



**EL PAPEL DE LOS PROCESOS INTUITIVOS EN LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES POLINÓMICAS: UN ESTUDIO DE CASOS CON ESTUDIANTES DE
GRADO UNDÉCIMO**

Andrés David Guerrero Moreno

Luis Andrés Beltrán Cerón

**Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación matemática
Licenciatura en Matemáticas y Física y
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali
2021**



**EL PAPEL DE LOS PROCESOS INTUITIVOS EN LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES POLINÓMICAS: UN ESTUDIO DE CASOS CON ESTUDIANTES DE
GRADO UNDÉCIMO**

Andrés David Guerrero Moreno

Código: 1426150

Luis Andrés Beltrán Cerón

Código: 1325890

Directora:

Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

**Trabajo de grado presentado como requisito para poder optar al título de Licenciados
en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Matemáticas y Física**

**Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación matemática
Licenciatura en Matemáticas y Física y
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali
2021**

Dedicatoria

A mis padres, mi hermana y mi novia. Por su incondicional apoyo, paciencia y el cariño
brindado, el triunfo es nuestro.

Andrés David Guerrero Moreno

A mi madre y hermana por apoyarme al brindarme de su amor y comprensión en la
consolidación de este objetivo, porque sin ellas no hubiese sido lo mismo.

Luis Andrés Beltrán Cerón

A todos los que vivieron de cerca el esfuerzo y constancia de este logro y nos alentaron a
creer en nuestro verdadero potencial.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos principalmente a Dios por permitirnos llegar hasta este momento, por darnos la fuerza y luz necesaria para guiarnos a culminar con éxito esta etapa de nuestras vidas.

También agradecemos a nuestra directora Ligia Amparo Torres Rengifo, quien nos acompañó y orientó con dedicación, sabiduría y buena disposición en el proceso de alcanzar el objetivo de esta investigación.

De igual manera, queremos expresar nuestros más sinceros agradecimientos a cada uno de los maestros que nos acompañaron en este camino, brindándonos su experiencia para nuestra formación profesional, especialmente a nuestros evaluadores Jorge Enrique Galeano Cano y Cristian Andrés Hurtado Moreno por dedicarnos su tiempo y compromiso en esta investigación.

Por último, queremos agradecer a la Universidad del Valle “nuestra alma máter”, por abrirnos sus puertas y vivir esta maravillosa etapa de formación profesional

TABLA DE CONTENIDO

Resumen.....	1
Abstract.....	2
Introducción.....	3
CAPÍTULO 1. Aspectos generales de la investigación.....	5
CAPÍTULO 2. Marco de referencia.....	19
CAPÍTULO 3. Algunas manifestaciones intuitivas entorno a la solución de ecuaciones polinómicas con estudiantes de grado undécimo de la Educación media	41
CAPÍTULO 4. Conclusiones generales	218
Referencias bibliográficas.....	223
Anexos	226

TABLA DE TABLAS

Tabla 1. <i>Coherencia Vertical en los Estándares Básicos de Competencias</i>	30
Tabla 2. <i>Coherencia Horizontal en los Estándares Básicos de Competencias</i>	30
Tabla 3. <i>Estructura general del instrumento</i>	44
Tabla 4. <i>Estructura general sobre los saberes intuitivos</i>	47
Tabla 5. <i>Rejilla de análisis</i>	54

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo actividades propuestas en los DBA para grado 11°...**¡Error! Marcador no definido.**

Figura 2. Articulación de las perspectivas de la investigación.38

Figura 3. Elementos de los referentes para el diseño del instrumento.39

Figura 4. Procedimiento metodológico de la investigación.52

Figura 5. Logo plataforma online Zoom.52

Figura 6. P1-EA.....59

Figura 7. P1-EB.....59

Figura 8. P1-EC.....60

Figura 9. P1-ED.....61

Figura 10. P1-EE.62

Figura 11. P1-EF.63

Figura 12. P2YP3-EA.65

Figura 13. P2YP3-EB.....65

Figura 14. P2YP3-EC.....66

Figura 15. P2YP3-ED.66

Figura 16. P2YP3-EE.....67

Figura 17. P2YP3-EF.67

Figura 18. P1-EA.....69

Figura 19. P1-EB.....69

Figura 20. P1-EC.....71

<i>Figura 21.</i> P1-ED.....	71
<i>Figura 22.</i> P1-EE.....	72
<i>Figura 23.</i> P2-EF.....	72
<i>Figura 24.</i> P2YP3-EA.....	74
<i>Figura 25.</i> P2YP3-EB.....	74
<i>Figura 26.</i> P2YP3-EC.....	74
<i>Figura 27.</i> P2YP3-ED.....	75
<i>Figura 28.</i> P2YP3-EE.....	76
<i>Figura 29.</i> P2YP3-EF.....	76
<i>Figura 30.</i> P1-EA.....	77
<i>Figura 31.</i> P1-EB.....	78
<i>Figura 32.</i> P1-EB.....	80
<i>Figura 33.</i> P1-EC.....	80
<i>Figura 34.</i> P1-ED.....	81
<i>Figura 35.</i> P1-EE.....	82
<i>Figura 36.</i> P1-EF.....	82
<i>Figura 37.</i> P2YP3.....	85
<i>Figura 38.</i> P2YP3-EB.....	86
<i>Figura 39.</i> P2YP3-EC.....	86
<i>Figura 40.</i> P2YP3-ED.....	87
<i>Figura 41.</i> P2YP3-EE.....	87

<i>Figura 42.</i> P2YP3-EF.	88
<i>Figura 43.</i> PA	98
<i>Figura 44.</i> Momento 4.	101
<i>Figura 45.</i> Momento 6.	103
<i>Figura 46.</i> Momento 8.	107
<i>Figura 47.</i> PA.	108
<i>Figura 48.</i> PB-1.	109
<i>Figura 49.</i> PB-2.	109
<i>Figura 50.</i> PC-1.	111
<i>Figura 51.</i> PC-2.	112
<i>Figura 52.</i> PD.	115
<i>Figura 53.</i> PA.	120
<i>Figura 54.</i> PB.....	124
<i>Figura 55.</i> PC.....	124
<i>Figura 56.</i> PD.	127
<i>Figura 57.</i> P1.	139
<i>Figura 58.</i> P2.	140
<i>Figura 59.</i> P3.	143
<i>Figura 60.</i> P4.	147
<i>Figura 61.</i> P5.	151
<i>Figura 62.</i> P7.	155

<i>Figura 63. P8.</i>	156
<i>Figura 64. P1.</i>	159
<i>Figura 65. P2-1.</i>	161
<i>Figura 66. P2-2.</i>	162
<i>Figura 67. P3.</i>	163
<i>Figura 68. P4.</i>	164
<i>Figura 69. P5.</i>	166
<i>Figura 70. P7.</i>	169
<i>Figura 71. P8.</i>	174
<i>Figura 72. Momento 21.</i>	175
<i>Figura 73. P1.</i>	176
<i>Figura 74. P2.</i>	179
<i>Figura 75. Momento 10.</i>	195
<i>Figura 76. Momento 11.</i>	197
<i>Figura 77. P6-1.</i>	199
<i>Figura 78. P6-2.</i>	199
<i>Figura 79. P7.</i>	201
<i>Figura 80. E3P8.</i>	204
<i>Figura 81. Momento 19.</i>	205

TABLA DE ANEXOS

ANEXOS	226
Anexo A. Plantillas del estudiante: actividad I.....	226
Anexo B. Plantillas del estudiante: actividad II.....	227
Anexo C. Plantillas del estudiante: actividad III	229
Anexo D. Plantillas del investigador: cuestionario I de la actividad I.....	231
Anexo E. Plantillas del investigador: cuestionario II de la actividad II.....	232
Anexo F. Plantillas del investigador: cuestionario III de la actividad III	233

Resumen

El presente trabajo parte de la articulación de perspectivas relacionadas a lo histórico-matemático, curricular y pedagógico resaltando la trascendencia que han ido cobrando los saberes intuitivos como objeto de estudio en el campo de la Educación Matemática. Para abordar este asunto, se realizó un proceso de identificación de posibles manifestaciones intuitivas que subyacen en los resultados de la implementación de un instrumento que aborda actividades sobre la solución de ecuaciones polinómicas, enmarcada a un estudio de casos con estudiantes de grado undécimo. Este tipo de elementos, dan pautas importantes para abordar sobre el papel que juegan los saberes mencionados en el aprendizaje de los estudiantes. Principalmente, se encontró que los saberes intuitivos se manifiestan con mayor frecuencia y pertinencia¹ entre mejores cimientos conceptuales tenga el estudiante sobre elementos importantes en relación con la teoría de ecuaciones en la escuela. A partir de allí, se toma una postura crítica como futuros profesionales de la educación, buscando con ello impactar de manera positiva los espacios o procesos educativos a los cuales pertenezcamos en el quehacer profesional venidero.

Palabras claves: Ecuación polinómica, manifestación intuitiva y álgebra escolar.

¹ Hace referencia a que el saber se manifiesta en una situación en la que es coherente con el contenido, además de tener sustancial validez desde un punto de vista matemático.

Abstract

The present work starts from the articulation of perspectives related to the historical-mathematical, curricular and pedagogical, highlighting the importance that intuitive knowledge has been gaining in the field of Mathematics Education. To address this issue, from the present work, a process of identification of possible underlying intuitive manifestations was carried out through the results of implementation of an instrument that addresses activities on the solution of polynomial equations, framed in a case study with eleventh grade students. These types of elements provide important guidelines to reflect on the role that the aforementioned knowledge plays in student learning. Mainly, it was found that intuitive knowledge emerges with more oftenly and pertinency when students have better conceptual foundation about essential elements in school theory of equations. And, from there, take a critical stance as future education professionals, thereby seeking to positively impact the students. educational spaces or processes to which we belong in the future professional endeavor.

Key words: Polynomial equation, intuitive manifestation and school algebra.

Introducción

En los últimos años, la Educación Matemática ha enfrentado diversos retos en la enseñanza del álgebra escolar. En la práctica, es frecuente evidenciar que el proceso educativo está basado en la aprehensión de algoritmos, lo que favorece la aparición de obstáculos de aprendizaje. Para resolver este problema, es importante considerar otras formas de abordar la enseñanza del álgebra escolar de manera eficiente e innovadora.

Principalmente, el primer capítulo de este informe reposa sobre esta problemática, puesto que, en el, se establecen aspectos generales que involucran la presentación del problema, los objetivos, la justificación y antecedentes.

En la investigación se pretende identificar algunos saberes intuitivos² relacionados con manifestaciones, procesos, conceptos o estrategias resultantes de la interacción de estudiantes de grado undécimo con ecuaciones polinómicas, respecto a su conjunto solución. Tales saberes intuitivos contrastan los saberes adquiridos en la enseñanza tradicional puesto que éstos primeros provienen, principalmente, de experiencias de múltiple índole en las que el estudiante hace uso del razonamiento.

Por otro lado, desde una perspectiva matemática, el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) aparece como un referente importante que va en coherencia con los intereses del trabajo, aporta elementos teóricos e históricos en los que es trivial encontrar la relación intrínseca con el concepto de intuición. Los elementos conceptuales y referencias relacionadas con los saberes intuitivos, el TFA y una perspectiva curricular que resalta elementos a consideración provenientes del sistema educativo en el que se ubica la investigación, se encuentran en el segundo capítulo de este informe.

Mediante un exhaustivo y minucioso estudio de casos³, se identifican los elementos más importantes en relación con los saberes intuitivos de los estudiantes. El estudio de casos se lleva a cabo con tres estudiantes, haciendo uso de un instrumento compuesto por un cuestionario escrito y una entrevista semiestructurada, con lo que se adquieren resultados de

² Hace referencia a ciertos saberes que poseen los estudiantes, de naturaleza intuitiva. Concepto fundamentado en los aportes de Booth (1983); Kieran (1992) & Crespo (2018). Es profundizado en el capítulo dos de este informe.

³ Un tipo de metodología de investigación en la que se obtiene principalmente resultados cualitativos. Se destaca por ser una metodología que satisface la necesidad de investigaciones en las que es necesario revisión exhaustiva de casos particulares en el estudio.

los cuales se pueden identificar momentos específicos en los que se puede percibir consecuencias de los saberes intuitivos. Los aspectos relacionados con la descripción y contenido del instrumento implementado se exponen en el tercer capítulo del informe.

Finalmente, en el cuarto capítulo se abordan las conclusiones generales que atienden a lo expuesto en el objetivo general. De esta manera se examinan los aspectos sobresalientes del marco teórico de referencia y los resultados expuestos en el capítulo anterior, concretamente lo que tiene que ver con los estudiantes o muestra de esta investigación

Esto tiene como intención establecer un punto de partida para que futuros investigadores construyan progresivamente lo que, potencialmente, podría convertirse en una estrategia de enseñanza para la teoría de ecuaciones en el álgebra escolar.

CAPÍTULO 1. Aspectos generales de la investigación

En este capítulo se presentan los elementos que enmarcaron la propuesta del trabajo y que permitieron ubicar el problema en un contexto específico, definiendo consigo los propósitos, la justificación y algunos antecedentes; producto de una exhaustiva revisión bibliográfica, que respaldan el enfoque del estudio.

En ese orden de ideas es menester mencionar que se inicia abordando la problemática que da origen a la investigación, la cual partió del análisis de trabajos predecesores que tuvieron en cuenta la historia matemática enfocada al Teorema Fundamental del Álgebra, punto de referencia para describir de manera precisa el concepto de ecuación. Posteriormente se presentan los objetivos de la investigación, tanto el general como los específicos, dando paso a la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la Educación Matemática y en la formación docente. Por último, se exponen algunos antecedentes, como trabajos de grado de pregrado, maestría y artículos, que se han desarrollado en el área de Educación Matemática y otras ciencias en un panorama local, nacional e internacional, los cuales retoman tres aspectos:

1. Resolución de ecuaciones.
2. Relación histórico-matemática del Teorema Fundamental del Álgebra.
3. Investigación relacionada al pensamiento intuitivo y su relación en la Educación Escolar.

1.1 Planteamiento del problema

Las investigaciones llevadas a cabo en los últimos años en el campo de la Educación Matemática exponen un panorama de problemas, especialmente sobre las dificultades presentes en los estudiantes respecto aprendizaje del álgebra, que parecen manifestarse en una falta de dirección y funcionalidad de los saberes adquiridos; estas resultan estar relacionadas con el microsistema educativo y se generan dentro del mismo (Socas, 1997). Es decir, las interacciones entre estudiante-profesor, el conocimiento a priorizar y la institución educativa, han ocasionado en la metodología empleada durante las últimas décadas, específicamente en la enseñanza del álgebra sobre la teoría de ecuaciones, evidencias del uso reiterativo de una

enseñanza tradicional, la cual se caracteriza por enfatizar el uso de algoritmos y acceder a estos de manera memorística.

Esta recurrente metodología tiene repercusiones sustanciales en la manera como los estudiantes conciben, entienden, aprenden y desempeñan matemáticas, dando lugar a obstáculos que juegan un rol muy relevante; por ejemplo:

Es frecuente encontrar alumnos que han logrado consolidar muy poco de este objeto matemático (el signo igual en las ecuaciones), simplificando su conocimiento a tal punto de usar simples procedimientos mecánicos, rutinarios y memorísticos para resolver ecuaciones, esto es, pasando de un lado al otro letras y números. (Hurtado, 2014, p. 44).

Todo lo anterior alude a modelos de enseñanza y aprendizaje preestablecidos en la enseñanza del álgebra escolar y hace pensar al estudiante que las matemáticas se *aprenden* principalmente con memorización, considerando que es la esencia de esta disciplina, de este modo se disponen a memorizar reglas y procedimientos que aparentemente ayuden a cubrir su falta de comprensión por esta rama de las matemáticas, a veces hasta fomentado por el docente o el sistema⁴, y llegando quizás a ser uno de los obstáculos para un óptimo desarrollo del pensamiento algebraico y variacional.

Parte de las razones por las cuales esta dificultad puede y debe ser razón de interés de investigación, es puesto a que la visión limitada que los estudiantes adquieren del álgebra acota e incapacita al estudiante para acceder y establecer relaciones entre unos conceptos y otros, parece como si esta presentación del álgebra la ubicase en un lugar totalmente aislado a la naturaleza racional de las matemáticas y sus otros subcampos, apareciendo como un conjunto de reglas que a gran escala los estudiantes se suelen aprender de memoria y obtienen resultados de los que no pueden interpretar nada sustancial, los estudiantes son conscientes de esto último, algunos autores proponen que la falta de interés que se percibe por parte de los estudiantes hacia la disciplina tiene relación con ello.

Además, esta manera de concebir el álgebra descrita anteriormente genera también una brecha que no permite o al menos dificulta que los estudiantes establezcan una relación de coherencia y sentido entre lo que han aprendido en la escuela y situaciones de vivencia

⁴ Es muy común la replicación de la famosa regla de transposición: “Si un número está restando pasa a sumar y si está multiplicando pasa a dividir, que es utilizada reiterativamente por estudiantes para solucionar ecuaciones, pero normalmente sin que ellos puedan reconocer por qué funciona”. (Abrate, Pochulu & Vargas, 2006, p.5)

cotidiana o experiencias individuales. El hecho que el direccionamiento del aprendizaje sea divergente con respecto al uso de unos saberes que los estudiantes adquieren en su constante interacción con el mundo, resulta ser contraproducente al no permitir que ellos analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, deduzcan posibles soluciones basadas en estos saberes previos o experiencias que lo conlleven a conjeturar y reflexionar sobre la importancia de lo realizado.

Booth (1983) da precisiones y caracteriza estos saberes que usualmente se identifican en los estudiantes al momento de hacer sus primeras interacciones con el álgebra y las ecuaciones, su naturaleza está muy relacionada a una intuición que el estudiante ha desarrollado durante sus años de experiencia, que incluye tanto situaciones reales a las cuales se ha tenido que enfrentar, así como las primeras interacciones de él con las matemáticas. Es claro y afirmado por Booth que, aunque estos saberes no son perfectos y pueden ser poco asertivos, además de derivar obstáculos para el aprendizaje, son indispensables para que el estudiante inicialmente encuentre sentido en los métodos más formales, que se deriva de un mejor acercamiento al objeto matemático.

Se pueden identificar igualmente cómo estos saberes caracterizan fuertemente las primeras etapas (5 de 7 etapas) por las que, pasan los estudiantes antes de comprender la operatividad para resolver ecuaciones de primer grado. (Kieran, 1992). Para fines de este trabajo, se denomina “saberes intuitivos” a tales saberes primitivos descritos anteriormente, aunque estos saberes intuitivos son más atribuidos a las primeras experiencias de un estudiante con el álgebra, es posible que estos últimos no sean contrastados con un conocimiento formal hasta su eventual llegada a la educación superior, puesto que tal como se ha descrito en líneas pasadas, el aprendizaje del álgebra escolar alude más a métodos algorítmicos y memorísticos que los estudiantes no relacionan o involucran con sus saberes intuitivos. El primer paso para poder conocer las ventajas y estrategias que posiblemente se puedan derivar del aprovechamiento de estos saberes intuitivos para el aprendizaje del álgebra, es su necesaria identificación y caracterización.

Por otro lado, los métodos matemáticos que se enseñan en el álgebra escolar, específicamente en teoría de ecuaciones y su reflejo en la manera como los estudiantes se enfrentan a ejercicios académicos, se caracterizan principalmente por dar especial relevancia a responder cuál es la solución de la ecuación que se plantea, sin embargo no es la única información que se puede y posiblemente valga la pena obtener, la ecuación también podría

darle indicios al estudiante para que responda preguntas como ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?, ¿Cuál es la naturaleza de estas soluciones?, ¿A qué conjunto numérico pertenecen?; estos indicios existen y se pueden encontrar una vez se hace una revisión minuciosa, tanto conceptual como histórica del Teorema fundamental del álgebra⁵. Esta precisión es importante porque, además de que una ecuación puede analizarse más allá que para encontrar sus soluciones puntuales, parte de la fundamentación de este trabajo está en la premisa que esto último podría resultar apropiado para que el estudiante realice una aproximación más eficaz a la semántica y la lógica detrás de la teoría de ecuaciones.

De manera que, es de interés para el desarrollo de la problemática en este trabajo, abordar posibles interpretaciones de lo observado en los estudiantes, al hacer uso de su pensamiento intuitivo para reflexionar y dar cuenta de las tareas solicitadas en una actividad diseñada para ellos, cuya última está fundamentada en algunas relaciones entre la estructura de una ecuación y las características de su conjunto solución; el teorema fundamental del álgebra es primordial para la conformación de esta propuesta, ya que es quien guía y formaliza esas interpretaciones “empíricas” ocasionadas por el saber intuitivo.

De acuerdo con lo anterior surge la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué tipo de saberes intuitivos relacionados con manifestaciones, procesos, conceptos o estrategias, surgen a partir de la interacción con estudiantes, de grado undécimo de una institución educativa de la ciudad de Cali, en actividades sobre la solución de ecuaciones polinómicas, desde la perspectiva del TFA?*

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Identificar algunos saberes intuitivos, relacionados con manifestaciones, procesos, conceptos o estrategias, con relación a la solución de ecuaciones polinómicas, en estudiantes de grado undécimo de una institución educativa de la ciudad de Cali.

⁵ El Teorema fundamental del álgebra (TFA) y su historia aportan una relación importante entre el conjunto solución y la estructura de una ecuación; esta relación será abordada más adelante.

1.2.2 Objetivos específicos

- Documentar la problemática desde referentes Históricos-Matemáticos, Curriculares y Pedagógicos, sobre la solución de ecuaciones polinómicas enfocado a la perspectiva del TFA y su relación con saber intuitivo en la Educación Matemática.
- Conjuguar en un instrumento (actividades y entrevista semiestructurada), sobre la solución de ecuaciones polinómicas los aportes del estudio histórico-matemático, curricular y pedagógico realizado.
- Determinar la importancia y limitaciones que produce el saber intuitivo en la solución de ecuaciones polinómicas, en estudiantes de grado undécimo, a través del análisis de los resultados de la implementación del instrumento diseñado.

1.3 Justificación

La relevancia de este trabajo en el campo de la Educación Matemática es abordada desde tres aspectos fundamentales que a su vez caracterizan el proceder del mismo: en primer lugar, la importancia de involucrar la teoría de ecuaciones, puesto que a pesar de que el álgebra, específicamente el álgebra escolar, puede tener contenidos de diferentes índoles, Kieran en su documento publicado en 2007 *Aprendiendo y enseñando álgebra en la escuela intermedia hasta los niveles universitarios: construyendo significado para los símbolos y su manipulación*, expone tres tipos de actividades que caracterizan el álgebra escolar, en dos de esas tres clasificaciones se alude directa o indirectamente al tratamiento y solución de ecuaciones de tipo generacional y transformacional, lo cual evidencia lo empíricamente trivial: la teoría de ecuaciones es un pilar fundamental en esta etapa educativa.

El segundo aspecto a tener en cuenta está relacionado con el problema del álgebra escolar, un problema que se ha mantenido durante años, siendo así que persiste actualmente y subyace en una dificultad de enseñanza de este en la educación media, en particular cuando se involucran competencias relacionadas a la teoría de ecuaciones. Se puede encontrar con facilidad que, en un alto porcentaje, estudiantes poseen concepciones del álgebra muy diferentes a los saberes propios de la disciplina; el álgebra es visualizada como un conjunto de reglas que se utilizan para transformar una configuración de símbolos a otra sin ningún tipo de significación, según Pedemonte (2008):

(...) en la práctica escolar, el álgebra no es considerada normalmente como una forma de ver y expresar relaciones, sino como un cuerpo de reglas y procedimientos para manipular símbolos. Los estudiantes normalmente pueden desarrollar cálculos, pero no son conscientes de los axiomas y teoremas que usan en el mismo. (p.19)

Por lo tanto, hoy en día, el “álgebra escolar” se efectúa sin tener ningún tipo de significación; esto se debe a los modos de enseñanza preestablecidos que fortalecen este tipo de concepción en los estudiantes, porque, aunque no existe un consenso acerca de las causas específicas que originan las dificultades en los procesos de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, existen investigaciones que muestran importantes resultados en lo que respecta al aprendizaje del álgebra. Estas investigaciones, expuestas por Socas (2011), aluden a unas “rupturas” o “cortes” didácticos cuya naturaleza es atribuida a un manejo deficiente en la transición de la aritmética al álgebra, generando algunos inconvenientes en los alumnos como:

- Los relacionados con la limitada interpretación del signo igual en Aritmética.
- Las concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como incógnitas o indeterminaciones.
- El rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema.
- La no aceptación de la falta de clausura o la operatividad con las incógnitas. (p.11)

Así pues, estos problemas terminan relacionados con el aspecto más abstracto del Álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos de edades más tempranas. A pesar de que este problema del álgebra en la escuela puede ser abordado desde distintos puntos de partida, en esta oportunidad se decide trabajar desde un concepto en pedagogía fundamental para el proceso de aprendizaje, lo intuitivo. La identificación de los saberes intuitivos en los estudiantes puede resultar el primer paso de una posible estrategia educativa que pueda proveer de herramientas a los entes del proceso de enseñanza para llevarlo a cabo de manera eficiente.

En un proceso de aprendizaje, los saberes intuitivos permiten establecer conexiones entre la adquisición de saberes de un estudiante y un conocimiento formal, además de ser necesaria pues el formalismo puede ser en ocasiones difícil de acceder desde un punto de vista escolar; para este caso, el formalismo está representado por el planteamiento del TFA. El

reconocimiento de los problemas en Educación Matemática, como éste, permite dar lugar a cuestionar lo que ya se hace, investigar y proponer nuevas y mejores ideas.

Finalmente, es indispensable resaltar la pertinencia del teorema fundamental del álgebra para los intereses del trabajo: el TFA, aunque más adelante se caracterizará de forma detallada, a grandes rasgos asevera una relación directa entre la cantidad de soluciones de una ecuación polinómica y el grado del polinomio involucrado. Más allá del cimiento teórico que proporciona el teorema en sí, gran parte de su valor se enmarca en la historia detrás del mismo, es posible visualizar que en el trasfondo del teorema se logra también caracterizar las soluciones por su tipología, según al conjunto numérico al cual pertenezca. Este tipo de apreciaciones cualitativas que pueden abstraerse de la forma de las ecuaciones es coherente a los objetivos de investigación porque, en primer lugar, es complementario a la perspectiva intuitiva descrita anteriormente, además de estar intrínsecamente relacionadas (la intuición resultó ser fundamental en cada una de las etapas de la demostración del teorema), y porque es paralelo a procedimientos algorítmicos que ya existen para calcular con precisión las soluciones de una ecuación de este tipo.

Esto último es muy importante puesto que en el desarrollo metodológico se busca que el estudiante trascienda de tales procedimientos, el interés no es que resuelva la ecuación, es que diga cómo son sus soluciones y cuantas son. En otras palabras, la intuición tuvo un rol fundamental en la demostración del teorema, se puede saber ello gracias a los registros históricos a los que hoy se tiene acceso, y no es descabellado considerar que la educación matemática pueda dar relevancia a estos elementos sustanciales de este conocimiento matemático, sobre todo dado que resulta ser fundamental en lo que respecta a la teoría de ecuaciones.

En este orden de ideas, este trabajo también es de gran importancia porque invita a los educadores y estudiantes a tomar conciencia sobre lo relevante que son estos métodos numéricos e intuitivos para el aprendizaje matemático, no solo porque ayuda a resolver de forma general variados problemas, sino también por la riqueza matemática que pueden obtener los estudiantes al trabajar estos procedimientos, en los cuales se ponen en juego pasos lógicos que pueden servir de buena base para el contenido matemático a tratar, en este caso, las ecuaciones polinómicas y sus soluciones.

1.4 Antecedentes

En este apartado se presentan algunas de las investigaciones de pregrado, maestría y artículos, que se han desarrollado en el área de Educación Matemática y de otras ciencias en un panorama local, nacional e internacional, los cuales aportan a los intereses del estudio. En este orden de ideas, se retoman trabajos relacionados con: Resolución de ecuaciones, relación histórico-matemática del Teorema Fundamental del Álgebra, investigación relacionada al pensamiento intuitivo y su relación en la educación escolar.

1.4.1 Trabajos de investigación relacionados con la resolución de ecuaciones

En la escala local, el trabajo de Hurtado & Infante (2010) *Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado*, da una evidencia moderna y sustancial de lo que es, por lo menos, una de las principales dificultades para la aprehensión del álgebra escolar, a pesar de que su trabajo tiene específicos objetivos en torno al signo igual, su análisis resulta proveer de información al lector sobre los severos problemas de interpretación que existen y son generalizables a la enseñanza y aprendizaje del álgebra en general.

Esta investigación tiene como fundamento principal proponer actividades, estrategias y recomendaciones para docentes e investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, a partir de la identificación de los distintos tipos de significados que poseen los estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria sobre el signo igual, en la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia. A través del análisis de una prueba conformada por ejercicios que permita facilitar al estudiante el análisis del objeto matemático planteado, dándole algunas opciones de respuesta que lo conduzcan a favorecer su interpretación en relación con la resolución de ecuaciones y el significado que le da al signo igual. Los resultados arrojados muestran que, aun cuando no se manejen de forma precisa los diferentes significados del signo igual, si se observa un trabajo en relación con la caracterización de expresiones y producción de ecuaciones equivalentes.

Al final, la producción concluye que, a excepción de casos muy aislados, los estudiantes interpretan el signo igual como operador y no como equivalencia, además que ocasionalmente no interpretan las ecuaciones como una “cadena de expresiones” que ofrecen información lógica y con sentido, la cual muestra una coherencia con las afirmaciones planteadas dos años atrás por Pedemonte (2008), que son aplicables y que encajan con la situación actual del país, específicamente, de la ciudad de Cali.

El panorama nacional, el trabajo de Cáceres & Tocarruncho (2014) *Solución de ecuaciones por métodos numéricos*. Los autores tienen como enfoque principal, estudiar diferentes métodos de solución de ecuaciones polinómicas, diseñando una aplicación móvil, mediante la calculadora HP48GX para trabajar alrededor de los métodos numéricos y que esta permita probablemente apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la escuela. Utilizando como metodología, el análisis acerca de, la revisión de libros, revistas y estándares curriculares que permitiera contextualizar la caracterización de los métodos numéricos. Se analizaron algunos casos en los cuales se utilizan métodos analíticos como factorización, aplicación de ecuación cuadrática y hallar las raíces racionales para encontrar la solución a ecuaciones polinómicas. Posteriormente se consultó sobre la contextualización de los métodos numéricos realizando una ejemplificación de algunos como: el método de Newton Rapshon, método gráfico, método de bisección y método de punto fijo. Por último, se hizo el diseño de un aplicativo para resolver ecuaciones polinómicas por medio de métodos numéricos en el cual el lector puede interactuar, ya que se encuentra disponible en Play Store, donde además se explicita todo el procedimiento de instalación, que sirva como herramienta de aprendizaje.

Este estudio, presenta un recorrido sobre las distintas formas de solucionar ecuaciones polinómicas a través de la historia, ya sea por métodos analíticos o numéricos, identificando de este modo diferencias o similitudes que pueden ser aprovechadas por el profesor en el aula. Después se hace una contextualización de los métodos numéricos usados en la resolución de ecuaciones, prestando especial interés en la definición, las clases de métodos y su aplicación. Todo lo anterior, para llamar la atención sobre la pertinencia del uso de los métodos numéricos como una herramienta que permite ampliar el rango del conjunto de soluciones de las ecuaciones.

Una vez culminado este estudio, los autores señalan que:

- En la escuela se desconocen los métodos de aproximación numérica como una forma de solucionar ecuaciones algebraicas.
- Se pudo observar que en los estándares curriculares se espera que los estudiantes utilicen técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos, notándose la pertinencia de la incursión de los métodos numéricos en el aula de clase.

- Existe una familiaridad entre los métodos numéricos y los casos de factorización que se enseñan en los colegios, lo cual se puede aprovechar para la introducción de estas formas de aproximación numérica.
- Se pudo determinar que este tema se puede abarcar desde diferentes campos como el teórico, curricular, procedimental y aplicativo, debido a su flexibilidad conceptual. (p.43)

Los trabajos presentados, resultaron ser de interés para esta investigación, porque vinculan un “punto de partida” o una “referencia” que permite generar cimientos significativos que ayudan al desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en relación con el estudio de ecuaciones, ya que plantean algunos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones, pero con un enfoque distinto al usual, pues no solo se desea dar a conocer la parte matemática de estos métodos, sino también su historia y los aportes que ella puede hacer para sus propuestas de aula y para este caso, la elaboración del instrumento. Por esta razón, es preciso señalar la originalidad y la innovación que lleva al realizar ambas producciones, al contener otra mirada cuando salen a relucir dificultades con la estructura de las ecuaciones, sus métodos de tratamiento, sus soluciones, entre muchas otras dificultades que aparecen a la hora de trabajar con este concepto, que pueden servir de referencia para la construcción de instrumentos similares, como el de este trabajo.

1.4.2 Trabajo de investigación sobre la relación histórica del Teorema Fundamental del Álgebra

En la escala local se encontraron dos trabajos de pregrado de la Universidad del Valle, que sustentan la problemática mencionada anteriormente:

El primero es el trabajo de Lucero Chávez (2017), *Teorema fundamental del álgebra: visualizaciones, intuiciones y demostraciones formales*, el cual muestra un recorrido histórico y muy completo sobre la cadena de eventos y aportes que permitieron el desarrollo matemático en torno al TFA, motivado por las dificultades del álgebra centradas en el uso sin significado de algoritmos para la resolución de ecuaciones, su principal intención fue mostrar: “la evolución de los procesos de demostración en el álgebra, que van desde la intuición, pasando por las visualizaciones y se consolidan con los procesos formales que permiten demostrar dicho teorema” (p.11). Personajes reconocidos como Gauss, Euler, Laplace, entre otros hicieron de

ello algo posible. Por último, se presentan tres demostraciones del teorema fundamental del álgebra.

Por otro lado, el trabajo de Murcia (2009) *La transición del álgebra clásica al álgebra moderna: algunos aspectos históricos epistemológicos en el desarrollo de la noción de estructura a través de la teoría de ecuaciones*. El cual se centra en el estudio histórico–epistemológico de la estructura algebraica, debido a una serie de problemas que conlleva el paso del álgebra clásica al álgebra moderna. El autor enfoca su interés en la naturaleza de las raíces de las ecuaciones y el método de solución por radicales, ya que estas temáticas permiten identificar algunas ideas y propiedades que surgen alrededor del concepto de estructura algebraica. Para ello, se estudian las obras de Al-Khwarizmi, Cardano, Descartes, Gauss y Lagrange, en relación con las dos temáticas mencionadas. A partir de este estudio histórico se llega a concluir, entre varias cuestiones, que:

La historia de las matemáticas permite ver la relación tan estrecha que hay entre el álgebra y la geometría, viendo como esta última, es utilizada como un proceso para validar soluciones de ecuaciones. Relación que hoy día los estudiantes desconocen, pensando que se trata de dos ramas completamente diferentes, por lo cual una propuesta de aula que involucre procesos algebraicos y geométricos en ambos sentidos, sería provechosa para el trabajo con los estudiantes, para lo cual la historia nos da luces sobre cómo abordar estas relaciones. También proporciona una visión más global en los procesos de enseñanza y aprendizaje en cuanto a los problemas que surgen entorno a la designación de objetos, la noción de número, las relaciones entre cantidades, la existencia y métodos de solución de las raíces de una ecuación, la generación y abstracción de ideas simples a conceptos más complejos. (p.69-70)

Por último, los trabajos resultan ser relevantes para este trabajo puesto que proveen elementos históricos que evidencian acercamientos a la construcción y el entendimiento del TFA y la estructura de cómo se compone una ecuación polinómica. La cual, precede del formalismo, estos acercamientos son caracterizados por los mismos autores del documento como intuitivos, a pesar de que la acotación de intuición que se realiza puede no ser equivalente a la precisada en las investigaciones, se percibe en el mismo como matemático hacen alusión

a sus saberes para la adquisición⁶ de un conocimiento inexistente para el momento. Por su parte, Lucero precisa sustancial relevancia a los procesos de intuición y comenta lo importantes que son para la adquisición de saberes y conocimientos, lo cual aporta y fortalece el tipo de hipótesis presentes en este trabajo.

1.4.3 Trabajos de investigación sobre el saber intuitivo relacionado con la educación escolar

En el panorama internacional, se encontraron dos producciones, un artículo y un trabajo de grado realizados en los países de Cuba y Chile respectivamente y que sustentan la problemática mencionada anteriormente.

El artículo de Casas-Rodríguez (2013) *Lo intuitivo como aprendizaje para el desarrollo de la actividad creadora en los estudiantes*, tiene como objetivo realizar un análisis epistemológico del rol del aprendizaje intuitivo como dimensión humana, al caracterizar el marco referencial enfocado a una epistemología de lo intuitivo, en el cual busca acotar una definición (un proceso de aprendizaje a través de experiencias sensoriales) pedagógica del aprendizaje intuitivo, caracterizarlo y referirse a ello como un complemento al aprendizaje racional.

Su metodología considera un análisis epistemológico aquella concepción que emana de su propio origen etimológico con un sentido metódico general que ayude a incorporarse sobre su propio objeto para enjuiciarlo, valorarlo y transformarlo sobre bases totalmente consecuentes en el plano científico. Logrando obtener los siguientes resultados:

1. Caracterización del marco referencial para una epistemología de lo intuitivo en el desarrollo de la actividad creadora de los estudiantes.
2. Definición pedagógica del aprendizaje intuitivo. (p.25)

Finalmente, define lo intuitivo como un aprendizaje propio del hombre, y es valioso porque complementa al conocimiento racional, siendo su base orientadora que facilita el desarrollo de imágenes en el cerebro humano y por tanto es premisa indiscutible para el desarrollo de la creatividad. Además, las experiencias intuitivas son las vías emocionales y

⁶ No es un intento por afirmar que necesariamente el aprendizaje escolar que se tenga sea más eficiente o se pueda realizar bajo los parámetros históricos de algún concepto matemático. Se establece una relación entre saberes, intuición y el teorema fundamental del álgebra, particularmente.

sensoriales que tiene el hombre para la aprehensión del mundo, es el medio por el cual se obtiene el conocimiento intuitivo. Permiten expresar las relaciones emocionales con ese nuevo conocimiento, percibir el contexto y las circunstancias de hechos, fenómenos y procesos e incorporarlos como aprendizaje para crear conceptos propios.

Por su parte, el trabajo de Díaz (2013), *Intuición en Matemáticas: Una mirada Psicoeducativa*, da un vistazo teórico exploratorio que indaga sobre este concepto que ha recibido un trato paradójico: al mismo tiempo que es silenciado, es reconocido mediante evidencia, la cual, juega un rol significativo en el desempeño de los estudiantes de matemáticas, en la medida que el background intuitivo podría influir en las interpretaciones formales y/o procedimientos algorítmicos. Tiene como objetivo principal, analizar la relación entre intuición, el pensamiento matemático y su posible uso pedagógico. Para esto, se recogen antecedentes generales desde distintas miradas, historiando el concepto de intuición y su vínculo con las matemáticas, a través del diálogo entre autores de diversos enfoques teóricos como la Psicología Humanista, Teorías Implícitas, Neurociencia, Psicología Educacional en Matemáticas, etc.

Los resultados de la investigación han logrado concluir que, la intuición se comprende como una oportunidad para facilitar la enseñanza-aprendizaje en matemáticas, así como un ejemplo de una variedad de fenómenos que cuestiona la manera en que se construye conocimiento y se establecen las relaciones pedagógicas dentro del aula de matemáticas. El énfasis principal de esta propuesta está en la experiencia, donde se pueda hilar armónicamente junto al conocimiento formal analítico.

En síntesis, se considera que los antecedentes presentados en cada ítem, van en relación a la problemática trazada en el trabajo. Estas producciones proporcionan un soporte que respalda lo investigado. Aportando de manera significativa el desarrollo del presente trabajo, al hacer énfasis en primer lugar, a propuestas sobre la resolución de ecuaciones, que en algunos casos arrojan resultados positivos, al permitir que los estudiantes alcancen cierto nivel de abstracción y generalidad cuando se aborda este concepto matemático en la escuela. En segundo lugar, la historia que gira alrededor de ellas, dando lugar al TFA y su gran aporte a la comprensión de las raíces o soluciones que están conformadas las ecuaciones polinómicas. Por último, la implicación del saber intuitivo en el ámbito escolar permite la relación entre lo que

cotidianamente se concibe como “intuición” y pedagogía y como realmente es percibida en esta área logrando favorecer o no el conocimiento del estudiante.

Sin embargo, dichos antecedentes no potencializan aun la unión de estos términos, lo cual impide que se produzca un verdadero razonamiento con el uso del concepto de ecuación polinómica, la cual evidencia durante años, una cantidad de dificultades adheridas en los estudiantes para comprender dicho concepto (errores de tipo procedimental y conceptual, permanencia en el pensamiento aritmético, pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico, entre otras). Por eso, se considera conveniente establecer esta investigación para aportar otra perspectiva del como siguen interactuando los estudiantes con las ecuaciones y reestructurar en un futuro cercano una enseñanza significativa de este concepto.

CAPÍTULO 2. Marco de referencia

En esta sección se presentan algunos referentes conceptuales de la historia relacionada al Teorema Fundamental del Álgebra, que incluye algunos aspectos teórico-matemáticos relevantes. Así mismo, el estudio del saber intuitivo que permite sustentar una perspectiva pedagógica coherente con los objetivos del trabajo. Así mismo, se incluye la perspectiva curricular, con la que, aparte de generar una posición conceptual que fundamenta la problemática en Colombia, se contrastan las realidades percibidas desde los resultados de la investigación. Los documentos incluidos en este apartado son proporcionados por el Ministerio de Educación Nacional actualmente vigentes en el sistema educativo colombiano.

2.1 Perspectiva Histórica-Matemática

La documentación histórico-matemática del Teorema Fundamental del Álgebra permite un reconocimiento a fondo de su naturaleza, además de cómo la humanidad lleva a cabo el descubrimiento de ese conocimiento, lo anterior aporta un cimiento crucial de la fundamentación del trabajo. En este apartado también se hacen explícitos algunos fundamentos matemáticos en relación con la solución de ecuaciones polinómicas, que sirven de referencia para los componentes del trabajo, especialmente el desarrollo metodológico. Una breve presentación del Teorema Fundamental del Álgebra en el cálculo resulta indispensable.

2.1.1 El papel de los estudios históricos epistemológicos de las matemáticas sobre el teorema fundamental del álgebra (TFA): Gauss y el teorema fundamental del álgebra

Desde inicios del siglo XV los primeros indicios del TFA fueron apareciendo en los registros, primeras formulaciones y conjeturas, aquí se mencionan algunas de las que tuvieron aparente protagonismo, basado en la monografía Teorema fundamental del álgebra: visualizaciones, intuiciones y demostraciones formales (2017).

Es perceptible que la aparición de las primeras conjeturas del teorema, aparecieron a partir de la resolución de ecuaciones. Cardano quien con su aporte de *Ars magna* muestra la resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas, abre una puerta que despierta el interés en la comunidad por estudiar la teoría de ecuaciones. Éstas primeras conjeturas se materializan gracias a Girard y Descartes, como resultado de solucionar ecuaciones y poder percibir una

relación entre la estructura de una ecuación y tales soluciones. Newton y Leibniz también trabajaron con la conjetura.

Girard realizó aportes en los cuales inicialmente clasifica las ecuaciones según su estructura y su planteamiento inicial (número de términos, cantidad de exponentes, cantidad de coeficientes nulos, características de los coeficientes, entre otros); con ello formula una conjetura que mantiene elementos esenciales del TFA, aunque no la demuestra, provee múltiples ejemplos particulares en los cuales se puede validar. Descartes aprovechando su experticia en álgebra y geometría, posterior a definir conceptos importantes como ecuación y raíz, también conjetura una versión inicial del TFA. Es importante destacar que, además de formular la conjetura, en sus aportes es apreciable el trabajo de algunas propiedades de las soluciones de la ecuación, en relación con el conjunto numérico al cual pertenecen, incluyendo lo que hoy se conocen como soluciones complejas.

Especialmente Descartes legitima algo poco común para su época en la comunidad matemática: el uso de lo que llama “soluciones imaginarias”. Es de importancia destacar que el desarrollo histórico del Teorema Fundamental del Álgebra dio lugar paulatinamente al reconocimiento y estudio de los números complejos. Newton entre las importantes contribuciones que hizo a la humanidad, realizó un aporte a las matemáticas que fue especialmente relevante en el álgebra: la definición de polinomios simétricos; un concepto con el cual se logra establecer una relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y estos polinomios simétricos que aparecen en sus raíces, en obras posteriores, Newton trabajó con elementos ya conocidos, como los aportes de Descartes; en su publicación *Arithmetica Universalis* además de los elementos existentes de Girard, aparecen nuevos que abarcan mayores posibilidades en la estructura de la ecuación. Los aportes de Newton resultaron ser clave para posteriores trabajos del TFA.

El TFA y los inicios del cálculo encontraron convergencia a inicios del siglo XVIII, debido a un problema para calcular una integral que consta de la razón entre dos polinomios. Se creía que, para poder resolverla, era necesario poder descomponer cada polinomio real como el producto de factores reales de primer y segundo grado, que es una de las maneras de formular el TFA. Como parte del proceso, Leibniz, interesado en resolver el problema anterior, postula un contraejemplo a la conjetura del TFA mostrando una ecuación de cuarto grado que, según él, no era posible descomponer en dos polinomios cuadráticos de factores reales; sin embargo,

su planteamiento fue errado dado a un error procedimental. Aún así, realizó algunas contribuciones respecto a las cantidades imaginarias.

Años después, Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace pusieron especial interés en descubrir y precisar sospechas relacionadas a exactamente qué relación hay entre el grado de un polinomio y el número de raíces que este último tiene, para mediados del siglo XVIII resolver las cuestiones relacionadas al TFA era primordial. D'Alembert es el primero en intentar una demostración formal, en ella, llega a una contradicción en la que se demuestra que la raíz de un polinomio siempre será de la forma $p + q\sqrt{-1}$. Llegó a ser publicada en 1749, pero no fue válida debido a algunas inconsistencias.

Euler termina involucrado en la historia del teorema en primera instancia dado a que, en sus trabajos con la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas, llega a un resultado de la forma $P(r) = 0$ cuyas soluciones de r dependen del TFA. Los aportes de Euler fueron una compilación de argumentos en los cuales, aparentemente se mostraba la validez del teorema para ecuaciones con ciertas características (como ecuaciones de grado par). Con ello finalmente llega a una forma general, sin embargo, Euler parte de tres enunciados no triviales que asume como verdaderos sin demostración. Laplace hace un intento por demostrar el teorema basado en el discriminante de un polinomio utilizando inducción matemática, utilizando algunos elementos importantes ya aportados para el momento.

Algunos de los aportes sirvieron para conclusiones sustanciales, otros fueron errados, pero todo fue indispensable para que Gauss pudiese hacer cierre a los antecedentes del Teorema Fundamental del Álgebra. Carl Friedrich Gauss, más conocido por su apellido, fue un matemático, astrónomo, geobotánico y físico alemán que hizo grandes aportes a las matemáticas (entre otras), nació en Brunswick. Hizo el descubrimiento de los mínimos cuadrados, aportó con las normas Euclídeas en geometría; fue también director del observatorio astronómico Göttingen por 40 años. Gauss dedicó más de 50 años de su vida al intento de formalizar la demostración del teorema fundamental del álgebra (TFA) que fue, para beneficio histórico, consolidado.

Es indiscutible por el planteamiento mismo del TFA, considerar un análisis más allá del superficial de éste sin tener una apropiación decente del conjunto de los números complejos; para la época de Gauss, se habían hecho algunos trabajos donde se hablaba de raíces negativas pero sin tener, por mucho, las herramientas que se poseen actualmente para hablar de ellas, él

era consciente de eso y su primera aproximación al TFA fue mediante la apropiación de la naturaleza de este conjunto, siendo muy específico en su representación.

El siglo XVIII fue un momento histórico ideal para debatir sobre la naturaleza y el sentido de este número, que en ese entonces se conocía únicamente por su definición qué es. Dado que, por supuesto, no hay manera con la que se pueda “visualizar” estos números, no quedaba claro cuál era su significado, si era para empezar viable asumir su existencia o si eran representables en la recta junto al ya existente conjunto de los números reales, una discusión en la cual la filosofía daba lugar. Gauss hizo un aporte que tuvo como consecuencia una mayor aceptación de estos números: una propuesta de representación que derivó en la que hoy conocemos para ellos, los números complejos representados en el plano.

En esta representación Gauss explica mediante geometría un método para generar cuadrados cuyas áreas son la sucesión para hallar un ángulo correspondiente a cada uno de esos cuadrados, y de forma análoga hace un método similar para asignar una correspondencia entre (en el plano) y un ángulo determinado; así Gauss sintió que comprendió por primera vez la naturaleza de ese número.

Posteriormente Gauss critica los intentos de demostración del TFA realizadas por D'Alembert, Euler y Laplace. Para el caso de D'Alembert, Gauss argumenta que su demostración parte del hecho de que las raíces de una ecuación polinómica existen (dice lo mismo de la demostración de Laplace), además de que “utiliza consideraciones geométricas y analíticas muy complejas para la época, resultando difícil para sus lectores”; también cree que deja muchos “vacíos conceptuales”. Mediante su trabajo, Euler intenta convencer la validez del TFA con un desarrollo exhaustivo de casos particulares, por lo cual Gauss considera como “incompleta” su demostración.

Aun así, Gauss realiza sus demostraciones haciendo uso de los importantes aportes que hicieron ellos tres al problema del TFA, la primera demostración en la historia fue presentada en su trabajo “*Demonstratio nova theorematum omnium functionum algebraicarum rationalium integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*” (1799) en el cual prueba el teorema en uno de sus planteamientos variados que es equivalente a decir que el polinomio tiene exactamente raíces como solución. 16 años después, en 1815 publica otro trabajo “*Demonstratio nova altera theorematum omnium functionum algebraicarum rationalium integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*” en el cual

publica otra demostración, desde una perspectiva más algebraica. En 1816 hace otra demostración en la cual hace uso de lo que hoy se conoce como la integral de Cauchy (*“Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia”*).

Seis años antes de morir en 1855 publica “Zur theorie der algebraischen gleichungen” (1849) que a diferencia de los otros tres, fue publicado en alemán. En este último trabajo generaliza su demostración en la cual los coeficientes del polinomio pueden tomar valores complejos.

2.1.2 El Teorema Fundamental del Álgebra

El TFA es presentado de múltiples formas (tautológicamente equivalentes). Pero para intereses de este trabajo, se presentará y se considerará de aquí en adelante de las siguientes maneras:

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. La ecuación

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n = 0$$

tiene exactamente n soluciones, que pueden estar o no repetidas.

Desde una perspectiva del cálculo, es equivalente a decir:

Sea

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_n$$

una función de grado n con coeficientes reales.

La función tiene n raíces.

Es posible recrear las definiciones anteriores en una de sus presentaciones más usuales y es afirmando que tanto la ecuación como la función tienen al menos una solución o raíz respectivamente. Es algo trivial encontrar (utilizando división polinómica) que son maneras distintas de enunciar la misma propiedad matemáticas. Es importante denotar que el tipo de aseveración que se realiza es de existencia, cuando se cumplen las condiciones requeridas, esto significa que el TFA no es un teorema que muestra la forma de las soluciones para la ecuación descrita, ni tampoco da cuentas de un procedimiento para hallar la o las soluciones de la ecuación, el teorema garantiza su existencia. En una ecuación como $9x^7 - 4x^4 + \frac{12}{5}x^3 = 0$ el

TFA no provee herramientas para solucionar la ecuación, sin embargo, garantiza que existen siete.

Claramente no todas las soluciones son del mismo tipo, numéricamente hablando, y es necesaria esta distinción porque los estudiantes tienen diferentes niveles de apropiación de los conjuntos numéricos (es muy atípico encontrar estudiantes de primeros años escolares mostrando nociones de un número irracional pero al hablar de cantidad u orden, es más usual que se les vea haciendo uso de los números naturales), porque ecuaciones como $x^2 - 2 = 0$ no tienen soluciones de la misma naturaleza que $2x = -5$ o que $x^2 + 4 = 0$. Como se vió anteriormente desde una perspectiva histórica, la demostración del TFA (presentada en 1698 por Gauss) fue uno de los primeros trabajos en los que se usó $\sqrt{-1}$, antes de ello no se concebía universalmente como elementos útiles en matemáticas las raíces negativas, por lo que significó un paso importante que tuvo como resultado la apertura de múltiples campos en matemáticas puras como análisis complejo, y en matemáticas aplicadas tuvo importantes repercusiones como en física moderna; Gauss para hacer su demostración tuvo que apuntar primero al entendimiento de la naturaleza de lo que hoy se conoce como números complejos, él entendió que trazar una perpendicular semejante a la recta real que pasase por el origen pero cuya unidad fuese sería el espacio perfecto para representarlos, un plano.

El reconocimiento del teorema es fundamental, porque es un conocimiento matemático con el cual se visualiza gran parte de la pertinencia de posibles saberes intuitivos de los estudiantes, una pieza clave que se utiliza como referencia para estructurar la metodología del trabajo.

La historia muestra que los procesos y saberes necesarios para alcanzar un conocimiento en el cual se involucra un conjunto numérico difiere según estos, por su naturaleza, por lo que un ítem fundamental al caracterizar una ecuación aplicable al TFA respecto a sus soluciones no es solo la existencia de estas sino su tipología.

