

Un estudio acerca del desarrollo histórico-epistemológico del concepto de "retículo" originado en la teoría del orden

Luis Eduardo Torres Tovar

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Cali, Colombia

Septiembre de 2026



Un estudio acerca del desarrollo histórico-Epistemológico del concepto "retículo" originado en la teoría del Orden

Luis Eduardo Torres Tovar

Director de trabajo de grado

Sergio Iván Valencia

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Cali, Colombia

Septiembre de 2026

Agradecimientos

En primer lugar me agradezco a mí, por llevar a buen puerto este trabajo de grado y por lograr culminar finalmente la Licenciatura en Matemáticas, a pesar de los innumerables inconvenientes como de todo el tiempo y esfuerzo que tomó conquistar ambas metas, también agradezco a mi familia y amigos, a mi madre Luz, mi hermano Kevin y mi hermana Sofia, por su inagotable paciencia para conmigo, y por ser el soporte emocional necesario para llevar a cabo esta empresa. Por otro lado, académicamente, agradezco profundamente al profesor Sergio Iván Valencia por su cuidadosa tutela, y por compartir su conocimiento matemático, histórico y general conmigo, como director de trabajo de grado, pero también como profesor de la línea de historia de las matemáticas, conocimiento que resultó imprescindible para lograr llevar a cabo la correcta realización de una investigación como la que se presenta a continuación. Finalmente, deseo agradecer a la Universidad del Valle, a la Facultad de Educación y Pedagogía, a la Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas y a los profesores de la Licenciatura en Matemáticas que tuvieron impacto en mi formación, pero con especial aprecio a los profesores de la línea de Historia y Filosofía de las Matemáticas, como la profesora Maribel Anacona y el profesor Guillermo Ortiz.

Resumen

En este trabajo de grado se presenta una visión histórico-epistemológica del surgimiento del objeto conocido como retículo en el álgebra moderna, a través de la construcción de una progresión conceptual que recoge de manera general las principales notaciones, elementos de interés, nociones y conceptos clave correspondientes a la teoría erigida poco a poco alrededor de este objeto. Todo lo cual se reseña a lo largo del periodo de las matemáticas modernas, entre 1850 y 1950, durante el cual se originan progresivamente las teorías y conceptos que fundamentan la teoría de los retículos. Por lo cual en esta investigación se propone una visión general de estos objetos, sustentada en un ejercicio de contrastación entre los principales aportes y su recepción en el contexto actual. Donde los aportes surgen como avances logrados a partir de diferentes procesos especializados en la aparición de innovaciones, según la contribución de los autores reconocidos como agentes directos en la construcción de estas temáticas. Cuyas contribuciones se inscriben en el desarrollo de teorías como la lógico/algebraica, del orden, y del álgebra abstracta, campos en los cuales se gestan las condiciones necesarias para el surgimiento, consolidación y formalización de los retículos tal como se conocen actualmente. Terminando con una breve mención acerca de la importancia de la teoría de retículos, como una estructura que moviliza potencialidades fundamentales para el ejercicio de las prácticas matemáticas, influyendo directa y positivamente en la consecución de herramientas educativas valiosas que faciliten los procesos de enseñanza/aprendizaje del ámbito de la educación matemática.

Palabras clave: retículo, teoría del orden, álgebra moderna, matemáticas, histórico-epistemológico.

Abstract

This degree investigation presents a historical-epistemological overview of the emergence of the object known as a lattice in modern algebra, through the construction of a conceptual progression that generally gathers the main notations, elements of interest, notions, and key concepts corresponding to the theory built step by step around this object. All of this is reviewed throughout the period of modern mathematics, between 1850 and 1950, during which the theories and concepts that progressively ground lattice theory originated. Therefore, this research proposes a general overview of these objects, supported by a contrasting analysis between the main contributions and their reception in the current context. Here, these contributions emerge as advancements achieved through different specialized processes in the appearance of innovations, according to the input authors recognized as direct agents in the constructions of these subject matters. Their contributions are framed within the development of theories such as logical/algebraic, order, and abstract algebra, fields in which the necessary conditions were developed for the emergence, consolidation, and formalization of lattices as they are known today. It concludes with a brief mention of the importance of lattice theory as a structure that mobilizes fundamental potentials for the exercise of mathematical practices, directly and positively influencing the achievement of valuable educational tools that facilitate teaching/learning processes in the field of mathematical education.

Key words: lattice, theory of order, modern algebra, mathematics, historical-epistemological.

Tabla de Contenido

Introducción..... 9

1.1. Generalidades..... 11

1.2. Objetivos..... 17

1.2.1. Objetivo general..... 17

1.2.2 Objetivos específicos..... 17

Capítulo I: Aparición de las condiciones de necesidad para el surgimiento del concepto de retículo..... 19

2.1. Perspectiva matemática..... 19

2.2. Indicadores que orientan la determinación de las condiciones de necesidad que derivan en el orden y en la noción de retículo..... 25

2.3. Autores determinantes en la aparición de las condiciones de necesidad que dan paso a la introducción de nociones de orden..... 29

2.3.1. Augustus De Morgan: el gen del cambio de las concepciones semánticas y notacionales de la lógica premoderna y el origen de las leyes duales a través de las nociones primigenias de unión e intersección..... 30

2.3.2. Boole: el enraizamiento del cambio en las concepciones simbólicas, sintácticas y semánticas de las propiedades de la lógica como propiedades algebraicas..... 41

Capítulo II: Consolidación de las condiciones de necesidad para el surgimiento del concepto de retículo..... 53

3.1. Autores determinantes, en la consolidación de los desarrollos originados con De Morgan y Boole..... 53

3.1.1. Jevons, MacColl, y R. Grassmann..... 55

3.1.2. Peirce: la génesis de la consolidación de las condiciones de necesidad para la aparición de la teoría del orden..... 61

3.1.3. Schröder: el sistematizador primario de la lógica algebraica para la consolidación de las condiciones de necesidad para el paso a la teoría del orden..... 68

Capítulo III: Dedekind, puente entre la consolidación y la comprensión moderna más avanzada de la teoría del orden y los retículos..... 81

4.1. Emergencia de los retículos en la teoría del orden de Dedekind a través de la teoría de números y de la teoría algebraica de números..... 81

4.1.2. Teoría de módulos: manifestación de la dualidad de los objetos de la teoría de números dando paso a los retículos en Dedekind..... 83

4.1.3. Teoría de los ideales: otro camino hacia el dualgruppen..... 93

4.1.4. Finalmente, la concreción del dualgruppen..... 98

Capítulo IV: El segundo respiro de los retículos retratado a partir de dos de sus máximos impulsores Ore y Birkhoff 103

5.1. Autores determinantes, para el redescubrimiento estructural de la teoría formal de retículos. 104

5.1.1. Menger, Bennett, Klein, Noether 104

5.1.2. Øystein Ore: el principal divulgador de la estructura algebraica de los retículos 108

5.1.3. Garret Birkhoff: el consolidador definitivo de la teoría estructural algebraica de la que parte toda la teoría contemporánea de los retículos..... 115

6. Conclusiones 127

7. Referencias..... 131

Índice de figuras

Figura 1: Diagrama de Hasse del retículo de los subgrupos de Z30.....11

Figura 2: Proposiciones contrarias de De Morgan establecidas en Formal Logic. .. 35

Figura 3: Proposiciones contradictorias. 35

Figura 4: Identidades de los contranominales o Proposiciones contrarias de De Morgan establecidas en Formal Logic. 36

Figura 5: Proposiciones duales de De Morgan, que intercambian conjunciones por disyunciones a través de la afirmación y negación, de términos super y subafirmatios, establecidas en Formal Logic. 37

Figura 6: Esquema de las contribuciones de Boole, con respecto a la relación entre las operaciones de su sistema versus la actualidad matemática. 49

Figura 7: Formas canónicas para la expresión de proposiciones de Boole versus la actualidad matemática. 50

Figura 8: Esquema comparativo de la notación para el universo en Boole vs la notación grassmanniana. 60

Figura 9: Paralelo entre los principios del sistema schröderiano y las propiedades necesarias para definir una relación de orden o de equivalencia. 72

Figura 10: Surgimiento de los elementos duales mínimo y máximo en el sistema schröderiano. 76

Figura 11: Introducción de las operaciones propias del sistema parcialmente ordenado de Schröder. 77

Figura 12: Progresión conceptual de los elementos de la teoría de Dedekind para el surgimiento de los retículos como estructura algebraica. 85

Figura 13: Representación de un fragmento de 9×4 de la tabla de 28×28 denominada Teoría de tres Módulos (Theorie der drei Moduln), acerca de las posibles combinaciones de MCD's y mcm's generadas por tres módulos arbitrarios de Dedekind. 89

Figura 14: Retículos y representaciones diagramáticas primigenias de la teoría de Dedekind adelantándose a los diagramas de Hasse. 89

Figura 15: Contrastación de las estructuras algebraicas primigenias en Dedekind

versus las estructuras algebraicas propiamente dichas del álgebra abstracta avanzada. 97

Figura 16: Comprobación de que las operaciones del sistema de Dedekind establecen un sistema ordenado. 99

Figura 17: Propiedades que cumplían las estructuras de Ore. 113

Figura 18: Listado de publicaciones de Birkhoff por medio de las cuales se erige la teoría de los retículos presentada en este apartado. 117

Figura 19: Notación final de Birkhoff (1948) versus notación actual de los retículos. 122

Introducción

Existe una tendencia generalizada, tanto en los textos de teoría de conjuntos, de álgebra abstracta con sus estructuras algebraicas o de matemáticas modernas en general, como en la mayoría de textos matemáticos que abordan tópicos relacionados a estos temas, de presentar escasamente el componente histórico del origen de la teoría del orden y los retículos. Motivo por el cual, precisamente dicho componente histórico será el atributo central de los retículos en torno del cual gravitará el desarrollo de este trabajo de grado.

Ya que incluso en textos que tratan específicamente las relaciones de orden, los conjuntos parcialmente ordenados también denominados *copos*, las *cadenas*, las *anticadenas,* entre otros conceptos especiales de la teoría del orden, hasta llegar a los retículos definidos por un lado como estructuras ordenadas y también como estructuras algebraicas, la pobreza del apartado histórico que sustenta el origen de estos objetos es palpable.

Es por esto qué, haciendo énfasis en la importancia de reconocer con mayor profundidad los sistemas ordenados y los retículos tanto en las matemáticas como disciplina propia de estudio, como en las ciencias en general, se destacan algunas de sus aplicaciones esenciales en las ciencias de la computación, el desarrollo de la inteligencia artificial, algunas ramas de las ciencias sociales tal como se exponen Vijay (2015) o en Davey & Priestley (2002). Pero más importante aún, y es una discusión que pretende atizar este estudio, estos objetos abstractos también pueden resultar como facilitadores para diversos campos de la Educación Matemática.

Por lo que, apelando a una justificación de carácter educativo, tal como se extrae en líneas generales de los argumentos de esta índole adaptados por Moreno (2022), desde una perspectiva epistemológica, conocer la historia del origen de los objetos matemáticos, aun cuando estos sean de naturaleza abstracta, resulta importante como parte de un conocimiento que aporte un panorama amplio de las matemáticas, que a su vez permita fortalecer los dominios del conocimiento matemático especializado establecidos en el modelo MTSK.[1]

Sin embargo, la mayoría de las fuentes aplicadas, formales o históricas acerca de estas temáticas, eluden o no presentan un estudio completo que contemple

[1] Mathematics Teacher's Specialised (Specialized), knowledge.

diferentes perspectivas e interpretaciones de la historia del surgimiento de los retículos en sí mismos, que vaya hasta finales de la modernidad matemática, pues en este periodo se desarrolla la visión actual que se tiene de estos objetos. Es decir, no se encuentra en la literatura especializada de los retículos un trabajo en el que se integren diferentes visiones del origen de estos, más específicamente desde su concepción como conjuntos ordenados hasta llegar a la formalización de todas las propiedades necesarias para su definición como estructuras algebraicas y que además brinde un panorama matemático que ahonde en cada una de las principales contribuciones para su consecución. Lo que se evidencia y se sustenta principalmente desde la experiencia propia de un estudiante de pregrado de licenciatura en matemáticas intentando responder preguntas cruciales acerca del origen de los retículos en el orden

Esto último, principalmente a razón de que el surgimiento de los retículos dentro de la teoría del orden está sustentado en los avances de distintos autores relevantes que se suelen estudiar casi siempre por sí solos, es decir, por separado. Como los protagonistas de sus propios sistemas o teorías en general, ya que son autores que abarcan diferentes disciplinas dentro de las matemáticas, por lo que difícilmente se orientan exclusivamente a los retículos y el orden, como se requiere en esta ocasión.

Razón por la cual, en el presente trabajo de grado se han integrado diversas aproximaciones propias del análisis documental, que resultan importantes para la recopilación y análisis de información en conjunción con un enfoque hermenéutico ajustado a la historia de las matemáticas, los cuales permiten realizar un estudio que recoja lo más destacado de los tratados, publicaciones e innovaciones matemáticas realizadas en torno de los retículos según sus contribuyentes más importantes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en el primer capítulo se analiza la emergencia de las condiciones de necesidad que dan paso a las nociones primigenias de orden en Boole en forma de inclusiones, las cuales aparecen como propiedades surgidas de procesos innovativos matemáticos luego de la presentación de un componente matemático sustentatorio al inicio del capítulo; en el segundo capítulo, se analiza la consolidación de las condiciones de necesidad y se da paso a las primeras concepciones de orden propiamente definido del cual se deriva la primera aparición de una estructura ordenada reticular; en el tercer capítulo, a través de una

visión más formal, se alcanzan las primeras nociones estructurales y la primera versión oficial de lo que se considera actualmente como un retículo; en el cuarto capítulo se analiza el renacer de la teoría reticular heredada de los progresos consignados en los capítulos anteriores y toman forma las estructuras algebraicas donde se materializa la teoría de los retículos tal como se conoce en la actualidad. Finalizando con las conclusiones pertinentes.

1.1. Generalidades

Contextualizando un poco el uso de estos retículos, se presenta un ejemplo propio de las matemáticas modernas, uno de tantísimos tan solo en el tema de teoría de grupos perteneciente al álgebra abstracta que a su vez pertenece al álgebra moderna que es abordada como asignatura en las carreras orientadas hacia las matemáticas. Lo que hace a esta temática necesaria y pertinente de ser tratada a profundidad en un estudio para este tipo de carreras. En este ejemplo se utilizan los retículos y sus propiedades, para la comprobación diagramática o esquemática de los subgrupos de un grupo, evitando así la realización de cómputos extensos y facilitando dicha comprobación en la denominada teoría de grupos. Esto se representa mediante el diagrama de Hasse de los subgrupos de Z_{30}.

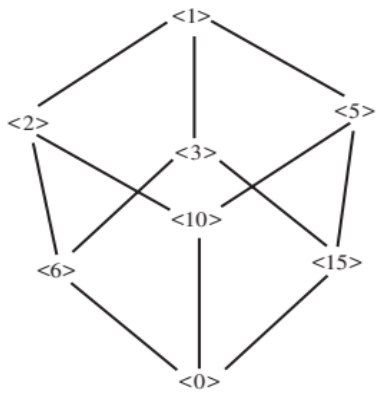


Figura 1: *Diagrama de Hasse del retículo de los subgrupos de Z_{30}. (Tomado de Gallian 2017).*

Ahora bien, se destacan entonces algunos aspectos generales, en los que a través de una revisión documental y algunas de las aproximaciones interpretativas propias de la teoría metodológica extraída de Camargo (2021), de la mano de un enfoque de naturaleza hermenéutica como eje central adaptado de Quintana & Hermida (2019), y con el propio marco histórico global de la historia de las matemáticas modernas, se analiza e interpreta información recopilada y

categorizada, relativa a la teoría de los retículos. De esta manera, los resultados surgen de establecer comparaciones entre las nociones originarias de estos conceptos, versus las principales interpretaciones que emergen progresivamente a lo largo del periodo moderno de las matemáticas, tal como este periodo de creación matemática es contemplado por Zalamea (2010).[2]

Por otro lado, al caracterizar las fuentes necesarias para llevar a cabo este tipo de análisis, se precisa lo siguiente. En primer lugar las fuentes aplicadas representadas con Grätzer (1978), Davey & Priestley (2002) y Vijay (2015), enfocadas tanto en lo formal como en lo aplicativo (Gratzer desde una visión más formal), Gemepeler (2016), Gélvez (2007) y Arias (2024), como parte del contexto académico formal colombiano en abordar estas temáticas, con enfoques de matemáticas avanzadas, tanto modernas como contemporáneas (principalmente de teoría de categorías, teoría de ideales o de pre-topologías, respectivamente). Además de Hernández (2011) e Ivorra (2024) desde un enfoque tanto formal como especializado pero contemplado en general desde la introducción a la teoría de conjuntos, y por otra parte Burris & Sankappanavar (2012) y Gallian (2017) fuentes del álgebra moderna y abstracta en general.

Reiterando que, en la mayoría de estas fuentes, el apartado histórico de los retículos, si es que se aborda, se aborda tangencialmente o se enfoca en una sola de las perspectivas mencionadas. Todo esto a razón de que la teoría del orden y de los retículos son temáticas transversales a casi todas las matemáticas, por lo que en este tipo de presentaciones superficiales quedan eminentes vacíos en la comprensión de la cimentación y evolución estructural de todos los conceptos que competen esta investigación. Sustentando esto principalmente, en la insatisfacción generada al intentar responder preguntas determinantes del tema, como ¿cuál es la progresión histórico-conceptual de las notaciones de los retículos?, ¿cómo surgen los diagramas de Hasse y por qué toman ese nombre?, ¿quién y cómo establece la equivalencia entre los retículos interpretados desde el orden e interpretados desde el álgebra?, con las herramientas académicas en manos de un estudiante de pregrado.

[2] Matemáticas modernas (mediados del siglo XIX–mediados del siglo XX): abocadas a caracterizar la naturaleza de los distintos tipos de estructuras posibles (Galois, Dedekind, Rusell, Riemann, Hilbert, Von Neumann, Garret Birkhoff); matemáticas contemporáneas (mediados del siglo XX–hoy): abocadas a comparar y establecer relaciones entre los distintos tipos de estructuras ya trabajadas durante la modernidad, de acuerdo a diferentes teorías novedosas, como la de modelos, categorías, representaciones, etc (Grothendieck, Serre, Shelah).

Seguidamente, las principales fuentes históricas de segunda mano se precisan como sigue. Schlimm (2011) por ejemplo, se enfoca en varios de los protagonistas más destacables de la emergencia de la teoría reticular, pero no ahonda en otras aristas determinantes para el desarrollo de esta temática, aristas como las influencias de las corrientes británica del álgebra abstracta, o la corriente algebraica alemana en conjunto, o la de los matemáticos norteamericanos, lo cual se sintetiza brevemente al inicio del capítulo II, del presente escrito. Así mismo Haffner (2018, 2024), se enfoca principalmente en la ruta de Dedekind para describir el surgimiento estructural de los retículos, pero deja por completo de lado otros caminos importantes que se deben reseñar en aras del establecimiento una visión más amplia del surgimiento de los retículos. Así mismo, se contemplan las contribuciones históricas e investigativas de autores como Bernays (1975), Grattan-Guinness (2000), Burris (2000, 2024), Gastaldi (2024), y el mismo Schlimm (2024).

Acerca de los referentes teóricos para esta investigación, se consideran como fuentes primarias las publicaciones más representativas del periodo de las matemáticas modernas, en las que se reconoce que se originaron los retículos, gracias a las fuentes secundarias, es decir, publicaciones de carácter lógico/algebraico en las que se origina el orden, y las nociones estructurales. En particular, de estas primeras fuentes se destacan los trabajos de De Morgan como *Lógica Formal (1847) (Formal Logic),* o las famosas *Leyes del Pensamiento* de Boole (1846) (*Laws of Thought*), o algunas de las publicaciones de Peirce, hasta llegar a Schröder, con sus *Lecturas Sobre el Álgebra de la Lógica (1890-91-92)* (*Vorlesungen über die Algebra der Logik*). Iniciando la etapa de estructuración algebraica en la que sobresalen las publicaciones de Dedekind, especialmente algunos de sus *Suplementos*[3] *a las Lecciones de Dirichlet Sobre la Teoría de Números* (1871-79-94) (*Supplement: Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie*), sus publicaciones acerca de la teoría de módulos *(1895-97-00)* (*Theorie der moduln*) además de sus *Trabajos Matemáticos recopilados (1930-31-32)* (*Gesammelte mathematische Werke*), recopilados por Ore, Noether y Fricke (entre otros trabajos importantes reportados directamente en su respectivos apartados y en las referencias). Trabajos en los cuales se solidifican, las nociones e ideas originarias sobre conjuntos ordenados, retículos primigenios surgidos del orden, entre otros.

[3] Los más relevantes para este análisis, ya que son 11 suplementos o apéndices en total a la teoría de Dirichlet.

Similarmente, se consideran también como fuentes primarias, pero en la parte final y definitiva tanto del periodo moderno como de la formación del concepto de retículo, los trabajos publicados a partir de la década de los años 20's hasta la década de los 50's del siglo XX. Etapa reconocida como la etapa de renacimiento y de redescubrimiento de la teoría estructural de las matemáticas y de los retículos, por autores como Grätzer y Rota, a razón de la gran cantidad de autores con publicaciones en este sector matemático, entre los que se destacan principalmente las contribuciones de Ore (1930-1935) y Birkhoff (1933-1948). Durante la cual se publican los trabajos con los que la teoría de los retículos toma definitivamente su forma contemporánea, lo que en conjunto, de la mano de todo lo precisado hasta el momento, permite una visión articulada y multidimensional de la evolución general de la teoría reticular.

Terminando la discusión acerca de las fuentes primarias e históricas y lo poco satisfactorias con respecto a la difusión histórica, con la presentación de la siguiente argumentación extraída de Rota:

> *Nunca en la historia de las matemáticas ha existido una teoría matemática que haya sido objeto de tales vociferadas vituperaciones como la teoría de los retículos. Dedekind, Jónsson, Kurosh, Malcev, Ore, von Neumann, Tarski, más prominentemente Garrett Birkhoff, han contribuido a una nueva visión de las matemáticas, una visión que ha sido condenada por una conjunción de malentendidos, resentimientos, y crudos prejuicios. La hostilidad hacia la teoría de retículos comenzó cuando Dedekind publicó sus dos artículos fundamentales que le dieron vida a esta teoría más de 100 años atrás. Kronecker en una de sus cartas acusó a Dedekind de "perder su mente o su cordura en abstracciones" o algo por el estilo* (Rota 1997, p.1).[4]

Cita con la que toma sentido y se hace entendible la notoria escasez de trabajos integrales en este ámbito, es decir, trabajos que agrupen y satisfagan diversos interrogantes de carácter conceptual, simbólico y epistemológico del orden y de los retículos contemplados, en los que se conjuguen y se consignen en un mismo estudio las principales visiones de los especialistas en la materia, orientados a la triangulación de la materialización del concepto en cuestión. Pues si bien existe

[4] Traducción libre.

alguna literatura especializada, en la que presentan las contribuciones específicas de autores teóricos en la construcción de los retículos, como Schröder, Dedekind, Birkhoff, aun así, no se encuentra en el estado del arte de esta temática una recopilación cronológica claramente establecida en la que se contrasten diversas investigaciones históricas entre sí. O dicho de otra forma, no se encuentran estudios lo suficientemente satisfactorios para resolver interrogantes del tipo de los que motivaron la realización de este estudio en un primer lugar, en los que se tracen explícitamente las principales progresiones conceptuales y notacionales que dieron paso a las interpretaciones más importantes del objeto en cuestión.[5]

Ahora bien, en suma a las justificaciones de corte tanto aplicativo, formal o histórico de los retículos, como también a las precisiones metodológicas y teóricas para abordar estos objetos, se considera una justificación de carácter educativo de las matemáticas que se engloba el componente didáctico y de formación profesoral, respondiendo a una exigencia propia del perfil de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, para la realización de investigaciones como la presentada aquí. En la que se apela a la importancia de reconocer el origen de los objetos matemáticos como medio para una comprensión más robusta de estos mismos, como parte del fortalecimiento de los dominios del conocimiento matemático especializado de un profesor (MTSK). Validando así que comprender de mejor manera de teoría del orden, de estructuras abstractas, teoría lógico/algebraica y de retículos, entre otras, permite acceder a panoramas más amplios de las matemáticas que los panoramas usuales en los que estas teorías no son contempladas o abordadas con mayor profundidad.

En consecuencia con lo anterior, con apoyo en Moreno (2022) y sus discernimientos en torno a las prácticas matemáticas,[6] inspirado a su vez en importantes autores del campo educativo matemático y filosófico de las matemáticas, como Carter (2019), Mancosu (2016), Ferreirós (2016), Kitcher (1985). En este trabajo se sostiene que, poseer un panorama amplio de las matemáticas (entre más amplio y completo mejor), posibilita comprender de mejor manera, e incluso profundamente,

---

[5] A modo de ejemplo, el tema de las secciones cónicas las cuales cuentan con diferentes interpretaciones para un mismo objeto. La parábola, que inicialmente se puede ver como una sección transversal paralela a la altura de un cono, que luego se puede describir respectivamente a través de la ecuación general de segundo grado o de las cónicas, de donde emerge la forma normal de la ecuación canónica de una parábola con centro en (h, k): $(x-h)^2=4c(y-k)$; luego como función de una parábola $y=f(x)=x^2$), o como una ecuación vectorial de una parábola $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{F}\|=ed(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L})$, con $e=1$ (excentricidad), d= *distancia,* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{L}$ vectores, propias del álgebra o del cálculo vectorial.

[6] Es decir, como el conjunto de ideas, actividades, métodos y técnicas, que los interesados en matemáticas utilizan para entender, resolver, practicar y construir, teorías matemáticas, ya sea para el ejercicio propio de las matemáticas como materia en sí misma, o para el ejercicio de la enseñanza/aprendizaje, de algún objeto matemático, sustentado en la Educación y la Didáctica de las matemáticas.

conceptos cruciales de las matemáticas básicas que son piedra angular para la Educación Matemática y para los dominios del conocimiento matemático especializado de los profesores, lo que hace parte del modelo MTSK.

Cuya relación más notable radica, en que muchos de los conceptos fundamentales de las matemáticas, están relacionados con teorías que resultan necesarias para el ejercicio de las matemáticas modernas, ya que generalmente los conceptos propios de las matemáticas básicas se originan o se sustentan en teorías modernas o abstractas. Es decir, palabras más palabras menos, teorías como la teoría de números, la teoría de conjuntos, la lógica moderna y los orígenes de estas, dan la sustentación a conceptos como las funciones, los conjuntos, los divisores o múltiplos de un número, entre muchísimos otros tópicos. Teorías de las que por ejemplo los retículos, grupos, anillos, campos, espacios, como casi todas las estructuras algebraicas y matemáticas toman sus elementos.

Finalmente, en la gestación de panoramas matemáticos más amplios, que potencian la calidad de los dominios matemáticos mencionados, es donde reside la importancia de la perspectiva histórico-epistemológica en la que se inscribe el presente trabajo de grado, y en el que además toma validez el enlace conceptual entre los conceptos de las matemáticas básicas y las matemáticas modernas junto con su historia. Esto posibilita, pero por sobre todo facilita aprender y enseñar todo tipo de operaciones y relaciones básicas, relaciones de divisibilidad, relaciones de orden, equivalencias, ecuaciones, y un sin fin de conceptos importantes en ramas afines a la Educación Matemática.[7]

Es así, que después de todo este preámbulo, se puede decir puntualmente que este trabajo busca, reconstruir el desarrollo histórico-epistemológico de los retículos desde sus orígenes en la teoría del orden hasta su consolidación como estructuras algebraicas, a través de una progresión temporal en la que se destaquen los avances y las innovaciones más relevantes en la teoría reticular, identificando y reconociendo a los principales contribuyentes y contextos matemáticos que permitieron esta evolución, principalmente por medio de la contrastación de sus interpretaciones, perspectivas y notaciones utilizadas a lo largo del tiempo, respondiendo entonces de esta manera, a la pregunta:

[7] Ahora bien, el cómo se da este enlace conceptual y cómo este facilita procesos de enseñanza/aprendizaje, resulta tentativo para posteriores conquistas investigativas educativas más profundas.

¿Cómo se da el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de retículo y de la teoría actual de los retículos, originada en la teoría del orden, y quiénes son sus principales contribuyentes?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Construir una descripción sustentada en los principales referentes del álgebra moderna, del desarrollo histórico-epistemológico de la noción de retículo como objeto matemático, considerando su origen en la teoría del orden y destacando su importancia para las matemáticas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Establecer las condiciones de necesidad (o condiciones necesarias), que posibilitaron la aparición y uso de los retículos como objetos de estudio del álgebra moderna.

- Caracterizar las principales representaciones de los retículos, estableciendo relaciones y paralelismos entre las concepciones primigenias y las actuales de estos objetos.

- Describir una cronología del camino histórico-epistemológico del concepto de retículo, considerando su origen desde teorías del orden no suficientemente estructuradas.

Capítulo I:

Aparición de las condiciones de necesidad para el surgimiento del concepto de retículo

A continuación, se presenta una reseña sucinta y sintetizada de la perspectiva matemática actual de la teoría del orden en la cual se originan los retículos de la que parte la investigación, la cual se extrae principalmente de la visión de Hernández (2011) inspirada en la teoría de conjuntos de ZFC.[8] En esta se introducen las principales definiciones, teoremas, y propiedades acerca de estos objetos, las más relevantes hasta los cuales pretendió llegar este trabajo de grado.

2.1. Perspectiva matemática

Quizá el concepto fundamental para entender los orígenes de lo que se indaga acerca de los retículos, es el concepto de orden sobre un conjunto, el cual es esencial en gran parte de las matemáticas. Un orden puede ser definido como una relación con características especiales (recuérdese que una relación R sobre un conjunto A es simplemente un subconjunto de A×A, es decir, $R \subseteq A \times A$.[9] Con esto en mente se presenta la siguiente definición:

Definición 1. Si R es una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva[10] se llama orden parcial en A, y el par (A, R) se le llama conjunto (parcialmente) ordenado o *copo*[11] por su acrónimo en español, que en el contexto de este trabajo se puede denominar como una estructura ordenada. Se conoce que la expresión aRb se le puede leer como: "a es menor o igual que b", "b es mayor o igual que a", "a precede a b" o "b es sucesor de a" respecto al orden R. Generalmente se usan los símbolos ≤, ≼, <<, o $\leq_A$ para indicar específicamente que el orden actúa sobre el conjunto A, todos los cuales son utilizados para denotar órdenes.

Es importante recalcar que un *copo* es una *estructura matemática*, pues no es sólo el mero conjunto A, sino que este conjunto está acompañado o dotado de una

[8] Se precisa en el siguiente apartado.

[9] Lo que garantiza la cerradura en las "estructuras ordenadas".

[10] Una relación R es llamada reflexiva en A, si para todo a ∈ A, aRa. Una relación R en A es antisimétrica si para todo a, b ∈ A, aRb y bRa implica a = b. R es llamada transitiva en A, si para todo a, b, c ∈ A, aRb y bRc implica aRc.

[11] O como también se les conoce a estos objetos, *posets* por su acrónimo en inglés, *partial ordered sets.*

relación R. Es decir, si A = ℕ, es diferente referirse a ℕ como un conjunto por sí solo, que a las estructuras totalmente ordenadas (ℕ, R) o (ℕ, ≤) cualesquiera sean estas.

Esto es análogo a tener un saco con el conjunto de todos los elementos de ℕ, al meter la mano e intentar sacar un elemento del saco se puede sacar un número cualesquiera: 30, 83, 1001, etc.; pero al intentar sacar de nuevo otro elemento, también se puede sacar cualquiera: 9.507.000, etc. y no habría forma de compararlos, no hay orden que así lo permita, de modo que los números 30, 83, 1001 y 9.507.000, son indistintos unos de los otros, no son ni más pequeños ni más grandes entre sí, pues no hay orden. En cambio, si se hace lo mismo en el saco dotado con la estructura ordenada usual, al sacar un elemento *x*, el siguiente elemento en salir del saco, no sería un elemento cualesquiera, sino que estaría determinado por el orden sobre ℕ. Así pues, según el orden usual de los naturales, saldría el elemento $x+1$.[12] Y evidentemente, de esta manera es posible saber y comparar con certeza, que el primer elemento sacado será menor que uno posteriormente sacado, es decir, que 85 es menor que 9.507.000.

Ejemplo 1. Si X es un conjunto, la relación de inclusión de conjuntos es un orden en P(X), es decir (P(X), ⊆) es un copo, pues basta verificar que en P(X),[13] se cumple la reflexividad, la antisimetría y la transitividad de la relación de inclusión "⊆". Para comprobar esto basta recordar que cada conjunto está contenido en sí mismo, es decir, cada conjunto es subconjunto de sí mismo. También que, si se verifica que dos conjuntos son subconjuntos cada uno del otro, respectivamente, entonces dichos conjuntos son el mismo conjunto; finalizando con la transitividad que de la misma manera, haciendo uso de los subconjuntos de P(X) puede ser comprobada.

Por otro lado, si la relación del orden usual ≤ (menor o igual que) es un orden parcial en ℕ, cabe la pregunta sobre qué es entonces la conocida relación < (estrictamente menor que). Pues bien, para responder esto se utiliza lo que es una

---

[12] Se puede definir el orden usual, con la relación de orden definida del siguiente modo, ≤: $a+n=b$. Que se puede comprobar, que cumple con ser, reflexiva, antisimétrica y transitiva. Donde la reflexividad y la transitividad funcionan igual que en las relaciones de equivalencia, pero no la simetría. Es decir, en N con la pareja ordenada (a,b), si $a<b$ significa que b no puede ser menor que a (a saber, $b<a$), es decir, si $(a, b) \in \leq \Rightarrow (b, a) \notin \leq$.

[13] Recordar que los elementos de partes de X, son todos los subconjuntos de X, por eso se puede hablar de contenencia entre dos elementos de partes de X.

relación asimétrica.[14] Es decir, (a, b) y (b, a) no pueden ser ambos elementos de S. Esto permite definir la generalización de la relación <, que es un orden *estricto*:

Definición 2. Una relación S en A es un orden estricto, si es asimétrica y transitiva.

En conformidad con las anteriores definiciones, es posible formular los siguientes resultados:

Teorema 1. a) Si R un orden en A, entonces la relación S definida en A por aSb si y sólo si aRb y $a \neq b$, es un orden estricto en A.

b) Si S es un orden estricto en A, entonces la relación R definida en A por aRb si y sólo si aSb o $a = b$ es un orden en A. Así podemos decir que los órdenes estrictos S corresponden a órdenes R y viceversa.

Ahora bien, en un copo (A, ≤) no siempre ocurre que para cualquier par de elementos $a,b \in$ A se cumpla que, aRb o bRa. Pero cuando sí se cumple esta condición, se dice que a y b son comparables en el orden ≤ (o que son ≤-comparables). Esto queda contemplado en la siguiente definición:

Definición 3. Si $a, b \in$ A y sea ≤ un orden en A. Se dice que a y b son comparables en el orden ≤ o que son ≤-comparables si

o bien $a \leq b$, o bien $b \leq a$.

