el enunciado, es posible hacer una representación en una tabla de contingencia, del problema, como se muestra a continuación:

	C Vivir en un barrio cercano al colegio	C' No vivir en un barrio cercano al colegio	
B Trasladarse en bicicleta	37%	3%	40%
B' No trasladarse en bicicleta	20%	40%	60%
	57%	43%	

La tabla de contingencia, como representación no discursiva, que se adopta para solucionar el enunciado – problema, implica la efectuación de cálculos sencillos, aunque se podría haber utilizado el diagrama de árbol como medio de solución, tal elección no se realizó puesto que los cálculos necesarios serían más complejos.

E11: La probabilidad de que un autobús que viaja de Cleveland a Chicago salga a tiempo es 0.80 y la probabilidad de que salga y llegue tiempo es 0.72.

a. *¿Cuál es la probabilidad condicional de que si dicho autobús sale a tiempo, también llegue a tiempo?*
b. *Si la probabilidad de que dicho autobús llegue a tiempo es 0.75, ¿cuál es la probabilidad condicional de que si dicho autobús no sale a tiempo llegue, no obstante a tiempo?*

Solución. *Sea:*

- ✓ $P(S)$: *La probabilidad de que un autobús que viaja de Cleveland a Chicago salga a tiempo (0,80).*
- ✓ $P(L)$: *La probabilidad de que un autobús que viaja de Cleveland a Chicago llegue a tiempo (0,75)*
- ✓ $P(S \cap L)$ = *La probabilidad de que un autobús que viaja de Cleveland a Chicago salga y llegue a tiempo (0,72)*

Se tiene que

a. $P(L/S) = \frac{P(L \cap S)}{P(S)}$

$$P(L/S) = \frac{0.72}{0.8} = 0.9$$

b. $P(L/S') = \frac{P(L \cap S')}{P(S')}$

$$P\left(L/S'\right) = \frac{0.03}{0.2} = 0.15$$

Para el cálculo de la segunda probabilidad se hace necesario retomar las relaciones entre conjuntos, que permiten reconocer propiedades propias de los eventos y su complemento:

$$P(S') = 1 - P(S)$$

$$P(S') = 1 - 0.80$$

$$P(S') = 0.20$$

$$P(S \cap L) + P(S' \cap L) = P(L)$$

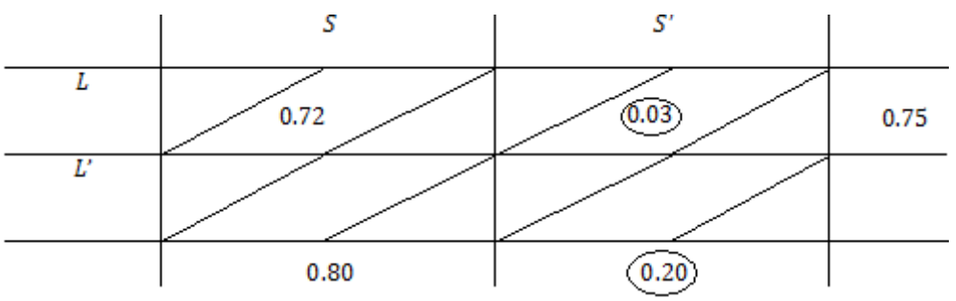
$$0{,}72 + P(S' \cap L) = 0{,}75$$

$$P(S' \cap L) = 0{,}75 - 0{,}72$$

$$P(S' \cap L) = 0{,}03$$

Como se sabe que $P(L) = 0.75$, y que el valor de la intersección entre los eventos L y S es igual a 0.72 entonces, se puede obtener el valor de la intersección entre S' y L. Ahora para determinar el valor de $P(S')$ se debe tener en cuenta la regla de los eventos complementarios, datos con los que finalmente se puede dar respuesta al interrogante

A continuación se presenta, como alternativa para resolver el problema planteado, el uso de las tablas de contingencia, en la cual se presentan los valores dados en el enunciado y aquellos que se pueden obtener a partir de las relaciones entre los eventos, como se muestra más adelante.



En el anterior enunciado – problema, se ofrecen dos valores de probabilidades, los cuales son suficientes para el primer literal, mientras que para el segundo literal es necesario hallar el valor del evento complementario de S y hacer uso de un registro intermediario de representación, como la tabla de contingencia, para hallar el valor de la probabilidad de intersección entre los eventos L y S'.

Por otro lado, estos problemas presentan un contexto cercano al estudiante, por lo cual es posible inferir que les pueden resultar comprensibles en cuanto a la posible ocurrencia de los eventos, que en contraste con el enunciado – problema E2, expuesto en el segundo capítulo (ver p. 39), en el cual

el contexto no le es familiar al estudiante, puesto que éste trata de un tipo de acusación diferente al adoptado por Colombia[60].

Es entonces, que pueden considerarse los siguientes elementos significativos para la caracterización de las condiciones suficientes, en virtud de garantizar que la escogencia del nuevo conjunto de enunciados – problema favorezca el aprendizaje de la probabilidad condicional:

- El contexto de los enunciados-problemas debe ser familiar al estudiante.
- El enunciado – problema deberá contener datos suficientes para su solución.
- Las etiquetas o términos "*dado que", "si", "de los que"*, en enunciados – problema de probabilidad condicional implica, por un lado, la identificación del evento que condiciona, y por otro, la ausencia de la dificultades de la confusión entre la probabilidad conjunta y condicional, y el condicionamiento y causación.
- La coordinación entre las distintas representaciones de un enunciado – problema favorece la comprensión de éste.
- El grado de redacción de un enunciado – problema debe ser claro o presentado de manera coherente.

3.2. Criterios de selección de enunciados – problema para la creación de una tarea que favorezca al aprendizaje de la probabilidad condicional.

La construcción de una tarea que permee el aprendizaje de la probabilidad condicional debe estar relacionado por criterios que justifiquen y fundamenten tal elección; en este caso tales criterios se relacionan con elementos semióticos y didácticos cruciales en la comprensión de los enunciados – problema, y con ello el aprendizaje de la probabilidad condicional.

3.2.1 El contexto y situación de lectura de los enunciados – problema.

Toda comprensión de un enunciado – problema está ligada a un contexto específico en que se plantea el problema y a una situación de lectura particular a cada lector; en cuanto a estos elementos, se reconoce que los contextos pueden estar relacionados con el entorno extra - escolar, institucional o matemático, y que la situación de lectura está definida por elementos propios del

[60]La complementariedad de los eventos presentados hasta el momento es evidente, pues ellos son aprobar – reprobar, ganar – no ganar; mientras que en este caso los eventos no parecen estar relacionados.

lector, como los conocimientos de los que dispone al enfrentarse a un texto y de la redacción de tales textos, en cuanto a los grados y modos de explicitación del contenido cognitivo.