2.2 Perspectiva Curricular

En esta sección se toma en consideración los Lineamientos Curriculares, que son elementos fundamentales al momento de elaborar un modelo curricular dentro del Proyecto Educativo Institucional (PEI), específicamente, sobre la asignatura de matemáticas, de tal manera que se promueva la realización de un análisis por lo expuesto ahí y va entorno a los propósitos y criterios establecidos en la investigación, es necesario establecer una

contextualización curricular, proveer unos cimientos que permitan encaminar su desarrollo en función de una problemática educativa.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006), promueven procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones algebraicas y sitúan tales nociones en grados de escolaridad específicos, indispensables para la realización del presente trabajo, por lo cual se hará énfasis en estas dos estructuras curriculares principalmente, mientras que, los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015) se enuncian de manera crítica, en gran medida y hacen una reflexión sobre los contenidos que en ellos se promueven, debido a que son una propuesta curricular que aún se encuentra en discusión en el territorio nacional.

2.2.1 Sobre los Lineamientos Curriculares de Matemáticas referente a la Resolución de Ecuaciones Polinómicas

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, publicados en 1998 y los currículos de las Instituciones Educativas en Colombia, según Vasco (2002), enfatiza en la siguiente idea:

El propósito de las matemáticas no solo es el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales o simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (p.109)

Así mismo, se encarga de apoyar y orientar a la comunidad educativa en general, para el diseño de sus planes de estudio acorde a las necesidades que le corresponda, enmarcado al entorno cultural en el cual se encuentren inmersos, contribuyendo así, procesos de reflexión, análisis crítico y ajustes progresivos del currículo; de esta manera se pretende que el documento sea un posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que se dan en las institución educativa colombiana, sin reemplazar el papel que juegan los docentes en la toma de decisiones sobre contenidos, metodologías y estrategias para la participación que deben emplear en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Según esto, se presenta en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) tres aspectos para la organización del currículo de manera eficaz y favorecer el propósito mencionado anteriormente, los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

En primer lugar, presenta procesos generales relacionados con el aprendizaje, ligado al razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En segundo lugar, se establece los conocimientos básicos, son procesos que desarrollan el pensamiento matemático y tienen en cuenta los sistemas propios de las matemáticas. La cual propone desarrollar los cinco tipos de pensamiento matemático: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional. Los cuales se encuentra relacionado con un sistema propio de las matemáticas que permite un óptimo desarrollo, estos son: los sistemas numéricos, los sistemas geométricos, los sistemas de medida, los sistemas de datos y los sistemas algebraicos y analíticos.

Por último, el contexto, tiene relación con los ambientes que rodean al estudiante, como las condiciones sociales, económicas, culturales, concepciones, entre otras y genera sentido a las matemáticas que aprende. Estos contextos deben propiciar situaciones problema, establecido sobre las mismas matemáticas, de la vida diaria o de las otras ciencias, la cual, es vital el entorno en el que está inmerso los estudiantes, porque, asimismo, da sentido a las matemáticas que aprende. (MEN, 1998)

De acuerdo con lo anterior, para efectos de este trabajo se centrará la mirada en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos respectivamente. El estudio aproximaciones numéricas están ligadas a fenómenos de variación y cambio, debido a que estos procesos se realizan a través de algoritmos iterativos, los cuales promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y uso del lenguaje matemático. Además, los Lineamientos curriculares se reconoce que la utilización de este tipo de procedimientos, que ponen de manifiesto un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas; por otro lado, llama la atención sobre lo necesario que es ir construyendo la variación numérica continua en los estudiantes, pues recordemos que esta es una de las dificultades que aquejan a los estudiantes en su introducción al álgebra. Pues no se trata simplemente de que el estudiante razone sobre objetos matemáticos, sino que también, este pueda hacer cálculos correctos, tomando conciencia de las propiedades que le permiten

transformar expresiones, en otras más simples; que pueda seguir instrucciones y utilizar de una manera óptima sus saberes.

En este sentido, se desarrollará algunos componentes del pensamiento variacional para un estudio de casos, entendiendo a este, como conocimiento básico reconocido por el MEN. Es pertinente mencionar, que no se deja de lado otros tipos de pensamiento matemático que se involucran en el trabajo en cuestión, por que como se sabe, en una sola actividad matemática, se puede favorecer más de un pensamiento; y los métodos de aproximación no son la excepción, ya que la aplicación de algoritmos hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas.

Vasco (2002) afirma que:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de esta o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.111)

Cabe destacar que el pensamiento variacional no se construye de manera aislada, por el contrario, requiere de los demás pensamientos para su desarrollo. Por ejemplo, el pensamiento espacial es necesario cuando en una situación problema se establecen reconocer atributos e identificar conceptos de espacio, forma y medida, así mismo, con cada uno de los pensamientos van adquiriendo importancia para dar solución a un problema en particular.

Finalmente, Para producto de este trabajo se enfoca la mirada preferiblemente a contextos de la misma matemática, teniendo en cuenta la elaboración, argumentación, comparación y ejercitación de procedimientos que pueden aportar estudiantes de grado undécimo, cuando se promueven actividades orientadas a ecuaciones polinómicas. Además, no se trata simplemente que el estudiante razone sobre objetos matemáticos, sino que también, este pueda hacer cálculos correctos, tomando conciencia de las propiedades que le permiten transformar expresiones, en otras más simples; que pueda seguir instrucciones y utilizar de una manera óptima diversos recursos en su modo de proceder, porque cuando la aplicación de algoritmos se realiza conscientemente, la mente aprende a funcionar más rápido, logrando de este modo automatizaciones, antes del uso de artefactos tecnológicos.

Todo lo anterior, le facilitará al estudiante la aplicación de la matemática en su vida diaria y otros procesos generales que pueden surgir y ser fundamentales para este trabajo en cuestión, por ejemplo, el razonamiento matemático, el cual puede ser aprovechado, debido a los pasos lógicos que conllevan los métodos de aproximación.

Es claro que, aunque los métodos numéricos no son mencionados en los lineamientos curriculares de matemáticas, en este referente nacional se reconoce la importancia de trabajar con los estudiantes el continuo numérico, procesos infinitos y aproximaciones sucesivas, lo cual, aportan elementos fundamentales para el desarrollo del presente trabajo, puesto que, enfatiza en estimular pensamiento matemático a los estudiantes e invita a cuestionar el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los procesos generales, conocimientos básicos y contextos centrada la atención en la solución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y el saber intuitivo que va en relación con el conocimiento previo del estudiante adquirido a través de la vida.

2.2.2 Sobre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas Referente a la Resolución de Ecuaciones Polinómicas

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), establecen que las competencias matemáticas no florecen de la nada, por el contrario, busca ambientes de aprendizaje en los cuales se vea reflejado situaciones problema significativas y comprensivas, puesto que permiten desarrollar aptitudes en los estudiantes al enfrentar problemas matemáticos sencillos y de mayor grado de complejidad. De lo anterior, se considera necesario e importante la interpretación de la solución a problemas en la aproximación al álgebra y para efectos de esta investigación a la resolución de ecuaciones polinómicas, puesto que se evidencian grandes dificultades al establecer la transición del saber intuitivo (interpretativo-procedimental) a lo formal, por parte de los estudiantes, es decir, que se presenta una ruptura entre estos dos dominios.

En consecuencia, se establecen unos parámetros de lo que todo estudiante debe saber y aprender hacer al finalizar su paso por el sistema educativo. En su estructura se puede encontrar la puesta en acto de procesos generales, conceptos, contextos y procedimientos matemáticos, similar a los Lineamientos Curriculares.

Por otro lado, los Estándares Básicos de Competencia al igual que los Lineamientos Curriculares proponen cinco pensamientos, de los cuales se hará énfasis en el pensamiento variacional, definido por los estándares como:

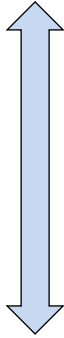
Lo tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

Así mismo, los estándares proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo, se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado decimo a undécimo, relacionados con el proceso de solución a problemas de ecuaciones polinómicas. Conforme a lo anterior y teniendo en cuenta el propósito del trabajo en cuestión, se presenta a continuación un esquema que pone en relieve los estándares que se implementan en el estudio de casos que se dará a conocer más adelante.

En el siguiente esquema, se indica los procesos de aproximación presentes en el pensamiento matemático, cabe aclarar, solamente se toman aquellos que complementa al pensamiento variacional, para objetivo de la investigación, reafirmando de esta manera lo que dice el MEN (2006) en cuanto a los elementos conceptuales comunes que guardan los cinco tipos de pensamiento y que pueden ser aprovechados para el diseño de situaciones de aprendizaje. Además, la coherencia vertical presentada, da cuenta de la complejidad que presenta este concepto matemático que se tiene que ir construyendo de manera progresiva desde los primeros grados de la educación.

Acorde a lo anterior, las siguientes tablas adquieren un gran valor al trabajo, porque contribuyen a determinar y orientar el grado de escolaridad más apropiado, de acuerdo con lo presentado sobre el pensamiento matemático (pensamiento variacional y sistemas algebraicos) en conjunto con la noción matemática (Ecuaciones polinómicas), requeridos en la investigación.

Tabla 1. *Coherencia Vertical en los Estándares Básicos de Competencias*

De 10 ^o a 11 ^o	
PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS	
Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	
COHERENCIA VERTICAL 	De 8^o a 9^o: Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
	De 6^o a 7^o: Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones
	De 4^o a 5^o: construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.
	De 1^o a 3^o: Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos, aunque el valor siga igual.

Fuente: la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Elaboración propia.

Tabla 2. *Coherencia Horizontal en los Estándares Básicos de Competencias*

COHERENCIA HORIZONTAL	
	
Pensamiento numérico y Sistemas algebraicos	Reconozco la densidad e incompletitud de los números.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contexto matemático y en otras ciencias.
Pensamiento espacial y sistemas Geométricos	Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Fuente: la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Elaboración propia.

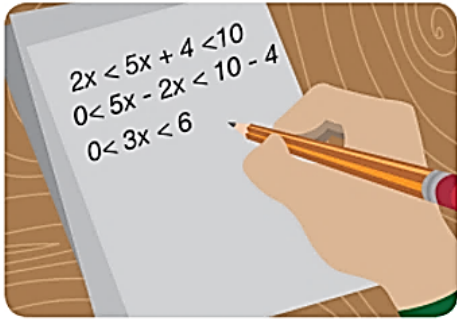
2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA): Enfoque Matemático referente a la Resolución de Ecuaciones Polinómicas

Los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas parecen indicar en un primer momento la relación y su estructura en concordancia con los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN,

2006), para posteriormente presentar una serie de actividades para los diversos grados de escolaridad. Algunas de las actividades que ejemplifican lo anterior son:

Ejemplo

"Ana una estudiante de undécimo decide resolver una inecuación como se muestra en la siguiente figura:





Ana argumenta que para resolver la inecuación, todo lo que está sumando al lado izquierdo se pasa a restar al lado derecho y posteriormente, realiza las operaciones. Luego, termina su ejercicio de la siguiente manera: dice que para despejar la x pasa a multiplicar el 3 a ambos lados".

Analiza los procedimientos propuestos por la estudiante de la situación anterior y valida su solución. En caso de encontrar algún error, construye una nueva solución.

Figura 1. Ejemplo actividades propuestas en los DBA para grado 11º.

Fuente: (MEN, 2015)

Según el ejemplo anterior, el estudiante cumple los siguientes propósitos de los DBA:

- Utiliza propiedades del producto de números Reales para resolver ecuaciones e inecuaciones.
- Interpreta las operaciones en diversos dominios numéricos para validar propiedades de ecuaciones e inecuaciones.

Para el desarrollo de este trabajo más que seguir o tener en consideración las actividades propuestas en los DBA, lo que se pretende es tener una mirada crítica acerca de dicho documento propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, debido a que aún se encuentra en discusión al no ser aceptado por diferentes comunidades (docentes, establecimientos educativos, familias, entre otros) debido a su contenido mismo. Lastimosamente dentro de su abanico no posee actividades relacionadas con ecuaciones polinómicas, por lo cual se quiere por medio de este trabajo, realzar la importancia de esta noción matemática mencionada anteriormente para el buen desarrollo del aprendizaje en los estudiantes.

Acto seguido, se considera que los DBA se limitan a concebir las matemáticas como un conjunto de temáticas, que se deben desarrollar en un periodo de tiempo, lo cual genera un retroceso en las expectativas de aprendizaje, ya que dejan a un lado las competencias o procesos generales y vuelven a tomar los contenidos como eje central sin aportar una inclusión significativa de los recursos tecnológicos y didácticos. Así pues, el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar pensamiento matemático en el estudiante.

Con el fin de finalizar, el panorama curricular, es necesario que el MEN preste atención y reformule las actividades planteadas por los DBA, dado que, se enfocan en presentar métodos analíticos que hacen ver a la matemática, algunas veces, como una ciencia estática y memorística. Lo cual, genera un estancamiento en el proceso matemático del estudiante. La idea está ligada a complementar esta propuesta y hace alusión a métodos de aproximación y solución numérica, abriendo un sinfín de posibilidades y herramientas a los estudiantes cuando se enfrenten a problemas cotidianos y de la misma matemática.

Como se menciona anteriormente, el uso de procesos numéricos favorece en gran medida el desarrollo del pensamiento variacional, debido a los fenómenos de variación y cambio que están involucrados en cada uno de los pasos lógicos que se siguen, y que se pueden observar a través de los diferentes algoritmos iterativos que se usan para llegar a una solución, proporcionando al estudiante, comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas. Además es claro que estos métodos potencian el desarrollo de los procesos de pensamiento como el procedimental y el uso de conceptos, ya que a medida que los estudiantes se van familiarizando con estos procesos, comienzan a tomar conciencia de las propiedades que le permiten transformar expresiones, en otras más simples; desarrollan mejores habilidades y estrategias para realizar cálculos correctamente; mejoran su capacidad para seguir instrucciones y utilizar de una manera óptima y eficaz la calculadora; entre otros. Todo lo anterior le facilitará al estudiante la aplicación de la matemática en su vida diaria.

A modo de cierre, vale la pena mencionar que el capítulo 3 va articulado a las perspectivas Histórico-Matemático, Curricular y Pedagógico para la elaboración del instrumento, conforme a los propósitos planteados en el trabajo.

2.3 Perspectiva Pedagógica, una aproximación del saber intuitivo a lo formal: “lo intuitivo”

Como bien se ha discutido en varios apartados dispuestos en este trabajo, la situación actual de los estudiantes en sus interacciones de aprendizaje con el álgebra escolar, tiene condiciones críticas, parcialmente relacionada a la dificultad que existe para que se pueda comprender e interpretar el conocimiento que subyace: “los estudiantes no entienden qué es lo que dice una ecuación y tampoco son capaces de abstraer desde un contexto cotidiano una relación que les permita plantearla” (Booth, 1983, p.32).

Sin embargo, a pesar de la existencia de una clara y amplia brecha presente en el álgebra escolar, esto no implica que los estudiantes en su primer encuentro con esta etapa no posean herramientas cognitivas que puedan, potencialmente, resultar útiles para una adquisición del conocimiento. Booth en el documento *Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalised arithmetic)* (1983) caracteriza ampliamente lo que él llama como “los métodos de los estudiantes” que se refiere a un conjunto de maneras de proceder que suelen ser frecuentes y comunes en los estudiantes al momento de resolver problemas y ejercicios de álgebra en sus primeros encuentros con ellos, tales métodos suelen atribuirse a ser:

- Lo que cotidianamente se entiende por “intuitivo”, Booth se refiere a tal propiedad “intuitiva” como “conocimiento instintivo”.
 - Primitivo, métodos muy relacionados a las primeras experiencias que ha tenido un individuo con las matemáticas.
 - Ligado al contexto: métodos que alude a las características de un problema en particular (para cuando el estudiante se enfrenta a una situación problema).
 - Métodos con poco o ningún indicio de ser simbólicamente formal.
 - Basados ampliamente en operaciones de conteo, adición y combinación.
 - Funciona en gran parte con el conjunto de los números naturales y las mitades.
- (p.37)

Cada uno de estos atributos, aunque no resulten ser explícitos, establece un cimiento importante que permite, en primer lugar, reconocer la existencia de ciertos métodos que suelen aparecer con mayor frecuencia en estudiantes en su proceso de aprendizaje del álgebra escolar; también permiten establecer criterios de discriminación para identificar ciertos saberes que

pueden estar vinculados a tales métodos; estos saberes no están únicamente relacionados al proceso de los estudiantes en la academia, también resultan de la cotidianidad a la cual ellos están inmersos y de sus primeras experiencias con las matemáticas.

Para los propósitos de este trabajo, al hacer referencia a los saberes intuitivos de un estudiante, se enmarcan los posibles saberes que puedan estar vinculados o sean los desencadenantes de métodos semejantes a uno o varios de los descritos anteriormente. Se podría establecer “el saber intuitivo” como el que es aceptado por la mayoría de estudiantes y que está dotado de un carácter experiencial, es “creativo, subjetivo y directo” (Crespo, 2008), en contraposición a aquel otro que se denomina "técnico" o "científico", propio del mundo académico.

A pesar de que estos “métodos de los estudiantes” están condicionados y solo funcionan adecuadamente para un limitado umbral de posibilidades e incluso, pueden convertirse en obstáculos por la resistencia que suelen tener los estudiantes para “abandonar” tales métodos y adquirir los nuevos con asertividad. Booth (1983) comenta:

Esto no significa que los procedimientos informales de los estudiantes no tengan valor. De hecho, los procedimientos formales enseñados sólo pueden adquirir sentido para el estudiante si estos están, al menos inicialmente, relacionados a esos métodos intuitivos el cual el estudiante ya entiende. (p.39)

Lo cual implica directamente que este tipo de acercamientos metódicos, más en específico los de naturaleza intuitiva, podrían resultar ser el camino para cerrar o al menos acortar la brecha de interpretación que se abordó al inicio de este apartado. La forma como los estudiantes apropian y establecen métodos para solucionar ecuaciones varía sustancialmente según el tipo de acercamiento que tienen a la estructura (si es mediante cierto nivel de formalismo, o con el uso de su intuición). Petitto (1979), referente al álgebra, investigó las estrategias que los estudiantes de la escuela secundaria utilizan para resolver ecuaciones algebraicas, y señaló dos tipos principales de enfoque que ella llamó "intuitivo" y "formal" respectivamente. Utilizando el método de la entrevista clínica, Petitto examinó los métodos utilizados por los estudiantes para resolver ecuaciones que eran idénticas en forma algebraica, pero que diferían en grado de perceptibilidad de las relaciones numéricas encarnadas.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{x+1} \quad y \quad \frac{14}{23} = \frac{56}{x+2} \quad (1)$$

Petitto encontró que los estudiantes entrevistados resolvieron la primera de estas ecuaciones por un método que era inapropiado para la segunda, numéricamente más compleja, es decir, trabajando en términos de las relaciones de número involucrados. Así, varios de los estudiantes resolvieron la primera ecuación notando que el numerador de la derecha de la ecuación era el doble que el de la izquierda, y así doblando el denominador les permitió concluir que x equivalía a 5. Sin embargo, los estudiantes no pudieron aplicar el mismo enfoque a la segunda ecuación. Aquellos estudiantes que resolvieron esto último correctamente lo hicieron por medio del procedimiento de resolución de ecuaciones enseñado. Como resultado de estas observaciones, Petitto describió dos tipos de procesos de solución, a saber, el método “formal” que definió como:

Uno que consiste en una secuencia lineal de pasos y que se describe explícitamente como un conjunto de instrucciones o reglas expresadas verbalmente. Además, las instrucciones o las reglas deben aplicarse a alguna forma general sin referencia a instancias o contenidos específicos. (Petitto, 1979, p. 71)

Y el enfoque 'intuitivo', definido como: “un proceso que se organiza con referencia a lo percibido propiedades y relaciones de los elementos particulares a ser manipulado” (p.71). Lo que permite apreciarse de estos resultados es que existe una relación entre la capacidad de los estudiantes para manejar ecuaciones y qué tan “intuitivo” resultan ser los posibles métodos para solucionarla.

En el documento *Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático* se realiza una descripción de posibles usos o apariciones de la intuición relacionados a ciertos “fenómenos” o “actividades”, esta descripción provee una lente con la cual se puede identificar momentos en los cuales los saberes intuitivos están presentes; sin embargo, en este trabajo se presentarán solo algunos de los ítems presentados en él.

Denominada “Comprensión del significado de un conjunto de signos” se evidencia:

(...) en la comprensión rápida de relaciones, como por ejemplo en cadenas deductivas, aunque escapen detalles y pasos. Depende de la experiencia previa y de la familiaridad con las estructuras correspondientes. Se relaciona con lo obvio. Un ejemplo de esta actividad de la intuición lo constituye la unicidad del cero. Este resultado resulta

evidente y parece no necesitar prueba para los estudiantes del primer curso de álgebra. (Crespo, 2018, p. 719)

La “Capacidad de tanteo” se refiere a: “la intuición sensible basada en percepción y experiencia que permite aprehender el objeto de manera rápida” (p.719).

La “Capacidad de interpretación” se refiere a:

(...) no sólo a la asociación de fórmulas con sus significados, sino también a relacionar asuntos aparentemente inconexos. Por ejemplo, la potenciación se define inicialmente para bases y exponentes naturales no nulos. Posteriormente se extiende esta operación a diversos tipos de exponentes, como si la intuición fuera capaz de realizar esa extensión. Este proceso, debe ser comprendido lejos de la intuición y asumiendo que se trata de una convención de la comunidad matemática. (p.719-720)

La “Capacidad de representación o intuición geométrica” se refiere a:

(...) representar o imaginar objetos ausentes, de construir, imágenes o diagramas. La intuición geométrica espacial es importante en la enseñanza. La matemática se apoya en la intuición visual y geométrica, apoya su razonamiento en ellas, pero no puede ser reemplazada por ellas. Por ejemplo, podemos pensar en el concepto de punto como una “mancha” tan pequeña como se quiera. Esto nos lleva a tener un significado intuitivo y subjetivo que se corresponde con la representación que se realiza de un punto, pudiendo incluso manipular estos objetos y trabajar con ellos. (p.720)

La “Imaginación creadora” alude a una intuición que:

(...) permite inventar, generar nuevas ideas. Este proceso, generalmente es borrado al final de la teoría. No se presentan en ese momento las conjeturas previas al resultado obtenido. La imaginación creadora no puede existir si no se sustenta en conocimientos previos en los que ya actuó la razón. En oportunidades se hace referencia a la intuición como “corazonada científica. (p.721)

La “manifestación acotada” alude a una intuición que:

(...) Es el sentido común engaña y permite llegar a resultados incorrectos. El sentido común no es estático, evoluciona enriqueciéndose con el estudio de la ciencia, entonces permite trascender y mejorar esas creencias anteriores. (p.721)

Estos ejemplos de la intuición muestran que a menudo se hace referencia a habilidades y usos muy diversos con diferentes connotaciones, lo que dificulta lograr una definición de esta. adicionalmente, es necesario recalcar que, dentro del marco del trabajo y sus objetivos a desarrollar, es tomada y modificada estas caracterizaciones, con el fin de ser implementada en el uso exclusivo de esta investigación. Es de suma importancia precisar que estos ítems abarcan, cada uno, distintos procesos de pensamientos de los estudiantes, su distinción permite establecer una categorización que permita atribuir características a los saberes intuitivos involucrados.

Estos aportes resultan de gran importancia ya que dan sustento a las actividades que se conjugan en el proceso metodológico, en espera de sacar a flote el saber intuitivo de los estudiantes que han adquirido no solo en su etapa escolar que está a punto de finalizar, sino lo que han venido adquiriendo durante el transcurso de la vida.

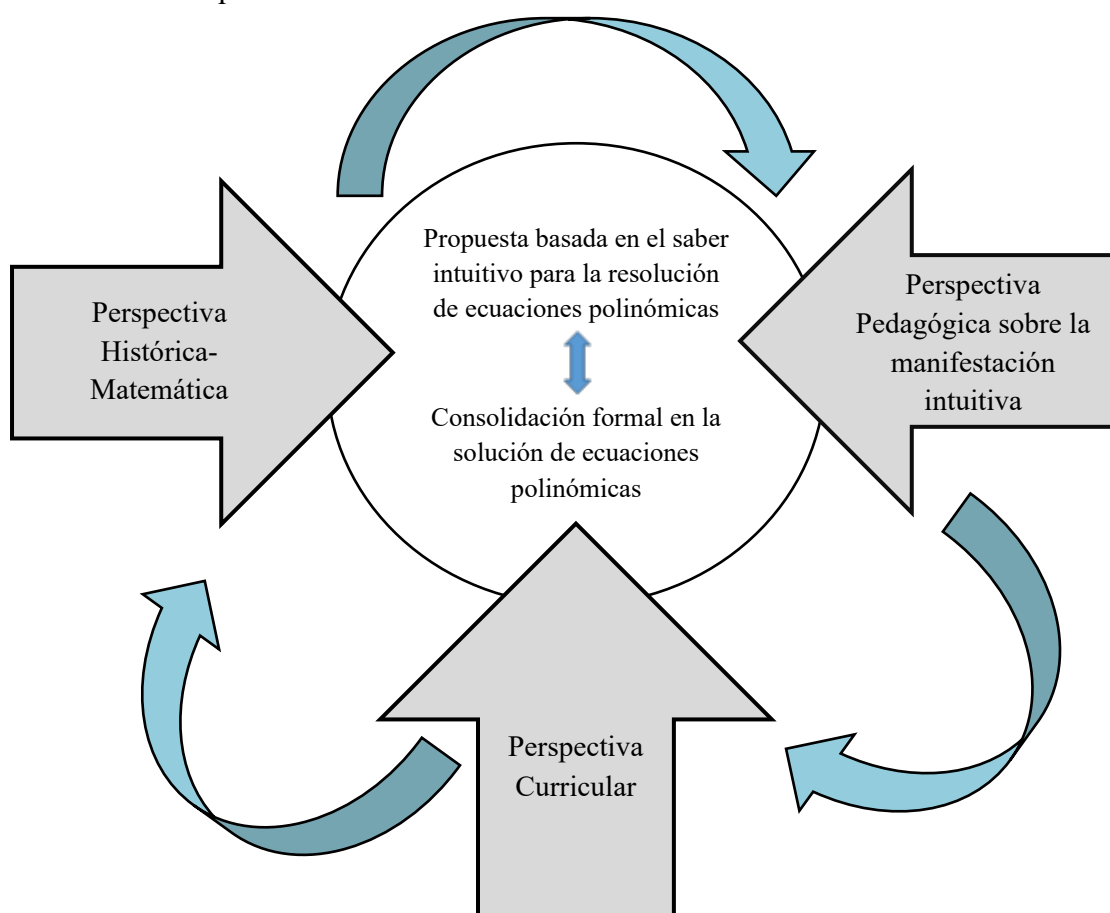


Figura 2. Articulación de las perspectivas de la investigación. Elaboración propia.

Ahora bien, con base a las consideraciones anteriores se sustraen elementos o aportes que apoyan al diseño y elaboración del instrumento, los cuales van ligados a las actividades y entrevista semiestructurada que lo compone, a su vez relacionado con el objetivo principal de la investigación, ilustrado en la siguiente figura.

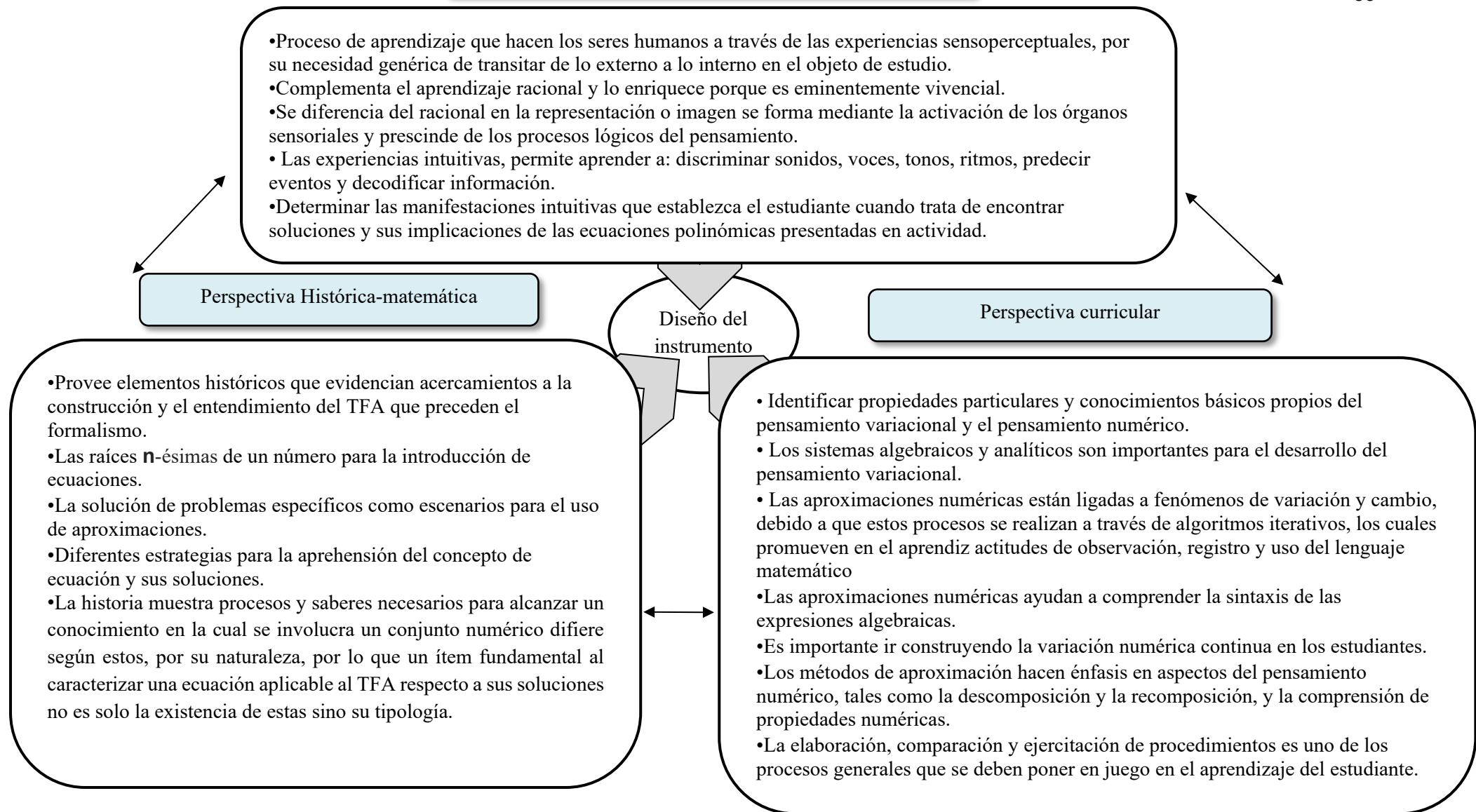


Figura 3. Elementos de los referentes para el diseño del instrumento. Elaboración propia. (2021)

El esquema anterior, presenta los aspectos que se tienen en cuenta del marco de referencia conceptual para el diseño del instrumento, la elaboración de las actividades, la puesta en acto y el análisis de los resultados sobre la propuesta implicada en la investigación, se realiza a partir de los referentes teóricos mencionados en este trabajo, y en particular desde una educación, que fomente y priorice este tipo de saberes intuitivos y el material como recurso didáctico enfocado a la noción de ecuación polinómica.

Estos elementos surgen a partir del estudio centrado hacia los tres referentes teóricos, para encontrar cimientos que sustente el diseño del instrumento y su respectivo análisis. En primer lugar, se tuvo a consideración investigaciones relacionadas al Teorema Fundamental del Álgebra, adjuntada en la problemática, que dan a conocer múltiples dificultades que tienen los estudiantes cuando tratan con ecuaciones polinómicas. Igualmente, se hizo un análisis de los tres documentos que actualmente rigen el sistema Educativo Colombiano (Lineamientos curriculares para matemáticas, Estándares básicos de competencias en matemáticas y los Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas) con el fin de brindar un panorama curricular para su construcción. Además, se realiza un estudio pedagógico sobre el saber intuitivo y algunas de sus caracterizaciones de aproximación numérica que surgieron durante su publicación. Al conjugar la documentación aportada por cada referente se pudo realizar el diseño del instrumento, las cuales van a ir direccionadas a los objetivos propuestos a desarrollar en la investigación.

De acuerdo con lo anterior, los autores, se llegan a una reflexión sobre beneficiar la aproximación del pensamiento variacional en la Educación Matemática, la cual debe promover a partir de actividades o tareas, que permitan indagar, observar patrones, relaciones y propiedades matemáticas, de manera que, los estudiantes exploren, hagan predicciones, argumenten y discutan los resultados de su práctica. De ahí que, para el diseño del instrumento, se tiene en cuenta, que las actividades deben, permitir explorar, reconocer y describir patrones, así como, formular o refutar conjeturas, que le permitan realizar representaciones externas mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos incluyendo las numéricas, simbólicas, tabulares, verbales y manipulativas. (Cañadas y Gómez, 2012)

CAPÍTULO 3. Algunas manifestaciones intuitivas entorno a la solución de ecuaciones polinómicas con estudiantes de grado undécimo de la Educación media

En este capítulo se exponen los aspectos relacionados al contenido del instrumento de investigación: que incluye, los conceptos matemáticos involucrados, su propósito y su diseño. Así como el proceso de implementación en el estudio de casos con estudiantes de grado undécimo, los resultados obtenidos y el análisis de estos. Adicionalmente se expone la respectiva descripción poblacional y una relatoría sobre la experiencia de aplicación en un ambiente virtual.

3.1 ¿Qué se tiene en cuenta para el diseño del instrumento?

Para el diseño del instrumento se tuvo en cuenta aspectos relevantes en relación con su objetivo primordial: su aplicación debía permitir a los investigadores percibir las manifestaciones de saberes intuitivos por parte de los estudiantes. Para ello, se consideró una estructura en la que los estudiantes pudieran interactuar con actividades relacionadas al contenido matemático relevante en la investigación, y que, a su vez permitiera a los investigadores profundizar en ciertos momentos de interés resultado de esta interacción inicial.

Las actividades postuladas debían, al menos en primera instancia, estar inmersas en el contexto de la teoría de ecuaciones, específicamente en los fundamentos teóricos del TFA, además de propiciar la aparición de momentos que pudieran percibirse como manifestaciones de saberes intuitivos.

Del proceso de documentación desde la perspectiva pedagógica, se entiende que los saberes intuitivos también están relacionados y tienen origen en momentos de aprendizaje por fuera del aula de clase, haciendo referencia en gran parte a la cotidianidad. Con ello se pudo concluir que actividades inmersas en un contexto (como el de una situación problema) juegan un papel crucial para el objetivo de la aplicación, y por eso fue necesario que hicieran parte de este.

De la misma forma, la interacción del individuo con actividades que involucren representaciones gráficas abre el umbral de posibilidades sobre cómo pueden manifestarse estos saberes y permiten percibir momentos que, de otra forma podrían no haberse dado. Por esta razón, a pesar de que la teoría de ecuaciones es el marco bajo el cual la investigación llevó

su curso desde un punto de vista teórico, se debía aprovechar la relación intrínseca perceptible en el TFA entre una función y una ecuación, por lo que involucrar algunos elementos del cálculo como las funciones polinómicas, su representación en el plano cartesiano y algunas propiedades básicas de las mismas, pudo resultar beneficioso para la eficacia de la aplicación.

La aplicación del instrumento fue pensada de tal manera que favoreciera la reflexión en los estudiantes, la forma en la que ellos son críticos con sus propias afirmaciones, resultados y conjeturas. Esto permite al investigador un mejor entendimiento de la manera como el estudiante interactúa con un objeto matemático en particular.

La complejidad de la actividad fue progresiva, de tal forma que los estudiantes pudieron tomar elementos importantes del inicio para analizar o reflexionar en instancias posteriores. Finalmente, se espera poder hacer lectura, específicamente, de cómo el estudiante percibió la relación entre ecuación polinómica, función polinómica, y la relación entre el grado del polinomio involucrado con la cantidad de soluciones de la ecuación o raíces de la función, respectivamente.

3.2 Descripción del instrumento

En este apartado se muestra la elaboración de la prueba, dividida en dos secciones, la primera plantilla va dirigida a los estudiantes y de acuerdo con lo plasmado ahí, tratar de resolverlo, la otra sección, es la plantilla que tendrán las investigaciones, un cuestionario de preguntas que se irán consultando al estudiante a medida que vaya resolviendo las actividades, la cual, está sujeta a cambios según sobre lo que el estudiante conteste.

El instrumento, permite principalmente, que los individuos seleccionados para esta investigación, plasmen en una hoja de papel algunas interpretaciones, respuestas o procedimientos relacionados a una serie de actividades en la cual tendrá una cantidad de actividades, tales actividades relacionadas, por supuesto, a los tópicos de interés para la investigación. Además, el investigador está presente al momento del desarrollo de la actividad, para lo cual dispondrá de un cuestionario, con preguntas que se le realizará una vez concluya cada actividad, lo que propicia un espacio para el desarrollo de una entrevista semiestructurada que permite a este poder indagar más a fondo en relación a algún estímulo que realice el individuo y que, bajo criterio del investigador, se considere relevante para los objetivos del trabajo. Por último, también se busca la obtención de un registro audiovisual que permita posteriormente el acceso a información sustancial que inicialmente pudiese pasar

desapercibida. El tiempo concebido para la actividad es de cuatro secciones de dos horas cada una

3.2.1 Contenido del instrumento

El instrumento que se propone para el estudio de casos se compone de tres actividades problema y tres entrevistas semiestructuradas que van complementadas a cada actividad. Surgen a partir de los estudios Históricos, Curriculares y Pedagógicos centrado en el marco teórico. En este sentido, los estudiantes deben resolver las actividades contempladas donde específica un propósito en particular, la cual, se cree puede ser oportuno para desarrollar lo propuesto en la investigación. Por consiguiente, se dispone a explicar el por qué, de cada actividad planteada.

Actividad I. Concepto y resolución de ecuación polinómica

En el primer bloque se pretende que el estudiante establezca un primer acercamiento con el objeto muestreo de forma intuitiva, que se exploren las técnicas de muestreo e implicaciones del uso en la incógnita x (equis) para encontrar las posibles soluciones.

Actividad II. Resolución de problemas entorno a una incógnita

Por lo que se refiere a este bloque, su ventaja radica en problematizar situaciones en diferentes contextos, ya que principalmente una de las formas de alusión a los saberes intuitivos (según el marco teórico) apela a las características particulares del contexto planteado, por lo que valdría la pena el uso de al menos un par de actividades problemas que fomenten ese momento.

Actividad III. Representación e interpretación en relación con la ecuación y función

En este bloque, se contempla la relación que se establece entre la ecuación y su función asociada en cuanto a las raíces de la función y las soluciones de la ecuación y que puede concluir el estudiante respecto a ello.

Entrevista semiestructurada de las actividades I, II y III

Por último, la entrevista semiestructurada, también llamada mixta o semi-libre, es elaborada como una guía de preguntas donde se enfatiza en ciertos temas y se asegura de

abordar los aspectos más relevantes con respecto a los ejercicios abordados en cada actividad. Sin embargo, la secuencia y formulación de las preguntas puede ir variando a medida que se desee la posibilidad de profundizar sobre las respuestas del estudiante que puedan ser de gran utilidad para alcanzar los objetivos de la investigación.

A continuación, en la tabla 3, se presenta la estructura general del instrumento, la cual, está conformada por las actividades I, II Y III, y su correspondiente entrevista semiestructurada, cada actividad se contempla con un grado de dificultad mayor a la anterior, a su vez se presenta los ejercicios a realizar, adjunto con el contenido matemático y las expectativas de desempeño, en torno a los estándares matemáticos y objetivos estipulados del trabajo.

Tabla 3. *Estructura general del instrumento*

Instrumento	No. Pregunta	Contenido matemático	Expectativa de desempeño
Actividad I	Ecuación. <i>a</i> $x - 3 = 3 - x$	Ecuaciones polinómicas, aproximaciones de solución, tabla de datos, métodos intuitivos, incógnitas o indeterminaciones	Porque, así como lo propuesto en el apartado didáctico, con una estrategia de conteo o reemplazo o combinación, un estudiante podría resolver esta ecuación sin desarrollar un procedimiento algorítmico.
	Ecuación. <i>b</i> $3x + 1 = 3 - 2x$		Este ejercicio, más complejo que el primero, podría permitir que el estudiante haga un análisis de cada una de las partes de la igualdad, obligándolo a hacer una interpretación del signo igual.
	Ecuación. <i>c</i> $x^2 - 9 = 0$		Con un entendimiento del producto de enteros y cómo funciona la operación potencia, algún estudiante podría percatarse de $x = -3$ como una solución de la ecuación.
	Ecuación. <i>d</i> $x^2 + 1 = 0$		Es necesario al menos un ejercicio en el cual el estudiante pueda potencialmente identificar que la ecuación no tiene solución en el conjunto numérico conocido
	Ecuación. <i>e</i> $x^2 - 2x = 1$		Este ejercicio podría resultar en una forma de averiguar formas de solución planteadas por los estudiantes que no anticipemos, podrían salir a la luz rasgos de sus primeras interacciones con las matemáticas.
	Ecuación. <i>f</i> $2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$		Lo que podría esperarse de este ejercicio es que el estudiante pueda concluir que $x = 0$ es solución de la ecuación, pero también que podrían

			existir adicionales, y ver si se basa en algún criterio para dar un estimado de cuantas soluciones más podría haber.
Actividad II	Problema. <i>a</i>	Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos	En este ejercicio busca la relación entre saberes tanto matemáticos y geométricos para estimar la correspondencia de lados de una figura geométrica.
	Problema. <i>b</i>		Este ejercicio podría sacar a la luz momentos o experiencias en las cuales el estudiante, en medio de su cotidianidad, ha hecho uso de estrategias intuitivas de conteo para solucionarlo.
	Problema. <i>c</i>		Con este ejercicio se busca que el estudiante logre atribuir algunas características de la situación problema a la ecuación involucrada de segundo grado, haciendo alusión a sus experiencias cotidianas.
	Problema. <i>d</i>		Este ejercicio, reta al estudiante a que pueda tener alguna percepción sobre las 3 dimensiones, ancho, largo y alto y su relación en función de la incógnita <i>x</i> (equis) y que por lo tanto al realizar el producto entre ellas posiblemente le dé una expresión algebraica y así describir el volumen que se les pide.
Actividad III	Punto. 1	Ecuaciones polinómicas, Funciones, gráficas, aproximación numérica, tabla de datos	En estos dos primeros problemas se realiza un acercamiento preliminar, busca que el estudiante pueda asociar y establecer una relación entre la ecuación y su función y los elementos de los que se componen.
	Punto. 2		Interpretar relaciones funcionales dadas en forma, gráfica y a través de una expresión algebraica y partir de ellas extraer conclusiones acerca del fenómeno que comparten.
	Punto. 3		Identificación de la expresión gráfica de las funciones polinómicas, para analizar sus características más relevantes
	Punto. 4		Construcción de la gráfica a partir de la interpretación adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
	Punto. 5		Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para percibir desde un gráfico la
	Punto. 6		

			construcción de una posible, expresión algebraica.
	Punto. 7		Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante la tabla entre la solución de la ecuación y los puntos de corte de la función con el eje x .
	Punto. 8		Pretende evaluar el desarrollo del reconocimiento grafico de modelos funcionales: primer, segundo y tercer grado e identificar relaciones de dependencia entre la ecuación y la función polinómica.
Entrevista Semiestructurada	10 preguntas aprox. Del cuestionario 1 de la Actividad I	Ecuaciones polinómicas, utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos, Funciones, graficas	La obtención de valores numéricos de una expresión algebraica. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer, segundo y tercer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.
	15 preguntas aprox. Del cuestionario 2 de la Actividad II		Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.
	28 preguntas aprox. Del cuestionario 3 de la Actividad III		Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Fuente: Elaboración propia. (2021)

Por otro lado, y complementando lo anterior se establece la tabla 4, la cual presenta una muestra y da una guía de la teoría implementada en la investigación, acerca de la perspectiva pedagógica de la manifestación intuitiva.

Tabla 4. *Estructura general sobre los saberes intuitivos*

Características comunes de los saberes intuitivos según Pozo y Carretero (1987)
Esponáneas y personales, puesto que surgen de un modo natural en la mente del estudiante como una elaboración propia del sujeto, sin necesidad de instrucción previa.
A menudo implícitas y por lo tanto inconscientes para el propio sujeto.
Persistentes a lo largo de las edades y resistentes al cambio mediante instrucción.
Ubicuas, presentes en todas las áreas, no sólo en las ciencias.
Científicamente incorrectas, ya que su grado de abstracción es limitado y están muy influidas por lo observable.
Incoherentes o contradictorias entre sí. Así actividades o tareas que requieren un mismo tipo de ideas son resueltas empleando diferentes conceptos.

Fuente: intuición en matemáticas: una mirada psicoeducativa. López (2006, P. 29)

De acuerdo con los esquemas expuestos anteriormente se lleva a admitir que, lo instruido surge a partir del marco teórico, el cual, poseen características de lo que se quiere dar a conocer en este trabajo. Tales descripciones van en torno primero, a establecer un acercamiento del estudiante sobre el concepto matemático analizado y segundo, son aquellas ideas sobre los saberes intuitivos, en este caso descritas por Pozo & Carretero (1987) citado en Benlloch (1997) como: “características que sólo trascienden una pequeña parte de lo que significa el saber intuitivo y su implicación en la Educación Matemática” (p.72), lo cual, se profundiza más adelante en el trabajo-

3.3 Propuesta del instrumento

Todo lo concerniente a los formatos de la propuesta del instrumento que comprende, plantillas del estudiante (actividad II, actividad II y actividad III) y plantilla del investigador (cuestionario I de la actividad I, cuestionario II de la actividad II y Cuestionario III de la actividad III) entrevista semiestructurada, se pueden encontrar en el apartado de anexos.

3.4 Metodología

Este trabajo propone un estudio de corte cualitativo-descriptivo e interpretativo del problema presentado que parte de una suposición intrínsecamente relacionada al aprendizaje, y es la existencia de algunos saberes que pueden identificarse como “intuitivos”, las precisiones que se realizan sobre qué son y cómo es la participación de tales saberes dentro de la Educación

Matemática, realizando un estudio de casos con 3 estudiantes de grado undécimo de la educación media.

La estrategia investigativa de este trabajo se enmarca en la revisión documental y busca localizar bases metodológicas y contextual relacionadas a los intereses de la investigación. Estos cimientos permiten que los investigadores realicen aseveraciones críticas de lo consultado y posteriormente de lo analizado. El proyecto consta principalmente sobre, el reconocer y determinar algunas manifestaciones del saber intuitivo y como es tomada su participación dentro del campo de la Educación Matemática, en función de actividades relacionadas al tema que van a permitir establecer el alcance sobre lo investigado. Puntualmente va aplicada a la población del sector estudiantil, esto dado que, así como se ha mencionado anteriormente, las investigaciones previas dan razón para plantear sobre cómo se llevan a cabo actualmente los procesos de enseñanza y que ello resulta en la búsqueda necesaria de una reestructuración desde un punto de vista curricular para el sistema educativo. En este trabajo se han enfocado los esfuerzos en reconocer cómo son estos saberes intuitivos en los estudiantes al ellos intentar identificar el conjunto solución de las ecuaciones polinómicas.

3.5 Implementación

En este acápite, se tendrá en cuenta el universo de estudio, la selección y tamaño de muestra, unidad de análisis y observación, los criterios plasmados en la investigación, que tiene como parámetro un estudio de casos experimental, que:

Consiste en describir y caracterizar una situación o historia individual (i.e. ser humano específico, entidad, organización o institución) cuya particularidad es interesante desde el punto de vista investigativo (...) Esta estrategia es útil cuando se quiere reportar información acerca de creencias, conocimientos, situaciones, acciones o particularidades del caso sin hacer juicios o valorar estos, pero con la intención de obtener resultados teóricos y prácticos útiles para analizar experiencias de otros. (Camargo, 2018, p.66)

3.5.1 Descripción de la población

El marco de la población, conto con la participación de tres estudiantes de grado undécimo de la Educación media y que forman parte de distintas instituciones educativas, en

particular la Institución Educativa la Buitrera y el Colegio Comercial Santa Juana de Arco, de carácter público y privado respectivamente.

A continuación, se presenta una breve descripción general, sobre las instituciones educativas que contribuyeron, he hicieron posible con la intervención de sus estudiantes el desarrollo de esta investigación.

Institución Educativa la Buitrera, es una institución educativa de carácter oficial del sector rural de Santiago de Cali, que ofrece, una educación integral en los niveles de transición, básica, media y programa para adultos, con docentes cualificados mediante una pedagogía flexible; formamos ciudadanos competentes que se integren al mundo profesional, laboral y social.

En el 2025 la institución educativa la Buitrera será reconocida como una institución de calidad, en la formación de personas componentes para lo social, ambiental, profesional y laboral.

Colegio Comercial Santa Juana de Arco, es una institución educativa católica, privada con cobertura modalidad comercial, que cuenta con recursos y medios tecnológicos adecuados a las demandas actuales. Está constituida por una comunidad de educadores capacitados y comprometidos en la formación integral de niños, niñas y jóvenes, que basa su acción en principios, valores humanos y académicos, en concordancia a la identidad colsajarquina, con proyección profesional y social contribuyendo al mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad.

En el 2025 será reconocida como una Institución Educativa en la cual se brinda una formación integral que se distingue por su calidad en los procesos educativos y porque toda labor y desempeño iluminada conduce al desarrollo de las competencias requeridas por la sociedad para que todos los miembros de la comunidad educativa sean gestores y líderes de los cambios sociales necesarios para forjar un excelente futuro profesional.

Con respecto a la selección de los estudiantes, se realizó de manera intencional atendiendo los propósitos del trabajo. Son estudiantes (E1, E2 y E3) de grado undécimo de la Educación media, con edades entre los 15 y 17, de los cuales, 2 son mujeres y 1 hombre, elegidos aleatoriamente por su profesor de matemáticas, para lo cual debían cumplir con las

siguientes características: disponibilidad de tiempo, dispositivo electrónico con acceso a internet estable, cámara, micrófono y la aprobación de los directivos y su acudiente.

3.5.2 Sobre la aplicabilidad del instrumento

El propósito del instrumento diseñado se centra en la recolección de información relevante sobre las manifestaciones, respuestas e interacciones por parte de los estudiantes de grado undécimo de la educación media, relacionado con sus saberes intuitivos en la solución de ecuaciones.

Una vez aplicado el instrumento, se desea cumplir con los siguientes ítems que ayudaran en el desarrollo de la investigación:

- Recolección de información relevante para el desarrollo de los objetivos.
- Análisis de lo recolectado.
- Sugerencias y conclusiones de lo analizado.

3.5.3 Protocolo de la puesta en acto

La propuesta del instrumento se implementó en la modalidad virtual, debido a la emergencia sanitaria que estamos enfrentando actualmente a causa del Covid-19. A través de la plataforma digital Zoom, dividida en tres sesiones para cada actividad, con una duración de 1 hora y media aproximadamente cada una.

Cabe mencionar que cada sesión, es registrada por medio de una opción grabar incorporado en el programa. Esto es informado oportunamente al estudiante como a los o él acudiente, aclarando que es solo con el fin de obtener evidencia contundente que pueda respaldar y aportar a la investigación y no tendrá ningún tipo de repercusión en su proceso académico con su institución educativa, además el estudiante debe tomar fotos o escanear toda evidencia escrita que realizo durante la actividad.

Todas las actividades se realizan de manera individual, durante y al final de la sesión, se realiza una plenaria para discutir las opiniones respecto al desarrollo de las tareas y las estrategias llevadas a cabo por cada estudiante. A su vez, a lo largo de la implementación se vio necesario reformular algún enunciado o pregunta y finalmente el estudiante envía la evidencia escrita de lo realizado.

Lo anterior, va sujeto a un esquema relacionado con el protocolo de investigación, la cual indica la manera de proceder antes, durante y al finalizar la aplicación.

Antes

Se les solicita a los estudiantes ser puntuales con el tiempo acordado en la reunión y tener a mano diferentes implementos, necesarios para realización de una actividad escolar.

Durante

La intervención de la reunión está a cargo de los investigadores: Andrés David Guerrero Moreno y Luis Andrés Beltrán Cerón, responsables de dirigir y mediar la prueba. Ellos, realizan de acuerdo con la actividad, una entrevista semiestructurada, para interactuar con los estudiantes de ser necesario, según como se dispongan las condiciones en los ejercicios y cada punto de la actividad, es presentada tan pronto como el estudiante lo vaya terminando, es decir, una a una, además, las preguntas de la entrevista pueden variar para cada estudiante, conforme a sus respuestas y así interpretar sobre su propia práctica.

Después de la sesión

En esta etapa, los investigadores se centran en las áreas de interés que conduzcan a la comprensión del problema de investigación, a través de la concentración de los datos recolectados y su comparación constante con los objetivos previamente establecidos, para determinar las diferencias y similitudes con el marco teórico existente al respecto.

Por último, precisar de manera sólida, si, se dio respuesta al problema y propósitos definidos en la investigación y proceder a la consolidación de las conclusiones generales y algunas estrategias didácticas, respecto a lo investigado. Debido a que, el análisis de cada caso, implica identificar categorías emergentes relacionadas con el trabajo matemático en contextos culturales diversos, el tratamiento de conexiones matemáticas, el desarrollo de un lenguaje propio y el fomento de la participación respetuosa, solidaria y crítica. Estos elementos se relacionan con la formación académica y ciudadana.