Por otro lado, se dice que a y b son ≤-incomparables si no son ≤-comparables. Similarmente se define para un orden estricto < las nociones de <-comparables y <-incomparables. Por ejemplo, a y b son <-comparables si $a<b$, $a=b$ o $b<a$. La noción de comparabilidad, permite conducir a las siguientes definiciones:

Definición 4. Un orden ≤ (o <) es llamado lineal o total si cualesquiera dos elementos de A son comparables. El par (A, ≤) es entonces llamado conjunto linealmente o totalmente ordenado.

Definición 5. B es una cadena, sea B ⊆ A, donde A está ordenado por ≤. B es una cadena en (A, ≤) si cualesquiera dos elementos de B son ≤-comparables.[15]

---

[14] Una relación S en A es asimétrica si para todo $a, b \in$A, aSb implica que no ocurre bSa.

[15] Es decir, un orden lineal o total es el ejemplo más básico de una cadena.

Ejemplo 2. El conjunto de todas las potencias de 2, (es decir, A={2^0, 2^1, 2^2,...}) es una cadena en el conjunto de los enteros positivos ordenado por divisibilidad (es decir, cada elemento es divisor de su sucesor, establecido por 2^{n+1}, y por ende de los sucesores de su sucesor, 2^2=4 es divisor de 2^3=8, pero también de 2^{24}. Finalmente, un orden parcial (respectivamente total, como en este ejemplo) induce un orden parcial (respectivamente total, como en este ejemplo) en cualquier subconjunto. Así, una cadena en un conjunto ordenado (A, ≤) es un subconjunto totalmente ordenado en el orden inducido. (Ejemplo tomado de Hernández 2011)

Por otro lado, las siguientes definiciones son fundamentales, pues permitirán conocer qué es un retículo y en qué se diferencia de un copo.

Definición 6. Sea ≤ un orden en A, y si B⊆A,

a) un elemento b∈B es el[16] elemento mínimo de B en el orden ≤, si para todo x∈B, $b \leq x$.

b) b∈B es un elemento minimal de B en el orden ≤, si no existe $x \in$ B tal que $x \leq b$ y $x \neq b$.

c) b∈B es el elemento máximo de B en el orden ≤, si para todo $x \in$ B, $x \leq b$.

d) b∈B es un elemento maximal de B en el orden ≤, si no existe $x \in$ B tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.

Esta diferencia en el empleo de los diferentes artículos (artículos de la gramática, *el*, *la*, etc), es necesaria. En primer lugar, en virtud de la antisimetría, los elementos mínimo y máximo (si existen) son únicos; no sucede así con los minimales y maximales. La razón es que la definición de mínimo y máximo implica que estos elementos son comparables con todo elemento de B, mientras que las definiciones de minimal y maximal no implican que estos elementos (si existen) necesariamente deban ser comparables con cualquier elemento de B. De hecho, cuando un conjunto B tiene dos elementos maximales, estos son incomparables. Esto queda consignado en el siguiente resultado:

Teorema 2. Sea A ordenado por ≤, y si B⊆A;

[16] En esta definición son utilizados *el* y *un* como artículos.

a) Entonces B tiene a lo sumo un elemento mínimo.

b) Si el elemento mínimo de B (si existe) es también minimal.

c) Si B es una cadena, entonces todo elemento minimal de B es también un mínimo.

Análogamente se puede probar esto para los conceptos de máximo y maximal.

Definición 7. Sea ≤ es un orden en A y si B⊆A;

a) entonces un elemento a∈A es una cota inferior de B en el conjunto ordenado (A, ≤), si $a \leq x$ para todo $x \in$ B.

b) a∈A es llamado ínfimo de B, simbolizado como *inf*B, en (A, ≤) (o máxima cota inferior), si es el elemento máximo del conjunto de todas las cotas inferiores de B en (A, ≤).

De modo análogo:

c) a∈A es una cota superior de B en el conjunto ordenado (A, ≤), si $x \leq a$ para todo $x \in$ B.

d) a∈A se le denomina supremo de B, simbolizado como *sup*B, en (A, ≤) (o mínima cota superior), si es el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de B en (A, ≤).

La diferencia entre "a es el mínimo de B" y "a es una cota inferior de B", es que el segundo concepto no requiere que $a \in$ B. Un conjunto puede tener muchas cotas inferiores, pero el conjunto de todas las cotas inferiores de B puede tener a lo sumo un elemento máximo. Así, B puede tener a lo sumo un ínfimo. Similar comparación puede hacerse para máximo, cota superior y supremo. A continuación, se muestran formalmente estas ideas.

Análogamente que ocurre con el máximo y el mínimo, el supremo e ínfimo satisfacen el siguiente teorema:

Teorema 3. Sean (A, ≤) un conjunto ordenado y B ⊆ A,

a) entonces B tiene a lo sumo un ínfimo.

b) Si b es el elemento mínimo de B, entonces b es ínfimo de B.

c) Si $b=inf$B y $b\in$B, entonces b es el elemento mínimo de B.

d) $b \in$ A es el ínfimo de B en (A, ≤) si y sólo si se da

(i) $b \leq x$, para todo $x \in$ B,

(ii) si $b'\leq x$, (con b'∈A) para todo $x\in$B, entonces $b'\leq b$.

El teorema es válido si las palabras "mínimo" e "ínfimo" son reemplazadas por "máximo" y "supremo" y "≤" es reemplazado por "≥" en el teorema anterior.

Ahora bien, en un copo (A, ≤) es de interés considerar parejas de elementos de A, es decir $\{x, y\}$=B⊆A, que cumplan con los literales presentados hasta aquí (definiciones y teoremas). Con esto, ya se tienen las herramientas necesarias para definir lo que es un retículo de la siguiente manera:

Definición 8. Todo copo (A, $\leq_A$) será un retículo (o retícula, o *lattice*, o *treillis*) si satisface las siguientes propiedades;

a) $\forall x, y\in$A, existe $sup\{x, y\}$.

b) $\forall x, y \in$ A, existe $inf\{x, y\}$.

La presente definición de un retículo es de la que parten usualmente los apartados de teoría del orden en los textos contemporáneos de álgebra moderna o de teoría de conjuntos que abordan dicha teoría. Sin embargo, esta definición no se corresponde uno a uno con sus contrapartidas del siglo XIX e inicios del XX. Más aún, el concepto de retículo no está circunscrito únicamente al orden. Es decir, una estructura ordenada (A, $\leq_A$), también puede verse como una estructura algebraica. Por lo que esta perspectiva del concepto de retículo es la visión a partir de la cual se inicia esta investigación conceptual y el recorrido histórico-epistemológico de la noción de retículo

2.2. Indicadores que orientan la determinación de las condiciones de necesidad[17] que derivan en el orden y en la noción de retículo

Al revisar la literatura matemática más especializada acerca de la historia-epistemología del surgimiento de los retículos, sobresalen algunos aspectos fundamentales en la gestación de estos objetos. Por un lado, el trabajo de diversos renombrados autores con conjuntos de diversa naturaleza y su búsqueda de respuestas a muchos interrogantes germinados de su visión innovadora sobre las matemáticas del momento, entre finales de las matemáticas clásicas y la primera mitad del periodo de las matemáticas modernas. Lo que se manifiesta principalmente a través de elaboradas construcciones además de exploraciones abstractas sobre los conjuntos, que en algunos casos requerían cómputos interminables.

En dichas exploraciones, los conjuntos investidos con diversas relaciones u operaciones cumplían o no ciertas propiedades o principios, los cuales dotaban a los conjuntos de una naturaleza que se denominaría actualmente "estructural", los cuales además determinaban el origen de las condiciones de necesidad para que un conjunto fuese ordenado (parcialmente ordenado), o no. Es decir, para que fueran copos, y para que entre esos copos surgieran los retículos, de forma que estas innovaciones, plantaban el germen estructural de las matemáticas, pero también el germen de los retículos.

De esta manera, ese abordaje innovador y vanguardista de los objetos del universo matemático por parte de algunos de los autores más importantes de inicios del periodo moderno como Boole, Schröder o Dedekind, entre otros. Surgía al tratar de generalizar para los conjuntos, muchos de los resultados más relevantes de la aritmética, el álgebra clásica, la lógica clásica, la probabilidad y la teoría de números, en aras de formalidad y simpleza en todas estas ramas de las matemáticas. Por lo que, estos sistemas teóricos aparecen como regularidades en torno al contexto de surgimiento de los retículos; en otras palabras, aparecen como el marco conceptual en el que se llevaban a cabo los desarrollos que permiten entender el origen y la

[17] Sin dejar de mencionar que estas "condiciones de necesidad", son un concepto propio de la lógica clásica demostrativa, las cuales se conocen en esta teoría, simplemente como "condiciones necesarias" para el surgimiento de un concepto matemático, las cuales son presentadas usualmente de la mano de unas "condiciones suficientes". Estas condiciones en conjunto conforman los criterios para que se pueda dar un suceso matemático, en este caso una innovación, particularmente la aparición de las nociones originarias del concepto de retículo y del desarrollo de la teoría del orden primigenia.

emergencia de las condiciones de necesidad para la ardua y paulatina construcción de los retículos.

De esta forma, estas teorías recurrentes en los análisis hacen parte de los procesos que dan paso al establecimiento de las condiciones de necesidad en forma de principios, leyes o propiedades, que en conjunto se erigen en teorías en las que surgen las innovaciones matemáticas o los conceptos nuevos en general. Los cuales van emergiendo de los desarrollos mencionados y sin los cuales no se podría construir o completar un concepto o una teoría. Es decir, en este caso en particular, sin estas propiedades no se podría continuar hasta llegar al surgimiento de los retículos, mucho menos a su concepción final.

Por todo lo anterior, autores como Schlimm (2011) postulan que los sistemas axiomáticos efectivamente pueden servir para generar nuevos objetos que podrían ser de una naturaleza o tipo distinto a los objetos que los originaron en un primer lugar. Pero aun así, estos objetos nuevos heredan algunas propiedades de dichos dominios originadores. Es decir, en pocas palabras los sistemas axiomáticos sirven para innovar o desarrollar nuevos conceptos y nuevas teorías.

Por lo que finalmente, en el caso particular del presente trabajo de grado, la determinación de estos aspectos fundamentales permite extraer las posturas, los avances o desarrollos y las contribuciones de un autor en específico, con respecto a la emergencia de las nociones básicas del orden que permitieron la aparición de los retículos, entre otras características. En otras palabras, lo anterior permite extraer el contexto de aparición de estos retículos, análogamente a como se realizaría esto por medio de un análisis documental, a través de la elección de unas categorías de análisis para su presentación en una matriz de análisis.

A continuación, se especifican los principales *procesos* mediante los cuales ciertas propiedades expresadas a través de la axiomática abstracta (es decir, justificadas sobre axiomas, teoremas, etc, definidos sobre conjuntos o dominios entre otros), pueden contribuir a la creación de nuevas nociones u objetos matemáticos. Y cómo por medio de esta taxonomía de *procesos* de Schlimm es posible rastrear el concepto de retículo como un elemento común a diferentes marcos teóricos matemáticos.

El primer proceso que menciona Schlimm es el *proceso por analogía* inspirado por Aristóteles y su *Analytica posteriora*. Este consiste en lo siguiente:

> *Tómense algunos dominios D_1, D_2, D_3, etc. que podrían ser considerados de alguna forma análogos entre ellos, y se determina el sistema axiomático correspondiente S_1, S_2, S_3, etc; luego, compárense dichos sistemas y se halla un (sub-)sistema S_0 que los sistemas tengan en común y se introduce una nueva noción D_0 como el dominio del ente para S_0. Aristóteles se dio cuenta que un sistema científico S_0 puede ser usado de esta forma para sugerir nociones nuevas, objetos o dominios* (Schlimm 2011, p. 2).[18]

En este proceso se establece que se pueden hallar o realizar innovaciones con base en distintos sistemas teóricos dados, principalmente a través del reconocimiento de propiedades en común entre estas teorías expresadas mediante sistemas axiomáticos. Propiedades a partir de las cuales, se puede construir una teoría nueva que agrupe dichas propiedades en común, determinando así un dominio distinto a los dominios en los que se cumplían las propiedades originales por separado. Generando así una nueva noción o un nuevo objeto matemático.

El segundo proceso mencionado por Schlimm, es el denominado *proceso por abstracción* de las propiedades originalmente dadas. Este consiste en lo siguiente:

> *Este conocimiento no presupone ni la noción de un sistema formal, o la posibilidad de múltiples interpretaciones (aunque luego podría darse la posibilidad de que esta sea nuestra forma de expresarlo). Ya que el dominio D_0, es más abstracto (en el sentido de tener solamente un subconjunto de propiedades), que los dominios originales D_1, D_2, D_3,... etc. La configuración natural para la introducción de tales novedosas nociones son las matemáticas, donde los objetos son inherentemente abstractos. De hecho, la noción matemática de magnitud fue introducida luego de expresar cuáles de los dominios discutidos por Aristóteles tenían elementos en común. Con una concepción de los sistemas formales a la mano, con los cuales me refiero a sistemas con nociones primitivas que pueden ser interpretadas de diferentes maneras, y que emergieron en el siglo XIX, siendo así, que una segunda forma de introducir nuevos dominios (relacionada con la anterior), se torna posible: sólo algunos aspectos de un dominio D son axiomatizados por un sistema S, y un*

[18] A menos que se establezca lo contrario, todas las traducciones son realizadas e interpretadas por el autor de este estudio, haciendo uso de la Traducción libre.

> *nuevo dominio D_0, es introducido, el cual está completamente determinado por S .*[19] *Como resultado, este nuevo dominio es más abstracto que el mismo D* (Schlimm 2011, p. 2).[20]

Este proceso describe la innovación o el descubrimiento de nuevas nociones y dominios, a través del reconocimiento de cuáles propiedades específicas de otros dominios, diferentes a un dominio en particular dado (o de partida), también son cumplidas en el dominio de partida. Siendo estas nuevas nociones y dominios encontrados o descubiertos en los otros dominios, gracias a que las propiedades que los caracterizan en esos otros dominios son básicamente análogas a las propiedades de base.

El último proceso, es el denominado *proceso por modelación* o modificación conceptual sobre la axiomática de los dominios originales. Este es caracterizado del siguiente modo:

> *Un sistema axiomático S no necesita originarse de un sistema dado D, pero sí puede ser obtenido a través de la modificación de otro sistema de axiomas. Por ejemplo, el primer sistema axiomático para geometría no euclidiana fue obtenida de esta forma. Surgió, al tener de antemano un sistema de geometría euclidiana. Solo después de que su consistencia fue establecida, al interpretar las nociones primitivas del sistema euclidiano original, un nuevo conjunto de objetos, definidos como elementos, puntos, o líneas, fueron introducidos. Esta es la tercera forma en la cual se pueden introducir nuevos dominios* (Schlimm 2011, p. 2).[21]

Este último proceso para la generación de una nueva noción establece que a partir de un sistema axiomático dado que ha sido modificado (al que se le han añadido o quitado axiomas importantes), se puede llegar a otro sistema cuyo resultado es el punto de partida de un nuevo dominio, quedando claro con el ejemplo de la última cita acerca de la geometría no euclidiana, y como se originó de modificaciones sobre la geometría euclidiana.

Concretando así todo lo anteriormente mencionado, al ubicar estas perspectivas de procesos de innovación en los trabajos y desarrollos realizados por

---

[19] El énfasis es mío.
[20] Traducción libre.
[21] Traducción libre.

los matemáticos referentes, en algunas de las principales teorías cúspides del conocimiento matemático de aquel período. Adjudicando a quién corresponda, el trabajo y los desarrollos en distintas teorías y sistemas que permitan sentar las bases de las condiciones de necesidad para el surgimiento de los retículos. Lo cual se puede realizar tal como lo sintetiza Schlimm con base en el trabajo de Mehrtens (1979),[22] ya que, según este último existen tres concepciones teóricas primordiales, de las que surgen los retículos, *Los fundamentos de la teoría de conjuntos* (*The set theory grounding*), *El álgebra moderna* (*Modern algebra*), y *El método axiomático (The axiomatic method*).

2.3. Autores determinantes en la aparición de las condiciones de necesidad que dan paso a la introducción de nociones de orden

De acuerdo con Gastaldi (2024), el trabajo de Augustus De Morgan[23] comienza a desvelar la naturaleza dual de los conceptos de la matemática premoderna muy ligados al uso del lenguaje natural. Esto a través del desarrollo de un sistema[24] algebraico y lógico más robusto que los sistemas clásicos (como por ejemplo el sistema de los silogismos medievales), al que además se le atribuye ser uno de los sistemas inauguradores de lo que se conoce actualmente como *lógica proposicional*. Es así que, en este sistema construido por De Morgan se sientan las bases del uso de conceptos lógicos e inferenciales entre los que sobresale la formalización del uso de las leyes duales atribuidas a De Morgan, pero ya conocidas por Ockham[25] en el siglo XIV, e incluso por los filósofos estoicos de la antigua Grecia, según Bonevac y Dever (2012), pág.181-197, en su historia de los conectores, publicada en el vol. 11 del *Handbook of Logic*.[26] Las cuales dan paso a las leyes de absorción fundamentales en la posterior definición de los retículos. En cuyo sistema, además se puede rastrear la semilla de algunas nociones importantes para la teoría de orden y de conjuntos, permitiendo así dar origen a una notación algebraica para el uso de la lógica con que se venía trabajando desde las matemáticas clásicas.

Y es precisamente en dar inicio a cambios en las concepciones semánticas y notacionales de inicios de las matemáticas del siglo XIX, que el sistema de De Morgan

---

[22] Mehrtens, H. (1979). *Die Entstehung der Verbandstheorie*. Gerstenber Verlag.

[23] Augustus De Morgan (1806-1871), matemático lógico de origen hindú, pero con formación británica, famoso por las leyes de la lógica que llevan su nombre y por sus aportaciones a la lógica algebraica.

[24] Se hace referencia a un sistema axiomático, de propiedades, teoremas, corolarios etc.

[25] Guillermo de Ockham (1287-1347), filósofo y lógico británico del periodo medieval.

[26] Información extraída de Gastaldi (2024), y corroborada en su fuente.

cobra relevancia. Pues muchos de sus desarrollos son utilizados en las producciones de los principales autores a los que se les atribuye la formalización de algunos de los conceptos relacionados con el origen de la teoría del orden, y en los cuales se originan las condiciones de necesidad lógico/algebraicas para que un retículo se pueda definir algebraicamente. Lo cual es, en otras palabras, el germen de la teoría de los retículos.

De igual manera, el trabajo de Boole[27] adquiere protagonismo en este estudio, debido a que en sus tratados se deja de lado la interpretación de las relaciones de carácter conjuntivo o disyuntivo entre las proposiciones de la lógica, como objetos atados únicamente al lenguaje natural, regidos por la semántica de dicho lenguaje. Enfocándose así en la formalización de su sistema axiomático, construyendo un sistema mucho más formal que el de De Morgan a partir de un incipiente lenguaje lógico, gobernado por las leyes del álgebra o como él llamó a este sistema en la introducción de su *Análisis Matemático de la Lógica*, "el Cálculo de la Lógica". Precisando de este modo algunas concepciones protoconjuntistas, como algebraicas y operacionales, donde la semántica del lenguaje natural es totalmente reemplazada por las relaciones y las definiciones de ciertas asignaciones, y operaciones con carácter aditivo y multiplicativo sobre el conjunto de los números naturales.

2.3.1. Augustus De Morgan: el gen del cambio de las concepciones semánticas y notacionales de la lógica premoderna y el origen de las leyes duales a través de las nociones primigenias de unión e intersección[28]

De Morgan fue un prolífico lógico/algebrista con diversas publicaciones en diferentes ramas de la matemática, como el análisis matemático y los fundamentos del álgebra. Sin embargo, sus mayores contribuciones para las matemáticas y para este estudio, a pesar de su ya larga y consolidada trayectoria a inicios de las matemáticas modernas, son sus resultados en el álgebra de la lógica y la difusión que le dio a esta, en la apertura del periodo de las matemáticas modernas (que se podría denominar también lógica premoderna). Es por esto, que los trabajos de De Morgan que se consideran y que conciernen específicamente a este capítulo, se remontan a la parte final de la primera mitad del siglo XIX, cuando en 1846 se publicó por primera vez (según Grattan-Guinness, 2000, pág. 27) el primer volumen o

[27] George Boole (1815-1864) fue un matemático y lógico británico, importante por sus aportaciones en el álgebra de la lógica.

[28] El análisis que se presenta a continuación acerca de la obra de De Morgan, con respecto a la temática que compete este estudio, está inspirado principalmente en la visión y los análisis realizados a las obras de este autor por parte Gastaldi (2024) y Grattan-Guinness (2000), en contrastación y complementación con la propia obra de De Morgan, principalmente con su publicación *análisis matemático de la lógica*.

número de una recopilación de sus memorias y trabajos con los silogismos y el paso de estos a la lógica formal: *Sobre el Silogismo I* (*On the Syllogism I*). Estas publicaciones fueron posteriormente recogidas en el libro: *Sobre el Silogismo y Otras Lecturas Lógicas* (*1966*) (*On the Syllogism and Other Logical Writings*), editado por Peter Heath 106 años después de las publicaciones originales, junto con los otros II, III, IV, y V números restantes. También con la publicación de su trabajo: *Lógica Formal: o, el cálculo de la inferencia, necesaria y probable* de (*1847*) (*Formal Logic: or, the calculus of inference, necessary and probable*).

Reiterando que en estos trabajos se prefiguran algunas de las características de lo que se ha definido anteriormente como periodo de las matemáticas modernas, iniciado previamente con los desarrollos realizados por el joven matemático Évariste Galois[29] acerca de la resolución por radicales de ecuaciones de grado mayor o igual a quinto grado. Que aunque no fue él el primero en abordar estos cuestionamientos, fue el primero en generalizarlos innovadoramente con la novedosa noción de grupo, plantando la semilla de una nueva visión general de todas las matemáticas subsecuentes.

Ahora bien, regresando al trabajo de De Morgan que funge como puente entre las matemáticas clásicas, en las que se inscriben por ejemplo la teoría de los silogismos medievales y el inicio de las consideraciones lógico/algebraicas que dieron paso a las contribuciones que competen estos análisis, resulta importante hacer un pequeño paréntesis en torno a las contribuciones alcanzadas por este autor. Y es que las nociones de dualidad[30] que De Morgan utilizó para expresar la mayoría de los conceptos de su sistema, conceptos de reciprocidad, contrariedad, términos inversos o contradictorios, conjugados, etc, los cuales representaría en formato de doble columna, y que son ideas propagadas en la totalidad de su sistema, como se verá en las siguientes figuras, son nociones totalmente influenciadas en los desarrollos de

[29] Aunque las publicaciones de Galois se publican mucho antes de mediados del siglo XIX, su trabajo se suele incluir en el periodo moderno, debido a que para este tiempo se da un redescubrimiento y una revalidación de su trabajo por parte de la mayoría de la comunidad matemática. Por lo que se entiende que sus trabajos no eran muy reconocidos ni entendidos, durante su propio periodo de producción matemática conocido como matemáticas clásicas. Si se quiere ahondar en este tema se puede revisar la investigación de Moreno (2022).

[30] Para De Morgan la dualidad no era un principio general de su sistema, era una una idea de correspondencia con respecto a la existencia de un contrario, un opuesto o un doble para cada término que se presentaba, usualmente se representaban en el formato de doble columna o en tablas dobles, lo cual posteriormente extendió a todo su complejo sistema.

Gergonne[31] y la corriente matemática de publicaciones y avances[32] alrededor de su revista (1825-26).[33]

Y aunque a través de estas representaciones duales no se definen los conceptos de unión e intersección como tal, las relaciones entre *nombres* o términos los cuales son los constituyentes de las proposiciones silogísticas categóricas si están bien establecidas y son las que constituyen los orígenes de la formalización de las nociones de carácter algebraico/conjuntista, imprescindibles para la génesis de la formalización de la que parte el cálculo proposicional, tal como este se conoce en la actualidad. Las cuales posteriormente van tomando forma de propiedades, notaciones y conceptos importantes para la posterior definición del orden y de los retículos.

Un ejemplo de lo anterior es el arduo trabajo de De Morgan con los denominados *nombres compuestos,* y la forma en que se da el paso de estos *nombres* en proposiciones con carácter conjuntivo o disyuntivo (según se les denominaba), y que tenían a su vez carga semántica negativa como un todo, a ser equivalentes al complemento de cada de uno de esos términos por separado. Es decir, al complemento de la clase original del nombre, por ejemplo, si el nombre original era "pájaro", aquí se refiere a todo lo que no es pájaro.[34] Creando así, proposiciones individuales cuyos *nombres* o términos se componen o agregan, a los nombres o términos de otras proposiciones, según hubiese sido el carácter disyuntivo o conjuntivo de estas proposiciones originalmente, cuando estaban agrupadas por la negación como un todo semántico.

Notacionalmente esto es, respectivamente para dos nombres cualquiera en las proposiciones Q y P, en las que sus términos se separan o *componen,* es decir, $(Q\,P)$ que denotaba el nombre de todo lo que era a su vez Q como también P, lo que se reconoce en la actualidad como $Q \cap P$. O también proposiciones en las cuales los

[31] Joseph D. Gergonne (1771-1859), matemático, lógico, editor, político y militar francés.

[32] Avances entre los que se destacan sus consideraciones duales de los objetos de las matemáticas en general, lo que dio paso a la consideración dual de los silogismos clásicos o aristotélicos por parte de De Morgan, como también de los elementos constitutivos de estos silogismos (proposiciones, términos, sujetos, predicados, etc), que en los sistemas de Gergonne usualmente se expresaban a través de la representaciones en doble columna, de la misma manera que se trataban todos los objetos matemáticos considerados en su revista, lo cual es constatable al revisar los *Annales de mathématiques pures et appliquées de* aquél periodo.

[33] *Annales de mathématiques pures et appliquées (1810-1831),* Revista de publicaciones principalmente matemáticas, a cargo de Gergonne, popular a finales del periodo de las matemáticas clásicas, en la que se realizaban grandes demostraciones y aportaciones a las matemáticas del momento.

[34] Las nociones de nombre y clase se precisan más adelante.

términos constitutivos, se unen o *agregan*, es decir, (Q, P)[35] que denotaba el nombre de todo lo que era Q o P o ambos a la vez, lo que se conoce como $Q \cup P$, en el caso de ser inclusiva.

Aclarando que en el párrafo inmediatamente anterior, se hace referencia a proposiciones con carácter disyuntivo y conjuntivo, o proposiciones con carga semántica negativa, debido a que en el sistema temprano de De Morgan no se puede hablar de proposiciones negativas o de la negación de una proposición, ni de la intersección o unión de proposiciones tal como esto se hace en la lógica proposicional actual, simplemente porque cuando De Morgan elaboró su sistema lógico/algebraico, estos conceptos no estaban definidos, ni formalizados. Además, estas nociones estaban asociadas exclusivamente a los términos en las proposiciones contempladas en silogismos. Más adelante, las equivalencias y las relaciones mostradas entre los *nombres* de las proposiciones en los silogismos, consideradas como las operaciones de otros sistemas, terminan tomando la forma de los conocidos operadores lógicos, también conocidos como conectores lógicos, $\wedge$ (*"y"*, conjunción), y $\vee$ (*"o"*, disyunción).[36]

Ahora bien, es momento adecuado para hacer dos acotaciones importantes para el curso de este trabajo acerca de las nociones que se tenían de los conceptos de *nombre* y *clase*, sus usos y cómo los entendía De Morgan, así como muchos de los autores del periodo moderno que trabajaron sobre los avances de este autor. En primer lugar, cuando en De Morgan se utiliza el término *nombre,* se refiere a un concepto análogo a lo que se denominaría como *clase de equivalencia* en la teoría de conjuntos de ZF,[37] no tanto a un conjunto como tal. Es decir, el nombre es el representante de un conjunto de elementos que tienen las cualidades de ese nombre, lo cual se intuye e interpreta al leer el siguiente extracto:

---

[35] Entre Q y P hay una "," (coma), la cual es importante como parte de la notación primigenia de De Morgan para el producto que derivaría en la intersección de proposiciones.

[36] Estos operadores lógicos, solamente después de muchísimos avances y desarrollos a lo largo del periodo de las matemáticas modernas (por supuesto no únicamente establecidos por De Morgan), acaban adquiriendo su reconocible forma de intersección y unión, en su interpretación algebráica conjuntista. Sin dejar de mencionar que la *conjunción* y *disyunción,* son conceptos fundamentales puntualmente en las *leyes duales* que dan paso a las *leyes de absorción*, determinantes para la definición de los retículos como se precisa a continuación.

[37] ZF (Zermelo-Fraenkel), es el sistema básico conjuntista compuesto por aproximadamente 8 o 9 axiomas que definen las reglas para construir y manipular conjuntos, sin contemplar el axioma de elección, que en cuyo caso sería ZFC (C de *choice* en inglés).

> *Un término, o el nombre, es meramente la palabra con la cual es justo referirse a cualquier representante de una colección de objetos pensados* (De Morgan 2019, p. 1).[38]

Algo similar se establece en su publicación de la revista *Transactions*. Así lo ejemplifica:

> *Todo nombre hace referencia a cualquier idea ya sea esta afirmativa o sea esta negativa. El término caballo aplica a cualquier cosa ya sea positiva o no lo sea, esto (no importa acerca de qué esté hablando) es o no es un caballo* (De Morgan 1849, p. 383).[39]

Por otro lado, con respecto al concepto de *clase* se interpreta lo siguiente al analizar la obra de De Morgan. Y es que tal como se denomina en *Formal logic, clase* (*class*), hace referencia a una mezcla de nociones entre un conjunto, una clase de equivalencia y el conjunto cociente tal como se consideran estos objetos en la teoría ZF. Sin embargo, la intuición profunda que queda al analizar la obra de De Morgan y en general de todos los autores analizados en los primeros capítulos de esta investigación, es que se entienden las *clases*, más que todo como un conjunto de clases de equivalencia. Es decir, lo que se denominaría en la actualidad como *conjunto cociente.*[40] En adelante el término *clase* hará referencia a un conjunto con las características descritas en este bloque.

Posteriormente, la visión y el sistema temprano de De Morgan se empieza a construir principalmente por medio de su novedosa notación inspirada por ejemplo del esquema o cuadrado de proposiciones opuestas de Whately,[41] en la cual se hace expreso el carácter dual de las proposiciones con respecto a la noción de su proposición contraria dentro de los silogismos, tal como se enseña en la figura 2. Dando así esbozos de las incipientes nociones y notaciones algebraicas primigenias en el sistema de De Morgan, las cuales se diferenciaban del método prosaico medieval de tratar las proposiciones y los términos dentro de estas en los silogismos propios de sistemas previos a De Morgan. El esquema en cuestión es el siguiente:

---

[38] Traducción libre.

[39] Traducción libre.

[40] Un conjunto cociente, es el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia. La característica principal del conjunto cociente es que sus elementos son completamente disjuntos.

[41] Richard Whately (1787-1863) fue un filósofo, matemático y lógico britanico, fundador de la denominada corriente inglesa del álgebra abstracta.

X)Y significa que "todo X es Y"	*X.Y significa que "ningún X es Y"*
X:Y - "algunos X no son Y"	*XY - "algunos X son Y"*

Figura 2: Proposiciones contrarias de De Morgan establecidas en *Formal Logic* (Tomado y traducido de De Morgan, 1847, p. 60).

Que se complementa con las siguientes figuras acerca de la notación para las proposiciones contradictorias y contrarias en los silogismos de su sistema.

X)Y	*es el contradictorio de*	*X:Y*
Y)X		*Y:X*
X.Y o Y.X		*XY o YX*

Figura 3: Proposiciones contradictorias (Tomado y traducido de De Morgan 1847, pp. 61-63).

Aunado a la figura anterior, se presenta la representación dual que De Morgan estableció para visualizar el trato semántico y notacional concedido a los *nombres* en las proposiciones, donde el *nombre* contrario o el contranominal de un término cualesquiera podía permutarse a gusto en una proposición (la sintaxis), de acuerdo a las necesidades de lo que quisiese decir el autor (de la semántica), en las proposiciones de los silogismos. Quedando así entonces establecido que el *nombre* contrario de una clase o cosa cualquiera, denotada por "*X*", sería la clase o cosa denotada por "*x*", así por ejemplo, en la primera columna del primer modo *A,*. La proposición contraria de todo *X* es *Y* (*X)Y*), sería todo lo que no es *y* es todo lo que no es *x* (*y)x*).

A,	$X)Y = X.y = y)x$	A'	$x)y = x.Y = Y)X$
O,	$X:Y = Xy = y:x$	O'	$x:y = xY = Y:X$
E,	$X.Y = X)y = Y)x$	E'	$x.y = x)Y = y)X$
I,	$XY = X:y = Y:x$	I'	$xy = x:Y = y:X$

Figura 4: Identidades de los contranominales o Proposiciones contrarias de De Morgan establecidas en *Formal Logic* (Tomado y traducido de De Morgan, 1847, p. 61).

Luego se establece a lo largo del trabajo de De Morgan, el origen de las nociones primigenias de la conjunción y disyunción a través de los *nombres* y las consideraciones de términos complejos en su sistema. Ejemplo de estos son los términos subafirmativos o superafirmativos, pertenecientes a sus denominados supersímbolos y subsímbolos como categoría general, los cuales hacen parte de sus arduas construcciones lógico/algebraicas para establecer relaciones como la contenencia entre clases y las mencionadas conjunciones y disyunciones.

Más precisamente estos términos complejos se dan para cada término de naturaleza contraria, contradictoria o contranominal, el cual ha emergido de un término original cualquiera, dando paso a términos subcontrarios, subcontradictorios y subcontranominales, así como a términos supercontrarios, supercontradictorios y supercontranominales, así sucesiva y respectivamente para cada tipo de término de los antes mencionados. Es decir, de esta manera a un término contrario cualesquiera, se le definía su término subcontrario y su supercontrario, pero también a los contradictorios y a los contranominales, etc, que son los términos que conforman la teoría de proposiciones complejas de De Morgan.

Todo lo presentado hasta aquí se considera una extensión del sistema de silogismos aristotélicos AEIO, que en síntesis y para los intereses de este apartado, es la teoría que le permitiría a De Morgan cambiar de proposiciones relacionadas a partir del y, a proposiciones relacionadas a partir del o, en un mismo silogismo, lo

cual es la semilla para la posterior introducción de algunas de las propiedades que se utilizan para definir los retículos.

Esto se ejemplifica e ilustra en la siguiente figura 5 (tal como se extrae de la pág. 68 de *Formal Logic)*, en la cual se describe cómo pasar de la superafirmación particular de un nombre, a la negación del contrario de ese nombre,[42] en su sistema de proposiciones complejas.