Se sabe entonces, que la relación que un estudiante tenga con el contexto en que se presenta el enunciado, influye en la interpretación que éste haga de dicho enunciado, pues la cercanía o lejanía del lector con el contexto implica necesariamente conocer, o no, elementos como el vocabulario correspondiente, lo cual posibilita en cierta medida, la comprensión del enunciado – problema. Asimismo, se sabe que una situación de lectura se fundamenta, primero, en la relación: organización redaccional – contenido cognitivo, que implica la claridad de un enunciado – problema; y segundo, la relación entre la base de conocimientos del lector y el contenido cognitivo del texto, que puede ser familiar si aquello que conoce el estudiante es suficiente para la comprensión del texto, o nueva, si se da la necesidad de acudir a herramientas externas que promuevan la comprensión de éste.

A partir de estas características, Duval propone distintas situaciones de lectura presentadas con anterioridad en el capítulo II (ver tabla 13.), las cuales ponen de manifiesto los procesos de comprensión de textos: inductivo, deductivo, o ambos, para garantizar la apropiación de un enunciado – problema, la elección del proceso que se debe poner en práctica corresponde únicamente al lector según las condiciones en que se encuentre. Sin embargo, se propone que para el aprendizaje de la probabilidad condicional, además de presentar un enunciado – problema que dé lugar a la comprensión de éste, debe plantear preguntas que favorezcan el proceso de comprensión deductivo, puesto que éste permite que los estudiantes accedan al conocimiento en un proceso guiado, que promueva e implique en los enunciados una clara necesidad de validar mediante el proceso inductivo las conclusiones a las que se ha llegado.

Con base en esta idea, se sustenta el hecho de que deben existir elementos inmersos dentro del enunciado, que por lo menos le resulten familiares al estudiante, para que así, aun sin conocer en profundidad cómo funciona ese contexto, la escritura del enunciado brinde las herramientas necesarias para la actividad de solución.

3.2.2. Las dificultades didácticas inherentes a la presentación de enunciados – problema.

Atender a la comprensión de un enunciado – problema de probabilidad condicional implica no sólo el reconocimiento de las dificultades didácticas inmersas en cualquier enunciado, sino los grados y los

modos en que éstas pueden estar presentes, los cuales difieren de un enunciado a otro en cuanto a los elementos que constituyen tal dificultad.

Particularmente, las dificultades las que señaladas en este trabajo, están ligadas a las funciones discursivas de una lengua, puesto que éstas permiten un análisis de las expresiones utilizadas en los enunciados – problema, el cual toma sentido al señalar:

- La importancia de la explicitación de marcas lingüísticas que designen los eventos o las relaciones entre los eventos, dado que la ausencia de estas marcas son las que conllevan al estudiante a la confusión en un enunciado, por un lado, la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta, y por otro, a no distinguir el evento condicionante y el evento condicionado.
- La necesidad de escoger adecuadamente las expresiones que generan proposiciones en los enunciados – problema, lo cual contribuye al reconocimiento del lugar que tienen tales proposiciones en las distintas relaciones entre los eventos, específicamente cuando se refiere a la probabilidad condicional, y es necesario determinar el suceso condicionante.

Es claro entonces, que aun cuando la lengua natural conlleva a muchas dificultades de comprensión, debido a su naturaleza, es ella misma la que permite la superación de éstas, a partir de las expresiones seleccionadas en un enunciado.

3.2.3. De las representaciones discursivas a las representaciones no discursivas.

En la actividad matemática se hace indispensable promover la conversión de una representación en un registro inicial a una representación en un registro final, tal cambio de registro debe, igualmente, considerar como esencial aquellas conversiones que parten de un registro discursivo, como la lengua natural o el registro simbólico de la probabilidad condicional, y llegan a un registro no discursivo como las tablas de contingencia y los diagramas de árbol, los cuales muestran una información global de aquello que se enuncia, dando lugar a una aprehensión de los enunciados – problema, en los que se pone en juego los distintos procesos de comprensión para dar cuenta del aprendizaje.

Es en razón de la necesidad de representar en distintos registros no discursivos, que se propone como criterio esencial para la elección de enunciados – problema, el favorecimiento de la conversión como una actividad fundamental en la escuela.

3.3. Categorización de los enunciados – problema, escogidos para la creación de la tarea.

Con la intención de identificar aquellas condiciones suficientes que garanticen la comprensión de un enunciado – problema, se propone una categorización de dichos enunciados en la que se reconozcan distintos elementos comunes en los mismos.

3.3.1 Elementos involucrados en la categorización.

En la construcción de la rejilla se toman en consideración dos elementos que se han desarrollado en el transcurso del trabajo, por un lado, se retoman las dificultades didácticas, y por otro, los criterios, expuestos por Duval (2004) cap. II, pp. 70, que determinan la variabilidad redaccional de un texto y los procesos de comprensión implicados en éstos; cada una de las celdas establece relaciones entre las filas y las columnas, lo cual genera categorías que permite clasificar los enunciados – problema.

Entonces, la rejilla presenta en las filas las tres dificultades didácticas que se han expuesto en el capítulo II: confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta; intercambio de sucesos, condicionamiento y causación; de las cuales se han ratificado su existencia en los enunciados – problema en los distintos ejemplos que se han planteado en el trabajo. En cuanto a las columnas, se distinguen dos elementos que las caracterizan: los criterios de variabilidad redaccional y los procesos de comprensión de un texto que permite cada uno de los enunciados – problema; respecto a los criterios de variabilidad se considera, en cada enunciado – problema, si las expresiones que se hacen explícitas son suficientes, si dichas expresiones utilizadas para cumplir el criterio anterior son apropiadas, según el vocabulario, la ambigüedad y demás, y si el orden en que estas expresiones se presentan en los enunciados – problema favorecen la comprensión de éstos; en relación a los procesos de comprensión es, a partir de las operaciones fundamentales en la comprensión de un texto: segmentación y recontextualización (cap. II, pp. 72 - 73), identificar la forma en cómo se movilizan, y con ello determinar el proceso que desarrollan. Ahora, con el propósito de señalar en un único criterio estos dos elementos, se determinan los siguientes niveles:

- ***Nivel alto:*** Son considerados enunciados – problema de probabilidad condicional, de nivel alto, aquellos que cumplen cada uno de los criterios de variabilidad redaccional, además de favorecer el desarrollo, en ambas direcciones, de los procesos de comprensión de textos.