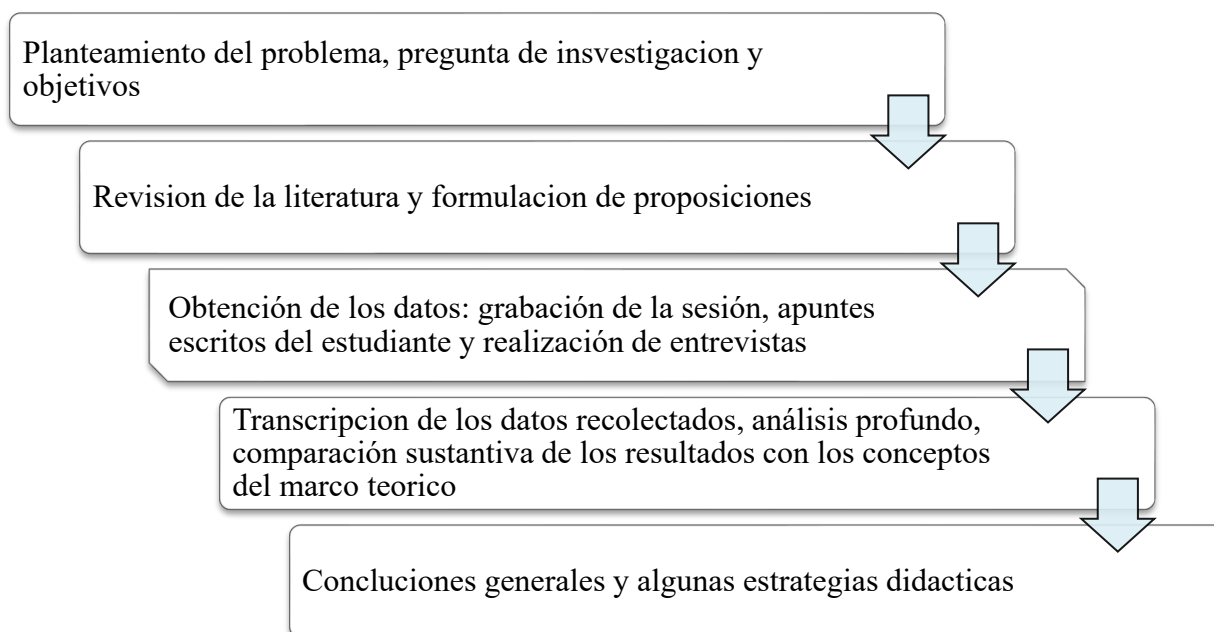


Figura 4. Procedimiento metodológico de la investigación. Elaboración propia. (2021)

3.5.4 Sobre el programa online utilizado para la investigación (ZOOM)

Para la implementación del instrumento y debido a las circunstancias de salubridad vigentes en el año 2020, se decidió hacerlo mediante una plataforma de videollamadas y reuniones virtuales llamada Zoom, la cual ofrece, un servicio de videoconferencia basado en la nube que puede usar para reunirse virtualmente con otras personas ya sea por video o solo audio o ambos, todo mientras realiza chats en vivo, y le permite grabar esas sesiones para verlas más tarde. Además, está disponible tanto para computadores como celulares.

El principal objetivo del uso de la plataforma (en este trabajo), es permitir la interacción más cercana posible desde la virtualidad entre el investigador y el estudiante; la aplicación cuenta con la posibilidad de llamada por audio y video, la opción de compartir pantalla, chat en vivo y otras funciones.



Figura 5. Logo plataforma online Zoom. Fuente: (Google, 2021)

3.5.5 Circunstancias de la implementación

Con respecto a este ítem, hubo varios factores que influyeron con el proceder normal de la investigación, los cuales se tenían contemplados al principio en el plan de trabajo. En primer lugar, el instrumento fue elaborado con el propósito de realizarse de manera presencial, ya que así se podría apreciar adecuadamente cada intención que el estudiante ejerciera para resolver los puntos de la actividad, limito mucho esa parte y también redujo al instrumento, utilizar otras herramientas, como el programa GeoGebra para potencializar la visualización e interacción con algunos ejercicios propuestos. Esto sucede porque los estudiantes únicamente contaban con su celular y la aplicación de la videollamada para atender la solicitud.

En segundo lugar, sobre la interacción comunicativa entre los participantes, al ser las sesiones de manera online, en varias ocasiones hubo interferencia en la conexión lo que provocó grabaciones en algunos momentos sin audio y en el peor de los casos se tuvo que cancelar la sesión y reprogramarla nuevamente, provocando retrasos en el tiempo estipulado de la terminación del trabajo.

3.6 Presentación y análisis de los resultados

A continuación, se presentan los registros y sistematización de las respuestas proporcionadas por los estudiantes (E1, E2, E3) de grado 11° de la educación media, realizando una descripción general de cada uno de los momentos inscritos en las actividades del instrumento, para ello, fue necesario hacer uso de la evidencia escrita y notas de campo extraídas de las reuniones por videollamada en forma de archivos planos. Posteriormente se procede a realizar los análisis de cada estudiante, los cuales, consideran los siguientes criterios de análisis organizados en una rejilla (ver tabla 5), de acuerdo con lo expresado en el marco conceptual de referencia, citado en el capítulo 2.

La rejilla cuenta con tres enfoques diferenciales, enlazado al marco teórico y permite la obtención y análisis de los constructos personales sobre cada estudiante de su experiencia de lo que conoce, interpreta, procede y argumenta, las actividades del instrumento en torno al concepto matemático involucrado en la investigación. La estructurada orienta a explicitar las ideas que el estudiante ya tiene adquiridas, y ayuda a los investigadores a manipular la información recolectada y organizarla de manera conveniente, para tratar de dar respuesta a los objetivos propuestos anteriormente.

Tabla 5. *Rejilla de análisis*

Categoría	Subcategoría	Descripción	Criterios
Apropiación del Contenido Matemático	Actividad I: <i>Concepto y resolución de ecuación polinómica</i>	Explorar aproximaciones sobre la solución de la ecuación, las técnicas de muestreo e implicaciones del uso de la incógnita o indeterminación.	-La coherencia entre las respuestas planteadas por los estudiantes y las instrucciones que hacen parte del instrumento. -Las acciones del investigador en respuesta a las ideas matemáticas expresadas por el estudiante. Propia manifestación de los estudiantes.
	Actividad II: <i>Resolución de problemas entorno a una incógnita</i>	Se logre evidenciar la relación entre la ecuación y unos problemas de contextualización la cual permite darle sentido a la incógnita. Es apreciable como el estudiante es capaz de reaccionar respecto al concepto de incógnita.	
	Actividad III: <i>Representación e interpretación en relación con la ecuación y función</i>	se contempla la relación que se establece entre la ecuación y su función asociada en cuanto a las raíces de la función y las soluciones de la ecuación y que puede concluir el estudiante respecto a ello.	
Sobre la Manifestación Intuitiva ⁱ	<i>ligada al tanteo</i>	Se refiere a la intuición sensible que, unida a la percepción, memoria, experiencia e información referente a ecuación polinómica, permite aprehender sobre el objeto matemático de manera rápida. Por ejemplo, En algunas ecuaciones, permiten que el estudiante realice aseveraciones evidentes, sobre al menos un número que remplace a la incógnita y sea solución de la ecuación. Se trata de una intuición sensible basada en percepción y experiencia, que permite concluir en esta afirmación, que es verdadera, aunque no siempre confiable.	Identificar a través de la evidencia escrita y audiovisual, sobre una acción o proceso mental por parte del estudiante que muestre ciertas creencias, en el resultado de una interpretación conceptual de la actividad, ejercicio o problema propuesto en la aplicación del instrumento, especialmente si estos procesos mentales no muestran un aparente ligue con métodos o algoritmos tradicionales escolares.
	<i>De cohesión primaria</i>	Se evidencia en la comprensión rápida de relaciones, como por	

		ejemplo en cadenas deductivas, aunque escapen detalles y pasos. Depende de las primeras experiencias previas de las matemáticas y la familiaridad en la estructura que la compone. Se relaciona con lo obvio. Un ejemplo, cuando el estudiante realiza una afirmación evidente, sobre algo explícito en el ejercicio, pero esto, no tiene algún impacto sobre lo preguntado o sobre un acercamiento sólido de cómo resolver el ejercicio.	
	<i>De cohesión interpretativa</i>	Se refiere no sólo a la asociación de fórmulas con sus significados, sino también a relacionar asuntos aparentemente inconexos. Por ejemplo, los problemas, brinda al estudiante la capacidad de discriminar datos y construir vínculos lógicos que encamine a determinar la solución más acertada, de acuerdo con la información brindada en el ejercicio, las capacidades y estrategias en cada estudiante juega un papel primordial en lograr construir conexiones apropiadas para encontrar la solución. como si la intuición fuera capaz de realizar esa extensión. Este proceso, debe ser comprendido lejos de la intuición y asumiendo que se trata de una convención de la comunidad matemática (Martínez, 2005).	
	<i>representación espacial</i>	Se refiere a representar o imaginar objetos ausentes, de construir, imágenes o diagramas. La intuición espacial es importante en la enseñanza. La matemática se apoya en la intuición visual y	

		geométrica, apoya su razonamiento en ellas, pero no puede ser reemplazada por ellas. Por ejemplo, se puede pensar en la construcción grafica de una función de acuerdo con las características que el estudiante asume como relevantes en la ecuación. Esto lleva a tener un significado intuitivo y subjetivo de percibir la representación que se realiza a una función por medio de la ecuación, pudiendo incluso manipular estos objetos y trabajar con ellos.	
	<i>creadora</i>	Permite inventar, generar nuevas ideas. Este proceso, generalmente es borrado al final de la teoría. No se presentan en ese momento las conjeturas previas al resultado obtenido. La imaginación creadora no puede existir si no se sustenta en conocimientos previos en los que ya actuó la razón. En oportunidades se hace referencia a la intuición como “corazonada científica”. Ejemplo, se atribuye cuando el estudiante, realiza algún procedimiento que es válido para él, pero que, en la teoría del campo de las matemáticas, puede no ser así, no obstante, puede pretender realizarlo, pero no puede recibir algún sustento razonable sobre los pasos desarrollados en el ejercicio.	
	<i>Acotada</i>	Se concede como el que engaña y permite llegar a resultados incorrectos. El sentido común no es estático, evoluciona enriqueciéndose con el estudio de la ciencia. La propiedad transitiva de la relación de igualdad, parece ser una revelación del sentido común, si bien Piaget opinó que no era innata, sino construida.	

		Ejemplo, cuando el estudiante al momento de realizar el ejercicio comete un error, que en el momento no es evidente para él, pero a medida de avanza en la actividad le va encontrando sentido a lo que realiza y por consiguiente cambia de opinión respecto a lo realizado anteriormente.	
Desempeños y Competencias del Pensamiento Matemático	<i>Uso de conceptos y procedimientos apropiados de acuerdo con el currículo escolar (pensamiento variacional y sistemas algebraicos)</i>	Permite opinar si el estudiante, cumple con unas expectativas académicas comunes de calidad; expresada a través de la aplicación del instrumento (pruebas, preguntas, tareas u otro tipo de experiencias), que permitan evaluar internamente si satisface con el proceso, no alcanza o supera esas perspectivas por parte del investigador.	-Se identifica un momento del PE ⁱⁱ , una acción observable del estudiante, es decir, inferir a partir de sus acciones describir rasgos sobre las nociones matemáticas planteadas en el instrumento. -Se reconoce la idea matemática ⁱⁱⁱ , al momento de inferir sobre alguna actividad planteada del instrumento.

Fuente: elaboración propia (2021).

ⁱ Se adapta y caracterizan algunas intuiciones recreadas por los autores Booth (1983). Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalized arithmetic) & Crespo (2008). Intuición y Razón en la Construcción del Conocimiento Matemático

ⁱⁱ PE se lee pensamiento matemático del estudiante.

ⁱⁱⁱ Las ideas matemáticas (incluye representaciones, imágenes, concepciones, procedimientos erróneos).

3.6.1 Resultados de la actividad I (AI): Concepto y resolución de ecuación polinómica

Esta sección, se compone de la transcripción obtenida después de su aplicación a los estudiantes (E1, E2, E3), y para su abstracción, es dividida en momentos que el investigador considera relevantes y permiten aportar en la investigación. Cabe resaltar que, la transcripción no está completa, solo se expone en este apartado, lo que realmente contribuye en el proceso del análisis.

Estudiante 1 (E1)

Estudiante de grado 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración 1: 15:00; Día: 06/07/2020; Plataforma online: Zoom

E1: Primer estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

Momento 1.

I: a mí me dicen, “no, es que tal valor es solución de esa ecuación” ¿qué es lo que me están queriendo decir ahí? ¿Qué significa eso?

E1: que ese es el valor de x (Equis) para que se cumpla tal resultado.

Actividad #1

A. $x-3 = 3-x \rightarrow$ teniendo en cuenta
 Como están organizados
 los valores, entero
 de que no importa el
 orden en el que se
 encuentren los valores, en
 ambos casos el resultado
 sería el mismo

$x=3$

$3-3 = 3-3$
 $0 = 0$

$x=2$

$2-3 = 3-2$
 $-1 = 1$

Figura 6. P1-EA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 2.

E1: Ah vale, por ejemplo, en la primera pues entiendo que (...) está queriendo decir de que no importa como organicemos ahí esos dos valores, va a dar lo mismo. Entonces digamos le voy a dar un valor a x , digamos 2 y en los dos casos me tiene que dar el mismo resultado (*señala haciendo referencia a la igualdad en la ecuación tanto en la derecha como la izquierda*) I: ok, entonces tú me dices de ¿que posiblemente 2 es una solución para esa a ?

E1: ¡aja!

Momento 3.

I: vale, ¿tú crees que de pronto puede haber otro valor diferente a 2, que pueda servir para esa ecuación?

E1: no sé, sería 3 también, en los dos casos daría 0 (cero)

I: ok, vale y ¿crees que habría más o solamente son esos dos posibles valores?

E1: si yo creo que puede haber mas

I: De alguna manera tú, en que te fijas para pensar que de pronto hay más soluciones, que no solamente se quedan esas dos, ¿en qué te fijas?

E1: de pronto pensando en otro número, eeh pensando en el momento de hacer la resta {no}, eeh pensando en que resultado daría en ambos, pero veo que afectaría en los signos en cada lado.

8. $3x + 1 = 3 - 2x$

→ Considero que no hay una posible solución, siendo -4 el valor que más se acerca

$$\begin{aligned} 3(-4) + 1 &= 3 - 2(-4) \\ -12 + 1 &= 3 + 8 \\ -11 &= 11 \end{aligned}$$

Figura 7. P1-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 4.

E1: ah listo (.) (*realiza apuntes en su hoja*) (300) En la segunda no encuentro digamos una conexión entre las dos, ósea pensé que iba a ser parecido a la primera que no importaba como organizara los valores iban a dar lo mismo, pero en este no lo encuentro.

Momento 5.

E1: vale (.) (*escribe en su hoja*) (420) vale creo que ya la encontré, creo que sería -4 (Menos cuatro)

I: ok, bien ¿Qué te llevo a pensar que -4 es una candidata para ser solución?

E1: teniendo en cuenta, yo lo hice remplazando el valor de x por -4, entonces al momento de multiplicar 3 por -4 eso daría -12 y si le sumamos 1 daría -11 y al otro lado sería mmm -2 por -4 daría 8 positivo y a eso le sumamos 3 daría 11 ahí lo único diferente sería el signo en un lado daría -11 y el otro lado daría 11 positivo

Momento 6.

I: (...) o sea, ¿cree que sí o sí debe tener solución? o ¿crees, de pronto, existe la posibilidad que no tenga solución?

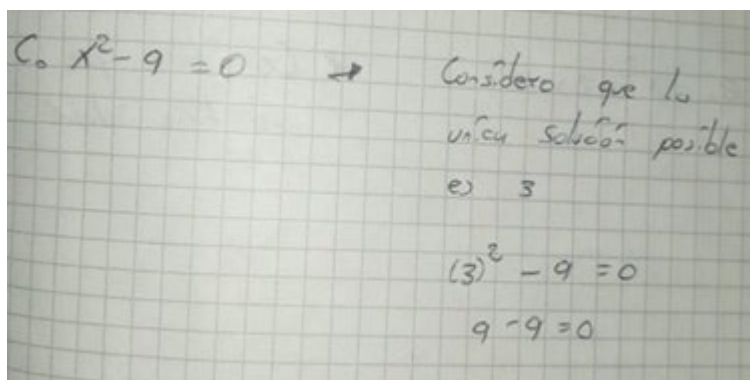
E1: mmm yo creo que no, no, no creo que tenga posibilidad de que haya solución

I: ósea, tú dices que, si o si debe tener una solución, si te entendí bien

E1: no, no, no, ósea eeh mmm creo que no tiene solución, creo que pues el valor más acertado hasta ahora es el -4 pero pues no es lo mismo porque pues los signos son contrarios y pues a simple vista creo que no encuentro otro valor que dé el mismo resultado en ambos casos

I: Entonces ¿crees que es posible que no tenga solución?

E1: exacto



Handwritten mathematical work on grid paper. The text reads: $C_0. x^2 - 9 = 0 \rightarrow$ Considero que la única solución posible es 3. Below this, the verification is shown: $(3)^2 - 9 = 0$ and $9 - 9 = 0$.

Figura 8. P1-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 7.

I: vale, bien vamos entonces con la siguiente {listo} (refiriéndose a la ecuación c de la actividad)

E1: vale, (.) (*Escribe en sus apuntes*) (420) En esa creo que solamente habría una posible solución sería el 3

I: ok, bien eeh entonces ¿crees que habría otro valor o estás seguro que no hay otro valor?

E1: si, yo creo que solamente ese valor no hay más valores

I: Vale, excelente, mmm, ¿qué pensaste o que te llevo a pensar que 3 es un buen candidato para ser solución?

E1: porque pues teniendo en cuenta que el x esta elevado a la 2 entonces al momento de elevar el 3 a la 2, daría como resultado 9 positivo, entonces al restarle el -9 que está ahí en la formula daría como resultado 0

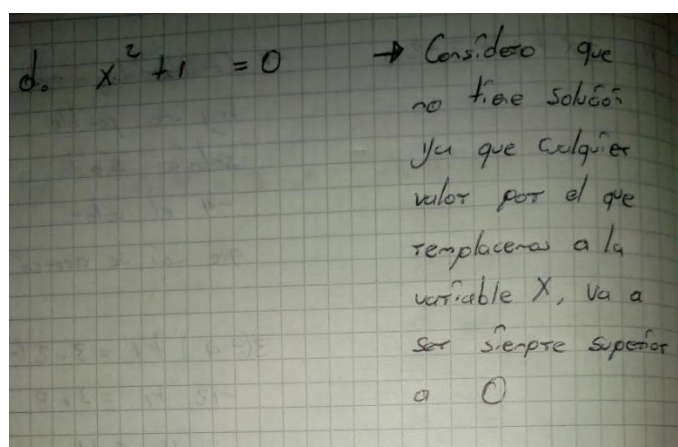


Figura 9. P1-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 8.

E1: Vale (.) (*escribe en sus apuntes*) ... esta creo que no, no hay ningún valor que concuerde para que de 0

I: ¿Por qué piensas eso?

E1: creo que sea cual sea el número, sea digamos positivo o negativo, en el caso que sea negativo al elevarlo al cuadrado va a dar un número positivo y al momento de sumarle 1 el no va a dar cero. Entonces sea cual sea el número como mínimo va a dar 1 no va a ver ninguno que sea cero

I: Entonces tú conclusión respecto a esta es ¿que no tiene solución?

E1: ujum si, si señor

$x^2 - 2x = 1$
 $\rightarrow$ Considero que no tiene solución

Figura 10. P1-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 9.

E1: (...) (*escribe en su hoja*) (4) creo que en esa tampoco ningún valor corresponde a x para que el resultado sea 1

I: ok, bueno y si me pudieses darme no se de pronto un intervalo o decirme por lo menos algo sobre esa x . A lo que me refiero con decirme algo es como no se ¡ah! Por ejemplo, en una ecuación cualquiera yo podría decir no, no sé cuál sea el valor de x , pero sé que x debe ser positivo, no sé tal vez o a que conjunto numérico pertenece o cuantas soluciones hay, en que te fijarías

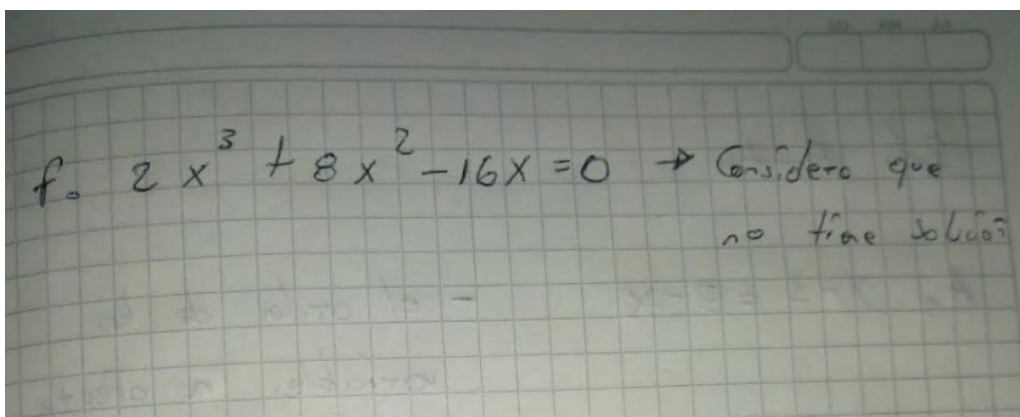
E1: yo creo que al igual que el otro que hicimos ahorita atrás el valor tendría que ser negativo si yo creo que tendría que ser negativo el valor de x

I: ¿Por qué tendría que ser negativo que te lleva a pensar eso?

E1: aah pues para que, de el resultado positivo, como es el 1 positivo tendría que ser negativo también para que los dos negativos se anulen y de positivo el resultado. ah no positivo creo que también sería lo mismo, sí, me retracto si tiene que ser positivo para poder efectuar una resta y buscando más o menos entre esa resta ese resultado que de 1

I: ok, eh listo digamos que hubiésemos encontrado un valor para x ¿crees que habría otros valores? ¿crees que hay múltiples valores de x que satisface esa ecuación o solamente debe haber 1 o ninguno?

E1: no, creo que esta complicado que haya solución, creo que no hay solución para ese no hay ningún valor, creo



Handwritten text on graph paper: $f = 2x^3 + 8x^2 - 16x = 0 \rightarrow$ Considera que no tiene solución

Figura 11. P1-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 10.

E1: vale (...) (*escribe en su hoja*) (300) mmm no, hasta ahora ningún resultado, ningún valor de x me da cero

I: mmm, ok, nuevamente podrías darme algún intervalo de confianza o decirme algo sobre esa x , como te decía de pronto no sé, puede ir de tal a tal valor o el conjunto numérico al que puede pertenecer {tal vez}

E1: creo que estaría entre el -2 y 2, creo que en ese intervalo de valores

I: ok, ¿por qué piensas entre -2 y 2?

E: porque en ese intervalo se ve más el resultado, ósea de pronto jugando un poquito con los signos se podría lograr ese resultado, tal vez con un -1, porque por ejemplo cuando lo remplace la x con el -2, llego a un punto donde me quede con -16 más 32 más 32, entonces de pronto jugando con los signos de pronto anular esos dos 32 y que quede 16 y -16 y de pronto ahí, tal vez se podría lograr el resultado quede cero.

Momento 11.

I: ok, de pronto crees que ese posible valor que hablas que esta entre -2 y 2, crees que es único o de pronto habrá otro valor o más valores que haga que todo eso que este ahí de cero

E1: creo que es único, solamente hay uno

I: ¿Por qué crees que podría ser único y que no hubiese otro?

E1: porque, mmm hasta ahora no he encontrado varios, ósea creo que solamente es uno, porque el intervalo es muy pequeño y si es muy pequeño creo que solamente sería uno, creo que entre ese intervalo no habría varios

Preguntas adicionales:

Momento 12.

I: (...) ¿crees que de pronto en algunas de las ecuaciones mirándolas por encima mmm algunas de esas ecuaciones tengan soluciones que no sean enteras ósea que pertenezcan a otro conjunto numérico?

E1: eeh no, creo que el resultado tendría que ser entero, el valor de la x creo que tendría que ser un valor entero

I: para cualquiera de las seis ecuaciones

E1: sí, creo para cualquiera de las seis pues porque teniendo en cuenta que los otros valores son enteros al remplazarlo por el valor de la x también tendría que ser un valor entero

Momento 13.

I: (...) vi que en algunas ósea creo que únicamente en la primera ecuación propusiste dos soluciones diferentes eeh en las demás proponías una sola solución o que la ecuación no tendría solución. Viéndolas ahorita todas y con base en lo que has dicho ¿de qué crees que depende que una ecuación tenga una sola solución o que tenga más de una solución? Tú que piensas

E1: creo que depende del exponente que tenga la variable, por ejemplo, en el caso de la c , la d , mejor dicho, de la c en adelante la x tienen exponentes creo que eso influye bastante en los numero de soluciones de las posibles soluciones que tenga esa ecuación

I: pero dependería ¿cómo?, en ¿que influye el exponente, exactamente?

E1: creo que afectaría en el sentido que digamos si un valor x se eleva a dicha cantidad al momento de efectuar las operaciones secundarias que aparecen ahí, digamos la resta y la suma, tendríamos que jugar, digamos que se reduce el intervalo de posibles soluciones, creo yo, el hecho que tenga varios exponentes reduce las posibilidades de las soluciones.

2da Parte

A. $X-3=3-X$ - el orden de las variables no afecta el resultado, siempre

$X=4$ y cuando $X=3$

$$X-3=3-X$$

$$4-3=3-4$$

$$1=-1$$

$$X=3$$

$$3-3=3-3$$

$$0=0$$

Figura 12. P2YP3-EA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 14.

E1: vale (.) (revisa sus apuntes) (...) creo que hay varias cosas que dieron diferentes, en la a por ejemplo del primer punto, me dio lo mismo pues porque tuve en cuenta que me fijé en las mismas cosas en los dos puntos; en el segundo punto pues no encontré otra manera de resolverlo.

$$B. 3x+1=3-2x$$

$$3x+2x=3-1$$

$$5x=2$$

$$x=\frac{2}{5}$$

Figura 13. P2YP3-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 15.

I: vale, y en la b hay una diferencia, inicialmente habías dicho que -4

E1: sí, un solo posible valor y era porque yo (...) (sin audio) ...

I: de 2/5 a -4

E1: creo que se debe al enfoque, en el primer punto me enfoque solamente en remplazar valores de x y en este digamos que relacione los que tenían x y los que no y los separe y los resolví por separado

$$\begin{aligned} \text{C. } x^2 - 9 &= 0 \\ (x + 3)(x - 3) \\ x + 3 &= 0 & x - 3 &= 0 \\ x &= -3 & x &= 3 \end{aligned}$$

Figura 14. P2YP3-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 16.

I: (...) habías dicho que pensaste en 3 como un candidato

E1: si de hecho yo había colocado que era una sola solución, pero en la segunda parte me dan dos soluciones que puede ser 3 y -3

I: ok que piensas de ese -3 nuevo ahí

E1: que se me escapó en la primera, si también creo que al momento de remplazarlo también da cero

$$\text{d. } x^2 + 1 = 0$$

Figura 15. P2YP3-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 17.

I ok, bien y la d

E1: la d no la pude hacer

I: ok, que te paso con la d, con que tuviste problema

E1: con la d no sabía que método emplear, no recuerdo bien, no se puede aplicar la cuadrática y ni el caso de factorización y no recuerdo cómo resolver eso

$$e. \quad x^2 - 2x = 1$$

$$(x - 2)(x + 0)$$

$$x - 2 = 1 \qquad x + 0 = 1$$

$$x = 1 + 2 \qquad x = 1 + 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Figura 16. P2YP3-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 18.

I: (...) ok en la e, sino estoy mal habías propuesto que no tenía solución

E1: en la e dije que no había solución, pero en la segunda me dio que tiene dos soluciones que son 3 y 1

I: qué opinas de eso, que crees que te faltó mirar para haber llegado a la conclusión que no tenía solución, pero luego que si había soluciones

E1: yo creo que simplemente efectuar un procedimiento, en este casi hice factorización y en la primera falto fue eso factorizar.

$$f. \quad 2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$$

$$x^2(2x + 8) - 16x$$

Figura 17. P2YP3-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Preguntas adicionales:

Momento 19.

I: (...) Ahora a gran escala que conclusión podrías sacar en ese contraste entre todo lo que pensaste al inicio y lo que realizaste en la segunda parte, todo relacionado con lo que te pregunte

E1: yo creo que para lograr solucionar en este caso las estas ecuaciones es necesario efectuar los diferentes procedimientos que existen y no hacerlo como los que hicimos la primera vez de tratar de darle un valor simplemente a x para que dé un valor más exacto

Momento 20.

I: vale, al inicio te había dicho 2 preguntas, la primera era sobre cómo eran las soluciones que al inicio todas las soluciones que me habías propuesto eran enteras, pero ahora que soluciones la ecuación b en el segundo punto de dio $2/5$, ¿Por qué crees que paso eso?

E1: porque no tuve en cuenta el hecho de efectuar un procedimiento antes, simplemente como dije ahorita me enfoqué en dar un valor a x y tratar de resolver en cuanto a eso, pero pues ya efectuando una operación ya nos damos cuenta de que estaba errado la primera vez

Momento 21.

I: Tú me habías dicho que notabas que entre más grande fuese el exponente más restringido es la cantidad de soluciones de una ecuación ¿Qué opinas ahora, sigues pensando lo mismo o crees que depende de otras cosas? De las ecuaciones que solucionaste y no pudiste antes

E1: yo creo que también estaba equivocado, porque pues en la primera que tenían exponente dije que tenía una solución y aquí me di cuenta de que tenía dos posibilidades, dos posibles soluciones

I: ¿esta es la última pregunta, mira la última ecuación cuantas soluciones crees que tiene esa ecuación a pesar de que no sepas cuales son o si crees que no tiene solución?

E1: pues sinceramente no sabría decir si tiene solución, yo creo que sí, si teniendo en cuenta el exponente teniendo en cuenta la lógica, en el caso cuando solamente no tiene exponente tiene una solución, cuando tiene 2 en se casó nos dio dos soluciones yo creo que en este caso habría tres posibles soluciones

Estudiante 2 (E2)

Estudiante de grado 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración 0:52:00; Día: 10/07/2020; Plataforma online: Zoom

E2: Segundo estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

Momento 1.

I: Para comenzar, me gustaría preguntar ¿qué entiendes o sabes sobre ecuación?

E2: según lo que yo he visto, es un término algebraico que contiene letras y números, pues para mí es eso.

P1, EA

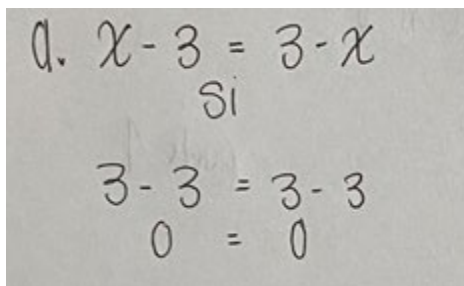

$$\begin{aligned} 1. \quad x - 3 &= 3 - x \\ \text{Si} \\ 3 - 3 &= 3 - 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Figura 18. P1-EA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 2.

I: Entonces mirando la primera ecuación, a simple vista me puedes decir ¿si esta ecuación tiene solución?

E2: Es que se me asemeja como a un rango o a un dominio

I: Pero no, solamente dime crees que si tiene o no solución según lo que tú ves

E2: creo que no tiene solución, porque es como la muestra de una propiedad

Momento 3.

E2: o sea yo creo que, en la a, no tenía la respuesta en el momento porque no me acordaba del concepto que me diste que decía que debe de dar 0 (cero) en un lado como en el otro, algo así más o menos, entonces x tiene que valer 3 (tres) en ambos casos.

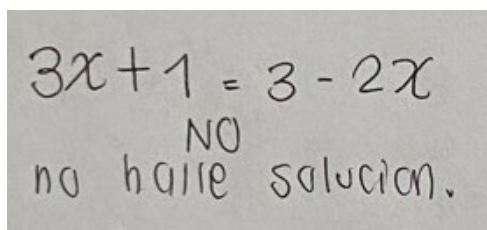

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 3 - 2x \\ \text{NO} \\ \text{no tiene solucion.} \end{aligned}$$

Figura 19. P1-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 4.

I: Listo, entonces con la segunda con la b, a simple vista crees que esta si tiene solución o no tiene solución

E2: Yo creo que esa si tiene solución (habla en voz baja), porque sería sumar los números y se pasan las variables

Momento 5.

I: Y esta ecuación, digamos tú me podrías decir cuantas o si tiene solo una o varias soluciones, ¿Cuántas creerías que tiene?

E2: Pues, ahí hay dos extremos; es que te lo juro que este tema lo vi hace mucho tiempo, lo de los monomios y polinomios y no me acuerdo nada.

I: Tranquila, esta primera parte es solamente que tú me hables y me digas lo que logras entender sobre la ecuación.

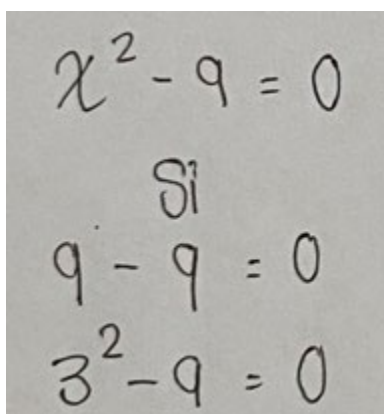
E2: Ah vale, creo que es como igualar, que de aquí como de acá (Señalando los extremos de la igualdad en la ecuación), creo que no tiene solución porque acá va dar $4x$ y acá va a dar 1

Momento 6.

E2: pues, para que de cero...

I: no, digamos que, en la b, usted me dijo que posiblemente no tiene solución, porque se te ocurrió decir eso

E2: por los signos y por el resultado, me parece que no concordaba y me llevo a pensar que no tenía solución.



The image shows a piece of paper with handwritten mathematical work. It contains three equations written in black ink:

$$x^2 - 9 = 0$$

Si

$$9 - 9 = 0$$
$$3^2 - 9 = 0$$

Figura 20. P1-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 7.

I: Listo entonces con la c, en la c crees que esta ¿si tenga solución?

E2: Si

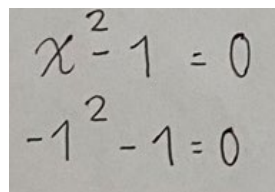
I: Y cuantas soluciones podría tener esta ecuación, cuantos números

E2: yo creo que una, seria 3 (Tres) elevado a la 2 (dos) que es 9 (nueve) y $9 - 9$ (nueve menos nueve), 0 (cero).

Momento 8.

I: ... ¿Por qué diste esa respuesta a la ecuación?, cómo lograste evidenciar las soluciones, que te parecieron las ecuaciones

E2: En esta, porque aquí si vi de una manera más inmediata el número que necesitaba, y que me dé como resultado cero, la potenciación es más fácil hallar el resultado.



The image shows two handwritten equations on a piece of paper. The first equation is $x^2 - 1 = 0$ and the second equation is $-1^2 - 1 = 0$.

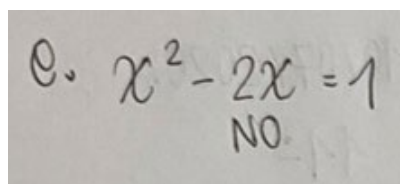
Figura 21. P1-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 9.

E2: En la d seria, si también tiene solución

I: Vale y cuantas soluciones crees que tenga o que rango entre cuantos números esta la solución de esta ecuación

E2: yo creo que el único número que seria es el 1, porque uno elevado. sí 1.



The image shows a handwritten equation on a piece of paper: $0. x^2 - 2x = 1$. Below the equation, the word "NO" is written.

Figura 22. P1-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 10.

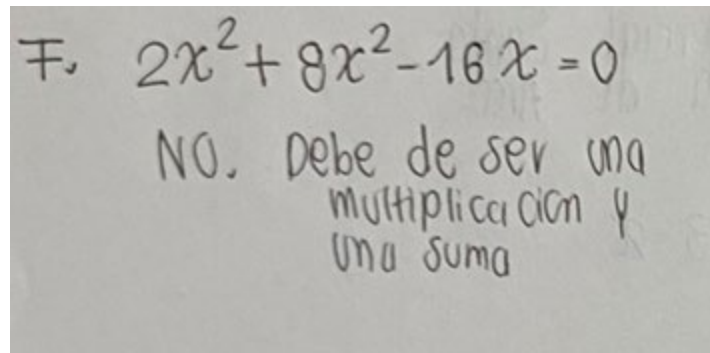
I: y para la e, cuantas crees

E2: para la e, también 1 (uno), no espérame, esta elevado a la 2 (dos)..., si 1 (uno), no, no es que esta elevado a la 2 (dos) y para que dé 3(tres) un número menor... mmm no, creo que no tiene solución.

Momento 11.

I: listo y en las ecuaciones e, usted me dijo que no tenía solución, por qué crees eso

E2: porque en la e, la potencia esta elevada a la 2, ósea x esta elevada a la 2 y pues para encontrar un número que restado 2 me diera 1 (uno), el 3 (tres) seria, pero $3 * 3$ es 9 (nueve), no 3



F. $2x^2 + 8x^2 - 16x = 0$
NO. Debe de ser una multiplicación y una suma

Figura 23. P2-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 12.

E2: Y la última, creo que no tiene solución porque tendría que ser $2 * 8$ para que se cumpla

I: (...) ¿por qué crees eso?

E2: En la f, creo que en vez de suma podría ser una multiplicación

I: Vale, pero crees que tiene o no tiene solución

E2: no tiene solución, porque si fuera seria 16 y $16 - 16$ seria 0 (cero)

I: listo, así viendo las ecuaciones como determinas que esa ecuación ¿no tiene solución o que si tiene soluciones?

E2: Como te decía, no recuerdo lo de operar monomios o expresiones, pero lo estoy haciendo, así como sumando y pues acá para que de 16 tiene que ser $2 * 8$ y no $2 + 8$

Preguntas adicionales:

Momento 13.

I: En las ecuaciones he observado hasta ahora varios factores, quiero resaltar cuando propones soluciones, siempre han sido números enteros, ¿por qué? No pueden ser otros números mirar otras posibilidades es decir una fracción o números negativos, por ejemplo

E1: aah si, ahora que usted lo dice pues podría ser, más que todo con los negativos por ejemplo en la c que seria -3 y también funcionaria, entonces no sería una solución sino 2, sino que yo miro y veo que la primera se resuelve así rápidamente entonces pienso que las demás deberían ser casi igual y cuando no es así no entiendo bien que hacer.

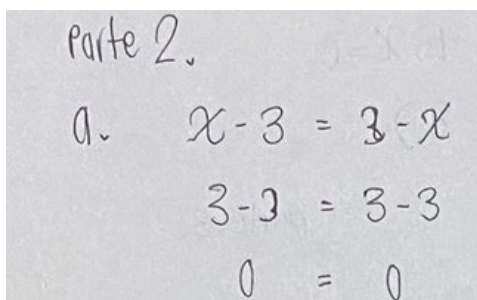
Momento 14.

I: entonces para las seis ecuaciones pensaste así

E1: sí. creo, para las seis pues porque teniendo en cuenta el anterior los valores son enteros que se me dieron anteriormente y al yo remplazarlo por el valor de la x pues me daba

I: ... ¿crees que la ecuación depende de algo para que tenga una sola solución o varias soluciones, es decir existe algo dentro de la ecuación que pueda influir en el número de soluciones?

E1: yo creería que si, por ejemplo, en la cantidad de x que tenga la ecuación, es la x que está al lado de los números si hay dos x entonces habría dos soluciones y así, pero pues no sé, o también el exponente, pueda influir, tal vez



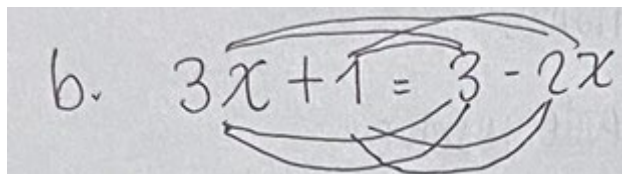
parte 2.

$$\begin{aligned} a. \quad x - 3 &= 3 - x \\ 3 - 3 &= 3 - 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Figura 24. P2YP3-EA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 15.

E2: listo, en esta primera la realice igual, no encuentro como otra forma de hacerla, encontré la solución inmediatamente ya que no sé, era evidente cuando la vi que era 3 y pues me da 0 (cero), entonces creo que está bien.



The image shows a handwritten equation labeled 'b.' which is $3x + 1 = 3 - 2x$. There are several curved arrows drawn around the equation, indicating the steps to isolate the variable x : one arrow from the $+1$ to the right, and another from the $-2x$ to the left.

Figura 25. P2YP3-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 16.

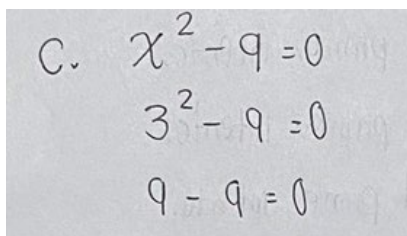
E2: no, intente como multiplicar, pero no sé si se podía

I: ¿cómo así multiplicar?

E2: si es decir multiplicar cada numero de la derecha con los de la izquierda de la igualdad, pero creo que no está bien y la deje así, no pude encontrar la solución

I: ¿Qué te llevo a pensar eso?

E2: pues no sé, creo que se me hizo semejante cuando uno factoriza que al hacer distributiva la expresión se separa y se puede resolver más fácil, pero no sé si se podía con la igualdad, la verdad no me acuerdo



The image shows three handwritten equations labeled 'c.':
 $x^2 - 9 = 0$
 $3^2 - 9 = 0$
 $9 - 9 = 0$

Figura 26. P2YP3-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

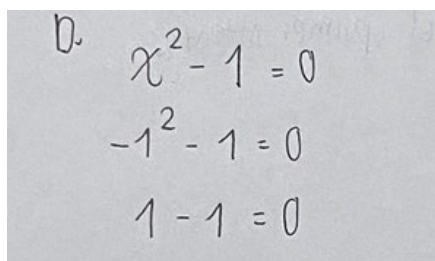
Momento 17.

I: vale, y en la c ¿Qué hiciste?

E2: igual que en la anterior, con el 3 positivo, pero como te comentaba anteriormente el 3 negativo también sirve ya que negativo por negativo da positivo y se resta con el -9 y da cero, pero la hice también como la anterior

I: entonces para ti cuantas soluciones podría tener esta ecuación

E2: pues tendría 2 (dos), una negativa y la otra positiva con el número 3 y ya



Handwritten mathematical work showing three equations:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$-1^2 - 1 = 0$$
$$1 - 1 = 0$$

Figura 27. P2YP3-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 18.

I: vale, y que hay de la d

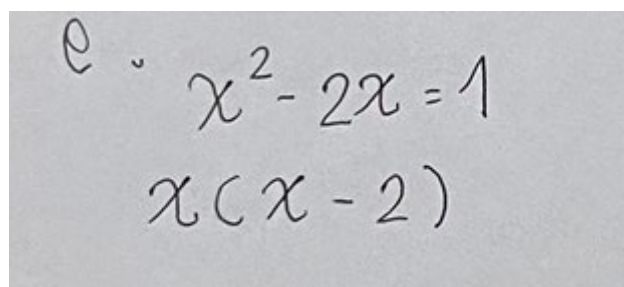
E2: aquí hice lo mismo solo que utilice a -1, pero también sirve el 1 ya que se multiplica y positivo por positivo da positivo entonces también se puede restar con el -1 y da cero

I: y por qué no lo realizaste con los dos números

E2: tenía que hacerlo así, perdón no sabía pensé que con una estaba bien

I: si, siempre y cuando pensaras que solamente había una, pero si encontrabas más también las podías anotar, pero ya déjalo así

E2: ah, bueno señor



Handwritten mathematical work showing two equations:

$$x^2 - 2x = 1$$
$$x(x - 2)$$

Figura 28. P2YP3-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 19.

I: y como te fue con la e

E2: la verdad traté de factorizarla, pero no supe que más hacer de ahí no me acuerdo bien. no recuerdo bien los métodos que podría utilizar, sé que tiene solución, pero no quisiera adivinar habiendo algo que si me pueda dar la respuesta como es, sino que enserio no me acuerdo, creo que es la fórmula cuadrática pero no me acuerdo como es, la estudiare.

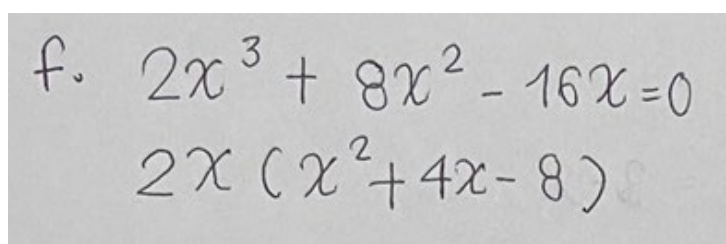

$$\begin{aligned} f. \quad & 2x^3 + 8x^2 - 16x = 0 \\ & 2x(x^2 + 4x - 8) \end{aligned}$$

Figura 29. P2YP3-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 20.

I: bueno, tranquila y con la f como te fue

E2: igual que la otra, trate de factorizar para que el exponente fuera más pequeño es decir 2(dos), pero como le digo no me acuerdo y pues debo estudiar la formula cuadrática porque creo que seguiría eso, pero no se

I: listo no hay problema

Estudiante 3 (E3)

Estudiante de 11^o de la Institución Educativa la Buitrera

Duración 1: 08:32; Día: 21/07/2020; Plataforma online: Zoom

E3: Primer estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

Momento 1.

I: ¿Puede ser cualquiera? (refiriéndose al valor que toma la variable “x”) O sea, yo puedo decir "Este número de aquí (señalando la variable) es 100, porque yo lo digo" o eso es...

E3: Ah no, claro que no.

I: Sí, ¿Qué se tiene que cumplir? para...

E3: ¿Qué se tiene que cumplir...? Resol... ¿Cómo así?

I: O sea, ¿aquí puede ir cualquier número, aquí en la x ?

E3: No porque todo depende de lo demás.

I: Todo depende de lo demás, y ¿Qué significa que dependa de lo demás?

E3: No sé...

I: Tú me dices que uno no puede poner cualquier número aquí. ¿no?

E3: Ajam

I: Eso supone que debe haber cierto número o algún número, que tenga que ir aquí. ¿Eso de qué depende?

E3: Del resultado de la otra operación.

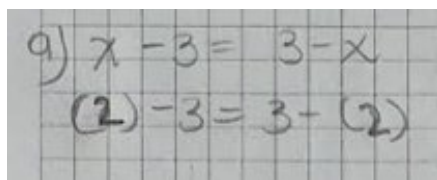

$$\begin{array}{l} a) x - 3 = 3 - x \\ (2) - 3 = 3 - (2) \end{array}$$

Figura 30. P1-EA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 2.

E3: Bueno, yo diría que 6. (Hablando de la solución de la primera ecuación)

I: (...) Ok. Dices que 6. ¿Por qué 6 crees que es solución?

E3: Porque... O sea... Yo tengo una pregunta. Las dos " x " son lo mismo ¿no? ¿Esas dos " x " son la misma?

I: Ajá, exactamente, son el mismo valor.

E3: Lo que hice fue pasar de la izquierda a la derecha el "3" de la primera, de negativo, pasa a positivo, y simplemente bajo el otro 3 que también es positivo, suma 6 positivo.

I: Ok. Vale. Está bien. ¿Tú crees que puede haber otro valor diferente al 6?

E3: Emm... No sé, creo que sí.

I: ¿Por qué crees?

E3: Tal vez los signos puedan cambiar la respuesta.

I: ¿Cómo así? o sea. ¿Dices que otro número que sea de otro signo? o... ¿A qué te refieres?

E3: No, o sea. Yo simplemente los pasé, ¿no? y ahí cambiaron el signo. Puede ser que los cambie de otra forma y cambie el signo. Ya no pase a ser positivo, si no que quede negativo o viceversa.

$$\begin{array}{l}
 b) 3x + 1 = 3 - 2x \\
 3(4) + 1 = 3 - 2(4) \quad \times \\
 3(-1) + 1 = 3 - 2(-1) \quad \times \\
 3(0) + 1 = 3 - 2(0) \quad \times \\
 0 + 1 = 3 - 0
 \end{array}$$

Figura 31. P1-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 3.

E3: Listo. Bueno, yo diría que " $5x=2$ "

I: ¿ $5x=2$? Ok. ¿Cómo llegaste a esa expresión?

E3: Bueno. Pasé las " x 's" al lado izquierdo. O sea, puse el igual, bajé el " $3x$ " y pasé el " $2x$ " a la parte izquierda, en donde estaba negativo, pasó a ser positivo ¿no? Después bajé el " 3 " que está después del igual y pasé el " $+1$ " a " -1 " y simplemente resolví la operación.

I: Vale. Por lo que escucho que estás haciendo, lo que estás haciendo es despejar, ¿cierto? estás intentando despejar la " x " para hallar la solución. Resulta de que lo que más o menos yo te había comentado al inicio es que, este tipo de métodos, como lo que es por ejemplo despejar, también, de alguna manera entra dentro de los métodos que uno aprende en el colegio, entonces por supuesto, lo que estás haciendo está bien para hallar el valor de " x ", pero, digamos que, yo quiero de alguna manera ser insistente en que quiero que puedas proponer una solución o unas soluciones para " x " sin necesidad de hacer estas cosas, ¿me hago entender? o sea, de tener que manipular mediante el despeje la ecuación, porque esto es, básicamente, lo que uno aprende en el colegio.

E3: Sí, claro. Pero como lo que nos dicen a nosotros en el colegio es que las letras no se suman con un número entero, entonces si lo haría así por encima, quedaría igual, porque no habría ninguna relación entre ninguno de los dos.

Momento 4.

E3: Bueno, ya intenté de una manera, y no sé si esté bien, pero bueno. El 3 lo multipliqué por 1. Daría 3, mas 1, 4, el igual sería, 3 menos 2, 1, por 4, 4.

I: Ok, entonces, dices ¿que "1" puede ser solución para esta ecuación?

E3: (Se queda pensando) Umm... Yo diría más bien que el 4.

I: El número 4.

E3: Sí.

I: Ah ok, vale. Entonces, dejémoslo en 4.

Hace alusión a un procedimiento como el siguiente

$$3x + 1 = 3 - 2x$$

$$3(1) + 1 = (3 - 2)(4)$$

$$4 = 1 \cdot (4)$$

$$4 = 4$$

Posterior a ello, afirma que 4 puede ser solución de la ecuación, seguramente porque reemplaza por 4 una de las "x", o porque llega a la ecuación "4=4". en esta oportunidad, valentina reemplaza las "x" por dos valores diferentes. además, ella resuelve la expresión $3 - 2x$ como $(3 - 2)x$

Momento 5.

I: Ok, te quería preguntar, si de pronto tú crees que aparte de 4 (...) puede haber otro número que haga que esta igualdad se cumpla.

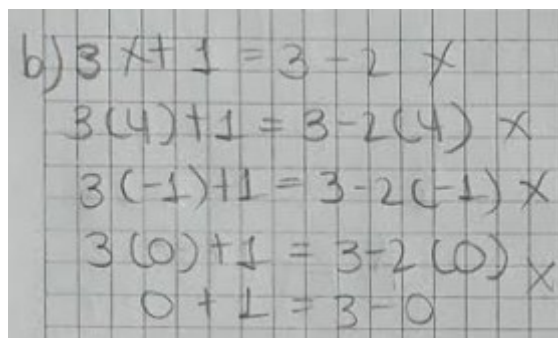
E3: Umm... Tengo una pregunta, ¿las dos "x's" pueden tener valor diferente?

I: Eh, no. Porque si ambas son "x's", si se les ha designado la variable "x"...

E3: Es la misma.

I: Es porque es la misma, si no, si yo quisiera que fuese otro número, pues le asignaría otra letra, podría asignarle "y", "z", cualquier otra... ¿vale? Pero estoy usando la misma "x", entonces deben ser el mismo número.

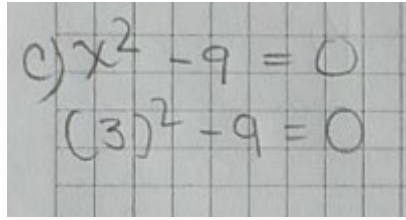
E3: Entonces dame un momento yo pienso.



b) $3x + 1 = 3 - 2x$ X
 $3(4) + 1 = 3 - 2(4)$ X
 $3(-1) + 1 = 3 - 2(-1)$ X
 $3(0) + 1 = 3 - 2(0)$ X
 $0 + 1 = 3 - 0$

Figura 32. P1-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 6.



The image shows a piece of grid paper with two handwritten equations. The first equation is $c) x^2 - 9 = 0$. The second equation, written below the first, is $(3)^2 - 9 = 0$.

Figura 33. P1-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 7.

E3: Bueno, en la "c" diría que el 3.

I: Ok. ¿Por qué crees que 3 podría ser una solución?

E3: ¿Porque... Bueno la "x" sería el 3 no?

I: Según lo que me dices, sí.