	D, afirma a A, y a O'				*A, afirma a D, o a D*		
	D	—	*a A, y a A'*		*A*	—	*a D, o a D o a D'*
	D'	—	*a A' y a O,*		*A'*	—	*a D' o a D*
	C,	—	*a E, y a I'*		*E,*	—	*a C, o a C*
	C	—	*a E, y a E'*		*E*	—	*a C, o a C o a C'*
	C'	—	*a E' y a I,*		*E'*	—	*a C' o a C*
La negación de D,		—	*a A' o a O,*		*O , Niega*		*a D, y a D*
—	*D*	—	*a O' o a O,*		*O*	—	*a D, y a D* o a D' y a D*
—	*D'*	—	*a A, o a O'*		*O'*	—	*a D' y a D*
—	*C,*	—	*a E' o a I,*		*I,*	—	*a C, y a C*
—	*C*	—	*a I' o a I,*		*I*	—	*a C, y a C o a C' y a C*
—	*C'*	—	*a E, o a I'*		*I'*	—	*a C' y a C*

Figura 5: Proposiciones duales de De Morgan, que intercambian conjunciones por disyunciones a través de la afirmación y negación, de términos super y subafirmatios, establecidas en *Formal Logic* (Tomado y traducido de De Morgan 1847, p. 69).

[42] Esta teoría se desarrolla completamente, entre la página 62-70 de *Formal Logic*.

En síntesis y a grandes rasgos, el paso a paso de las aportaciones[43] de De Morgan se enmarcan en lo que se ha denominado en los indicadores para determinar las condiciones de necesidad, como un proceso de *modificación*, haciendo referencia específicamente a una ampliación del sistema de propiedades de los silogismos clásicos o categóricos, pero aún más, al cambio en las concepciones[44] y en las interpretaciones del alcance de los términos o *nombres* en las proposiciones de los silogismos. Ratificando así que sus contribuciones se originan primordialmente con los cuatro tipos de proposiciones o premisas de los silogismos clásicos, denominados según esta teoría como $\mathcal{AEIO}$ (los tipos de silogismos clásicos).[45] Del que parte por supuesto lo desarrollado en su arduo sistema de proposiciones complejas, de donde surgen algunas innovaciones primordiales para cimentar el edificio de muchos de los desarrollos algebraicos por venir en las matemáticas modernas.

Precisando un poco más el ejercicio de De Morgan con el sistema AEIO, la interpretación y las manipulaciones que se permitía en este sistema, se reseña cómo convertía los cuatro tipos de proposiciones originales en ocho tipos de proposiciones. Ya que a los cuatro tipos clásicos de proposiciones silogísticas le sumaba una nueva dimensión de orden de los *nombres* en las proposiciones, como se evidencia figuras 2 y 3, al cambiar indistintamente el orden de los términos dígase $\mathcal{X.Y}$ o $\mathcal{Y.X}$ / $\mathcal{XY}$ o $\mathcal{YX}$. Es decir, a las dos dimensiones originales de naturaleza cuantitativa (o de cantidad), con sus cuantificadores (para todos, algunos, ninguno) y cualitativa (o de calidad), es decir, *nombres* afirmativos o negativos, se sumaba una nueva dimensión de orden, que consistía en cambiar o permutar las posiciones de los términos de acuerdo con sus términos inversos, contrarios o contradictorios, …, etc. Todo esto es mucho más fácil y realizable gracias a esta nueva notación.

En síntesis, cualquiera que quisiera trabajar con silogismos ya no se hallaba atado a considerar sólo los términos en la forma clásica, la sintaxis clásica, dígase todo $\mathcal{X}$ es $\mathcal{Y}$ o $\mathcal{X})\mathcal{Y}$ sino también, todo $\mathcal{Y}$ es $\mathcal{X}$ o $\mathcal{Y})\mathcal{X}$ (ver figura 2), por lo que de esta

---

[43] Recalcando que las innovaciones aquí exhibidas fueron impulsadas por la corriente británica del álgebra abstracta y por autores como Hamilton y Whately, las cuales serían posteriormente utilizadas por autores como Boole, Schröder o Dedekind en sus propios trabajos, como parte del surgimiento de condiciones de necesidad para la aparición de algunos proto-órdenes importantes para este estudio, como el *gebieten* o el *gebietkalkul,* como también, de algunas proto-estructuras algebraicas, como el *modulgruppe*, el *modulgetz*, y el *dualgruppe.*

[44] Fundamentalmente al cambio en las consideraciones semánticas y nominales, de todo el sistema preexistente.

[45] A, E, I, O, son proposiciones categóricas que definen el modo del argumento: A (universal afirmativa: todo X es Y), E (universal negativa: ningún X es Y), I (particular afirmativa: algún X es Y), O (particular negativa: ningún X es Y). Estas vocales se combinan para formar 19 modos o arreglos de argumentos válidos a partir de cuatro figuras lógicas y de las 256 combinaciones de arreglos posibles.

manera surgen ocho tipos de arreglos de los silogismos, que terminaron siendo seis debido a la consideración de términos contradictorios entre $X{:}Y$ (algunos X no son Y), y $Y{:}X$ como equivalentes, ya que su permutación era indistinguible en las proposiciones.

Finalmente, en suma a lo ya precisado acerca de las figuras 2 y 4, en la figura 5, se presentan los duales de los contranominales o de los contrarios en los arreglos de los silogismos considerados en el sistema de De Morgan. Que en últimas representan que si A era el silogismo del tipo universal afirmativo en el cual todos sus términos tienen una determinada forma, dígase todo X es Y, en su contranominal A'(denotado con el supersímbolo), todos los términos poseen carácter contranominal, es decir, todo X' es Y'. Lo que podría interpretarse como ningún X es Y o No X es Y, dependiendo de lo requerido por el autor. De igual manera con su contrario $A_{,}$[46] (denominado subsímbolo), en el cual todos los términos tienen un carácter contrario.

Cabe aclarar, que en esta figura 5, C y D son dos tipos de proposiciones especiales denominadas concomitantes, que contenían términos atados a la teoría de proposiciones complejas de De Morgan. Los cuales consistían superficialmente en mezclar el sentido de los términos en las proposiciones con respecto de sus contrarios, contranominales u opuestos, y toda la teoría antes referenciada de subsímbolos y supersímbolos[47] con respecto a la conjunción y a la disyunción. Que además son puntualmente las proposiciones que extendían el sistema original de proposiciones del sistema aristotélico por parte de De Morgan, las cuales son las proposiciones que aparecen denotadas con las letras C, D y C', D', $C_{,}$, $D_{,}$ en la figura 5.

Finalmente, la consolidación de muchos de los resultados presentados en este apartado, se expresan y se materializan en forma de las denominadas leyes duales, las cuales fueron establecidas en un primer lugar a través lenguaje natural, que era el lenguaje mediante el cual se establecían los resultados con los silogismos medievales, y el inicio del trabajo con los silogismos clásicos, apareciendo declaradas como leyes formales por primera vez en el tercer tomo de *Sobre el Silogismo III de*

---

[46] La "," (coma), hace parte de la notación del subsímbolo.

[47] Con los que se denotaban los superafirmativos y subafirmativos, de los que se desprenden los términos, supercontrarios, subcontrarios, contradictorios, supercontradictorios, subcontradictorios..., etc.

1858, y en una publicación llamada *Lógica en general*, recogida en la recopilación reeditada de Heath (2019):[48]

> *El contrario de un agregado es el compuesto de los contrarios de los agregados: el contrario de un compuesto es el agregado del contrario de los componentes. Por lo tanto* (A, B) *y* AB *tienen a* ab *y* (a, b) *por contrarios*
>
> (Tomado y traducido de la compilación hecha por Heath -2019, p. 119- de la obra de De Morgan).

De esta forma, de la mano de lo antes puntualizado y de las figuras anteriores, se detalla y se termina de aclarar un poco más la forma en que surge la equivalencia determinante de este apartado, que parafraseada con lenguaje actual a partir de lo mencionado con agregados y compuestos (el lenguaje de De Morgan), quedaría de la siguiente manera: la negación de la unión de los términos en las proposiciones es equivalente a la negación de la intersección de cada uno de estos términos en sus proposiciones por separado.[49] Definiendo de esta forma una de las relaciones fundamentales del sistema de De Morgan, imprescindibles para el presente trabajo de grado.

La anterior definición primigenia de las leyes duales termina posteriormente tomando la siguiente y reconocible forma de expresiones lógicas donde P y Q, son consideradas en su totalidad como una unidad lógica, y donde el foco no yace en los términos o nombres, sino en las proposiciones mismas:

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

Por último, esta definición de las leyes duales es importante y cobra relevancia para la secuencia de análisis, debido a que a partir del desarrollo de estas propiedades se dio cabida y sustento a las manipulaciones lógico/algebraicas con las relaciones conjuntivas y disyuntivas. Como por ejemplo, pasar de $\wedge$ a $\vee$ en la misma

---

[48] Esta es una reedición de la obra original de Heath, On the Syllogism and Other Logical Writings de (1966). Por otro lado, se conocen enunciaciones anteriores de estas leyes en otros textos por parte de De Morgan, como en *Formal Logik* una década antes, pero sin su connotación de leyes lógicas, sólo como resultados de su trabajo.

[49] Reiterando que, en esta definición de las leyes duales, los "agregados" (que hacen referencia a la unión de nombres, de la que De Morgan da cuenta como el hecho de extender, agrandar, unir, o adicionar) se definen como equivalentes al "compuesto" (del que a su vez De Morgan da cuenta como el hecho de introducir, o realizar el producto) de sus nombres contrarios correspondientes.

expresión lógica. Equivalencias de las que se terminan derivando otras leyes o propiedades matemáticas, como las *leyes de absorción*:

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

Así como otras propiedades que permitían la simplificación, y la manipulación de expresiones lógicas de forma algebraica, fundamentales para la definición de los retículos en un sistema ordenado y para definir un retículo desde el álgebra, como se presenta en los siguientes capítulos.

2.3.2. Boole: el enraizamiento del cambio en las concepciones simbólicas, sintácticas y semánticas de las propiedades de la lógica como propiedades algebraicas

A diferencia de De Morgan, como lo menciona Grattan-Guinness (2000), Boole era considerado un *outsider*[50] en la comunidad británica matemática del periodo moderno. Más específicamente un *outsider* llegado de Lincoln, la ciudad de la que era originario, al ambiente británico del álgebra abstracta. Sin embargo, a pesar de ser un "desconocido" logró destacar sobre muchos autores ya establecidos y reconocidos de aquel momento. Es por esto que los trabajos de Boole al igual que los de De Morgan que resultan importantes para este análisis, también se remontan casi para el mismo periodo, específicamente entre 1847 y 1854. Etapa en la que se publicaron los siguiente tratados: *El Análisis Matemático de la Lógica, Siendo un Ensayo Hacia el Cálculo del Razonamiento Deductivo* (*1847*), más conocido simplemente como *El Análisis Matemático de la Lógica* (*The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*), y *Una Investigación de Las Leyes del Pensamiento, Sobre las Cuales Están Fundadas las Teorías de la Lógica y la Probabilidad* (1854), conocidas como *Las Leyes del Pensamiento* (*An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*).

En estas obras se establecen las bases de lo que sería el sistema lógico booleano, en el cual sobresale el surgimiento de algunas de las concepciones más importantes para el álgebra de la lógica, además se halla el origen de una incipiente

[50] Término para referirse a un desconocido en el entorno de una rama de investigación, en este caso, un desconocido para el grupo matemático británico de mediados del siglo XIX entre los que sobresale el grupo británico de álgebra abstracta. Haciendo referencia a que era un autor fuera del círculo matemático británico reconocido.

teoría de conjuntos de índole empírica, y más importante aún las nociones de inclusión originarias de donde surge el orden.

De esta manera, se establecen muchas de las condiciones para la emergencia de los objetos protagonistas del presente trabajo de grado, que se manifiestan en forma de operaciones y de propiedades posteriormente cumplidas por algunos de los objetos propios del orden, dando paso así a los retículos como estructuras ordenadas y algebraicas. Sin dejar de mencionar que en el sistema de Boole se originan algunas de las nociones y notaciones determinantes para dar paso a lo que posteriormente se conocería como *álgebras de Boole*.[51] Las cuales no se pueden definir directamente de las publicaciones de Boole

Es por esto que las contribuciones de Boole se pueden entender de entrada como una reinterpretación de las concepciones de De Morgan, particularmente del lenguaje como de las notaciones que regían los silogismos. Dicho de otra forma, se pueden entender como una reformulación de las denotaciones de los términos de los silogismos (sujetos, predicados, término medio, término mayor, término menor, conclusiones), pero también los conectores, las relaciones y las operaciones entre otros componentes importantes de la teoría argumentativa, como de la lógica en general.

De este modo, lo que se extrae del ejercicio de Boole es que se enfocó de gran manera en el componente notacional y operativo. Es decir, en cómo "operarían" los términos con las relaciones en los silogismos de su sistema, ergo sobre las proposiciones en los argumentos, ya fuesen estos argumentos de carácter inferencial o deductivo. Forma en la cual logró dar paso en su literatura a expresiones algebraicas emergidas de la lógica, haciendo camino hacia un trato indistinto entre las ecuaciones algebraicas y los argumentos lógicos tradicionales.

Es así que en el sistema de Boole, tal como aparece al inicio de su tratado del *Análisis matemático de la lógica*, en el apartado denominado *Primeros principios*, se parte de la asignación del número ***1*** como la *unidad*, el todo o el universo de lo que

[51] Término acuñado, según Schlimm (2024), por el logicista, Henry M. Sheffer, en el título de su artículo de 1913, A set of five independent postulates for boolean algebras, with applications to logical constants. Aclarando que, como se verá más adelante, por diversas falencias, el sistema original de Boole, no es un *álgebra de Boole,* tal cual su interpretación actual, es decir, en este sistema temprano no existían estos objetos, no estaban definidos debido a que las operaciones de su sistema ("+", como unión exclusiva, y "·" como intersección) no estaban completamente definidas, y las álgebras o expresiones de su sistema, ni siquiera contaban con un dual propiamente dicho, entre otras razones, con respecto a la interpretabilidad y no interpretabilidad de las expresiones, cuyo proceso también tenía vacíos, y no era infalible, es decir, existían expresiones básicas indecidibles.

se sea que se está contemplando; las letras mayúsculas $X, Y, Z,$ como las clases[52] en general del objeto en mente; y las letras minúsculas x, y, z, como las clases representantes de las clases originales X, Y, Z, con las cuales se van a representar y operar tanto los términos y las proposiciones, como todas las expresiones algebraicas que surjan en el sistema booleano. Particularmente, esta notación toma la forma de los términos en los silogismos, sujetos y predicados en el sistema booleano. Definido de la siguiente manera, según palabras de Boole:

> *Empleemos el símbolo 1, o la unidad, para representar el Universo, y entendámoslo como si comprendiéramos cada clase considerable de objetos existan estos o no, ha sido una premisa que el mismo individuo puede ser hallado en más de una clase, en tantas puedan poseer más de una cualidad en común con otros individuos. Empleemos las letras X, Y, Z, para representar los miembros individuales de las clases, X aplicado a cada miembro de una clase, como si fuera miembro de esa clase en particular, y Y a cada miembro de otra clase como si fuera miembro de esa clase, y así sucesivamente, de acuerdo al lenguaje adquirido de tratados acerca de la Lógica. Más allá concibamos una clase de símbolos x, y, z, apropiados de las siguientes características.*
>
> *El símbolo x operando sobre cualquier sujeto comprendido como individuo o clase, deberíamos suponer que se elegirá de ese sujeto todos los Xs que ese sujeto contiene. De la misma manera con el símbolo y, operando sobre cualquier sujeto, deberíamos suponer que se elegirá de ese sujeto todos los Ys que tienen algún compromiso con él, y así sucesivamente* (Boole 1847, pág. 15).[53]

Reafirmando así que una buena parte de las innovaciones del sistema Booleano se dan en el campo notacional, del cual uno podría pensar en apariencia que yace en la superficie del sistema booleano, y por ende los avances con que elaboró

---

[52] Clases interpretadas de forma similar a como se precisaron en el apartado de De Morgan, tal como se extrae de la literatura booleana, en específico de lo definido en sus primeros principios.

[53] Traducción libre.

este sistema. Sin embargo, este cambio notacional aparentemente superficial, pues solo se cambian o se asignan letras para representar los términos, está soportado por un cambio más profundo. Un cambio de concepción sobre los objetos de la lógica distinto a como estos se venían contemplando desde las matemáticas clásicas. De donde surge el hecho de asignar variables a las clases que representaban los términos[54] en los silogismos. Y es en la manipulación de estas variables en donde se aprecia un rasgo profundamente distinto que el mero hecho de asignarle variables a los términos como simples remplazos.

De esta manera los avances en Boole se dan de forma análoga a cómo se dió la concreción del lenguaje en el sistema de De Morgan. Es decir, partiendo de sistemas ya establecidos y consolidados. Ahora bien, es importante señalar que, en este caso, el trabajo de De Morgan se dio de forma independiente al de Boole a pesar de desarrollarse contemporáneamente, y a pesar de su constante correspondencia, que se puede evidenciar incluso en el prefacio de su tratado acerca de *El Análisis Matemático de la Lógica.*

A pesar de todo esto, el verdadero fuerte del sistema booleano, donde yacen la mayoría de sus innovaciones, es en su construcción algebraica en la que va mucho más allá que De Morgan y en la que soporta los cambios de concepción mencionados. Construcciones en las que se enraizan definitivamente las bases de los conceptos que darían lugar posteriormente a los sistemas ordenados y a las estructuras algebraicas por parte de la comunidad matemática. Enmarcando así las innovaciones booleanas en los procesos de abstracción y de modificación, debido a que las innovaciones exhibidas en los avances de este sistema, se consiguen fundamentalmente al extrapolar los dominios ya conocidos de la aritmética o el álgebra "escolar" ("high school algebra", tal y como la denomina Burris, 2000), hacia dominios como las clases y por supuesto la lógica. Por lo que esta "extrapolación" está justificada por las leyes del pensamiento y por el accionar natural lógico y filosófico de la mente. A continuación, se precisan entonces algunas de estas innovaciones fundamentales, que sustentan el sistema booleano que se viene mencionando.

Las siguientes son las expresiones que Boole denomina *primeros principios* de su sistema, para las cuales es importante recalcar que lo más importante del establecimiento de cada una de estas fórmulas (por lo cual diferencia su sistema del

[54] En lugar de asignarlos directamente a los términos. Noción que como ya se precisó se originó con De Morgan, pero se consolidó en el sistema booleano.

sistema de De Morgan y predecesores) es que las mismas están motivadas o respaldadas por una "operación mental", con una justificación incluso filosófica, natural del pensamiento. Ya que esta es la forma en la cual Boole trataba todos los elementos de su sistema. Deviniendo así en el mencionado cambio de concepción de los conceptos de la lógica, a los que no se llega única y exclusivamente por mera analogía algebraica.

Finalmente, las expresiones lógico/algebraicas son la maquinaria que Boole utiliza para realizar las equivalencias de argumentos o juicios silogísticos, con sus formas o tipos característicos AEIO, a expresiones algebraicas, representando dichos argumentos lógicos de forma más sintética. Esto se representa en la figura 7, ubicada más adelante en el presente capítulo, denominada *formas canónicas*, (extraída directamente del libro *Un Análisis Matemático de la Lógica*), al lado de una contrastación esquemática, con respecto a la actualidad, semejante a lo realizado en la figura 6, presentada igualmente más adelante en este mismo apartado.

Siguiendo el orden de la literatura de Boole, la primera fórmula en aparecer es:

$$x = x\ (1).$$

Cuya interpretación booleana es que cuando no hay sujeto expresado, ya sea este el término de una proposición o una proposición misma, se deberá suponer (1) como el universo. De donde se interpreta básicamente que la clase de lo que sea que se está considerando, denominada por x a la izquierda, es igual a escoger casi operacionalmente del universo todos los entes representados por x de la derecha. Es decir, $x\ (1)$. Relación en la cual, se enlaza el proceso mental que contempla elegir todos los objetos del universo, con la operacionalidad algebraica de llevar esto a cabo con los objetos de la lógica.

De la misma manera, se presentan la *Primera ley de Boole*, que se expresa de la siguiente manera:

Primera ley de Boole (1). $x(u+v) = xu + xv.$

La cual establece estrictamente que el resultado de una elección de entes o elementos representados por sus clases, incluso compuestos, es independiente de la

agrupación de esos mismos entes o elementos. Es decir, seleccionar x's de $u+v$ que representa la composición o unión de los elementos de los que ellos son los representantes, es indistinto de seleccionar los x's de u y luego los x's de v por separado, forma en la cual se obtiene ($xu + xv$).

De esta manera, según el hilo de este análisis y según autores como Burris (2000 y 2024) y Grattan-Guinness (2000), Boole logró deducir este principio a partir de la conjugación de operaciones inducidas por relaciones, como las reconocidas relaciones disyuntivas y conjuntivas, las cuales inducían nociones operativas sobre las clases. Nociones como de unión, con la suma $x+y$ (disyuntiva), y de intersección con el producto xy (conjuntiva).

Ahora bien, esta denominada primera ley de Boole o guardando fidelidad a su literatura, primer principio, como él mismo llamaría a esta propiedad en su *Análisis Matemático de la Lógica*, que resulta análoga a la actual *propiedad distributiva*, carece de consideraciones duales y contempla la distributividad por un solo lado (multiplicaciones sobre adiciones). A pesar de esto, este principio es importante para el presente análisis ya que eventualmente, luego de su completamiento conceptual, aportaría a la teoría del orden una condición algebraica necesaria para la obtención de unos retículos con mayores atributos que los retículos originarios.

Segunda ley de Boole (2). $xy = yx.$

El segundo principio, tal como se establece en el *Análisis Matemático de la Lógica,* hace referencia a que es indiferente el orden en que se elijan los elementos de dos clases sucesivas. Propiedad que surge en el sistema booleano de una abstracción u operación mental lógica, como lo es elegir por ejemplo de un grupo de animales todos los perros **y** (conjunción), todos pequeños, lo cual es equivalente a escoger de ese grupo de animales los animales pequeños, **y** (conjunción), que también sean perros. Concepciones que se aplicaban a los términos en los silogismos y por ende a las clases que estos representaban. Finalmente, esta propiedad es la que se denomina en la actualidad como *propiedad conmutativa*.

Tercera ley de Boole

(3). Estipulada en un primer momento como $x^n = x$

(3.1). Luego precisada en leyes del pensamiento como $xx=x$ o $x^2=x$,

Específicamente, según la interpretación que se extrae directamente de la literatura booleana, este tercer principio surge de efectuar la elección de ciertos elementos dos veces, luego tres veces..., etc. Es decir, según Boole realizar paulatinamente la elección de dichos elementos *n* veces, es indistinto a realizar ese mismo proceso de elección una misma y única vez. Es así que, este principio, que al contrario de las otras postulaciones de su sistema se producen principalmente por un proceso de analogía o modelación con el álgebra tradicional, surge primordialmente de un proceso de abstracción de los sistemas preexistentes, ya que en el álgebra no existe ninguna propiedad que cumpla $x^n=x$.[55] Expresión que Boole solía escribir de esta forma $x(1 - x^{n-1}) = 0$, asimilando una manera algebraica de tratar sus concepciones logicistas, para todos los casos salvo que $x=1$ o $x=0$.[56] Esto anterior, motivó y derivó por su parte en la determinación de ciertos criterios algebraicos para la caracterización de expresiones interpretables o no interpretables, ya que en su sistema las únicas expresiones interpretables o válidas eran aquellas que tras diferentes manipulaciones algebraicas terminaban igualadas a 0 y 1. Por el contrario, las restantes no lo eran.

Es así, que de este tercer principio también denominado ley indexada (*index law*) estipulada por Boole (1847, pág. 18) se originan algunas de las propiedades que son consideradas para este apartado como condiciones de necesidad que dan paso al orden, que más adelante serían materializadas por Peirce y por Schröder como se presenta en sus respectivos apartados. Condiciones que a su vez posteriormente dan paso a propiedades determinantes de la teoría de retículos. De igual manera, con este tercer principio, Boole completa las herramientas para precisar la operatividad de las relaciones importantes para su sistema y para este capítulo, y para plantar la semilla de la contenencia y por ende del orden. Por ejemplo, con xy representando la

[55] Haciendo referencia a números mayores o iguales a 2.

[56] Si en este sistema el 1 representaba el universo, el 0 representaba aquel valor que tomaban las clases cuando no coincidía ningún elemento entre ellas, es decir, el conjunto vacío.

conjuntividad, y $x+y$ representado la disyuntividad cuando x y y son disjuntos; además de $xy=y$[57] representando la idea originaria de inclusión.

Otro aspecto importante, es que el principio (3.1) se obtiene a través de un esfuerzo matemático, lógico y algebraico, a partir de la comprensión de las falencias conceptuales de (3) con respecto a su mismo sistema de origen. Pues era sabido por Boole y sus contemporáneos que de $x^n=x$ se derivaba procedimentalmente la expresión lógica $x^3=x$ que no era interpretable, según los criterios lógicos y matemáticos de dicho sistema. Por lo tanto, Boole se vió obligado a redefinir la ley indexada en forma que se cumpliesen las condiciones de interpretabilidad (de donde surge el cambio de interpretación). De este modo, se dio el cambio de $x^n=x$ a $x^2=xx=x$, denominada *ley de dualidad,* pero ya finalmente en sus leyes del pensamiento.

De esta manera, partiendo de estos tres principios fundamentales se derivan todas las fórmulas o expresiones del sistema booleano con las cuales se trataban los silogismos, las proposiciones, las premisas, las clases y por sobre todo las diferentes representaciones a los que sometía a estos objetos, para manipular argumentos inferenciales como expresiones algebraicas.[58] De modo que estas nociones se iban adhiriendo y compilando en el acervo del conocimiento matemático moderno de la época con respecto al álgebra de la lógica, el inicio de la teoría de conjuntos y el orden, entre otros. Algunos de los cuales se recogen en el transcurso de estos análisis. Lo que en definitiva permitiría dar sustento a la aparición de las condiciones de necesidad importantes para el análisis llevado a cabo.

Puntualmente, de estos principios se deriva lógica y algebraicamente la llamada *ley de idempotencia* que es una de las propiedades que posteriormente deben cumplir las operaciones de los sistemas ordenados, en aras de la obtención de un retículo interpretado desde álgebra. Operaciones que hallen el elemento *supremo*,

---

[57] En el sistema de booleano, esto representa que la intersección de **x** con **y** es igual a **y**, ya que para Boole el producto **xy** representa todos los **x** que son **y**, como también todos los **y** que son **x** (es decir, la intersección de **xy**), al igualar esta expresión a **y**, está diciendo que toda **y** está completamente incluida en toda **x,** o dicho de otra forma, toda **y** es **x**, que en la actualidad se representa con **y⊂x**. Todo lo cual se representa en las figuras 6 y 7.

[58] Cuando se habla de distintas representaciones de estos objetos, se habla de por ejemplo las distintas formas en que se podía expresar o esquematizar un argumento y sus elementos, dígase en el lenguaje natural escrito o hablado, como expresiones algebraicas o fórmulas, y como representaciones en doble columna representando los "duales" de los objetos (la mayoría reportadas en este análisis), entre otros.

Sup desde el orden, o el *join* (⋁)[59] algebraicamente, de entre dos elementos cualquiera de un sistema ordenado en particular, análogamente para el *ínfimo* o el *meet* (⋀).

Así como también se deriva la relación de *inclusión universal*, que está soportada a partir del cuantificador universal todo x es y, y todo y es x, la cual es una forma de inclusión que se asemeja al *supremo* y al *ínfimo* mencionados. Esto pareciera ir desvelando paulatinamente alguna especie de "relación" entre las operaciones mencionadas y esta *inclusión universal*, como se representan en la figura 6 con las operaciones booleanas de conjunción y disyunción (*) y la *inclusión universal* (**).

Se procede pues a representar algunos de los conceptos referidos en la siguiente figura 6, en donde se pueden apreciar las leyes de Boole y su interpretación en términos actuales.

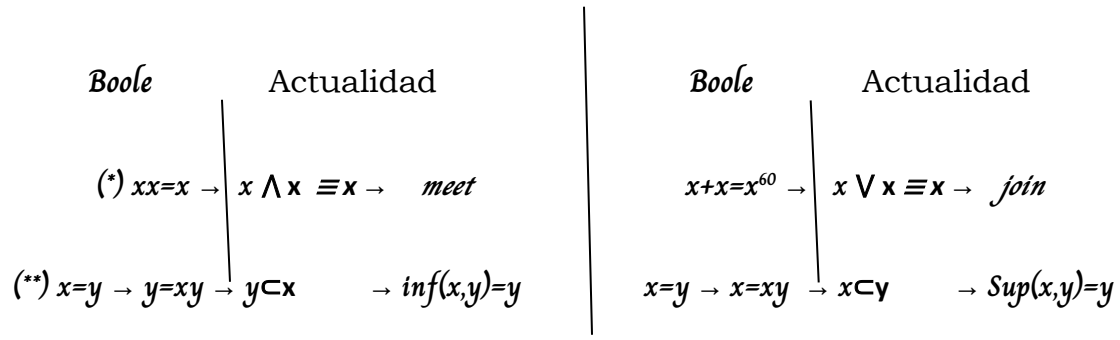


Figura 6: Esquema de las contribuciones de Boole, con respecto a la relación entre las operaciones de su sistema versus la actualidad matemática (Inspirado en Boole 1847).

Estos principios se han presentado de manera sintética en la figura anterior, en aras de exhibir la progresión conceptual del origen de estas operaciones y relaciones hasta su posterior concepción propia de una teoría del orden más formal. Son solo algunos de los principios claves de este apartado, los cuales posteriormente se evolucionan para dar cabida a las condiciones de necesidad para describir los

[59] Particularmente de estas operaciones, se empiezan a tener nociones muy intuitivas a partir de los desarrollos booleanos, pero se empiezan a definir formalmente y a ser consagradas tal cual como operaciones per se, recién a partir de los desarrollos de Schröder. Es decir, más de 40 años después de los progresos de Boole.

[60] Esta operación, no cubría todos los casos posibles en el sistema de Boole, lo que además se convierte en un impedimento para que en el sistema de Boole se lograran identificar con éxito, álgebras booleanas con la interpretación actual, ya que el operador (+), **OR** no estaba correctamente definido.

retículos y algunas semi-estructuras en los que estos retículos y la estructura propia de estos se yergue (como los *modulgruppen* e *idealgruppen*). Es decir, son propiedades que sirven para formalizar dichos objetos como estructuras algebraicas propiamente dichas, paralelamente a un sistema ordenado dado.

La figura 6 tal como fue presentada, se desprende de la siguiente figura 7, acerca de las operaciones y expresiones relevantes en el sistema de Boole, a la que se le adicionó un esquema comparativo de la misma manera que en la figura 6.

	Boole		Teoría de conjuntos Actual
A	*todo x es y*	$xy = x$ o $x(1-y) = 0$	$x \subset y$
E	*Ningún x es y*	$xy = 0$	$x \cap y = \emptyset$
I	*Algunos x son y*	$v = xy$	$x \cap y = v$
O	*algunos x no son y*	$v = x(1 - y)$.	$x - x \cap y = v$

Figura 7: Formas canónicas para la expresión de proposiciones de Boole versus la actualidad matemática (Tomado, traducido e inspirado de Boole 1847, p. 26).

De esta manera finaliza este capítulo, con la presentación de las figuras anteriores que condensan los avances lógico/algebraicos del sistema de Boole, y en las que también se consolida indirectamente la progresión de las contribuciones notacionales del sistema de De Morgan importantes para el recuento histórico-epistemológico realizado en este estudio. En concreto, en las figuras 6 y 7 se evidencia cómo entre los dos autores protagonistas de este capítulo se avanzó conceptualmente hasta abandonar la necesidad del uso de unas engorrosas reglas sintácticas y semánticas específicas, definidas por los requerimientos de los silogismos de antaño heredados de la lógica medieval, como también de las matemáticas clásicas. Lo cual permitió el surgimiento de unas reglas de naturaleza algebraica, que facilitaban el devenir del ejercicio lógico y matemático de la época.

Dicho de otro modo, luego de la intervención histórica de De Morgan y Boole, un silogismo que antes se escribía en una página entera se podía representar en 3 o 4 líneas, lo cual sería importante para el desarrollo de nuevos avances.

Para terminar, en estas figuras también se dan atisbos de cómo el sistema booleano va derivando en sistemas de naturaleza conjuntista, proclives a la aparición de distintas estructuras, entre las que se resaltan, principalmente las estructuras propias del orden, lo cual se irá desvelando paulatinamente, conforme el trasegar del próximo capítulo, en el que el orden que tanto se ha venido pregonando finalmente hace su primera aparición, su primera presentación reconocible y oficial.

Capítulo II:

Consolidación de las condiciones de necesidad para el surgimiento del concepto de retículo

La mayoría de los autores[61] e historiadores matemáticos, con publicaciones acerca del surgimiento de los retículos o de la teoría que rige estos objetos, entre los que sobresalen Grätzer y Schlimm, coinciden en la importancia de las contribuciones de Charles Sanders Peirce[62] y Ernst Schröder,[63] para la consolidación del álgebra de la lógica. Publicaciones en las que se concuerda que, en los trabajos de estos dos autores, las propiedades de naturaleza dual y estructural con las que posteriormente se define el orden y los retículos, van emergiendo de camino a una teoría estructural de las matemáticas. Esto es así, debido a que con los avances peirceanos y schröderianos, de la mano de algunos desarrollos complementarios de autores como Jevons[64], McColl[65] o Robert Grassmann,[66] entre otros autores importantes con aportes determinantes para el afianzamiento de una visión más rigurosa de estos temas, se termina completando y puliendo los sistemas primigenios de De Morgan y de Boole.

Esto se específica mucho más en el siguiente apartado, acerca de los autores determinantes.

3.1. Autores determinantes, en la consolidación de los desarrollos originados con De Morgan y Boole

En el anterior capítulo se observó cómo De Morgan y Boole fueron dos autores que trabajaron contemporáneamente y que se pueden considerar de alguna forma

---

61 Se hace referencia a autores de matemáticas como materia en sí misma, matemáticas de vanguardia.

62 Charles Sanders (Santiago) Peirce (1839-1914), filósofo, lógico estadounidense, fundador de la corriente pragmática estadounidense, hijo del matemático Benjamin Peirce.

63 Ernst Schröder (1841-1902), matemático de origen alemán, perteneciente a la corriente algebraica alemana, que trabajó durante la parte final del siglo XIX e inicios del XX, junto con R. Grassmann.

64 William Stanley Jevons (1835-1882), matemático, filósofo y lógico britanico, perteneciente a la corriente británica del álgebra abstracta, que aportó a la construcción de lo que se conoce actualmente como teoría de conjuntos, además de sus grandes aportaciones a las ciencias económicas.

65 Hugh MacColl (1831-1909), matemático escocés, perteneciente al entorno eurocentrista de las matemáticas, muy cercano a varios miembros de la corriente británica del álgebra abstracta.

66 Robert Grassmann (1815-1910), matemático y periodista del reino de Prusia (reino alemán), nacido en Polonia, con grandes aportaciones a la lógica y la teoría de conjuntos, miembro de lo denominado en este estudio como comunidad eurocentrista de las matemáticas

como los representantes de la culminación de gran mayoría de los avances anteriores a ellos sobre la formalización de la lógica. Ahora bien, se procede entonces a considerar un grupo de autores los cuales cada uno y respectivamente a su modo, aportaron en la culminación de los desarrollos de sus respectivos predecesores en la materia, añadiendo de esta forma un eslabón más a la progresiva cadena del conocimiento matemático moderno que derivó en los retículos.