- ***Nivel medio:*** Aquellos enunciados – problema que cumplen, con al menos dos de los criterios de variabilidad redaccional y las operaciones de segmentación y recontextualización posibles, conllevan al proceso inductivo ó al deductivo.
- ***Nivel bajo:*** cualquier enunciado – problema que no dé lugar al desarrollo por completo de los procesos de comprensión de los enunciados, y que presente a lo más unos de los criterios, corresponde o hace parte de este nivel.

La asignación de enunciados – problema en cada una de las celdas de la rejilla corresponde a las relaciones que expresan entre las dificultades y los niveles, para lo cual se hizo un proceso previo en el que se identificaron, primero, las dificultades inmersas en la solución del enunciado – problema, y segundo, el cumplimiento de cada criterio de variabilidad redaccional y proceso de comprensión desarrollado en la solución propuesta.

3.3.2 Un ejercicio de categorización de algunos enunciados – problema de los libros de texto.

La categorización de los enunciados – problema seleccionados para la creación de la tarea, responde a las relaciones establecidas entre las dificultades y los distintos niveles que se han presentado anteriormente, es entonces a partir de estos elementos que se construye la tabla siguiente, en la que se indica la categoría a la que corresponde cada celda, cabe aclarar que la presentación de las categorías se hará más adelante.

	Niveles			
Dificultades		***Nivel Alto***	***Nivel medio***	***Nivel bajo***
	No presentan dificultades	Categoría 3	Categoría 6	
	Condicionamiento y causación		Categoría 7	
	Confusión entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional.		Categoría 8	
	Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional.	Categoría 2	Categoría 9	
	Condicionamiento y causación, confusión entre probabilidad conjunta y condicional.		Categoría 5	Categoría 1
	Todas las dificultades.			Categoría 4

Tabla 15. Categorización de los enunciados – problema.

Cada una de las celdas, propone una relación entre los niveles y las dificultades de los enunciados – problema, en lo que sigue se describe las características particulares de cada una de las celdas que le dieron significado a las categorías.

Categoría 1.

Los enunciados – problema que representan esta categoría cumplen con tres elementos puntuales:

- Identifica como máximo un criterio de variabilidad redaccional.
- La redacción completa del texto, no da lugar a que en una lectura se desarrolle una segmentación y recontextualización que permita un proceso de comprensión por completo.
- Se evidencian las tres dificultades, tanto en la lectura del enunciado – problema como en su solución.

Categoría 2.

El tipo de enunciados aquí presentes atiende de manera concreta cada uno de los tres criterios concernientes a la organización redaccional, puesto que explicita sus marcas lingüísticas, el orden en que se presentan los eventos permite inferir la relación entre ellos, y la elección de las expresiones explícitas permiten una lectura entendible. Asimismo, se reconoce que su redacción da lugar al desarrollo del proceso deductivo o inductivo, según las condiciones del lector respecto al texto.

Categoría 3

Estos enunciados se presentan de manera clara, sus elementos explícitos son suficientes, el orden de ellos es apropiado, y las expresiones que se hacen explícitas permiten comprender el enunciado – problema. Sus datos son suficientes y precisos, por lo que conllevan al paso del proceso inductivo al deductivo, y viceversa. Estos, permiten fácilmente la representación del enunciado en registros no discursivos.

Categoría 4

En esta categoría, se encuentran aquellos enunciados – problema que en su redacción no se evidencia la presencia de ninguno de los criterios, pues son enunciados confusos, donde hacen falta términos que indiquen las relaciones entre los eventos. Tal ausencia genera poca comprensión en estos problemas, y por lo tanto no es posible desarrollar algún proceso de compresión.

Categoría 5

Este tipo de enunciados se caracteriza por no presentar marcas lingüísticas que conlleven al reconocimiento de las relaciones entre los eventos, como también generar confusiones en relación al orden de los eventos. Se privilegia el pasar de un enunciado en lengua natural a lo simbólico, por lo cual desde la organización redaccional se llega al contenido cognitivo, es decir conlleva a un proceso inductivo.

Categoría 6

Aun cuando no se determina ninguna de las dificultades didácticas de interés, al revisar el cumplimiento de los criterios de organización redaccional, se evidencia que las marcas lingüísticas utilizadas dan lugar a ambigüedades, pues se usan en un sentido diferente al que por convenio se ha determinado.

Categoría 7

Pese a que estos enunciados, presentan el cumplimiento de los tres criterios de la organización redaccional de un texto, el único proceso de comprensión posible de desarrollar es el proceso deductivo, puesto que sólo se puede concluir las relaciones pedidas a partir del contenido cognitivo sin poder inferir sobre otras relaciones entre los eventos.

Categoría 8

Los enunciados – problema de esta categoría, explicitan al menos dos criterios de variabilidad redaccional, y permiten que el lector desarrolle el proceso deductivo o el proceso inductivo en la comprensión de textos, en cuanto a las operaciones de segmentación y recontextualización que efectúe. En consideración con las dificultades propuestas, esta categoría implica la confusión entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional, esto debido a las falencias redaccionales que no permiten una distinción entre ellas.

Categoría 9

El tipo de enunciados – problema presentes en esta categoría atiende al menos dos criterios de la variabilidad redaccional y conlleva al desarrollo del proceso inductivo o proceso deductivo; la dificultad que se identifica en estos enunciados está relacionada con el intercambio de sucesos, debido a la ausencia de algún criterio de la variabilidad redaccional.

La redacción de todo texto está ligada a tres criterios de variabilidad redaccional, la cual constituye un vínculo necesario entre lo que dice en el texto y lo que es comprendido por el lector, es entonces evidente que la ausencia, de al menos uno, de estos criterios conlleva a distintas dificultades. Por tanto, en el siguiente apartado se propone una organización de estas categorías, en relación a la situación de lectura que determinan, y una ejemplificación a partir de la elección de dos representantes para esta nueva tipología.