E3: Multiplicado dos veces un número sería 9, 9 menos 9, cero.

Momento 8.

I: Vale. Ahorita cuando te pregunté si creías que las ecuaciones podían tener más de una solución, me dijiste que todas las ecuaciones podían tener varias soluciones, ¿verdad?

E3: (Se ríe) sí...

I: Ahorita te pregunté que si esta de aquí podría tener otra solución aparte de 3 y me dijiste que creías que no. por qué crees que es diferente con esta? ¿qué tiene esta de particular?

E3: Porque es muy exacta, o sea, tendría que ser un número que multiplicado por su mismo número te de nueve, y yo no creo que haya otro que el tres... O...

I: O sea, tú crees que este de aquí, ¿el hecho de que esté elevado al cuadrado, como que reduce las posibilidades? por así decirlo?

E3: Sí...

I: Vale, vale, entiendo. ¿Entonces esta de aquí tendría únicamente "3" como solución vale? según lo que me dices.

E3: Vale...

Referente a, como el estudiante concibe una condición “restringida” al colocar $x \cdot x = 9$ y $5 \cdot x = 9$, por que en el primer caso es un número que multiplicado por sí mismo, de 9.

Comentario: Es paradójico tener esa concepción, puesto que la “simplicidad” en tener dos números diferentes multiplicados entre sí, aparece únicamente si se tiene la libertad de elegir

ambos números. Ej.: $x \cdot y = 30$

30 & 1, 15 & 2, 10 & 3, 6 & 5, 5 & 6, 3 & 10, 2 & 15, 1 & 30.

Pero por cada “y”, hay un “x” fijo que soluciona la ecuación.

d) $x^2 + 1 = 0$
 $(1)^2 + 1 = 2$ X
 $(0)^2 + 1 = 1$ X

Figura 34. P1-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 10.

E3: Es que no sé cómo hallar un número que... ¿Porque igual se va a sumar con el 1, cierto? entonces daría más que "0"

I: Ok... Eh...

E3: ¿Tú tampoco me puedes decir qué hacer en esos casos? (se ríe)

(...)

I: (...). Vale. ¿Entonces me diría que no podría haber un valor para “x”?

E3: Umm no...

I: ¿Tú qué piensas de esa posibilidad? crees que podrían existir ecuaciones que no tengan solución?

E3: Uish... Pues... Pues sí, yo creo que puede ser, que... Es que como usted no me puede decir nada (se ríe) está complicado, porque igual hay una suma ¿sabes? y a pesar de que usted haga la, si despeja o no, no te va a dar un número para la "x", es como que te dé un valor.

$$e) x^2 - 2x = 1.$$

$$(1)^2 - 2(1) = 1$$

Figura 35. P1-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 11.

E3: Bueno, yo diría que el uno.

I: Ok, ¿por qué piensas que 1 puede ser solución?

E3: Porque... uno por uno, uno, menos dos, sería uno. Y ya con la otra "x" lo multiplicaría otra vez por 1 y quedaría otra vez 1.

I: Ok, vale, vale... ¿Crees que de pronto puede haber otro valor? aparte de 1? que haga que eso se cumpla?

E3: No creo.

I: Ok, vale, está bien.

E3: Vale.

$$2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$$

$$2(2)^3 + 8(2)^2 - 16(2) = 0$$

$$2(16) + 8(4) - 16(2) = 0$$

$$32 + 32 - 32 = 32 \quad \times$$

$$2(1)^3 + 8(1)^2 - 16(1) = 0$$

$$2 + 8 - 16 = -6 \quad \times$$

$$2(3)^3 + 8(3)^2 - 16(3) = 0$$

$$2(27) + 8(9) - 16(3) = 0$$

$$54 + 72 - 48 = 78 \quad \times$$

Figura 36. P1-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 12.

I: ok, digamos que te llevo a pensar inicialmente que "1" o "2", porque veo que lo intentaste con cualquiera de los dos. "1" o "2" podrían ser solución. Porque por algo se te vinieron a la mente inicialmente, ¿no?

E3: aja, pues por lo que eran los más bajitos, porque subir tanto el número era... o bueno podría funcionar con otro más alto. No sé si me das otro poquito de tiempo.

I: Pues... como tú te sientas cómoda, si crees que de pronto puede ser uno un poco más alto, yo te doy el tiempo para que mires, esto no tenemos afán de nada, entonces no te preocupes por el tiempo.

E3: Bueno, entonces, intento con otro y ya te aviso.

I: Bueno

(...)

E3: emm ...No, definitivamente, yo creo que pudo haber sido... es que, si ya me voy por un "3", ya quedaría muy alto, por lo que está elevado, ¿no? Está elevado las primeras "x s", entonces el "16" no podrían, emm... restarlos a todos.

I: ok

E3: El más aproximado es el "2"

I: ok

E3: El que encontré más aproximado es el "2"

I: ok ok, interesante, interesante. Vale, entonces ¿tú te quedarías con el "1" y con el "2" como posibles soluciones?, o ¿las descartas?, o ¿qué piensas?

E3: SI, posiblemente con el "2" más que todo, pero también el "1", con los dos.

Momento 13.

I: Vale, Vale excelente. Emm veo que me hablas del "1" y el "2" pero como con cierta, por así decirlo, como con cierta duda, cierta inseguridad, entonces te pregunto: ¿Tú crees que exista la posibilidad de que esta ecuación no tenga ninguna solución? Ósea, que literal no exista ningún número que yo pueda poner aquí.

E3: Si, puede ser.

I: ¿Puede pasar?

E3: Si, puede pasar, puede que no.

Momento 14.

I: (...) ¿con cuales o cual crees que te causo más dificultad al hacer este proceso de intentar proponer una solución? Y ¿por qué?

E3: Con el "d"

I: ¿Crees que con el "d" fue la más difícil, por así decirlo?

E3: que no pude llegar a ningún número, por lo menos, por lo menos en las otras no estoy segura, puede que estén malas, no sé.

I: ok

E3: pero encontraba un número, y en está no, definitivamente no.

Momento 15.

E3: Si fue el mismo

I: ok

E3: fue el mismo método

I: digamos que a grandes rasgos ¿qué fue lo que hiciste para proponer esas soluciones con las ecuaciones?

E3: Bueno lo que hice fue resolver por separado cada... ósea antes de seguir del igual, resolví cada una de esas operaciones que había ahí

I:ok

E3: Y después, lo que me llevo a cambiar la “ x ” para que en las dos el resultado diera lo mismo, entonces, tanteaba, buscaba, emm un número que me, que me diera la misma respuesta en las dos operaciones

Momento 16.

I: ok ok Vale. Bueno lo último que te quería preguntar es que noto que, en estos ejercicios, la gran mayoría por no decir todos, creo que fueron todos, todas las soluciones que propusiste para las seis ecuaciones fueron coincidentalmente números naturales o enteros positivos, entonces, te pregunto: ¿Crees que de pronto pueda haber aquí en la “ x ” otro número que no pertenezcan a ese conjunto, de pronto, negativos, racionales, irracionales...?

E3: Si, claro

I: ¿Sí?

E3: Claro que sí, si

I: ok, ¿cuál crees que podría tener una solución, en alguna de estas ecuaciones que de pronto no necesariamente sea un entero positivo, sino que de pronto sea de otro conjunto?

E3: (se ríe) En la “ d ” posiblemente en esa pueda ser un número negativo o... si un negativo

I: Ok ok, en las otras ¿entonces tú crees que van un número positivo, enteros positivos?

E3: mmm creo que sí, creo que en la “ f ” tal vez como no encontré una exacta pueda ser que pueda haber un número negativo en medio de esas, que me sirva para todas.

Momento 17.

I: Ok Vale, otra cosa que te quería preguntar que se me vino a la mente ahorita y es que, a medida que fuimos resolviendo las ecuaciones, tú inicialmente tuviste la teoría de que todas las ecuaciones podían tener múltiples soluciones, pero luego encontramos una que basados en tu criterio ¿podía entonces no tener soluciones o una y aquí desatasca que podía tener solo una solución, cierto?

E3: ajam

I: porque me acuerdo que me habías dicho que “3” era aquí y que está no tenía solución. ¿Tú de que crees que depende que una ecuación tenga cierto número de soluciones?

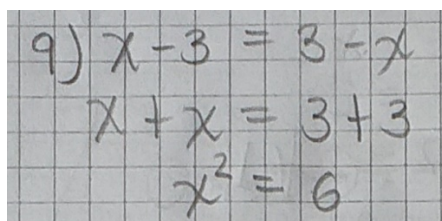
E3: mmm, tal vez en lo extensa que esté, es que en la “c” me pareció muy exacta, entonces no había como forma de que pudiera haber habido otra solución.

I: Por así decirlo, por el nivel de complejidad, ¿la cantidad de números que estén involucrados?

E3: aja, sí

I: Ok, entonces basados en eso la que debería tener más soluciones serías por ejemplos esta de acá ¿cierto (señala la ecuación f)? Según lo que me dices

E3: Sí



Handwritten mathematical work on grid paper showing the steps to solve the equation $x-3 = 3-x$. The steps are:

$$\begin{aligned} 9) \quad x-3 &= 3-x \\ x+x &= 3+3 \\ x^2 &= 6 \end{aligned}$$

Figura 37. P2YP3. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 18.

E3: listo

I: Ok, que te dio en la primera, en la “a”

E3: Me dio “x” a la “2” igual “6”

I: mmm, ¿pero te dio un número?

E3: “6”

I: ¿ok, entonces “6” podría ser solución para la “a”?

E3: si

Handwritten work on grid paper showing the solution of a linear equation:

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 3x + 1 &= 3 - 2x \\ 3x + 2x &= -1 + 3 \\ 5x &= 4 \end{aligned}$$

Figura 38. P2YP3-EB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 19.

I: Ok, vale. ¿qué te dio en la “b”?

E3: “4”

Handwritten work on grid paper showing the solution of a quadratic equation:

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 + 0 \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

Figura 39. P2YP3-EC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 20

I: ¿listo, en la “c”?

E3: “9”

I: ósea que “x” puede ser “9”

E3: uich, no creo, si me da solo la equivalencia, no creo

I: ok, ¿qué método estabas usando para resolverlo?

E3: despejado

I: ¿despejar?

E3 aja

(...)

I: habías dicho que “x” podría ser “9” pero en la parte de acá habías dicho que “3”. ¿Por qué crees que te dio diferente? En esta segunda parte.

E3: porque al despejar el “9” estaba negativo y paso a ser positivo, entonces se termina sumando con el “0” y queda igual, queda “9”, solo.

I: ok

E3: pero si lo hacemos así, como usted me decía, que, en equivalencia, claramente no, no podría.

I: entonces cuando tú crees que tuviste razón: ¿en el punto anterior o crees que tienes razón en este?

E3: en el punto anterior, cuando dije “3”

I: o ¿crees que pueden ser las dos soluciones? Que puede ser “3” y “9” las soluciones, o ¿crees que no son compatibles?

E3: No, creo que no

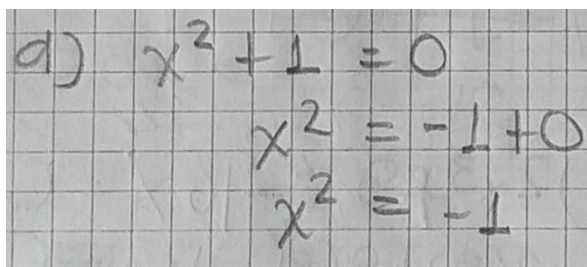

$$\begin{aligned} d) \quad x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 + 0 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Figura 40. P2YP3-ED. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 21.

I: Vale, con la “d” ¿cómo te fue?

E3: “-1”

(...)

I: Pero entonces, me llamó la atención, esta de aquí: la “d”

E3: ¿el de “-1”?

I: ¿sí, que hiciste para llegar a decir que “x” podía ser “-1”? ¿Por qué fue diferente a lo que pensaste al inicio?, porque al inicio decías que no podía tener solución.

E3: ¿porque ves que el “1” está positivo no?, entonces al despejar quedo negativo

I: aja

E3: entonces se suma con el cero, pero como el “1” es mayor conserva el signo, entonces quedaría negativo

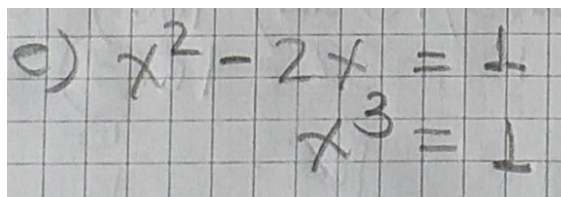

$$\begin{aligned} e) \quad x^2 - 2x &= 1 \\ x^3 &= 1 \end{aligned}$$

Figura 41. P2YP3-EE. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 22.

I: Vale. ¿Está de aquí?

E3: “1”

I: ¡! Listo. ¿qué método utilizaste en esta para resolverlo?

E3: despejar

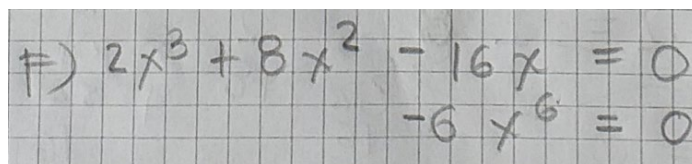
(...)

I: ok, que fue lo que hiciste para llegar a decir que “1” era la solución

E3: despeje, simplemente baje el número porque como estaba solo, como no tiene letra, entonces queda solo, simplemente lo que cambio, fue la suma de las letras de las “x s” y sus acompañantes

I: ok, me acuerdo que en el punto anterior me habías dicho que “2” también podía ser solución, entonces que con esto que concluiste aquí, ¿crees que “2” lo descartas, de que pueda ser solución?

E3: sí, me quedo con el “1”



The image shows a piece of grid paper with handwritten mathematical equations. The first equation is $f) 2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$. Below it, the second equation is $-6x^6 = 0$. The handwriting is in dark ink on a light-colored grid background.

Figura 42. P2YP3-EF. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 23.

I: ok. ¿Y en está de aquí?

E3: “0”, es que yo me baso en lo que da después del igual no?, pero en sí cuando se trata de despejar es sumar las” x s” y los exponentes. Lo que cambia es eso, pero el resultado sigue siendo el mismo

(...)

I: ¿Crees que pueda haber otro número o te quedas nada más con el “0”?

E3: Pues yo me quedaría con el “0”, porque ya intentando con los otros números pues vi que no.

Análisis de los resultados de la Actividad I (AI): Concepto y resolución de ecuación polinómica

Esta sección presenta el análisis de los resultados obtenidos de los estudiantes y la cual sintetiza la información anterior a los propósitos planteados en la investigación.

Estudiante 1 (E1)

Con el objetivo de identificar los pensamientos intuitivos del estudiante uno, se realizó la aplicación de la primera actividad instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*”. Contiene tres subcategorías, “Concepto y resolución de ecuación polinómica”, “Resolución de problemas entorno a una incógnita”, “Representación e interpretación en relación con la ecuación y función”. Para la actividad uno solo se tuvo en cuenta el primer apartado. “Concepto y resolución de ecuación polinómica” realiza una comparación entre lo que dice la teoría del álgebra acerca del concepto de ecuación, la importancia del signo igual, el conjunto solución de una ecuación y en general, las implicaciones del teorema fundamental del álgebra.

El primer hallazgo (momento 1), da muestra que el estudiante reconoce parcialmente el rol del signo igual en la ecuación, determinante para establecer las soluciones de ésta, así como las implicaciones de llegar (o no) a una identidad, en el proceso de evaluar sobre un valor para la incógnita. Esto debido a que en su discurso hace evidente que reemplazar la incógnita de la ecuación debe ser consecuente con la equivalencia.

Otro de los momentos (momentos 2, 5 y 6), evidenció que el estudiante le asigna una característica de flexibilidad al conjunto de solución de una ecuación, en la que por llegar a ecuaciones tipo " $a=-a$ ", cree que el número evaluado está "cerca" de ser solución. En su discurso le da mayor relevancia a la premisa que es el mismo valor absoluto sobre el hecho que sean dos números diferentes.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*”. contiene seis subcategorías intrínsecamente relacionadas con los diferentes tipos de pensamiento intuitivo que se definieron en el marco teórico: “Ligada al tanteo”, “De cohesión primaria”, “De cohesión interpretativa”, “representación espacial”, “creadora”, “acotada”. En esta actividad, para este estudiante, solamente se encontraron cinco de ellas.

La subcategoría “*Ligada al tanteo*” implica que el estudiante hizo uso directo o indirecto del tanteo (ensayo y error) para intentar encontrar la solución de la ecuación. Entendiendo que las elecciones dan cuenta de las creencias que los estudiantes puedan tener del conjunto solución de la ecuación y no son elegidas absolutamente de manera arbitraria.

Esto se pudo evidenciar en el momento que se le pidió, al manifestar no haber encontrado una solución para la ecuación, proponer un intervalo. Allí, en su discurso, sugirió "jugar un poco" con los números, únicamente haciendo uso de los enteros, para encontrar la solución.

La subcategoría “*Cohesión interpretativa*” implica que el estudiante es capaz de llegar a conclusiones gracias a su familiaridad con la estructura de la ecuación, en este caso, con las operaciones involucradas.

Esto se pudo evidenciar ya que aun cuando es posible que el estudiante no haya enfrentado previamente una ecuación cuya solución es un número complejo, al estar familiarizado con la estructura de la expresión algebraica y las operaciones involucradas (especialmente la potenciación) logra evidenciar la dificultad que implica abordar el problema con el conjunto numérico conocido, lo que lo lleva a concluir, con bastante confianza, que no existe solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

La subcategoría “*Creativa*” implica que el estudiante propone soluciones inesperadas para el nivel educativo en el que se encuentra, gracias a sus saberes y la manera en la que los enlaza. Esto se evidenció cuando el estudiante, después de haber experimentado todo el contenido de la actividad I, fue capaz de conjeturar la relación entre el número de soluciones de una ecuación de tercer grado, con su grado, posiblemente generalizable para ecuaciones de grado superior.

La subcategoría “*acotada*” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘intuitivas’ o de ‘sentido común’ que pueden ser inapropiadas o falsas. Esto se evidenció en su discurso, en el cual aseguró que las soluciones de una ecuación no suelen estar "cerca" en la recta numérica. De la misma forma, el estudiante afirmó que el conjunto solución de una ecuación es el mismo conjunto numérico al que pertenecen otros elementos involucrados (los coeficientes, por ejemplo). Esto solo resulta ser válido para casos particulares.

De igual manera, el estudiante propone en su discurso inicial que entre más ‘compleja’ aparente ser una ecuación (el estudiante parece relacionar el hecho que los coeficientes y exponentes hagan parte de un conjunto diferente al de los enteros, los exponentes sean mayores, o la cantidad de términos sea muy alta, con el nivel de ‘complejidad’) menos soluciones tiene.

Posteriormente, al finalizar la primera actividad, se le confronta respecto a su creencia y se retracta al haber encontrado varios contraejemplos en el camino.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. Durante la actividad se evidenció un rendimiento favorable. Si bien hubo falencias en algunos procedimientos, se acerca al reconocimiento de las soluciones entre las ecuaciones implicadas de forma lógica y sin infringir algún tipo de procedimiento por fuera del marco de las matemáticas.

Estudiante 2 (E2)

Con el objetivo de identificar los pensamientos intuitivos del estudiante dos, se realizó la aplicación de la primera actividad instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

A partir de los ejercicios planteados en la actividad, se da cabida a las analogías de parte del estudiante para fortalecer sus ideas sobre el concepto matemático.

De acuerdo con a lo denotado anteriormente en los análisis del estudiante 1 (E1), en la primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se encontró:

El primer hallazgo (Momentos 3, 7 y 9), comprende que, la estudiante establece una relación directa con el método de ensayo y error para obtener el valor numérico de la incógnita involucrada en ecuación de primer y segundo grado, aunque, esto no sucede con la ecuación de tercer grado, es probable que su conocimiento matemático no le permita abstraer e inferir algo para proponer sobre cómo resolverla. Es interesante deducir que, para la estudiante, el único método posible para proponer dentro de la resolución de las ecuaciones sea ese y piense que no le sea efectivo para la ecuación de tercer grado, pese a que este método en teoría si serviría, tal vez, sea debido a que jamás le han enseñado este tipo de ecuaciones en el transcurso de su escolaridad o si las vieron no se acuerde. Y esto pretende parecer que, en la escuela, no es muy frecuente enseñar este tipo de conceptos matemáticos dentro de la Educación Matemática.

Se puede determinar que metodología llevada a cabo por el estudiante, es válida, dentro de las concepciones matemáticas, pero aún se queda en lo superficial y poco concisos, por lo tanto, no logra inferir de manera significativa su modo de proceder cuando afronta las

ecuaciones polinómicas, generando un estancamiento en la interpretación y partes en las que se compone una ecuación polinómica y asimismo sobre los múltiples procedimientos en que puede ser solucionada. Afectando su capacidad de ejecutar situaciones de la misma matemática como de la vida cotidiana.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*”. El hallazgo arroja, que la estudiante mostró una metodología denominada, “ligada al tanteo” y plantea una serie de números que reemplazan la incógnita de forma concisa y clara, pero lamentablemente, al realizar este método, solo encontraba una solución para cada ecuación, además, únicamente indicaba números relacionados al conjunto de los enteros positivos y no intentó descifrar otros más, que utilizando otros métodos si podría evidenciar alguna relación entre la ecuación y el número de soluciones. Por ejemplo, considera una solución, la cual el grado de la ecuación es 2. La estudiante menciona que, en esta ecuación en particular (Ecuación c), el modo como se presenta la ecuación, le permitió considerar sin mayor esfuerzo, el número adecuado que solucionaría la ecuación, llegando como resultado una correspondencia de $0 = 0$. De hecho, la estudiante evidencia con anticipación que “9” es el número que necesita, porque al restar con el otro número 9 da 0, por lo que de inmediato propone al 3 como su único candidato en la respuesta final.

Luego, se encontró, sobre lo que dice la estudiante, otra caracterización denominada “De cohesión primaria”, en primer lugar, reflexiona erróneamente sobre la distinción del concepto y modo de proceder entre la ecuación y función polinomiales, al tratar de plantear y explicar, que la expresión presentada, se le “asemeja como a un rango o aun dominio”, omitiendo las características cuando se visualiza una ecuación polinómica.

En segundo lugar, la estudiante parece concebir sobre la solución de la ecuación (ecuación a) propuesta, considera que así tal cual como esta se le es similar a un ejemplo sobre alguna propiedad de equivalencia, como investigadores creemos que se refiere a la propiedad reflexiva cuando la vincula con la ecuación, porque menciona que cada número es igual a sí mismo. Obviamente pasando por alto, el papel que juega la incógnita x (Equis) y la posición del signo menos dentro de la igualdad, al menos lo que se logra percibir en un primer momento, ya que, al observar la ecuación de ese modo, la estudiante cree que no tiene solución, aunque más adelante la logra resolver, con algunas intervenciones del investigador que cuestiona sobre el modo de llevar a cabo la resolución del ejercicio por parte de la estudiante.

Luego, más adelante, cuando se cuestiona a la estudiante sobre “¿por qué consideraba que la ecuación no tenía solución?”, da un claro ejemplo, del poco manejo que tiene con las ecuaciones polinómicas, ya que, las consideraba como una igualdad, una reflexión, lo que está en un lado debe ser igual para el otro, en particular se destaca la manera superficial en argumentar que la ecuación no tendría solución por la posición invertida de los signos, porque no coinciden, se evidencia que la estudiante aún está en definiciones y propiedades básicas de las matemáticas al realizar este tipo de afirmaciones.

Por último, en la ecuación f, se evidencia que, ignora las indeterminaciones y exponentes que la acompaña, y simplemente se atreve a mencionar que tal vez la ecuación puede estar mal fórmula, porque probablemente no debería ser una suma, sino una multiplicación, lo que debería ir ahí ($2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$), y no infiere más allá de lo que es evidente, es decir, que al ser una multiplicación y por orden de jerarquía se realiza primero y después se precede con la resta y así ser restada por $-16x$, y por ende llegar a la igualdad $0 = 0$. Sobre el método de realizar la ecuación, se muestra demasiada confusión, ya que por momentos se acuerda de intentar buscar la solución a través de proponer valores a la indeterminación x (equis), y en otros de unir términos semejantes y en este caso sencillamente se fija en la operatividad de las operaciones básicas obviando demás componentes que conforma la ecuación polinómica.

Al final se identifica otra categoría asignada con el nombre de manifestación intuitiva “*acotada*”, la cual, la estudiante propone posibles alternativas de resolución sobre la ecuación, pero por algunos factores internos del estudiante la hace cambiar de metodología ya sea por aspectos como, la complejidad con que las venía resolviendo, aun no entendía cómo hacerlas entre otras, pero se debe resaltar que es la estudiante quien debe caer en cuenta sobre su propio proceder y decidir si cambia o no de metodología muchas veces para mejorar o no.

Por ejemplo, en la transposición de términos similares, al intentar unir en un principio, números con números en un lado y un número acompañado de una incógnita en el otro, esta medida parece acertada en un inicio, pero al tener concepciones débiles, decide cambiar y lo reemplaza por el método de ensayo y error, tal vez por facilidad o como se evidencia durante la aplicación de la actividad la poca construcción matemática que tiene sobre esta noción.

Pareciera que esta metodología se le hace “fácil”, pero se ve que comete errores con su proceso de resolución omitiendo varios elementos primordiales dentro de la ecuación

polinómica y por eso en algunas ecuaciones decide ni intentar sugerir una solución y menciona que la ecuación no tiene solución.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*”. Durante la actividad se evidenció un rendimiento regular. Si bien hubo aciertos en algunas ecuaciones, se notó falencias en algunos procedimientos y sobre todo en que no tiene muy claro aún, el concepto de ecuación polinómica, se acerca al reconocimiento simplista de la solución de la ecuación, pero no demuestra de manera convincente un verdadero procedimiento matemático que implique conexiones lógicas, sin infringir algún tipo de procedimiento por fuera del marco de las matemáticas.

En el punto 2, la instrucción es que, la estudiante puede ejecutar libremente la ecuación mediante cualquier método contundente. Obviamente, la estudiante no alcanza este objetivo ya que lo que realizó en el punto 1 lo repitió en el punto 2, los conceptos mínimos de aplicar técnicas de manipulación de expresiones algebraicas no los pone en manifiesto y no profundiza en las estrategias enseñadas de acuerdo con el MEN, sobre el uso correcto de las soluciones de ecuaciones polinómicas (según lo obtenido en la implementación de la actividad). Es frustrante que en el grado de escolaridad en el que se encuentra la estudiante, aún continúe con una metodología de ensayo y error y factorizaciones mal elaboradas de grados anteriores, por lo que se lleva a concluir que este tipo de conceptos matemáticos no son protagonista en la escuela.

Estudiante 3 (E3)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante tres, se realizó la aplicación de la primera actividad instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se encontró que:

El primer hallazgo muestra que la estudiante establece una relación entre los coeficientes y demás elementos que hacen parte de la estructura de una ecuación y su solución o soluciones, por lo que reconoce que, al momento de buscar la solución de una ecuación, se debe referenciar en lo que compone a la misma.

Así mismo, la estudiante muestra, al parecer, una creencia en la que establece una relación directa entre el método para resolver una ecuación y el conjunto solución de la ecuación, es decir, percibe una variación en la solución de la ecuación al momento de utilizar diversos métodos para ello. Esto significa que, según ella, si una ecuación es abordada por un método distinto de solución, esto tendría repercusión en la solución de la ecuación.

La estudiante hace evidente de la misma forma, el concepto apropiado que tiene de “solución de una ecuación”; muestra indicios que podría considerar la “última línea” de su proceso de solución como la solución de la ecuación. Incluso a esta última, tratarse de una versión más simple y equivalente de la ecuación y no de un número. Esto quiere decir que si al finalizar la ecuación, la estudiante llega a “ $x = 3$ ”, la solución de la ecuación sería “ $x = 3$ ” y no “3”. También aplicable si la expresión es, por ejemplo “ $5x = 2$ ”; para ella, esta sería la solución de la ecuación.

La estudiante, en una oportunidad, reemplaza la única incógnita por múltiples valores al tiempo en un procedimiento determinado. Ella también hace manifiesto de uno de los criterios que usa para determinar la solución de la ecuación, y es observar el número que está al lado derecho del igual, independientemente del estado de la expresión en el otro lado.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*” se logró recibir en la estudiante:

La subcategoría “*Ligada al tanteo*” implica que el estudiante hizo uso directo o indirecto del tanteo (ensayo y error) para intentar encontrar la solución de la ecuación.

Entendiendo que las elecciones dan cuenta de las creencias que los estudiantes puedan tener del conjunto solución de la ecuación y no son elegidas absolutamente de manera arbitraria.

La estudiante elige múltiples números (únicamente enteros y pequeños) para intentar dar solución a la ecuación, mediante un método de tanteo, da la impresión que, al hacer uso de este método, respeta la equivalencia de las " x "(equis), contrario a los momentos en los que intentaba acercarse a la solución de la ecuación con otros métodos. Al usar el tanteo, la estudiante reconoce que el llegar a una identidad, implica que el número evaluado es una solución para la ecuación.

La subcategoría "*Cohesión primaria*" está relacionada a esos momentos en los cuales el estudiante logra ver y caer en cuenta de relaciones que resultan ser evidentes. Se relaciona con lo obvio, está muy relacionado con las primeras experiencias del estudiante con las matemáticas. Implica que el estudiante es capaz de llegar a conclusiones gracias a su familiaridad con la estructura de la ecuación, en este caso, con las operaciones involucradas.

Esto se pudo evidenciar cuando la estudiante, al estar familiarizada parcialmente con las operaciones que aparecen en la ecuación, reconoce fácilmente la dificultad que hay al elegir valores para " x ". Sin embargo, su análisis únicamente persiste en los enteros positivos.

La subcategoría "*Acotada*" implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias 'intuitivas' o de 'sentido común' que pueden ser inapropiadas o falsas. Entre las primeras observaciones que encajan dentro de esta subcategoría se encuentra lo mencionado al inicio de este apartado: La estudiante manifiesta que las ecuaciones tienen múltiples soluciones debido a que las soluciones dependen del método con el cual se resuelve la ecuación.

De igual forma, la estudiante evidencia una creencia respecto a la potenciación, al percibirla como una operación más "estricta", argumenta que es mucho más difícil encontrar un número que satisfaga una ecuación de la forma $x \cdot x = 4$ a una ecuación de la forma $2 \cdot x = 4$. Al enfrentarse a la ecuación $x^2 = 9$, afirma que su conjunto solución es más restringido porque la ecuación "es muy exacta, o sea, tendría que ser un número que multiplicado por su mismo número te de nueve".

Por otro lado, la estudiante concibe una particular flexibilidad para determinar el conjunto solución de una ecuación, en uno de los casos, menciona que considera tanto el número "1" como el número "2" soluciones de una ecuación, pero en su discurso se entiende

que considera el número dos “más solución” que el número uno, además de considerar el número 3 como "muy grande" como para ser solución.

De igual manera, la estudiante propone en su discurso que entre más ‘compleja’ aparente ser una ecuación (la estudiante parece relacionar el hecho que los coeficientes y exponentes hagan parte de un conjunto diferente al de los enteros, los exponentes sean mayores, o la cantidad de términos sea muy alta, con el nivel de ‘complejidad’) menos soluciones tiene.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. Durante la actividad se evidenció que la estudiante cometió múltiples errores procedimentales al momento de resolver las ecuaciones, incluso al darle la libertad de resolverlas por el método que ella considerase, estos errores se presentan principalmente al operar términos de los polinomios, que probablemente han persistido desde que tuvo sus primeras experiencias con el álgebra.

3.6.2 Resultados de la actividad II (AII): Resolución de problemas en torno a una incógnita

Esta sección, se compone de la transcripción adquirida después de su aplicación, para lo cual, esta se divide en momentos relevantes que para los investigadores son relevantes y aportan en la investigación, es decir, que no toda la transcripción completa se expone en este apartado, sino lo que realmente contribuye en el proceso del análisis.

Estudiante 1 (E1) Actividad II (AII)

Estudiante de 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración 0:31:49 (Video 1) 0:35:41 (Video 2); Día: 28/08/2020; Plataforma online: Zoom

E1: Primer estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

$P = 76 \text{ cm}$
 $P = 2 \cdot (h + b)$
 Si el perímetro = 76 entonces
 $76 = 2 \cdot (x + (x + 18))$
 $76 = 2x + x + 18$
 $76 = 3x + 18$
 $76 - 18 = 3x$
 $\frac{76 - 18}{3} = x$
 $19.3 = x$
 $x = 19.3 \text{ cm}$
 $b = x + 18$
 $b = 19.3 + 18$
 $= 37.3 \text{ cm}$

Figura 43. PA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 1

I: (...) ¿Qué valores te dieron?

E1: Me dio que la altura... Yo denominé la altura, la denominé "x", con la variable "x". Y me dio como resultado 19,3 centímetros.

I: Ok, Vale. (...) Y ¿Cuánto debe dar el ancho entonces?

E1: El ancho me dio 37,3 centímetros.

I: Vale, entonces con esos dos valores yo básicamente puedo construir un rectángulo, ¿cierto?

E1: Ujum

I: Bien... Es dibujable, ¿cierto?

E1: Ujum

I: ¿Tú crees que, de pronto, podría haber otro rectángulo diferente a ese que satisfaga las mismas indicaciones? O sea, que se cumplan las mismas propiedades, el perímetro que está

diciendo ahí sea el mismo, la diferencia entre la base y la altura sea la misma, que pueda haber otro rectángulo diferente a ese que tú encontraste. ¿Puede haber? ¿tú qué crees?

E1: No, no creo. Porque pues si el perímetro ya está dado, yo creo que tiene que ser unos valores específicos.

I: Tendrían que ser valores fijos...

E1: Ujum, sí señor.

I: Bien. Y, ah bueno, por los resultados que ya me disté, entonces te dieron fue unos números decimales.

E1: Decimales, sí.

I: Bien, ahorita quiero que me digas cuál es la ecuación algebraica que encontraste, relacionada al problema.

E1: Encontré que... Primero, deduje la fórmula de perímetro, que sería dos veces el área... dos veces cada lado, entonces denominé que un lado sería " x " y el otro lado que es la base, sería " $x+18$ ".

I: Listo. Excelente. y ¿qué representa la variable? Según lo que tú planteaste

E1: En este caso representaría la altura.

PB

Momento 2

I: Antes de que lo resuelvas, quiero hacerte una pregunta. Ahí donde tú lo estás viendo, tú podrías como... No sé, intentar darme un rango de números en los que ¿crees que puede estar la cantidad de estudiantes mujeres?

E1: Emm, si dice que la cantidad de estudiantes mujeres supera 150 el número de estudiantes hombres, y hay 1230... Umm... No sé, estaría entre unos... No sé, ¿900?

I: Puedes darme un rango. Por lo menos, o sea, no tiene que ser exacto, pero tú me dices "no, yo sé que por lo menos más de 'esto' debería ser y más de 'esto debería ser" a eso más o menos me refiero con rango.

E1: Pues yo creería que más de 600. Por ahí entre 700

I: ¿Por qué crees que más de 600? ¿Qué te lleva a pensar que más de 600?

E1: Porque... Pues la mitad, o sea, para que sea la mitad que sean 1200, digamos que estuviesen repartidos 50 y 50, serían 600 y 600, y dice que, si hay 150 más, eso quiere decir que hay unos 750 más o menos, 780 mujeres más o menos.

I: Ok, y dame un valor máximo. O sea, que tú dices "No, no creo que sea más de 'esto'"

E1: Yo creo que 800 es el tope.

I: ¿Tú crees que hay alguna posibilidad de que este problema no tenga solución?

E1: Umm, no, yo creo que sí se puede resolver.

I: ¿Por qué?

E1: Pues... No, pensándolo bien... Tal vez nos tendrían que dar el valor de alguno de cuántos estudiantes hay, digamos en el caso de que cuántos estudiantes hombres hay. Creo que nos tendrían que dar por lo menos, la cantidad de hombres que habría para poder determinar el de las mujeres.

I: O sea que tú crees que nos hace falta información para poder resolver el problema.

E1: A simple vista, creo que sí.

I: Ok

E1: Pero no sé, estoy tratando de ver si hay alguna manera de...

Momento 3

I: Y ¿tú crees que es posible que este problema tenga más de una solución? o sea, como que haya dos posibles valores de números de mujeres, y que cumplan las condiciones que me están dando en el problema, ¿o crees que solo es uno?

E1: No, yo creo que solamente es uno. Un valor exacto para cada cantidad.

I: ¿Por qué?

E1: Porque en sí ya nos están dando el valor inicial que es 1230, entonces también tiene que ser un valor específico en la cantidad de cada uno de los estudiantes.

b. 1.230 estudiantes (hombres - mujeres)

$$\frac{1.230}{2} + 150 = X \quad X = \# \text{ mujeres}$$
$$615 + 150 = 765 \text{ mujeres}$$

Figura 44. Momento 4. Fuente: elaboración propia (2021)

E1: Listo, creo que ya lo determiné.

I: ¿Listo? qué valor te dio?

E1: Me dio que las mujeres son 765 mujeres, y los hombres son 615.

I: ¿Cómo te dio la ecuación? O sea, ¿qué ecuación tú colocaste ahí para resolver el ejercicio?

E1: Dividí la cantidad en la mitad, y eso me dio 615. Entonces determiné que, si la mitad más 150 eran las mujeres, entonces la otra mitad que quedaba, que eran los 615, era de los hombres. Entonces la cantidad de mujeres era la mitad más 150 y los hombres era prácticamente la mitad que quedaba. Los 615.

I: (...) Ah bueno, y qué variable utilizaste tú para hallar ¿esto? y qué representa.

E1: Variable... Variable... Variable... Umm no, en este no utilicé la variable.

I: Lo que pasa es que sería bueno que colocases, como, que intentases plantear una ecuación que estuviese representando precisamente ese procedimiento que hiciste para resolver el ejercicio. Si puedes colocarla, estaría muy bien.

E1: Ah vale, entonces voy a intentar colocarla.

(...)

E1: Listo. Creo que ya la planteé.

I: Vale, excelente. ¿Como te dio?

E1: Yo creo que sería entonces 1230 dividido dos más 50, sería igual a "x" que sería "x" la representación de la cantidad de mujeres.

I: Umm ok vale, excelente.

E1, PC

Momento 5

I: Bien. Teniendo eso en cuenta, yo te quiero preguntar, según ese modelo, tú crees que ese cohete va a seguir subiendo indefinidamente o va a haber un momento en el que alcance una altura máxima, o seguirá subiendo para siempre, ¿tú qué piensas?

E1: Umm... No sé... Altura... No, no sé si podría tener una altura límite.

I: Vale. De pronto si notas que cambias de parecer referente a esta al momento que resuelvas el ejercicio, pues lo dices o lo escribes en la hoja, ¿vale? (...) La otra pregunta es si crees que en algún momento el cohete va a volver a la tierra, con la información que está dando el problema.

E1: Umm... No sé, supongo que eso dependerá de la velocidad, lo que sí me causa curiosidad es el negativo. Ahí en la fórmula aparece el "-16" no sé si eso suponga que en algún momento el cohete frene, y empiece a bajar de nuevo.

I: Vale, vale, entiendo. Y ¿por qué piensas que ese negativo es relevante en ese sentido?

E1: Porque lo veo por el lado de que sea como una contraparte, como una fuerza que va frenando, mientras por un lado hay una fuerza que, digamos, lo va impulsando, por otro lado, hay una fuerza que lo va frenando, hasta que la fuerza que lo va frenando sea mayor, entonces yo creo que en ese momento pararía y empezaría a bajar.

I: Listo, listo. Bien. Tú crees que el objeto pasa más de una vez por una altura de 180 pies, o solamente es algo como de una vez.

E1: (...) Una sola vez, pues dependiendo de cómo... No, sí, solamente que, creo que sería una vez, o sea, pues de ahí para el 180, pasaría por más valores, de ahí para arriba.

I: Vale, listo. Tú qué sientes viendo esta función, ¿no? ¿qué te están expresando aquí, qué información?, sientes ¿qué te está proporcionando ello sobre el comportamiento del cohete? ¿qué sientes que te está diciendo?

E1: Me trata de decir que cuál es la altura en relación al tiempo, dependiendo de cuánto tiempo va pasando, pero no, no veo otro tipo de información que me brinde.

$$C. h(t) = -16t^2 + 12t$$

$$h = -16t^2 + 12t$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{-16t^2 + 12t}$$

$$\sqrt{h} = -16t + 12t$$

$$\sqrt{h} = -4t$$

$$\frac{\sqrt{h}}{-4} = t$$

Figura 45. Momento 6. Fuente: elaboración propia (2021)

E1: Creo que no... Pues llegué a una ecuación, a otra ecuación, pero no, creo que no tiene...

I: Ok, más o menos cuéntame lo que intentaste hacer.

E1: Lo que hice fue tomar esa fórmula que ya nos dan y tratar de sacar raíz cuadrada a ambos lados, o sea, sacar raíz cuadrada a la altura y raíz cuadrada del $-16t^2$ a la dos más $12t$, siendo así que se cancele la raíz con el exponente de $-16t^2$ entonces queda $-16t + 12t$ y ahí se puede operar esto, entonces me da como resultado $-4t$ igual a raíz de la altura, raíz de h . Entonces ahí despejando la t para que me del tiempo, paso el menos 4 al otro lado, entonces ahí me queda menos raíz de " $t h$ " - 4 igual a t .

I: Vale. Bien. Todo eso tú lo escribiste en las notas, ¿cierto?

E1: Sí señor.

PD

Momento 7

I: Listo. Con esta información que nos está dando el problema aquí, ¿cuánto crees que sería la altura de la caja?

E1: En ese caso...

I: En términos de lo que nos están hablando aquí, en términos de " x " pues, eso es lo que estoy diciendo.

E1: En ese caso sería 20 restado las puntas que se le corte, ¿no? el valor de x (equis). Pero como hay dos pedazos que se cortan, acá serían dos veces x .

I: Ok. Pero entonces en ese caso me estarías dando algo así como el ancho, ¿no? porque pues... O sea. A ver si nos ponemos de acuerdo más o menos. Lo que nosotros estamos viendo aquí es como una versión desde... Como si estuviésemos viendo la caja desde arriba. ¿Me hago entender? Entonces, lo que estamos viendo como 20 y las $2x$, sería como lo que mide un lado. La altura, estaría como "doblada hacia nosotros". ¿Me hago entender?

E1: Ah... Ok.

I: O sea, pero sí, de hecho, una de las dimensiones de la caja es exactamente lo que tú dijiste.

E1: Ahh ya... Entonces puedo decir que la altura... Creo que sería entonces el valor de " x " ¿cierto? porque se supone que entonces, la misma cantidad que se corta, es la misma que se va a doblar y eso es lo que...

I: Exacto.

E1: Sí, sí.

(...)

I: Ya sabemos que una de las dimensiones es " $20-2x$ " ¿cierto? porque se corta una de las esquinas.

E1: Ujum

I: ¿Cuál sería entonces, otra de las dimensiones? O sea, ya no está de aquí, si no la otra.

E1: Sería también $40-2x$.

I: Listo, eso sería algo así como el... Uno sería el largo y otro sería el ancho. Y la altura ¿cuánto sería?

(...)

E1: x (equis)

(...)

I: Teniendo en cuenta eso, qué tendría que hacer yo para colocar una expresión de volumen, ¿sí? O sea, tú ya sabes que el volumen se calcula como la base, multiplicado por el largo, multiplicado por la altura, entonces ¿yo qué tendría que hacer ahora?

E1: Sería reemplazar esos valores ahí y buscar el valor de " x ".

I: Listo. Entonces para nosotros poder darle un valor fijo a la " x " ¿no? Lo que tendría que hacer es colocar ya este valor de volumen aquí como lo que me están diciendo en el problema como 1500, ¿cierto? o sea, $1500 = b \times a \times x$ h. ¿cierto?

E1: Sí señor.

I: Qué yo quisiera preguntarte, que estuviésemos de acuerdo. Que una vez nosotros tengamos esa expresión, vamos a terminar con una ecuación que en un lado tiene "1500" ¿sí? y en otro lado tiene un producto de cosas, que dependen de " x ". ¿Estamos de acuerdo en eso?

E1: Sí señor.

I: Yo quisiera preguntarte, ¿cómo podría ser la solución o las soluciones de esa ecuación? tú qué características crees que debe tener ese número que representa esa altura? cómo tiene que ser? (...) Con características me refiero a que tú digas, por ejemplo, "ah no, ese número no puede pasarse de 'esta' cantidad, o mínimo tiene que ser 'tal' cantidad" Así como a simple vista.

E1: Pues para empezar yo creería que sería un valor pequeño, positivo. Ya, yo creo nada más sería eso. Un valor pequeño y un valor positivo.

I: ¿Cuándo te refieres a "valor pequeño" podrías darme como un número máximo? (...)

E1: Umm más o menos que no pase de unos 6 cm, más o menos teniendo en cuenta la relación.

I: ¿Por qué se te viene a la mente 6?

E1: Aquí estoy jugando con la distancia de, en ese caso con lo que dice 20, teniendo en cuenta de que... Si el área de las dos figuras que se cortan, en ese caso x , se juntaran, más o menos sería como la mitad de lo que valdría 20, entonces tendrían que valer 5, para que ambos sean 10, para que sea la mitad de 20, entonces sería un valor entre 5 y 6 centímetros.

I: Si puedes darme esta vez como un valor estimado, como un rango.

E1: Yo creo que mínimo unos 5 centímetros, y máximo, que no pueda pasar, unos 7 centímetros.

I: Unos 7. O sea que no llega a los 10.

E1: No llega a los 10, ajá.

I: Listo. Ahora, yo te pregunto. (...) Tú crees que pueda haber más de una caja que cumpla con estas características? (...) En resumidas cuentas, que pueda haber dos alturas diferentes que satisfagan las propiedades que me está diciendo el problema. ¿Crees que eso pueda pasar? que pueda haber 2, 3, no sé.

E1: O sea ¿que también tenga las mismas medidas? o sea, ¿20 centímetros a un lado, 40 centímetros al otro?

I: Sí, que pase lo mismo, y que el volumen sea 1500 también. Que pueda haber dos alturas que hagan que eso se cumpla. Exactamente.

E1: No, no creo. Creo que solamente habría una altura específica.

I: Ok, listo (...) Ahorita básicamente lo que quiero que hagas es que intentes plantear la ecuación que está relacionada a este problema. (...) E intentas resolver ejercicio.

Handwritten work on graph paper showing the derivation of a quartic equation from a volume formula. The steps are as follows:

$$V_c = b \cdot g \cdot h$$

$$1500 = (40 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$$

$$1500 = 800 - 80x - 40x - 4x^2 \cdot x$$

$$1500 = 800 - 120x - 4x^2 \cdot x$$

$$1500 - 800 = -120x - 4x^2 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ -120 - 4 \end{array} = x + x^2 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ -124 \end{array} = x + x^2 \cdot x$$

$$-5.64 = x^4$$

Figura 46. Momento 8. Fuente: elaboración propia (2021)

E1: Listo profe ya lo encontré, pero tengo una duda.

I: ¿Listo? cuéntame.

E1: El valor que me dio al final fue 5,6; pero me dio negativo, o sea me dio -5,64

I: O sea, ¿te dio una altura negativa?

E1: Una altura negativa, sí, yo creo que tal vez despejé mal.

I: Vale. Qué procedimiento hiciste, cuéntame más o menos lo que hiciste, para tener una idea.

E1: Utilicé la misma fórmula que me habías dado del volumen de la caja y despejé, y reemplacé lo que tenía, entonces reemplacé el valor del volumen que era 1500, reemplacé la altura que era $40-2x$, por el otro lado que era $20-2x$ por la altura que sería x , que sería la variable a buscar.

I: Y ¿multiplicaste todo eso?

E1: Y multipliqué todo eso.

I: Ok, ¿qué te dio? más o menos, cuando hiciste el producto de todo.

E1: Al final me quedó pues 1500 a un lado, me dio 800 menos $80x$ menos $40x$ menos $4x$ a la dos, por x (equis)

I: ¿A la dos?

E1: Vale, listo.

Estudiante 2 (E2) Actividad II (AII)

Estudiante de grado 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración 1:06:49; Día: 28/08/2020; Plataforma online: Zoom

E1: Primer estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

PA

Momento 1

Actividad II.

a.

$$P = 18 + x + 18 + x = P = 46 \text{ cm}$$
$$h = x$$
$$h = 76 - (18 + 18)$$
$$h = 76 - 36$$
$$h = 40 / 4$$
$$10 \text{ cm}$$
$$b = 10 + 18 = 28 \text{ cm}$$
$$h + 18 = 28 \text{ cm}$$

Figura 47. PA. Fuente: elaboración propia (2021)

E2: (...) Listo, lo que hice fue, nombrar primero la información h , es igual a mi altura y la base sería lo mismo h pero con más 18, sumar todos los lados de acuerdo a la fórmula del perímetro y lo iguale a 76, separe la altura y medio 10 (diez) y ya después le sume al diez ese 18 que estaba ahí y me dio 28 que la sumar $10 + 10 + 28 + 28$ me dio 76 y a así lo resolví.

I: vale lo resolviste de una vez

E2: si señor

I: listo, ¿Tú crees que, de pronto, podría haber otro rectángulo diferente a esas medidas que me diste, que pueda cumplir con esas mismas características? Es decir, otros valores que contenga las mismas especificaciones y de, el mismo perímetro que está mostrando ahí. ¿tú qué crees?

E2: No, no sé, pero pues creería que no, porque puede haber muchos caminos para resolver un problema, pero a la final siempre debe dar lo mismo, pues eso me han enseñado, así que para que de otros números no seria, las matemáticas son exactas ¿no?

b.

$$E = 1230$$
$$M = +150$$
$$N^{\circ} = 615$$
$$\begin{array}{r} +150 \\ \hline 765 \end{array}$$
$$H = X$$
$$\begin{array}{r} X 1230 - 765 \\ \hline X = 465 \end{array}$$

Figura 48. PB-1. Fuente: elaboración propia (2021)

$$M = X + 150 = 1230$$
$$H = X - 150 = 1230$$
$$M = \frac{1230 + 150}{2}$$
$$M = 690$$
$$H = \frac{1230 + 150}{2}$$
$$H = 540$$
$$\begin{array}{r} -690 \\ 540 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} +690 \\ 540 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Figura 49. PB-2. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 2

I: En este problema antes de resolverlo, si quieres puedes volverlo a leer y me gustaría que me des una aproximación de un rango que podría estar el número total de mujeres

E2: yo creo que entre 70% mujeres y 30 % hombres

I: si está bien, pero no es rango de porcentaje, sino de número total de mujeres entre cuanto estaría, ejemplo entre 300 y 500 estudiantes algo así

E2: yo creo que entre 600 y 700 estudiantes mujeres

I: listo, ¿porque crees eso? entonces así viendo este problema ¿crees que tiene o no solución este problema?

E2: ... mmm pues yo creería porque hay dice que las mujeres tienen 150 más que los hombres y si el total entre ambos es 1230 pues pienso que sería más o menos ese rango lo pienso más como porcentaje y que estaría entre 600 y 700 más o menos un 70% y yo creo que, si hay solución, pero toca darle vuelta a los números.

I: entonces ahora lo puedes resolver y cualquier duda me lo comunicas

E2: ok... (escribe en sus hojas de apuntes)

Momento 3

I: perdón una última pregunta ¿crees que es posible que este problema tenga más de una solución o no?

E2: no, creo que tiene una única solución, tiene que quedar igual siempre

I: ¿por qué crees eso?

E3: es que como ya nos dan el total y unas condiciones pues ya fijas, es difícil encontrar otra combinación, por eso te decía antes puede haber muchas formas de resolverlo, pero la solución es la misma.

I: Bueno, puedes continuar con lo que hacías...

E2: (escribe en su hoja de apuntes) ... es que hay dice que el número de estudiantes mujeres supera en 150 el número de estudiantes hombres, entonces lo que yo hice fue, dividir 1230 en

2 y luego le sume uno de cualquiera de los dos valores 150 y lo que me dio es el número de estudiantes mujeres y lo que quedo fue los estudiantes hombres.

I: Bueno, tal parece que lo realizaste de manera inmediata, (...), pero lo que queremos que hagas es una expresión algebraica que equivale a lo que te están preguntando el problema, parecidas a las ecuaciones que hemos visto anteriormente con variables, números, así, listo, que me encuentre una ecuación en términos de variables en termino de x algo así

Momento 4

E2: aaah bueno ya entendí... (Vuelve nuevamente a escribir en sus hojas de apunte) ... Listo creo que ya lo hice

I: me podrías decir más o menos como lo hiciste

E2: yo lo que hice fue como es que se llama eso, como un remplazo de variable, coloqué m que es mujeres es igual a $x + 150 = 1230$ y hombres h igual a $x - 150 = 1230$ y ya para resolverla en mujeres coloque $1230 + 150/2$ y me dio 690 y en hombre coloque $1230 - 150/2$ y me dio 540 y luego reste $690 - 540$ y me dio 150 ósea que sí.

I: y al sumar esos resultados ¿te dio 1230?