De este modo, así como De Morgan y Boole se pueden considerar como los labradores de los dos sistemas a partir de los cuales se inicia puntualmente este análisis, y cuyos cambios e innovaciones yacen en el núcleo de las condiciones de necesidad para la existencia de las teorías del orden y de los retículos, el grupo de autores presentados a continuación encabezados por el dúo Peirce/Schröder, se pueden entender también como los representantes primarios de la consolidación de muchos de los resultados anteriores a sus sistemas, y en algunos casos contemporáneos. Cuyas contribuciones aportaron un paso más en la dirección de la definición de las propiedades sobre las que se erige la teoría reticular.

Se insiste pues que, aunque el foco en este capítulo yace sobre Peirce y Schröder, existe una gran cantidad de autores contribuyentes a los resultados e innovaciones alcanzados por estos dos y no se pueden pasar completamente por alto. Por esta razón, y por motivos de extensión de este trabajo, estos autores “auxiliares” se presentan someramente en un apartado dentro de este capítulo de manera condensada, y recalcando puntualmente sus aportes más representativos y útiles para la construcción histórica relevante para esta investigación.

Finalmente, describiendo un poco la distribución de este capítulo y siendo coherente con lo anterior, en primera instancia este capítulo se centrará entonces en realizar un recuento con respecto a las aportaciones conceptuales y notacionales de estos autores “auxiliares”. Posteriormente, este capítulo tendrá como foco la revisión de los sistemas construidos por los dos autores principales, los cuales tal como De Morgan y Boole, mantuvieron constante correspondencia.

3.1.1. Jevons, MacColl, y R. Grassmann[67]

Como se mencionó, generalmente los avances matemáticos se dan por el esfuerzo colectivo de todo un ambiente teórico-matemático.[68] En el caso particular del presente trabajo de grado, las innovaciones concernientes al álgebra de la lógica son atribuidas a una gran cantidad de autores, entre los que se destacan los miembros de la llamada "corriente británica del álgebra abstracta": De Morgan, Boole, Whately, Hamilton,[69] entre otros. Como también el entorno matemático europeo del que hacía parte por ejemplo el grupo algebraico de la lógica alemana, compuesto entre otros, por los hermanos Grassmann, Hermann[70] y Robert, y por supuesto Ernst Schröder, sin dejar de mencionar los matemáticos estadounidenses, Peirce, Ladd-Franklin[71] MacColl, Mitchell,[72] por mencionar globalmente a los principales grupos referentes.

Se procede a puntualizar los resultados de tres de los autores relevantes para este análisis, a razón de que por un lado completan la presentación de los representantes de los grupos con implicaciones en este trabajo, es decir, completan la labor de Peirce y Schröder como representantes del entorno norteamericano y europeo respectivamente. Y aparte de esto último, los sistemas de estos tres autores auxiliares por presentar, también cubren algunos vacíos interpretativos, notacionales existentes en los sistemas ya presentados e incluso en sistemas contemporáneos.

De esta manera, comenzando con Jevons en la década de los 60's del siglo XIX, más específicamente en 1864 con su *Lógica Pura o la Lógica de la Calidad y la Cantidad, con Anotaciones Acerca del Sistema de Boole y Acerca de la Relación de la Lógica Matemática* (1864) (*Pure Logic or The Logic of Quality apart from Quantity with*

---

[67] El análisis que se presenta a continuación, acerca de la obra de Jevons, McColl y los hermanos Grassmann, con respecto a la temática que compete este documento, es inspirada principalmente de la visión y los análisis realizados a las obras de estos autores, por parte de Grattan-Guinness (2000) y Schlimm (2024), contrastados en una revisión general y somera, no exhaustiva de los textos de origen.

[68] Como se menciona en el apartado anterior, de esta forma se lograron los avances de De Morgan y de Boole en un primer lugar.

[69] William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático y físico irlandes reconocido por sus importantes innovaciones y contribuciones al álgebra lineal y la física clásica.

[70] Hermann Grassmann (1809-1877), fue un matemático prusiano, nacido en Polonia, al que se le atribuyen contribuciones importantes para el origen del álgebra lineal temprana.

[71] Christine Ladd-Franklin (1847-1930), matemática, científica y activista que, aunque no tiene un apartado propio en este estudio, es una de las pioneras en el interés matemático de las mujeres norteamericanas, fue alumna de Peirce en la universidad Johns Hopkins, donde coprodujeron con otros autores, un importante tratado de lógica y álgebra: *Studies in Logic* (1883).

[72] Oscar Howard Mitchell (1851-1889) fue un matemático y lógico de la corriente americana, estudiante de Peirce, con grandes contribuciones en su trabajo y en el álgebra de la lógica.

Remarks on Boole's System and on the Relation of Logic and Mathematics), cuyos aportes más reconocidos e importantes son los que realizó a partir de los desarrollos y cambios de concepción booleanos como base de su trabajo, tal y como lo dicta el título de su publicación referenciada de 1864, en el que la gran mayoría de sus aportaciones fueron principalmente de corte notacional y complementario, al suplir de algunos vacíos conceptuales que se reclamaban como limitantes por parte de la comunidad matemática general legados principalmente del sistema booleano.

Limitantes originados principalmente en el trato indistinto y algunas veces con poco o sin ningún sustento que se les daba a las proposiciones en los argumentos inferenciales y las expresiones algebraicas surgidas de contextos lógicos. Es decir, se reportaban baches interpretativos por la comunidad matemática en general, al intentar extrapolar todas las propiedades y operaciones de los sistemas lógicos y los objetos pertenecientes a estos sistemas (tipo silogismos categóricos, o argumentos o juicios de cualquier índole, etc). Al pasar a lenguajes algebraicos más modernos, dígase fórmulas o ecuaciones algebraicas definidas en un dominio específico, con ciertas operaciones y valores, para lo cual Jevons complementó, con el siguiente aporte conceptual/notacional:

$$x+x=x,$$

Denominada ley de unidad por Jevons

Fórmula que se asemejaba al denominado tercer principio o ley de dualidad en el sistema booleano, pero que en este caso es definido por Jevons a partir de la operación de naturaleza disyuntiva, en lugar de la conjuntiva. La cual en el caso del sistema booleano sólo tenía sentido cuando las clases eran disjuntas o interpretadas como conjunciones exclusivas, haciendo con esto referencia a la unión exclusiva, lo cual se evidencia en la siguiente breve comparación:

$x+y$ significa $\forall\ a \in x+y \Rightarrow a \in x\ o\ a \in y,$ donde a **no** puede pertenecer a x y a y simultáneamente.

Esto se convertía en un limitante para desarrollos a partir del sistema booleano, y además no era concordante con las leyes lógicas ni algebraicas o filosóficas de los sistemas trabajados en ese periodo. Por otro lado, Jevons logró sobrepasar este bache, interpretando la unión como inclusiva, es decir, en el sistema de Jevons

$x+y$ significa $\forall\, a \in x+y \Rightarrow a \in x \text{ o } a \in y$ o **puede** pertenecer a ambos a la vez.

Por lo que, esta nueva interpretación de $x+x=x$, no violaba ninguna ley del álgebra, o algún precepto de la lógica del momento. Finalmente, estas contribuciones abrieron paso a la materialización de las leyes idempotentes retomadas y consolidadas en el sistema elaborado por Peirce.

Ahora bien, los aportes de McColl cubrieron varios desarrollos en relación con la temática del presente apartado, particularmente sus aportes de la década de los 70's del siglo XIX, principalmente con sus publicaciones en la revista de la LMS (Sociedad Matemática de Londres), *El Cálculo de Enunciados Equivalentes y Acerca de los Límites de Integración* (1877) (*The calculus of equivalent statements and integration limit*s). Así como también *El Cálculo de los Enunciados Equivalentes parte II* (1878) *(The calculus of equivalent statements II*). Estos aportes fueron mayoritariamente en el terreno notacional, al igual que Jevons y casi todos los autores encargados de estudiar la lógica simbólica del período entre 1860 y 1890, quienes se destacaron en la complementación y mejora de las falencias del sistema booleano.

En el caso de McColl, se destacan puntualmente sus contribuciones implementadas en aras de suplir la falta de símbolos o notaciones para las proposiciones negativas, similar a lo propuesto por De Morgan, para sus proposiciones contrarias, contranominales y concomitantes. Pero en este caso, la concepción simbólica de McColl era mucho más general que la de De Morgan y la de Boole, y enfocada en los duales de cada clase. De esta forma, McColl logró desarrollar un sistema que permitía negar diferentes expresiones de cualquier tipo, como por ejemplo las expresiones algebraicas correspondientes a los *primeros principios* de la teoría booleana.

Además, McColl coadyuvó junto con muchos de los autores del periodo moderno de las matemáticas, tanto mencionados como no mencionados en estos apartes, a consolidar la interpretación de los términos de las proposiciones y las fórmulas lógicas correctamente de forma indistinta, como entes de la misma naturaleza. De la misma manera hizo expresa en su literatura la posibilidad de tener una fórmula dual para cada una de las fórmulas surgidas de algún sistema lógico, gracias a la facilidad que brindaba su sistema para negar cualquier expresión lógico/algebraica. Además, a partir de los desarrollos de McColl se les empezó a

conferir al ***0*** y al ***1*** los valores de falso y verdadero, respectivamente, lo que se suele atribuir erróneamente a Boole.[73]

Por otro lado, a pesar que como se menciona en este apartado, ambos hermanos Grassmann tuvieron alguna incidencia con respecto a los orígenes y la aparición de la teoría orden, pues ambos pertenecían y eran fundamentales en el grupo algebraico alemán, el mayor aportante de entre estos dos hermanos para la mencionada teoría fue Robert Grassmann, con resultados directamente ligados a esta temática y cuyo trabajo se dio durante el apogeo de la parte inicial del periodo de las matemáticas modernas. Aun así, es menester mencionar de Hermann Grassmann que fue uno de los pioneros en la teoría de las magnitudes con su obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* (1844),[74] sobre la que se inspiró profundamente su hermano menor y en la que también surgían operaciones con características de naturaleza conjuntiva y disyuntiva, aunque en el caso de este sistema de Hermann Grassmann las operaciones se originaban y eran comprendidas desde una perspectiva completamente geométrica.

Tanto es así, que para las operaciones del sistema de Hermann Grassmann se definían conceptos como la combinación lineal, la independencia lineal, o la dimensión, entre otros. Los cuales eran conceptos tan avanzados para aquella época que emergían de un sistema que se puede entender en la actualidad, como un espacio vectorial temprano, es decir, un sistema con estructuras algebraicas vectoriales primigenias.

Por otro lado, Robert Grassman, como representante determinante de la visión del álgebra de la lógica alemana, que además trabajó de la mano de Schröder desde el periodo inicial de la década de los 70's del siglo XIX hasta que culminó la producción de sus obras más sobresalientes a finales de esta misma década. Realizó algunas contribuciones importantes a la teoría desarrollada por los autores antes

---

[73] Lo que Boole realizó, como se puntualiza en el capítulo pasado, fue definir expresiones como interpretables o no interpretables donde el ***0*** y el ***1*** eran tal cual números naturales, que en ciertas ocasiones podían representar algo análogo al conjunto vacío, y el universo de objetos en consideración. Es por esto que, según los textos revisados y el análisis realizado, nada en el sistema booleano fue definido o se le atribuyó la carga lógica de falso o verdadero tal como se le atribuye a este sistema booleano por el imaginario colectivo matemático, por lo que dicha atribución al sistema booleano es al menos poco precisa o inexacta.

[74] El título completo es *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, que se puede traducir como *Teoría de la extensión lineal, una nueva rama de las matemáticas*, o simplemente *Teoría de la extensión lineal,* la cual es una obra en la que se sientan firmemente las bases del álgebra lineal moderna. y que aunque no fue desarrollada ni publicada en el periodo de las matemáticas modernas *per se*, es reconocida por la comunidad matemática en general como parte importante de las matemáticas desarrolladas en este periodo. Es decir, Hermann Grassmann fue un adelantado a su época.

referenciados en este bloque, las cuales yacen consignadas principalmente en su tratado denominado *La Teoría de las Formas o Matemáticas en Desarrollo Formal Estricto o Extraño* (1872) (*Die Formenlehre Oder Mathematik in Strenger Formeletwicklung*).[75] Publicación estrechamente influenciada por la obra de su hermano mayor, en la que relacionaba la teoría de las magnitudes[76] con las nociones propias del álgebra de la lógica. Dicho de otra manera, R. Grassmann trabajó por unificar la lógica, el álgebra y la teoría de magnitudes.

Específicamente, las principales contribuciones de R. Grassmann que derivaron en la definición de algunas de las propiedades logradas hasta este punto del repaso histórico realizado son principalmente de carácter notacional y concernientes a la búsqueda de una especie de dualidad que debían obedecer los elementos de su sistema. Todo esto, principalmente a través de un proceso de abstracción luego de una cuidadosa recopilación y unificación construida a partir de los sistemas predecesores y contemporáneos al suyo.

Se ejemplifica esto con la denominada ley de idempotencia lógica para las operaciones aditivas y de producto de su sistema que eran una evolución de las operaciones del sistema booleano:

$$e + e \equiv e \quad \rightarrow \text{Dual} \rightarrow \quad e \cdot e \equiv e$$

$$e \cdot e \equiv e \quad \rightarrow \text{Dual} \rightarrow \quad e + e \equiv e$$

Y aunque estas expresiones ya se podían derivar del sistema booleano, no se reconocían como objetos de naturaleza dual, es decir, en este sistema estas dos propiedades no estaban conectadas más que por ser expresiones de operaciones de un mismo sistema, ya que la dualidad en Boole era difusamente comprendida. Por lo tanto, la compresión dual de la naturaleza de los objetos en los sistemas lógico/algebraicos es una de las grandes contribuciones del sistema grassmanniano.

Lo que permitiría en sistemas posteriores, la formulación de por ejemplo la distributividad por ambos lados, contemplando multiplicaciones sobre adiciones, que es la distributividad usual emergida de la aritmética o de operaciones con números enteros. Así como también adiciones sobre multiplicaciones, la cual no está definida

---

[75] Publicación que, de la mano de sus otras cinco publicaciones a lo largo del periodo de tiempo antes descrito, se relaciona con lo que se denominó *Die Grösenlehre, o teoría de las magnitudes*.

[76] La cual es una teoría que hace las veces de análisis matemático de la época.

para todos los casos, pero es más general. Además de la consolidación, de la representación de las expresiones en el formato de doble columna.

También es importante mencionar el desarrollo de la notación grassmanniana para la negación de proposiciones o expresiones, que a diferencia de Boole en cuyo sistema no se definen expresiones negativas, e incluso de la notación de MacColl pasó de una comilla a', a una barra $\bar{a}$ para denotar estas expresiones. Por último, Grassmann cambió la notación que eliminaba la necesidad de considerar el $\boldsymbol{1}$ como el universo dando origen a la siguiente notación para la unión y la intersección con "+" para la adición y "·" para el producto, donde $\mathcal{T}'$ sería la nueva notación para el universo de objetos contemplados:

	Boole	R. Grassmann
Idempotencia aditiva	$a + a = 1$	$a + a = \mathcal{T}'$
Idempotencia producto	$a \cdot a = 0$	$a \cdot a = 0$

Figura 8: Esquema comparativo de la notación para el universo en Boole vs la notación grassmanniana (inspirada en Schlimm, 2024)

Para ir terminando este breve recuento de algunos autores importantes, el sistema grassmanniano de donde surgen las expresiones anteriores, estaba mucho más cerca de las concepciones que adoptarían Peirce y Schröder para sus propios sistemas, que de las nociones de partida booleanas presentadas en el capítulo anterior. Pues ya con Robert Grassmann, la unión y la intersección eran consideradas como operaciones lógicas, propiamente dichas, que representaban fórmulas, o expresiones lógico/algebraicas en las que ya se habían superado muchos de los baches interpretativos de las teorías de origen.

3.1.2. Peirce: la génesis de la consolidación de las condiciones de necesidad para la aparición de la teoría del orden

Los aportes de Peirce[77] que fueron importantes para la construcción de la cronología histórica del surgimiento de los retículos, son considerados para este análisis como un ladrillo más en la cimentación del edificio de la lógica, la teoría del orden e incluso la teoría de conjuntos. Teorías a las que a partir del trabajo peirceano y de otros autores por abordar, se les empezó a conferir un estatus más formal, con un trasfondo filosófico e incluso psicológico, pero por sobre todo se les brindó un trasfondo algebraico con su propio lenguaje y reglas. Es por esto, que la literatura peirceana relevante para este capítulo, a pesar de que su trabajo se extiende a lo largo de toda la primera mitad del periodo moderno, son aquellas producciones ubicadas históricamente entre mediados de la década de los 60's y finales de la de los 70's del siglo XIX.

Sus primeras publicaciones con respecto a la temática en cuestión, sin contar sus diversas correspondencias con diversas personalidades matemáticas de la época, se dan en el marco de sus revisiones y análisis profundos a la obra de De Morgan y de Boole. Como por ejemplo su publicación en la revista *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* titulada *Un Mejoramiento del Cálculo lógico de Boole* (1867) (*An Improvement on Boole's Calculus of Logic*), así como también su publicación en la revista *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences* cuyo título es *Descripción Peirceana de la Notación para la Lógica y Relacionados, Resultantes de una Amplificación de las Concepciones de Boole y su Cálculo de la Lógica* (*Cálculo Proposicional*) (1873) (*Peirce, Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole Calculus of Logic*). Finalmente se destaca otro documento importante, el tratado peirceano *Sobre el Álgebra de la Lógica* (1880) (*On the Algebra of Logic*), publicado en la revista *American Journal of Mathematics.* Publicaciones de las que salieron a flote varios productos importantes para la investigación consignada en estos apartados.

Es así que, de este periodo de trabajo de Peirce, sus innovaciones más importantes se dan en una conjugación de, por un lado, su reconceptualización de

[77] Originalmente Charles Sanders Peirce, cambió su nombre a Charles Santiago Peirce según Grattan-Guinness (2000).

varias nociones booleanas y, por otro lado, de las precisiones y reajustes realizados a varias operaciones que se rastrean incluso desde el sistema de De Morgan.

Así como también de diferentes modificaciones llevadas a cabo en sistemas derivados o complementarios al sistema booleano y de De Morgan, tipo los sistemas de Jevons, Ladd-Franklin o Robert Grassmann, entre otros autores. Razón por la cual, en este capítulo se pondera el trabajo de Peirce como un complemento de nivel afianzador de las ideas y conceptos propios de los sistemas presentados y mencionados hasta este punto, fuesen predecesores o contemporáneos a él. Ya que en sus publicaciones se dedicó en otras palabras, a llenar vacíos conceptuales heredados de los sistemas de los que partieron estos análisis. Dando paso así a su propio sistema ordenado primigenio, establecido a través de la introducción de conceptos cruciales como la *inclusion in* y las operaciones de su sistema, aunado a las propiedades algebraicas que estas relaciones y operaciones cumplían.

De esta manera, luego de esta breve introducción general de las aportaciones peirceanas, se parte este apartado con la siguiente innovación conceptual fundamental para la progresión de los conceptos de este análisis. Pues de todos los avances peirceanos con repercusiones en el desarrollo de la temática de este capítulo, el avance más relevante y tal vez el más disruptivo, con implicaciones directas en la teoría de conjuntos y en la incipiente construcción de sistemas ordenados es su introducción del concepto de *cópula de inclusión* (⋖), derivado del *inclusión dentro*[78] (*inclusion in* o *ser tan pequeño como*), ambos abstraídos del pensamiento matemático deductivo (específicamente de los conectores lógicos entre el sujeto, los términos y las premisas en los silogismos).

Puntualmente el *inclusión dentro* se define en el apartado *Definiciones Generales del Signo Algebraico* (*General Definitions of the Algebraic Signs*) de su *Descripciones Peirceanas de la Notación para la Lógica y Relacionados* (1873), tal y como sigue:

> ***Inclusión dentro o ser tan pequeño como*** *es una relación transitiva. A consecuencia se cumple que**

[78] Este concepto peirceano se rastrea en la literatura analizada desde Peirce (1873), el cual cuenta con la misma notación que el cópula de inclusión, pues se puede considerar que el cópula es una evolución conceptual de este. Por otro lado, un concepto similar a este como conector entre términos, ya era contemplado por De Morgan y es a partir de este que Peirce inspiró su teoría de cópulas.

$$Si\ x \prec y,$$

$$y \quad y \prec z,$$

$$entonces\ x \prec z.$$

> **Yo uso el signo $\prec$ en lugar del $\leq$, mis razones para no gustarme el último es que no puede ser escrito lo suficientemente rápido, y pareciera representar la relación que expresa el ser compuesto de dos otros los cuales en realidad son complicaciones de este. Es universalmente admitido que una concepción más elevada es lógicamente más simple que un concepto bajo y un concepto amplio es más simple que uno difuso, uno incluido dentro del otro. Ahora toda equivalencia es una inclusión dentro, recíprocamente no es cierto; por lo tanto el inclusión dentro, es un concepto más amplio que la equivalencia, y por lo tanto lógicamente uno más simple* (Peirce 1873, pág. 318).[79]

Definición que después le dio paso "oficial" al *cópula de inclusión* que Peirce definía en su tratado *Sobre el Álgebra de la Lógica* (1880), de la siguiente forma:

> *El símbolo $\prec$ es la cópula, y significa principalmente que cada estado de cosas en las cuales una proposición de la clase P_i es verdadera es un estado de cosas en las cuales la proposición correspondiente de la clase C_i es verdadera también* (Pierce 1880, pág.18).[80]

De estos conceptos se puede decir, que el *cópula de inclusión* es el concepto semilla de una relación de orden parcial, como el orden definido por *ser tan pequeño como*. Con el cual se establecía una jerarquía natural entre los objetos de los sistemas y con el que según Peirce debía sustentarse la noción de equivalencia entre estos mismos objetos. Razón por la cual, de las definiciones de estos conceptos partió la reconceptualización de la sustentación lógica y filosófica, detrás del uso de las

[79] Publicado en la revista *Memoir of the American Academy of Arts*. Traducción libre.
[80] Traducción libre.

principales relaciones y operaciones entre los objetos de todos los sistemas influidos por el sistema peirceano.

Es así, que, de entre todas las relaciones y operaciones que aparecen en sistemas previos al de Peirce, se destaca el impacto que tuvo el denominado *cópula de inclusión* en la sustentación algebraica de las siguientes operaciones: adición **(*a+,b*)** representando una idea de unión originada en la relación de agregación, y el producto **(*a,b*)** representando una idea de intersección originada en la relación de composición. Ambas, composición y agregación, son relaciones propias originarias del sistema de De Morgan. Operaciones que estaban caracterizadas por medio de propiedades algebraicas tempranas que representaban las nociones de conmutatividad, asociatividad, absorción y la idempotencia derivada del sistema booleano. Eso sí, propiedades pensadas o definidas en general para el tratamiento de términos y premisas lógicas, tal como se evidencia en la literatura referenciada, lo que limitaba las potencialidades y el alcance de este sistema, diferenciándolo de sistemas ordenados posteriores mucho más especializados, formales y reconocidos.

Es necesario reiterar que estas operaciones son redefiniciones de lo realizado por De Morgan y Boole, pues a partir de la mencionada reformulación relacional y operacional con base en la cópula de inclusión, estas operaciones efectivamente se sustentan lógica, filosófica e incluso psicológicamente, en las construcciones peirceanas, difiriendo un poco del ejercicio booleano de "simple" extrapolación del álgebra escolar, como se pudo evidenciar en el capítulo I. De esta forma se erige pues, uno de los primeros sistemas de orden reportados en este estudio y por ende en la historia de las matemáticas modernas, aunque sin ser completamente definido y con connotaciones sutilmente distintas al orden en el que efectivamente se definen posteriormente objetos análogos a los retículos.

También es importante recalcar el impacto del *cópula de inclusión* sobre otras nociones, como por ejemplo en la idea de inclusión general preexistente en aquella época, aplicada sobre los objetos de los sistemas lógico/algebraicos predecesores y algunos contemporáneos con sus clases, términos en los silogismos o los conjuntos de premisas.[81] Inclusión general a la que el *cópula de inclusión* proveyó de acepciones

[81] A partir de *Sobre el Álgebra de la Lógica* de Peirce, en publicaciones revisadas, existen registros de referencias a los conjuntos denominados propiamente como "conjuntos" (*sets*), haciendo referencia a un conjunto de premisas. Pero también sigue utilizando el término clase (*class*), de la misma forma que se precisó en el apartado de De Morgan.

similares a las que este concepto tiene en la actualidad, y que a su vez devino en la reconceptualización de la noción de equivalencia y del igual "=" entre las expresiones lógico algebraicas tal como eran concebidas antes de Peirce. Ya que, según Bellucci en la IEP,[82] para Peirce el surgimiento y el sustento de los conceptos desarrollados a partir del sistema booleano, eran insatisfactorios y limitaban la operatividad con los mismos objetos del propio sistema.

> *La insatisfacción de Peirce con respecto a cómo Boole representaba los silogismos como ecuaciones algebraicas lo llevaron a desarrollar un nuevo enfoque algebraico de la lógica, lo cual realizó al combinar el cálculo de Boole con el tratamiento de De Morgan de las relaciones* (Bellucci, IEP).[83]

Por consiguiente, y complementando un poco más lo presentado anteriormente, pero desde un enfoque de reconocimiento de los procesos innovativos por los que pasaron las nociones en los sistemas peirceanos, se puede evidenciar en la literatura revisada para este apartado, que los avances atribuidos a este autor se alcanzaron mediante un ejercicio de unificación simbólica y conceptual de muchos de los sistemas previos. Unificación lograda principalmente a través de la abstracción y modificación de los sistemas booleano y de De Morgan.

De esta forma, Peirce llegó a engendrar un sistema análogo a lo que se reconoce actualmente como lógica de predicados de primer orden, en suma a otros aportes relevantes para el álgebra de la lógica, como la teoría de cuantificadores, desarrollada entre varios autores de esa parte del periodo moderno. Logrando así construir un sistema en el que se rastrean nociones explícitas de naturaleza ordenada que satisfacen los criterios para hablar de retículos ordenados e incluso retículos desde el álgebra, pero al ser un sistema tan abocado a los sistemas lógicos y los objetos propios de este, cualquier impulso de introducción formal del orden tal como se conoce hoy día, se diluye entre los pormenores de la lógica.

Aun así, gracias a los aportes peirceanos, las concepciones que dan sustento matemático al orden y a los retículos fueron dejando de lado la recurrencia excesiva a la intuición, como sucede en algunas definiciones del sistema booleano y en algunas de las definiciones de los sistemas contemporáneos al peirceano, tipo Jevons

---

[82] *La Lógica de Peirce* (*Peirce's Logic*), por Bellucci F, en *La Enciclopedia de Internet de Filosofía* (*The Internet Enciclopedy of Philosophy*), ISSN 2161-0002, https://iep.utm.edu/, Julio 2026.

[83] Traducción libre.

o MacColl. Y empezaron a materializar una cierta formalidad "ordenada", en primer lugar, a partir de Peirce y posteriormente con las aportaciones schröderianas.

Por otro lado, aunado a la descripción del origen de conceptos como el *inclusión in* o el *cópula de inclusión*, se procede a realizar una última especificación de los procesos innovativos peirceanos necesarios para la sustentación de un concepto de su sistema. Procediendo entonces a caracterizar un poco más a profundidad el contexto lógico/algebraico en el cual se soporta conceptualmente la utilización del igual, así como la reconcepción de este objeto proporcionada por Peirce.

Pues en la misma línea de pensamiento de Bellucci exhibida recién, con respecto a la sustentación de la igualdad, lo que Peirce halló en sus revisiones del sistema booleano para el caso de la igualdad como de su signo "=", fue indiscutiblemente una gran falta de sustento lógico, algebraico e incluso filosófico. Es decir, Peirce se encontró con la utilización prácticamente indiscriminada o sin soporte teórico de este concepto.[84]

Consecuentemente, luego de todas las apreciaciones y precisiones anteriores, Peirce utilizó el mencionado *cópula de inclusión* ($\prec$), de modo que dos objetos cualesquiera surgidos de proposiciones, silogismos, o expresiones lógico/algebraicas, no eran iguales por la mera intuición matemática de serlo, sino porque verificaban el estar contenidos o "ser tan pequeños como" los mismos objetos entre sí. Es decir, de esta manera dos fórmulas lógicas, silogismos, clases, etc, de un sistema en particular representadas por x,y, serían iguales $x=y$, sí $x \prec y$ y a su vez $y \prec x$. Lo que se asemeja totalmente a la forma como se sustenta la igualdad en la teoría intuitiva de conjuntos y la cual es la noción base de la definición de igualdad entre conjuntos en el sistema de ZF, en suma a otras precisiones técnicas como el axioma de extensionalidad. De forma que a partir de los avances peirceanos, se contribuyó a la construcción de importantes concepciones conjuntistas de las matemáticas del periodo moderno, sobre el cual se cimentarían gran cantidad de los desarrollos por venir.

Sintetizando todo lo anterior, a partir de los progresos conceptuales que se detallaron y principalmente con la introducción del *cópula de inclusión,* la teoría del orden tal y como es contemplada en la actualidad se va haciendo más tangible en la

---

[84] Esto en referencia a que en el sistema booleano, el acto de "igualar" expresiones lógico/algebraicas a valores definidos de los números naturales como 0 y 1, o a otras fórmulas lógicas no tenían ningún tipo de justificación, ni siquiera en su propio sistema, ya que se estaban igualando objetos de *distinta naturaleza*: números naturales y expresiones emergidas de la lógica.

progresión histórica presentada, ya que se adicionan nociones determinantes para la construcción definitiva de los retículos al relato presentado. Dicho de otra manera, con Peirce se empiezan a materializar las nociones de orden, y se empiezan a fundamentar las operaciones definitorias de los sistemas ordenados. Lo que hace necesaria la introducción de otro tipo de objetos que "funcionen" o "trabajen" sobre estos nuevos órdenes emergentes. Avanzando así hacia la definición de objetos propios del orden equivalentes al *Inf{a, b}* y el *Sup{a, b}*, a partir de los cuales finalmente se definen los retículos.

Ahora bien, a pesar de que ya se profundizó en las principales contribuciones peirceanas relacionadas exclusivamente con el presente trabajo de grado, es importante mencionar algunas contribuciones importantes del trabajo de Peirce, nutriendo aún más la progresión histórica reportada en este análisis.

- En su trabajo, complementa la sustentación lógica, filosófica e incluso psicológicamente, del uso de los valores de verdad explícitos falso (F), y verdadero (V), con las acepciones actuales (temática abordada por Jevons y MacColl, como se menciona en sus apartes), en su publicación *Acerca del Álgebra de la Lógica (1880) (On the Algebra of Logic).*
- La revolución fregeana, se desarrolló con base en los avances y teorías peirceanas, particularmente se destacan sus aportaciones a la teoría de cuantificadores lógicos, utilizados por ejemplo para las demostraciones rigurosas sustentadas y consistentes en un mismo sistema.
- Derivado del punto anterior, las contribuciones de Peirce son tan relevantes en la historia de las matemáticas modernas, que a pesar que la visión lógica, algebraica y filosófica, "triunfante" a finales del siglo XIX fue la estipulada por Frege/Russell (también denominada revolución fregeana), la notación prevalente, con la que se estableció esta revolución, es la notación originada en el sistema de Peirce y consolidada posteriormente por Schröder.
- Contribuyó explícitamente con avances hacia la posterior comprensión y formalización de la propiedad distributiva, ya que, a diferencia de la primera ley o principio de Boole, la distributividad peirceana era más general, y contemplaba una visión temprana de la doble distributividad (sin demostrarla formalmente). Doble distributividad de igual manera trabajada por Schröder, alcanzando unos resultados complementarios a los alcanzados por Peirce.

  - $(a+,b),c =, a,c +, b,c$ y $a,b +, c =, (a+,c) , (b+,c).$

3.1.3. Schröder: el sistematizador primario de la lógica algebraica para la consolidación de las condiciones de necesidad para el paso a la teoría del orden

Luego de haber transitado por una revisión necesaria a la literatura de algunos autores prominentes con respecto a la consolidación del álgebra de la lógica como Jevons, MacColl, Robert Grassmann, además de un recuento acerca de los principales avances peirceanos de acuerdo a los requerimientos de este apartado. Se procede a completar algunos de los principales desarrollos originados en el primer capítulo con las contribuciones schröderianas reseñadas en el presente análisis. Ponderando las contribuciones schröderianas de este apartado, como se señala incluso desde el título del capítulo, como los aportes que apuntalan y sintetizan gran parte de los resultados del álgebra de la lógica de la primera mitad del periodo de las matemáticas modernas. Permitiendo avanzar en la progresión conceptual hacia la conquista de los retículos y los sistemas sobre los que estos se afianzan.

De esta manera, como en todos los análisis anteriores, se puntualizan las obras de la teoría schröderiana más importantes para los quereres de este estudio, entre las cuales están sujetas a revisión sus publicaciones de la última década del siglo XIX, fundamentalmente sus renombrados tratados en forma de tres volúmenes, acerca del álgebra de la lógica: *Lecciones Sobre el Álgebra de la Lógica (Lógica Exacta),* publicadas entre *1890* y *1905* (*Vorlesungen Über die Algebra der Logik (exacte Logik*)), también conocidas como las *Vorlesungen*. Obra que cuenta con un total de 27 lecciones o lecturas, distribuidas de la siguiente manera: el volumen I tiene 14 lecciones que constan de 27 secciones, el volumen II tiene 8 lecciones, empezando desde la decimoquinta lección hasta la vigesimotercera lección, con 21 secciones, desde la sección §28 hasta la sección §49. Y por último, el volumen III tiene 4 lecciones, empezando desde la vigesimocuarta lección hasta la vigesimoséptima lección, con 6 secciones, desde la sección §50 hasta la sección §56.

Por otro lado, al igual que en el caso del apartado de acerca de Peirce, se mencionan algunas obras schröderianas anteriores a la década de los 90's del siglo XIX que repercutieron en su famosa serie de lecciones. Principalmente: *Textos de Aritmética y Álgebra para estudiantes y maestros (1873) (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studier-ende)* y su texto *El Círculo de Operaciones del Cálculo Lógico (1877) (Der Operationskreis des Logikkalkuls).* En los cuales se van

sistematizando paulatinamente los desarrollos que concretarían finalmente su sistema, retratado en su mayoría en sus *Vorlesungen*.

Más específicamente, las contribuciones conceptuales aportadas por Schröder relacionadas con este análisis, que consolidan los avances lógico/algebraicos alcanzados por la comunidad matemática de finales de la primera mitad del periodo de las matemáticas modernas, y que se proceden a presentar. Se dan como en la mayoría de los sistemas ya analizados, por procesos de abstracción y modificación. En este caso en particular, los progresos schröderianos de este capítulo se dan por ambos procesos.

Por un lado, mediante procesos de modificación de los sistemas elaborados en conjunto por la comunidad matemática de la parte inicial del periodo moderno hasta el inicio de la elaboración de sus *Vorlesungen*, lo cual es completamente constatable al revisar los desarrollos y avances consignados en la literatura referenciada, en forma de precisiones, completamientos o formalizaciones a teorías como la de Boole, Grassmann o Peirce.