3.3.3 Ejemplificación de la tipología en la que se agrupan las categorías de los enunciados – problema.

La rejilla de categorización organiza una variedad de enunciados – problema según las características específicas de cada una de las celdas, a partir de la relación entre los niveles de organización redaccional, y las dificultades asociadas a ellos. La nueva tipología que se establece, corresponde al tipo de situación de lectura determinada en cada una de las categorías, lo cual implica que se tenga en cuenta, no sólo la relación entre la organización redaccional (niveles de la rejilla) y el contenido cognitivo de los enunciados – problema, sino que se debe considerar la base de conocimientos con que cuenta el lector para enfrentarse al texto, por lo cual en la reorganización de las categorías ubicadas en las celdas de la tabla 15., se tiene que cada una de éstas pertenece a la siguiente tipología:

- ***Tipo 1:*** Para conformar este grupo de enunciados – problema, se toman en cuenta aquellos enunciados que determinan la situación II (ver cap. II, p. 75), es decir los enunciados – problema que pertenecen a las categorías 2 y 9.
- ***Tipo 2:*** En este grupo, se enmarcan aquellos enunciados – problema en los que a partir de la base de conocimientos del lector, el contenido cognitivo presente es nuevo, es decir situación de lectura III (ver cap. II, p. 75). Las categorías pertenecientes a este nivel son 4, 5, 7 y 8.
- ***Tipo 3:*** Para este tipo se agrupan aquellos enunciados – problema, que determinan la situación de lectura IV (ver cap. II, p. 75), es decir aquellos que requieren del proceso inductivo para su comprensión, los enunciados – problema que corresponde a esta tipología son las categorías 1, 3 y 6.

A continuación se presentan dos enunciados – problema[61] representantes para cada tipo, que según su categoría ha permitido un juicio de ellos, que da lugar a una presentación más delante de sus respectivas modificaciones, con el fin de presentar una tarea, dirigida a estudiantes de educación media. Dichos enunciados son:

Enunciado – problema tipo 1.

E12: Hay 80 solicitantes que buscan obtener una franquicia de alimentos rápidos. Algunos tienen un grado universitario y otros no. Algunos tienen experiencia previa en la industria del servicio de alimentos rápidos y otros no. La división correcta es:

	Graduados de universidad.	*No graduados de Universidad.*
Experiencia previa el servicio de alimentos.	24	36
Ninguna experiencia previa en el servicio.	12	8

Si el orden en que se procesa a los solicitantes es aleatorio, G es el evento de que el primer solicitante procesado tiene un grado universitario y E es el evento de que el primer solicitante procesado tiene experiencia previa en el servicio de alimentos, determine cada una de las probabilidades siguientes directamente a partir de los concursantes y los totales de los renglones y columnas de la tabla:

a. $P(G)$
b. $P(E)$
c. $P(G \cap E)$
d. $P(G' \cap E')$
e. $P(E/G)$
f. $P(G'/E')$
g. $P(E'/G')$
h. $P(E \cup G)$

Tanto este enunciado como el *E10*, determinan una situación de lectura tipo II, es necesario que dentro de éstos existan preguntas que conduzcan a la representación de este mismo enunciado a otro registro de representación no discursivo, como por ejemplo, incluir en el primer problema una pregunta que conlleve a la representación en un diagrama de árbol, y el segundo, a la representación en una tabla de contingencia y diagrama de árbol.

[61] Para cada uno de los enunciados expuestos a continuación, es pertinente aclarar que su solución no será exhibida, puesto que en capítulos anteriores se han ejemplificado diversos enunciados, y por tanto, por ser los propuestos a trabajar en la tarea, ya han sido señalados previamente elementos suficientes para la solución de ellos en distintos registros de representación.

Enunciado – problema tipo 2:

E13: El recorrido que hace un bus escolar para llegar de la iglesia del barrio al colegio tiene tres semáforos. Las probabilidades de que el bus se detenga en cada uno de ellos son, de 0,4, 0,6 y 0,65 respectivamente.

a. *¿Es posible que la probabilidad de que el bus se detenga en el segundo semáforo, si se detuvo en el primero, sea de 0,75?*
b. *Si la probabilidad de que el bus se detenga en el tercer semáforo dado que se detuvo en el primero es de 0,9, ¿Cuál es la probabilidad de que el bus se detenga en el primer y tercer semáforo?*
c. *¿Cuáles deben ser las probabilidades de las intersecciones de los eventos para que sean independientes?*

Este enunciado – problema conduce al desarrollo de un proceso inductivo, puesto que desde su organización redaccional se llega al contenido cognitivo, en este caso a la simbolización del enunciado. No obstante, se evidencia en este la ausencia de marcas lingüísticas que no permiten fácilmente identificar el evento condicionante, y por ende confundir la probabilidad condicional con la probabilidad conjunta.

En cuanto al enunciado E6, su redacción no brinda elementos suficientes para la simbolización de sus probabilidades, ni mucho menos realizar los cálculos necesarios para hallar el valor de la probabilidad del evento de asistir a la universidad. No obstante, este enunciado – problema, señalado anteriormente en el capítulo II, ha sido obtenido de un texto traducido, y por ello en la traducción de una lengua natural a otra, pueden existir ambigüedades, dado que existen varios signos que en un sistema de signos evocan un mismo objeto.

En ambos enunciados, al igual que los enunciados – problemas del tipo 1, se evidencia la necesidad de preguntas generadoras de la actividad de conversión, del registro inicial a otros registros no discursivos como el diagrama de árbol y la tabla de contingencia.

Enunciado – problema tipo 3:

En tanto a los enunciados E2 y E5, el primer enunciado – problema conduce al proceso deductivo, ya que es posible llegar a su comprensión a partir de la simbolización de las probabilidades dadas en éste, para así dirigirse a la solución de los literales sin detenerse mucho en aquello que le muestra el

texto como tal. Mientras que en el segundo enunciado – problema, la forma en cómo se designan las probabilidades conllevan a múltiples interpretaciones, pues no se hace explícito qué valores corresponden a qué eventos, por lo cual se hace necesario el uso del término “respectivamente”, para comprender que cada probabilidad corresponde en el mismo orden a cada evento nombrado. Además, no existe en detalles marcas lingüísticas para la identificación del evento condicionante, y el término “también” no corresponde a una designación de eventos dependientes, en este caso la probabilidad condicional.

Igualmente en estos problemas, además de contener aquellos criterios necesarios para la organización redaccional de un texto, es importante también que contengan preguntas generadoras de la actividad de conversión.

No obstante, es pertinente aclarar que en esta tipología se presentan los enunciados – problema en su forma original, los cuales posteriormente se modificarán para atender a las condiciones de redacción, situación de lectura, y propias de la probabilidad condicional para la comprensión de dichos enunciados, en pro de la superación de las dificultades identificadas inicialmente en este trabajo de grado.