E2: si señor

I: Vale, entonces está bien, muy diferente a lo que habías realizado al principio

E2: si señor, sino que pensé que era así de inmediato y no había caído en cuenta lo que me dijiste, pero era más o menos la idea de lo que pensaba, ya entendí

I: listo, ahora vamos al siguiente problema

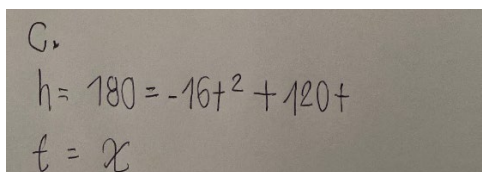

$$\begin{array}{l} G. \\ h = 180 = -16t^2 + 120t \\ t = x \end{array}$$

Figura 50. PC-1. Fuente: elaboración propia (2021)

$$\begin{aligned}
 180 &= -16t^2 + 120t \\
 -16t^2 + 120t + 180 &= hct) \\
 4t^2 (4t - 30 + 45) \\
 t &= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2 \cdot 4} \\
 t &= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 720}}{8} \\
 t &= \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8} \\
 t &= \frac{43,41}{8} = 5,42 \\
 t &= \frac{16,59}{8} = 2,07
 \end{aligned}$$

Figura 51. PC-2. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 5

E2: si señor, espera lo leo otra vez... Ósea que esa ecuación ¿que está ahí tiene que ser igual 180? Ósea esa suma

I: ¿tú que crees? ¿eso es lo que se te viene de una a la cabeza?

E2: yo digo que si

I: listo, pero antes de resolverlo realices, me puedes decir si ¿crees que el cohete cuando es lanzado tiene un límite?, es decir, llega hasta un punto y de ahí se devuelve y cae o crees que el cohete sigue derecho así el infinito por así decirlo, de acuerdo a lo que dice el problema,

E2: Pues, yo creo que si lo hicieron con un propósito debe llegar hasta cierto punto y dejar que se detenga, algo así. Porque creo que este atado a la base que creo que se devuelve o se cae (Tal vez se refiera a la raya que indica la altura del cohete con el suelo)

I: ¿Ese sujeto a algo que podría ser? y ¿crees que se devuelva el cohete?

E2: Es como una base, una cuerda algo así, es como lo que lo impulsa para salir, no sé y no sé si se devuelva, pero se puede que se caiga no sé si es lo mismo para usted

I: vale, y ¿crees que el cohete puede pasar más de una vez a la altura que dice aquí 180 pies o no?

E2: creo que el impulso solamente lo deja pasar una por 180 pies ya después va disminuyendo hasta que ya cae por completo

I: vale y última pregunta, ¿crees que este problema podría tener más de una solución o no?

E2: Es que yo veo que hay me dan números exactos como para encontrar una respuesta entonces yo creo que no tiene otra solución sino la que se pide hay y ya

I: listo, entonces ya la puedes resolver, aquí ya nos dan una ecuación y tienes que mirar que le falta o sobra para completar la ecuación correcta y resolverla, es jugar un poco con los elementos que ahí se presentan más que todo números y variables y tratar de jugar con eso, listo.

Momento 6

E2: ... el valor que tengo que encontrar es ¿cómo el tiempo final, cierto?

I: dime ¿qué crees tú, que te pide encontrar en este problema?

E2: creo que me piden encontrar el tiempo final, porque hay dice cuándo estará el cohete a 180 pies de altura

I: vale. Si el tiempo...

E2: (sigue escribiendo en sus hojas de apuntes) ... una pregunta, es que yo para encontrar el tiempo tengo que tener la distancia y la velocidad, pero para encontrar la velocidad debo tener la distancia y el tiempo, entonces ahí no sé

I: listo, este 180 como lo interpretaste en la ecuación, en que parte lo colocaste en la ecuación o como lo hiciste

E2: Como el resultado de $-16t^2 + 120t$

I: Si, entonces ahora debes resolverlo como usted considere conveniente

E2: aaah si normal como una ecuación cualquiera

I: Si

E2, aaah vale, es que mira que yo he leído y lo que me han enseñado, si uno está utilizando por ejemplo una ecuación así y no la puedo resolver por factorización, utilizo como es que se llama... la ecuación cuadrática

I: Si, no hay ningún problema puedes utilizar los métodos que tú consideres necesario para resolverla, es a tu juicio y ya me compartirás como lo realizaste...

E2: (Escribe en sus apuntes) ... 10 minutos después... es que no entiendo me dieron dos resultados

I: al final por cual método lo hizo

E2: primero coloque el 180 adentro de la ecuación y lo iguale a $h(t)$ y luego lo factorice y ya después realicé lo de la ecuación cuadrática y me dio dos valores el de menos y el de más, pero ambos números positivos

I: Listo y ¿qué resultado te dio?

E2: el de menos me da 2,07 y el de más me da 5,42 de tiempo

I: y por qué crees que crees que sucede eso

Momento 7

E2: Es que, con el profesor de física, Fabián, estamos viendo algo parecido, entonces yo cogí la ecuación normal y me estaba dando un numero super grande y recordé que él nos dice que si da algo muy grande es que por ahí no va la cosa, entonces realice la factorización primero y luego si realice la ecuación cuadrática.

I: y sabes más o menos del porque dan dos resultados y ambos positivos

E2: pues porque, la verdad no se solo lo hice como recordé, pero creería que es por la gravedad, no sé lo que sube baja, pero pues no sé

I: si cuando sube el cohete pasa por la altura de 180 y su velocidad va disminuyendo y cuando el cae aumenta la velocidad y vuelve a pasar nuevamente por los 180 pies de altura con otro tiempo.

E2: aaah listo, sí señor

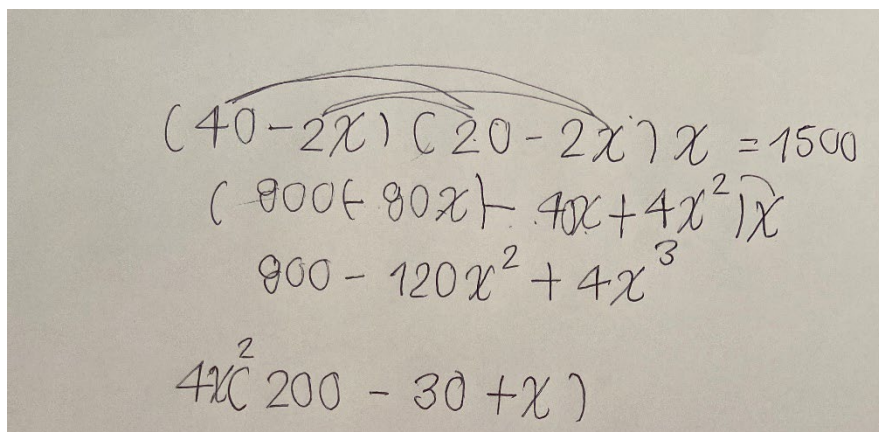

$$(40 - 2x)(20 - 2x)x = 1500$$
$$(800 - 80x - 40x + 4x^2)x$$
$$800 - 120x^2 + 4x^3$$
$$4x^2(200 - 30 + x)$$

Figura 52. PD. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 8

I: Entonces como primera pregunta cuando se habla de volumen a que grado o exponente está representada la ecuación el volumen, es decir, a que grado estaría sujeta la variable estaría cuando se habla de volumen

E2: mmm pues no sé, depende

I: listo cuando se habla de volumen vemos que se involucran 3 dimensiones ancho, alto y ¿qué más?

E2: y profundidad

I: Si, entonces ¿cuántas dimensiones serían?

E2: 3 (tres)

I: y ese tres corresponde al grado o exponente que está sujeta la ecuación, porque se involucran en este caso 3 dimensiones.

E2: aaah entonces sería x^3 en la ecuación

I: si, esto tiene que ver con la fórmula de volumen, ¿la recuerdas?

E2: el volumen sería como la multiplicación como base por altura, algo así

I: si sería la multiplicación de las tres dimensiones, base, altura y profundidad, entonces, mirando la imagen de la caja así plana que se quita de ella para que se pueda armar

E2: según lo que dice ahí se va como la parte de las esquinas que están tanto del largo y la del ancho

Momento 9

I: listo, cuando tu cortas esos cuadritos logras evidenciar de ¿cómo te quedaría la siguiente figura?, cambia o permanece igual, te asemeja a alguna forma una forma

E2: eeeh no sé, como a una chancha, no como una cruz, pero más ancha algo así

I: Entonces, cuando se dice que se dobla hacia arriba, se juntan ambas esquinas (muestra la gráfica, señalando los bordes de la figura) y forman una sola x , si lo logras evidenciar (dibuja la caja armada)

E2: sí, señor

I: y como vemos en el dibujo inicial, que el largo vale 20 centímetros, pero vemos que hemos quitado esos cuadritos quedaría con la misma medida o cambia

E2: si yo creo que disminuye, quedaría como 16 centímetros yo digo porque digamos que le quitamos 2 centímetros por cada lado que sería 4 centímetros

I: listo, pero está segura que son ¿16 centímetros? y que son ¿2 centímetros? que le quitaríamos a cada lado

E2: no, es lo que yo supongo

I: vale, pero entonces como podrías representar esa nueva medida estando segura que está bien sin adivinar en un número exacto

E2: yo creo que hay q hacer como una expresión, sin colocar ningún otro tipo de valor, sino solamente los que se muestran ahí

I: Exacto, y ¿qué expresión crees que representaría esa nueva medida?, sabiendo que se debe quitar esos cuadritos a cada lado

E2: usted dijo que al levantarla quedaría con una x , entonces quedara algo así

I: si, pero vamos paso por paso, eso es cuando ya está armada, pero sin antes de armarla teniendo en cuenta lo que se plasma ahí, como sería esa nueva medida del largo y del ancho ya quitándole esos cuadritos, usted me dijo que cambia, pero como podrías representar esa nueva mediada

E2: seria como el volumen igual a la base por la altura y la profundidad, pero quitándole esas x (equis), pero lo que hay que hallar es la altura

I: Si, pero al tener esa nueva figura la cruz como dijiste, cuando se le quitan esos lados a que se los quita

E2: mmm ósea, sería como restarle esos valores de x (equis) a 20 (veinte)

I: si, entonces ya no seria 20 (veinte) solo, como seria esa nueva medida, según lo que me acabas de decir

E2: si yo le quito esos dos lados quedaría como $20 - 2$ y la x

I: vale, pero la x de que numero va acompañada o está ahí sola

E2: eeeh pues en el 2 (dos), no sé, porque está la x donde se le quitaría eso

I: bueno y entonces con el otro lado como seria

E2: pues $40 - 2x$, ¿asi?

I: no sé, es como tú creas, pero ahora con lo que más o menos me has dicho quiero que trates de formar las nuevas medidas y si puedes formar la ecuación final, una pista, te puedes basar con la formula del volumen para realizar la ecuación final después de que tengas las medidas armadas

E2: bueno señor

I: pero antes que empieces a resolverlo una pregunta, vemos que estamos hallando la altura de la caja, tiene un límite, es decir si la altura es semejante a los números que están ahí es decir 20 y 40 o es un valor menor la altura, ¿tú que crees?, en que rango estaría esa altura, es más o menos de los números que están aquí o es parecido, como seria esa altura

E2: yo creo que varía un poquito, yo creo que como 30 algo así parecido

I: entonces crees que la altura puede ser similar a los valores que están aquí

E2: mmm no son los mismos, pero debe estar entre 20 y 40, porque yo me imagino una caja y se me vienen muchos tipos y tener una altura mayor que a alguno de los dos lados restantes, no se

I: entonces entre 20 y 40 puede que esta la altura de la caja

E2: si puede que este por hay

I: listo, entonces trata de realizar la ecuación que creas conveniente para resolverla

E2: pero aquí pensando una ecuación no puede ser $20 - 2x$ y $40 - 2x$ igual al volumen

I: si claro, es como a ti te parezca que deba ir ponle logia y cree en lo que sabes

E2: ... (escribe en su hoja de apuntes) ... una pregunta, si son 3 dimensiones y se supone que es como alto, ancho y largo y no puedo asemejarlo a un cubo, entonces yo podría hacerlo similar

I: como usted crea, si una caja se te parece a un cubo, claro que puedes utilizar su fórmula, pero recuerda que es una caja sin tapa, entonces debes mirar como acomodar las expresiones

E2: es decir que el largo pasa a dividir con la v (refiriéndose a la v de volumen)

I: pero antes de resolverla, primero trata de realizar la expresión con los datos que están en el problema y lo que hablamos a ver cómo te va listo

E2: aaaah entonces pongo esas expresiones y lo igualo a 1500 cm^3 , que sería como el volumen total

I: vale, dime al fin como definiste la base y la profundidad de acuerdo a todo lo anterior, al fin como lo decidiste

E2: el largo queda como $40 - 2x$ y el otro es $20 - 2x$

I: listo, entonces basándonos en la fórmula de volumen como quedaría la expresión

E2: sería, $40 - 2x * 20 - 2x$ igual a 1500 cm^3

I: ¿está segura?, mire bien la formula, que le falta

E2: aah la altura, lo que hay que hallar

I: si, y en este caso como estaría representada

E2: pues, lo que hablamos cuando se junta se forma una x , entonces la altura valdría x

I: listo, entonces trata de formar ahora si la expresión que me represente el problema así como las anteriores

Momento 10

E2: ... yo creo que hay que repartir las expresiones que te dije y multiplicarlas

I: eso que me estás diciendo tratando de escribirlo

E2: ... es que me quede ya aquí y no pude hacer más, me quede en $800 - 120x + 4x^3 = 1500$ y de ahí no se la verdad como resolverlo, no me acuerdo si me lo han enseñado o no

I: listo, ya que no la pudiste resolver nuevamente has cambiado de opinión o siguen pensando que la altura puede valer entre 20 y 40 o más o mucho menos, de acuerdo a lo que hiciste las nuevas medidas y demás

E2: yo creo que mucho menos, porque las medidas de ambas partes disminuyeron entonces creería que la altura también, todo debe ir como acorde a los valores que están ahí para que se forme una caja

I: vale, pero bueno más o menos en ¿cuál rango estaría la medida de la altura?, más o menos que crees

E2: si es así debe estar más o menos entre 10 y 20 centímetros algo así o un poquito menos, entre 1 y 10, es que ya vi que no puede ser tan grande porque ya no sería una caja, porque así lo veo en la figura, entonces yo diría que por ahí.

Estudiante 3 (E3) Actividad II (AII)

Estudiante de grado 11^o de la Institución Educativa la Buitrera

Duración 1: 08:32; Día: 21/07/2020; Plataforma online: Zoom

E3: Tercer estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

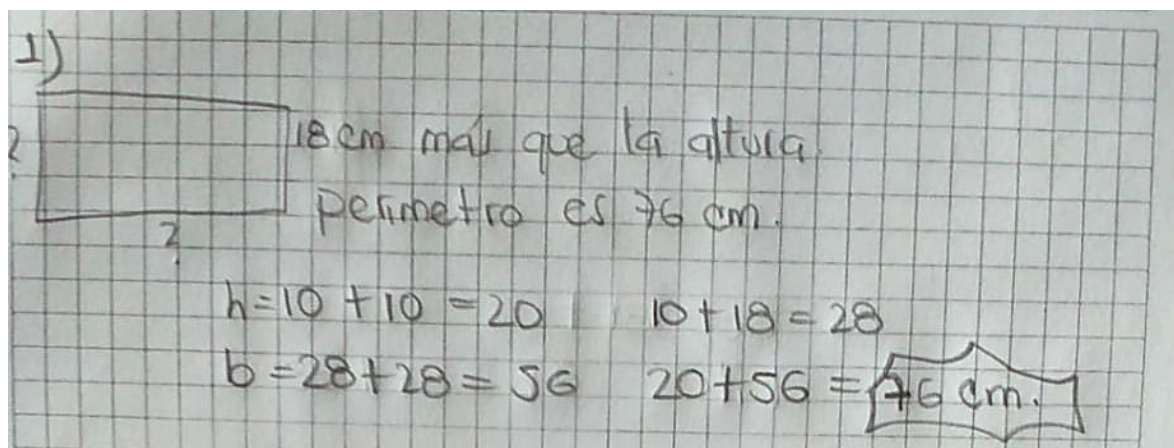


Figura 53. PA. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 1

I: Listo, entonces el primer problema sería este: un jardín rectangular tiene una base que mide 18 cm más que la altura. El perímetro mide 75 cm. La idea es que halles las dimensiones del jardín, tanto su base y como su altura. Entonces este es el primer problema, te voy a dar un rato para que intentes resolverlo ¿listo? ¿Te parece bien?

E3: si

E3: ... Listo

I: bueno, excelente, ¿entonces llegaste a alguna solución?

E3: Ehh sí, allí dice que toca hallar la altura y su base ¿no?

I: aja

E3: Para mí la altura es 10 y la base sería 38.

I: ok, Cómo hiciste para llegar a esta solución, cuéntame más o menos.

E3: Pues busque números que, bueno para hallar el perímetro sería digamos los lados, sumo los dos lados, los dos lados de los más corticos, los sumo y me da un número, entonces en este caso serían 20

I: ok

E3: ¿sí?

I: si, continua

E3: y como dice que, ahh no espérate, si será que está ¿bien?, es que como dice que la base mide 18 cm más

I: O sea hay dos condiciones que se deben cumplir, lo primero es que el rectángulo que construyas tenga un perímetro de 66cm ¿verdad? Y la otra condición es que la base tiene que ser 18 cm más que lo que sea que mida la altura. ¿Sí?, por ejemplo, si...

E3: pero hay un problema que acabe de notar

I: ¿qué cosa?

E3: Yo le sume los 18 cm al total de la suma de los dos lados, no al otro lado, si me ¿entendes?

I: si, si entiendo

E3: Entonces no sé si este bien para cumplir esa condición, no, no, ya vi que está mal

I: Si quieres te doy un tiempo más, ¿vale? ¿Te doy entonces otros minutos?

E3: SI dale, gracias

I: me avisas

E3: si, bueno

E3: Listo

I: ¿listo? Bueno, cuéntame

E3: bueno, para hallar el perímetro son la suma de los lados, ¿no?

I: aja

Momento 2

E3: entonces, para mí la altura daría 10 y la base serian 28

I: ¿28?

E3, si 28

I: Vale

E3: o sea que la suma de todos los lados me dio 76cm

I: cómo hiciste para llegar a esta solución

E3: tanteando (se ríe)

I: (se ríe)

E3: Cogí un número y vi que era muy alto, entonces lo fui bajando y así

I: Ah ok, entiendo. ¿Pudiste escribir alguna ecuación asociada con el problema, o no pudiste hacer eso?, si no pudiste, está bien, no hay problema

E3: No, nunca lo vi así

I: Vale, no hay problema. Te quiero hacer un par de preguntas sobre este ejercicio entonces. La primera, es si en efecto el rectángulo que estas colocando, se le puede dibujar, ¿o sea tu podrías construirlo?

E3: ¿Cómo así construirlo?

I: literal coges una regla, entonces me dijiste que las dimensiones eran ¿28 y 10 cierto?

E3: aja

I: Literal que cojas una regla y dibujes, un lado de 10 y el otro de 28, y así, entonces ¿se puede dibujar?

E3: SI, es posible

I: ok, vale. Tú crees que sería posible dibujar otro rectángulo, que sea diferente a ese que tu planteaste, o sea que tenga otras dimensiones que no sean 10 ni 28 pero que al mismo tiempo satisfagan estas propiedades, o sea. que el perímetro sea 76cm y que la diferencia entre la base y la altura sea de 18, es eso posible?

E3: No creo

I: ok, ¿por qué piensas que no es posible?

E3: Pues porque es exacto, si hubiera decimales, tal vez, pero como está tan exacto creo que no

I: Crees que es solo ese rectángulo, y no crees que haya otro con el que pase lo mismo

E3: Pues ahh si, si, como es la suma de los lados puede que cambie de número que la sumarlo de lo mismo

I: Y ¿que la diferencia sea la misma?

E3: ahh sí, porque podría variar la base es más que el alto, podría variar a que el alto sea más que la base

I: aja, aunque si, entiendo la posibilidad, uno podría hacerlo de tal manera de que sea la altura mida 10 y la base 28, pero digamos que de alguna manera ese rectángulo sería el mismo. A lo que yo me refiero es que digamos si hay otra pareja de números diferentes a 10 y 28, que satisfagan esas propiedades, esa es mi pregunta. Que en efecto haría que pues haya otro rectángulo

E3: no, no creo.

I: Vale, vale, entonces coméntame, ¿por qué crees que con lo que te acabo de decir no es ¿posible?

E3: Porque son instrucciones muy claras y exactas, entonces como cambiaríamos eso si es muy claro lo que piden

2) 1.230 estudiantes / niñas supera 150 hombres
 $1230 \div 2 = 615 + 150$
 $= 765$ mujeres en total

Figura 54. PB. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 3

E3: Dice cuántas estudiantes hay en total

I: aja, refiriéndose a las mujeres

E3: no sé si el procedimiento que hice este bien, pero lo que hice fue que 1230 lo dividí en 2, y le sume 150, y me dio 775 mujeres

I: ¿Cuál es el mínimo de mujeres que debe haber y por qué?

E3: Cómo dice que supera a los hombres...

I ¿qué te dice esa intuición con esas condiciones que te ponen allí? y un máximo?

E3: Como las mujeres superan son más, entonces teniendo en cuenta que la mitad son 115, yo diría que son más de 700 y un máximo de 800

I: ¿Cres que este problema sea posible que no tenga solución?

E3: diría que sí, y muchas maneras de hacerla

I: Es posible que haya más de una solución, ¿que haya dos números posibles de mujeres que cumplan con esas condiciones?

E3: no creo, porque creo que es muy exacto.

3)
 $h(t) = -16t^2 + 120t = 104t$
 $t = ?$ 180 pies

Figura 55. PC. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 4

E3: para resolver esto hay que tener una formula ¿cierto?

I: A que te refieres con formula

E3: para hallar la velocidad de un vehículo o algo así, es distancia sobre el tiempo, entonces me refiero a algo parecido a eso.

I: La $f(x)$ que nos están dando allí, la altura de alguna manera está relacionada con el tiempo, y es esa expresión la que nos dice como la altura va a cambiar a medida de que el tiempo cambia si tu coges esta T que está allí y le asignas un valor determinado por ej. 5 entonces a los 5 seg y si cambias la t por el 5 entonces resuelves las operaciones que esta involucradas, elevas el 5 al cuadrado los multiplicas por 16 negativo le sumas 120 por 5, eso te va a dar una altura entonces como uno interpreta eso de alguna manera ósea que el cohete va estar a altura que sea lo que sea que me va a dar el resultado de esas operaciones que te dije ahí. Esa es la manera como se interpreta eso, entonces allí te están diciendo es cuánto tiempo tiene que pasar para que el cohete este a una altura de 180, es eso lo que realmente tienes que abstraer. si no puedes hacerlo no hay problema y podemos pasar directamente a la pregunta. ¿Tú sabes qué tipo de $f(x)$ esta allí escrita cierto?

E3. ¿cuadrática?

I: por supuesto.

E3: o sea que si tengo que asignarle un número a la T ?

I: si de alguna manera, ¿mira que la pregunta dice cuándo?, eso se refiere a tiempo.

te voy hacer un par de preguntar y ahí vamos viendo ¿vale?, Según lo que está escrito ahí, ¿tú crees que el cohete pasa por más de una ocasión por 180 pies de altura?

E3: repítame la pregunta

I: mejor hagamos está. Tú crees que este cohete, según la información que nos dan en el problema, ¿va a seguir subiendo indefinidamente?

E3: si, yo creería

I: ¿por qué?

E3: porque no dice a qué tiempo está en tal parte o a tal punto y ahí se quedará

I: o sea ¿que no habría una altura máxima?

E3: no

Momento 5

I: eso implica entonces, de alguna manera ¿que el cohete nunca vuelve a la tierra?

E3: pues...

I: con base en lo que me has dicho

E3: pues si, a lo que me refería en la pasada es que no especifica cuando hará esto, si me entendes, o sea, solamente dice a cuánto tiempo estará a 180 pies, no dice a qué lugar va ni a que punto

I: tú crees que a medida de que vaya, pensemos en la $f(x)$, a medida en que yo le vaya asignando valores al tiempo cada vez mayores, necesariamente la altura va a tomar valores cada vez mayores?

E3: si claro, porque a medida que pasa el tiempo, obvio va ir estando cada vez más arriba

I: teniendo eso en cuenta, entonces el cohete pasa, ¿una sola vez por 180 pies de altura? o ¿pasa más de una vez?

E3: una vez

I: ¿por qué?

E3: porque va a seguir subiendo y va a aumentar cada vez más los pies

E3: porque va a seguir subiendo y va a aumentar cada vez más los pies igual que el tiempo.

I: si pudieras describirme, ¿qué tipo de información te proporciona la $f(x)$, que está allí escrita?

E3: que el tiempo va relacionado a la altura, o la altura al tiempo

I: ¿únicamente eso?

E3:

si

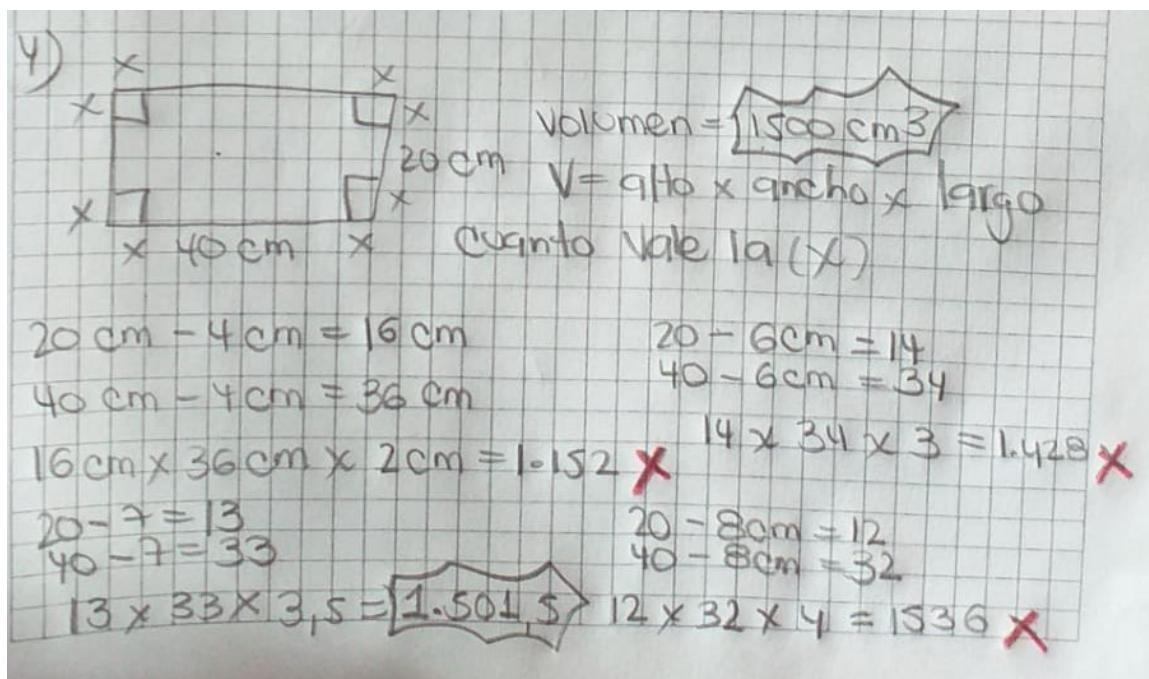


Figura 56. PD. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 6

I: ... tú sabes que el concepto de volumen se mide en unidades cubicas, esa caja se puede construir tomando una pieza de cartón, como la que está aquí dibujada, esa pieza es de 20×40 cm, y se construye cortando cuadrados cuyos lados poseen una dimensión x cm, eso quiere decir que es que uno corta es una variable, que puede ser muy chiquita o muy alta, eso es lo que significa la x , pero algo que hay que tener en cuenta es que si yo le aumento la x , por lo menos en este lado, entonces se la tengo que aumentar a todas, o sea siempre va a ser el mismo cuadrado que tiene todos los lados iguales en las 4 esquinas, eso se entiende bien?

E3: si

I: yo puedo coger un cuadrado bien chiquito pero lo importante es que sea cuadrado, referente a lo que estoy cortando, es como en las manualidades, cuando se hacen cajitas lo que hace uno precisamente es cortar estas esquinas, y doblar las pestañas, y pegar los bordes. si lo ha hecho?

E3: si

I: en este caso sería como una cajita sin tanta altura, porque la x (equis) se ve como relativamente chiquita, listo, la pregunta: teniendo en cuenta que la caja tiene un vol. en específico ¿cuál podría ser la altura de la caja?

E3: ¿sin las puntas, doblando las puntas?

I: no o sea, haber cunado tu doblas las pestañitas, ya lo que cortaste que son los cuadrados del lado x , eso es lo que uno corta, cuando se quita queda como que tú puedes armar la cajita doblando las pestañitas, esa caja que tu construyes tiene un vol. ósea hay un espacio que tú puedes medir que es el que está dentro de la caja, ese espacio me dice el problema que tiene que ser de 1500cm^3 esa es como la condición ¿qué altura es x (equis), (porque entre más grande sea el cuadrado que yo corte pues más largas van a quedar las pestañas) para que mi vol. sea de esa cantidad? hay algo que uno tiene que tener en cuenta y es que vol. de una caja se calcula del producto de la altura el ancho y el largo. Por ej., si yo tengo una cajita de largo 2 cm de ancho 3 cm y de altura: 4 cm, el resultado sería de multiplicar $2*3*4$ eso sería 24cm^3 . así se calcula el vol. de una cajita. Cuéntame qué es lo que entiendes

E3: tengo que hacer que mi cajita tenga el vol. de 1500cm^2 , sin contar los cuadritos que voy a cortar

Momento 7

I: ¡cúbicos!, claro es que para construir la caja tienes que quitar esos cuadritos. Hagamos una cosa, voy a hacer un dibujito, para que miremos juntos a lo que se refiere. Esta es la cartulina hay un lado que tiene un lado que mide como 40 cm y otro que mide como 20 cm, entonces si yo quiero construir una caja, necesito cortar los bordes para poder doblar las pestañas, entonces estos son los cuadraditos todos idénticos, y estás las pestañas, la idea es que esto se doble, si yo doblo esto, voy a tener una cajita, entonces observa que así como está diseñado, esa x que yo corte va a ser correspondiente con la altura de la caja, coincidencialmente porque así está diseñado, entonces ¿cómo calculo el vol. de esta caja? el vol. de la cajita se escribe el largo el vol. de una cajita se escribe como la base multiplicado por el largo multiplicado por la altura, entonces yo tengo que saber que son cada una, la base cuanto mide, ¿cómo lo sabemos? pues resulta que la base originalmente antes de que uno corte las esquinas mide 40, entonces como le corto las esquinas, entonces tiene que ser $40-x-x$, tengo que restarle la x (equis) dos veces porque le corto una a la derecha y otra a la izq. y eso es lo mismo que $40-2x$. Ese mismo análisis lo tengo que hacer para el largo, ahora va a ser 20 entonces le tengo que quitar las punticas entonces $20-2x$ y qué es la altura, ya sabemos que es x (equis)

Entonces el vol. cómo se calcula:

$$V=(40-2x)(20-2x)(x)$$

$$1500=(40-2x)(20-2x)(x)$$

Si observa que esto aquí de hecho es una ecuación, que depende de x . De alguna manera ¿se puede despejar la x de aquí para saber, que valor hace que se satisfaga esto de aquí? debe haber alguna altura algún número que yo pueda reemplazar por la x (equis) que haga que al yo multiplicar todo esto junto me dé a la izquierda 1500.

E3: entonces le tengo que dar un valor a la ¿ x ?

I: claro, bueno tú ¿qué características piensas que debe tener esta altura? tal vez no el valor exacto, pero si un rango de valores, o que la altura debe ser mínimo tanto o máximo tanto

E3: uy está difícil,

E3: no encontré uno exacto, La x (equis) la puse como 3,5, cogí un número vi que no dio, y entonces le fui dando así sucesivamente. mira que haciendo todo el procedimiento me dio 1501,5 y le baje un poquito más al decimal en dos y ya no medio, le puse 3,5, porque con el 3 solo no me dio tampoco, y se pasó un poco, y le baje a 3,2 y ya no me dio

I: ¿de qué manera tú crees que se puede conocer la altura de la caja? que procedimientos crees que podrían servir

E3: no sé

I: Un ej., es el que hiciste de alguna manera tantear. ¿por qué no escogiste una x (equis) más grande, por ej. cómo 15? ¿qué te hizo elegir x (equis) más chiquitas?

E3: porque primero empecé por el número 4 primero le puse 2 y luego le puse 4 y vi que me pase, entonces pues el 3 ya vi que era muy poquito, entonces empecé ya por decimales y así llegue a la conclusión

I: Si pudieses dar un rango en el que dices que la altura de la x tiene que estar en este rango números, ¿qué rango me dirías?

E: entre 3 y 4

I: Lo cual es un rango chiquito, o sea que garantizas de alguna manera que son decimales

E3: yo digo que si tiene que ser decimal

I: ok, ¿crees que puede haber más de una altura que satisfaga con las características del problema? o sea que por, digamos que tú haces el procedimiento, y que entonces sigamos que con 3,7 te dio y yo te diga que a mí me dio 3,2, y digamos que ambos tengamos razón, entonces literalmente haya dos cajas diferentes que haga que se cumpla esto, ¿tú crees que eso es posible?

E3: Pues no sé, creo que si puede ser

I: ¿por qué este sí? y el ejercicio de las estudiantes y del rectángulo no?

E3: o sea que la x sean totalmente diferentes pero que el ejercicio tenga las mismas instrucciones

I: o sea ¿que las cajas sean diferentes pero que las condiciones del problema sea las mismas?

E3: si, no no creo, es que tendría que cambiar mucho los valores y como tiene que tener las mismas condiciones

I: entonces crees ¿que solo hay una caja posible que satisface esas propiedades?

E3: si

I: ok.

3.6.2.1 Análisis de los resultados de la Actividad II (AII): Resolución de problemas en torno a una incógnita

Esta sección presenta el análisis de los resultados obtenidos de los estudiantes (E1, E2 y E3) y del cual, sintetiza la información anterior a los propósitos planteados en la investigación.

Estudiante 1 (E1)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la segunda actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se logró apreciar:

En primer lugar, se logra observar cómo el estudiante parece tener mayor fluidez al momento de reconocer las ecuaciones inmersas en las situaciones problemas cuando el contexto establecido es de naturaleza geométrica, en comparación a los problemas más relacionados al conteo. Además, el estudiante fue capaz de reconocer el rol y lo que representa la incógnita en cada uno de los cuatro problemas presentados en la actividad; incluso, en el problema “d” (que resulta ser el de mayor complejidad) se evidencia cómo reconoce las situaciones en las cuales la indeterminación aparece en múltiples escenarios del problema: él sabe que la incógnita “ x ” (equis) que representa la altura de la caja no sólo “aparece” ahí, identifica que es también la longitud de los segmentos de los extremos los cuales deben ser restados al ancho y largo de la caja.

Particularmente en el problema “c” (el del cohete) el estudiante reconoce la función presentada como una relación existente entre la altura del cohete y el tiempo; sin embargo, en una aproximación superficial de su parte, no abstrae ninguna información de la expresión; podría deberse a que el estudiante no se encuentra lo suficientemente familiarizado con el tipo de función inmersa en el ejercicio.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*” se logró distinguir:

La subcategoría “*Ligada al tanteo*” implica que el estudiante hizo uso directo o indirecto del tanteo (ensayo y error) para intentar encontrar la solución de la ecuación. Entendiendo que las elecciones dan cuenta de las creencias que los estudiantes puedan tener del conjunto solución de la ecuación y no son elegidas absolutamente de manera arbitraria.

El estudiante hace uso, en un par de ocasiones, de métodos al postular soluciones que podrían estar relacionados al uso del tanteo, en ello, hace evidente lo que al parecer es un criterio basado en la elección de mitades para postular o proponer valores posibles que sean solución de la situación problema. Esta intuición, al menos para estos casos particulares, también podría considerarse acotada, especialmente para el problema “d” (de la caja), puesto que en su razonamiento no toma en cuenta la condición del volumen al elegir una posible altura. En el problema “b” (de los estudiantes hombres y mujeres) su criterio le permite, por lo menos, coincidir en el rango de solución para el ejercicio.

La subcategoría “*Cohesión interpretativa*” implica que el estudiante es capaz de llegar a conclusiones gracias a su familiaridad con la estructura de la ecuación, en este caso, con las operaciones involucradas.

El estudiante, a medida que se le cuestiona en relación al problema “c” (el del cohete), particularmente sobre la trayectoria del mismo, aparentemente logra un reconocimiento de las implicaciones del signo menos en uno de los coeficientes del polinomio en la función. En su discurso se percibe lo que parece ser la alusión a unas intuiciones adquiridas en sus experiencias previas con la física.

La subcategoría “*Representación espacial*” hace alusión a los momentos en los que el estudiante se atreve a realizar aseveraciones sobre una situación matemática debido a la construcción de representaciones mentales o el “imaginar objetos ausentes”. Incluye, pero no se limita únicamente a la construcción mental de objetos geométricos, también pueden ser diagramas o el ser capaz de representar gráficas de funciones a partir de las características que el estudiante encuentra y considera relevantes para su representación.

El estudiante identifica la altura de la caja en el problema “d”. Esto lo hace gracias a una representación mental de la caja que ha logrado crear teniendo en cuenta la información que se le ha proporcionado previamente.

La subcategoría “*Acotada*” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘intuitivas’ o de ‘sentido común’ que pueden ser inapropiadas o falsas. Se ha podido identificar algunas: el estudiante relaciona la unicidad de la solución del problema “a” con el hecho de tener el perímetro del cuadrado como un valor fijo. Esta no es la única condición, dado que hay infinitos rectángulos con el perímetro proporcionado. Este evento aparece con similitud al hacerle la misma pregunta con el segundo problema, en el cual el estudiante argumenta la unicidad en el valor de la cantidad de mujeres debido a que están dando un valor fijo de “1230”; muy relacionado con lo anterior, el estudiante no reconoce (al menos en un primer reconocimiento) cómo dos condiciones para dos incógnitas, establecen una solución para ellas, muestra dudas en sus posturas.

En el problema del cohete, el estudiante no encuentra argumentos iniciales para concluir múltiples soluciones a la ecuación $h(t) = 180$. No logra abstraerla ni desde el contexto del

problema, ni desde lo observable en la función involucrada; esto último cambia una vez se le pregunta si cree que el cohete volverá a la tierra.

Por último, en general la evidencia muestra que el estudiante no logra establecer condiciones para las cuales una situación problema puede tener múltiple solución.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. En este caso, el estudiante al manipular las ecuaciones, comete errores procedimentales que muestran que no está del todo familiarizado con las estructuras (Figura 43, 45 y 46). Estos errores parecen ser más remarcables en las ecuaciones que no pueden ser despejadas exclusivamente con transposición de términos.

Estudiante 2 (E2)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la segunda actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se halló:

En primer lugar, se contempla cierta destreza al momento de reconocer ecuaciones inmersas en problemas, en este caso al contexto implantado de naturaleza geométrica. Para el problema “a”, aplica el conocimiento geométrico adquirido y utiliza las nociones geométricas de perímetro y lados de una figura, para interpretar y comprender situaciones de la vida cotidiana, haciendo uso de la terminología adecuada. Se destaca la capacidad de utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar y discriminar información referente al problema.

Así mismo, se resalta la capacidad de interpretar de manera lógica el problema “c” (el del cohete), formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una expresión funcional entorno al problema, en particular la altura y tiempo, sin embargo, aún conserva aparentemente confusión en la expresión que representa una función versus a la de una ecuación, eso es evidente cuando en su discurso la nombra como una ecuación en vez de función según lo presentado, pero al final alcanza adecuadamente establecer la solución del problema.

Como resultado, la estudiante es capaz de abstraer y traducir situaciones del lenguaje verbal y transformarlo al lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas, incorporar el planteamiento y simbolizar relaciones, en torno a la resolución más adecuada con la información ofrecida y su capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.

Por último, y a modo de Sugerencia, la estudiante debe tener cuidado en como organiza y sintetiza la información en pro de realizar conversiones favorables de los datos y considerar en dibujar esquemas que le ayuden a visualizar mejor el panorama, ya que al no pulir estos aspectos puede provocar más adelante tropiezos en la construcción de su saber matemático.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*” se pudo observar:

La subcategoría “*Acotada*” implica que, establece analogías dentro de una intuición acotada, errónea o de ‘sentido común’, que no le permite trasladar parámetros o resultados obtenidos a problemas posteriores con una misma intención, evitando que realice ajustes pertinentes, en los cuales, una situación problema puede tener múltiple solución. Pero en algunos casos esas connotaciones y diferencias no son tan evidentes y la estudiante debe poseer una perspicacia muy aguda para distinguirlas. Esto sucede con el problema “a”, dado que se puede armar infinitas formas de rectángulos con el mismo perímetro.

A su vez, La estudiante hace hincapié en el último problema “d”, en particular se observa que al no determinar la solución y de no comprender el proseguir del ejercicio, decide dejarlo así y argumentar que tal vez no le enseñaron ese tipo de problemas en la escuela, cerrándose a posibilidades sobre intentar proponer algo interesante por más absurdo que parezca. Porque así, estas intuiciones erróneas pueden coexistir y convivir a lo largo del tiempo junto a las interpretaciones conceptuales correctas, incluso toda la vida (López, 2006).

La subcategoría “*Cohesión interpretativa y creadora*”, se han situado juntas, porque, se evidencio que la estudiante convino estas dos intuiciones para dar con la solución de los problemas, por ejemplo, reconoce aparentemente una de las implicaciones que tiene el problema del “cohetes” sobre el ¿por qué? de las dos soluciones. En su discurso se percibe que relaciona momentos adquiridas en el colegio con la asignatura de física e intuye que podría ser lo mismo y eso le da destreza para Construir conexiones con las matemáticas, en el que se

aborde lo concerniente a operaciones, números, estimación, etc. Logrando un rol fundamental de la manifestación intuitiva y es el de conferir certeza a las ideas obtenidas después de haberlas extrapolado para abstraer elementos que le puedan servir en su proceso de resolución.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*”. En este caso, la estudiante al manipular las nociones, de las cuales se rescatan geométricas y algebraicas, para describir, interpretar y comprender situaciones diversas e identificar relaciones de dependencia en contexto cotidiano. Puede que, aun su capacidad al expresar y familiarizar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado, se observe irregularidades, pero la idea esta y es fundamental que en la escuela promuevan este tipo de contenidos, que permitan en el estudiante transformar situaciones verbales a unas expresiones algebraicas y viceversa, fomentando el uso de nuevas habilidades en la construcción significativa matemática.

Estudiante 3 (E3)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la segunda actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se halló:

En primer lugar, se logra determinar cómo en el conocimiento matemático de la estudiante, que parece tener afianzado el método de ensayo y error para la resolución de problemas, es decir, donde la solución sea una o dos incógnitas, si bien, este método es compatible con las matemáticas, carece de precisión y a largo plazo es perjudicial, para satisfacer la respuesta de un procedimiento perfectamente elaborado, vital en esta ciencia. Por ejemplo, en el problema “a”, se identifica el uso de esta metodología para presentar soluciones que podrían estar relacionada a la respuesta. Además, en su discurso lo manifiesta claramente cuando se le pregunta “¿cómo hiciste para llegar a esta solución?” y ella responde “tanteando”. Por otro lado, la estudiante es consiente que, para encontrar la solución correcta, identifica que toda la suma de sus lados debe dar 76, lo que significa que utiliza a nociones geométricas adecuadas, como la de perímetro para describir, interpretar y comprender la situación.

Así mismo, sucede con el problema “b”, Utiliza el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar números con incógnitas de primer grado como una herramienta más con la que aborda y resuelve problemas.

La segunda categoría “*Sobre la manifestación intuitiva*” se logró apreciar en el estudiante:

La subcategoría “*Ligada al tanteo*” implica que el estudiante hizo uso directo o indirecto del tanteo (ensayo y error), muestra la práctica y la familiaridad que tiene la estudiante con ciertos objetos y procesos de desarrollo en las matemáticas. Esto sucede en casi todos los problemas presentados, es evidente que no logra abstraer elementos importantes de la información suministrada, pasa por alto varias de las intervenciones del investigador, y simplemente concluye que este método es la mejor opción para su elaboración.

Se considera que, dentro de sus posibilidades basadas en la percepción y habilidades sensible que unida a la memoria, experiencia e información del problema le permite conducir al estudiante, dar respuestas rápidas y precisas que a su vez van ocasionando errores sostenidos en el tiempo, por no ser rigurosa en la realización de un adecuado proceso para encontrar la solución.

La subcategoría “*De cohesión primaria*” implica que, se usa más como sentido común o como noción primitiva. Esto se nota, por ejemplo, en el problema “a”, se pone en manifiesto, un tipo de nociones acerca de cómo desarrollar el ejercicio, utiliza interpretaciones primitivas, muy comunes en estudiantes de Educación básica, que suelen a veces ser peligrosas el pensar así, porque podrían eventualmente distorsionar el pensamiento matemático. Al explicar cómo desarrolla este ejercicio, menciona argumentos triviales sin ningún tipo de profundización metodológica, se queda en lo evidente (Momento 1, actividad II). No propone un método lógico racional para opinar sobre cómo podría resolverlo y como no tiene certeza de lo que realiza, cree que así podría estar bien.

La subcategoría “*Cohesión interpretativa y creadora*”, la estudiante sorprende, cuando intenta resolver el problema “b”, logra apropiarse y adaptar la información a sus creencias y procede a resolver el problema sin mayor complejidad (a pesar que, no es exactamente lo que se le pide que haga en el ejercicio), la cual transforma y consigue su propia percepción de como quedaría la solución, relacionando aparentemente sin el más mínimo esfuerzo datos, que

Sorprendentemente al ser poco común este tipo de propuesta, logro determinar el resultado y además en la evidencia de su discurso y escrito argumenta de manera solida el procedimiento ningún tipo de infracción a la norma matemática.

La subcategoría “*Acotada*” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘acotadas’ o de ‘sentido común’, que pueden ser inapropiadas o falsas. La evidencia muestra que opera y argumenta de manera inconsistente y con una fuerte sensación de certeza, frente a cómo interpretar ciertos contenidos matemáticos, implicando el devenir de argumentos engañosos y que dificulta el aprendizaje por su alta resistencia al cambio y su posibilidad de deconstruir los problemas. Se ha podido identificar algunas: la cual, la estudiante no logra construir condiciones para las cuales una situación problema puede tener múltiples formas de solución. Este evento aparece con similitud al hacerle la misma pregunta con el tercer problema, “del cohete”, la estudiante no encuentra argumentos iniciales para discernir las múltiples soluciones de la ecuación $h(t) = 180$. No logra comprender ni desde el contexto del problema, ni lo observable en la función involucrada.

Tiende a ser contradictoria su postura ante como, percibe y adapta la representación proporcionada en el problema del cohete, no es capaz de abstraer de manera lógica lo presentado, sino que simplemente se deja guiar por lo que cree, precipitando juicios incorrectos que perjudican su conocimiento matemático y sobre la vida misma.

Para finalizar, con la categoría, se abre un pequeño paréntesis, sobre la utilización de la subcategoría muy leve por parte de la estudiante, la cual es “*Representación espacial*”, hace alusión a los momentos cuando la estudiante lanza juicios sobre una situación matemática debido a la construcción de representaciones mentales o el “imaginar objetos ausentes”. Incluye, pero no se limita únicamente a la construcción mental de objetos geométricos, también pueden ser diagramas o el ser capaz de representar gráficas de funciones a partir de las características que el estudiante encuentra y considera relevantes para su representación.

Esto se evidencio de forma sutil en el problema a y d, la estudiante intenta realizar esquemas la cual le represente el problema y además le ayude a determinar lo que realmente está buscando, es decir, la solución. A pesar de que, no es muy explícita con estos movimientos se le acredita su esfuerzo en intentar crear bocetos de la información que se le ha proporcionado previamente.

La categoría “*Desempeños y competencias del pensamiento matemático*” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. En este caso, los resultados obtenidos se detectan, que los contenidos matemáticos se imparten de forma aislada, de tal forma que, la estudiante no relaciona conceptos, generando en varias ocasiones descontextualización del enunciado del problema. Las expectativas de desempeño durante la actividad, se queda en lo mínimo, lastimosamente solo propone métodos simples, procesos triviales en los cuales encontrar la solución no implique mayor esfuerzo matemático.

3.6.3 Resultados de la actividad III (AIII): Representación e interpretación en relación con la ecuación y función

Esta sección, se compone de la transcripción adquirida después de su aplicación a los estudiantes (E1, E2, E3), y para su abstracción, es dividida en momentos que el investigador considera relevantes y permiten aportar en la investigación. Cabe resaltar qué, la transcripción no está completa, solo se exponen en el apartado, lo que realmente contribuye al proceso del análisis.

Estudiante 1 (E1) Actividad III (AIII)

Estudiante de grado 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración grabación 1: 0:17:59; Día: 09/10/2020, grabación 2: 0:10:57; Día 09/10/2020, grabación 3: 0:35:18 Día 12/10/2020, grabación 4: 0:40:51 Día 12/10/2020, grabación 5: (0:30:12) 12/10/2020: Plataforma online: Zoom

E1: primer estudiante en aplicarle en instrumento

I: Investigador

P1

Momento 1

Handwritten mathematical solution on grid paper:

$$1. \quad 2x - 12 = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

Figura 57. P1. Fuente: elaboración propia (2021)

E1: Listo, ya tuve como resultado 6

I: Vale, vale... ¿Qué hiciste para resolverlo?

E1: Despejé la “ x ”. Entonces lo que hice fue... Como está igualado a cero, entonces pasé el “-2” al otro lado, quedaría positivo, y entonces como está multiplicando la x , pasa a dividir, entonces quedaría "12 sobre 2" y eso me da 6.

Momento 2

I: Listo. Excelente. Vamos a leer entonces la B. Dice: "La siguiente gráfica corresponde a la función (...)" entonces observa que ahí hay un plano cartesiano que tiene un trazo de color rojo, ese trazo vendría siendo el trayecto que lleva la función $f(x)$, ¿cierto? tú estás familiarizado con esta representación? de las funciones?

E1: Si señor.

I: Ok, entonces, con base en lo que has aprendido en el colegio, me gustaría que me dijeras cuales son... Qué es lo que tú puedes observar, qué características le puedes asignar a la gráfica de esta función, entonces aquí hay unos ejemplos, digamos, te dicen que digas cual es el intercepto con el eje x , que digas si es creciente, decreciente, todo lo que puedas decir de la función. ¿Qué observas en esta gráfica?

E1: Que intercepta con el eje x en el punto 6, que es ascendente o creciente, y sí, ascendente positivo.

Momento 3

I: Bien, vale, vale. Ahora quiero que me digas si notas... Qué similitud importante notas entre la expresión que determina la función y la ecuación que viste en el punto "a".

E1: Que creo que las dos determinan el punto donde se une con el eje x , o sea el 6.

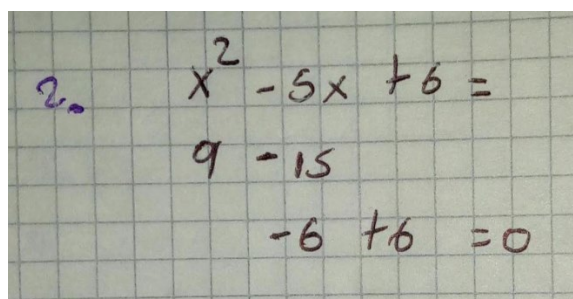
I: ¿Por qué crees que pasa eso?

E1: No sé. Supongo que para cada punto digamos que hay una ecuación, o una... Sí, para saber dónde va a interceptar un punto, se necesita primero formular una ecuación para así mismo determinar donde se va a interceptar con el eje.

I: Listo. Si yo te pregunto cuáles son las coordenadas del punto donde se intercepta el eje x con la gráfica de la función, con el trazo de la función, que me dices tú ¿qué es?

E1: Sería 6 en " x " y cero en " y ".

I: Ok. (...)



Handwritten work on grid paper showing the substitution of $x=3$ into the equation $x^2 - 5x + 6 = 0$. The work is as follows:

$$\begin{array}{rcl} 2. & x^2 - 5x + 6 = & \\ & 9 - 15 & \\ & -6 + 6 = 0 & \end{array}$$

Figura 58. P2. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 4

E1: Listo ya encontré el valor de " x " (equis)

I: Listo. ¿Cómo lo hiciste? y ¿qué valores te dieron?

E1: Reemplacé el valor de la " x " (...) en caso tal de que toda la ecuación diera cero, entonces encontré que ese valor es 3. Entonces... El 3 se elevase al cuadrado, en este caso reemplazando el " x " al cuadrado, daría 9, y multiplicado por 5 daría -15, restado eso daría -6 y sumando el 6 positivo que está ahí, daría 0.

Momento 5

I: Ok, vale. Listo. Observemos entonces esta pregunta de aquí, es equiparable a la "b" del punto 1. Esta de aquí es la gráfica de esta función. Tú como puedes observar, esta función aquí está determinada por un polinomio que coincidentalmente es el mismo polinomio que determina la ecuación de arriba, es el mismo caso que para el primer punto. (...) Me gustaría que me dijeras lo mismo, que describas su trayectoria, qué sucede con el eje x , si es creciente, decreciente, o qué puedes decir de ella, según lo que ves.

E1: Umm pues creo que es como una parábola, entonces digamos que por un segmento es decreciente y el otro segmento sería creciente.

I: Ok, muy bien. Qué me puedes decir de la intersección de la gráfica, del trazo perdón, con el eje " x ".

E1: Pues está más o menos entre, más o menos 2,5 aproximadamente la intersección, en el eje x .