Por otro lado, y no menos importante, gran parte de los progresos que se alcanzan en la literatura schröderiana se logran mediante procesos de abstracción, lo cual Schröder logró llevar a cabo principalmente al comprender e interiorizar a profundidad la naturaleza dual[85] que obedecían los objetos propios de los sistemas lógico/algebráicos. Eso sí, entendiendo la dualidad desde un enfoque más general, no solo como una noción que surgía de operar únicamente elementos lógicos entre sí, sino cualquier tipo de objetos, dando paso a conceptos más sólidos, generales y más abstractos.

Destacando para este análisis el *Gebiet* o conjunto de elementos de un dominio, que obedecían unos principios o propiedades intrínsecos a los objetos de ese *Gebiet* de forma casi abstracta. Esto último según Schröder, un *Gebieten* o la operatividad de los elementos del *Gebiet*, de forma abstracta o general. Nociones que de la mano del *Klassenkalkul* o el cálculo o manipulaciones algebraicas de las clases o de los conjuntos en general terminarían derivando en el *Gebietekalkul,* noción temprana de los sistemas de orden o de la teoría schröderiana del orden. Ya que como se extrae de Bernays (1975), todas estas nociones están originadas en lo que

[85] Dualidad que se puntualiza más adelante.

Schröder denominó de manera general en su trabajo, como *Cálculo Idéntico de Dominios* o *identischer Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit*.

Remarcando con lo anterior que a partir del trabajo Schröder se empezó a evidenciar en la comunidad matemática que entraba al siglo XX, un cambio de concepción fundamental con respecto a los objetos de los sistemas. Es decir, el foco ya no eran los conjuntos de objetos por sí solos, el foco era toda la colección, eran los objetos de la mano de las operaciones que los caracterizaban en el sistema que estuviesen siendo tratados.

De esta manera, por ejemplo en los sistemas lógico/algebraicos producidos a finales del siglo XIX, los términos o nombres en las proposiciones ya no eran por sí solos el foco de estudio, eran dichos términos de la mano de las respectivas operaciones y de las propiedades que las caracterizaban, dígase la suma o el producto[86] aplicadas a estos dominios. En otras palabras, se les empezó a conferir a los sistemas de esta parte del periodo moderno trazas de formalidad y empezó a ser percibida más palpable que en los sistemas anteriores una incipiente concepción estructural de los sistemas.

Ahora bien, para comenzar con el recuento de las contribuciones schröderianas que dieron paso a las nociones de orden y de retículo que conciernen al presente trabajo de grado, es necesario reportar en un primer lugar la introducción de la relación primitiva fundamental de su sistema, la *subsunción* $\preccurlyeq$, relación que se introduce desde el volumen I de sus lecciones, específicamente desde la primera lección en la sección §1 en la página 126. Esta *subsunción* es determinante, aún más que determinante, *necesaria* para la definición de todos los conceptos, todas las propiedades y principios en los que se sustentan todo el sistema lógico/algebraico de Schröder en general. Pero sobre todo, para la teoría de orden schröderiana presentada aquí además de algunas de las concepciones iniciales de la teoría de conjuntos.

Esto es así debido a que a partir de esta relación de *subsunción* $\preccurlyeq$, que comparativamente es similar al *cópula de inclusión* ($\prec$) del sistema peirceano,

[86] Importante recordar que estas dos operaciones en los sistemas preschröderianos, representaban por ejemplo las relaciones de carácter conjuntivo (unión), y disyuntivo (intersección), otras operaciones (como las que aparecen en la figura 6 del apartado booleano como fórmulas o expresiones lógico/algebraicas), representaban las relaciones de contenencia.

siendo una especie de progresión conceptual más fina,[87] de donde se materializan formalmente algunas de las concepciones más técnicas, más propias y más reconocidas del orden. Por mencionar, los conceptos de elemento mínimo y máximo en un orden, toman forma por primera vez en este sistema, surgiendo inherentemente en pares duales aunados a las concepciones de "ser más pequeño que" o "menor que", así como sus duales, "ser más grande que" o "mayor que", derivados de la subsunción. Estas últimas concepciones, en evidente y estrecha relación con el "ser tan pequeño como" de Peirce, y cuya diferencia respecto a Schröder es tan mínima como establecer la diferencia entre "el ser tan pequeño como" peirceano y el "menor qué" schröderiano,[88] hicieron tránsito desde las nociones más generales de inclusión hacia las concepciones más precisas de orden.

Así pues, para Schröder:

a es b o todo a es b, se interpretaba perfectamente a través de su relación de subsunción de la siguiente manera:

$$a \preccurlyeq b$$

De esta forma, a partir de la definición de la relación fundamental de su sistema Schröder deriva los siguientes dos principios (*prinzip* o *Grundsatzen,* tal como él los denominó) básicos de su teoría, publicados originalmente en el primer volumen de sus lecciones, los cuales se definen a partir de la §4 sección, página 168:

Prinzip I. $a \preccurlyeq a$

Prinzip II. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$, entonces también $a \preccurlyeq c$

Definidos de esta forma, estos principios traen a la memoria y se asemejan bastante a dos de los tres criterios necesarios para que una relación sea una relación de orden tal cual se definieron estos conceptos en la primera parte del capítulo I, en la denominada perspectiva matemática de este trabajo.[89] Quedando así pendiente

[87] Estableciendo paralelos, se entiende que el *cópula de inclusión* se origina por lo menos indirectamente a partir de las nociones "semilla" de contenencia del sistema booleano, como las que aparecen reportadas en la figura 6 de dicho apartado. Esto simplemente para tener presente la progresión conceptual llevada a cabo a lo largo de estos análisis.

[88] Es decir, en últimas los progresos peirceanos y schröderianos van de la mano y hacen parte del mismo cambio de concepción.

[89] Por recordar, las relaciones de orden que son las que dotan a los conjuntos de un orden específico y con las cuales se erige a su vez la denominada teoría del orden como un gran campo de estudio, en donde finalmente toman forma los retículos.

sólo un principio, un criterio, una propiedad más para que esta definición temprana de las relaciones de orden, y por tanto la teoría de orden definida por Schröder sea completamente equiparable a lo definido en la referenciada perspectiva matemática.

Haciendo un recuento rápido y comparativo, de las propiedades necesarias para que una relación sea de orden (o de equivalencia), según lo estipulado en la mencionada perspectiva matemática, tenemos la siguiente figura:

Prinzip de Schröder		Propiedad		Notación (en el orden)
I. $a \not< a$	⇔	Reflexiva	⇔	R es reflexiva en A, si $\forall\, a \in$ A, aRa
II. Si $a \not< b$ y $b \not< c$, entonces también $a \not< c$	⇔	Transitiva	⇔	R es transitiva en A, si $\forall\, a, b, c \in$ A, aR$b \wedge b$R$c \Rightarrow a$Rc
III. Sin correspondencia directa	⇔	Antisimétrica	⇔	R es antisimétrica en A, si $\forall\, a, b \in$ A, aRb y bR$a \Rightarrow a = b$
IV. Sin correspondencia directa	⇔	Simétrica	⇔	R es simétrica en A, si $\forall\, a, b \in$ A, aR$b \Rightarrow b$Ra

Figura 9: Paralelo entre los principios del sistema schröderiano y las propiedades necesarias para definir una relación de orden o de equivalencia (inspirado de Schröder 1890).

Se puntualiza pues el surgimiento de estos dos principios, validando en la literatura schröderiana lo recabado de los especialistas en este autor, como Bernays (1975), que establece que el surgimiento de estos dos principios en el sistema de Schröder obedece a lo siguiente:

Prinzip I: Se deriva a partir de la ley de identidad (*law of identity*) (reconocida desde la lógica clásica, utilizada para igualar silogismos aristotélicos), en la cual se establecía que todo término x y y son idénticos a sí mismos y por ende toda proposición conformada por dichos términos, es idéntica a sí misma, denotado esto

como $\mathcal{P}_x=\mathcal{P}_x$ o $\mathcal{P}_y=\mathcal{P}_y$.[90] A su vez se reconoce también, la influencia del trabajo de Peirce en la definición de este principio, luego de los grandes avances logrados por este autor como se reportan en el apartado anterior.

Prinzip II: Este principio se deriva del trabajo de Schröder con los silogismos clásicos y de su estudio exhaustivo de todo el trabajo de autores como De Morgan y Boole, derivando así este principio de una de las reglas silogísticas de la inferencia, la denominada regla de silogismo hipotético que establece que con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, premisas de un argumento, si $\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}\rightarrow\mathcal{R}$ entonces $\mathcal{P}\rightarrow\mathcal{R}$, es decir, un criterio de naturaleza transitiva.

Ahora bien, en aras de establecer puntualmente en qué parte de la literatura schröderiana se estipulan "oficialmente" las relaciones de orden, o al menos lo más cercano posible a como se conocen estas relaciones en la actualidad. Es necesario revisar los volúmenes II y III de las *Vorlesungen* para encontrar lo que sería el tercer principio o la propiedad antisimétrica. O dicho en pocas palabras, para que una relación conceda el paso a los órdenes sobre los conjuntos.

Es así qué, específicamente en el volumen II de las *Vorlesungen*, a los dos principios base del sistema schröderiano, se les suman una serie de definiciones, subprincipios o principios auxiliares, derivados de los dos principios originales, entre los cuales se encuentran subprincipios y definiciones que son perfectamente equiparables a la propiedad antisimétrica de las relaciones de orden buscadas aquí. Así como también se encuentra la propiedad simétrica para las relaciones de equivalencia. Lo que finalmente se define así, ya que al parecer para Schröder no era necesario definir expresamente la antisimetría como un tercer principio, pues esta es perfectamente derivable de los dos principios originales, tal como se evidencia en el volumen II, en las páginas 5 y 6 sección §28 de la lección decimoquinta (con respecto a la igualdad):

> *Así concretamente, a menudo se presentaron premisas como si debieran asumirse de forma simultánea. Por ejemplo: "si* $a\preccurlyeq b$ *y al mismo tiempo* $b \preccurlyeq a$, escríbase $a=b$*" -así rezaba la definición (1) de la igualdad-; "Si*

[90] Esta notación no es utilizada en ninguno de los textos revisados, con respecto específico a las premisas y los términos. En este caso se utiliza para hacer énfasis en la idea que los términos que estaban dentro de las premisas o proposiciones eran los que eran idénticos y que a su vez le conferían la identidad a las premisas o proposiciones que conformaban.

(simultáneamente) a≼b y *b≼c,* entonces *a≼c (y debe serlo)"- el principio II* (Schröder 1891, pp. 5-6).[91]

En síntesis, y como parte del mismo cambio de concepción mencionado antes, y es la idea que se quiere dejar plasmada en este capítulo, con Schröder se concretó un importante cambio de concepción iniciado en Peirce, en el que se ponderan las relaciones primitivas sobre las operaciones, en este caso el orden derivado de la *subsunción*, fungía como la herramienta con la que se definían las operaciones del sistema schröderiano. Es decir, el orden es primitivo y las operaciones se definen en términos de dicho orden, así como los sistemas axiomáticos schröderianos en general, al contrario de los sistemas probooleanos, donde se priorizaban las operaciones para dar sustento a las relaciones y las propiedades.[92]

Por otro lado, es momento para hacer espacio a un paréntesis determinante con respecto al concepto de dualidad,[93] y de cómo esta era entendida por Schröder,[94] que según se extrae de su literatura y de los especialistas en su trabajo, era entendida como un principio intrínseco a los objetos lógico/algebraicos, lo que influyó por supuesto en su definición de los objetos de los sistemas ordenados y conjuntistas, como se presenta en la siguiente definición:

> *Debe ser posible obtener, a partir de cualquier fórmula general válida en lógica, otra fórmula correcta intercambiando los signos más y menos con los signos de multiplicación y división, y los símbolos 0 y 1 entre sí* (Schröder, 1877, pág. 3).[95]

Es así, que luego de esta inmersión explicada acerca del surgimiento del orden a partir de la relación de *subsunción* schröderiana, y de la aclaratoria con respecto a cómo era entendida la dualidad por Schröder, se procede a puntualizar varias

---

[91] *So wurden namentlich oft Voraussetzungen als gleichzeitig anzunehmende hiugestellt. Z. B. „Wenn ab und zugleich ba ist, werde a=b geschrieben" — so lautete die Definition (1) der Gleichheit; „Wenn (gleichzeitig) ab und bc ist, so ist ac (und muss es sein)" — das Prinzip II.* Traducido libremente.

[92] En Boole, la adición y el producto definen la inclusión. Mirar figura 6 y 7 del apartado booleano.

[93] Que, aunque no es el concepto central de este trabajo per se, es importante para este análisis ya que tiene implicaciones directas en la consecución de los sistemas ordenados y reticulares, razón por la cual que aparece a lo largo de todo el trabajo.

[94] Aclaración a lugar, ya que Schröder es ponderado en esta investigación como el autor recopilador y consolidador de gran parte de la teoría y de los sistemas revisados hasta este punto, y aunque en todos los sistemas la dualidad no tiene esta misma interpretación exacta, en líneas generales para los fines de este análisis se puede generalizar esta interpretación para todos los sistemas revisados y por revisar a no ser que se puntualice lo contrario.

[95] Traducción libre.

máximas importantes para la progresión de los conceptos y elementos esenciales de este estudio desarrollados por Schröder en su sistema.

En primer lugar, se parte de los conceptos de elemento máximo y mínimo (que se mencionaron al inicio de este apartado), hasta llegar a las operaciones que representan los conceptos de *ínfimo* (*Inf*) y *supremo* (*Sup*), aclarando que, por supuesto en esta teoría estas operaciones no se denominan *ínfimo* ni *Inf* y mucho menos *meet*, análogamente para el *supremo*. Simplemente son la "formalización" más temprana que se halla de estos conceptos en su utilización para la construcción de una estructura ordenada. Conceptos que son consecuencia directa de la dualidad interiorizada por Schröder al tratar los objetos de los sistemas, permitiendo dar paso al primer acercamiento histórico oficial en esta investigación, del concepto de retículo desde el orden equivalente a como se conoce este objeto en la actualidad.

Eso sí, a pesar de contar con todas las herramientas y con elementos necesarios para definir formalmente objetos equivalentes a los retículos interpretados desde el orden e incluso desde el álgebra tal como estos objetos se interpretan en la actualidad, y un poco similar a lo sucedido con el orden en el sistema de Peirce, los retículos schröderianos y más aún, los retículos schröderianos definidos desde el álgebra, se pierden en las concepciones logicistas y en la informalidad de algunas de las definiciones del sistema de Schröder.

De todas formas, continuando con la progresión conceptual que se lleva a cabo en este apartado, acerca de los elementos anteriores se especifica lo siguiente:

En un primer lugar, Schröder asumió[96] los elementos ***0*** y ***1*** como los duales principales de su sistema, donde el ***0*** tenía una concepción similar a la de conjunto vació (o de nada), y el ***1*** a la de universo (o de todo), que servían como los extremos cualquier objeto de propio de su sistema, es decir, este ***0*** y ***1*** eran objetos propios del orden que Schröder había definido a partir de sus dos principios y de su relación primitiva. Esto se sintetiza en la siguiente figura:

[96] No es una definición como tal, como se establece gracias a Bernays (1975), estos dos objetos más que ser definidos son asumidos, tal como lo expone (Schröder 1890, p.189)

Elemento (denominado)	Definición (asunción)	Interpretación
0 Cero o nulo (*Null*)[97]	$0 \preccurlyeq a$	Elemento mínimo - contenido en todos
1 Uno o todo (*Eins*)[98]	$a \preccurlyeq 1$	Elemento máximo - contiene a todos

Figura 10: Surgimiento de los elementos duales mínimo y máximo en el sistema schröderiano (inspirado de Schröder 1890).

Asimismo, análogamente a la forma como Schröder asumió los elementos máximos y mínimos de su sistema, se introdujeron casi por intuición las operaciones que utilizaría para caracterizar los elementos de su sistema ordenado (parcialmente ordenado), pero sin establecer claramente la manera cómo surgían, pues como se menciona en Bernays (1975), incluso con el ***0*** y el ***1*** (mínimo y máximo), no era posible inferir la existencia de dichas operaciones en este sistema ordenado. Operaciones de donde se originan las concepciones de *supremo* e *ínfimo* como se sintetiza en la siguiente figura:

Operación	Definición (asunción)	Significado para el orden
Producto (*ab*)[99]	Si $c \preccurlyeq a$ y $c \preccurlyeq b$ entonces $c \preccurlyeq ab$	(*ab*) es el máximo común - inferior (ínfimo→*meet* (⋀))
Suma (*a+b*)[100]	Si $a \preccurlyeq c$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $(a+b) \preccurlyeq c$	(*a+b*) es el mínimo común- superior (supremo→*join* (⋁))

[97] También denominada por Schröder como identidad nula (*identisch null).*

[98] También denominada por Schröder identidad uno (*identisch eins*).

[99] También denominada por Schröder como producto idéntico (*identical product*) (derivada directamente del trabajo de Peirce).

[100] También denominada por Schröder como suma idéntica (*identical sum*) (igualmente derivada completamente del trabajo de Peirce).

Figura 11: Introducción de las operaciones propias del sistema parcialmente ordenado de Schröder (inspirado de Schröder 1890).

Derivado de lo sintetizado en la tabla anterior y certificando lo mencionado anteriormente acerca de las herramientas que poseía Schröder en su teoría. Es importante mencionar que para estas operaciones Schröder verificó a partir de la tercera lección en la sección §5 página 191 y a través de la quinta lección sección §10 página 254, hasta la sexta lección sección §12 página 282, lo siguiente: las leyes de naturaleza *conmutativa* (*Kommutationsgesetz*), *asociativa* (*Assoziationsgesetz*), *idempotentes* (*Tautologiegesetze*) y *absortivas* derivadas de la idempotencia (*absorptionsgetsetz)*, para el producto idéntico con el que se hallaba el máximo común inferior y para la suma idéntica con la que se hallaba el mínimo común superior, tal como él les denominó.

Es decir, Schröder verificó en su sistema las leyes para las operaciones que le permitían hallar el *ínfimo* o el *supremo* de entre dos elementos de su sistema ordenado, posteriormente definidas como *Inf* (*meet* "$\wedge$") y *Sup* (*join* "$\vee$"). Todo lo cual aparece reportado, y es verificable en los apartados mencionados, consignados como teoremas, subprincipios o principios auxiliares. Sin embargo, como lo reporta Bernays (1975), sólo se demostró formalmente la asociatividad de estas operaciones.

De esta manera, luego de esta importante progresión conceptual exhibida acerca de los pormenores del surgimiento de la teoría del orden schröderiana, de todas las aclaraciones pertinentes realizadas y de la introducción de las operaciones de este sistema mencionando a su vez las propiedades caracterizadoras de estas, se alcanza oficialmente en este análisis el *primer retículo.* Un retículo emergido del orden, específicamente del sistema ordenado de Schröder, el *retículo primigenio*, denominado también *retículo acotado por* $\boldsymbol{0}$ *y* $\boldsymbol{1}$[101] (de acuerdo a la teoría actual).

Donde $(a+b)=(0+1)=1$ y $(ab)=(01)=0.$

Serían las operaciones y los elementos definitorios de dicho retículo en el orden schröderiano.

[101] Ya definidos como elementos mínimo y máximo.

Esta es la primera aparición del objeto cuya búsqueda epistemológica puntual originó la realización de este estudio y del que en síntesis se puede mencionar, que surge gracias a una necesidad intrínseca de comprobación de dualidad en los objetos o elementos propios de los sistemas ordenados. Por lo que se puede concluir este apartado, sin temor a equivocaciones, manifestando que los retículos surgen a partir de la dualidad.

Reiterando que en la literatura revisada de Schröder nunca se establece expresamente "este objeto es una estructura ordenada", simplemente desarrolla y completa de tal manera el álgebra de la lógica elaborada hasta ese punto de la historia matemática moderna, que matemáticamente alcanzó a su vez toda la estructura matemática del orden e incluso de los retículos desde el orden y desde el álgebra.

Quedando por mencionar el motivo por el cual el anterior retículo introducido, el retículo acotado del sistema schröderiano, no es un retículo distributivo. Que en líneas generales responde a que, a pesar de los esfuerzos del trabajo de Schröder con respecto a la dualidad de la *ley distributiva* e incluso con base en los avances peirceanos. Schröder se topó con una pared demostrativa al momento de intentar justificar la distributividad por ambos lados (específicamente la distributividad de productos sobre sumas). Ya que a lo sumo Schröder llegó a demostrar que dicha distributividad no era derivable formalmente (demostrable), en su sistema ordenado pues no se desprendía de las demás propiedades o axiomas, es decir, era independiente. Por lo que los retículos distributivos serían una construcción conceptual diferente alcanzada en sistemas ordenados posteriores más avanzados.

En resumen, la importancia de las contribuciones schröderianas para este capítulo, radica en que Schröder plantó la bandera de los desarrollos más relevantes hasta la parte final de la primera mitad del periodo de las matemáticas modernas (bandera entregada de la mano de Peirce, coadyuvado por algunos de sus contemporáneos), culminando muchos de los avances del movimiento del álgebra de la lógica y a su vez dando inicio a la teoría de conjuntos, así como a la teoría del orden y de los retículos. Consolidando de esta manera las condiciones de necesidad originadas en los sistemas analizados previamente, dando materialización oficial a la teoría de orden, mejor dicho, a la teoría de orden schröderiana donde aparecen los primeros retículos oficiales.

Todo esto gracias a sus desarrollos como la *subsunción*, su teoría del orden, sus elementos máximos y mínimos, sus operaciones idénticas de suma y producto. Sin dejar de mencionar que alcanzó varias condiciones de necesidad, es decir, varias leyes y propiedades que serían importantes para definir más adelante de otras formas y por otros autores los retículos como estructuras de orden y algebraicamente. Es decir, apelando a la axiomatización y formalidad de los sistemas. En otras palabras, figurativamente Schröder se paró a mitad de la escalada en la montaña de los retículos y exclamó: ¡todos estos desarrollos, en primer lugar, nos han traído hasta aquí!

Ahora bien, trayendo un adelanto del siguiente capítulo acerca de las contribuciones de Dedekind, se puede mencionar básicamente que la función más importante de la teoría de Dedekind según la visión planteada en esta investigación, es servir de enlace entre la visión consolidada de finales del siglo XIX, tratada a lo largo de los dos primeros capítulos. Y la visión de mediados-parte final del periodo moderno de las matemáticas ya entrado el siglo XX, con la visión moderna más avanzada de la teoría del orden y de los retículos, es decir, la parte conclusiva del presente estudio, el capítulo IV.

Por último, lo que se espera encontrar en el sistema de Dedekind son perfeccionamientos de las teorías ya reseñadas, por ejemplo de la teoría del orden alcanzada por Schröder, y la consolidación de una teoría del orden más completa y más formal. Donde se contemplen retículos más complejos y completos que los retículos acotados por ***0*** *y* ***1,*** que den paso al reconocimiento de estructuras algebraicas propiamente dichas y a la concepción actual de los retículos como rama determinante de las matemáticas modernas. Habiendo trazado así una línea cronológica histórico-epistemológica, tanto accesible como rastreable, de la teoría de los retículos.

Capítulo III:

Dedekind, puente entre la consolidación y la comprensión moderna más avanzada de la teoría del orden y los retículos

En este capítulo se presentan las principales contribuciones de Richard Dedekind[102] para la construcción del objeto conocido como retículo, a partir de su propia teoría originada de sus investigaciones acerca de la dualidad implícita en algunos elementos de la *teoría de números*, generalizados y estructurados en la *teoría algebraica de números*, en la cual la noción de retículo emerge como un concepto autónomo a la teoría del orden desarrollada en los dos primeros capítulos de este estudio. Orientados por los desarrollos de prominentes autores de la primera mitad del periodo de las matemáticas modernas y que fue concretada por Schröder.

De todas formas, complementando un poco esto último, cuando en matemática se habla de que un autor trabajó independientemente, se hace referencia a que sus desarrollos van por caminos distintos a los de otros autores o corrientes matemáticas, sin que esto implique que no exista correspondencia (en sus dos acepciones, misivas y similitudes), ni permeación de muchas concepciones, entre los autores y sus desarrollos. Es decir, la matemática casi siempre se construye en conjunto. Mejor dicho, parafraseando un poco el dicho que se le atribuye a Newton: "si he visto más lejos que otros, es porque me posé sobre hombros de gigantes".

4.1. Emergencia de los retículos en la teoría del orden de Dedekind a través de la teoría de números y de la teoría algebraica de números[103]

Derivado de una "herencia aritmética y algebrista" legada primordialmente por el trabajo y los desarrollos de Dirichlet,[104] Dedekind trabajó arduamente en la teoría

[102] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), Imponente matemático alemán, nacido en Brunswick, uno de los contribuyentes más importantes de las teorías del álgebra abstracta, como la teoría de grupos, de anillos, módulos, campos (entre otros).

[103] El análisis que se presenta a continuación acerca de la obra de Dedekind, con respecto a la temática que compete este estudio, está inspirado principalmente en la visión y los análisis realizados a las obras de este autor por parte Haffner (2018), (2024), Schlimm (2011) y Grattan-Guinness (2000), en contrastación y complementación con la propia obra de Dedekind, y también con sus *Trabajos matemáticos recopilados* (*1930-32*).

[104] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático y algebrista alemán, con grandes contribuciones a la teoría primigenia de las funciones.

de números, tratando de comprender las propiedades y regularidades más profundas y estructurales que relacionaban los números con sus operaciones. De esta forma, en el ejercicio de esta vocación algebraica de aritmética superior, en sus arduas cavilaciones acerca de la teoría de números, con sus operaciones y elementos inherentemente duales, como lo son el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm). Aparecen en su teoría algunas de sus primeras contribuciones al legado general de las matemáticas y en este caso a la definición del concepto de retículo.

Se introducen entonces las definiciones del concepto de *módulo,* dando origen a la teoría de módulos y al concepto de *modulgruppen*, en sus suplementos o apéndices de completamientos a la teoría de Dirichlet, así como también se da su definición del concepto de *ideal,* a su vez dando origen a la teoría de los ideales y al *idealgruppen*. Conceptos a través de los cuales toma forma una teoría ordenada y reticular de naturaleza estructural en la que sobresalen nociones de la teoría de conjuntos, en forma de desarrollos a partir de los cuales se consolidan los retículos.

Adicionalmente, es importante hacer algunas precisiones con respecto a la terminología antes de la presentación de los caminos conceptuales históricos recorridos por Dedekind hasta la definición del *dualgruppen*. Precisiones que dan sentido a muchos de los conceptos claves del análisis consignado en este capítulo, que además se constituyen en una desambiguación necesaria al uso del término "sistema" ampliamente utilizado en los capítulos anteriores e incluso en este y en posteriores.

Esto se aclara a partir de la teoría de los sistemas de Dedekind, erigida principalmente en su tratado *¿Qué son y para qué sirven los Números?* (*1888*) (*Was sind und was sollen die Zahlen?*), consignados principalmente en sus trabajos recopilados y desarrollados paralelamente a los tratados donde se construye su teoría acerca del *dualgruppen*.

Ahora bien, a diferencia de la noción de "clase" utilizada casi en general por los matemáticos de los sistemas axiomáticos analizados en los dos primeros capítulos de este trabajo (y casi que en general por la mayoría de los matemáticos pertenecientes a la primera mitad del periodo moderno de las matemáticas), la cual se entendía básicamente como la noción de conjunto, de clase de equivalencia o de

conjunto cociente según fuera el caso. Y de la noción de “sistema” que en el caso de los capítulos anteriores se entienden como “sistemas axiomáticos”.

Para Dedekind un *sistema* se interpreta como un conjunto cuyos elementos cuentan con ciertas características comunes. Es decir, en el sistema axiomático dedekindniano los *sistemas* adquieren la connotación conceptual que tenían las *clases* en los capítulos anteriores, los cuales en general serán utilizados para “agrupar” ciertos elementos sobre algunos parámetros o propiedades definitorias, en palabras de Dedekind un *sistema* se introduce como sigue:

> *varias cosas a, b, c,... comprendidas desde cualquier causa bajo un punto de vista", donde entiende por "cosa" cualquier objeto de nuestro pensamiento* (Dedekind 1888, p. 1).

De esta manera queda pues definida la interpretación dedekindniana de uno de los conceptos más importantes para el relato histórico de la construcción del concepto conocido como retículo que se presenta en este estudio, sobre el cuál se irán introduciendo explícita o implícitamente todos los objetos de la teoría de Dedekind que se presenten a continuación.

4.1.2. Teoría de módulos: manifestación de la dualidad de los objetos de la teoría de números dando paso a los retículos en Dedekind

Puntualmente, las raíces de la teoría de módulos como una teoría determinante para la consolidación de los retículos como estructuras ordenadas y algebraicas, que hace parte de la teoría dedekindniana como un todo. Se hallan principalmente en los tratados y suplementos de Dedekind a la teoría de Dirichlet, más precisamente en las siguientes publicaciones: *Sobre la Composición de las Formas cuadráticas binarias, X-ésimo Suplemento* (*1871*) (*Über die Composition der binären quadratischen Formen, Xth Supplement: Lejeune-Dirichlet’s Vorlesungen über Zahlentheorie*). *Sobre la Teoría Algebraica de Números, XI-ésimo Suplemento,* 3ra y 4ta edición (*1879*), (*1894*) (*Über die Theorie der algebraischen Zahlen, XIth Supplement*), publicados en su compendio de suplementos y apéndices de sus *Lecciones Sobre la Teoría de Números de Lejeune-Dirichlet* (*Lejeune-Dirichlet’s Vorlesungen über Zahlentheorie*), también llamados simplemente Suplementos X, XI a las lecciones sobre teoría de números de Dirichlet. Así como también se referencian sus publicaciones *Sobre el Número de Clases de Ideales en los Diferentes Órdenes de un Cuerpo Finito* (*1877*) (*Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen*

Ordnungen eines endlichen Körpers). *Sobre la Teoría de los Ideales* (*1894*) (*Zur Theorie der Ideale*). *Sobre una Extensión de la Notación* (𝔞, 𝔟) *en la Teoría de Módulos* (*1895*) (*Über eine Erweiterung des Symbols* (𝔞, 𝔟) *in der Theorie der Moduln*), y *Sobre el dualgruppen Generado por Tres Módulos* (*1900*) (*Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe*).

Trabajos en los cuales aparece progresivamente y cada vez de manera más elegante y formal el concepto de módulo, dando paso así a la teoría de los módulos que da paso al concepto de *dualgruppen*. Módulos que Dedekind definía como un *sistema cerrado* de números con las operaciones de su sistema temprano, la suma y la diferencia idéntica.[105] En palabras de Dedekind un módulo se entiende así:

> *Como un sistema* 𝔞 *de números reales o complejos α cuyas sumas y diferencias así mismas pertenecen a* 𝔞 (Dedekind 1871, p. 42).[106]

De esta manera para dos módulos 𝔞 y 𝔟 donde α, β, $\gamma \in$ 𝔞 y 𝔟 que se pueden entender como conjuntos, se definían los conceptos de:

Divisibilidad: Representando la inclusión de conjuntos, donde 𝔟 divide a 𝔞 si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ (es decir, todos los elementos del módulo 𝔞 debían ser también elementos del módulo 𝔟).

MCD: Representando la suma de módulos 𝔞+𝔟, que se define como la suma de todos los $\alpha+\beta$ tales que $\alpha \in$ 𝔞 y $\beta \in$ 𝔟 similar a una suma de vectores, tal como se realiza esto en el álgebra lineal o vectorial. O también se puede ver como una suma definida sobre un producto cartesiano, como se definió este en la perspectiva matemática del capítulo I. De hecho, Dedekind definía la suma de módulos de la siguiente manera, confirmando esta interpretación del mcd:

> *Si α designa cada número en el módulo* 𝔞 *y β cada número en el módulo* 𝔟*, entonces todos los números de la forma α+β evidentemente forman de nuevo un módulo el cuál denominamos la suma de α y β y denotamos por* 𝔞+𝔟 (Haffner 2024, p. 142).[107]

---

[105] Derivadas de la suma y la diferencia usual pero aplicadas a estos dominios de objetos más abstractos, aplicadas a estos módulos, las cuales resultan siendo operaciones similares al cálculo idéntico de sumas y productos de Schröder.

[106] Traducción libre.

[107] Esta cita hace referencia a los bosquejos o "drafts" (como los denomina Haffner 2024), no publicados "oficialmente" pero de los cuales Dedekind nutrió toda su teoría exitosamente publicada. Traducción libre.

mcm: Representando la intersección de módulos $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, que luego adquiere la notación de la resta usual $\mathfrak{a}$-$\mathfrak{b}$ y que se puede interpretar de manera análoga a la suma con módulos, son todos los α-β tales que $\beta \in \mathfrak{a}$ y $\alpha \in \mathfrak{b}$ (análogamente para β-α). Igualmente que en el MCD, Dedekind definía la diferencia de de módulos de la siguiente manera, confirmando esta interpretación del mcm:

> *Si* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *son dos módulos cualesquiera, entonces la totalidad de todos los números* μ *los cuales pertenecen a ambos módulos* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$*, tales como el número* **0** *por ejemplo, siempre forma un módulo. [...] Nosotros queremos designar este módulo por* $\mathfrak{a}$-$\mathfrak{b}$ *y denominarlo diferencia de* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ (Haffner 2024, p. 143).[108]

La siguiente figura lo sintetiza mejor:

TN[109]	Notación Dedekind(1871[110]→1877[111]→1900[112])	Interpretación(orden→retículos)
Divisibilidad -	$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a} < \mathfrak{b}$	Un módulo $\mathfrak{a}$ es divisible por un módulo $\mathfrak{b}$, si $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$
MCD -	$\alpha+\beta \rightarrow \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ (*summe*)[113]	$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ es el mínimo común superior o supremo
mcm -	$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}$-$\mathfrak{b}$ (*Durchschnitt*)[114]	$\mathfrak{a}$-$\mathfrak{b}$ es el máximo común-inferior o ínfimo

Figura 12: Progresión conceptual de los elementos de la teoría de Dedekind para el surgimiento de los retículos como estructura algebraica (inspirado de Dedekind 1871, 1877 y Haffner 2024).

[108] De igual manera, esta cita hace referencia a los bosquejos o "drafts" (como los denomina Haffner 2024), no publicados "oficialmente" pero de los cuales Dedekind nutrió toda su teoría exitosamente publicada. Traducción libre.

[109] Teoría de Números, o aritmética superior.

[110] Fecha de publicación de su obra *Suplemento X a las lecciones sobre teoría de números de Dirichlet*

[111] Fecha de publicación de su obra *Sobre el número de clases de ideales en los diferentes órdenes de un cuerpo finito.*

[112] Fecha de publicación de su obra *Sobre el Dualgruppen Generado por Tres Módulos.*

[113] "Suma".

[114] "Promedio".