3.3.4 Presentación de enunciados – problema representantes de cada nivel, modificados.

En este apartado se hace una presentación de cada uno de los representantes de la tipología que se planteó anteriormente; en esta presentación se retoman tanto los juicios expuestos frente a los enunciados – problema como las condiciones que se han considerado suficientes para potencializar la comprensión de los dichos enunciados, y con ello la superación de algunas de las dificultades por parte de estudiantes de educación media, en cuanto el aprendizaje de la probabilidad condicional:

Enunciados – problema tipo 1:

E12’: Hay 80 solicitantes que buscan obtener una franquicia de alimentos rápidos. Algunos tienen un grado universitario y otros no. Algunos tienen experiencia previa en la industria del servicio de alimentos rápidos y otros no. La tabla que representa la anterior información es:

	Graduados de universidad.	*No graduados de Universidad.*
Experiencia previa el servicio de alimentos.	24	36
Ninguna experiencia previa en el servicio.	12	8

- *Si el orden en que se procesa a los solicitantes es aleatorio, G es el evento de que el primer solicitante procesado tiene un grado universitario y E es el evento de que el primer solicitante procesado tiene experiencia previa en el servicio de alimentos, determine cada una de las probabilidades siguientes directamente a partir de la información suministrada en la tabla:*

  a. $P(G)$
  b. $P(E)$
  c. $P(G \cap E)$
  d. $P(G' \cap E')$
  e. $P(E/G)$
  f. $P(G'/E')$
  g. $P(E'/G')$
  h. $P(E \cup G)$

- *Represente a cada una de las probabilidades pedidas en el punto anterior en un diagrama árbol, excepto la probabilidad pedida en h.*

En este enunciados – problema además, de la creación de un literal que invite al estudiante hacer uso de registros no discursivos para una mayor comprensión del objeto matemático, se informó al estudiante acerca del registro no discursivo que representa la información dada en el enunciado, y con ello a la modificación en cuanto al reconocer que a partir de ella, también puede calcular las probabilidades, si se sabe que cada sesión de una celda en ésta indica un tipo de probabilidad diferente.

E10': El 57% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio, el 40% de los estudiantes del colegio utiliza bicicleta para trasladarse. Además el 37% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio y utiliza la bicicleta para trasladarse. Mediante la realización de un diagrama de árbol, halla el valor de:

a. Si el rector del colegio selecciona al azar un estudiante del colegio, dentro de los que viven cerca, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la bicicleta para trasladarse?

b. *Si la mañana de ayer un estudiante llegó al colegio en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un barrio cercano al colegio?*

En este enunciado, se propone como actividad anexa el uso de un diagrama de árbol para determinar los valores de las probabilidades pedidas en cada literal, esto, para promover la actividad de conversión y la importancia que tienen los diversos registros de representación para un mismo objeto matemático. Pese a que este enunciado – problema presenta la marca lingüística "si", es evidente que cada uno de los literales atienden al intercambio de sucesos, por lo que esta dificultad puede persistir no porque no se identifique el evento condicionante, sino debido a problemas de concepción del estudiante, en la que supone que independientemente del evento condicionante el resultado es igual.

Enunciados – problema tipo 2:

E13': El recorrido que hace un bus escolar para llegar de la iglesia del barrio al colegio tiene tres semáforos. Las probabilidades de que el bus se detenga en cada uno de ellos son, de 0,4, 0,6 y 0,65 respectivamente.

a. *Dado que el bus se detuvo en el primer semáforo, es posible que el bus se detenga en el segundo semáforo con una probabilidad de 0,75?*

b. *Si la probabilidad de que el bus se detenga en el tercer semáforo dado que se detuvo en el primero es de 0,9, ¿Cuál es la probabilidad de que el bus se detenga en el primer y tercer semáforo?*

d. *¿Cuáles deben ser las probabilidades de las intersecciones de los eventos para que sean independientes?*

Para atender a la dificultad de condicionamiento y causación, en este enunciado – problema, al primer literal se le ha agregado la marca lingüística "dado que", lo cual hace que su redacción cambie. A los otros literales no se les realiza modificación alguna, puesto que interrogan de una manera clara. Es un enunciado que se caracteriza en sus primeros literales por el hallazgo de la probabilidad conjunta entre dos eventos, en los que se ha de reconocer que el dato dado pertenece a una probabilidad condicional para así luego hallar la conjunta mediante la regla de multiplicación. Sus literales conllevan a un proceso deductivo puesto que es a partir de la información brindada en ellos que se les da un lugar para el cálculo de otras probabilidades.

E6': La probabilidad de que un estudiante universitario compre una computadora personal es de 0.50 y la probabilidad de que sus calificaciones suban si compra una computadora personal es de 0.72. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante universitario compre una computadora personal y mejore sus calificaciones?

En consideración de que este problema era de un texto escolar traducido, y como tal presenta ambigüedades fue necesario ajustar la parte "de que asiste a la universidad" como adjetivo del estudiante, es decir "un estudiante universitario", y así la simbolización que se haga de dicho enunciado, brinda los elementos suficientes para calcular la probabilidad conjunta de los eventos de comprar una computadora personal y mejorar sus calificaciones.

Enunciados – problema tipo 3:

E5': Las probabilidades de que una persona que viaja por el noroeste de Estados Unidos visite Boston, Providence o ambas ciudades son 0.45, 0.36, *y* 0.18, *respectivamente. Obtenga las probabilidades:*

a. *Dado que una persona visite a Boston, visite Providence;*
b. *Dado que una persona visita Providence, visite Boston.*

A este enunciado – problema se le ha agregado el término "respectivamente", para referirse a cada una de las probabilidades de visitar las ciudades, puesto que anteriormente no era claro en el enunciado el valor de éstas. Igualmente, se ha agregado la marca lingüística "dado que" para explicitar la relación de dependencia entre los eventos, que anteriormente no era clara con el "también" pese a que se daba entrada a ellas con la oración "obtenga las probabilidades de que".

E2': Si W es el evento de que un empleado está bien capacitado y Q es el evento de que el empleado cubra la cuota de producción, exprese simbólicamente las probabilidades de que:

a. *Dado que un empleado esté bien capacitado, cubra la cuota de producción.*
b. *Un empleado que no esté bien capacitado, dado que cubra la cuota de producción.*
c. *Dado que un empleado no está bien capacitado, no cubra la cuota de producción.*
d. *Mediante una tabla de contingencia y un diagrama de árbol represente las probabilidades posibles, en cada uno de estos gráficos.*

En este enunciado se han hecho explicitas las marcas lingüísticas para evitar confusión entre la probabilidad conjunta y condicional, como también el permitir la identificación del suceso condicionante. A pesar de que originalmente se caracterizaba por ser un problema en que el que se accedía al contenido cognitivo por su misma organización redaccional, se propone plantear un literal más, en el cual se transcienda de un registro discursivo a otro de distintas características, como lo son los registros no discursivos.