I: Ok, cuántas veces crees tú que intercepta la gráfica, el trazo de la función con el eje x .

E1: Intercepta dos veces. Primero en el 2 y después en el 3.

Momento 6

I: Ok. Listo. Ahora quiero que me digas si puedes encontrar alguna relación o puedes comparar estos dos puntos, que sería el punto (2,0) y el punto (3,0), si puedes encontrar alguna relación entre estos y la solución que encontraste en el ítem a.

E1: Pues la única relación que le encuentro es el 3. De que en ese caso el valor que... Como lo resolví, el valor que se tenía que reemplazar en la x es 3, en este caso, una de las intersecciones con el eje x es 3.

I: Puedes reemplazar en la ecuación de arriba con " $x=2$ " y me cuentas ¿qué te da?

E1: Vale, ya la hago.

(...)

E1: No me da cero. Me da -10

I: (...) Cómo lo hiciste?

E1: Lo hice reemplazando la "x" también, reemplazando la "x" por el 2, elevado a la 2 me da 4, -5 por 2 me da... Ah, sí, me equivoqué, lo hice mal. Sí, daría cero. (...)

Momento 7

I: ¿Qué puedes concluir?

E1: De que entonces sí tiene relación, con esta ecuación se puede determinar los puntos de, donde se intercepta con el eje x .

I: Vale. (El investigador hace un recuento en el que le pregunta al estudiante si es coincidencia que tanto en el punto 1 como en el punto 2, las soluciones de la ecuación correspondan a los ceros de la función)

E1: No, yo creo que no es coincidencia. Debe haber alguna regla, o algo que estipule que sean esas las coordenadas y no otras.

I: Ok (El investigador le pregunta al estudiante si ese hecho en cuestión está relacionado con que los polinomios en la ecuación y en la función sean los mismos)

E1: Pues yo creo que, teniendo en cuenta de que en este caso es un polinomio de segundo orden, o sea que está elevado al cuadrado, eso quiere decir que existen dos soluciones, a diferencia del primero que solamente da una solución, entonces eso puede justificar de que en ese caso den dos, y como son los mismos números y las mismas operaciones, supongo que por eso da lo mismo y dan esas coordenadas.

I: Ok, vale. ¿Tú crees que aquí el cero (señala el cero en las ecuaciones) es determinante al momento de definir esos números?

E1: Sí, yo creo que sí. Porque ahí nos damos cuenta que, teniendo en cuenta el valor que reemplazamos, el resultado tiene que ser igual a cero, entonces digamos que el cero es como una base, o algo para guiarnos de que sí o sí tiene que dar cero esa operación, esa ecuación.

I: Ok, vale.

de las ecuaciones del punto 1 y 2, luego observar que dichos resultados corresponden con la intersección de la recta con el eje x , además de que la ecuación al ser de segundo orden, tenemos como resultado 2 intersecciones con el eje x a diferencia con la primera ecuación, que al ser de primer orden, solo presenta 1 intersección.

Siendo así que los valores que cumplen con la ecuación para que obtengamos 0 los resultados de dicha ecuación y la intersección de la recta con el eje x

Figura 59. P3. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 8

I: Me gustaría que aquí en el punto 3, describieras como una pequeña reflexión, un pequeño párrafo, donde hablaras de la relación que se puede establecer en eso que acabamos de notar, en esa correspondencia entre las soluciones de la primera ecuación y los puntos de intersección de la función con el eje " x ". Si puedes redactar algo chiquito donde tú logres hablar un poco sobre qué logras observar con este fenómeno, por así decirlo, te agradecería. ¿Vale? Te espero un momentico para que lo hagas.

E1: Listo

Momento 9

I: queríamos preguntarte que relación puede existir entre está $f(x)$ y esta ecuación de acá, porque son dos elementos diferentes, cómo están relacionados con respecto a la solución de la ecuación y los puntos de intercepción aquí, porque yo te había preguntado que si tú creías que si era coincidencia que los números que aparecían acá en la solución fuesen los mismo que están involucrados en el punto de intercepción, que si era coincidencia o si era algo que se pudiera ver de manera recurrente o que siempre iba a pasar con este tipo de situaciones, si cambiamos el polinomio a otro, si iba a seguir pasando lo mismo o no. Tu nos respondiste que no era coincidencia, sino que había una razón del por qué, entonces queremos que puedas hablarnos un poco de lo que piensas de esas relaciones y puedas redactar en un pequeño párrafo las conclusiones que saques, de la conversación que tengas con nosotros. por qué crees que pasa eso?

E1: yo creo que pasa porque dependiendo de cómo se construye la ecuación así mismo van a arrojar coordenadas en el PC específicos para esa ecuación, creo que, si se cambia algo de la ecuación, va a ser diferente y van a arrojar otros resultados, por eso creo que no es coincidencia o algo así

I: o sea, la razón que entiendo que nos estas dando del por qué en este caso da dos o tres soluciones y la intercepción es 2,0 y 3,0, es porque básicamente este polinomio de aquí, es el mismo de este polinomio de aquí, o sea que si yo cambiará este 6 por otro número ¿me cambiaria la solución acá arriba? ¿te estoy entendiendo bien?

E1: si, creo que si

I. ok. Mi pregunta va entonces a lo siguiente, el polinomio que está acá lo cambio de la misma manera que cambio el de acá porque puede sonar a coincidencia, por qué que podría pasar si yo empiezo a hacerle muchos cambios a esta $f(x)$ acá, a la expresión de la función que está aquí colocada y que esos mismos cambios se los haga acá, no solamente puede ser cosa al cuadrado sino que yo puedo llegar y colocarle otros exponentes, muchos más términos y lo que yo si quisiera saber si tú crees que a pesar de esos cambios que hiciéramos, sigue pasando que la solución de la ecuación que yo tenga acá que este igualada a cero esté involucrada a los puntos de intercepción que tenga esa expresión que yo tengo abajo, eso es lo que yo quiero saber, o sea si hay una razón que tu creas que va más allá a que simplemente este el polinomio aquí y el mismo acá, porque si, evidentemente estos dos polinomios son el mismo, pero si hay un porque, porque al fin y al cabo esto de aquí es una ecuación, y es un elemento matemático que está aparte de la $f(x)$, lo cual, es algo diferente a una ecuación, no son lo mismo, y aun así resultan de alguna manera que arrojan los mismos números, si hay una razón del por qué pasa eso. sí crees que tal vez tenga sentido?

I: Sientes que puedes decirnos algo más, aparte del hecho de que sean las dos expresiones las mismas, respecto a que implica que un punto este ubicado sobre el eje x

E1: Al momento de sacar los puntos, digamos con una tabulación o algo así, yo creo que eso implica bastante en cómo están organizados, porque digamos si tomamos el eje de ahora si cambiamos algo en las dos cosas en comparación a ahora van a cambiar, pero si son las mismas la de las dos ecuaciones pues va a ser igual el resultado en esas dos

pero si, tiene mucho que ver cómo está organizada la ecuación para los resultados que arroja

I: supongamos que llego y estuviésemos haciendo una actividad en la que te pido que te de esta $f(x)$ pero te quito la gráfica, entonces no has visto cómo se comporta la gráfica, pero te pido que digas cuales son los puntos de intercepción, o el punto de intercepción porque hipotéticamente no sabes cuantos son, de esta $f(x)$ con el eje x , pero no ves la gráfica, ¿qué harías tu?

E1: Me haría una tabla, entonces jugando con los valores de x , suponiendo que x (equis) vale -3 a 3 cualquier ej, entonces los voy reemplazando en la ecuación dependiendo del valor de x (equis) para cada cuadro, entonces así encontraría el valor de y , y de esa manera graficaría los puntos de la grafica

I: al momento de hacer esa tabulación, cómo sabes para cuales valores de x va a estar interceptada la gráfica con el eje x

E1: supondría los puntos, cogería puntos al azar, como dije ahora, de pronto -3,-1,-2,0,1,2,3 y los puntos del eje y sería el resultado de la ecuación reemplazando los valores de x en cada uno de ellos.

I. en efecto, así se hace la tabulación pero como sabes cuales de esos puntos que eliges al azar cuales cumple, por ej, pensemos en esa $f(x)$ específicamente, yo empiezo a pensar en estos números si?, lo hago así como dices, de -3 a 3 ¡ cómo yo sé si haber visto la gráfica que 2 y 3 cuando yo iguale x a 2 y a x en 3 como sé que esos puntos van a estar en el eje x , como yo sé que va a ser la raíces de la $f(x)$

I: lo que uno hace al momento de tabular porque no conoce la gráfica es llegar y escoger valores entre -3 y 3, y le vas asignando esos valores a la x , y con eso ibas a obtener unos valores para la $f(x)$, o para y , y con eso construías la función pero no te pido que lo dibujes sino que simplemente observando el comportamiento de esos valores tu sepas cuales son las raíces de la $f(x)$, es decir, cuales puntos están interceptados con el eje x

Cómo yo voy a saber, solamente haciendo el cálculo algebraico cómo voy a saber que 2 y 3 son en efecto los lugares en los que para x la $f(x)$ pasa del eje x , el eje horizontal.

I: Tabules, pero no grafiques, solamente escoge los valores, cómo sabes nada más haciendo el procedimiento, que en efecto para $x=2$ y $x=3$ la gráfica va a pasar por cero

sin hacer la gráfica solo con el proceso, ¿cómo lo sabes?

E1: como se hizo la vez pasada, encontrando en este caso dos valores, como es una potencia a la dos, quiere decir que hay dos soluciones, entonces yo diría que buscaría los valores que reemplazando esos valores como resultado me de cero.

I: y ¿por qué cero?

E1: porque siendo así yo diría que esas dos serían las respuestas de esa ecuación por lo tanto sería la intercepción entre la recta y el eje x en este caso

I: ¿Qué relación existe entre el numero cero y la intercepción de estas dos cosas, crees que existe alguna relación?

E1: no lo sé. yo diría como la ecuación de arriba que estaba igualada a cero, por eso tomaba cero, pues como se supone que son las mismas ecuaciones entonces por eso en este caso sería igualarla a cero y que cuando me de cero entonces sería la respuesta de esa ecuación

I: última pregunta, a que altura del eje y pasa el eje x

E1: o sea a que altura intercepta

I: piensa por donde es la intercepción, pensemos en donde se intercepta el eje x y el eje y

E1: mmm, o sea en relación con el eje y , a la altura, sería en el punto cero

I: tú crees que ese punto cero tiene alguna relación con todo lo que estamos hablando

E1: si en este caso sí, cero sería la intercepción y cero sería el resultado cuando hallemos los resultados de las dos respuestas de la ecuación, entonces yo creo que si tiene relación.

Handwritten work on grid paper:

1. $f(x) = 2x - 2$ $x = 1$
 $= 2 \cdot 1 - 2 = 0$
 $2 - 2 = 0$

$f(x) = 2x^2 + 2x$ $x = -1$
 $2(-1)^2 + 2(-1)$
 $2 - 2$
 0

• ecuación posible: $2x^2 - 3x + 1$

Figura 60. P4. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 10

I; vamos a seguir con el punto 4...

en la A: quiero que me digas que características logras ver en esta gráfica, cosas de cualquier tipo, sobre que me puedes decir del trazo, por donde está ubicada si es creciente decreciente, todo lo que me puedas decir de la $f(x)$

E1: Es una $f(x)$ creciente, es lineal, y es ascendente positivo, esta hacia el lado positivo. ya es - infinito a + infinito

I: excelente, ¿cuál o cuáles son los puntos de corte de esta $f(x)$ con el eje x ?

E1: sería 1 y sería en el 1.0

I: posible expresión o la que tu creas que es la que debería tener esta $f(x)$, Literal cuando yo te digo esta función es que coloques: $f(x) =$ cuál sería la expresión correspondiente a esta gráfica que está aquí,

Momento 11

I ¿Encontraste la expresión?

E1: Intenté hacerlo, pero creo que no me da el resultado

I: Ok, puede ser una candidata, yo quiero saber cómo la estás intentando encontrar

E1: Primero la intenté hacer como tomando dos puntos, en este caso yo tomé el 4,3 de la parte de arriba y el -2,-5.

I: Ok, ok

E1: Entonces de ahí hallé la pendiente y con la fórmula de la pendiente intentaba encontrar el valor de y .

I: Ok, vale. Sí, sí sí. Vale, lo que de pronto me parece a mí que podría ser un poco más eficiente es... ok lo que a mí me gustaría principalmente más que tal vez utilices estos métodos, porque es verdad, o sea, con los dos puntos encuentras la pendiente, luego con el punto de corte y así hallas exactamente cuál es la expresión. Pero lo que a mí me gustaría es que tú pudieses, observando la gráfica, observando el trazo que lleva, por donde pasa, puedas intentar postular una expresión que caracterice esa función. No importa si no es exactamente la que es, ¿me hago entender? Porque mira, por ejemplo, luego yo te voy a pedir lo mismo con esta cuadrática que está al lado derecho. Y entonces ahí puede que haya, pues de pronto sea un poco más complejo hallarla con exactitud, ¿me hago entender? A eso es lo que yo voy. Entonces es como que tu observando la función puedas intentar darme una expresión, con lo que logres ver ahí.

E1: Vale, se me acaba de ocurrir de pronto la idea de hacerla como los ejercicios pasados. De pronto intentando, jugando con el valor de x , en este caso la intersección es 1, entonces ese reemplazando ese valor de x a 1 buscando la forma de que de 0.

I: Ok, ok. Vale, vale. Eso es un método, sí. Entonces cuando lo hagas me avisas, voy a estar aquí pendiente.

E1: Vale.

Momento 12

(...)

E1: Vale, creo que ya la encontré para la primera.

I: Listo, listo. Cuéntame qué te dio

E1: Intenté con una fácil, digamos, una sencilla. Que sería entonces $2x - 2$. Entonces ahí iría jugando con el valor de x . Cuando x vale tal cosa, sería entonces tal coordenada.

I: Ok, vale. ¿Por qué escogiste una expresión con exponente 1?

E1: Porque vi que solamente interceptaba con el eje x solamente una sola vez.

Momento 13

I: Ok, vale, excelente. Listo, entonces ahora vamos a hacer el mismo ejercicio con esta segunda gráfica que está a la derecha. Entonces primero quiero que me digas qué características logras ver de la función B. ¿Qué puedes decir?

E1: Ehh... es, presenta dos puntos de intersección, es una parábola y sí, tiene segmentos. Un segmento ascendente y uno descendente.

I: Ok, ok. ¿Me puedes decir algo del rango de la función?

E1: Eh... que el punto -5.5 hasta -2.-4 es descendente, se parece y ya la otra mitad sería ascendente.

I: Ah, ok. Cuando yo me refiero al rango es al rango de la función. O sea, cuáles son los Y que abarca. No desde donde y hasta donde asciende y desciende, no. El rango literal de la función.

E1: Ah, vale. El primer rango sería de -4 hasta 0 y el otro sería de 0 hasta 5.

I: Vale, vale. Eh... ¿qué me puedes decir de los puntos de intersección? ya me dijiste que eran dos, qué más me puedes decir.

E1: Ehh... que uno de los puntos pasa por el origen, el C es un punto negativo, la fórmula sería cuadrática.

I: ¿Cuadrática? ¿por qué cuadrática?

E1: Porque tiene dos puntos de intersección, sería entonces elevado a la dos.

Momento 14

I: Ok, ¿puedes intentar postular una expresión que pueda ser la de esta función graficada ahí?

E1: Vale

E1: A esa todavía no encuentro resultado.

I: Vale, cuéntame qué has hecho hasta ahora.

E1: Hasta ahora he intentado, como entonces tiene dos puntos de intersección, plantear una fórmula de la siguiente manera: sería $2x^2-4x-16$. De tal manera de que reemplazando por -4 que es el primer valor, me da igual a 0.

I: Ok, y por qué las escogiste cuadráticas.

E1: Porque en ese caso como tiene entonces dos puntos de intersección con el eje x , supuse que tendría entonces dos posibles resultados.

I: Ok, ok. Excelente. Y en qué te basaste para escoger las constantes que acompañan a las variables en los términos.

E1: Jugando de pronto con el resultado que podrían dar, multiplicándolas y después restándolas y sumándolas de tal manera que me diera 0. Después encontré que esos valores tenían que ser 2 y -4.

Momento 15

I: Ok, vale. Excelente, listo. Vamos entonces con la C, que es la última de este ítem. Es lo mismo, qué logras ver del trazo de la función, qué características, cuéntame un poco sobre los 0. Todo, todo exactamente lo mismo

E1: En este caso la gráfica va a ser hacia abajo, va a ser tendencia negativa, el rango iría de 1 hasta -5, y sí, tendría también dos puntos de intersección con el eje x , que sería -1 y 1.

I: Ok. Entonces vamos a hacer exactamente lo mismo, intenta llegar a una expresión que pueda ser pertinente para la gráfica, ¿listo?

E1: Listo creo que ya la encontré.

I: Listo, cuéntame

E1: En este caso llegué a la conclusión de que la expresión tendría que ser entonces $2x^2 - 3x + 1$.

I: Vale, ¿por qué la escogiste así?

E1: También, igual que los anteriores, jugando con el valor en ese caso de -1 y 1, para que en de cero en ambos casos.

I: Vale, listo, excelente.

(...)

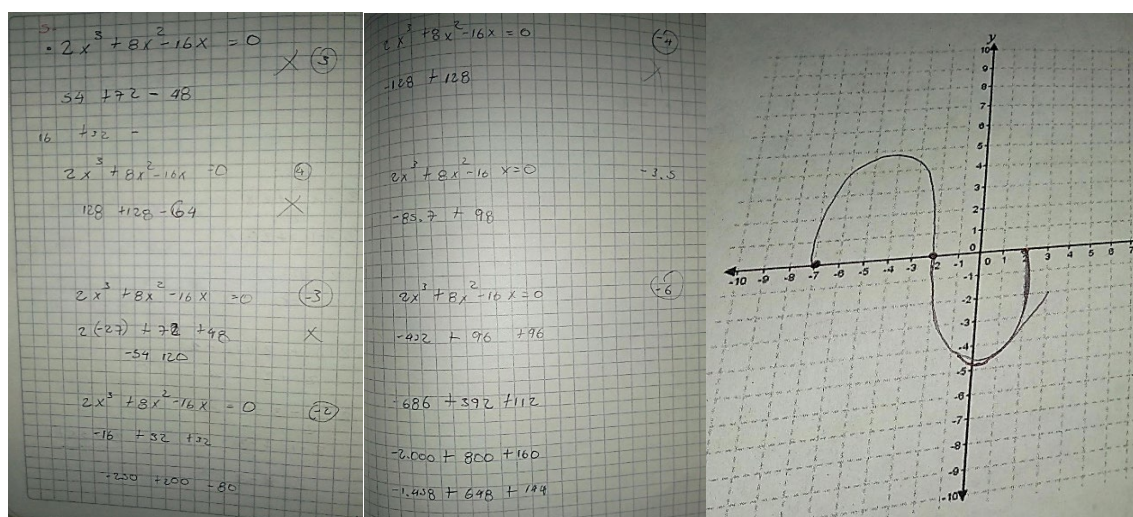


Figura 61. P5. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 16

I: (...) Qué tu logras ver de esta expresión?

E1: Que está elevado a la 3.

I: Ok, ¿qué más?

E1: Umm, si está elevado a la tres, pues es de tercer grado, o sea que tal vez podría interceptar tres veces el eje x .

I: Ok, vale. Listo, lo que quiero que hagas es que hagas una réplica del plano cartesiano en la hoja que tienes (...) Y que grafiques, intentes graficar esta función que está aquí. Obviamente yo sé que una forma de hacerlo es mediante la tabulación, pero pues no quiero que necesariamente vayas a tabular ni nada de eso, sino que lo que tú logres ver aquí, la información

que te proporcione la expresión, así como está escrita, te de herramientas para que puedas hacer un bosquejo de la función, sin que necesariamente tengas que tabularla, simplemente que la mires, y que con lo que veas ahí, digas "no, yo creo que la gráfica puede ser así" y hagas el trazo.

E1: Vale

I: Y que me escribas en la hojita, qué tuviste en cuenta, más que el procedimiento, porque el procedimiento es hacer el trazo y ya, es qué tuviste en cuenta para hacer esa gráfica.

E1: Ah listo

(...)

I: ¿Cómo vas con la gráfica?

E1: Umm no, todavía no encuentro valor. He intentado con valores... con 3, 4, -3, -2...

I: Pero ¿qué has hecho? ¿has estado tabulando?

E1: No, reemplazando valores para que me de cero.

I: Umm estás intentando hallar los ceros de la gráfica

E1: Sí señor.

I: La sugerencia que yo te puedo dar es que intentes... En vez de intentar de forma manual encontrar los ceros, porque muchas veces eso puede ser difícil, más bien con las características que tú logres ver superficialmente de la función, hagas un bosquejo, así los ceros no pasen por donde... Por los cuales sean los ceros de la función, no pasa nada, ¿sí? O sea, básicamente lo que nosotros queremos abstraer de esto, es que tú logres crear la gráfica a partir de la información que te de esta expresión, por ejemplo, qué pasa con que haya un "2" aquí, qué pasa que esto esté elevado a la tres, y esto esté a la dos, no sé, ese tipo de cosas.

Momento 17

E1: (*escribe en sus hojas de apuntes*) (...) listo ya, ya hice más o menos el punto 5

I: vale, me podrías describir más o menos ¿cómo realizaste la gráfica?

E1: eeh, pues como supuse que era una ecuación elevada a la 3, eso quiere decir que de pronto tendría 3 intercepciones con el eje x y teniendo en cuenta los puntos que probé intentando que la ecuación me diese 0, eeh puse los puntos mas cercanos en los que me pudo haber dado 0, que fue, en mi caso fue el -7, -2 y 2 que no dieron 0 pero pues a diferencia de los otros puntos sí estuvieron más cercanos al 0

I: listo, ósea la gráfica ¿qué forma tiene? al momento que la dibujaste

E1: como una forma senoidal, como una subida y después baja y luego vuelve a subir

I: aja, ósea que la función pasa por los puntos -7, -2 y 2 positivo

E1: ujum

I: ah listo ¿Por qué pensaste en realizar una gráfica así?, es decir, porque no, otra forma que te llevo a pensar que sería así

E1: pues como ya lo he venido mirando y pues lo que también se, es que veo como una conexión entre el exponente y en este caso las raíces, entonces al ser esta de grado 3 supongo que debe pasar si o si por 3 puntos y así sucesivamente

I: listo, ¿y crees que hay una explicación lógica para eso? o simplemente es coincidencia

E1: pues yo creo que sí, las matemáticas son exactas, pero la verdad no sabría cómo explicar ese fenómeno que sucede matemáticamente, pero sé que no es coincidencia.

P6

Momento 18

I: vale, listo, ahora vamos al punto 6, te la leo 6, determina la expresión la expresión algebraica que describa la función representada en la siguiente imagen, es decir, que, mirando esta imagen, ahora es, al contrario, ahora te damos la gráfica y queremos que realices la expresión algebraica, la función $f(x)$, que me representa esta gráfica, realízalo como tú creas conveniente ¿vale?

E1: listo, vale (*escribe en su hoja de apuntes*) (...), yo creo que ya la hice

I: listo, me la puedes decir

E1: eeh teniendo en cuenta que en este caso no toca el eje x , supuse entonces que tendría que ser igual a 0 el resultado, a diferencia de los otros que el resultado daba 0, en este caso tiene que dar 2, que es la altura más baja del vértice, mejor dicho, entonces la ecuación me quedo $2x - 2$, de tal manera que me diese 2 el resultado

I: listo, entonces ¿crees que la expresión tiene raíces o no? Según lo que me dices, tiene soluciones

E1: si, yo creo que no mas tiene 1 solución ya que, pues en este caso solamente toca 1 vez en el punto digamos que establecido

I: aja y me podrías decir si existe alguna diferencia con esta gráfica y la anterior o no o alguna relación

E1: si yo creo que hay varias diferencias, la primera entonces seria, que en este caso esa grafica yo creo que sería eeh lineal, ósea no está elevado a la 2 y la otra inclusive si estaba elevado a la 3, en este caso solo pasa en el punto establecido una vez y la vez pasada se asume que pasaba 3 veces

I: pero entonces me dices que esta grafica es lineal entonces y no esta elevada a la 2

E1: pues no sé, pero si esta elevado a la 2 tendría 2 soluciones

I: pero mirando esta gráfica, su forma lo que sabes piensas que, si pueda tener o no más soluciones de acuerdo con como está ahí planteada

E1: mmm ahora que lo pienso mejor, si creo que puede ser a la 2, aja, creo que me equivoque, en vez de ser lineal creo que si esta elevado a la 2, ya que se podría decir, que es como el eje que pasa por la mitad del vértice o puede tirar para un lado siendo positivo en ese caso o negativo para el otro, entonces yo creo que si podría tener más de una solución

I: y así mirándola más o menos para ti cual sería una solución ya sea real o una solución no real

E1: yo creo que sería real

I: que solución podría ser

E3: no se creó que serían números pequeños entre 2 y 4 pero si tiene solución o sino no tendría 2 soluciones porque o sino no tendría esa forma

PUNTO 7

				5	6
Función	a	b	c	4	5
Número total de raíces	1	2	2	3	2
Grado de la función	1	2	2	3	2
Número de raíces reales positivas	1	no	1	1	2
Número de raíces reales negativas	no	1	1	2	no
Número de raíces no reales	no	no	no	no	no

Figura 62. P7. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 19

(...)

I: y en la 6 (número total de raíces)

E1: en esa yo creo que sería 2 raíces

I: ¿Por qué 2 raíces? Recordemos que son aquellas que interceptan al eje x , ¿crees que esta función intercepta al eje x ?

E1: pues no, pero su forma me hace creer que posiblemente tiene solución a pesar de que no pase por el eje, y como se asemeja a la función cuadrática pues porque es una parábola diría que tiene 2 raíces

Momento 20

(...)

I: y en esta 6 (número de raíces reales positivas)

E1: serían 2 positivas

I: ¿Por qué tiene 2 positivas?

E1: porque la función es cóncava hacia arriba y pues eso significa que, si o si es positiva, además se ubica en el cuadrante I y ahí es positivo también

Momento 21

(...)

I: y en esta 6 ¿crees que tiene raíces no reales?

E1: mmm yo creo que sus raíces son reales, entonces no

I: entonces en la 6, si la función no pasa por el eje x , no ves ningún problema, es decir, afecta en el número de soluciones de la función o no, al no pasar por el eje x

E1: mmm no lo había visto de esa forma, pero yo sí creo que, si tiene solución, yo creo que su solución si es real.

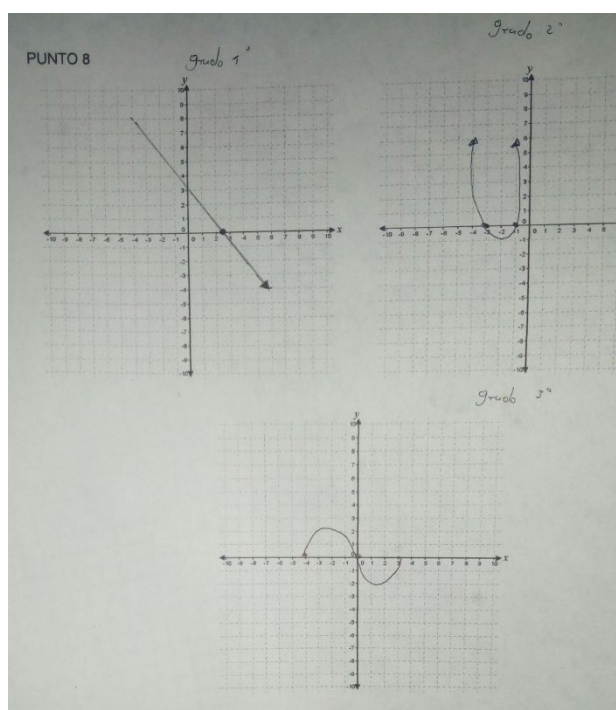


Figura 63. P8. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 22

I: entonces escribe todo en tú hoja por favor y ya vamos para la última, entonces la 8va dice, dibuja tres graficas cada una que posea 1 solución, 2 soluciones y 3 soluciones, es decir, una gráfica de la función que me represente que tenga una raíz, otra con 2 raíces y otra con tres raíces , de acuerdo a como tú creas y pues de lo que hemos trabajado todo este tiempito, listo, simplemente que las dibujes y pues si tienes que utilizar alguna cosa más, lo haces y pues todo lo apuntas en la hojita

E1: listo, vale (*escribe en sus apuntes*) ... listo

I: entonces, para esta primera a cuál sería el grado, si la solución es 1

E1: seria 1 también y pasa 1 vez por el eje x

I: en la b

E1: seria de grado 2 y pasa 2 veces por el eje x

I: y en la c

E1: pues es de grado 3 y corta en 3 partes

Momento 23

I: listo, crees que hay algo que influya en el ¿grado y los cortes con el eje x ?

E1: eeeh si, como te decía antes creo que hay algo que influye pero no sé, lo único que se me ocurre ahora que estábamos trabajando y cuando estábamos con la 6, es que tal vez el 0 pueda influir, pues para que en la lineal tenga 1 solución debe estar igualado a 0 la cual ese 0 pertenece al eje y , en la función con los cortes, entonces en las coordenadas siempre es el número del corte con el eje x , por ejemplo una coordenada (7,0), donde 7 es el corte y 0 seria y , y así con todos, entonces para que eso suceda pues creo que la función debe estar igualada a 0, siempre, o no sé creo

Momento 24

E3: vale ... (*escribe en sus apuntes*) ... mmm vale, ya creo que lo tengo

I: listo, entonces me lo puedes explicar

E3: entonces la relación sería, que en ese caso la ecuación que esta igualada a 0, quiere decir que la función pasa por el eje x , con altura 0 y ¡ay! se me olvidó esta parte está aquí no va (...) y pues que siempre que la ecuación este igualada a 0 pasa por el eje x y la relación sería entonces que la ecuación y la función dependiendo el grado que este así mismo serán las veces que pase por el eje x , pero eso sí debe estar igualada a 0 la ecuación y pues comparten la mismas soluciones en la ecuación siendo esas mismas soluciones los cortes por donde pasa la función en el eje x

I: y ¿por qué debe estar igualada a 0 la ecuación?

E3: pues no sé, pero las que hemos realizado son así, creo que influye mucho para realizar la función y encontrar los cortes de manera fácil, porque así, creo que solo se determina los cortes y coordenadas del eje x

I: y con el grado de la función y la ecuación ¿Qué pasa en sí? Es decir, que pudiste notar

E3: sí, dependiendo del grado o el número del exponente así mismo sean los cortes o el número de soluciones o posibles respuestas, en ese caso del ejemplo si esta elevado a la 2 pues creería yo que serían 2 posibles respuestas

I: vale, entonces vamos más allá, si yo te muestro entonces una ecuación de grado 15, cuantas soluciones tendría y si la ¿podrías resolver?

E3: pues mmm, supongo que también 15 y pues no sabría cómo resolver eso tan grande, pero pues, así como hice las demás probando números al azar y mirando con cuales me da la ecuación 0, esas serían las soluciones o en su defecto sus puntos de corte

I: vale y de grado 1000, ¿qué me podrías decir?

E3: lo mismo, también 1000 soluciones y 1000 cortes con el eje x

I: y ¿crees que hay una explicación o no para eso?

E3: creo que sí, esa relación existe, pero la verdad no sé cómo sucede

I: vale puedes escribir toda esa parte y eso ya sería todo

E3: listo

Estudiante 2 (E2) Actividad III (AIII)

Estudiante de grado 11^o del Colegio Comercial Santa Juana de Arco

Duración 2: 05:00; Día: 13/10/2020; Plataforma online: Zoom

E1: segundo estudiante en aplicarle el instrumento

I: Investigador

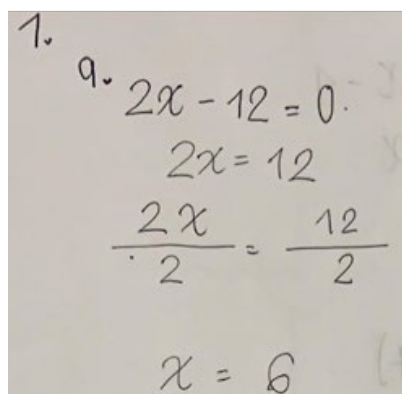

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x - 12 = 0 \\ & 2x = 12 \\ & \frac{2x}{2} = \frac{12}{2} \\ & x = 6 \end{aligned}$$

Figura 64. P1. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 1

E2: (...) listo, creo que ya me dio, me dio 6 (seis), lo que pasa es que yo siempre lo hago al ojo así y pues no me acordaba de verlo de esa manera despejando

Momento 2

I: Me puedes contar más o menos lo que hiciste

E2: lo que hice fue pasar el 12 que está restando al otro lado de la igualdad a sumar y después como es una igualdad, pues lo dividí entre 2 a ambos lados para quitar el 2 es esta con la x y los cancele y ya con el 12 dividido en 2 pues me dio 6 y ese fue el resultado

Momento 3

I: listo, ahora en esta segunda quiero que por favor visualices esta función y que me puedas describir (...)

E2: (...) listo y yo digo que los cortes son aquí en (6,0) y que la función es creciente porque está por el lado de los números

I: y tú como sabes cuándo una función es creciente o decreciente

E2: pues lo que se, cuando comienza con un signo positivo o negativo, por ejemplo, en esta función empieza normal con $2x - 12$ como no tiene el signo menos al comienzo ósea delante del $2x$ es positiva, pero si lo tuviera sería negativa la función por lo tanto decreciente. Siempre miro el signo con que comienza la función y ya (hasta aquí)

Momento 4

I: (...) teniendo en cuenta el resultado de la primera con la función de la segunda que me puedes decir, que logras evidenciar

E2: pues que son la misma prácticamente pero que están escritas de manera diferente, yo creo que es indicando esta por lo menos al principio que se trata de una función y esta que está sola así que es una ecuación normal

I: qué relación logras evidenciar entre la ecuación y la función, ves algo que te parezca igual

E2: pues mira que siempre me han enseñado a sacar las coordenadas a partir de una función, pero pues no veo una relación

I: pero no te acuerdas de como sacabas las coordenadas

E2: aaah si me acuerdo, yo recuerdo que tomaba una tablita y colocaba x y y , y colocaba -3, -2, -1, 0, 1, 2, y 3 y luego con esa función ya comenzaba $2x - 12$, entonces siempre remplazaba esa x con los números de la tablita.

I: si eso se llama tabular, pero lo que yo quiero que me digas que puedes observar en esta función de manera general que te parece relevante

E2: ¡ah! que corta en -12 y en 6 y respecto a donde pasa por el eje x , es la coordenada (6,0)

I: logras evidenciar alguna relación con respecto a la función de esta gráfica y a la ecuación anterior y encuentras la solución de x

E2: pues si, por ejemplo, cuando encontré acá el resultado que me dio x (refiriéndose a la ecuación del punto 1), me dio 6 y acá en la función la pasa por el eje x en la coordenada (6,0)

I: ¿porque crees que sucede esto?

E2: pues yo creo, según lo que veo es que es la misma expresión solo que cambia es en la intención una es la ecuación y la otra la función y como está en términos de x pues son los valores que se relacionan en este caso abarca todos los valores del eje x , pues dependiendo de lo que de la expresión y ya

Momento 5

I: (...) ¿Qué piensa al respecto? ¿Crees que es coincidencia eso que usted me dijo anteriormente o tiene algún porque de lo que sucede?

E2: pues creo que es lógico, acá pasa por -12 en y es lo único diferente, pero en ambas el resultado que me dio en x da 6 tanto en la ecuación como tal, que coincide por donde pasa la función en el eje x , más o menos lo que te dije anteriormente, no más

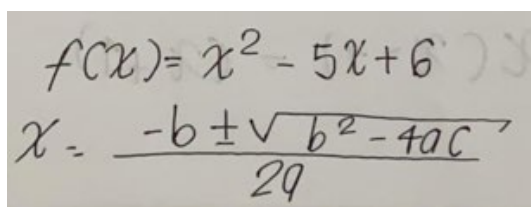

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Figura 65. P2-1. Fuente: elaboración propia (2021)

Handwritten solution for a quadratic equation using the quadratic formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{(-5) \pm \sqrt{25 - 24}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{(-5) \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\frac{(-5) + 1}{2} \quad \frac{(-5) - 1}{2}$$

$$\frac{-4}{2} \quad \frac{-6}{2}$$

$$-2 \quad -3$$

• los resultados hallados, comparten los puntos donde corta x.

Figura 66. P2-2. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 6

I: puedes utilizar todos los métodos que conozca para resolver la ecuación

E2: yo creo que ahí puedo utilizar la ecuación cuadrática, voy a usar esa fórmula a ver si me da ... listo

I: vale y que resultado te dio

E2: me dio -2 y -3

Momento 7

I: listo, ahora quiero que realices la b, exactamente lo mismo que a partir de esta función me puedas decir que creas relevante cuando te dan una función para resolverla

E2: pues lo que puedo ver, es que es una función cuadrática y también que cuando corta en x es en los números 2 y 3 casi los mismos que me dieron en el anterior solo de diferencias que en la ecuación me dieron negativos y aquí en la función son positivos

I: listo, ¿Por qué crees que en esta función corta dos veces al eje x y en la anterior corta solo una vez al eje x , piensas que hay algo que influye con respecto a las veces que corta una función al eje?

E2: porque ahí, hay dos x que hallar la x de acá (refiriéndose a la x que esta elevada al cuadrado) y la x que esta al lado del 5 y como se ven dos x , pues debería pasar por dos puntos en el eje

I: entonces para ti, las x que están ahí, es decir, la x^2 y la del $5x$, son las que influyen en las veces que pasa la una función cuando corta al eje x , en este caso seria en los dos cortes que son 2 y 3

E2: si señor

Figura 67. P3. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 8

I: (...), me trates de hacer una pequeña conclusión con respecto a lo que has podido evidenciar y lo que me has dicho durante lo que resolviste los dos puntos anteriores, la relación entre la ecuación y función y todo lo que se te ocurra

E2: aah bueno, que los resultados que me dieron fueron los mismos en la ecuación como tal y cuando la función corta al eje que el corte x y ya

E2: de lo que dije anteriormente también veo que en la 2 (refiriéndose al punto 2, ítem a y b) que me dieron los resultados negativos y en la función están positivos, tal vez para contrastar esa diferencia, no sé y que las soluciones dependen de las x que estén puestas en la expresión o en la función sería los cortes por donde pasa.

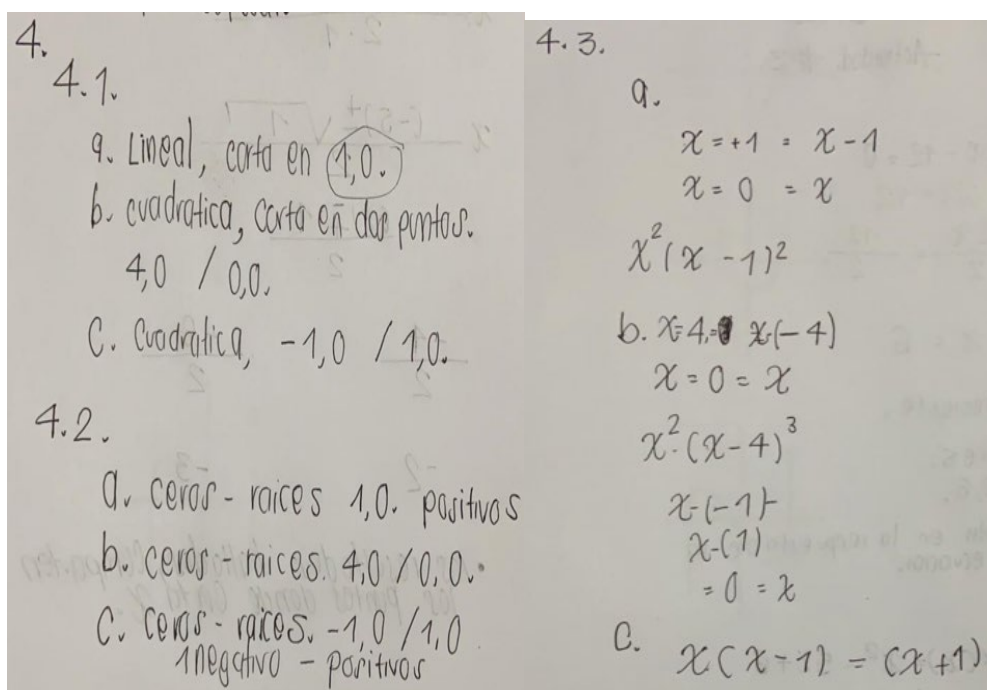


Figura 68. P4. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 9

I: (...) esta son las gráficas a, b y c, dependiendo de lo que tú observes en estas graficas quiero que me respondas esta 4.1, que es básicamente que me trates de describir todas las características relevantes que veas en cada gráfica, me cuenta lo que hiciste

Grafica a

E2: bueno señor, la función corresponde a una ecuación lineal, es una función creciente, positiva

Grafica b

E2: es una función cuadrática, corta en dos puntos, es creciente y positiva

Grafica c

E2: aquí es una función negativa por que va decreciendo, también corta en dos puntos por que es cuadrática

Momento 10

I: en esta quiero que me digas de acuerdo con las gráficas, que son para ti los ceros y si los valores son positivos o negativos

E2: pues para mí los ceros, son donde corta al eje no se

I: confía en lo que sabes

E2: son como si eso, los cortes o coordenadas por donde pasa cada función, yo los anote por ejemplo en la primera es (1,0) en la segunda es, (4,0) y (0,0) y la tercera es (-1,0) y (1,0)

Momento 11

I: ahora vamos para la 4.3 y dice: Escribe la expresión cuya grafica corresponde a (...)

E2: una función de donde sale esa grafica

I: si

E2: de entrada, ya sabemos los valores de x pero faltaría lo demás y se tendría que organizar

I: eso quiero, que intentes realizar la expresión funcional con la información que está ahí, ¿Cómo lo harías? ¿Qué se te podría ocurrir?

E2: bueno señor ... listo

I: explícame más o menos lo que hiciste

E2: pues lo que hice fue tratar de igualar las coordenadas que te mencioné anteriormente y hacer distributiva, es decir multiplicar los términos de un lado con el otro uno a uno, no sé si está bien, así traté de hacerlo con todos, eso fue lo único que se me ocurrió para llegar a esa expresión, entonces en la a, me dio $(x - 1)$, el otro me dio $x^2(x - 4)^3$ y por último me dio, pues no se si me dio bien

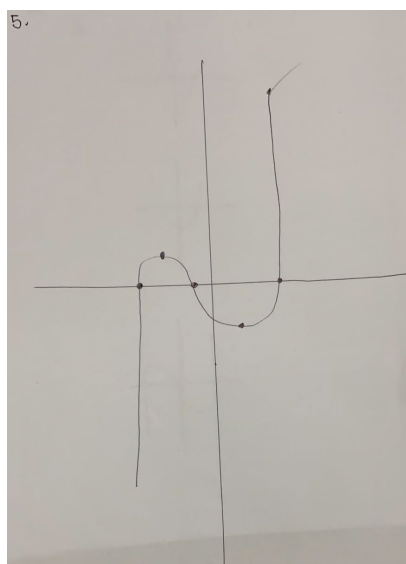


Figura 69. P5. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 12

I: (...) lo que quiero es que me trates de graficar esta función de tercer grado, ¿cómo lo harías?

E2: sería con ecuación cuadrática, pero veo muchas x (refiriéndose a las variables de la expresión funcional) (...)

E2: mmm pues mira que la observo y la observó y no, pero sí creo que es como se, pasaría 3 veces ya que hay 3 x , en la expresión y tal vez eso influya en los cortes

I: vale, entonces te pregunto, ¿crees que la información que te proporciona este enunciado podría darte una pista de cómo sería la función?

E2: pues sí, si es así, considero que esa función puede cortar en 3 puntos al eje x , porque tiene $3x$

I: listo, tu más o menos has visto la gráfica de una función al cubo, es decir que esta elevada al exponente 3, Para ti ¿cómo es una función de tercer grado?, ¿alguna vez has visto esa función?, no se te hace familiar a algo

E2: pues sí, tiene que cortar aproximadamente en 3 puntos es como una curvita y se me asemeja como a la letra S, algo así, pero acostada y pues que pasa por tres puntos

I: vale, ahora de acuerdo a esa función, ¿crees que podrían existir o no, esos 3 cortes de acuerdo a lo que me dices? Y también ¿crees que la función podría ser negativa o positiva?

E2: creo que la función es negativa, porque los puntos de inicio o de partida uno esta abajo y otro esta arriba (hace referencia cuando dice arriba al punto de la cóncava que se forma cuando la función cambia de sentido), entonces seria negativa

I: ¿cómo resolverías esta función?

E2: yo lo haría por función cuadrática, para encontrar los números y grafico la función como una S y ya

I: ¿por qué lo harías por ese método?

E2: porque tiene más de 3 x , ahí y la verdad no me siento segura para estar despejando o sacarle los puntos así a lo que dé, pero creo que me demoraría mucho

I: un dato es que por el método de cuadrática únicamente sirve cuando la ecuación esta elevada a la 2, por eso de ahí su nombre cuadrático

E2: yo creo que entonces, que tal vez tabular, pero siento que es muy largo, pero se ¿podría?

I: no sé, es como usted crea conveniente y que tal vez te podría dar esos cortes para la función, eres libre de realizar lo que usted quiera

E2: bueno, voy a haber como lo hago entonces, dame un momento

I: bueno

E2: (...) eh tabulado, he hecho 2 formas, ósea respecto a los números, me ha dado 48 y la otra 22 y la otra 16

I: ahora trata de dibujar como crees que va esa función

E2: bueno ... listo yo la dibujé como la S acostada que te dije y ya

P6

Momento 13

I: (...) ahora es pasar de la función grafica a su expresión de ecuación funcional, ¿Cómo creerías que sería esta función?, que trates de realizar la expresión

E2: (...) listo, mira que comencé tabulándola, pero la verdad no logro la manera de hacerlo

I: vale, ¿cuántas veces crees, que la función corta al eje x ?

E2: creo que no pasa ninguna vez, creo que solo corta al eje y

I: esta función es positiva o negativa

E2: es positiva

I: para ti, ¿qué cosas determinan al momento de decir que una función es positiva o negativa?

E2: que ambos puntos, ósea del inicio y final sean positivos, además que las flechitas vayan para arriba

I: vale, las raíces de esta función existen, es decir existen los puntos de corte con el eje x

E2: creo que no, porque ni corta ni pasa por el eje x

I: supongamos entonces que la tuviera, cuantas raíces tendría esa función, mirando su forma y demás

E2: solo una (haciendo referencia cuando la función corta una vez al eje y), pero no sé si se cuenta que es raíz cuando pasa en y , o solamente es en x

I: ¿usted que cree?

E2: no sé, yo creo que en x , entonces para mi ninguna vez, no existen las raíces en esta función

I: ¿Qué clase de función es?, por ejemplo, lineal

E2: no señor, creo que es cuadrática

Función	a	b	c	5	6
Número total de raíces	1	2	2	3	No tiene
Grado de la función	1	2	2	3	1
Número de raíces reales positivas	1	2	1	1	No tiene
Número de raíces reales negativas	1	1	1	2	No tiene
Número de raíces no reales	No tiene	No tiene	No tiene	No tiene	No tiene

Figura 70. P7. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 14

Ítem. Número total de raíces

I: entonces en la gráfica *a* del punto 4 el número de raíces que tiene

E2: solo tiene 1

I: En la *b*

E2: 2

I: en la *c*

E2: 2 también

I: en esta quinta

E2: 3

I: aquí en la sexta

E2: ninguna

Momento 15

Ítem. Grado de la función

I: (...) es decir, el exponente mayor que podría estar conformada la función

E2: mmm como así el grado, no logro ver

I: si, como a que exponente esta elevada la función, pero solo te debes fijar en el número mayor, no sé si me devuelvo, por ejemplo, aquí cuando es una funcion así lineal (hace referencia a la función del punto 1), a que exponente esta elevado

E2: a nada, ósea x

I: ¿crees que esta elevado a nada?

E2: pues no hay un exponente ¿no?, ¡Ah! a 6, (hace referencia a la solución de la ecuación la cual le dio 6)

I: no, ese número indica la solución de la ecuación mas no es un exponente, por ejemplo, en la segunda (hace referencia a la ecuación del punto 2), aquí que grado sería ¿cuál es su exponente?

E2: ¡ah! En esa seria 2

I: y aquí en la primera, ¿Cuál exponente creería que es?

E2: creo que 1, porque si fuera 0 toda la ecuación seria 0

I: listo, entonces vamos a las funciones de la pregunta, aquí en la a cuál sería el grado

E2: seria 1

I: en la b

E2: 2

I: en la c

E2: creo que puede ser 2 también

I: y esta función 5 a cuanto esta elevada

E2: a la 2, no, no, a la 3, perdón

I: y esta sexta ¿qué crees tú?

E2: también 1

Momento 16

Ítem. Número de raíces reales positivas

I: (...) que me digas el número de soluciones positivas que tiene cada función solo soluciones positivas, de acuerdo a lo que veas y hallas hecho

E2: 1 solamente

I: en la b

E2: 2, no sé, el 0 es positivo o negativo, no se

I: usted ¿cómo lo considera?, crees que si es una solución de la función o no

E2: creo que es positivo, entonces tiene 2 soluciones

I: listo, y en la c

E2: hay 1 solución positiva

I: en esta quinta cuantas crees que tiene

E2: positiva, creo que 1

I: y en la 6

E2: (...), creo que no hay ninguna

Momento 17

Ítem. Número de raíces reales negativas

I: (...), en la a, del punto 4, ¿Cuántas soluciones negativas crees que tenga?

E2: 1, no no no, creo que hay 2, nooo perdón, solo 1 negativa

I: en la b

E2: hay 1 negativa también

I: en la c

E2: también 1 negativa

I: en esta quinta

E2: creo que hay 2 negativas

I: y en esta sexta

E2: creo que no hay ninguna

Momento 18

Ítem. Número de raíces no reales

I: (...) el número de raíces no reales, ¿sabes lo que significa eso?

E2: la verdad no lo recuerdo

I: es básicamente cuando la función no corta al eje x , se dice que son raíces o reales o imaginarias, pero al ver la forma de la función tal vez podrías suponer y darte una idea de cuantas tiene

E2: ah, bueno

I: entonces está a del punto 4 cuantas tiene

E2: ninguna

I: en la b

E2: tan poco

I: en la c

E2: tampoco ninguna

I: aquí en la quinta

E2: mmm creo que tampoco ninguna

I: y aquí en la 6

E2: allí creo que hay una, yo no veo raíces allí, mejor ninguna

I: aquí en la sexta, te pregunto ¿puede influir el hecho que la función no pase por el eje x para que exista soluciones no reales?

E2: sí, yo creo que si influye

I: pero si influye, ¿Por qué crees que no tiene?

E2: ósea yo creo que influye, pero las raíces se determinan por medio del corte sea real o no, entonces creo que no tiene, pienso yo

Momento 19

I: (...) es decir, sus cortes, soluciones, todo lo que puedas relacionar, de acuerdo al cuadro que llenamos

E2: creo que sí, en algunos son iguales, creo que en la a y en la b , la solución coincide con el numero donde la función corta al eje x

I: entonces crees que hay una relación con el número de soluciones y el grado de una ecuación

E2: yo creo que sí, porque en los exponentes, hablando del grado, también influye en el corte, a la hora de determinar los puntos

I: anterior mente me dices que lo que influía eran las variables x que están expuestas como tal en la ecuación, crees todavía que eso es si u otra cosa más influye

por ejemplo, en esta si es de grado 2, crees que podría haber 2 soluciones o no

E2: grado 2, soluciones 2, mmm, creo que si podría influir el exponente, creo que depende una de la otra, creería, pero también las variables que hay se muestran, ella que se muestra cuantas tendría que encontrar

Momento 20

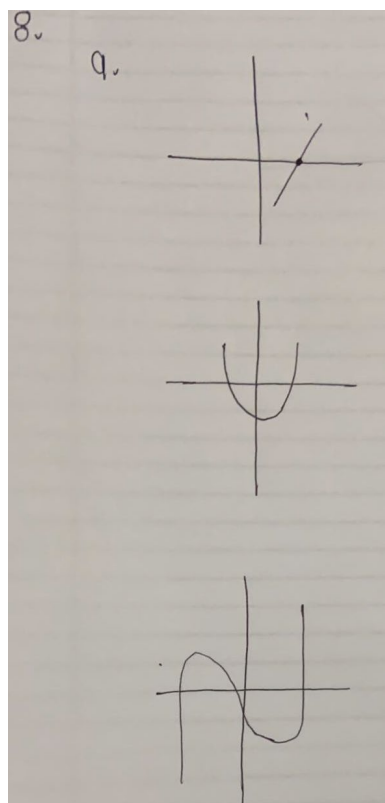


Figura 71. P8. Fuente: elaboración propia (2021)

I: (...) Es decir, dibuja como tú consideres una función que tenga una solución, 2 soluciones y tres soluciones, de acuerdo con lo que hemos trabajado y creas

E2: bueno señor, ya las dibujo (...), listo ya las dibujé

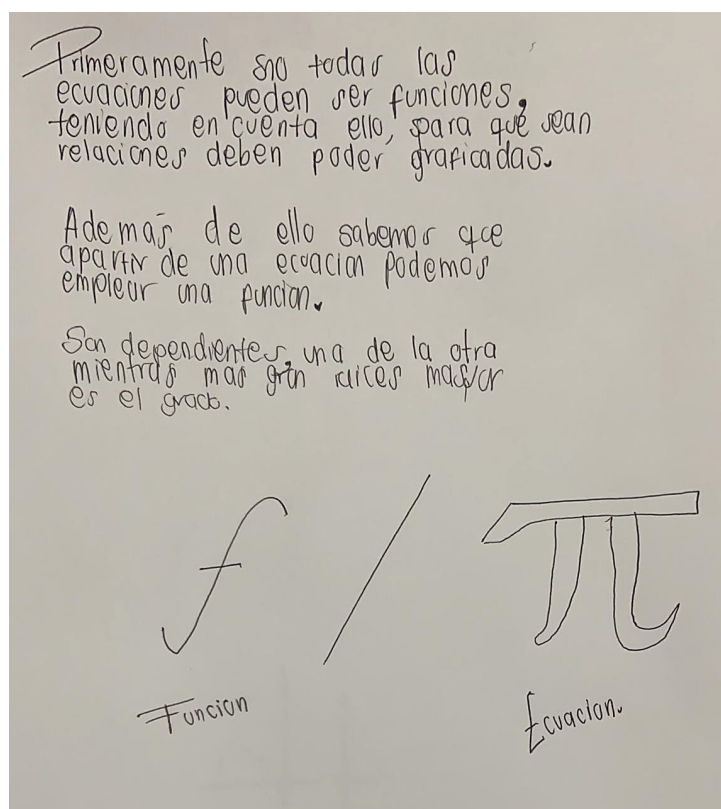


Figura 72. Momento 21. Fuente: elaboración propia (2021)

I: vale, entonces esta ya sería la última que va junto con la anterior, y dice: Teniendo en cuenta todo lo trabajado durante este taller, su experiencia como estudiante de educación media, escribe una reflexión sobre la relación que puedes establecer entre una función y una ecuación polinómicas, cuyos polinomios involucrados sean los mismos. Es decir, cuando te dan una función y una ecuación donde el exponente o el grado coincida, por ejemplo, esta (señala el ejemplo de la pregunta), establecer relación cuando sus exponentes son iguales y para ayudarte con esa reflexión están estas dos preguntas, listo

¿Qué relación existe entre la cantidad de raíces de la función y el grado del polinomio?