Teniendo en cuenta lo anterior, al operar con los módulos se definen las siguientes propiedades:

Conmutatividad $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ dual $\alpha-\beta = \beta-\alpha$

Asociatividad $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ dual $(\alpha-\beta)-\gamma = \alpha-(\beta-\gamma)$

Absorciones[115] $\alpha+(\alpha-\beta) = \alpha$ dual $\alpha-(\alpha+\beta) = \alpha$

En los cuales, sus relaciones de divisibilidad, denominadas así por Dedekind en su tratado de (1900), junto con algunas de las leyes definidas para las operaciones de su teoría (por ejemplo con la ley de idempotencia), satisfacen formalmente las propiedades de una relación de orden, reflexividad, antisimetría y transitividad, tal como estas fueron definidas, lo cual ha sido verificado por distintos autores, y se verifica posteriormente en este mismo capítulo.

Por otro lado, es importante aclarar que la intención de la figura anterior no es solo representar un cambio de símbolos o signos en las notaciones utilizadas por Dedekind para expresar estos conceptos. En esta se intenta representar el acto del cambio conceptual que permitió a Dedekind visualizar la dualidad intrínseca entre estos objetos de la teoría de números (pensados aritméticamente), estableciendo un cálculo dual de estos objetos con una visión de *estructura dual*, lo que eventualmente se materializaría en el *dualgruppen*.

Esto es así, ya que de esta dualidad, Dedekind venía acarreando incluso desde el primer texto referenciado en este apartado, es decir, su suplemento X, la siguiente interpretación en la que se establece la dualidad de forma mucho más consolidada en dirección a la noción de este *dualgruppen*. Así como de los conceptos que se tornarían en el *Sup* y el *Inf*. Nociones entendidas por Dedekind de manera muy similar a la forma como las entendía Schröder según sus *Vorlesungen*, como se evidencia en el siguiente extracto acerca de la *Teoría Algebraica de Números* dedekindniana:

> *Entre los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de módulos arbitrarios existe un dualismo peculiar, cuya razón última podría ser difícil de reconocer* (Dedekind 1894, p. 498).[116]

[115] De donde Dedekind deriva las leyes de idempotencia $\alpha+\alpha = \alpha$ dual $\alpha-\alpha = \alpha$ para sus operaciones.
[116] Traducción libre.

Así pues, continuando con las propiedades de estos módulos, por medio de los cuales se introduce el concepto de *modulgruppen* que hace parte de la teoría de módulos dedekindniana (que es uno de los caminos por los cuales Dedekind llega al concepto de *dualgruppen*), se define la "ley modular" que sentó las bases de estos dos conceptos (*modulgruppen* y *dualgruppen*). Ley que se define como sigue:

Para tres módulos (tal como estos ya fueron definidos), $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ con $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (si $\mathfrak{a}$ es divisor de $\mathfrak{b}$), se tiene la siguiente relación importante, conocida en la actualidad como ley modular:

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})),$$

análogamente para su dual

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})).$$

Esto se introduce en su *Introducción de la teoría de los ideales* (1877), y en en el vol I de sus *Obras recopiladas* (1930), a partir de la sección §2 de la página 120. Igualmente se presenta esta relación con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{d}$ donde $\mathfrak{d} < \mathfrak{m}$ y se puede interpretar simplemente como:

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d} = \mathfrak{p}+(\mathfrak{m}-\mathfrak{d})^{117} \qquad \rightarrow \qquad (\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}))-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$$

análogamente para su dual

$$(\mathfrak{p}-\mathfrak{m})+\mathfrak{d} = \mathfrak{p}-(\mathfrak{m}+\mathfrak{d}).$$

La cual es una versión temprana de la ley modular actual con el *meet* y con el *join*, donde *a* y *b* son los elementos de un *poset*, representada como sigue:

$$(a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b),$$

con su dual $\qquad (a \wedge c) \vee b = a \wedge (c \vee b).$

Donde básicamente se establece que en estos objetos del sistema dedekindniano el orden modular siempre se preserva, pero que en últimas, dicho orden modular no es tan completo o no tiene tanto peso con respecto al orden, como la distributividad por ambos lados. De todas formas, esta ley modular sí dota a los

[117] Equivalencia válida con $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ pero haciendo $\mathfrak{b}>\mathfrak{c}$, de todas formas, basta con hacer ciertas equivalencias de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{d}$ para tener la equivalencia correspondiente después de la flecha.

sistemas de un orden más fuerte que los órdenes introducidos anteriormente, por ejemplo el orden de la teoría de Schröder, y en este caso en particular que todo orden de la teoría de Dedekind que no cumpla la ley modular. Ya que en el orden modular se relacionan y se sustentan de mejor manera las nociones que representan al supremo y al ínfimo.

Ahora bien, a través de incontables como de diversas exploraciones con los módulos y sus principales leyes, asociados a procesos de abstracción, Dedekind reconoce la profundidad y la presencia de la dualidad incluso en los elementos más básicos de su teoría. Ya que estas exploraciones las realizó a partir de innumerables y extensos cómputos con las nociones de la teoría de números y de su propia teoría.

De esta forma al realizar estos avances, Dedekind se adelanta décadas a las contribuciones que usualmente son atribuidas a otros autores, sin querer decir con esto que esos "otros autores" no hayan sido efectivamente contribuyentes de la teoría de los retículos. Por ejemplo al evaluar todas las posibles combinaciones de todos los MCD's y los mcm's a partir de 3 módulos generadores, que resultaban en tablas de 28×28. Pero por sobre todo Dedekind se adelantó décadas a la introducción de los diagramas de Hasse,[118] al representar sus relaciones de orden para los MCD y los mcm de sus módulos y los elementos de su sistema teórico.

a	b	c	a'	b'	c'	a_1	b_1	c_1
a'	b'	c'	d	d	d	a''' ~~$b'=c'$~~	b''' ~~$c'=a'$~~	c''' ~~$a'=b'$~~
a_1	b_1	c_1	a_3 ~~b_1+c_1~~	b_3 ~~c_1+a_1~~	c_3 ~~a_1+b_1~~	m	m	m
a'' ~~$a=a_1$~~	b'' ~~$b=b_1$~~	c'' ~~$c=c_1$~~	m'	m'	m'	a_1	b_1	c_1

[118] Helmut Hasse (1898-1979) fue un matemático alemán, contribuyente a la teoría contemporánea del orden, cuya forma de visualización y comprobación diagramática de los *posets* y los retículos (que son utilizados en diversas ramas de las matemáticas), son denominados en su honor, a pesar de que esta forma de comprobación diagramática como se evidencia en el presente análisis ya era utilizada, años antes de que este autor fuera reconocido.

Figura 13: Representación de un fragmento de 9×4 de la tabla de 28×28 denominada *Teoría de tres Módulos* (*Theorie der drei Moduln*), acerca de las posibles combinaciones de MCD's y mcm's generadas por tres módulos arbitrarios de Dedekind (Haffner 2024, p. 156).

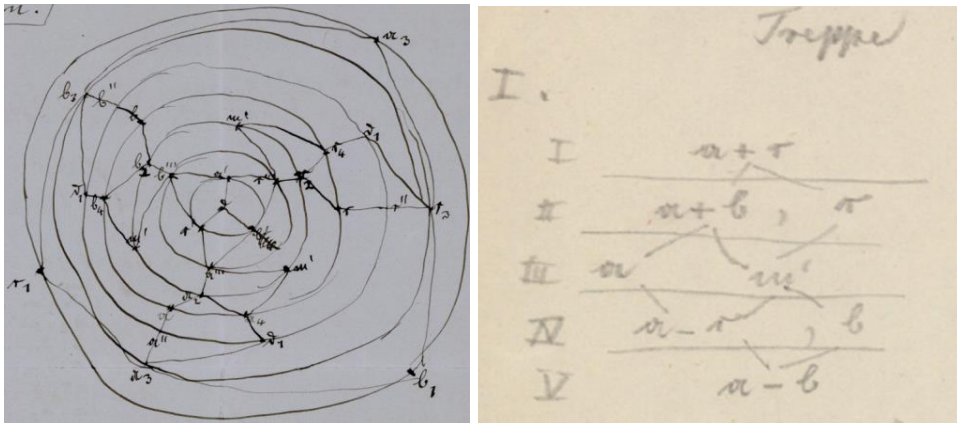


Figura 14: Retículos y representaciones diagramáticas primigenias de la teoría de Dedekind adelantándose a los diagramas de Hasse (Haffner 2024, p. 166).

Por otro lado, con respecto a las nociones, notaciones y elementos que aparecen en las figuras anteriores, es necesario hacer las siguientes precisiones para entender un poco más qué es lo que estaba haciendo Dedekind en estas figuras, qué se puede interpretar de estas, y por sobre todo, cómo le permitieron avanzar hacia el concepto de *dualgruppen*.

Para esto se debe aclarar en primer lugar, que todos los elementos representados en la figura 13 y en los diagramas de la figura 14, son módulos que representan sumas o diferencias, entendidas como la unión o intersección de módulos que se derivan de 3 módulos arbitrarios cualesquiera $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ para los que se definieron el MCD y el mcm. Los cuales se están combinando y operando entre sí, tal como se vienen definiendo estas operaciones sobre los módulos desde el inicio de

este capítulo. Esto lo hacía para hallar los factores, los divisores o los múltiplos[119] de todos los módulos generados. Algunos de los que se precisan a continuación:

> *Para tres módulos* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$*:* (todos los elementos de las figuras anteriores parten de estas notaciones)*, se tiene:*
>
> *Má[ximo]* $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ *mí[nimo]* $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b} - \mathfrak{c}$
>
> *C[omún]* $\mathfrak{b}' = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ *c[omún]* $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$
>
> *Div[isor]* $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *m[últiplo]* $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$
>
> (Haffner 2024, p. 149).

Donde la notación primada (x′), es la dual de la notación con los subíndices correspondientes (x_1), es decir, todos los módulos primados corresponden a los MCD's y todos los módulos con subíndices corresponden a los mcm's. Aunado a esto, se acota a esta notación una extensión notacional realizada por Dedekind para suplir sus necesidades de dualidad (basado en las mismas reglas anteriores), dando un poco más de sentido a la figura 12, representada como una tabla 9×4 pero que en realidad es una tabla 28×28), de la siguiente manera:

> $\mathfrak{d}'''' = a + b + c\ ;\ d_4 = a - b - c$
>
> $\mathfrak{a}''' = b + c,\ b''' = a + c,\ c''' = a + b\ ;\ a_3 = b - c,\ b_3 = a - c,\ c_3 = a - b$
>
> $\mathfrak{d}' = a''' - b''' - c'''\ ;\ d_1 = a_3 + b_3 + c_3$
>
> $\mathfrak{a}'' = a + d',\ b'' = a + d',\ c'' = a + d';\ a_2 = b - d_1,\ b_2 = a - d_1,\ c_2 = a - d_1$
>
> $\mathfrak{a}' = a + d_1,\ b' = a + d_1,\ c' = a + d_1\ ;\ a_1 = b - d',\ b_1 = a - d',\ c_1 = a - d'$
>
> $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}' - d' = a_1 + d1\ ;\ b_0 = b' - d' = b_1 + d_1\ ;\ c_0 = c' - d' = c_1 + d_1$
>
> (Haffner 2024, p. 150).

[119] Usualmente estos módulos $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{m}$ hacen referencia a lo siguiente $\mathfrak{p}$: primo, $\mathfrak{d}$: divisor, $\mathfrak{m}$: múltiplo.

Esta extensión, le permitía cubrir más exploraciones a través de cómputos más grandes, considerando más leyes y propiedades de su teoría, ya que estas notaciones acortaban aún más los cómputos en las tablas. Pues no era lo mismo escribir $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ que $\mathfrak{d}''''$, lo que le permitía a Dedekind buscar distintas simetrías que representarían las dualidades en las distintas tablas que surgían de estos 3 módulos. Reiterando que, de estos 3 módulos, Dedekind sacaba varias tablas y figuras de distinta naturaleza, no solo las ejemplificadas aquí. Tablas basadas en leyes, factores, múltiplos, divisores, combinaciones, en duales, entre muchas otras nociones.

De esta forma, se desmenuza un poco más la figura 13 en aras de una compresión efectiva de lo realizado por Dedekind y de cómo buscaba en estas tablas que representaban los pormenores de los módulos, la dualidad que devendría en el *dualgruppen*. Por otro lado, con respecto a los diagramas de la figura 14 representando los retículos primigenios de Dedekind y guardando las mismas especificaciones notacionales que las consideradas en la figura 13, se añade algo importante en suma a lo explicado acerca de las tablas y cómputos presentados. Y es simplemente que, en los diagramas de estos retículos primigenios similares a los diagramas de Hasse actuales, los enlaces de estas figuras representan relaciones de orden (como ser divisores o ser múltiplos), a partir de los cuales se introducirían las nociones de cotas superiores e inferiores y por ende los conceptos de *supremo* e *ínfimo*. Lo que indica la correspondencia casi total entre estas representaciones primigenias de Dedekind y los reconocidos diagramas de Hasse.

Es así que, luego de las precisiones anteriores y camino a la introducción formal del *dualgruppen*, Dedekind llegó al concepto de *modulgruppen*, concepto que aparece en este estudio como la primera protoestructura algebraica formal propiamente dicha, tal como se reconocen estos objetos en la actualidad. Es decir, como objetos que cumplen principalmente la *clausurativiдad* de sus operaciones sobre los conjuntos en que están definidas y que además cumplen unas ciertas leyes algebraicas.

Así pues, se pasa del *modulgruppen* que dicho sea de paso, se denomina como una “protoestructura” simplemente por su aparición temprana en la teoría de Dedekind y porque da origen (junto con la otra protoestructura protagonista de este

capítulo, el *idealgruppen*), a la figura máxima y principal de este capítulo, el *dualgruppen*.

En síntesis, de estas protoestructuras se puede decir que finiquitan la ruta conceptual que permite conocer cómo se conformó el *dualgruppen*. Es decir, el objeto más cercano a los retículos actuales que se puede extraer de este periodo de producción matemática. A través de los cuales es posible visualizar cómo los retículos emergen desde el orden, pero también cómo emergen desde el álgebra, hasta llegar a la conformación de estructuras algebraicas y la interpretación de estos objetos desde esa visión estructural abstracta. La cual es la visión que se quiere consolidar en este capítulo, y que brinda una perspectiva diferente de las matemáticas presentadas hasta este momento: la visión abstracta de Dedekind para la conformación de los retículos y otras teorías que dan paso a este objeto.

De esta manera, habiéndo llegado a esta primera protoestructura, las dos principales interpretaciones de los retículos se empiezan a desvelar exitosamente. Así pues, para el *modulgruppen* o grupo de módulos como se puede inferir, Dedekind define lo siguiente:

> *Un sistema M de módulos se llama un grupo cuando los módulos a + b, a - b formados por dos módulos cualesquiera a, b pertenecen al mismo sistema* (Haffner 2024, p. 188).[120]

Definición en la que básicamente se reitera lo evidenciado a lo largo de este capítulo, y de la interpretación estructural de Dedekind para con todos los objetos de su teoría. Es decir, este *modulgruppen* es un *sistema* cerrado bajo las operaciones que definió para su teoría. Pero en la que aún no se contemplan inversos ni neutros a pesar de lo sugerente de su apellido "gruppen". Por lo que cabe mencionar que para Dedekind al menos en esta etapa, un grupo no se interpreta de la misma manera que en la actualidad, básicamente porque en este momento no existía tal cosa como la "teoría de grupos". Y además, como se extrae de Haffner (2024) y como se ha mencionado, para Dedekind un grupo era básicamente un conjunto cerrado bajo las operaciones que se habían definido, como se interpreta del siguiente extracto:

[120] Traducción libre.

> *El uso de Dedekind de la palabra "grupo" sugiere que una condición esencial para que un sistema (de números, permutaciones, y otros objetos matemáticos, incluidos elementos indefinidamente arbitrarios) sea un grupo es la cerradura sobre una o dos operaciones binarias. Las propiedades de estas operaciones deberían definir las propiedades del "grupo" en cuestión — propiedades tales como la asociatividad que no, por ejemplo, están incluídas en su idea general de un "grupo". Este es el uso dado a los grupos en sus borradores sobre el Dualgruppen. Además para Dedekind, no había problema con formar conjuntos de conjuntos, como los cuales él pensó como objetos en lugar de colecciones. Lo cual es poco sorprendente que habiendo definido dos operaciones conmutativas para los módulos, él haya mirado hacia los grupos formados por módulos. Usaré el término "grupo" como actor de una categoría siguiendo el uso que Dedekind le dio a esta palabra* (Haffner 2024, p. 145).[121]

4.1.3. Teoría de los ideales: otro camino hacia el dualgruppen

Otra de las rutas que guiaron a Dedekind a introducir su teoría del *dualgruppen*, fue el camino que siguió al definir su teoría de los ideales, plasmada primordialmente en su literatura denominada *Sobre el Número de Clases de Ideales en los Diferentes Órdenes de un Cuerpo Finito* (*1877*) (*Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers*). Y *Sobre la Teoría de los Ideales* (*1894*) (*Zur Theorie der Ideale*), textos que también se referencian como parte del origen de los módulos, lo cual se justifica simplemente debido a que los módulos dan paso a los ideales en la teoría de Dedekind.

De todas formas, esta teoría de ideales le permitió llegar a Dedekind hasta la definición del *idealgruppen*, el cual hace parte de los conceptos y teorías cruciales que no se puede pasar completamente por alto al intentar dar un repaso histórico completo de la consolidación de los retículos. Teoría de ideales que por otro lado ha sido profundamente analizada en el trabajo de Arias (2024), desde una perspectiva más técnica y matemáticamente avanzada, que por supuesto se revisó para la

[121] Traducción libre.

realización de este apartado, pero de la que este estudio plantea un discurso y unas formas diferentes.[122]

Ahora bien, análogamente a la manera cómo surge la teoría de los módulos y el *modulgruppen*, es decir, a través de la definición de unos objetos en la teoría de Dedekind que cumplían la ley modular, a partir de los cuales se definen unos *módulos* especiales que cumplían ciertas características que no todos los módulos cumplían simultáneamente. Estos *módulos* serían denominados por Dedekind como los *ideales,* los cuales cumplían una ley denominada "ley doble" (*double law*), propiedad que sugiere distributividad por ambos lados, es decir, sobre dos operaciones sobre los módulos del sistema dedekindniano como sigue:

Para tres objetos del sistema de Dedekind (luego denominados ideales), $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, Dedekind demostró la siguiente equivalencia importante, conocida en su teoría como *ley doble*:

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}),$$

análogamente para su dual $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$.

De donde surge la teoría de los ideales, y que además es una propiedad más fuerte que la *ley modular* de antes (de hecho, la *ley modular* puede ser vista como un caso especial de la *ley doble*). De manera que tal como la *ley modular* dota a las estructuras del sistema dedekindniano de un orden superior al orden que brindan las propiedades "regulares" por sí solas.[123] Esta *ley doble* dota los objetos de un orden superior que el proveído por *ley modular*. Por tanto, sólo algunas estructuras específicas logran suplir estos atributos para ser un ideal y pertenecer a un *idealgruppen*.

De esta *ley doble*, al igual que con la *ley modular* se deriva la siguiente propiedad conocida como "ley ideal":

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) \quad \rightarrow \quad (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}).$$

---

[122] La forma de este estudio es evidentemente la de un relato histórico, una visión mucho más enfocada a la epistemología del surgimiento de los objetos, no tanto en los tecnicismos matemáticos avanzados del surgimiento de las teorías.

[123] Con regulares se hace referencia a las propiedades básicas introducidas al inicio del capítulo para los módulos y sus operaciones características, tipo asociatividad, conmutatividad, idempotencia, absorción.

De esta manera, de igual forma que en la teoría de los módulos, Dedekind realizó innumerables exploraciones con los módulos de su sistema que cumplían los criterios de ser "dobles". Es decir, cumplir las propiedades de su sistema sin importar el orden de aplicación de las operaciones, de la que podríamos decir que se desprende la distributividad de los objetos de la teoría de Dedekind. Entendiendo la *ley doble* como una distributividad muy general.

Es así que, luego de la introducción de los ideales primigenios, la teoría de los ideales y el *idealgruppen*, los cuales, por supuesto se derivan del trabajo de Dedekind con los módulos, se llega a la recta final para la introducción del *dualgruppen*.

Antes de la aparición del *dualgruppen* es importante mencionar, como parte del ejercicio de contrastación histórico que se viene realizando a lo largo de los capítulos. Que a pesar de que estas estructuras primigenias introducidas por Dedekind tienen el apellido de "grupo" (*gruppen*), en la actualidad se corresponderían con objetos propios de la teoría de anillos, teoría perteneciente al álgebra abstracta o a las matemáticas modernas avanzadas, no a los orígenes de las matemáticas modernas. Esto es así simplemente porque son dos las operaciones que se aplican simultáneamente sobre el sistema de elementos de los módulos y de los ideales de Dedekind, ya que para los grupos es necesario definir sólamente una operación binaria a la vez sobre los elementos de los sistemas.

Momento adecuado para retomar el "***2.1. Apartado matemático***", del capítulo I del presente trabajo de grado y hacer una digresión necesaria para entender los pormenores de la contrastación sugerida entre los "gruppen" y los anillos. Presentando entonces el siguiente bloque como una extensión de aquel *apartado matemático 2.1*, en el cual se menciona brevemente lo que es una relación como parte o subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos. Producto cartesiano a partir del cual se introducen someramente y a grandes rasgos, solo para entender una noción general de lo presentado en este capítulo, las siguientes nociones del álgebra moderna abstracta, propias de la parte final del periodo de las matemáticas modernas:

Definición 9. Una operación binaria (conocida como ley de composición interna en un conjunto A) es una aplicación $*$: A × A → A del producto cartesiano de A con A en A. Es decir, se garantiza la cerradura o la clausura. Así a cada par ordenado (a, b) de elementos de A se le asigna un único elemento de A. La imagen del par (a, b)

mediante la aplicación $*$ se denota en general por $a * b$, pero evidentemente en este caso del sistema dedekindniano y de este trabajo, las operaciones vendrían siendo $a + b$, o $a - b$. Ya que el sistema de Dedekind contaba con múltiples operaciones definidas para su sistema teórico, como las operaciones de divisibilidad, multiplicidad, de complejos, etc. Teniendo en cuenta esta definición, emerge otra definición:

Definición 10. La pareja (A, $*$) tiene estructura algebraica de grupo, si cumple lo siguiente:

a) $\forall\ a, b$ perteneciente a A, $a * b$ pertenece a A.

b) $\forall\ a, b, c$ perteneciente a A, se cumple que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

c) Existe en A un elemento e (único), llamado el elemento neutro de $*$ tal que $\forall\ a$ que pertenece a A, $a * e = e * a = a$.

d) $\forall\ a$ perteneciente a A, existe en A un único elemento a^{-1} (único para cada a), denominado elemento inverso de a con respecto a $*$ de modo que, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

e) Adicionalmente si los elementos de esta estructura algebraica conmutan con las operaciones definidas para el conjunto, es decir si $a * b = b * a$, se suele decir que (A, $*$) tiene estructura algebraica de grupo conmutativo o abeliano (por ende, se sobreentiende que no todos los grupos son abelianos, solo algunos).

Ahora bien, si se consideran dos operaciones y no sólo una, entonces se puede considerar una nueva estructura algebraica:

Definición 11: Se denomina anillo a la terna (A, $*$, $\star$) compuesta por el conjunto A y dos operaciones o aplicaciones definidas $*$ y $\star$ sobre A tales que:

a) (A, $*$) es un grupo abeliano.

b) (A, $\star$) define operaciones cerradas y asociativas sobre los conjuntos.

c) $\star$ es distributiva sobre $*$.

Ahora bien:

d) Si $\star$ es conmutativa el anillo es conmutativo.

e) Si $\star$ tiene elemento neutro en A, distinto del elemento neutro de $*$ entonces el anillo es unitario.

De esta manera se puede pensar entonces, que muchas de las estructuras algebraicas presentadas en esta extensión del apartado 2.1, se originaron en parte gracias al trabajo y la definición de las protoestructuras del sistema de Dedekind. Particularmente el *modulgruppen* y el *idealgruppen*. O al menos, se pueden considerar estas protoestrucutas como las estructuras que abren camino a la concepción estructural abstracta de las matemáticas modernas, por lo que la profundización del desarrollo histórico-epistemológico de todos estos objetos termina una vez más revalidando su sentido.

Por lo que, la relación de estas protoestructuras con las estructuras formales del álgebra abstracta avanzada se esboza en la siguiente figura:

Protoestructuras Algebraicas (Dedekind)	Actualidad (avanzado)
Modulgruppen $(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}))-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})$	$(A, +, -, e, e^{-1})$[124]
$\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+\alpha = \alpha$	- - -
clausurativa.	
-*Idealgruppen* $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$	$(I\subseteq A,+,-, e, e^{-1})$ $(I\subseteq A,-,+,e, e^{-1})$[125]
$\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+\alpha = \alpha$	
clausurativa.	

Figura 15: Contrastación de las estructuras algebraicas primigenias en Dedekind versus las estructuras algebraicas propiamente dichas del álgebra abstracta avanzada (Inspirado en Dedekind 1871-77-79-4-95-1900 y Haffner 2024).

[124] Para describir un anillo se puede utilizar esta notación tipo álgebra donde los elementos y las operaciones sobre el conjunto, aparecen expresamente consignados en la estructura algebraica, o también como se muestra en la definición de anillo consignada en la extensión al apartado 2.1.

[125] En este caso el ideal se denotará por **I** el cual es un subconjunto lateral (izquierdo y derecho) de **A**.

4.1.4. Finalmente, la concreción del dualgruppen

Antes de presentar la introducción formal del *dualgruppen*, resulta pertinente reseñar sucintamente una comprobación de las leyes que determinan un sistema ordenado (parcialmente ordenado) de las operaciones del sistema de Dedekind sobre los conjuntos objetos de su teoría, similarmente a como se realizó para el análisis del sistema de Schröder con sus *prinzips*. Teoría ordenada de Dedekind que en este caso es surgida del trabajo con los módulos, los ideales y con el mismo *dualgruppen*.

De esta forma, esta comprobación se realiza partiendo de la determinación de un orden sobre las operaciones del sistema dedekindniano en las cuales se evidencia la progresión conceptual y notacional de los objetos reseñados desde el inicio de este estudio hasta el presente capítulo. Evidenciando también el avance de este sistema hacia las comprobaciones o cómputos similares a como se realizarían estas comprobaciones en la teoría del orden actual. Se extrae entonces de la literatura revisada lo siguiente:

Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ son módulos o elementos del sistema de Dedekind, y se cumplen que $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, que en el sistema de Dedekind representa que $\mathfrak{a}$ es divisor de $\mathfrak{b}$ o según sea el caso que $\mathfrak{a}$ está contenido en $\mathfrak{b}$, sí y solo sí;

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ o análogamente $\mathfrak{a}\text{-}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$.[126]

A partir de esta relación fundamental de los módulos se verifica las siguientes propiedades:

Propiedad -	Operaciones[127]/relaciones de orden de en el sistema de Dedekind
Reflexiva -	$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ (por la idempotencia) $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}<\mathfrak{a}$, lo que implica que $\mathfrak{a}$ es divisor o está contenido en sí mismo

[126] Esta definición es la que permite establecer la equivalencia entre las dos interpretaciones principales de los retículos, la visión ordenada y algebraica, equivalencia sobre la que Dedekind no profundiza ni formaliza.
[127] De igual forma, lo presentado en esta tabla se verifica con el producto $\mathfrak{ab}$.

Antisimétrica	⇔	$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$	⇒	$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ lo que implica que $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$
Transitiva	⇔	$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$ $\rightarrow \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$	⇒	$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}<\mathfrak{c}$ lo que implica que $\mathfrak{a}<\mathfrak{c}$

Figura 16: Comprobación de que las operaciones del sistema de Dedekind establecen un sistema ordenado (inspirado de Dedekind 1890, 1839-31-32, Haffner 2024).

Así pues, con todos los ingredientes plasmados en estos análisis, desde los originarios, con las notaciones algebraicas primigenias surgidas de entornos lógicos hasta los conceptos más avanzados consolidados por Peirce y Schröder, se introduce uno de los objetivos máximos de este estudio. Un concepto que aparece en este recuento histórico como la primera estructura formalmente definida por un autor, difiriendo del retículo que se encuentra en la teoría del orden schröderiana, el cual surge estrictamente a partir de su relación de orden "menor que" y por ende de su subsunción.

Este objeto que resulta siendo equivalente[128] a los retículos actuales, se alcanza por medio de una estructuración paso a paso de todos los objetos del sistema dedekindniano. Estructuración que se realiza sin presentar exactamente las mismas notaciones o denominaciones que las actuales, pero sí con las mismas ideas, y que en líneas generales se recuenta en primer lugar, con la introducción del concepto de conjunto. Que a su vez permite encontrar en esta teoría un objeto equivalente a un *copo*, con su interpretación como una estructura ordenada, gracias al énfasis de Dedekind en la clausurativid.

De esta forma, con el *Copo* y aunado a la formalización de los dos siguientes conceptos, el elemento mínimo de los superiores y el elemento máximo de los inferiores para dos elementos cualquiera que se convierten en las operaciones del sistema de Dedekind. Elementos con los cuales se termina determinando un objeto cuyas operaciones también resultan cumplir unas leyes algebraicas, que lo dotan de una cierta "naturaleza estructural algebraica". Esta es la formalización de ese objeto

[128] Es decir, tienen la misma estructura algebraica que los retículos actuales derivados de la visión de Birkhoff, como se evidencia en el siguiente capítulo.

abstracto, esta es la forma como Dedekind alcanza en su teoría el concepto de *dualgruppen*.

Dualgruppen que es alcanzado por Dedekind principalmente mediante procesos de abstracción originados en la búsqueda de generalidad entre las nociones de la teoría de números, su teoría de módulos e ideales y los elementos propios de estas teorías. Supliendo de esta forma también los criterios extraídos de Schlimm (2011)[129] para el desarrollo de nuevas nociones tal como se reportan en el apartado acerca de las condiciones de necesidad.

Puntualmente estos criterios son, *Los fundamentos de la teoría de conjuntos* (*set theory grounding*), presentes en las teorías de los sistemas, de los módulos, de las clases de ideales, etc. Así como un *sistema o método axiomático* de la mano del *álgebra moderna* (*Axiomatic method* & *Modern algebra*), presentes en las leyes y propiedades definidas para los módulos, los ideales y el *dualgruppen*. Dando paso al álgebra moderna, *modulgruppen*, *idealgruppen, modulgesetz, idealgesetz* y sus exploraciones con todas estas protoestructuras y estructuras. Las cuales dieron paso más adelante a la teoría algebraica de números y permitiendo la consolidación de esta.

A continuación, se define formalmente el concepto de *dualgruppen* que aparece en Dedekind (1897) de la siguiente forma:

> *Un sistema $\mathfrak{A}$ de cosas*[130] *α, β, γ,... se llama un Dualgruppen si hay dos operaciones + y - tales que para dos cosas cualesquiera α, β, las cosas $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$ también están en $\mathfrak{A}$ y satisfacen [conmutatividad para + y -, asociatividad para + y -, y $\alpha\pm(\alpha\mp\beta) = \alpha$*[131] *(absorción)]* (Dedekind 1897, p. 113, traducido e interpretado por Schlimm, 2011)

Definición totalmente concordante con el recuento que se viene realizando acerca del surgimiento de la dualidad en la teoría de Dedekind, que además se origina desde dos vertientes o flancos, con el origen común de la teoría de módulos: los

[129] A su vez extraídos de Mehrtens (1979).

[130] Según lo analizado anteriormente, Dedekind se refería seguramente a módulos, pero fiel a su naturaleza generalista lo quiso definir de la forma más general posible, de forma que posterioremente se introducirían las nociones abstractas y generales del álgebra y de otros campos.

[131] De donde como ya sabemos se introduce la idempotencia.

dualgruppen surgidos desde la teoría de módulos y las leyes que estos cumplían, dando paso a los denominados *modulgesetz*:

$$(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}))-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}))+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}).$$

Que es simplemente la equivalencia derivada de la ley modular, tal como se representa al inicio de la teoría de módulos y que son los *dualgruppen*'s[132] que cumplían esta equivalencia, Luego de esto, como un avance conceptual de estos *dualgruppen*'s modulares, un tipo especial de *dualgruppen* que cumplían una ley general de naturaleza distributiva, daba paso a la teoría de los *idealgesetz*:

$$(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})-(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$$

Que simplemente es una equivalencia derivada de la *doble ley* y que son los *dualgruppen*'s que cumplían esta equivalencia, dejando claro que no todos los *dualgruppen*'s son *idealgesetz* pero todos los *idealgesetz* son *modulgesetz*.

De esta manera, estos objetos conformaban respectivamente lo que se conoce en la literatura de Dedekind como *dualgruppen modultypus* y *dualgruppen idealtypus*, que dan inicio formal al estudio de una teoría algebraica estructural, al álgebra abstracta con su teoría de grupos, de anillos, de módulos, de ideales,... y un largo etc. De los cuales se puede mencionar que parten de los objetos surgidos de la teoría de Dedekind.

De esta manera, se cierra este capítulo con dos conclusiones fundamentales que reflejan el impacto del trabajo de Richard Dedekind en la teoría de los retículos a través de la teoría que construyó alrededor de los *modulgruppen,* los *idealgruppen y los dualgruppen* (posteriormente correspondientes a la denominada *verbandstheorie*). Las cuales Reflejan el impacto de este autor en las matemáticas abstractas y las matemáticas en general, refrendando una vez más la importancia del campo estructural en las matemáticas y por ende en las prácticas matemáticas, tal como se comentó esto en la introducción del presente trabajo de grado. Estas conclusiones son las siguientes:

Por un lado, es innegable la labor titánica realizada por Dedekind para construir su *dualgruppen*, de la que en síntesis se puede mencionar, como se

[132] Cuando se habla de "el *dualgruppen"* se habla del concepto, cuando se habla de "los *dualgruppen"* o *dualgruppen*'s se habla de todos los posibles objetos bajo esta definición.

evidencia en todo este capítulo, logró llevar a cabo partiendo de los avances de Schröder, del que Dedekind se inspiró al estudiar varias de sus publicaciones, principalmente sus lecciones sobre el álgebra de la lógica. Como también realizando interminables cómputos con los objetos de su sistema.

Por otro lado, también es importante reconocer cómo con Dedekind se consolidaron las bases de la teoría de retículos propiamente dicha, es decir, tal como esta teoría se conoce en la actualidad. Dejando un camino muy avanzado a los sucesores teóricos en este campo, un objeto bastante materializado por decirlo menos. En otras palabras, Dedekind le entregó a la comunidad matemática sobreviniente un nuevo concepto y un nuevo campo estructural de las matemáticas.

Este nuevo concepto, estas nuevas teorías y todos los desarrollos antes reseñados, serán imbuidos por importantes, reconocidos y diversos autores matemáticos de la parte final del periodo de las matemáticas modernas, en el inicio de las corrientes estructuralistas surgidas en ese mismo periodo, pero en otra época. Más exactamente en el intervalo comprendido entre inicios de la década de los 20's y durante-finales de la década de los 30's del siglo XX.

Finalmente, con la suma de este capítulo al relato histórico-epistemológico realizado hasta el momento, al revisar este trabajo se puede tomar un poco más en consideración la magnitud y la complejidad del desarrollo de los conceptos con que nos encontramos durante el ejercicio de nuestras prácticas matemáticas, ya sean estas aplicadas, formales o de carácter educativo.