3.4. Condiciones suficientes para favorecer el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Se reconocen en los enunciados – problema características relacionadas con la organización redaccional, la situación de lectura que provoca y otros elementos que son propios de la probabilidad condicional, estas características han sido abordadas en el trabajo desde distintas teorías que justificaron la incidencia que cada una de ellas tenían en el aprendizaje de la probabilidad condicional. Igualmente, bajo las teorías expuestas, se identificaron elementos que permiten la superación de algunas dificultades inherentes en la comprensión de los enunciados – problema. A continuación, se exhiben las condiciones que se consideran suficientes, desde cada una de las características de los enunciados – problema, para la comprensión de éstos y con ello se promueva el aprendizaje de la probabilidad condicional.

3.4.1 Condiciones en cuanto a la redacción.

La presentación de todo enunciado – problema en lengua natural, requiere de la elección de signos que permitan nombrar los objetos y de expresiones que digan algo de esos objetos, función referencial y apofántica de la lengua, es en relación a la explicitación de esos signos o expresiones que recae la primera condición, pues en los enunciados – problema de probabilidad condicional es necesario que hayan marcas lingüísticas explícitas que den acceso a la identificación de las relaciones que se establecen entre los eventos. En el marco de este trabajo se proponen como marcas lingüísticas para las distintas relaciones entre los eventos de un enunciado – problema, las siguientes:

Marca lingüística	*Tipo de relación entre los eventos*	*Ejemplificación*
Dado que… Si, condicional De los que…	Probabilidad condicional	• La probabilidad de que un grupo decida comer helado, dado que fue a cine es … • Si un grupo fue a cine, cuál es la probabilidad de que coman helado. • De los que asisten a cine, cuál es la probabilidad de que coman helado.
Y También Ni Ambos	Intersección	• La probabilidad de que un grupo decida ir al cine y comer helado es … • La probabilidad de que un grupo vaya a cine es 0,3, que coma helado es 0,4 y que realice ambas actividades es … • La probabilidad de que un grupo no vaya a cine ni coma helado es… • La probabilidad de que un grupo que va a cine también coma helado es…

Tabla 16. Marcas lingüísticas en probabilidad condicional

La segunda condición, expresa una estrecha relación con la forma en cómo se presenta la información, puesto que las expresiones utilizadas en el enunciado – problema además de ser marcas lingüísticas, pueden cumplir con otros propósitos necesarios dentro del enunciado, ya sea que presenten información, contextualicen, o indiquen demás particularidades de las expresiones; éstas pueden considerarse como secundarias en un enunciado, pero que al ser necesarias deben dar claridad en dicho enunciado, a partir del uso de un vocabulario conocido o de fácil acceso por los posibles lectores, que no dé lugar a ambigüedades o diferentes interpretaciones.

La tercera condición, correspondiente a la redacción presente en un enunciados – problema, se relaciona con los procesos posibles para la comprensión de un enunciado: proceso inductivo o proceso deductivo, los cuales requieren que la organización redaccional brinde elementos que permitan tal proceso, es decir que:

- Si se pretende promover el proceso inductivo, la organización redaccional debe poner de manifiesto, en primer lugar, el reconocimiento en las unidades segmentadas, la función[62] que

[62] Esto, en cuanto a la función referencial, apofántica o metalingüística.

cumplen, y en segundo lugar, la correspondencia entre las unidades, de manera tal que dé un acceso al contenido cognitivo.

- Si la pretensión, en cambio, es promover el proceso deductivo, las características redaccionales deben conllevar a la identificación de las unidades del contenido cognitivo a partir de una serie de preguntas relacionadas con este contenido que se expone en el enunciado – problema, lo cual permite la constitución del enunciado como un todo, al que es posible acceder y comprender.

3.4.2. Condiciones en cuanto a la situación de lectura.

Se han presentado en el capítulo II, las distintas situaciones de lectura posibles de un texto, y particularmente de un enunciado – problema, las cuales están determinadas por las relaciones entre: la organización redaccional de un texto y el contenido cognitivo de éste, y la base de conocimientos de un lector frente al contenido cognitivo. Todas las situaciones de lectura que se debe propiciar en la escuela, para garantizar la comprensión de lectura y el aprendizaje de la probabilidad condicional, son aquellas en las que se fomente una revisión constante del texto, que le permita consignar en las representaciones no discursivas las unidades segmentadas en el registro discursivo; de igual manera estas situaciones deben generar una validación, de lo que se comprende en relación con el proceso deductivo, a través del proceso inductivo.

3.4.3 Condiciones propias de la probabilidad condicional

Aun cuando se reconocen las condiciones necesarias desde una mirada cognitiva, éstas no conducen por sí solas al aprendizaje de la probabilidad condicional, puesto que son necesarios algunos elementos que son propios de la probabilidad condicional que dan un lugar a cada una de las propiedades y reglas de ésta; esto dado que la información presente en el enunciado – problema debe ser suficiente para la inferencia de algunas relaciones implícitas; por lo cual, una primera consideración se relaciona con la necesidad de presentar dos datos que posibiliten el planteamiento de las relaciones entre los datos y se proponga una solución. Igualmente, la discriminación entre los eventos y sus relaciones debe permitir la construcción de distintos registros de representación no discursiva, el diagrama de árbol y la tabla de contingencia con todas sus posibles entradas, lo cual favorece la conversión como actividad cognitiva que promueve el aprendizaje de la probabilidad

condicional y la comprensión de un enunciado – problema desde una representación que contribuya a la aprehensión global de éste.

3.5 La tarea

En consideración con las modificaciones y condiciones anteriores para la escogencia y selección de enunciados – problema, junto con los distintos marcos conceptuales como el semiótico, didáctico y matemático, que han sido fundamentos de todo un análisis y caracterización de aquellos enunciados – problema que facilitan el aprendizaje de la probabilidad condicional, se presenta la creación de una tarea que atiende a diversos aspectos señalados en su marco conceptual de fundamentación, y la cual es dirigida a estudiantes de educación media, en la que se espera cumplir con el estándar mencionado para este nivel. Tarea que favorece el aprendizaje de la probabilidad condicional, y tiene como objetivo la superación de aquellas dificultades, de ámbito didáctico, identificadas al inicio de este trabajo en cuanto a la comprensión de enunciados – problema.