¿Qué relación existe entre la cantidad de soluciones de la ecuación y el grado del polinomio?

E2: bueno señor, yo creo que si debe haber una relación o sino no podrían ser graficadas

Estudiante 3 (E3) Actividad III (AIII)

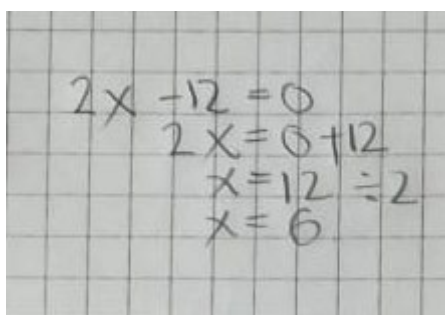
Estudiante de grado 11^o de la Institución Educativa La Buitrera

Duración 2: 00:00; Día: 07/09/2020; Plataforma online: Zoom

E1: primer estudiante en aplicarle en instrumento

I: Investigador

Momento 1



Handwritten mathematical steps on grid paper:

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 0 \\ 2x &= 0 + 12 \\ x &= 12 \div 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Figura 73. P1. Fuente: elaboración propia (2021)

I: Bien, entonces retomemos por donde íbamos, lo primero que hicimos que fue, encontrar el valor de x que sea la solución de la ecuación que te había dado aquí ¿cierto? (*señala la ecuación del primer punto de la actividad*)

E3: aham

I: Observa lo siguiente y es como es la ecuación que está aquí sí, $2x - 12 = 0$, eso ya lo hiciste ahorita y ¿cuánto fue que te dio?

E3: 6 (seis)

Momento 2

I: bueno, La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = 2x - 12$, ya mas o menos hicimos una pequeña reflexión de lo que significa que esta grafica de aquí sea pues la gráfica de esta función, ahora, me gustaría que me digas lo que dice aquí ¿Cuáles son las coordenadas de intercepción con el eje x , si es creciente o decreciente o lo otro que sepas vale.

E3: pues yo digo que es creciente

I: eeh listo, ¿por qué me dices que es creciente?

E3: porque sigue subiendo

I: porque sigue ¿subiendo?, a que te refieres cuando dices eso

E3: porque si, va hacia arriba, mmm no sé cómo explicarlo

I: ok, vale. ¿Como seria si fuese decreciente?

E3: que viniera del otro lado, ósea de... si del otro lado, hacia abajo

I: como de arriba hacia abajo (*señala el lado opuesto donde está la función, es decir, que viniera desde el cuadrante II hasta el IV del plano cartesiano*).

E3: aja, exacto

I: ok, ¿qué más puedes observar de esa función?, dime todas las características que tú veas

E3: de la función en si

I: si de la función, del trazo de la gráfica que observas ahí

E3: que es lineal

I: ok, ¿Qué significa, ósea que es característico para ti, para que tú digas que una función es lineal, cuando ves la grafica

E3: pues, que es recta

I: ok, que es recta, bueno vale ¿qué más?

E3: pues creo que jaja eso es lo único que tengo

I: OK vale, mira algo más que preguntan y es que te piden que determines las coordenadas de intercepción entre la función con el eje x , ¿Qué tú crees, que te están preguntando ahí?

E3: que resuelva ¿no?, que halle los valores de la " x "s, ¿no?

I: eeh ¿cómo así?, tú como lo harías sí, yo te digo que quiero saber en qué parte se corta la función con la coordenada del eje x , con el eje x , perdón, ¿Cuáles son las coordenadas en las que se intercepta la función con el eje x ?

E3: aah, ose que por donde pasa la línea por la "x"s, pues sería en el 6, o esa no es la pregunta

I: si si si, eso es básicamente lo que te estoy preguntando, vale, porque quiero que me digas, si yo te pido argumentar ¿Por qué tú dices que 6? ¿Qué me dirías?

E3: porque ahí es justo donde se unen y traspasa la línea vertical

Momento 3

I: listo, ahora lo último que quiero de este primer ítem, es que quiero que compares la solución de la ecuación del ítem a con los puntos donde se intercepta la función con el eje x o como dice ahí, por donde corta la función al eje x

E2: ósea comparo la primera ecuación con la c

I: no la primera ecuación, que compares la solución, tú cuando hiciste la primera ecuación cuanto te dio

E2: ah 6

I: ok, y con la pregunta que te hicieron en el ítem b de la intercepción del trazo de la función con el eje x , ¿Qué encontraste?

E3: también era 6

Momento 4

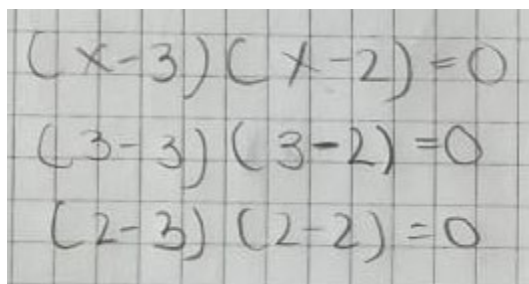
I: porque recordemos que, en el a, yo te estaba preguntando una cosa y en la b otra cosa diferente sí, porque esto de acá es una ecuación (*ítem a, punto 1*), y acá abajo es una función (*ítem b, punto 1*), pero yo quiero que me digas que tiene parecidas esta ecuación y esta función, ¿tú, que ves que se parecen?

E3: pues en todo, es igual ¿no?

I: mmm, ok, entonces te quiero preguntar, ¿ves alguna diferencia en las dos expresiones que están ahí?

E3: pues sí que, en la a, es igual a cero y en la b, no tiene resultado.

Momento 5



The image shows three lines of handwritten mathematical work on a grid background. The first line is the equation $(x-3)(x-2)=0$. The second line shows the substitution $(3-3)(3-2)=0$. The third line shows the substitution $(2-3)(2-2)=0$.

Figura 74. P2. Fuente: elaboración propia (2021)

I: ok listo, ya habiendo avanzado por todo ese punto, nos vamos a enfocar en el punto 2, listo, mira que la pregunta del ítem a del punto 2, es parecida a la a del punto 1. Dice, Encuentra el valor de x que sea solución de la ecuación: $x^2 - 5x + 6 = 0$, básicamente te están pidiendo que soluciones esta ecuación, vale, ¿puedes hacerlo?

E3: ah sí claro

I: entonces te doy un momento para que la hagas, vale

E3: listo (*Escribe en sus hojas de apuntes*) ... holi que pena se me fue el internet un momentico

I: bueno, dale tranquila

E3: bueno, no estoy segura, pero creo que es -1,5

I: ¿-1,5?

E3: ¡sí!

I: ok, ¿cómo lo hiciste?

E3: lo mismo despejando

I: ¿despejaste?

E3: aja

I: vele, descríbeme más o menos el procedimiento que hiciste, yo quiero saber

E3: pues... después del igual va el 0 (cero) y el +(mas) que está ahí, lo pase a negativo a restar

I: ok, entonces ¿Cómo te queda el lado izquierdo? $x^2 - 5x = -6$, ¿cierto?

E3: mmm ahí $x^2 - 5x =$ aja -6, ah no, pero después de resolver ese, me queda, es que no sé si en la resta los exponentes se suman o quedan igual

I: no, tú no puedes sumar ni restar los exponentes de la variable si se están sumando los términos, ósea, ahí tú tienes un x y esas " x "s, no tienes forma de juntarlas lastimosamente, creo que, mediante un despeje usual, esa ecuación no se puede resolver por ahí, normalmente lo que a uno le enseñan en el colegio, es por factorización. No sé si te acuerdas ese caso de factorización, el de la forma $x^2 + bx + c$ ¿no lo recuerdas?

E3: como x^2 ... ¿que?

I: $+bx + c$, ese te dice más o menos lo siguiente, yo lo escribo por aquí (*se dispone a escribir la fórmula para resolver una ecuación cuadrática*), si tú tienes algo de esta forma ($x^2 + bx + c = 0$), tú puedes utilizar por ejemplo, la formula cuadrática, esa es una manera, esa no es por factorización, la formula cuadrática para saber cuál es el valor de x , o la otra manera, es encontrando 2 números diferentes, que multiplicados entre sí, den 6 y que sumados entre sí, te de -5, no sé si ¿te acuerdes de ese método?, eso a uno se lo enseñan por allá en octavo

E3: no, ese método no recuerdo

I: bueno, básicamente mmm... en este caso, tú tienes hay un $x^2 - 5x + 6 = 0$, tú tienes que pensar en dos números que, multiplicados entre sí, te de 6 y que sumados entre si te de -5 ¿sí?, si tú empiezas a indagar entre esos números te encuentras que -2 y -3 son los apropiados, ¿por qué razón?, porque si tú multiplicas $-2 * -3$, signos iguales da positivo, seria 6 y si tú sumas $-2 con -3$, da -5 , observa que uno simplemente lo que coloca es en esa ecuación que está ahí, que se ve aparentemente difícil, tú la puedes reescribir como $(x - 3)(x - 2) = 0$ ¿sí?, yo te puedo mostrar de que esta multiplicación de estas dos cosas aquí, es lo mismo que esto de acá (*se refiere a la ecuación original*), lo podemos hacer simplemente multiplicando, mira $x * x$, x^2 , $x * -2$ me da $-2x$ y $-3 * x$ me da $-3x$ osea $-3x + -2x$ me da $-5x$ y al final $-3 * -2$ me da 6, de aquí ya me queda muy fácil, porque mira esto es la multiplicación de dos cosas ¿cierto? De esto multiplicado por esto (*hace referencia a $[(x - 3)(x - 2)]$*), y la ecuación me está diciendo de que esto esta igualado a 0, entonces

significa que esto es 0, si, esto de aquí de la izquierda (*se refiere a: $(x - 3)$*), es 0 y este de aquí de la derecha (*se refiere a $(x - 2)$*), es 0, una de las dos, esto significa que números hacen que esto sea 0 (*se refiere a $(x - 3)(x - 2)$*), si tú remplazas números por la "x"s, así como lo ves, que hace que esto a la izquierda se haga 0 para que la ecuación sea verdadera

E3: aaah, entonces tengo que hallar ese valor de x que me de esa condición

I: si, puedes mirarlo ahí, si quieres tantea un poquito ¿vale?, para mirar que numero o números

E3: aja, bueno entonces voy a ver que me da... ¡ah! ¿pueden ser diferentes?

I: ¿Cómo así?

E3: ósea diferente número o tiene que ser el mismo para las "x"s

I: eeeh pues no lo sé, mira ¿tú que interpretas aquí cuando ves esto? (*señala con el cursor a $(x - 3)(x - 2) = 0$*), esto entre paréntesis con esto al lado pegado entre paréntesis significa, que esto de aquí se está multiplicando con todo esto acá ¿cierto?, entonces yo la "x"s la puedo cambiar por cualquier numero, supongamos que lo cambio por 10, entonces sería "10 - 3 que es 7 ¿sí? Y aquí a la derecha "10 - 2 ¿cuánto me da?, 8 ¿cierto! ¿Cómo sería "7 * 8 sería 56 creo y pues 56 no es igual a 0, entonces 10 no es solución para esta ecuación, porque no hace que de 0

E3: aaah a eso me refería, si era el mismo número, si era 10 y ya era las dos "x"s

I: ah claro, porque si ósea, tú no puedes en matemáticas nombrar 2 números diferentes con una misma letra, si tú pones a la izquierda 10 a la derecha también debe ser 10, eso es super importante

E3: ... pues yo diría que el 3

I: ok ¿Por qué el 3?

E3: porque "3 - 3 me daría 0 y "3 - 2 es 1 y todo numero multiplicado por 0 da 0

I: muy bien listo, entonces 3 serviría ¿cierto?

E3: si

I: listo, ¿que otro número puede servir? ¿tú crees que puede haber otro?

E3: mmm servirá cualquiera de los dos, 2 también sirve

I: ¿Por qué razón?

E3: porque “ $2 - 2$ es cero y en el otro lado sería 1, pero sería lo mismo, ósea sería inversa

I: ok, muy bien ¿tú crees a parte de esos dos candidatos hay otro número que pueda hacer que eso de 0?

E3: mmm no

I: ¿Por qué no?

E3: tendría que ser un número que me reste totalmente el otro número y pues ahí sería la única, sería el 3 o el 2

I: listo, listo, entonces a lo que hemos llegado de alguna manera sí, es que 2 y 3 son solución de esta ecuación, porque acuérdate que esta ecuación de acá es la misma que de acá (*señala las ecuaciones* $(x - 3)(x - 2) = 0$ y $x^2 - 5x + 6 = 0$), porque yo lo único que hice fue transformar está en esta, listo

E3: ¡sí!

I: vale, excelente, entonces nos quedamos con el 3 y con el 2 ¿verdad?

E3: si

Momento 6

I: vamos entonces al ítem b, dice: La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ cierto, mira que aquí sucede lo mismo que la anterior, si ves cierta similitud entre la función y la ecuación, acá

E3: aja, igual que la otra

I: aja, listo dice: Describe su trayectoria, los cortes con el eje x y pues que me digas exactamente lo mismo que me dijiste en la otra grafica ¿tú que puedes observar aquí?, esa es creciente, decreciente ¿Qué logras caracterizar?

E3: primero los puntos de corte con el eje x , seria el 2 y el 3 y es creciente

I: ok, y es creciente ¿Por qué es creciente?

E3: porque (*risa*), yo siempre lo asumo que va hacia arriba

I: mmm ok, vale ¿Qué más me puedes decir de esa función?

E3: (...) que es cuadrática

I: aja, ok sí, es una función cuadrática, esa forma que me habías dicho ahorita ¿no?

E3: aja

Momento 7

I: Bien, ahora quiero que hagas es que compares la solución, que obtuvimos de la ecuación de acá arriba con los puntos que intercepta a la función con el eje x

E3: pues que siempre son el 2 y el 3, eso tienen en común

I: ¿que son que, el mismo?

E3: ¿cómo es que era?... comparar ¿Qué?

I: si, compara los puntos con las soluciones

E3: si, que siempre son los mismos, el resultado no importa, que una posible solución para la primera ecuación era el 2 y el 3 y justo en la gráfica los puntos de intercepción en el eje x es en el 2 y el 3

P3

Momento 8

I: ok, listo, ahora mira lo que dice la 3, describe la relación que se puede establecer entre la ecuación y la función establecidas en el punto 1 y 2, referente a la solución y los puntos de corte con el eje x . Quiero que me digas una conclusión sobre esto a ver que es lo que significa lo que está escrito aquí, yo creo que nosotros podemos ver algo que es evidente ¿no?, en la

primera ecuación en los dos ejercicios que hemos hecho, nos daba exactamente los mismos valores en los que daba el corte en la función de la gráfica de la función abajo ¿cierto?

E3: aaah sí, eso es verdad

I: eso lo concluimos, por lo menos al inicio, por lo menos la primera era 6 y tú dijiste que en la gráfica también cortaba en 6 y que aquí encontramos la solución de esta ecuación que era el 2 y el 3 y curiosamente también en la función se cortan en el 2 y el 3

E3: aja

I: ¿Por qué pasa esto? ¿Tú crees que es coincidencia? o hay una razón como de fondo del porque sucede eso

E3: No es coincidencia, hay una razón, porque pues si remplazamos las " x "s, siempre nos va a dar estos números, ósea si remplazamos la x con cierto número nos van a dar estos dos o ¿no?

I: ¿Cómo así?

E3: ósea, no es coincidencia

I: ¿Por qué no es coincidencia?

E3: porque si es la solución de la ecuación, si entiende

I: a ver, ¿qué cosa es la solución de la ecuación?, pensemos por ejemplo en el primero

E3: aja, que el resultado fue el 6

I: ok listo, esa es la solución de esta ecuación, pero esta de acá es una ecuación y esta de acá es una función (*señala la ecuación del ítem a y la función del ítem b del punto 1, haciendo evidente su distinción*), son dos cosas diferentes a pesar de que tienen en común esto y esto (*hace referencia a los primeros términos de la ecuación y la función ej. $2x - 12$*), una cosa es una función y otra cosa es la ecuación, son dos cosas diferentes, pero, sin embargo, coinciden con la coordenada de corte de la función resulta ser lo mismo que la solución de la ecuación, ¿Por qué?

E3: porque (...), pues porque uno remplaza y para hallar en sí que le punto de corte de en el 6, es porque uno ya ha hecho el cambio, no sé cómo decirlo

I: a ver, supongamos que yo no tuviese la gráfica ¿cierto?, no la tengo, no la conozco todavía y yo tengo acá la función y yo te pregunto valentina, yo quiero saber esta función no tengo ni idea de qué forma tiene, pero yo quiero saber por ¿Dónde pasa, por el eje x ?, ¿tú que haces?

E3: como así, por donde corta el eje x

I: tiene en cuenta que no sabemos, no conocemos el trazo de la función, ósea yo no me he tomado el trabajo de hacer las líneas, nada, no he hecho la gráfica, no la he dibujado, ósea que yo no sé cómo es, pero tengo la expresión que es esta de aquí (*hace referencia a: $f(x) = 2x - 12$*), yo quiero saber, a ver como más te podría preguntar, ¿Qué significa, no tanto como en el dibujo sino en cuestión matemática, que significa que justo por el 6, pase la gráfica de la función?, eso tiene alguna implicación

E3: (...) ósea, que porque pasa por el punto por el eje x

I: si, ¿por qué pasa por el eje x ?, ¿qué significa que la función, pase por el eje x ?

E3: es 0 (cero)

I: ¿cómo así 0? Háblame un poquito más de eso

E3: ósea si, en el centro de todos, ese se cuenta como 0 (cero), entonces la coordenada de eso, sería (0, 6), sería la coordenada

I: ok, si yo ubico el punto (0,6), por la horizontal, busco el 0 y luego busco el 6, seria acá (*hace referencia al 6 que pertenece al eje y*)

E3: aaah

I: entonces tiene que ser como al revés ¿no?

E3: aaah si, entonces tiene que ser la coordenada (6,0)

I: bien, entonces ese (6,0) ¿qué significa?

E3: el punto de corte

I: ok sí, es el punto de corte, pero yo como hago para saber que ese 6 va ahí relacionado con el 0, ¿Cómo yo lo sé?

E3: (...), porque remplazamos la x

I: la x ¿Dónde?

E3: pues en la función

I: ujum, pero ¿Por qué sabes porque números tienes que remplazarlos?

E3: mmm ¡uish!, párate yo (...), yo diría que el 3, pero no sería porque o sino daría -6, entonces sería

I: ok

E3: entonces sería un numero negativo...

I: ¿Qué estas intentando hallar?

E3: pues, usted me dice que halle el numero de la x , que solucionándolo me de 6

I: no, no, no, observa lo siguiente si yo pienso en el punto (6,0), eso significa que la x , yo la remplacé con el 6 ¿sí o no?

E3: aja

I: vamos a repasar algo un momentico, dejemos este tema, un poquito a un lado y pensemos en que significa esta grafica en sí, lo que estábamos hablando al inicio, nosotros habíamos dicho de que yo por lo menos se, que un punto determinado, por ejemplo, pensemos en el punto, en este punto de aquí, el punto que justo está por encima del 10, ¿si lo ves?, que esta sobre la función (*señala el punto 10, 8 de la función del ítem a, punto 1*), ¿por qué yo sé que ese punto hace parte de la función?, pues yo lo sé, porque si yo remplazo el 10 acá en la función, si yo remplazo esto con 10 (*hace referencia a la incógnita que hace parte de la función, es decir, $f(x) = 2x - 12$*), si yo remplazo esto con 10, esto me da $2 * 10 = 20 - 12$, es 8 ¿sí? Y observa que este punto aquí, que es (10,8), pertenece a la función, porque al yo remplazarlo aquí, este 10 a la izquierda me da 8, mira que no sucede con todos los puntos, por ejemplo, observa aquí el punto (4,4), justo donde tengo el cursor, mira que ese punto no pertenece al trazo de la función, porque, pues el trazo no está pasando por ahí sino más adelante, no está pasando por la carreterita ¿me sigues?

E3: si

I: ok, por el punto (4,4) observa que no hay función, literal por aquí no está pasando ninguna línea, ¿Por qué razón?, mira que, si yo remplazo aquí esto con 4, $2 * 4$ ¿cuánto me da?, 8 y $8 - 12$ ¿cuánto me da? -4 ¿sí? Y este punto de aquí entonces no pertenece porque 4 no esta relacionado con 4, si me hago entender, ahora quiero que rápidamente me digas ¿Qué puntos están relacionados, dame ejemplo de 3 puntos que hagan parte de la función y un ejemplo de un punto que no haga parte de la función, ver si sabemos más o menos de lo que estamos hablando

E3: bueno, mmm (...), pues serian (8,4)

I: a ver busquemos, ¿Por qué (8,4)?

E3: porque hay se unen, se unen los dos, ósea la línea que va en la cuadrícula se une ahí

I: ok, dame otro ejemplo

E3: eh (5,-2)

I: listo, bien, ahora dame un ejemplo que no haga parte de la grafica

E3: (3,2)

I: aja en efecto (3,2), está por acá, está muy por fuera, listo, excelente, ahora quiero que me expliques ¿por qué (3,2) no hace parte y por qué (8,4) sí?

E3: porque no lo da en la ecuación, ósea, resolviendo la ecuación con cualquier número que no me va a dar ahí, si me entiendes

I: ósea si yo, cambio la x por un número, la función me va arrojar la coordenada que le corresponde ¿sí? Como el y que le corresponde ¿cierto, estamos de acuerdo con eso?

E3: si

I: y ese número, es un numero particular, que es determinado es precisamente por la función, listo, por esa razón el (8,4) si pertenece porque el 8 coincidencialmente esta con el 4 ¿sí?, pero el 3, no está con el 2, el 3 está por acá con -6, esta con otro, es esa la razón, vale, entonces ya

estamos más o menos en la misma página, ahora volvamos a la cuestión del punto de corte, ese punto por el que pasa el eje x y pasa la función ¿qué punto es?

E3: (...) ósea, el punto que pasa por la línea x , el 6

I: pero no, acuérdate que el punto en el plano cartesiano son dos números, ¿sí?, uno horizontal y otro vertical ¿cierto?

E3: aja

I: entonces que puntos serian, ¿cuáles son las dos coordenadas?

E3: como usted dijo (6,0)

I: ok, listo si, (6,0)

E3: y también hay otro (0,-12)

I: (0,-12) ah sí, pero ese es el corte con el eje y , estamos hablando solo del x , cierto que la función corta al eje y , eso es verdad, pero solo estamos pensando en el eje x si eso es así ¿Cuántos puntos hay?

E3: uno no mas

I: si, (6,0) listo, y ahora lo que yo quiero que me expliques es, ¿Por qué (6,0)? y ¿por qué no otro punto? Y ¿Por qué la gráfica no pudo pasar por otro lado? y ¿por qué justo por el punto (6,0)?

E3: porque es positivo y si fuera negativo seria por el otro lado

I: bueno si, pero el 5 también es positivo y no pasa por ahí, ¿Qué tiene de especial ese 6?

E3: que es par, es que no se si tiene sentido, es que no sé

I: lo que yo digo es que, también hay muchos números pares esta el 2, el 4, pero no, la gráfica justo le dio por pasar por el 6 ¿Por qué?

E3: mmm no sé, porque es creciente, que va hacia arriba

I: bien, nosotros sabemos que hay una relación entre esta grafica como lo habíamos mencionado al inicio, entre esta gráfica y la función descrita en la parte de aquí (punto 1, ítem a y b) ¿cierto? Y todos los puntos que hacen parte del trazo rojo están determinados es por esto de aquí (*se refiere a la expresión de la función, ej., $f(x) = 2x - 12$*), todos, absolutamente todos, esta grafica tiene esta forma literalmente por esto de aquí, no hay como ninguna otra razón ¿sí?, entonces a lo que yo voy, ¿Qué significa que el punto (6,0) haga parte de la función bajo esta perspectiva? De la expresión que está ahí colocada ¿Por qué?

E3: pues no es eso, porque es la mitad

I: ¿Cómo así la mitad?

E3: mmm es que no sé cómo decirlo, no sé, no entiendo la pregunta

I: bien, retomemos más o menos por donde íbamos ahorita, acá al final, nosotros encontramos que justamente la solución de esta ecuación de acá era 6 ¿cierto? Y que el punto de corte de la función era ¿Qué coordenada? (...) (6,0) ¿cierto?, que significa que (6,0) haga parte de la función, tú ahorita me lo explicaste cuando yo te estaba dando otras coordenadas

E3: pues, porque cambiamos la x

I: cambias la x ¿Por qué?

E3: cambia la x , por 6 ¿no?

I: ten en cuenta algo y es que estos números que están en la recta horizontal son los valores de x , no los valores de y , ósea lo que noto que estas haciendo es que están intentando encontrar una x que te de 6 acá ¿cierto?

E3: aja

I: si no, de hecho, no es así, cuando tú encuentras el 6 en la horizontal que son las x , es porque la x la tienes que remplazar por el 6, que pasa si tú remplazas la x por el 6

E3: pues daría 0 (cero)

I: listo, ahora quiero que me digas que significa que de 0 (cero), creo que ya estamos llegando

E3: que es el...

I: el 6 con que está relacionado

E3: con el 0, entonces puedes volver al inicio

I: tú me explicaste algo que había una relación entre el 0 y el eje x , vuélvemelo a decir

E3: pues que el 0, es en sí pegado a la x , es el punto en toda la mitad

I: aja ósea que, por la recta, la recta que pasa, que nosotros le llamamos el eje x , que pasa de izquierda a derecha, ¿por donde pasa esa recta?

E3: por el 0

I: ósea que este punto de aquí es (6,0)

E3: si

I: listo, lo que quiero que me digas entonces que relación tú ves, en que este punto sea el punto de corte y que esto de aquí sea 6

E3: aaah porque pasa por la x y la y

I: ¿Cómo así por la x y la y ?

E3: (*risa*) es que usted me dice que la recta x pasa por el cero de la y

I: aja si, en efecto

E3: entonces 6 es el punto donde se encuentran estas dos, si me entiende, es el punto donde está relacionadas la x y la y

I: están relacionadas la x y la y , a ver si logro entender lo que intentas decir, mmm, realmente está y que está aquí, yo puedo llegar el eje y como tal puedo quitar ese eje y poner $f(x)$, como para que sea más claro, ósea imagina que el y de aquí hay una $f(x)$ ¿cierto?, mira que este punto de aquí, tú sabes que es (6,0), porque justo sobre el eje x , esta la segunda coordenada que es la de y que es 0 ¿cierto?, porque es (6,0), ese (6,0) hace parte de la función ¿cierto?, Pues porque precisamente por ahí está pasando el trazo de la función, listo ¿Qué significa que (6,0) haga parte del trazo de esta función? ¿Qué significa según de esta expresión de acá? (*hace referencia a $f(x) = 2x - 12$*)

E3: que es el punto de $f(x)$

I: no, si tú remplazas esta x , ¿Por qué número tienes que remplazarlo?

E3: por 6

I: por 6, si tú remplazas eso por 6 ¿qué te da?

E3: 0 (cero)

I: listo, bien, ahora quiero que me digas, nuevamente te hago la pregunta ¿Qué relación hay?, ahora ya no te estoy hablando de la función sino de la primera ecuación que vimos, ¿qué relación hay entre esto y esto (*se refiere a la ecuación $2x - 12 = 0$ y la función $f(x) = 2x - 12$*)

E3: que las dos dan 0 (cero) o ¿no?, no me estas preguntando por eso

I: que las dos dan cero, ¿Cómo así que las dos dan cero?

E3: pues como me estás diciendo, que esta ecuación da 0 si la cambiamos por el 6

I: bueno, intentemos hacer este mismo análisis con esta de acá, nuevamente te acuerdas cuando resolvimos esta ecuación ¿Qué valores nos daba en las " x "s?

E3: que esa se podía resolver con el... mm como usted hizo esta, pues dio -2 y -3

I: no, esta nos dio 2 y 3 cuando la hicimos, ¿te acuerdas?

E3: aja si, 2 y 3

I: que 2 y 3, te acuerdas cuando teníamos el paréntesis aquí y que tú dijiste que podía ser 2 y 3 para que diera 0

E3: aja, si

I: listo, super bien y que “coincidentalmente”, eeh la gráfica de esta función pasa justo por el eje x por los números 2 y 3

E3: si

I: listo, según todo lo hemos hablado, quiero que me digas eeh ¿Por qué pasa eso? ¿Por qué 2 y 3 son solución para esta ecuación de acá arriba?

E3: uish, para que de 0 porque 2 y 3 pues para que de 0 y qué relación tiene con la otra que la otra da 0

I: ¿cómo así?

E3: ósea me dijiste que porque 2 y 3 y porque en la otra me dio 0

I: no, no, no, cuando nosotros resolvimos esto acá ¿Qué nos dio?

E3: 2 y 3

I: listo, ¿cuáles son los puntos de corte de esta función aquí con el eje x ?

E3: 2 y 3

I: ¿Por qué 2 y 3? y aquí arriba también da 2 y 3

E3: porque es el mismo, ósea es la misma expresión

I: pero si hay una diferencia que yo noto, por lo menos aquí la ecuación esta igualada a 0 y mientras que aquí esta igualado a $f(x)$, esa es la diferencia ¿no?, pues es lo que yo noto

E3: si

I: entonces que hace que eso se cumpla y sea cierto

E3: que... no, no sé, ¿Por qué 2 y 3? ...

I: es que hay una coincidencia grande, es que esta es la función y al yo graficarla y al observarla, noto que el punto (2,0) y el punto (3,0) ¿cierto?, ambos puntos hacen parte de la función, en otras palabras justo por el 2 y por el 3 pasa la función y pasa el eje x , pero “coincidencialmente” bueno la de aquí arriba si yo soluciono esta ecuación, donde este polinomio de aquí es este mismo de aquí si yo la soluciono también me da 2 y 3 ¿quiero saber por qué crees que pasa eso? Ya para pasar este punto 3 porque le hemos dedicado bastante, si quieres puedes escribirla en la hojita que tienes ahí y me explique el ¿Por qué pasa eso?, según todo lo que hemos hablado y lo que tú entiendes de las funciones...

E3: es porque es cuadrática

I: puedes darte el momento para escribirla yo te espero

E3: es que la verdad no entiendo cómo resolverla, pues porque usted me dice que porque 2 y 3 y resulta que 2 y 3 era la solución de la primera para que cumpliera la condición de que diera 0

I: si muy bien, eso es cierto

E3: pero usted me pregunta que ¿por qué en la gráfica da 2 y 3?

I: también porque en la gráfica, tú puedes ver que justo por 2 y por 3 pasa, mira que literal el trazo rojo pasa por 2 y 3, también igual a lo que nos dio la solución arriba, tiene que haber una relación ¿no? o no hay ninguna relación, ósea algo te dice que si hay una relación (...), por donde tú te irías más o menos ¿crees que este igual a 0 que está aquí en la ecuación está relacionado con eso?

E3: (...) mmm no, porque como usted dice que eso es, lo que los diferencia a los dos, ósea que son semejantes, pero por ese resultado de 0 no es y la otra está en $f(x)$, entonces no

P4

Momento 9

I: ¿qué características ves, en esta función?

E3: que pasa por los ejes x y y

I: ok intercepta a los dos ejes, ok, ¿por donde pasa?

E3: por el (1,0) y el (-2,0), ve... si aah no el (0, -2)

I: listo, ahora yo quiero que me digas (...) ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje x de esta función?, eso tiene otro nombre también que es raíces, cuando a ti te pregunten ¿Cuál es la raíz de la función?, observa donde es el corte con el eje x , si, es lo mismo. Entonces ¿cuál es la raíz de esa función?

E3: (1,0)

I: aja listo, lo tienes identificado, listo, ahora quiero que coloques en el papelito que intentes postularme una expresión o literal una función, digamos escrita algebraicamente, que tú le puedas asignar a esta función de aquí ¿sí?, que es lo que exactamente te esto preguntando, volvamos acá a la de arriba, mira que esta grafica que está aquí (*se refiere al punto2, ítem b*), es una parábola tiene una función que le corresponde ¿sí? una expresión que le corresponde que es esta acá, entonces yo lo que quiero es que mirando esta de aquí intentes tú escribir una función, algo así como esta función es $f(x) = a \dots$ tal cosa, la puedes escribir en el papelito y cuando termines me la dices

E3: mmm bueno (*escribe en su hoja de apuntes*) (...) bueno yo diría que seria $(2x - 2 = 0)$

I: ok, vale, pero observa que lo que tú me acabas de decir hay, es una ecuación, te la voy a escribir justo por aquí a ver si tengo razón me dijiste $2x - 2 = 0$, justo así ¿cierto?

E3: aja, si

I: Esto que tú me escribiste es una ecuación, si, porque yo tengo algo a la izquierda igual a algo a la derecha, pero no, yo te estoy preguntando es por una función ¿Qué es una función?, lo que yo te mostré aquí mira (*se refiere al punto2, ítem b*), dice $f(x) = a$ una expresión a la derecha ¿si lo ves?

E3: aja

I: es diferente

E3: aaah entonces seria $f(x) = 2x - 2$

I: listo, ¿Por qué la escogiste así?

E3: porque usted me dijo que hiciera una función, que me diera el punto de corte entre la x ¿sí?

I: no, ósea lo que yo te dije es que me dijese una función una expresión de una función cuya grafica tu creas que pueda ser esta, la primera la a, nada más eso, esa es la única indicación

E3: pues yo me base en ese punto de corte

I: aah ok. En el punto de corte

E3: entonces yo dije bueno, si cambiamos la x por el 1 seria $2 * 1 = 2$, daría 0, entonces seria (1,0)

I: mmm ok, super interesante, bien, una pregunta ¿Por qué tú la pusiste de grado 1? Ósea ¿por qué no le colocaste una x^2 o algo así?

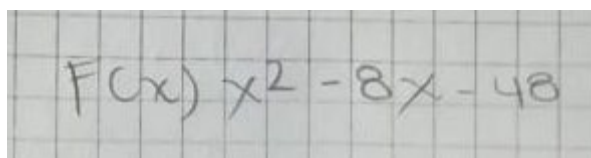
E3: pues no sé... Cuándo es cuadrática no pues que es así ¿cómo la parábola?

I: ok

E3: porque es lineal ahí

I: listo, dejémoslo hay, ¿tú escribiste esa función ahí en la hojita?

E3: aja



A photograph of a piece of grid paper with the equation $F(x) = x^2 - 8x - 48$ handwritten in black ink.

Figura 75. Momento 10. Fuente: elaboración propia (2021)

I: ok, bien excelente, ahora nos vamos hacer el mismo análisis con la b, en esta de la derecha, listo quiero que me digas que características logras evidenciar en esta, ¿tú que ves?, si es creciente, decreciente, ¿Cómo la ves?, si te parece bonita o si te parece fea, ¡todo!, quiero que me digas todo lo ves ahí

E3: que es creciente y que el punto de corte es negativo

I: ¿el punto de corte con que, con el eje x ?

E3: aja tiene 2, pero uno solo es 0 y el otro ...

I: ok, recuerda que un punto son dos coordenadas ¿no?, son dos números, una pareja de dos números ¿Cuáles serían?

E3: seria (0,0) ... eeh no veo bien el numero eso es -4 ... seria (-4,0)

I: si ese es -4, muy bien, listo, ahora yo quiero que intentes escribir una función que tú crees que la gráfica pueda ser eso que está ahí dibujado

E3: mmm (...) (*escribe en sus apuntes*) ... uish emm, está muy difícil, pero...

I: listo, ¿qué crees que te genera más dificultad?

E3: pues porque tengo que tomar en cuenta en que me de los puntos de intercepción o ¿no?

I: eeh si, pues no sé, la idea es que lo hagas lo más parecida posible que la gráfica se parezca a lo que haces. Cuéntame más o menos ¿qué estás haciendo?

E3: pues yo estoy tomando en cuenta el -4 entonces estoy haciendo que toda cuestión al resolverla pues cambiando la x por el -4 me de todo 0 para que quede justo donde tiene que ir el punto

I: ok, super bien

E3: pues adivina como me dio eso, puse $x^2 - 8x - 48 = f(x)$

I: uish, ok listo, de esto de aquí que escribiste ¿Por qué la escogiste al cuadrado? Porque no la dejaste así sola, así como $8x - 48$, algo así ¿Por qué cuadrada?

E3: porque me base en la gráfica pasada, tome la misma ¿cómo se dice eso?, me guie por la otra ecuación que había

I: ¿cuál otra ecuación que había?

E3: la parábola también, que está más arriba

I: aaah la de arriba, la que nosotros trabajamos aquí, esta ok (*se refiere a punto 2, ítem b*)

E3: aja

I: entonces por eso asumiste que porque esta de acá es a la 2 y tuvo esta forma entonces esta también puede ser parecida

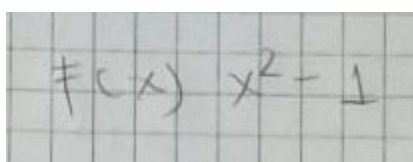
E3: ujum

I: ok, está bien listo, entonces más o menos si te entendí, lo que tú estás intentando hacer era hacer coincidir estos dos números para que cuando colocaras el -4, todo esto de diese 0

E3: aja

I: ok, listo bien entonces ¿por qué tu elegiste hacer ese análisis con este punto de corte de acá y no por ejemplo con el de la derecha el de (0,0)?

E3: no, no sé, ósea creo que por... porque si, ósea la verdad no pensé en sí, en que también tenía que hacerlo con el otro



A photograph of a piece of grid paper with the handwritten equation $f(x) = x^2 - 1$ in dark ink.

Figura 76. Momento 11. Fuente: elaboración propia (2021)

I: ok, bien dejémoslo hasta ahí, ahora miremos esta de acá, lo mismo ¿qué característica tiene?, que logras ver en esta grafica de aquí

E3: que también es cuadrática, que es ascendente y que tiene dos puntos de corte con el eje x

I: ¿Qué cortes?

E3: que es (-1,0) y (1,0)

I: listo, ah bueno ya de una vez los tienes hay identificados, esa re a la segunda pregunta ¿Cuáles eran las raíces?, serian entonces -1 y 1 ¿cierto?, las raíces

E3: mmm aja

I: listo, ahora quiero que nuevamente me intentes postular una expresión que crees que sea la expresión correspondiente que iría aquí ósea $f(x) =$ ¿a qué cosa?

E3: emm bueno, aplique la misma, siento que esta fue como más rápida, entonces seria $f(x) = x^2 + 4 - 5$

I: listo, ósea, pero yo puedo colocar en vez de $4 - 5$, de una vez colocar el -1 ¿no?

E3: aah pues si también

I: listo, entonces esa o le ¿quieres cambiar algo?

E3: pues es que si pondríamos, ósea yo siempre tomo los puntos de corte entonces sería -1 positivo, daría 0, entonces si sería $f(x) = x^2 - 1$, sí, así está bien

I: ok ¿Por qué insististe en colocarla cuadrática? ¿Por qué a la 2? ¿Por qué no, nada más una x

E3: por lo mismo porque es parábola ¿no?

I: ok, porque es parábola, ¿crees que hay alguna otra razón?, por la que uno debería escoger la cuadrática, más allá del hecho que sea una parábola

E3: pues no sé

I: listo, te quiero preguntar algo aprovechando la oportunidad, mira esta gráfica y mira esta grafica (*se refiere a las gráficas del punto 4, a y b*), a aparte del hecho de que esta sea una parábola la de la derecha y que esta no es una parábola ¿en qué otra cosa se diferencia?

E3: en que esta se ubica en el cuadrante negativo y la otra está en el positivo

I: ok, si es cierto, esa es una diferencia, pero en cuestión a los puntos de corte

E3: ah, pues que una pasa por todo el centro y la otra no

I: listo, ¿Cuántos puntos de corte tiene?

E3: ah, que esta tiene un punto de corte y la otra tiene dos puntos de corte

I: mira que la de acá la que es cuadrática también tiene dos ¿no? (*se refiere a la gráfica c, punto 4*),

E3: también tiene dos puntos de corte

I: ok, solo quería decir eso

E3: ah, esa es una razón por la cual es ¿cuadrática?

P5

Momento 12

(...)

E3: creo ósea, no sé, pero yo diría que son dos parábolas

I: ¿dos parábolas?

E3: si, que la primera vaya hacia arriba y la segunda vaya hacia abajo y todas pasen por el punto (0,0)

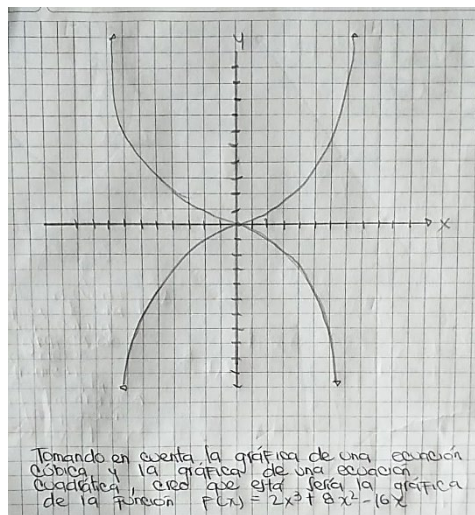


Figura 77. P6-1. Fuente: elaboración propia (2021)

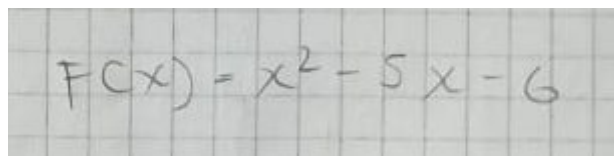

$$f(x) = x^2 - 5x - 6$$

Figura 78. P6-2. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 13

I: (...) hay algo diferente en esta gráfica. Quiero que me digas que es.

E3: que no tiene raíz

I: que no tiene raíces aparentemente ¿cierto?, ¿Por qué no tiene raíz o raíces?

E3: porque no tiene punto de corte con el eje x , que no pasa por ahí

I: ok, tú crees que eso es posible, puede haber una función que sea así como rara que no corte al eje x , eso es ilegal por así decirlo que podría pasar en las matemáticas

E3: pues sí pasa, he hecho de esas a veces y he visto que hay veces no pasa por el eje

I: ok, listo, bien ¿tú que crees a que se refiere la expresión “raíces que no son reales” ?, te suena familiar o sabes de pronto que pueda significar

E3: mmm no, pero asumo que es porque no pasan por el eje x ¿no?

I: ok, digamos entonces que tiene sentido que yo diga que esas raíces no existen

E3: aja

I: listo, bien, ahora sí a lo que pide el ejercicio, quiero que escribas una posible expresión que determine esta gráfica, que sea $f(x) = a$ tal cosa y que después de que hagas eso, me escribas nuevamente como un parrafito chiquito, donde digas que hiciste para llegar a esa expresión ¿vale?, cuando la termines me dices para yo preguntarte un poquito sobre eso

E3: bueno (*escribe en sus apuntes*) ... eh listo, bueno yo diría, tomando siempre los puntos de intercepción, que son con los que siempre me guio, seria $f(x) = x^2 - 5x - 6$, listo

I: ok, ¿Por qué la escogiste cuadrática?

E3: porque así es como se forma la parábola

I: ok y el 5 y el 6 de ¿dónde los sacaste? y ¿que sean negativos?

E3: pues como dije, tome en cuenta el punto de intercepción del eje y , entoces remplace $6 * 6 = 36 - 5(6)$ seria 30 y ya me había dado 36 entonces lo resto y me da 6 y -6 igual a 0, para poder que se cumpla ese punto, yo lo hice pensando en que se cumpliera ese punto

I: listo, listo, bien. Eh vamos entonces, ah bueno, coloca eso que me acabas de decir mas o menos en un párrafo resumidito en la hojita que le vas a tomar la foto que me vas a enviar ¿vale?

E3: vale

Función	a	b	c	5	6
Número total de raíces	1	2	2	1	"ninguna"
Grado de la función	1	2	2	3	2
Número de raíces reales positivas	1	"ninguna"	1	"ninguna"	"ninguna"
Número de raíces reales negativas	"ninguna"	1	1	"ninguna"	"ninguna"
Número de raíces no reales	"ninguna"	"ninguna"	"ninguna"	"ninguna"	2

Figura 79. P7. Fuente: elaboración propia (2021)

Momento 14

(Número total de raíces)

(...)

I: en la 5 ya te tienes que fijar en lo que hiciste o lo que creas

E3: pues según la gráfica que yo hice solo 1, porque solo pasan por el punto (0,0) las dos que hice

I: listo y la 6

E3: ninguna

Momento 15

(Grado de la función)

(...)

I: entonces vamos a la a del punto 4 ¿Cuál es el grado de esta función?

E3: 1

I: esta es 1 ¿por qué crees que es 1?

E3: porque es lineal

I: ok y la b

E3: 2

I: ¿por qué?

E3: porque es cuadrática

(...)

I: y la 6

E3: mmm Nin... ah 2

I: ¿por qué lo dudaste? quisiera saber ¿por qué lo dudaste?

E3: porque no estaba viendo los cortes, pero me acorde que la había hecho y era de 2

Momento 16

(Número de raíces positivas)

(...)

I: entonces vamos a mirar cuantas raíces positivas tiene la de la a

E3: positiva 1

I: listo y ¿Por qué 1?

E3: porque está en el lado positivo y es el único punto de intercepción con la x

I: entonces aquí seria 1, en la b ¿cuántas raíces positivas hay?

E3: mmm ninguna o el cero es parte... no el cero no tiene signo, entonces sí, ninguna

(...)

I: en la 5

E3: ninguna, porque en la gráfica que yo hice pasa por el (0,0) y como el 0 no tiene signo entonces ninguna

I: entonces aquí seria 0 y aquí en la 6

E3: ninguna

I: ¿Por qué?

E3: pues porque no tiene raíz, bueno real pues

I: ¿cómo así real?

E3: ósea, como dice abajo reales y no reales, entonces hay sería una raíz no real

I: ¿eso significa q no existe?

E3: mmm si

I: ósea cuando yo te digo, es que esta función tiene una raíz que no es real, significa que esa raíz ¿existe o que no existe?

E3: que no existe

Momento 1

(Número de raíces no reales)

I: y en la 6

E3: hay 1

I: ¿Dónde?

E3: o no sé cómo decirlo

I: ¿Por qué 1 sola? ¿Por qué todas las anteriores no tenían ninguna y esta sí?

E3: porque es la única que no pasa por el eje x

I: entonces se puede determinar cómo cierta cantidad de raíces no reales, como yo sé cuántas raíces no reales tiene, sino, ósea no están los cortes

E3: mmm

I: ósea tiene sentido responder aquí un número, es decir, 1, 2, 3, 4, 5, no sé

E3: yo diría que 2 no reales

I: ¿Por qué 2 no reales?

E3: porque aquí asimiento, que la gráfica estuviera más abajito y tocara tendría dos raíces, pero como ni siquiera las toca tendría 2 no reales

I: ok, bueno quiero que hagamos un ejercicio mental rápidamente, supongamos que yo tengo una función que, así como esa no toca el eje x ¿cierto?, pero que tiene otra forma ¿sí?, que no es así como la parábola pero que tiene otra forma, si yo cambio eso, ¿cambia el número de raíces no reales?

E3: mmm cambia el número de raíces no reales, si tiene otra forma y no pasa por el eje x

I: aja si, tal cual, como esa, tú me dices, es que esa no yo creo que tiene 2 raíces no reales porque si la bajáramos un poquito, tocaría en 2 lugares

E3: aja, pues si tuviera otra forma, seri la lineal y pues yo diría que tendría solo 1

Momento 18

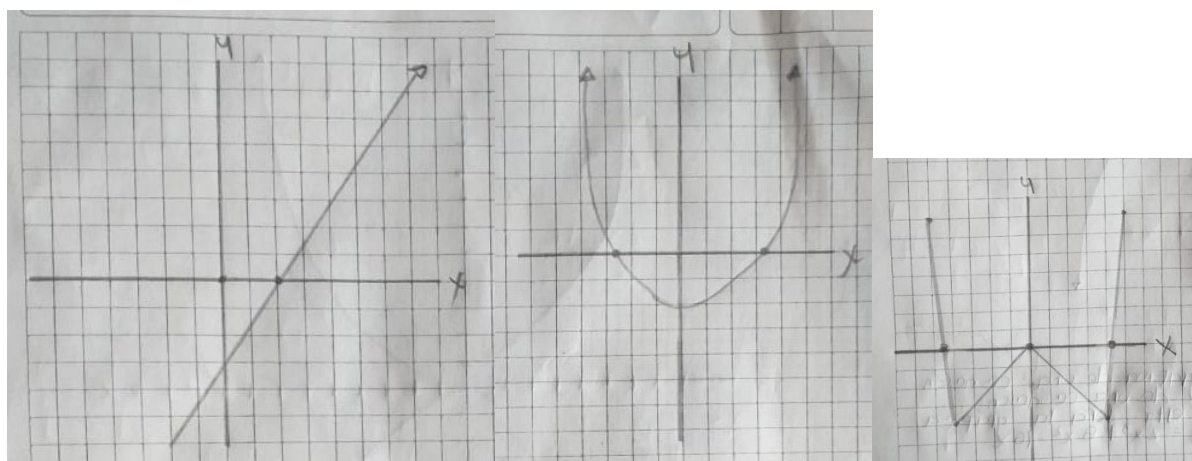


Figura 80. E3P8. Fuente: elaboración propia (2021)

E3: vale, (*se pierde conexión*), (...), yo diría, es que según la gráfica que yo haya hecho, pues la de grado 3 sería como la que te mande ahorita como si fuera un yin yang, entonces ahí no creo, entonces eso no es nada como eso, la que yo hice que tiene 3 raíces, entonces yo diría que es 2

I: ¿esa también es de grado 2?

E3: sí, creo

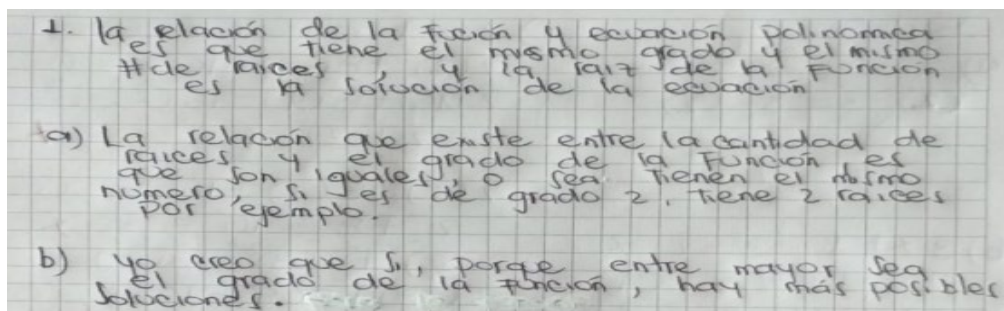


Figura 81. Momento 19. Fuente: elaboración propia (2021)

E3: una relación puede ser ¿qué es de grado 2?

I: por ejemplo, si claro, todas las relaciones que tú encuentres las colocas en un párrafo y en ese párrafo respondes estas dos preguntas también, en esa redacción ¿Qué relación existe entre la cantidad de raíces de la función y el grado del polinomio o de la ecuación es lo mismo ¿sí?

E3: pero entonces, ve ni, pues es que no entiendo las preguntas de, las ultimas, ósea digo que relación existe entre la cantidad de raíces de la función ...