Capítulo IV:

El segundo respiro de los retículos retratado a partir de dos de sus máximos impulsores Ore y Birkhoff

En este capítulo se presentan las principales contribuciones de dos de los principales autores reconocidos como redescubridores, impulsores y formalizadores de la teoría de los retículos, de la parte final del periodo de las matemáticas modernas. Es decir, en este análisis se sintetiza principalmente la visión y el camino que recorrieron Ore[133] y Birkhoff,[134] desde sus orígenes estructurales hasta su propia llegada y formalización al concepto de retículo, como los máximos exponentes de esta teoría y los que llevaron a la cúspide máxima de las matemáticas a estos objetos. Todo esto, gracias a una herencia estructural formal riquísima legada principalmente por los desarrollos de Dedekind, tal como se analizó en el capítulo anterior. Así como también es importante mencionar, que todos los desarrollos y formalizaciones de la teoría proveída por estos dos autores, surge de sus avances e investigaciones a partir de la teoría del álgebra abstracta y de su trabajo con estructuras de grupos, anillos, álgebras y subalgebras, entre muchísimas otras estructuras.

Sin embargo, no se puede dejar de mencionar la gran cantidad de autores que trabajaron y contribuyeron con el boom del resurgimiento de la teoría de los retículos, de la cual se podría hacer una lista interminable. Aun así, en este apartado introductorio, se mencionan solo algunos de todos los involucrados directa o indirectamente con el desarrollo de la teoría de los retículos. Principalmente los autores considerados más trascendentes para la narración histórico-epistemológica

[133] Øystein Ore (1899-1968), matemático y estructuralista de origen noruego, importante por sus grandes contribuciones a la teoría del álgebra moderna, teoría de anillos, de campos entre otras.

[134] Garret Birkhoff (1911-1996), matemático estructuralista de origen estadounidense, importante en la difusión de la teoría del álgebra moderna, con una tradición matemática que se extiende hasta las innumerables contribuciones de su padre George Birkhoff.

exhibida en este estudio, de entre los cuales se puntualizarán brevemente los aportes más destacados de autores tales como Klein,[135] Bennett,[136] Menger,[137] o Noether.[138]

5.1. Autores determinantes, para el redescubrimiento estructural de la teoría formal de retículos.

De los autores antes mencionados, se puede mencionar con respecto a los retículos las siguientes contribuciones puntuales, conseguidas por estos autores primordialmente a partir de la modificación de un sistema estructural preestablecido por Dedekind. Aunado a la aparición de procesos de abstracción al momento de la axiomatización y formalización de todas las estructuras logradas durante el desarrollo del periodo de tiempo anteriormente estipulado.

5.1.1. Menger, Bennett, Klein, Noether[139]

Considerados en grupo, estos autores cuentan con publicaciones acerca de esta temática en particular a partir de 1923, como Menger con sus *Observaciones Sobre Cuestiones Fundamentales* (*1928*), publicado en el *Informe Anual de la Asociación de Matemáticos Alemana* (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*). Publicación en la que a través de sus desarrollos en torno de la geometría proyectiva[140] que pareciera tener un vínculo intrínseco con la noción de retículo, desarrolla la noción de *campo* (*Feld*). Concepto que de forma análoga al retículo con *0* y *1* schröderiano, termina siendo una de las primeras definiciones de un retículo en este redescubrimiento. que además se alcanza independientemente del mencionado retículo primigenio con *0* y *1* de Schröder. Que dicho sea de paso,

---

[135] Fritz Klein (1892-1961) fue un matemático y logicista de origen alemán influenciado profundamente por Schröder, al que según Schlimm se le adjudica la introducción del término Verband, retículo en alemán.

[136] Albert Bennet (1888-1971), matemático de origen estadounidense reconocido por sus aportaciones en el análisis numérico, y el álgebra abstracta.

[137] Karl Menger (1902-1985) fue un matemático de origen estadounidense, hijo del matemático y economista de origen austriaco Carl Menger.

[138] Amy Noether (1882-1935). Famosa matemática estructuralista alemana, una de las mujeres más importantes en las matemáticas abstractas y modernas con diversas repercusiones en las ciencias y ramas afines, famosa por sus aportes a la teoría de los grupos de simetrías de un sistema.

[139] El análisis sucinto que se presenta a continuación, acerca de la obra de estos autores con respecto a la temática que compete este documento, es inspirada principalmente de la visión y los análisis realizados a las obras de estos autores, por parte de Schlimm (2024), Rota (1997) contrastados en una revisión general y somera, no exhaustiva de sus trabajos originales.

[140] Rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de las figuras geométricas al ser proyectadas sobre superficies, enfocándose principalmente en los puntos (que se pueden pensar como nodos) y las líneas o segmentos (pensados como enlaces entre dichos nodos de las figuras), donde además todos se interceptan, lo que parece guardar similitudes en la forma como se construyen los diagramas de Hasse y los grafos en otras teorías.

difiere bastante de la noción de campo actual, pero evidentemente, este *Feld* es la semilla de los futuros campos del álgebra abstracta.

También es necesario mencionar a Fritz Klein (diferente del famoso topólogo Felix Klein), quién fue el primer autor en acuñar el término *verbandstheorie,* para el estudio de los objetos duales surgidos del orden y que parecían también tener una cierta estructura algebraica con sus operaciones definitorias. Los cuales son denominados en su teoría como un *A-Conjunto* (*A-Menge*).[141] Es decir, fue el primero de todos los autores revisados en denominar a la teoría que regía a estos estos objetos, a estos *A-Menge's* derivados de la teoría de Schröder y Dedekind (en su caso principalmente derivados de la teoría de Schröder, pues fue el autor del que Klein tomó mayor influencia para su trabajo), como *teoría de los retículos* (es decir, *verbandstheorie* en alemán).

Los desarrollos conceptuales que devinieron en su *verbandstheorie* se evidencian principalmente desde su libro *Sobre las lecciones sobre el desarrollo de las matemáticas del siglo 19* (*1926*) (*Vorlesungen ¨uber die Entwicklung der Mathematik im 19*). Llegando hasta su publicación *Sobre un teorema de descomposición en la teoría de las operaciones abstractas* (*1932*) (*Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen*), publicado en la revista *Mathematische Annalen*, las cuales son tan solo algunas de sus tantas publicaciones con respecto a estas temáticas, en las que contribuyó formalmente a la construcción de una renaciente *verbandstheorie.*

Por otro lado con Albert Bennett, en su publicación *Orden Semi Serial* (*1930*) (*Semi Serial Order*), publicados en la revista *American Mathematical Monthly*, se evidencia un avance crucial para lo que se viene relatando a lo largo del recorrido histórico de los retículos, y las operaciones sobre las cuales se erigen estos objetos. Ya que en esta publicación se hace notoria una apropiación de los sistemas ordenados y las concepciones estructurales por parte de gran parte de los autores del ambiente matemático de la época, del cual Bennett es un representante para este apartado.

---

[141] Este *A-Menge* que significa literalmente un *A*-Conjunto, no es un conjunto por sí solo, se puede ver como un conjunto que cumple con las condiciones *A* (cualesquiera que sean estas condiciones *A* y que para este caso son las condiciones que definen un retículo a través del orden derivado de Schröder). Ya que como se evidencia en las definiciones posteriores de Bennett, para esta época aún era común utilizar la noción de clase para referirse a un conjunto por sí solo. De todas formas, esta es la primera vez que aparece en el relato histórico presentado, la noción de conjunto por sí sola.

De esta manera, partiendo de los avances surgidos en teorías como la de Schröder o Dedekind, en este intervalo de redescubrimiento y formalización se redefinen formal y axiomáticamente las relaciones de orden y por ende los sistemas ordenados, definidos ya para este momento con la denominanción oficial del orden, *sistema de orden*[142] *semi-serial*. Constituyendo por ende sistemas ordenados axiomáticos más formales y sustentados de mejor manera en sus propias teorías.

Consecuentemente con lo anterior, en el sistema de Bennett se encuentran por primera vez definidas y utilizadas oficialmente en la literatura revisada, las nociones de supremo e ínfimo sobre las cuales se constituyen las operaciones del *join* y *meet* con su notación algebraica característica usual y contemporánea. Apareciendo como nociones evolucionadas de las operaciones principales de los sistemas presentados en los capítulos II y III, eso sí, con una interpretación ligeramente distinta a la actual, es decir, como *reglas de combinación para subálgebras*. Pero con la notación que adquirirían finalmente las operaciones para manipular los retículos algebraicamente, cuyas propiedades acercarían la teoría de los retículos a su definición formal contemporánea. Con sus dos interpretaciones principales más básicas y más reconocidas, es decir, tanto desde el orden como desde el álgebra o como una estructura algebraica.

Se bosqueja entonces lo anterior, presentando los apartes más importantes de la definición del sistema ordenado semi-serial de Bennett tal como aparece en ese tratado, de la siguiente manera:

> *K es una clase*[143] *de elementos.* $\leqq$[144] *es una relación diádica*[145] *sobre los elementos de K.*
>
> I. (*Reflexividad.*) $a \leqq a$ *siempre que a pertenezca a la clase.*
>
> II. (*Simetría restrictiva.*) *Si* $a \leqq b$ *y también* $b \leqq a$, *entonces* $a = a$.
>
> III. (*Transitividad.*) *Si* $a \leqq b$ *y* $b \leqq c$, *entonces* $a \leqq c$.

---

[142] Esta es la primera presentación formal del "orden" como sistema propio en la literatura revisada, en la que se utilice la palabra orden para definir "un sistema ordenado" cualquiera. Y aunque la palabra "orden" se rastrea incluso desde algunas publicaciones de Peirce, Schröder y hasta Dedekind (tipo, los órdenes de un cuerpo finito en las clases de ideales de Dedekind), en estos casos ese "orden" se introduce en contextos diferentes al de la presentación formal de un sistema ordenado, lo que es precisamente lo que se define en el sistema de Bennett.

[143] Recordar las digresiones y aclaratorias con respecto al concepto de *clase*.

[144] Este es el mismo símbolo utilizado por Peirce al definir su *cópula de inclusión* a partir del *inclusión dentro* en la página 58 del capítulo II.

[145] Las relaciones diádicas (*Diadyc relations*), consideradas como relaciones entre dos, son el origen conceptual de la noción más formal de relación binaria, como ya se definieron formalmente en el capítulo anterior.

IV. (*Predecesor.*) *Si* $a \neq b$ *y* ni $a \leqq b$, o $b \leqq a$, entonces hay un elemento m tal que

1. $m \leqq a$, y $m \leqq b$.
2. Si $x \neq m$, x es tal que $x \leqq a$, y $x \leqq b$, entonces $x \leqq m$.

V. (*Sucesor.*) *Si* $a \neq b$ *y* ni $a \leqq b$, o $b \leqq a$, entonces hay un elemento n tal que

1. $a \leqq n$, y $b \leqq n$.
2. Si $y \neq n$, y es tal que $a \leqq y$, y $b \leqq y$, entonces $n \leqq y$.

VI. (*Elemento Inicial.*) *existe un elemento* i *tal que por cada* $a \neq i$, $i \leqq a$.

VII. (*Último Elemento.*) *existe un elemento* u *tal que por cada* $a \neq u$, $a \leqq u$.

⋮

Por lo tanto ***la regla de combinación***, $\wedge$, *puede ser definida (Esta notación en el caso de subálgebras es tradicional, CF. L. E. Dickson, en Álgebras y su aritmética. Universidad de Chicago, 1923, p. 26. Sugiere el* $\frown$ *usado por Peano, Russell, y posteriores autores del producto de clases) como sigue:*

Def.2. Si $a \leqq b$, *el elemento* $a \wedge b$ es definido como a. *Si* $b \leqq a$ *el elemento* $a \wedge b$ *es definido como* b. (*Si* $b=a$, *entonces* $a \wedge a$ *se define como* a). *De otra manera* $a \wedge b$ *es definido como el* m *de* V.

Cor.1. $a \wedge b = b \wedge c$

⋮

Def.3. Def.2. Si $a \leqq b$, *el elemento* $a \vee b$ es definido como a. *Si* $b \leqq a$ *el elemento* $a \vee b$ *es definido como* b. (*Si* $b=a$, *entonces* $a \vee a$ *se define como* a). *De otra manera* $a \vee b$ *es definido como el* n *de* V.

**Cor.1.* $a \vee b = b \vee c$

⋮

(Bennett 1930, pp.419-20).[146]

Finalmente Noether, en su trabajo y diferentes publicaciones con los ideales en las álgebras, grupos, anillos y cuerpos (entre otros), desde el inicio de la década de 1920 hasta su finalización, tales como *Sobre la Teoría de los Ideales en Polinomios y sus Resultados* (*1923*) (*Zur theorie der polynomideale und Resultanten*) y en un anillo algebraico, dio sustento y bases para el desarrollo abstracto de las matemáticas estructurales, llevadas a cabo por distintos matemáticos relevantes para este análisis, de forma que de esta importante autora Rota menciona lo siguiente:

> *En la teoría de los ideales en anillos de polinomios fue dado por Emmy Noether una composición abstracta y su escuela. Los anillos noetherianos fueron definidos, junto con los ideales primos y primarios, la factorización fundamental de teoremas para ideales fueron probados.*
>
> (Rota 1997, p. 1442)[147]

5.1.2. Øystein Ore: el principal divulgador de la estructura algebraica de los retículos

De todos los posibles autores que acogieron el importante legado estructural como de orden derivado directamente de las contribuciones de autores como Schröder y Dedekind, los cuales conformaron el intervalo final del periodo de las matemáticas modernas. Es decir, desde inicios de la década de 1920 con mucha más fuerza a través de la década 1930, y hasta el final del periodo de las matemáticas modernas, es decir 1950. Existe un autor que sobresale en su interés y divulgación de este tipo de objetos y estructuras según la visión de esta investigación.

---

[146] Cor y *Cor son los corolarios originados de las def.2 y def.3. en la publicación original. Si se desea ahondar en estos temas y revisar el apartado completo de la visión de Bennett en cuanto a la teoría del orden y los retículos, se puede revisar directamente su documento el cual se puede encontrar en distintos repositorios online luego de una búsqueda adecuada, ya que por razones del alcance del trabajo y por su puesto por la extensión de este apartado, no es posible ni necesaria su presentación completa. Traducción libre.

[147] Traducción libre.

Y aunque rimbombantes autores en el sentido más excelso de la palabra, como Von Neumann,[148] Glivenko,[149] Noether, Hausdorff,[150] Tarski[151], entre muchísimos otros, trabajaron en las temáticas de este análisis, contribuyendo en los campos más abstractos y estructurales de las matemáticas en los que resurgieron las teorías más cercanas a la teoría de los retículos. Aun así, de entre todos estos importantes como renombrados autores, el protagonista máximo del alcance y resurgimiento de la teoría de los retículos, de su esparcimiento entre las comunidades matemáticas, de "difundir la palabra" de la estructura abstracta como del retículo, y por ende el protagonista de este apartado, es el matemático noruego Øystein Ore, del que Birkhoff menciona lo siguiente:

> *El profesor Øystein Ore de la universidad de Yale amablemente ha llamado mi atención acerca de la cercana relación entre mi publicación y alguna investigación temprana de Dedekind. Me gustaría correlacionar, en cuanto me sea posible, mis resultados con los suyos. Mis* ***retículos*** *son obviamente sus* ***dualgruppen****; él llama los* ***B–retículos "von modultypus"*** *y los* ***C-retículos "von idealtypus"****. Mi teorema "dual" 4'1 está implícito en su trabajo, mientras que los teoremas de mi §6 son esencialmente definiciones pensadas como pistas de sus resultados especiales* (Birkhoff 1934. p, 200).[152]

Así pues, Ore quien reconoció el potencial estructural propio de los objetos devenidos de la teoría de Dedekind, que resultan ser equivalentes a los objetos que se reconocen actualmente como retículos, realizó sus avances a partir de la estructura que poseían dichos objetos, principalmente a través de importantes procesos abstractivos. Procesos que emergen en la teoría de Ore, al intentar construir una teoría de unificación estructural de los resultados más importantes del álgebra abstracta.

---

148 John Von Neumann (1903-1957), reconocido matemático húngaro-estadounidense, por sus innumerables contribuciones a diversas ramas de las matemáticas, principalmente la teoría de conjuntos, teoría de juegos o combinatorias, probabilidad, análisis funcional, entre otras.

149 Valèry Glivenko (1897-1940), matemático de origen sovietico ucraniano, importante por sus diversos desarrollos en el análisis matemático, topología y probabilidad.

150 Felix Hausdorff (1868-1942), matemático de origen polaco-alemán, básicamente es el fundador de la topología moderna, con contribuciones en la teoría de conjuntos, teoría de la medida, el análisis funcional y el análisis matemático, entre otras.

151 Alfred Tarski (1901-1983), matemático y lógico de origen polaco establecido y adoptado por la academia estadounidense, famoso por sus contribuciones totalmente abstractas y puramente matemáticas, como la paradoja de Banach-Tarski, inscritas en la topología y en diversos campos estructurales de las matemáticas.

152 Traducción libre.

Para lo cual consideró la necesidad de introducción de una estructura básica como soldadura común entre teorías de distinta naturaleza en la superficie, pero con innegables similitudes en el núcleo. Ya que, resultados en teorías como la de grupos, de anillos, de módulos, de campos, de espacios, etc parecían guardar similitudes de fondo y podrían ser unificadas a través de este tipo de estructuras. Por lo que precisamente en esta búsqueda de unificación estructural, es en la que se da el resurgimiento de la estructura que poseían los retículos, como teoría estructural abstracta del álgebra moderna.

Reiterando también qué Ore no construyó sus nociones desde cero, ya que tomó de base sistemas como el de Dedekind, con sus estructuras tempranas tratadas en el capítulo anterior, *modulgruppen*, *idealgruppen*, *modulgesetz*, *idealgesetz*, *dualgruppen*, que conoció gracias al trabajo de su tutor Skolem[153] y a saber de diversos autores. Sobre las cuales este autor precisó y desarrolló su teoría utilizando procesos de modificación como los descritos en el capítulo I, hasta llegar a sus propias abstracciones necesarias para la construcción de su nuevo sistema.

De esta manera Ore define el concepto de *estructura* (*structure*), equivalente a los retículos actuales originados de una relación de orden, análogamente a lo hallado en el sistema de Schröder con la definición de su relación de orden primitiva. Pero en este caso, tal como en el sistema de Bennett, definiendo axiomáticamente un nuevo sistema amplio, completo y más formal a partir de dicha estructura abstracta. Así pues, esta estructura se publica en *Acerca de los fundamentos del álgebra Abstracta* (*1935*) (*On the Foundation of Abstract Algebra*), de la que se menciona con respecto a su naturaleza y funcionalidad abstracta lo siguiente:

> *Es obvio para cualquier conocedor del álgebra abstracta que mediante el estudio de la estructura de los principales dominios del álgebra como teoría de grupos, teoría de los ideales, sistemas hipercomplejos, anillos, teoría de módulos, etc. Se llega a una gran cantidad de resultados que muestran estrecha relación y similitud. Sería natural esperar entonces, que estos resultados puedan derivarse de una fuente común por lo que muchos autores han tratado de soldar estas teorías mediante la introducción de un dominio los suficientemente general* (Ore 1935, p. 406).[154]

[153] Thoralf Skolem (1887-1962), matemático Norego, importante por sus contribuciones al álgebra abstracta y estructural. Como curiosidad solo le llevaba 2 años de edad a Ore siendo su tutor.
[154] Traducción libre.

Procediendo a definir sus estructuras y la teoría que obedecen estas a partir del orden. Tal como se presenta en el Capítulo I, sección §1 en el apartado denominado *Estructuras de Dedekind*, en donde se define el concepto de estructura de la siguiente forma:

§*1. DEFINICIÓN DE UNA ESTRUCTURA*

En el siguiente estudiaremos las propiedades de un sistema $\mathfrak{S}$ *consistente de elementos denotados por las mayúsculas A, B,⋯. En* $\mathfrak{S}$ *estará definida una relación de inclusión A > B o A contiene a B, el cual se puede establecer en la forma equivalente B < A o B está contenido en A. Esta relación de inclusión tendrá las siguientes propiedades:*

(α_1) $A > A$

De $A > B > C$ *se sigue* $A > C$.

Definimos la igualdad $A = B$ *en* $\mathfrak{S}$ *como la existencia simultánea de las relaciones*

$$A > B, \qquad B > A.$$

Esta definición de igualdad parece satisfacer los axiomas ordinarios

⋮

Es conveniente acordar escribir $A \geqq B$ *cuando la igualdad de dos elementos es posible y* $A > B$ *cuando la igualdad es excluida. Cuando ninguna de las relaciones* $A \geqq B$ *o* $B \geqq A$ *se cumple, podríamos* $A \| B$. *El sistema* $\mathfrak{S}$ *es entonces un conjunto en parte ordenado en la terminología de Hausdorff.*[155]

Asumiremos que $\mathfrak{S}$ *satisface los siguiente dos axiomas:*

α_2. *Para cada pareja de elementos A, B existe un elemento D = (A, B), el* ***corte transversal*** *(cross-cut) de A y B, teniendo la propiedad que*

$$D \leqq A, \qquad D \leqq B$$

y $D_1 \leqq D$ *para cualquier otro* D_1 *con la misma propiedad.*

[155] A Hausdorff se le atribuye ser el primer autor en denotar estos objetos como *conjuntos parcialmente ordenados*, aunque realmente son denominados por él como *conjuntos en parte ordenados* (*partly ordered sets*), surgido del alemán (*teilweise geordnete menge*), de donde se deriva la denominación adoptada finalmente por la comunidad matemática como (*Partially ordered sets*), tal como se establece en Birkhoff (1948, p. 1).

α´2. Existe un elemento M = [A, B], la ***unión*** *de A y B tales que*

$$M \geqq A, \qquad M \geqq B$$

y $M_1 \geqq M$ *para cualquier otro* M_1 *con la misma propiedad.*

Cualquier sistema que satisfaga todos los axiomas (α_i) *(i = 1, 2) se denotará como una* ***estructura*** *y* (α_i) *los axiomas de la estructura* (Ore 1935, pág. 408).[156]

Ahora bien, presentando un recuento paso a paso del extracto anterior en el que se bosqueja el sistema de Ore, del que por un lado se puede ponderar el carácter axiomatizador y la formalidad en la definición de los conceptos básicos para el establecimiento de una teoría propiamente estructural por parte de este autor. Presentando una teoría que pretende hacer uso de la noción general de estructura que se tiene en la actualidad, y que palabras más palabras menos, representa la antesala definitiva equivalente a la teoría de los retículos. Definidos en primer lugar a través del orden y cuyas operaciones *corte transversal* y *unión* están definidas axiomática y formalmente de acuerdo a su mismo sistema. Permitiendo así a estas mismas operaciones, cumplir las propiedades algebraicas que determinarían una estructura algebraica.

Reiterando que Ore construye este sistema, en aras del establecimiento de una unificación o equivalencia entre distintos campos del álgebra abstracta, a través de los teoremas de descomposición algebraica posteriormente desarrollados en su teoría, para los que estos objetos con la estructura de los retículos resultan siendo la amalgama perfecta. Por lo tanto, a partir de todo este ejercicio unificador, se termina derivando posteriormente la equivalencia fundamental y final de este trabajo, la equivalencia de interpretación ordenada y algebraica de un mismo objeto, de un retículo. Lo que se termina consolidando posteriormente por Birkhoff marcando el final de esta investigación.

Así pues, precisando un poco más los elementos del sistema oreano que permitieron consolidar la teoría de los retículos en este periodo y dieron paso a la comprensión de las dos interpretaciones fundamentales del retículo, simplemente

---

[156] Si se desea ahondar en este apartado y por ejemplo revisar con detenimiento la definición de las estructuras y subestructuras de Ore, determinantes para los teoremas de descomposición mediante los cuales se conectan teorías como los anillos primos conmutativos y la teoría de grupos (solo por mencionar algunos casos), se puede revisar directamente sus documentos que se puede encontrar en distintos repositorios online luego de una búsqueda adecuada, ya que por razones del alcance del trabajo y por su puesto por la extensión de este apartado, no es posible ni necesario presentarlo completamente. Traducción libre.

como dos expresiones distintas de un mismo objeto. Se explican las herramientas que Ore dejó sobre la mesa para la culminación de esta labor posteriormente finiquitada por Birkhoff.

En primer lugar, se reitera que Ore trabajó sobre un sistema ordenado, ya que los objetos de su sistema cumplen las propiedades reflexivas, transitivas y de igualdad (de donde deriva la antisimetría). Por lo que los productos de su sistema son inherentemente objetos ordenados, es decir, surgidos del orden. Por lo tanto, la primera interpretación que se encuentre de los retículos en el sistema de Ore será la interpretación de retículos como estructuras ordenadas.

Se presenta entonces la siguiente figura que sintetiza todo lo anterior:

Propiedad	Corte transversal	Unión	Notación algebraica actual[157]
Si A>B	(A, B)=B		$\mathrm{Inf}\{a, b\} = a \wedge b = b$
Si A>B		[A, B]=A	$\mathrm{Sup}\{a, b\} = a \vee b = a$
Conmutatividad	(A, B) = (B,A)	[A, B] = [B, A]	$a \wedge b = b \wedge a \quad a \vee b = b \vee a$
Asociatividad	(A, (B, C)) = ((A, B), C)	[A, [B,C] = [[A, B], C]	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \cdots$
Idempotencia	(A, A) = A	[A, A] = A	$a \wedge a = a \quad a \vee a = a$
Absorción	(A,[A, B]) = A	[A,(A, B)] = A	$a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$

Figura 17: Propiedades que cumplían las *estructuras de Ore* (inspirado de Ore 1935).

Se precisa entonces a partir del sistema de Ore su retículo definido sobre la estructura ordenada o *copo* denotado por ($\mathcal{L}$, >), donde para todo A, B $\in$ $\mathcal{L}$ existe (A, B)=D y [A, B]=M, las cuales son las operaciones del sistema ordenado de Ore que determinan el supremo y el ínfimo en ($\mathcal{L}$, >). Supremo e Ínfimo que también son caracterizados por las leyes algebraicas de una estructura, tal como estas estructuras son definidas por Ore y como se sintetizan en la figura 17.

[157] También es la notación de Bennett.

De todas formas, aunque se reconoce que en este sistema oreano están consignadas las herramientas para realizar la equivalencia entre las dos interpretaciones de los retículos desde el orden y el álgebra. En este sistema, dicha equivalencia no es precisa, y mucho menos se realiza explícitamente como esto se realizaría en la actualidad o como se realiza finalmente en el sistema de Birkhoff, realizando algún tipo de enlace equivalente entre las operaciones de las dos visiones de la estructura en cuestión.

Para dejar más claro esto último, se esperaría una equivalencia fundamental entre las propiedades que caracterizan ambos sistemas, más o menos de la siguiente manera:

$$\text{Reflexividad} \Leftrightarrow \text{Idempotencia}$$

$$\text{Antisimetría} \Leftrightarrow \text{Conmutatividad}$$

$$\text{Transitividad} \Leftrightarrow \text{Asociatividad}$$

$$\text{Sup e Inf} \Leftrightarrow \text{Absorción}$$

Por lo que se puede concluir que los retículos de Ore aunque estructuralmente son totalmente sustentados en su propio sistema de origen, se diluyen en abstracciones con finalidades mucho más amplias y generales que las deseadas para esta investigación. Es decir, se pierden en el enfoque de unificación general de campos más abstractos y generales de las matemáticas, lo que impide la consolidación de la equivalencia requerida en este estudio. Lo que de todas maneras se concretará según el orden, las operaciones y las notaciones establecidas en el siguiente apartado, según como sean definidas en el sistema de Birkhoff.

De esta manera, con todo lo anterior precisado, se da continuación a la presentación del apartado final de este capítulo, en el cual se concreta tanto la visión de los autores con los que inició este segundo respiro de los retículos, entendiendo estos como estructuras algebraicas relevantes para las matemáticas modernas. Como también a la visión de los retículos como una *estructura* algebraica y ordenada proveída por el sistema de Ore. Apartado birkhoffiano con el que se pretende finiquitar la teoría de los retículos tal y como ha sido reseñada a lo largo de todos los

análisis presentados, es decir, como la teoría de una estructura básica que surge de dos interpretaciones principales, desde el orden y desde el álgebra.

Permitiendo finalmente establecer una vinculación profunda y estructural entre dichos sistemas de naturaleza distinta, pero con dicha estructura reticular en común, gracias a los elementos, las operaciones y las propiedades características de dichas *estructuras*. Lo que en últimas es lo que se pretende evidenciar en el siguiente apartado.

5.1.3. Garret Birkhoff: el consolidador definitivo de la teoría estructural algebraica de la que parte toda la teoría contemporánea de los retículos

Luego de haber revisado histórica y epistemológicamente los principales edificadores de la teoría de los retículos, que contribuyeron para que esta teoría sea comprendida tal como se entiende en la actualidad, a partir de los cuales se construye la progresión histórico-conceptual establecida a lo largo de estos análisis. Comenzando desde el inicio del periodo de las matemáticas modernas con los sistemas de carácter lógico/algebraico, pasando por la consolidación de estos sistemas y llegando hasta el presente capítulo IV enfocado en el resurgimiento de aquellos sistemas consolidadores y situado temporalmente en la parte conclusiva del periodo mencionado.

Se procede a concluir todo lo anteriormente revisado con las siguientes contribuciones notacionales y conceptuales materializadas por Garret Birkhoff,[158] en forma de complementos a las teorías de los otros autores analizados en este capítulo, en particular Bennett y Ore.

Ahora bien, a pesar de la gran cantidad de literatura publicada por Birkhoff con respecto a las temáticas abstractas y estructurales de las matemáticas modernas, y más precisamente con respecto a las estructuras algebraicas como teoría, este apartado se construye a partir de extractos de su teoría ya consolidada fechada en 1948.[159] Más específicamente en la segunda edición de su publicación en

---

[158] Garret es hijo del también reconocido matemático del periodo inicial de las matemáticas modernas, George Birkhoff reconocido por algunas de sus publicaciones con respecto a los sistemas físicos, pero también de las matemáticas abstractas, principalmente aspectos relacionados con las métricas y la topología. En adelante cuando se referencia a Birkhoff se hará referencia a Garret Birkhoff a no ser que se indique lo contrario.

[159] Existe una tercera edición de 1967 pero no es abordada en este análisis pues excede los alcances de este estudio, tal como fue determinado su periodo de revisión.

la *Sociedad Matemática Americana*, denominada *Teoría de Retículos* (*Lattice Theory*), donde se recopilan y se concretan, tal como se intuye del propio título de este apartado, todos los desarrollos y avances alcanzados por la comunidad matemática del periodo final de la modernidad matemática que trabajó con dichos objetos.

Comunidad matemática de la que Birkhoff es el mayor representante a la hora de hablar de la estructura de los retículos, o al menos parafraseando lo que se extrae de este autor según Rota (1997), "uno de los más prominentes contribuyentes a esta teoría". Publicación en la que además se evidencia que Birkhoff demostró casi todo lo que se podía demostrar en cuanto a los retículos y su estructura.

Así pues, tal como en apartados anteriores, se presenta la literatura que derivó en los desarrollos alcanzados e introducidos en el texto en torno al cual gira este apartado. Pero a diferencia de casos anteriores y al tener una producción literaria tan rica y numerosa en cuanto a este tema, se resume un listado de los principales textos y publicaciones relacionados con la estructura de los retículos elaborados por Birkhoff como sigue:

Publicación	Fecha de Publicación
• Sobre de la combinación de subálgebras (*On the combination of subalgebras*)	Octubre 1933
• Aplicaciones del álgebra de retículos (*Applications of the lattice algebra*)	Diciembre 1933
• La Topología de Conjuntos de transformación (*The Topology of the Transformation-Sets*)	Octubre 1934
• Ideales en Anillos Algebraicos (*Ideals on algebraic Rings*)	Noviembre 1934
• Sobre la Teoría de Retículos de los Ideales (*On the Lattice Theory of Ideals*)	Agosto 1934
• Relaciones Combinatorias en Geometría Proyectiva (*Combinatorial Relations in Projective Geometries*)	Julio 1935
• Acerca de la Estructura de las Álgebras Abstractas (*On the Structure of Abstract Algebras*)	Junio 1935
• Independencia Lineal Abstracta y Retículos (*Abstract Linear Dependence and Lattices*)	Octubre 1935

- El Significado de la Completitud (*The Meaning of Completeness*) — Enero 1937
- Retículos y sus Aplicaciones (*Lattices and their Applications*) — Diciembre 1938
- Elementos Neutrales en los Retículos Generales (*Neutral Elements in General Lattices*) — Agosto 1940
- Grupos de Retículos-Ordenados (*Lattice-Ordered Groups*) — Abril 1942
- ¿Qué es un Retículo? (*What is a Lattice?*) — Octubre 1943
- Uniones Subdirectas en el Álgebra Universal (*Subdirect Unions in Universal Algebra*) — Octubre 1944
- Representaciones de Retículos Mediante Conjuntos (*Representations of Lattices by Sets*) — Febrero 1948

Figura 18: Listado de publicaciones de Birkhoff por medio de las cuales se erige la teoría de los retículos presentada en este apartado.[160]

Finalmente, terminando de justificar el estatus de finiquitador general de la teoría de los retículos otorgado a Birkhoff, según la visión constituida en este trabajo, se presenta la siguiente cita donde se reafirma y se demuestra que tan importantes eran efectivamente los retículos para su trabajo además de la belleza, la simpleza estructural que hallaba en estos y lo comprensible que estos objetos hacían las matemáticas que se estuviesen tratando, tal como se extrae de Schlimm de la siguiente manera:

> *Recuerdo estar impactado cuando mi papá me preguntó ¿¡qué específicamente podía probar usando retículos que no pudiera probar sin ellos!? Mis argumentos teórico reticulares parecían para mí mucho más bellos, y traían mucho más vívida la esencia de las consideraciones involucradas, por lo tanto esas eran obviamente el tipo de pruebas "correctas" para usar* (Schlimm 2011, p. 13).[161]

[160] Traducción libre.

[161] Tomado a su vez de Mehrtens (1979). Traducción libre.

Ahora bien, precisando los aportes más notorios del sistema birkhoffiano necesarios para la concreción de este capítulo, acerca de los cuales se puede mencionar que fueron alcanzados primordialmente a partir de modificaciones y abstracciones obtenidas al elaborar este sistema principalmente a partir concepciones derivadas de los sistemas de Dedekind y Ore, tal como se sugiere en Birkhoff (1934). Se empieza por comentar que al igual que en el sistema de Schröder, el sistema ordenado establecido por Birkhoff del que parte toda su teoría, está sustentado en su relación de inclusión como primitiva fundamental y sustentatoria de todas sus construcciones y aportes sobrevinientes.

De esta manera, a partir de una relación de inclusión se da paso a la definición de un *copo*, similarmente a como se introducen objetos o conjuntos ordenados análogos para luego dar paso a estructuras algebraicas en los extractos esbozados de los sistemas de Bennett y Ore. En este caso en particular, se parte de las propiedades o postulados P1: Reflexividad, P2: Antisimetría y P3: Transitividad que cumple la relación "indefinida" (expresada así por Birkhoff) de inclusión.