No obstante dicha tarea deberá aplicarse bajo la metodología etnográfica, como un estudio de caso, en el que se ha de privilegiar la entrevista no estandarizada y observación participante como estrategias de obtener información desde informantes claves. Igualmente, la aplicación de esta tarea deberá atender a la superación de aquellas dificultades puesto que su modelo de investigación, es un modelo que se desarrolla en medio del respeto de las creencias y relaciones culturales de los sujetos. Esta tarea, en virtud de incorporar distintos conceptos concernientes a la probabilidad condicional, como también aspectos semióticos incidentes en el aprendizaje de esta, deberá cumplir con la condición de aplicarse sólo si los estudiantes han vivido una experiencia de enseñanza de este objeto, es decir, no se tiene como intención en la aplicación de la tarea, la intervención por parte de las personas quienes la apliquen como personas generadoras, en un primer momento, sobre la enseñanza de la probabilidad condicional, además la tarea debe estar tan bien elaborada para su comprensión. Finalmente quien decida aplicar esta tarea puede decidir únicamente acerca del orden de los enunciados – problema, los cuales son:

1. Hay 80 solicitantes que buscan obtener una franquicia de alimentos rápidos. Algunos tienen un grado universitario y otros no. Algunos tienen experiencia previa en la industria del servicio de alimentos rápidos y otros no. La tabla que representa la anterior información es:

	Graduados de universidad.	*No graduados de Universidad.*
Experiencia previa el servicio de alimentos.	24	36
Ninguna experiencia previa en el servicio.	12	8

- Si el orden en que se procesa a los solicitantes es aleatorio, G es el evento de que el primer solicitante procesado tiene un grado universitario y E es el evento de que el primer solicitante procesado tiene experiencia previa en el servicio de alimentos, determine cada una de las probabilidades siguientes directamente a partir de la información suministrada en la tabla:

a. $P(G)$
b. $P(E)$
c. $P(G \cap E)$
d. $P(G' \cap E')$
e. $P(E/G)$
f. $P(G'/E')$
g. $P(E'/G')$
h. $P(E \cup G)$

- Represente a cada una de las probabilidades pedidas en el punto anterior en un diagrama árbol, excepto la probabilidad pedida en h

2. El 57% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio, el 40% de los estudiantes del colegio utiliza bicicleta para trasladarse. Además el 37% de los estudiantes viven en barrios cercanos al colegio y utiliza la bicicleta para trasladarse. Mediante la realización de un diagrama de árbol, halla el valor de:

   a. Si el rector del colegio selecciona al azar un estudiante del colegio, dentro de los que viven cerca, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la bicicleta para trasladarse?

   b. Si la mañana de ayer un estudiante llegó al colegio en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un barrio cercano al colegio?

3. Si W es el evento de que un empleado está bien capacitado y Q es el evento de que el empleado cubra la cuota de producción, exprese simbólicamente la probabilidades de que:

   a. Dado que un empleado esté bien capacitado, cubra la cuota de producción.

   b. Un empleado que no esté bien capacitado, dado que cubra la cuota de producción.

   c. Dado que un empleado no está bien capacitado, no cubra la cuota de producción.

   d. Mediante una tabla de contingencia y un diagrama de árbol represente las

4. El recorrido que hace un bus escolar para llegar de la iglesia del barrio al colegio tiene tres semáforos. Las probabilidades de que el bus se detenga en cada uno de ellos son, de 0,4, 0,6 y 0,65 respectivamente.

   a. Dado que el bus se detuvo en el primer semáforo, es posible que el bus se detenga en el segundo semáforo con una probabilidad de 0,75?

   b. Si la probabilidad de que el bus se detenga en el tercer semáforo dado que se detuvo en el primero es de 0,9, ¿Cuál es la probabilidad de que el bus se detenga en el primer y tercer semáforo?

   c. ¿Cuáles deben ser las probabilidades de las intersecciones de los eventos para que sean independientes?

5. Las probabilidades de que una persona que viaja por el noroeste de Estados Unidos visite Boston, Providence o ambas ciudades son 0.45, 0.36, y 0.18, respectivamente. Obtenga las probabilidades:

   a. Dado que una persona visite a Boston, visite Providence;

   b. Dado que una persona visita Providence, visite Boston.

6. La probabilidad de que un estudiante universitario compre una computadora personal es de 0.50 y la probabilidad de que sus calificaciones suban si compra una computadora personal es de 0.72. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante universitario compre una computadora personal y mejore sus calificaciones?

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CAPÍTULO IV.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo con lo planteado y desarrollado en este trabajo, fue posible enunciar juicios acerca de lo sucedido y alcanzado en este, y asimismo establecer algunas recomendaciones. Tales conclusiones y recomendaciones se exponen a continuación:

4.1 Conclusiones

- Después de haber analizado el primer grupo de enunciados - problemas en diversos textos escolares, fue posible evidenciar que es necesario el uso de distintas representaciones para darle solución a cada uno de ellos, además de la coordinación entre éstas, puesto que en algunos casos, la interpretación de la información dada en estos conduce a que la solución se realice bajo la representación simbólica, de manera directa, es decir, la probabilidad que se ha hallar resulta fácilmente calculada a partir de los datos que se necesitan en la expresión, puesto que éstos se tienen; mientras que existen otros enunciados – problema en los que es necesario hacer uso de un registro no discursivo, como la tabla de contingencia o diagrama de árbol que permita determinar otros valores de probabilidades necesarias para el cálculo de la pedida en el enunciado – problema.
- Ahora, el uso que le da escuela a estos registros no discursivos, como la tabla de contingencia en el tema de probabilidad condicional, es muy limitado, puesto que de ella sólo se enseña una relación de probabilidad en sus celdas, mientras que es posible identificar en cada una de estas, tres valores de probabilidad entre dos eventos. Esto, dado que la actividad de conversión, suele ser la menos promovida en las escuelas, por razones de tiempo o de aspectos inherentes al conocimiento de ella.
- A través de los distintos contenidos para la probabilidad condicional, es posible identificar que en relación a dos eventos y sus respectivos complementos, se encuentran 16 opciones de ocurrencia de eventos como probabilidades que se han de hallar en el enunciado – problema: $(P(A),\ P(B),\ P(A/B),\ P(B/A),\ P(A'),\ P(B'),\ P(A'/B),\ P(A \cap B)$, etc.), tal como lo muestran

las tablas de contingencia y diagramas de árbol, los cuales, generalmente, no son utilizados en las escuelas para calcular dichas probabilidades.

- Fue factible reconocer el papel que juegan las marcas lingüísticas en el cálculo de dichas probabilidades, puesto que estas indican de qué tipo de probabilidad trata el enunciado y así, aportar a la no confusión entre probabilidad conjunta y condicional, y por ende coadyuvar a la compresión de los interrogantes del enunciado – problema. Por otro lado, aquellos textos escolares que son una traducción de otro, en preocuparse por presentar al problema en otro idioma, utilizan términos que hacen perder el sentido y significado del enunciado original, puesto que en su redacción no adecuan correctamente al evento y sus características, razón por la cual este trabajo se preocupó por presentar una reformulación cuidadosa de un conjunto de enunciados – problema, de tal forma que se redujeran al mínimo las distintas dificultades y ambigüedades en su comprensión.
- Se realizó un estudio teórico detallado e importante de los elementos que hacen parte de la redacción de los enunciados – problema, como por ejemplo, de las operaciones discursivas, operaciones de segmentación, recontextualización[63], entre otros, los cuales permiten entender los procesos de lectura a los cuales se enfrenta el estudiante. Dado esto, se expuso una propuesta de un conjunto de enunciados – problema modificados que presentan una situación de lectura favorable para el lector, de la cual se asume, por un lado, que su contenido cognitivo es familiar a su entorno, y por otro, que la redacción del enunciado – problema es clara, es decir que los conocimientos propios del estudiante, le sean suficientes para enfrentarse al texto e identificar unidades relacionadas con el contenido cognitivo del mismo, para así proponer su solución, y por otro, que la organización redaccional del texto, según los elementos de ésta, constituyan una relación que aun cuando no sea inmediata, si permite el acceso al contenido cognitivo. Igualmente, estas situaciones de lectura han de gozar de ser no congruentes, puesto que da lugar a la necesidad de un proceso de inducción o deducción como validación de la comprensión.
- Existen múltiples y diferentes formas de presentación para un mismo enunciado – problema de probabilidad condicional, en relación con los distintos cognitivos presentes en ellos, o al empleo de marcas lingüísticas para referirse al cálculo de la probabilidad entre distintos

[63]La primera concerniente a la lengua natural, y las dos últimas a la comprensión de un texto.

eventos, como también la enunciación de algunos eventos, en este caso los complementarios, de los que suele presentarse como antónimos o negaciones. En relación con esto último, no siempre es clara la forma en cómo se nombran estos, puesto que en algunos casos estos eventos complementarios no son descritos por sus negaciones o antónimos, sino más bien por una relación que no es tan directa, como por ejemplo, enunciar que el evento complemento a tener un carro, es tener una camioneta.

- Se determinó que la identificación y caracterización de las condiciones ligadas a la redacción, las situaciones de lectura y las propias de la probabilidad condicional para la formulación de enunciados – problema, favorece en gran medida el aprendizaje de la probabilidad condicional puesto que éstas garantizan la superación de aquellas dificultades del ámbito didáctico que ocurrían en el proceso de lectura de dichos enunciados, además en el enunciado – problema, estas condiciones expresan claramente el sentido que tiene cada expresión dentro del enunciado, lo cual conlleva a la fragmentación del texto, de tal manera que sea identificable aquello que se evoca en la representación y promueva una representación en distintos registros que desarrollen procesos de comprensión significativos.
- Este trabajo ha permitido tomar una posición acerca de los elementos que deben tenerse en cuenta para garantizar el aprendizaje de la probabilidad condicional por medio de aquellas condiciones existentes en la formulación de enunciados – problema de probabilidad condicional, las cuales han sido planteadas a través de los distintos elementos suficientes y necesarios expuestos durante todo el trabajo, para atender a la problemática en cuanto el aprendizaje de este objeto matemático, y del cual la aplicación queda como una propuesta para desarrollar posteriormente según las consideraciones teóricas.

4.2 Recomendaciones

- Dado que el producto de este trabajo ha sido una tarea formada por un conjunto de enunciados – problema, reformulados o modificados, según el análisis brindado por distintos marcos conceptuales, ha de permitir, en su implementación, poner en juego ese análisis realizado, bajo el reconocimiento de las condiciones que se han de tener en cuenta para la formulación de un enunciado – problema, como también la sustentación teórica que se ha propuesto como metodología de investigación.
- Según este trabajo, y además al considerar que es una teoría semiótico – cognitiva del aprendizaje de las matemáticas el foco fundamental de este trabajo, es importante recalcar la importancia que tienen los aspectos semióticos incidentes en el aprendizaje de cualquier objeto matemático, dado que el sólo hecho de tener un conocimiento matemático profundo sobre propiedades o conceptos, no implica necesariamente una comprensión y aprendizaje de los enunciados – problema.
- La escuela, en relación con el proceso de enseñanza del pasaje de un registro de representación discursivo a otro no discursivo, debería explotar al máximo las ventajas que esta conversión ofrece para la comprensión de cualquier objeto matemático, puesto que el conocimiento y uso de éstos es lo que permite reconocer las distintas características del objeto, para así no centrarse únicamente en un tipo de representación.

REFERENCIAS

Abreu, G. (2000) El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos. En N. Gorgorio, J., Deulofeu & Bishop A. (Eds.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* (pp. 137 – 148). Barcelona, España: Graó de Irif, S.L.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E., (2010). *Álgebra 2*. Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill.

Batanero, M. C., Cañizares, M. J. & Díaz, J. (1996). *Azar y probabilidad.* Madrid, España: Síntesis.

Beaver, B. Beaver, R. &Mendenhall, W. (2008). *Introducción a la probabilidad y estadística* (12a Ed.). México D.F., México: Cengage Learning.

Cerda, H. (2002). *Los elementos de la Investigación.* Bogotá, Colombia: Editorial El búho Ltda.

Conesa, F. y Nubiola, J. (1999). El acto significante: Pragmática. En *Filosofía del lenguaje*, pp. 163-210. Barcelona, España: Editorial Herder S.A.

De la Fuente, I. & Díaz, C. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon*, *20(2),* (*59).* Recuperado el 30 de noviembre de 2010, en http://thales.cica.es/~epsilon/art03.htm.

Díaz, A. (2008). *Estadística y Probabilidad I.* Bogotá: Santillana.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* (M. Vega. Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. Vega. Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1995).

Espinel, M. C. (2007). *Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores*. Recuperado el 30 de noviembre de 2010, del sitio Web de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2696959

Freund, J.E. & Simon, G.A. (2005). *Estadística Elemental.* (8va Ed.). México D.F., México: Pearson Educación.

Goetz, J. P & LeCompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid, España: Ediciones Morata, S.A.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares*. *Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2004). *Pensamiento estadístico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Documento N. 3. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Mohd, K. B. (2008). Case Study: A Strategic Research Methodology. *American Journal of Applied Sciences, 5, (11),* 1602-1604. Recuperado el 06 de marzo de 2011, de la base de datos Springerlink.

Moreno, A. J. (2004). *Ideología y Educación Matemática.* Barcelona, España: Octaedro.

Pontón, T. (2012) *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia

Rico, L. (s.f.). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, España: Síntesis S.A.

Romero, J (2008). Probabilidad condicional e independencia. *Estadística y probabilidad II* (95 - 116). Bogotá, Colombia: Santillana.

Taylor S. J & Bogdan R. (1987).*Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona, España: Paidós.