I: ven yo te pregunto ¿Qué es la raíz de una función? Dime según todo lo que hemos trabajado ahorita

E3: el punto de corte en el eje x , por donde pasa la grafica

I: es el número en el eje x , el numero en la horizontal, que me determina por donde pasa la función ¿cierto?, eso es una raíz, por ejemplo, el 6 que vimos ahora, literal el punto por donde pasa la función que está en el eje x , el punto de corte ¿sí?

E3: aja

I: listo, esa es una raíz, ahora quiero que me digas ¿Qué es el grado de una función?

E3: aah ósea que una posible relación es que dependiendo del grado que este así mismo es el número de raíces o ¿no?

I: bueno, respóndeme tú, ¿tú crees que es así?, según todo lo que hemos visto

E3: pues yo diría que esa es una posible relación, porque hemos visto que hay ecuaciones que son de grado número 1 y siempre tiene 1 sola raíz y las que son pues que tiene grado 2 tienen eh 2 raíces, pero en la 3 sino sé, ¿esa tú crees que es la respuesta?

(...)

I: y la segunda pregunta dice: ¿Qué relación existe entre la cantidad de soluciones de la ecuación y el grado del polinomio, ósea ya no estoy hablando de la función sino que estoy hablando de la ecuación lo que vimos al inicio, una ecuación puede tener diferente cantidad de soluciones, hay unas que tiene una sola, hay otras que tiene 2, otras que tiene 3 y otras que tiene más ¿sí?, la pregunta es ¿si existe una relación entre eso y el grado que tenga el polinomio de la ecuación?

E3: pues, no sé, sí, eso depende

I: crees que eso no está relacionado lo uno con lo otro

E3: ósea lo que me quiere decir es, que sí, depende, que si el polinomio tiene más grados, como le digo, como dependiendo del grado así mismo tiene el número de soluciones la ecuación, eso es lo que me pregunta

I: eso es lo que te están preguntando si hay ahí una relación entre las dos cosas

E3: pues yo diría que no

I: ¡que no!, listo, lo que quiero que hagamos ahorita literal, intenta redactar en un párrafo, lo que te está preguntando ahí, donde reflexiones, reflexiones de lo que hemos hecho y dices porque, dale, te doy un momentico y me dices cuando acabes, bueno

E3: aja ... (*escribe en sus apuntes*), ¿Cómo es que se llama lo del grado? ¿grado de dificultad?

I: grado de la función

E3: si eso. Una de esas relaciones entre la ecuación y la función podría ser de que, que se resuelven con los mismos números, ósea que le sirven los mismos números a cualquiera de las dos

I: ósea, cuando tú dices que le sirven los mismos números a ¿Qué te refieres?

E3: se acuerda al principio que le hallamos la solución a cada una y que era el mismo número, ¿esa podría ser una relación?

I: aja, si, intenta tú que cuando lo digas, decir que significado le das a que sean los mismos números ¿sí?, que te acuerdas que habíamos dicho una razón de porque pasaba eso, si logras con todo lo que hemos hecho después de llegar a una conclusión sobre eso, sería muy chévere

E3: uy es que, se acuerda que yo no pude resolver el ¿Por qué? pasaba eso

I: bueno, si está bien, pero puedes decir hasta donde tú sientas que puedes, si quieres solamente di, yo sé que, para los dos para la función, perdón el punto de corte con el eje x o las raíces se que son las mismas que la solución de la ecuación, esa es una manera de relacionarlo y si sientes que puede haber una explicación sobre eso la dices sino la dejas así

(...)

E3: aah bueno vale, creo que voy a decir que sí, es que pensando si hay más grado de la función habría como más posibilidades de agregar más, ósea otro número, si me entiendes habría como más posibles soluciones, o ¿usted qué cree? O ¿no?, es que tal vez cambiaria mucho... no sé ... (*escribe en sus apuntes*)

3.6.3.1 Análisis de los resultados de la Actividad III (AIII): Representación e interpretación en relación con la ecuación y función

Esta sección presenta el análisis de los resultados obtenidos de los estudiantes (E1, E2 y E3) y del cual, sintetiza la información anterior a los propósitos planteados en la investigación.

Estudiante 1 (E1)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la tercera actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “Apropiación del contenido matemático” se pone en manifiesto:

El estudiante parece aseverar en alguna de sus creencias que cada punto de intersección “genera” una ecuación, con la cual se puede determinar la raíz del polinomio, esto es

especialmente cierto para funciones y ecuaciones que se trabajan en la escuela. Sin embargo, da la impresión de que el estudiante no reconoce con facilidad que la ecuación debe ser de la forma $P(x) = 0$.

A pesar de las preguntas del investigador, no se puede apreciar con facilidad que el estudiante entienda el rol del cero en el concepto de raíz polinómica, ni en la ecuación resultante, incluso al final, al materializar su conjetura de la relación entre la función y la ecuación, no precisa este aspecto en particular, porque según él, no sabe por qué se debe igualar a cero.

La segunda categoría “Sobre la manifestación intuitiva”, se logra distinguir:

La subcategoría “Cohesión primaria” está relacionada a esos momentos en los cuales el estudiante logra ver y caer en cuenta de relaciones que resultan ser evidentes. Se relaciona con lo obvio, está muy relacionado con las primeras experiencias del estudiante con las matemáticas. Implica que el estudiante es capaz de llegar a conclusiones gracias a su familiaridad con la estructura de la ecuación, en este caso, con las operaciones involucradas.

El estudiante argumenta que la razón por la cual una función polinómica de la forma $f(x) = P(x)$ posee las mismas raíces que las soluciones de una ecuación $P(x) = 0$ es dado que este polinomio característico $P(x)$ es el mismo en ambas expresiones, lo cual es elemental, sin embargo, podría considerarse que no es la razón de peso que identifique la relación entre ecuación y función, especialmente desde la perspectiva del Teorema Fundamental del Álgebra.

La subcategoría “De cohesión interpretativa” se refiere a cuando el estudiante hace evidente su capacidad de asociar asuntos aparentemente inconexos, que le permite elegir un camino más lógico para resolver problemas, cuando pueden salir a relucir estrategias. En posteriores instancias de la aplicación, parece que el estudiante manifiesta dos concepciones particulares por aparte, la primera, que es referenciada en el párrafo anterior, sabe que igualando el polinomio característico a cero y solucionando la ecuación resultante, puede encontrar las raíces de la función relacionada (Momentos 9 y 24, actividad III); por otro lado, reconoce por sí mismo la identidad de los ejes que conforman el plano cartesiano, que el eje “ x ” “pasa” por el eje “ y ” a una altura cero. Sin embargo, incluso después de hacer evidente las concepciones hasta el final de la actividad, el estudiante parece no lograr establecer la relación

entre ambas ideas, en esta oportunidad es como si el estudiante no lo hubiese intuido, aunque aparentemente tuviese las herramientas para hacerlo.

La subcategoría “Representación espacial” hace referencia a cuando el estudiante manifiesta características de lo que podrían ser representaciones mentales de objetos ausentes, imágenes o diagramas, en este caso, sobre características que el estudiante asume como relevantes en la expresión que determina una función al momento de construir su gráfica. Esto último es lo que se puede evidenciar en múltiples ocasiones al estudiante construir gráficas de funciones, de las características que mejor se pueden apreciar, es la relación entre el grado de la función el número de cortes del trazo con el eje “ x ”, además de otras características como la curvatura y dirección que pueden deberse a experiencias previas con funciones similares. Describe la función cúbica como tener una forma “senoidal”.

La subcategoría “Acotada” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘intuitivas’ o de ‘sentido común’ que pueden ser inapropiadas o falsas, en ocasiones, el mismo estudiante puede reconocer que se ha equivocado al estar más familiarizado con la situación, o llegar a contradecirse. El estudiante considera pertinente, al preguntarle por la intersección (en singular) con el eje “ x ” de una función que pasa en dos ocasiones por él, en su respuesta también se refiere a “la intersección” (en singular) como una sola, y la expresa como un promedio de las que se logran apreciar.

Al momento de enfrentarse al trazo de una función con raíces complejas (una función cuadrática con vértice sobre la recta $y = 2$) el estudiante plantea la ecuación $P(x) = 2$ como la ecuación pertinente para hallar las raíces de la función, esto añade evidencia a la lectura realizada anteriormente respecto al no reconocimiento del rol del cero en las raíces de una función. También manifestó que esta función debe de tener dos raíces puesto a que tiene forma similar a otras funciones que también tienen dos raíces, de forma general, pareciera que no reconoce una diferencia sustancial en una representación gráfica de una función con raíces complejas, además de seguirla enunciando como una función con raíces reales.

La categoría “Desempeños y competencias del pensamiento matemático” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. Respecto a las expectativas de un estudiante en su nivel académico, al igual que en anteriores actividades, el estudiante parece responder adecuadamente a las actividades

propuestas, con excepción a situaciones puntuales ya planteadas en ítems anteriores, parece no tener problemas al manipular expresiones algebraicas.

Estudiante 2 (E2)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la tercera actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis.

La primera categoría “*Apropiación del contenido matemático*” se manifiesta en el estudiante:

La “Representación e interpretación en relación con la ecuación y función” se expone y se interpreta la relación que se establece entre la ecuación y su función asociada en cuanto a las raíces de la función y las soluciones de la ecuación, además de qué puede concluir el estudiante respecto a ello. La estudiante revela cierta habilidad con proceder de algunas propiedades y formulas básicas sobre cómo solucionar una ecuación. Sin embargo, en la ecuación de segundo grado aún tiene dificultad en el manejo de los signos cuando utiliza la formula cuadrática, se evidencia que los resultados son correctos, pero los signos son contrarios de la solución real, que de igual manera son detalles que se van puliendo con la práctica.

Logra Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado, aunque no identifica fácilmente lo que se revela en una ecuación polinómica igualada a cero, porque son las que determinan la intersección con el eje “ x ” o las raíces, dado que la recta del eje “ x ” pasa por cero respecto al eje “ y ”. Sus creencias son reflejadas de modo similar en otras oportunidades al final, conjetura las relaciones entre la función y la ecuación sin precisar puntualmente el rol del cero, asumiendo que de no pretender cierta relación no podrían ser graficadas.

La segunda categoría “Sobre la manifestación intuitiva”, se logra percibir en la estudiante:

La subcategoría “*Ligada al tanteo*” implica que el estudiante hizo uso directo o indirecto del tanteo (ensayo y error), muestra la práctica y la familiaridad que tiene la estudiante con ciertos objetos y procesos de desarrollo en las matemáticas. Aunque no utiliza de manera

directa esta manifestación, la evidencia muestra que, la estudiante pensó en aplicar el método de ensayo y error como la primera opción en torno a resolver la ecuación, esto se puede llegar a pensar aparentemente que, la estudiante en su manera de proceder es facilista, es decir, prefiere realizar ciertos procedimientos matemáticos sin generar mayor esfuerzo que sea algo inmediato, causando primero, una limitante en su conocimiento y segundo, eso le dificulta que pueda proponer aseveraciones más allá de lo esperado.

La subcategoría “Cohesión primaria” está relacionada a esos momentos en los cuales el estudiante logra ver y caer en cuenta de relaciones que resultan ser evidentes. Se relaciona con lo obvio, está muy relacionado con las primeras experiencias del estudiante con las matemáticas.

La concepción que tiene la estudiante sobre como establecer, si una función es negativa o no, parece ser insuficiente a las connotaciones que realmente involucra tal propiedad. Saber intuitivo, solo le permiten visualizar sobre lo que es evidente sus argumentos poco descriptivos y fundamentados conlleva a establecer una intrascendencia no solo de los conceptos abordados en este estudio, sino perder la oportunidad de tal vez reforzar su conocimiento matemático con este proceso del cual está siendo participe. Por otra parte, se evidencia que la estudiante predice ciertas anomalías que se van evidenciando a medida que avanza en la actividad al momento que el investigador le pregunta por "la intersección" que se establece cuando la función pasa o corta en dos ocasiones con el eje " x ", en su respuesta se refiere a "cuantas indeterminaciones se presenta en la expresión". Ante las cuestiones del investigador, la estudiante trata de reconocer que la función, al tener que esta elevada a cierta cantidad posiblemente este asociado con las soluciones, esto no es del todo convincente para el estudiante, pero sin embargo lo acepta. También el no asumir con mayor envergadura sobre el contraste de las respuestas, por tanto, no puede inferir sobre lo que podría suceder entorno a ello, de manera más amplia, lo que lleva a reflexionar y suponer que, aun le cuesta cuestionar sobre su propio proceder, es decir, no busca la manera de entablar si, los procedimientos utilizados son apropiados y por ende no argumenta de la mejor manera.

La subcategoría “Representación espacial” hace referencia a cuando el estudiante manifiesta características de lo que podrían ser representaciones mentales de objetos ausentes, imágenes o diagramas, en este caso, sobre características que el estudiante asume como relevantes en la expresión que determina una función al momento de construir su gráfica. La estudiante reconoce e interpreta información útil, que le ayuda a esquematizar y asociar de

manera gráfica, determinados parámetros que contiene la ecuación polinómica. La evidencia alude que la estudiante es capaz de describir ciertos objetos o patrones matemáticos abstractos y relacionarlo con figuras o símbolos cercanos a su cotidianidad, demostrando competencias de aprendizaje significativas que le aportan en el desarrollo de toda su vida.

Además, logra interpretar una representación espacial sobre el plano cartesiano, realizada a partir de un sistema de referencias y patrones o situaciones familiares de las funciones polinómicas. Esto puede pretender evaluar el desarrollo de capacidades intuitivas espaciales en relación con puntos de referencia, distancias y en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante circunstancias que la estudiante ha adquirido sobre las formas en que van descritas cada función. Por último, identifica las funciones habituales dadas a través de enunciado, para Utilizar los conceptos y propiedades adecuados la cual le ayuda a dibujar e interpretar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta.

La subcategoría “Acotada” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘intuitivas’ o de ‘sentido común’ que pueden ser inapropiadas o falsas, en ocasiones, el mismo estudiante puede reconocer que se ha equivocado al estar más familiarizado con la situación, o llegar a contradecirse. En la evidencia aparece cuando el investigador pregunta del ¿Por qué? La coincidencia de soluciones o raíces de la ecuación y la función, La estudiante argumenta que la razón por la cual la función posee los mismos ceros que las soluciones de la ecuación planteada, es porque el polinomio característico es el mismo tanto en la función como la ecuación; aunque es elemental que así es, no es lo esencial. Esto denota que su conocimiento parece limitado cuanto establece argumentos sólidos en torno a la relación que hay entre la función, la ecuación y sus soluciones. También, al no establecer un orden claro sobre cómo realizar los procedimientos y el trasfondo que implica ciertas manipulaciones en cuanto se hace la transposición de términos y demás técnicas que conlleva la solución del ejercicio, sucede lo que se evidencia en el apartado, que a pesar de considerar como primera opción resolver el problema mediante la fórmula general cuadrática su mala manipulación en el procedimiento, implica unos resultados erróneos a los esperados. Y lo que intuitivamente fue una buena decisión al haberlo resuelto por ese método, el dominio débil en ciertas operaciones hace que no obtenga resultados óptimos.

Se establece en la evidencia que, su conocimiento esta algo limitado, cuando no logra transcribir problemas de un lenguaje gráfico a uno algebraico, aparentemente sus conceptos,

propiedades y técnicas matemáticas específicas en este caso es ineficaz para resolverlos y dar una interpretación de la ecuación funcional contextualizada por medio de su gráfica. Esto da a reflexionar sobre la capacidad de representar un problema del lenguaje gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados en función de interpretar críticamente del suceso dada que aún le falta el tratar de evaluar posibilidades dentro de su capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.

Intuitivamente se puede decir que, la estudiante interpreta de manera superficial las características que se le pueden atribuir a una función. Esto genera que la estudiante únicamente tiene en cuenta si una función crece y es positiva si su gráfica sube a medida que x (equis) aumenta o si baja cuando x aumenta, es decreciente y por tanto negativa. Aunque efectivamente su respuesta es correcta. Considerar que una función es positiva o negativa a partir de estas condiciones, solo reafirma que su saber intuitivo que debió construir respecto a este concepto aún es muy débil ya que ese argumento, es solo una parte de las múltiples características que se pueden encontrar para establecer una adecuada abstracción de lo que representa la gráfica de una función.

Para finalizar, es un problema para que los estudiantes reinviertan los conocimientos que pusieron en juego en el problema anterior. Se convierte en una dificultad el asociar nuevamente conceptos y parámetros que suponía tenerlo claro pero no es así, por tal motivo, duda de su propio saber y le da la oportunidad de manera superficial de suponer que lo que ha descubierto podría ser verdad, pero al tener sus concepciones erróneas muy arraigadas a su saber impide que lo tome como una nueva concepción matemática.

La categoría “Desempeños y competencias del pensamiento matemático” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. La estudiante evidencia un desempeño regular para reconocer propiedades básicas de operar expresiones algebraicas, así mismo, parece no tener presente algunos conceptos como el crecimiento o la concavidad de una función, incluso aún le falta reforzar lo que sucede en la transición de términos, cambios de signos y su significado que parece no tener del todo interiorizado, no solo eso sino la diferencia entre una relación cualquiera y una función (lo cual se evidencia cuando se le pide construir la gráfica de una función de tercer grado)

Estudiante 3 (E3)

Con el objetivo de identificar algunas manifestaciones intuitivas del estudiante uno, se realizó la aplicación de la tercera actividad del instrumento metodológico. En este apartado se presentan los principales hallazgos posteriores a la aplicación de la rejilla de análisis. La primera categoría “Apropiación del contenido matemático” contiene tres subcategorías, “Concepto y resolución de ecuación polinómica”, “Resolución de problemas entorno a una incógnita”, “Representación e interpretación en relación con la ecuación y función”. Para la actividad uno solo se tuvo en cuenta el primer apartado.

En “Representación e interpretación en relación con la ecuación y función” se expone y se interpreta la relación que se establece entre la ecuación y su función asociada en cuanto a las raíces de la función y las soluciones de la ecuación, además de qué puede concluir el estudiante respecto a ello.

La estudiante manifiesta que cree no es coincidencia la equivalencia entre las soluciones de la ecuación y las raíces de la función. Sin embargo los investigadores encuentran dificultades al intentar indagar por qué la estudiante piensa ello, según algunos fragmentos del registro, pareciera que ella no tuviese las herramientas suficientes (haciendo referencia a carencia de saberes previos, o falencias conceptuales) para entender completamente algunas de las preguntas realizadas por el investigador, además de que se evidencia ocasionalmente errores en la interpretación proporcionada por el ejercicio, o contradicciones en su discurso. Pareciera que no tuviese los conceptos fundamentales del todo claro.

La segunda categoría “Sobre la manifestación intuitiva”, se logra percibir en la estudiante:

La subcategoría “Cohesión primaria” está relacionada a esos momentos en los cuales el estudiante logra ver y caer en cuenta de relaciones que resultan ser evidentes. Se relaciona con lo obvio, está muy relacionado con las primeras experiencias del estudiante con las matemáticas. Implica que el estudiante es capaz de llegar a conclusiones gracias a su familiaridad con la estructura de la ecuación, en este caso, con las operaciones involucradas.

La estudiante escoge plantear una función con polinomio cuadrático para reconstruir la expresión de la función a partir de la gráfica, porque es una parábola, así como las que pudo apreciar en puntos anteriores, que también son funciones cuadráticas, no parece (al menos hasta

cierto punto de la actividad) manifestar una relación entre el grado de la función y el número de cortes con el eje “ x ”.

La subcategoría “De cohesión interpretativa” se refiere a cuando el estudiante hace evidente su capacidad de asociar asuntos aparentemente inconexos, que le permite elegir un camino más lógico para resolver problemas, cuando pueden salir a relucir estrategias. La estudiante decide usar como criterio para reconstruir la expresión de la función polinómica, observar el punto de corte de la gráfica de la función con el eje “ x ”, como si pudiese reconocer una relación entre la estructura de la función y las raíces de esta. De hecho, progresivamente durante el desarrollo de la actividad, la estudiante logra asociar el grado del polinomio con el número de raíces de la función asociada, aunque estas conexiones las alcanza únicamente con preguntas direccionadas por parte del investigador.

Además, ella parece tener indicio de reconocer parcialmente la particularidad de una función con raíces complejas; reconocer que no tiene raíces reales y que sus raíces son “no reales”. También manifiesta que la función tiene dos raíces a pesar de ir en contra del criterio que ha utilizado anteriormente para identificarlas y es la intersección visible del trazo con el eje “ x ”; dado que es una función con raíces complejas, en el plano cartesiano el trazo no pasa por $y = 0$; la razón para ella asignarle dos raíces a la función es dado a que, según su criterio, si la función “estuviera más abajo” cortaría el eje en dos oportunidades, y es al tiempo su argumento para decir que la función no tiene raíces reales, porque no es visible la intersección.

Al finalizar la actividad, se pueden evidenciar aspectos claves: La estudiante llega a cierto grado de inseguridad (dado que incluso se contradice en una ocasión) a la conclusión sobre cómo están relacionadas las funciones y las ecuaciones en el contexto, es incierto hasta qué punto logra generalizarlo debido a que, se percibe en varios momentos de la aplicación que la estudiante tiene pobre reconocimiento de funciones o ecuaciones de tercer grado, es posible que su creencia esté más inclinada a ser que a mayor grado del polinomio, mayor son las raíces o las soluciones de la ecuación, más no que existe una correspondencia exacta. Vale la pena añadir que ella teoriza con algo de incertidumbre la razón por la que podría existir tal relación: “si hay más grado de la función, habría como más posibilidades de agregar más, o sea otro número, habría como más posibles soluciones”.

La subcategoría “Representación espacial” hace referencia a cuando el estudiante manifiesta características de lo que podrían ser representaciones mentales de objetos ausentes,

imágenes o diagramas, en este caso, sobre características que el estudiante asume como relevantes en la expresión que determina una función al momento de construir su gráfica. La estudiante construye las gráficas de las funciones que se le solicita, que cumplen las condiciones de tener el número de cortes con el eje “ x ” respectivamente. En las dos primeras gráficas parece reflejar su concepción de que una función lineal tiene un punto de corte y una con forma de parábola tiene dos, al graficar una función con tres puntos de corte, parece eliminar ciertas características esenciales de una función polinómica, como lo es la continuidad, esto último fortalece la apreciación de la poca familiaridad de la estudiante con las funciones de tercer grado.

La subcategoría “Acotada” implica que el estudiante llega a conclusiones erróneas por creencias ‘intuitivas’ o de ‘sentido común’ que pueden ser inapropiadas o falsas, en ocasiones, el mismo estudiante puede reconocer que se ha equivocado al estar más familiarizado con la situación, o llegar a contradecirse. La estudiante utiliza como criterio para reconstruir la expresión de la función el tener en cuenta sólo uno de los puntos de corte, no toma en cuenta que debe, al tiempo, satisfacer el otro.

Al enfrentarse a una función de raíces complejas, la estudiante decide utilizar la intersección de la función con el eje “ y ” para referenciarse en la reconstrucción de la expresión polinómica de la misma forma como lo haría con el eje “ x ”, incluso en su discurso, no parece reconocer que toma en cuenta elementos radicalmente diferentes en ambos procedimientos.

Al momento de preguntarle a la estudiante por el grado de una función que ha representado con tres raíces, la estudiante responde que la función debe ser de segundo grado, puesto que es diferente a la representación que ha diseñado ella anteriormente en una función de tercer grado. La categoría “Desempeños y competencias del pensamiento matemático” alude a la caracterización de los desempeños matemáticos del estudiante con relación a lo expuesto en el currículo nacional. Ella muestra un desempeño regular para reconocer las propiedades básicas al operar expresiones algebraicas, así mismo, parece no tener presente algunos conceptos como el crecimiento o la concavidad de una función, incluso parece no tener del todo interiorizado la diferencia entre una relación cualquiera y una función (lo cual se evidencia cuando se le pide construir la gráfica de una función de tercer grado).

Finalmente, Aunque los estudiantes tuvieron dificultad en resolver algunos ejercicios presentados en las actividades, lo intentaron, sintiéndose satisfechos con lo que habían logrado.

Después de esto, observar que, en la categorización de la manifestación intuitiva, predominaron algunas subcategorías tales como ligada al tanteo, acotada y cohesión primaria, evidenciado a través de sus respuestas durante la actividad. Los estudiantes sorprendieron con su capacidad mental para resolver los ejercicios, se pudo notar que tenían interés por proponer ideas y que su raciocinio es válido para cualquier tipo de investigación, en particular para este trabajo.

CAPÍTULO 4. Conclusiones generales

En este capítulo se exponen algunas conclusiones generales suscitadas tras la realización del trabajo de grado, relacionadas con las manifestaciones intuitivas que surgen a partir del proceso de formación, adquiridas durante la etapa escolar, sobre la solución de ecuaciones polinómicas en estudiantes de educación media. De igual forma se presentan las metas logradas de acuerdo con los objetivos planteados y los resultados obtenidos de la implementación del instrumento de investigación que se aplicó a los 3 estudiantes (E1, E2 y E3) objeto de estudio.

En relación con el primer objetivo específico, a partir del cual se pretendía documentar la problemática desde las perspectivas histórica- matemática, curricular y pedagógica del saber intuitivo en los aspectos relacionados con actividades sobre la solución de ecuaciones polinómicas con estudiantes de grado undécimo de la educación media, se encontró que:

El proceso de documentación relacionado con la perspectiva histórico-matemática permitió, evidenciar que en la historia se logra apreciar claramente que la intuición juega un rol importante en el proceso de consolidación y construcción del conocimiento matemático y representa también, un precedente necesario en la formalización sobre esta ciencia, al menos en lo que respecta al Teorema Fundamental del Álgebra. Lo anterior apreciado por Lucero (2017) quien, en su investigación, afirma que las etapas de desarrollo conceptual involucradas en la consolidación del TFA están relacionadas a la intuición, visualización y formalización, así mismo, define la intuición como “la percepción de la veracidad de algo sin que medie un proceso formal” (p.48) ejemplificando los aportes de Descartes y Girard, quienes establecen, sin necesidad de verificación, que una demostración de grado n tiene n raíces. Esto hace posible tomar en consideración que la intuición debe involucrarse en cualquier proceso relacionado con las matemáticas.

La documentación relacionada a la perspectiva curricular del MEN, permitió enmarcar los saberes de los estudiantes de grado undécimo de la educación media, para el diseño y elaboración del instrumento, sin necesidad de realizar una prueba diagnóstica previa, lo cual ayuda a centrar de manera pertinente que actividad incluir o excluir de acuerdo con lo mencionado en el documento. Por otro lado, en los derechos básicos de aprendizaje, se resalta el poco protagonismo sobre este concepto matemático, es decir, ejemplos de resolución o aplicación de las ecuaciones polinómicas. Lo cual puede ocasionar en algunos casos vacíos en

el saber, ya que como se pudo constatar en la aplicación del instrumento, los estudiantes E1, E2 Y E3, tuvieron falencias sobre conceptos y procedimientos algebraicos que complementan al buen proceder cuando resuelven problemas relacionados a la ecuación polinómica. La importancia de intervenir de manera constante el concepto de ecuación polinómica sobre este documento, es debido a que, en la práctica, son utilizados en el cálculo y análisis matemático para aproximar cualquier función derivable. Las ecuaciones y funciones polinómicas tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, desde la matemática elemental y el álgebra hasta áreas como la física, química, economía y las ciencias sociales que de cierto modo involucran bases no solo para una formación académica sino para la vida.

Al hacer la documentación relacionada a la perspectiva pedagógica, se logra determinar características relacionadas a un concepto como “el saber intuitivo” y la relación de este concepto con los métodos inocentes de los estudiantes para resolver problemas, ejercicios o responder preguntas de álgebra escolar, que podrían resultar tediosos para ellos. Al mismo tiempo, hay que reconocer que, aunque estos métodos pueden llevar a “misconceptions”, ideas o creencias erróneas en el proceso de aprendizaje, son indispensables para que el estudiante pueda hacer una aprehensión de procesos formales posteriormente.

En concordancia con el objetivo específico *Conjugar en un instrumento (actividades y entrevista semiestructurada), sobre la solución de ecuaciones polinómicas los aportes del estudio histórico-matemático, curricular y pedagógico realizado*. Se puede establecer que, la elaboración del instrumento cumple con las expectativas trazadas en el desarrollo de la investigación, se logra materializar decentemente los aspectos más importantes derivados del proceso de documentación y la pregunta problema.

En cuanto a la interacción con el instrumento, los estudiantes E1, E2 y E3, manifestaron correcto uso procedimental en algunos ejercicios planteados. Sin embargo, hubo ciertas limitaciones del instrumento para satisfacer completamente las necesidades de la investigación, estas limitaciones se ven reflejadas en resultados que son ocasionalmente inconclusos o que podían haberse profundizado más. Entre múltiples factores, esto se alude principalmente a la inexperiencia de los investigadores para el diseño de este. Posteriormente y, guardando coherencia con los comportamientos identificados hasta el momento, se evidencio en el marco de lo que compone este trabajo lo siguiente:

Hubo situaciones externas que también incidieron en la pertinencia del instrumento a las circunstancias de aplicación, específicamente porque su diseño inicial fue pensado para ser aplicado de forma presencial. Dado que la aplicación se realiza por medio digital y de manera forzosa, el instrumento tuvo que pasar por un proceso de adaptación que pudo comprometer parcialmente los resultados de este, en relación con la intención inicial de los investigadores. De igual forma, en relación con la aplicación del instrumento, se puede decir que se cumplió con las expectativas concebidas. El proceso de recolección de datos y posterior análisis muestra parcialmente la eficacia de la aplicación. Sin embargo, dada la inexperiencia de los investigadores, en los registros se puede reconocer que se incurrió ocasionalmente en falencias procedimentales durante está, en actos puntuales como la omisión de intervenciones necesarias y muestra de intervenciones que pudieron haberse omitido o que resultaron perjudiciales para la transparencia de algunos resultados. Por otra parte, al ser una aplicación virtual, aparecen dificultades propias de la limitación en la interacción (estudiante-investigador); en circunstancias actuales y en un país como Colombia, la interacción digital recurre en sustanciales brechas y limitaciones para el lenguaje.

Tanto el diseño del instrumento como la planeación de la aplicación fueron concebidas con unas expectativas de los investigadores hacia los estudiantes, específicamente en la asunción de presaberes y competencias que deben tener para estar finalizando grado once, estas asunciones estuvieron basadas en los documentos curriculares proporcionados por el MEN, vigentes en la actualidad. Sin embargo, se evidenciaron grandes brechas entre las expectativas de los investigadores y la realidad de los estudiantes en relación con estos presaberes y competencias, lo cual llevó a los primeros a recurrir a explicaciones que fueron indispensables para cumplir los objetivos de la aplicación. Esta situación que se materializó en varias ocasiones durante la aplicación del instrumento pudo tener repercusión en la calidad y legitimidad de algunos resultados.

Por último, se encuentran las conclusiones y reflexiones relacionadas al tercer objetivo específico de investigación, que hace alusión a *determinar la importancia que ocasiona el saber intuitivo en la solución de ecuaciones polinómicas*.

En primer lugar, se confirma durante toda la aplicación del instrumento y el análisis de los resultados que hay algunas manifestaciones de los estudiantes, a modo de intervenciones verbales, respuestas o en los registros escritos, que parecen mostrar indicios de pensamientos relacionados a los saberes intuitivos descritos en el marco teórico, por lo tanto, se puede hablar

de su existencia (por lo menos en estos tres estudiantes). Se cumplió con el objetivo de investigación. No obstante, y como se esperaba, algunas de estas manifestaciones no eran coherentes con el contenido matemático o partían de ideas erróneas, lo cual entra en sincronía con el proceso de documentación previo.

Las manifestaciones de los estudiantes que parecen evidenciar la presencia de saberes intuitivos aparentan cierta similitud en algunos momentos específicos de la aplicación. Una de las más importantes es cuando, tanto el estudiante E1 como el estudiante E3, exponen una aparente relación inversa entre la “complejidad” de una ecuación polinómica y el número de soluciones, en otras palabras, entre más grande (haciendo referencia a más términos, más coeficientes, mayores exponentes, etc.) afirmaban que menos soluciones podía tener la ecuación. Ésta, aunque una apreciación acotada, muestra una descripción casi idéntica en ambos casos; vale la pena añadir que los estudiantes no fueron compañeros de estudio ni pertenecieron a la misma institución educativa. Otra de las más inmediatas, es que, en los tres estudiantes, las formas de proceder para postular soluciones a ecuaciones polinómicas fueron similares, además de que todos mostraron una importante prevalencia de elección de soluciones enteras en sus respuestas.

Por otro lado, los estudiantes E2 y E3 muestran similitud en las características que asignan a una gráfica de una función de tercer grado, basándose en elementos estructurales del polinomio que la caracteriza. Uno de ellos hace referencia a una gráfica similar al icónico “Yin yang” y el otro hace referencia a una gráfica que “parece una S pero volteada”.

Se puede evidenciar cierta tendencia a que los saberes intuitivos de un estudiante con aparente mejor desempeño en el área, o con mayor familiarización con elementos algebraicos, tenga mayor coherencia con los referentes formales matemáticos, en comparación a un estudiante de menor desempeño. Sin embargo, hubo algunas excepciones: por ejemplo, la estudiante E3, de cuyos resultados de la aplicación se puede concluir un menor desempeño en competencias de álgebra respecto al estudiante E1, mostró en su discurso lo que podría interpretarse como una mayor aproximación al entendimiento del concepto de una raíz compleja, a pesar de no haber tenido interacción directa con los números complejos y su significado. Esto se dio como resultado de su análisis e interpretación de la gráfica de la función que no corta el eje horizontal, por otra parte, el estudiante E1 que se caracterizó por un mayor desempeño, no fue capaz de distinguir particularidades en las funciones que no cortan el eje x ,

además de que el estudiante mostró dificultades para reconocer el rol del número cero en las raíces de una función.

Durante la aplicación del instrumento, pudo evidenciarse que, de forma indirecta y sin ser premeditado, los estudiantes adquirieron un mejor entendimiento de conceptos relacionados con la teoría de ecuaciones y el cálculo, como el concepto de ecuación y función, tuvieron mejora en la interpretación semántica, específicamente de diferentes símbolos que se utilizan en matemáticas. Se cree que esto no sólo se debe a la estructura del instrumento y la aplicación, sino a la constante confrontación realizada por los investigadores ante la manifestación de creencias en los estudiantes, estas confrontaciones llevaron a que, en múltiples ocasiones, ellos mismos pudiesen reconocer contradicciones en sus ideas previas o llegar a nuevas conclusiones alineadas con las referencias formales.

En el mismo orden de ideas, que un estudiante sea competente aplicando matemáticas escolares no significa que tenga un mejor entendimiento de las matemáticas como disciplina. Por ejemplo, en el estudiante E1, quien fue el que mejor desempeño, y por recomendaciones de su maestro, es uno de los estudiantes más aplicados, dejó en evidencia que sus saberes aún son limitados para encontrar relaciones y justificar sus posturas desde el razonamiento.

La frecuencia y pertinencia de la manifestación de los saberes intuitivos parece mostrar una relación con la cantidad de claridad conceptual que posee un estudiante sobre elementos básicos del álgebra, el significado de la ecuación, incógnita o indeterminación, el signo igual, solución y función, contrario a que parecen no manifestarse apropiadamente cuando el estudiante evidencia una aprehensión de un conocimiento matemático memorizando reglas, sin tener claro los conceptos de base. Como se ha discutido en múltiples apartados de este trabajo, suele ser esto último lo que caracteriza como se lleva a cabo actualmente el proceso de aprendizaje del álgebra escolar.

Referencias bibliográficas

- Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática, análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Benlloch, M. (1997). *Desarrollo cognitivo y teorías implícitas en el aprendizaje de las ciencias*. Madrid, España: Visor Distribuciones S.A.
- Booth, L. (1983). Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalized arithmetic). (Tesis doctoral). University of London, Londres.
- Cáceres, L. & Tocarruncho, D. (2014). Solución de ecuaciones por métodos numéricos. (Tesis de especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Camargo, L. (2018). *Estrategias Cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Universidad Pedagógica Nacional Colombiana. Recuperado <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1061/568>
- Cañadas, M. y Gómez, P. (2012). *Análisis de contenido. Apuntes de la Concentración en Educación del CIFE*. Universidad de los Andes, Colombia
- Casas-Rodríguez, M. (2013). Lo intuitivo como aprendizaje para el desarrollo de la actividad creadora en los estudiantes, *Rev. Hum. Med*, 13(1). 22-37. Recuperado <https://www.medigraphic.com/pdfs/hummed/hm-2013/hm131c.pdf>
- Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM.
- Corredor, N. (2019). Factores de la calidad educativa desde una perspectiva multidimensional: Análisis en siete regiones de Colombia. *Plumilla Educativa*, 23(1), 121-139. Recuperado <https://doi.org/10.30554/plumillaedu.1.3350.2019>
- Crespo, C. (2008). *Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático*. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

- Franco, J. (2018). Un acercamiento a la variación directamente proporcional a través de patrones numéricos. *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, 3(1), 55-57. Recuperado <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/286>
- Gonzales, I. & Hurtado, C. (2010) significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado. *Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2(37), 181-198. Recuperado <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/37/archivo15.pdf>
- Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica*. Recuperado <http://funes.uniandes.edu.co/19849/1/Hurtado2013An%C3%A1lisis.pdf>
- Institución Educativa La Buitrera. (2021). *¿Quiénes somos?*. Recuperado <http://ielabuitreracali.edu.co/>
- Kieran, C. (1992). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. En Grows, D.A. (Ed.), *Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje*. Macmillan Publishing Company. Newyork.
- Kieran C. (2007). *Aprendiendo y enseñando álgebra en la escuela intermedia hasta los niveles universitarios: construyendo significado para los símbolos y su manipulación*. En: Lester FK Jr (ed) Segundo manual de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Era de la Información, Greenwich.
- López, C. (2006). La intuición y la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología Facultad de Ingeniería*, 3(6), 29-36. Recuperado <https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2004.pdf>
- Lucero, J. (2017). Teorema fundamental del álgebra: visualizaciones, intuiciones y demostraciones formales. (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/11325/CB-0525594.pdf;jsessionid=EE12A6BFB62E73E5D47720459697FACC?sequence=1>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia.

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia.
- Murcia, L. (2009). La transición del álgebra clásica al álgebra moderna: algunos aspectos históricos-epistemológicos en el desarrollo de la noción de estructura a través de la teoría de ecuaciones. (Trabajo de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Orietta, P. (2016). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. *Uniciencia*, 20(2). 251-257. Recuperado <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5381191>
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic prof.
- Petitto, A. (1979). The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, 2(5). 60-89. Recuperado https://www.researchgate.net/publication/267750198_El_aprendizaje_del_algebra_escolar_desde_una_perspectiva_psicologica_Planteamientos
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para la educación secundaria. *ZDM: the international journal on mathematics education* 40(3). 385-400. Recuperado 10.1007/s11858-008-0085-0
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas* 77(9), 5-34.
- Vasco, C. (2002). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. En *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá-Colombia.

ANEXOS

Anexo A. Plantillas del estudiante: actividad I

Plantillas del estudiante

Actividad I

Punto 1: Observa las siguientes ecuaciones y encuentra la solución o soluciones para cada caso, sin determinar por algún método estudiando antes. Es decir, encuentra el o los valores posibles para “ x ” en cada ecuación, **sin resolverlas. (P1)**

a. $x - 3 = 3 - x$ (EA)

b. $3x + 1 = 3 - 2x$ (EB)

c. $x^2 - 9 = 0$ (EC)

d. $x^2 + 1 = 0$ (ED)

e. $x^2 - 2x = 1$ (EE)

f. $2x^3 + 8x^2 - 16x = 0$ (EF)

No. Ecuación	Soluciones del punto 1					Soluciones del punto 2				
A										
B										
C										
D										
E										
F										

3.1 Observa y compara tus soluciones de la pregunta 1 con tus soluciones de la pregunta 2, una a una (es decir, compara las soluciones de, por ejemplo, la ecuación “a” del punto 1 y la ecuación “a” del punto 2)

3.2 Escribe alguna conclusión respecto a las comparaciones que hiciste de tus respuestas (P2YP3)

Punto 2: Resuelve las ecuaciones anteriores, pero ahora, utilizando alguno de los métodos que conoces o has aprendido en la institución educativa. (P2)

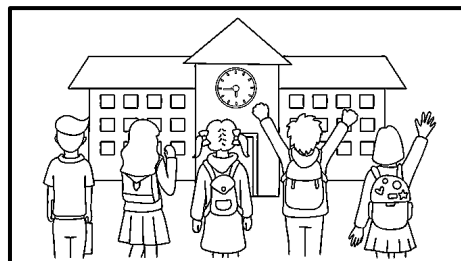
Punto 3: Completa la siguiente tabla con las respuestas que obtuviste en los puntos anteriores. (P3)

Anexo B. Plantillas del estudiante: actividad II

Actividad II

Resuelve los siguientes problemas siguiendo las indicaciones:

- Realiza todos los procedimientos que necesites para dar solución al problema.
- Escribe la ecuación algebraica asociada al problema, en términos de una incógnita o indeterminación (a excepción del problema c)
- Responde: ¿Qué representa la incógnita? Aterrizada a la situación planteada en el problema.



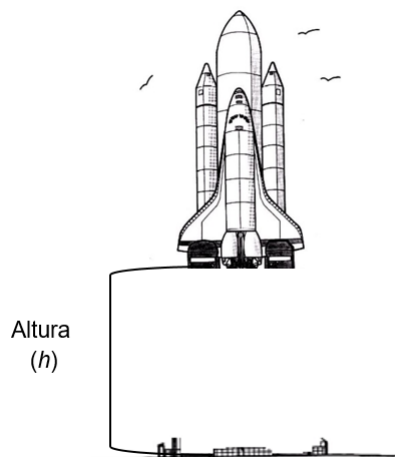
No: 1230

- a. Un jardín rectangular, tiene una base que mide 18 centímetros más que la altura. El perímetro mide 76 centímetros. Halla las dimensiones del jardín, es decir su base y su altura. (PA)

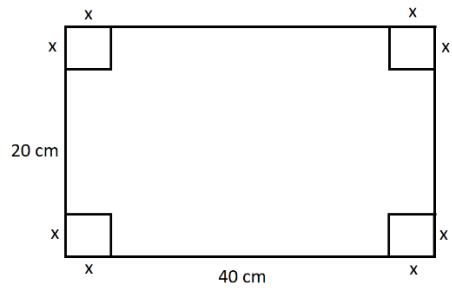


- b. En el colegio de Miguel hay un total de 1230 estudiantes (hombres y mujeres). Si el número de estudiantes mujeres supera en 150 al número de estudiantes hombres, ¿cuántas estudiantes hay en total? (PB)

- c. La altura (h) sobre el suelo de un cohete, t segundos después de que es lanzado, está dada por la expresión $h(t) = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo estará el cohete a 180 pies sobre el suelo? (PC)



- d. Una caja abierta con volumen de 1500 cm^3 ha de construirse tomando una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados cuyos lados poseen una dimensión x cm, en cada esquina. La caja resulta de doblar las esquinas. ¿Cuál podría ser la altura de la caja? (PD)



Anexo C. Plantillas del estudiante: actividad III

Actividad III

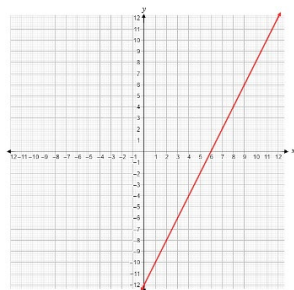
Otras representaciones

1. Responde:

- a. Encuentra el valor de x que sea solución de la ecuación $2x - 12 = 0$

Escribe todo el procedimiento.

- b. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = 2x - 12$. Determina las coordenadas de intercepción entre la función con el eje x , si es creciente o decreciente, entre otras.

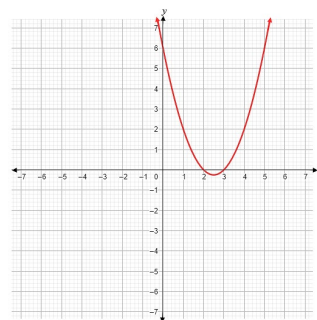


- c. Compara la solución de la ecuación del punto a, con el o los puntos en los que el trazo de la función corta al eje x .

2. Responde:

- a. Encuentra el valor de x que sea solución de la ecuación: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Escribe todo el procedimiento.

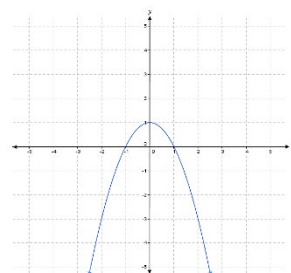
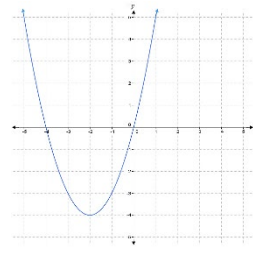
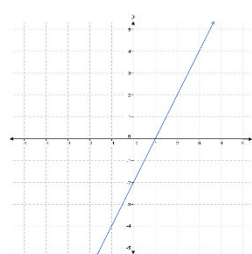
- b. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Describe su trayectoria, los cortes con el eje x , determina si es creciente o decreciente, entre otras.



- c. Compara la solución de la ecuación del punto a, con el o los puntos en los que el trazo de la función corta al eje x .

3. Describe la relación que se puede establecer entre la ecuación y la función establecidas en el punto 1 y 2, referente a la solución y los puntos de corte con el eje x . Escribe una conclusión sobre esto.

4. Analiza y observa las siguientes gráficas que corresponden a funciones polinómicas, responde:

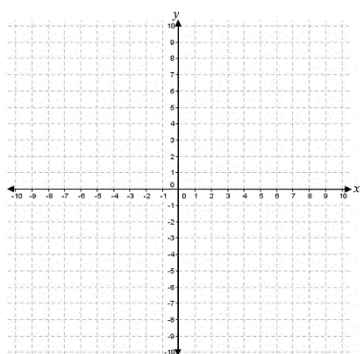


4.1. ¿Qué características logras evidenciar en cada gráfica a , b y c ?

4.2. De acuerdo con esas gráficas, indica los ceros o raíces de cada función a , b y c (valores de la incógnita, si son positivas o negativas)

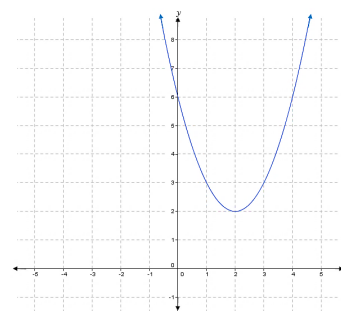
4.3. Escribe la expresión cuya gráfica corresponde a cada una de las gráficas anteriores. ¿Qué procedimiento hiciste para llegar a ella?

5. Utiliza el plano cartesiano para dibujar la gráfica de la siguiente función polinómica.
 $f(x) = 2x^3 + 8x^2 - 16x$.



- Describe el procedimiento de como lo realizaste.

6. Determine la expresión algebraica que describa la función representada en la siguiente imagen.

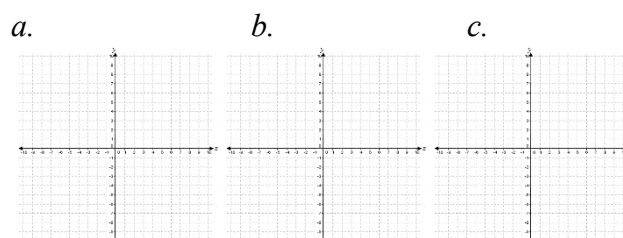


- Describe el procedimiento de como lo realizaste.

7. De acuerdo con las gráficas de los puntos 4, 5 y 6, completa la tabla utilizando los métodos que conozcas.

Función	a	B	c	5	6
Número total de raíces					
Grado de la función					
Número de raíces reales positivas					
Número de raíces reales negativas					
Número de raíces no reales					

8. Dibuja tres gráficas, cada una de una función que posea una solución, dos soluciones y tres soluciones.



Teniendo en cuenta todo lo trabajado durante este taller, su experiencia como estudiante de educación media, escriba una reflexión sobre la relación que puedes establecer entre una función polinómica y

una ecuación polinómica, cuyos polinomios involucrados sean los mismos.

$$\text{Ej. } f(x) = -x^2 + 3x \quad y$$

$$-x^2 + 3x = 0$$

- ¿Qué relación existe entre la cantidad de raíces de la función y el grado del polinomio?
- ¿Qué relación existe entre la cantidad de soluciones de la ecuación y el grado del polinomio

Anexo D. Plantillas del investigador: cuestionario I de la actividad I

Plantilla del investigador

Cuestionario 1 de la Actividad I (Entrevista semiestructurada)

Preguntas preliminares Actividades I

Estas preguntas son genéricas para todas las ecuaciones planteadas en la actividad I.

- Con base en lo que ves de la ecuación, ¿Crees que puede haber algún valor para “ x ” que la satisfaga?
- ¿A qué le prestarías atención en la ecuación?
- ¿Recuerdas por qué esto que tienes aquí es una ecuación?
- ¿Qué significa que un valor de “ x ” sea solución?
- ¿Qué entiendes por ecuación polinómica?
- A simple vista ¿Puedes decir cuántas soluciones tiene cada ecuación?
- ¿A cuál criterio lograste identificar el número de soluciones que le corresponde cada ecuación?
- ¿Crees que el método que mencionaste anteriormente para encontrar el número de soluciones, siempre es efectivo? ¿Por qué?
- ¿Indica cuál ecuación crees que a no tiene solución? ¿Por qué?
- ¿En dónde crees que se ubica la solución de acuerdo con los conjuntos numéricos? Es decir, Ej: naturales, enteros, real, irracional, etc.

Anexo E. Plantillas del investigador: cuestionario II de la actividad II

Cuestionario 2 de la Actividad II (Entrevista semiestructurada)

Preguntas preliminares Actividad II

Para el problema a.

- ¿Crees que este rectángulo (con las características que dicta el problema) puede dibujarse?
- En caso de que sí ¿Puedes dibujar otro rectángulo, diferente al primero, que satisfaga las mismas indicaciones?
- ¿Las posibles dimensiones de este rectángulo, son números naturales o tienen decimales?

Para el problema b.

- ¿Puedes dar un rango de números, en el cual crees que está la cantidad de estudiantes mujeres?
- ¿Es posible que este problema no tenga solución? ¿Por qué?
- ¿Es posible que este problema tenga más de una solución? ¿Por qué?

Para el problema c.

- Según el modelo propuesto para la altura, ¿el cohete seguirá subiendo

indefinidamente? o ¿habrá una altura máxima que alcance?

- ¿Volverá el cohete a la tierra?
- ¿El cohete pasa más de una vez por una altura de 180 pies?
- ¿Qué información te proporciona la ecuación sobre el comportamiento del cohete?

Para el problema d.

- ¿Cómo se calcula el volumen de una caja?
- ¿Cuánto es el ancho, el largo y la altura de la caja?
- ¿De qué manera se podría conocer la altura de la caja?
- ¿Qué características debe tener el número que representa la altura?
- ¿Puedes proponer un rango de posibles valores para x ?
- ¿Crees que puede haber más de una caja (diferentes alturas) que cumpla con las características del problema? ¿por qué?

Anexo F. Plantillas del investigador: cuestionario III de la actividad III

Cuestionario 3 de la Actividad III (Entrevista semiestructurada)

Preguntas preliminares actividad III

Para el punto 1 y 2

- ¿Puedes representar en decimales tus soluciones de la ecuación a y b ?
- ¿Qué relación encuentras entre las ecuaciones planteadas y la expresión algebraica relacionadas a las funciones f y g ?
- ¿Cómo describirías la trayectoria descrita por los trazos verdes mostrados en las gráficas?
- ¿Crees que esta conclusión (si concluye la relación entre las soluciones y las raíces) es coincidencia o aplica para todas las funciones?

Para el punto 4

- ¿Qué características tienen las gráficas de las funciones?
- ¿Cómo influyen esas diferencias en las expresiones?
- Determine los puntos de intersección con el eje x .
- ¿Estás familiarizado con el concepto de “raíz o cero de una función”?
- ¿Cuántas raíces crees que tiene? de acuerdo con los gráficos.
- ¿Qué expresión le asignarías a la gráfica? ¿Qué grado tiene?
- Esas raíces son positivas o negativas, ¿por qué?
- Señala cuales gráficas su función es positiva o negativa ¿Por qué?
- ¿Qué más puedes decir de las raíces de estas funciones?

Para el punto 5

- ¿Qué métodos conoces para graficar una función?
- ¿Qué crees que es relevante para tener en cuenta al momento de dibujar la gráfica de una función?
- ¿Qué información te proporciona la expresión algebraica del comportamiento del trazo que representa la función?
- ¿Cuántas veces pasa el trazo por el eje x ?
- ¿Cuándo la función es positiva? ¿Cuándo es negativa?

Para el punto 6

- ¿Qué información te proporciona la gráfica para escribir tu expresión algebraica?
- ¿Qué tipo de gráfica es la que se muestra en la imagen? ¿Estás familiarizado con esa forma?
- ¿Cuántas veces pasa el trazo por el eje x ?
- ¿Cuándo la función es positiva?
- ¿Puedes decir algo de las raíces de esta función? ¿Existen?
- ¿Cuántas raíces podría tener esta función?

Para el punto 7

- ¿A qué crees que se refiere la expresión “raíces no reales”?
- ¿Qué puedes decir sobre estas funciones, en relación con su cantidad de raíces?
- ¿Qué tiene de diferente la función del punto 5 en relación a las otras?

Para el punto 8

- ¿Cuál crees que sería el grado de cada una de las funciones que dibujas?