Aunque a diferencia de la forma como se denominan estos objetos ordenados en dichos sistemas de Bennett y Ore (por ejemplo), ahora sí son denominados propia y formalmente por Birkhoff como *conjuntos en parte ordenados* (equivalentes totalmente a los denominados indistintamente por él como, *conjuntos parcialmente ordenados*). Eso sí, manteniendo la misma notación utilizada en estos últimos sistemas mencionados a la hora de definir su relación de orden primitiva y por ende denotando sus *copos* con, $\geqq$, >, así como sus duales $\leqq$, <. Guardando también las mismas nociones con respecto a estas relaciones "indefinidas", tipo, "estar incluido en" o "ser más grande qué o igual qué".

Así pues, presentados en el capítulo I de su tratado sobre los retículos y de la misma forma que en los extractos de los sistemas anteriormente esbozados, tal como se vienen definiendo incluso desde los sistemas de Schröder y Dedekind, Birkhoff también define los elementos sobre los cuales construye su sistema. Los supremos, los ínfimos, los máximos, los mínimos, las operaciones que rigen estos elementos y por ende el orden de su sistema. Operaciones que en el caso de este sistema birkhoffiano son derivadas de la aritmética cardinal y ordinal de su sistema, con sumas, multiplicaciones e incluso potencias para cada una de estas aritméticas. Las cuales son caracterizadas formalmente a partir de definiciones y teoremas, tal como se ejemplifica con los siguientes literales fundamentales de su sistema ordenado.

Teorema 1. Cualquier subconjunto de un conjunto en parte ordenado es en sí mismo un conjunto en parte ordenado por la misma relación de inclusión.

Teorema 2. (Principio de Dualidad). El contrario de cualquier ordenamiento parcial es en sí mismo un ordenamiento parcial.

Teorema 4. Cualquier subconjunto finito X de un conjunto en parte ordenado tiene un miembro minimal y maximal.

P4: Dados x y *y*, o $x \geqq y$ o $y \geqq x$

P4 es conocida como la condición de Jordan-Dedekind, derivada directamente del sistema de Dedekind como parte de las condiciones para que los elementos de un *copo* sean considerados una cadena.

Definición 6: Un orden parcial que satisfaga P4 es llamado como "simplemente ordenado" y denominado una "cadena".[162]

Teorema 5: En las cadenas, las nociones de mínimo e ínfimo (máximo y supremo), son efectivamente equivalentes. Por lo tanto cualquier cadena tiene ínfimo (primero) y supremo (último) elemento.

Alcanzando así, luego de este recuento somero acerca de la teoría del orden birkhoffiana, el capítulo II de su *Teoría de retículos,* en la que se formaliza toda la teoría antes presentada y con la que se concreta este estudio. En el apartado denominado *Retículos*, que se presenta de la siguiente forma:

1. Definición. *La teoría general de los conjuntos en parte ordenados está basada en una sola relación indefinida. También los retículos están basados indirectamente en esta relación, pero directamente en dos operaciones binarias las cuales son análogas en muchas maneras a la suma y la multiplicación ordinarias. Es esta analogía la que hace a la teoría de los retículos una rama del álgebra.*

Por una ***cota superior*** *de un subconjunto X de un conjunto en parte ordenado P significa que un elemento a* $\in$ *P que contiene cada x* $\in$ *X. La* ***menor cota superior*** *es una cota superior contenida en cada una de las*

[162] También se les denomina orden total.

otras cotas superiores (mirar Cáp. I).[163] *Las nociones de una* ***cota inferior*** *y la* ***mayor cota inferior*** *son definidas dualmente. Es claro por P2 que un subconjunto de un conjunto en parte ordenado puede tener como mucho una única* ***mcs*** *(la menor cota superior) y* ***mci*** *(la mayor cota inferior).*

Definición. *Un retículo es un conjunto en parte ordenado P en el que dos elementos cualesquiera tienen* ***mcs*** *o "****meet****"* $x \frown y$ *y* ***mci*** *o "****join****"* $x \smile y$.

Evidentemente el dual $\breve{L}$ *de un retículo cualquiera L es de nuevo un retículo, con los meets y joins intercambiados. También es fácil mostrar por inducción que todo subconjunto finito tiene* ***mcs*** *y* ***mci****. Conjuntos en parte ordenados en los cuales todo subconjunto tiene* ***mcs*** *y* ***mci*** *se llaman retículos completos, y son discutidos en el cáp. VI.*

⋮

*Se hallará conveniente utilizar el término "****supremo****" o "****sup****" indistintamente a* ***mcs****, e "****ínfimo****" o "****inf****" indistintamente a* ***mci****.*

⋮

3. Retículos como álgebras abstractas. *Existe una profunda analogía entre las expresiones* $x \smile y$, $x \frown (y \smile z)$,⋯ *encontrados dentro de la teoría de los retículos, y expresiones como* $x+y$, $x(y+z)$,⋯ *familiares desde el álgebra ordinaria* (Birkhoff 1948, p. 16).[164]

De esta manera, luego de este extracto bosquejando el inicio del origen del sistema birkhoffiano en el que se sustenta todo su sistema restante, caben algunas precisiones notacionales y conceptuales importantes.

---

[163] Birkhoff recuerda las precisiones realizadas a esta relación por supuesto abordadas en apartes anteriores en este análisis, haciendo referencia específicamente a que "contenida" en este contexto significa ser "más pequeña qué".
[164] Traducción libre.

En primer lugar, a pesar de que este es el sistema concretador de los retículos con el que se cierra el periodo moderno de las matemáticas abstractas, la notación no adquiere su forma final con la que se reconoce la teoría de los retículos en la actualidad. Es decir, no aparece la notación donde las operaciones binarias de la estructura sean denotadas con "∨ o ∧", ni en el trabajo en particular de birkhoff de (1948), ni en todas sus publicaciones revisadas a lo largo de este periodo, ni mucho menos el *meet* y el *join* son definidos y formalizadas por Birkhoff haciendo uso de esta notación.

Y aunque sí se reconocen en este mismo capítulo apartes donde se utiliza efectivamente la notación "∨ o ∧" para algunos casos especiales, como en Bennett (1930) y en el mismo Birkhoff (1948), con la siguiente ecuación:

$$\wedge_{i=1}^{m}(\vee_{j=1}^{n} a_{i,j}) \geqq \vee_{j=1}^{n}(\wedge_{i=1}^{m} a_{i,j}).$$

Denominada *inecuación Minimax,* inspirada en la teoría de juegos y comportamiento económico de Von Neuman & Morgenstern, cuya notación original es completamente distinta. Pero en este caso de Birkhoff (1948), las operaciones que definían con estas notaciones u operadores, caracterizaban objetos distintos a un simple retículo. Es decir, con esta ecuación y con la notación de que esta inecuación hace uso, se definían estructuras completamente diferentes y generales a la estructura de los retículos comunes. Ya que estas notaciones eran utilizadas para definir algo similar a la intersección y unión entre subálgebras que partían de la estructura de retículos arbitrarios o muy generales.

Por otro lado, y terminando con los dos usos anteriores de la notación "∨ o ∧" en este capítulo. Tal como se evidenció en el apartado de Bennett, las operaciones que definían con estos símbolos eran denominadas *reglas de combinación* y tenían una concepción ligeramente distinta a la interpretación final de los retículos.

En la siguiente figura se sintetiza lo más importante de la teoría de Birkhoff 1(948) con respecto a los retículos, aunado a una contrastación con las precisiones realizadas a su teoría:

Propiedad	Birkhoff hasta 1948[165]	Notación Actual
$x \geqq y$	$x \frown y = y$	$\text{Inf}\{x, y\} = x \wedge y = y$
$x \geqq y$	$x \smile y = x$	$\text{Sup}\{x, y\} = x \vee y = x$
Elemento 0	$0 \frown x = 0,\ 0 \smile x = x$	*Mínimo*
Elemento I	$x \frown I = x,\ x \smile I = I$	*Máximo*
L1. *Idempotencia*	$x \frown x = x,\ x \smile x = x$	$x \wedge x = x,\ x \vee x = x$
L2. Conmutativa	$x \frown y = y \frown x,\ x \smile y = y \smile x$	$x \wedge y = y \wedge x,\ x \vee y \cdots$
L3. Asociativa	$x \frown (y \frown z) = (x \frown y) \frown z,\ x \smile (y \smile \cdots$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$
L4. Absorción	$x \frown (x \smile y) = x,\ x \smile (x \frown y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$

Figura 19: Notación final de Birkhoff (1948) versus notación actual de los retículos (inspirado de Birkhoff 1948).

Para terminar, con respecto a los B-retículos y C-retículos que aparecen mencionados en apartados anteriores, se puede mencionar que son las estructuras análogas a los retículos modulares (de dónde se desprenden los retículos ideales y los retículos libres) y retículos distributivos de la teoría de Dedekind. Las cuales son estructuras que adquieren tanta relevancia en la teoría de Birkhoff que son los capítulos siguientes y la base de los capítulos restantes de Birkhoff (1948). Eso sí, estos retículos modulares y distributivos de la teoría de Birkhoff aparecen como versiones más formales y estructurales que las versiones primigenias originadas en el sistema de Dedekind.

[165] No hace parte de este trabajo investigativo revisar textos posteriores al final del periodo de las matemáticas modernas, por motivos de alcance y de tiempo, pero es casi seguro que en la tercera edición de su *Lattice theory* de 1967 Birkhoff ya utilice la notación reconocida en la actualidad haciendo uso de símbolos u operadores "∨ ∧".

Ahora sí, luego todo el recuento anterior y de las precisiones notacionales y conceptuales realizadas sobre la presentación del extracto con que empieza la teoría de los retículos de Birkhoff esbozada, se procede a concluir el presente capítulo y en general el estudio realizado, precisando la equivalencia que en parte motivó la realización de este estudio y la búsqueda de respuestas histórico-epistemológicas con respecto a los retículos.

Todo esto en aras de dilucidar la forma en que la construcción de las teorías del orden y algebraicas abstractas antes introducidas, permiten el desarrollo de una estructura común a ambas teorías y que las conecta profundamente. Lo que aparece taxativamente en Birkhoff (1948) como el teorema 1. del capítulo II, que tranquilamente se podría denominar teorema de caracterización completa de los retículos o teorema de equivalencia de los retículos.

5.1.4. Teorema 1. Capítulo II. Teoría de los retículos (*Lattice Theory*).

Ahora es momento de mostrar que cualquier retículo definido mediante el orden también satisface las leyes L1-L4 tal como se especifica en el apartado *3. Retículos como álgebras abstractas* de Birkhoff (1948) y que se sintetiza en la figura anterior. Donde el teorema de "equivalencia", el teorema 1 del capítulo II del documento analizado, finalmente toma forma al definir en primer lugar el orden del sistema $x \geqq y$ derivando la equivalencia algebraica $x \cap y = y$ de la anterior determinación de orden en particular (pudo haber sido otro orden, a saber $y \geqq x$). Implicando de esta manera que la estructura de este objeto que denominamos ahora gracias a Birkhoff retículo caracterizado desde el álgebra $(X, \wedge, \vee)$[166] puede ser simplificado, derivado o reducido a 3 postulados fundamentales, postulados que son los de un retículo definido o interpretado desde el orden, o como una estructura ordenada $(X, \geqq)$.

Demostrando así, una equivalencia intrínseca y profunda entre estas dos teorías, simplificadas por la estructura del retículo. Lo que quiere decir en síntesis que es posible recuperar el orden, a partir del reconocimiento de las propiedades algebraicas de las operaciones definidas y viceversa. Este proceso de equivalencia se sintetiza de la siguiente manera:

---

[166] O equivalentemente la siguiente estructura algebraica $(X, \wedge, \vee, I, 0)$, donde se dejan expresos los elementos nuestros e inversos para un retículo cualquiera.

Reflexividad $\Leftrightarrow$ *Si* $x \geqq x \Leftrightarrow x \cap x = x \Leftrightarrow$ Idempotencia

Antisimétrica $\Leftrightarrow x \geqq y,\ y \geqq x \Rightarrow x \cap y = y,\ y \cap x = x$ pero $x \cap y = y \cap x \Rightarrow y = x \Leftrightarrow$ Conmuta

Transitiva $\Leftrightarrow x \geqq y,\ y \geqq z \Rightarrow x \cap z = x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z = y \cap z = z \Rightarrow x \geqq z \Leftrightarrow$ Asocia

Finalmente, la cuarta equivalencia a partir del orden definido $x \geqq y$ se da entre la equivalencia de las operaciones que definen el supremo y el ínfimo en $(X, \geqq)$, y las operaciones de naturaleza algebraica definidas sobre $(X, \wedge, \vee)$, completando el uso de las leyes algebraicas L1-L4 al utilizar para la equivalencia las leyes de absorción o L4, lo que se verifica expresamente a continuación:

$\text{Sup}\{x,y\}$

$x \cup y$ *es por lo menos cota superior de* $\{x,y\}$, sea $z/\ z \geqq x,\ z \geqq y \Rightarrow (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) = x \cup z = z \Rightarrow z \geqq x \cup y$ luego $x \cup y$ *es la menor de las cotas superior de* $\{x,y\}$, es decir, $\text{Sup}\{x, y\} \coloneqq x \cup y$.

$\text{Inf}\{x, y\} \Leftrightarrow$ Absorción (Absorbe).

$x \cap y$ *es por lo menos una cota inferior de* $\{x,y\}$, sea $z/x, y \geqq z,\ x \cap y = x,\ x \cap y = y \Rightarrow (x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z) = x \cap z = z \Rightarrow x \cap y \geqq z$ luego $x \cap y$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{x,y\}$, es decir, $\text{Inf}\{x, y\} \coloneqq x \cap y$.

Finalizando así la caracterización completa de los retículos como objetos propios del orden, es decir, como una estructura ordenada que cumple los postulados propios del orden establecido pero que también cumplen las propiedades algebraicas que caracterizan la estructura abstracta que determina a un retículo. Se culmina pues de esta manera el surgimiento histórico-epistemológico de los retículos a través de una progresión conceptual a lo largo de todo el periodo moderno de las matemáticas.

Con lo que se reafirma la importancia de la teoría del orden como la teoría sobre la que se imprimen los principales redescubrimientos importantes para la concreción final de la estructura de los retículos alcanzada en el presente capítulo, pero que se rastrea incluso desde las narraciones del primer capítulo. Se reconoce

que en síntesis lo que se representa transversal y progresivamente a lo largo de los tres capítulos anteriores pero que se concreta en este capítulo IV, es la algebrización del orden.

Dicha algebrización que se va consolidando paso a paso a través de los sistemas de Peirce, Schröder y Dedekind, es finalmente capitalizada principalmente por Ore y Birkhoff a pesar de la cantidad incalculable de autores que trabajaron y aportaron directa o indirectamente en innovaciones acerca del álgebra abstracta. Lo que ocurrió esencialmente en aras de poder asumir los objetos propios del orden como objetos a los que se pudieran aplicar, funciones, operadores, transformaciones, biyecciones, morfismos etc, así como toda el álgebra abstracta descubierta o redescubierta en el periodo de expansión de estas teorías abstractas, para suplir sus propias teorías estructurales generales o incluso teorías de un carácter más amplio y fundamental.

Se termina entonces con una pequeña reflexión en cuanto a la continuidad de estas teorías en el imaginario colectivo matemático, reconociendo que tan solo de los conceptos de orden y de los retículos, a pesar de lo intentado globalmente en esta investigación, queda mucho por precisar, por reseñar y por descubrir en cuanto a la visión y la trayectoria histórica y conceptual que se presenta a lo largo de todos los análisis, pero mucho más en lo concerniente a este capítulo IV. Sencillamente porque esta parte final de las matemáticas modernas, es uno de los intervalos de producción académica especializada más ricos y fructíferos de casi toda la historia de las matemáticas. Por lo que denominar esta pequeña etapa final moderna, que abarca las primeras décadas del siglo XX como un “boom de resultados abstractos”, no está lejos de la realidad.

Tan importante fue esta etapa final de las matemáticas modernas e influenció tanto las matemáticas subsecuentes, que durante este periodo se incubaron muchas de las ideas principales de las matemáticas contemporáneas, tomando estas ideas como el legado de los impulsos de las matemáticas de finales del periodo moderno. En las que el orden, ya completamente consolidado y con el reconocimiento de sus grandes posibilidades, desempeña importantes roles en este empalme entre diferentes periodos de las matemáticas. Por mencionar un ejemplo, las indiscutibles contribuciones de las matemáticas burbakianas originadas a finales de este periodo moderno, pero que serían recibidas de lleno y completamente desarrolladas en el periodo de las matemáticas contemporáneas.

Eso sí, con el orden como uno de sus máximos baluartes fundamentales, pero en diferentes formas, algebrizados o no, como métricas, como espacios, como topologías, entre otras. Se integrarían con gran cantidad de teorías propias de las matemáticas contemporáneas para continuar con el incesante y progresivo paso del conocimiento matemático hasta la actualidad.

6. Conclusiones

El estudio presentado en este trabajo de grado constituye sólo una de las múltiples visiones posibles sobre la edificación del concepto de retículo. Ya que existen y se pueden constituir diferentes aproximaciones históricas en estas materias abstractas: por ejemplo, una visión centrada en un solo autor como contribuyente primario (tal como se realiza en Arias 2024), una que agrupe autores de una misma corriente y etapa matemática, o como se realizó en el presente estudio, una articulación de las últimas dos perspectivas. Presentando las visiones de los más importantes autores del periodo de las matemáticas modernas considerados tanto individualmente, pero a su vez como representantes de corrientes matemáticas amplias. Todo esto, principalmente a través de la guía de los referentes histórico-conceptuales más importantes con respecto a las matemáticas estructuralistas de los siglos XIX y XX.

Aun así, a pesar del esfuerzo de no pasar por alto contribuyentes relevantes relacionados con la construcción de la teoría de los retículos, la cantidad de autores que se dejan de reseñar en este recuento conceptual es considerable. Lo que se constituye en un limitante propio de un estudio como el presentado aquí, que aborda de manera transversal temáticas como el surgimiento del orden y de las estructuras matemáticas como ramas propias de estudio.

Por otro lado, así como se ponderó brevemente el orden en el cierre del capítulo anterior, como la teoría sobre la que finalmente se erigen las dos interpretaciones fundamentales de los retículos, resulta importante enfatizar en la magnitud y la relevancia de este concepto que aparece transversal a casi toda la progresión histórica presentada en esta investigación. Apareciendo en los primeros capítulos y apartados como una semilla ordenada surgida de procesos, relaciones y operaciones logicistas, en el tránsito entre la lógica medieval y la lógica clásica protagonizado por De Morgan y asumido por Boole. En cuyo sistema se reconocen las primeras concepciones pseudoformales del orden con sus operaciones lógico/algebraicas que determinaban orden a través de las operaciones de su sistema, por ejemplo $xy=y$, expresando que toda y está totalmente incluída en toda x.

Lo que da paso a los capítulos posteriores, en los que se reporta paulatinamente una algebrización del orden sobre el cual finalmente en el capítulo

IV, se inscriben las estructuras algebraicas, una de las cuales son los retículos. Estructura fundamental para diversos procesos de las matemáticas abstractas y la unificación de diversos campos en estas matemáticas, como se evidenció en este capítulo IV.

Es por esto, que se puede mencionar sin lugar a dudas que el objetivo principal de este estudio, tal como fue contemplado desde un inicio, desde su concepción como idea de proyecto de trabajo de grado, se alcanzó satisfactoriamente a pesar de los limitantes mencionados. Es decir, se logró realizar una reconstrucción que efectivamente retrata el camino del surgimiento de los retículos desde el origen de este concepto en la lógica clásica, derivando en el surgimiento de las relaciones de orden primigenias, para la posterior algebrización y formalización de dicho orden dando paso a las estructuras algebraicas reticulares, durante el periodo matemático estipulado (Zalamea 2010). Lo cual constituye el núcleo del objetivo principal de esta búsqueda.

Permitiendo así, responder muchas de las preguntas originadoras de la realización de esta investigación, de las que se da cuenta en la parte introductoria de este trabajo y que posteriormente se consolidan en la pregunta de investigación.

Sin dejar de mencionar, que el impacto o la importancia de la temática tratada para las matemáticas, se va manifestando paralelamente o incluso indirectamente, tal y como en el capítulo IV, cuando se describe como Ore utiliza la estructura de los retículos como amalgama para dar sustento a sus teoremas de descomposición algebraica, en aras de unir diversas ramas del álgebra abstracta.

Ahora bien, con respecto a los objetivos específicos, en el primer capítulo se logra dar un recuento de las principales condiciones de necesidad, aunque no exhaustivamente, de la mano de las contribuciones de De Morgan y de Boole. Por ejemplo con De Morgan, y sus leyes duales, dando paso y origen algebraico posteriormente a las leyes de absorción, y con los principios algebraicos de Boole, su algebrización de la lógica, dejando todo preparado para la aparición del orden por parte de Peirce y su consolidación con Schröder.

Todo esto se lleva a cabo, paralelamente a un recuento notacional, nocional y conceptual de las principales contribuciones de los autores referenciados, estableciendo de esta manera una línea cronológica, que da cuenta del último objetivo específico. Cronología que a través del análisis y la exposición de todos los

autores, la aparición de sus respectivas notaciones, nociones y concepciones, con las fechas de publicaciones, fechas de revistas, con los nombres en español y en sus lenguajes originales, se va erigiendo y permite reconocer y brindar una línea histórico-conceptual muy cercana a la realidad del surgimiento de estos objetos.

En síntesis, el recorrido de este objeto denominado retículo es importante porque, como se mencionó al inicio del trabajo, los retículos y el orden son temáticas tanto transversales como recurrentes a gran parte de las matemáticas. Por lo que, conocer de su origen, implica conocer al menos parcialmente del origen de los sistemas lógico clásicos, con sus silogismos, deducciones e inferencias, así como de todos sus elementos propios, pero también es conocer, aunque sea someramente, de los conjuntos como materia de estudio, del producto cartesiano, de relaciones y funciones, de aplicaciones binarias, de grupos, anillos, ideales, etc.

Lo que resulta en conocer también, del origen de todas estas temáticas es decir, reconocer que los conjuntos no siempre se denominaron como tales por toda la comunidad matemática, sino que existía un concepto que abarcaba distintos tipos de conjuntos, “las clases”, así definidos y denominados por la gran mayoría de autores, y que además todos los sistemas teóricos se construían a partir de estas nociones primigenias. Así como también, que existió una denominación y teoría alterna para los conjuntos propuesta por Dedekind, los *sistemas* de Dedekind.

Todo lo cual forma parte de un repaso histórico que, aunque superficial, cobra relevancia como parte de la movilización de los dominios del conocimiento matemático de un profesor de matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés), a través de las prácticas matemáticas entendidas desde Carter (2019), Mancosu (2016), Ferreirós (2016) y Kitcher (1985), e interpretadas con ayuda del trabajo realizado por Moreno (2022). Pues durante la revisión de las contribuciones de los autores que se precisan en los análisis de cada capítulo, se ponen en “práctica” y se movilizan precisamente las prácticas matemáticas, tan importantes para la comprensión más trascendente de conceptos relacionados con la Educación Matemática, al tener que retomar diversos temas y nociones para la comprensión correcta de los conceptos presentados.

Y es aquí donde interviene mi experiencia durante la realización de este trabajo de grado. Pues, así como se espera que el lector movilice diferentes prácticas matemáticas conceptuales e históricas al revisar todos los análisis, yo como

integrador de todas las teorías y sistemas presentados en este estudio, también movilicé mis propias prácticas matemáticas al tener que revisar, practicar y recordar, muchos de los conceptos que en este se presentan. Por ejemplo, tuve que revisar qué es un silogismo o una inferencia, practicar y recordar los tipos de silogismos y cómo se constituyen en una inferencia sea válida o inválida, entre muchos otros casos. De esta forma para mí, precisamente en este tipo de dinámicas, solo por mencionar las dinámicas más simples, es donde se revalidan este tipo de estudios histórico-epistemológicos de las matemáticas.

Finalmente, desde una mirada crítica, los vacíos conceptuales que quedan con respecto a las temáticas desarrolladas son amplios al abarcar un periodo tan extenso y considerar tantos autores. Por lo que estos mismos vacíos podrían motivar futuros abordajes por parte de cualquier interesado. Además, a pesar que existen investigaciones relacionadas con las mencionadas prácticas matemáticas como se extraen por ejemplo de Carter (2019) y Kitcher (1985), y que el modelo MTSK, es un modelo bastante reconocido en la educación matemática para la formación profesoral. En este trabajo no queda muy claro la forma en que efectivamente estas prácticas matemáticas movilizan los conceptos, ni cómo se da el enlace conceptual entre las matemáticas modernas, su historia y conceptos fundamentales para la Educación Matemática.

Por ello sería adecuado, ya con un trabajo como este en mente, una investigación que no requiera recurrir tanto a la progresión conceptual histórica, sino que se preocupe por detallar la relación entre los conceptos presentados aquí, el modelo MTSK, las prácticas matemáticas y la Educación Matemática. Es decir, que se pregunte por ejemplo, qué puede aportar específicamente cada uno de los conceptos abordados, ya sean lógicos, del orden, o totalmente abstractos a la Educación en Matemáticas y a la comprensión de las matemáticas.

7. Referencias

Arias, N. (2024). *Los ideales y los retículos de Dedekind en la génesis del álgebra moderna: una visión histórico-epistemológica.* (Trabajo de grado), Universidad del Valle.

Bennett, A. (1930). Semi-serial Order. *The American Mathematical Monthly.* 37(8), 418-423.

Bernays, P. (1975). (Review of the book Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exacte Logik). by Ernst Schröder) *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 40, No. 4 (Dec., 1975), pp. 609-614 Published by: Association for Symbolic Logic Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2271822.

Birkhoff, G. (1934). Note on the paper "On the combination of subalgebras". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 30(2), 200.

Birkhoff, G. (1948). *Lattice Theory*. Volumen 25, de Colloquium Publications. American Mathematical Society.

Bonevac, D. and J. Dever (2012). "A history of the connectives". In: Logic: a History of its central concepts. Ed. by D. M. Gabbay, F. J. Pelletier, and J. Woods. Vol. 11. Handbook of the History of Logic. North-Holland, pp. 175–233 (cit. on pp. 62, 79).

Boole, G (1847). *The mathematical analysis of logic*. (El análisis matemático de la lógica).(Ejemplar original digitalizado) Universidad de Toronto. https://archive.org/details/mathematicalanal00booluoft.

Boole, G (1854). *An investigation of the laws of thought.* (Una investigación de las leyes del pensamiento). Walton and Maberly.archive.org

Burris, S, Sankappanavar, H.P, (2012). *A course in universal algebra*. Dover publications.

Burris, S. (2000). *The Laws of Boole's Thought*. Department of Pure Mathematics. University of Waterloo. https://www.math.uwaterloo.ca.

Burris, S. (2024). *Annotated Version of Boole's 1848 Paper The Calculus of Logic.* Department of Pure Mathematics. University of Waterloo. https://www.math.uwaterloo.ca.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*. Universidad de Antioquia.

Carter, J. (2019). *Philosophy of mathematical practice*. Philosophia Mathematica, 27(1), 1-32.

Davey, A, Priestley, H. (2002). *Introduction to lattice and order*. Cambridge University Press.

Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?.*(*¿Qué son y para qué sirven los Números?*). Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1871). *Über die Composition der binären quadratischen Formen, Xth Supplement: Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie*. (*Sobre la Composición de las Formas cuadráticas binarias, X-ésimo Suplemento*).(R. Dedekind, ed; 2nd ed., pág 379-497). Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1877).*Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers*. (*Sobre el Número de Clases de Ideales en los Diferentes Órdenes de un Cuerpo Finito*). (Festschrift). Vieweg.

Dedekind, R. (1879). Über die Theorie der algebraischen Zahlen, XIth Supplement. (*Sobre la Teoría Algebraica de Números, XI-ésimo Suplemento*). In P.G. Lejeune Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* (R. Dedekind, ed; 3rd ed., pág 434-611). Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1894). Über die Theorie der algebraischen Zahlen, XIth Supplement. (*Sobre la Teoría Algebraica de Números, XI-ésimo Suplemento*). In P.G. Lejeune Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* (R. Dedekind, ed; 4th ed., pág 434-657). Friedrich Vieweg und Sohn.

Dedekind, R. (1894). Zur Theorie der Ideale. (*Sobre la Teoría de los Ideales*). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.*1894, pág 272-277.

Dedekind, R. (1895). Über eine Erweiterung des Symbols (𝔞, 𝔟) in der Theorie der Moduln. (*Sobre una Extensión de la Notación* (𝔞, 𝔟) *en la Teoría de Módulos*). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.*1895, pág 183-208.

Dedekind, R. (1897). Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen teiler. (*Sobre la descomposición de Números a través de sus Máximos Comunes Divisores*). *Fest-Schrift der Herzoglichen Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina*. 1-40.

Dedekind, R. (1900). Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. (*Sobre el dualgruppen Generado por Tres Módulos*). *Mathematische Annalen.*. 53(3), pág 371-403.

Dedekind, R. (1930). *Gesammelte Mathematische Werke.* Fricke, R, Noether A, Ore Ø, (eds, vol I). Erster Band. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1930. 397 pp.

De Morgan, A. (1847). *Formal Logic.*(Lógica Formal). Taylor and Walton. (archivo digitalizado).https://archive.org/details/formallogicorthe00demouoft.

De Morgan, A. (1849). On the structure of the syllogism, and on the application of the theory of probabilities to questions of arguments and authority. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, 379-408.*

De Morgan, A. (2019). On the Syllogism and Other Logical Writings. Ed. by P. Heath. Routledge. Publicación Original 1966.

Ferreirós, J. (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton University Press.

Gallian, J. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. Ninth Edition, Universidad de Minnesota Duluth. Cengage Learning.

Gastaldi, L. (2024). De Morgan's De Morgan's Laws Duality in the Emergence of Formal Logic. En Krömer, R, Haffner, E. (Eds). *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*. Volumen 63 Science Networks. pág. 60 - 99. Mathematical Studies. Springer Nature.

Gélvez, M. (2007). *Aspectos de la teoría de Retículos y algunas aplicaciones*. (Trabajo de grado), Universidad Industrial de Santander.

Gémpeler, L. (2016). *Temas de Retículos*. Universidad Nacional.

Grattan-Guinness (2000). *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*. Princeton & Oxford. Princeton University Press.

Grassmann, H. (1844). *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: Dargestellt und durch Anwendungen erläutert.* (La teoría de las magnitudes lineal, una nueva rama de las matemáticas: Desarollada y explicada a través aplicaciones). Otto Wigand.

Grassmann, R. (1872). *Formenlehre oder Mathematik in strenger formelentwicklung*. (*La Teoría de las Formas o Matemáticas en Desarrollo Formal Estricto o Extraño*) Selbtverlag.

Grätzer, G, (1978). *General lattice theory*. Columbia University. New York.

Haffner, E. (2018) *From modules to lattices: Insight into the genesis of Dedekind's Dualgruppen*. British Journal for the History of Mathematics. 34:1, 23-42. DOI:10.1080/17498430.2018.1555928.

Haffner, E. (2024). Duality as guiding light of the genesis of Dedekind dualgruppen. En Krömer, R, Haffner, E. (Eds). *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*. Volumen 63 Science Networks. pág. 122 - 203. Mathematical Studies. Springer Nature.

Hentzel, K, Noether, E. (2023). Zur theorie der polynomideale und Resultanten (*Sobre la Teoría de los Ideales en Polinomios y sus Resultados*). *Mathematische Annalen.* 88(1-2), 53-79.

Hernandez, F. (2011). *Teoría de conjuntos*. (Tercera edición). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Ivorra, C, (2024). *Teoría de conjuntos*. Universitat de València. https://www.uv.es/ivorra/Libros/TCS.pdf. Febrero, 2025.

Jevons, W. S. (1864). *Pure Logic or The Logic of Quality apart from Quantity with Remarks on Boole's System and on the Relation of Logic and Mathematics*. London: Edward Stanford.

Kitcher, P. (1985). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

Klein, F. (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (*Sobre las lecciones sobre el desarrollo de las matemáticas del siglo 19*). Springer.

Klein, F. (1932). Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen *Vorlesungen* (*Sobre un teorema de descomposición en la teoría de las operaciones abstractas*). *Mathematische Annalen. 106*(1)*, 114-130*.

MacColl, H. (1877). *The calculus of equivalent statements and integration limits*. In: Proc. Lond. Math. Soc.

MacColl, H. (1878). *The calculus of equivalent statements (II)*. In: Proc. Lond. Math. Soc.

Mancosu, P. (2016). *Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática*. Disputatio Philosophical Research Bulletin, V(6), 131-156.

Menger, K. (1928). Bemerkungen zu Grundlagenfragen. IV. Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen verknüpfungsbeziehungen (*Observaciones Sobre Cuestiones Fundamentales. IV. Axiomática de los conjuntos finitos y las relaciones de conexión de la geometría elemental*). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung.* 37, 309-325.

Moreno, M, (2022). *La teoría de Galois en las prácticas matemáticas del estructuralismo categórico*. (Trabajo de grado), Universidad del Valle.

Ore, Ø, (1935). On the Foundation of Abstract Algebra. I. *Annals of Mathematics*, Vol 36 N°. 2, pág 406-437.

Peirce, C. S. (1867). On an improvement of Boole's calculus of logic. In: *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*. Vol. 7, pp. 250–261.

https://www.depts.ttu.edu/pragmaticism/collections/works/csp_ms/P00030.pdf [1, 2]

Peirce, C. S. (1873). Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic. In: *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, New Series 9(2) Communicated January 26, 1870, pp. 317–378.

- (1880). On the Algebra of Logic. In: Amer. J. Math. 3.1, pp. 15–57 (cit. on pp. 110, 115).

Quintana, L, J, Hermida. (2019). *La hermenéutica como método de interpretación de textos en la investigación psicoanalítica*. Universidad Nacional de Mar del Plata.

Rota, G, (1997). The many lives of lattice theory. *American Mathematical Society*. Vol 44 # 11.

Sheffer, M, (1913). A Set of Five Independent Postulates for Boolean algebras, with Applications to Logical Constants. *Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 14, No. 4, pp. 481-488.*

Schlimm, D. On the creative role of axiomatics. The discovery of lattices by Schröder, Dedekind, Birkhoff, and others. *Synthese* 183, 47–68 (2011). https://doi.org/10.1007/s11229-009-9667-9***

Schlimm, D. (2024). The emergence of duality in 19th-century algebra of logic. En Krömer, R, Haffner, E. (Eds). *Duality in 19th and 20th century mathematical thinking*. Volumen 63 Science Networks. pág. 100 - 121. Mathematical Studies. Springer Nature.

Schröder, E. (1873). Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende. Leipzig: B.G. Teubner.

Schröder, E. (1877). Der Operationskreis des Logikkalkuls. Leipzig: B.G. Teubner.

Schröder, E. (1890-1895). Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). Vol. 1-3. B. G. Teubner.

Vijay, K, (2015). *Introduction to Lattice Theory with Computational Sciences Applications*. University of Texas.

Von Neumann, J, Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

Zalamea, F, (2010). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional