

UNA APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE AL CONCEPTO DE CONTINUO

ANDRÉS DE LA TORRE GÓMEZ.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, MEDELLÍN, COLOMBIA.

RESUMEN

Presentamos en este artículo, de manera sucinta, una aplicación reciente del modelo educativo de van Hiele al problema de la modelización matemática del espacio y del tiempo como un continuo. Con el fin de esclarecer el marco teórico de la investigación, describimos las principales características del modelo de van Hiele y lo situamos en el contexto de las grandes concepciones psicológicas del siglo XX, a saber, el Conductismo y el Constructivismo. Damos una lista de los niveles y descriptores obtenidos y analizamos el algoritmo de clasificación de la muestra, así como los procedimientos de validación empleados.

Palabras claves: Modelización; modelo de van Hiele; niveles; descriptores.

1 El conductismo y el constructivismo

Dos grupos principales de teorías psicológicas se disputaron la supremacía a lo largo del siglo XX: por un lado, las concepciones conductistas y, por otro, las constructivistas.

1.1 El Conductismo

J. B. Watson comenzó *El conductismo* con la siguiente afirmación: “*Dos criterios distintos imperan aún en el pensamiento psicológico norteamericano: la psicología introspectista o subjetivista y el conductismo o psicología objetiva*”. ([16], p. 19). Más adelante, expresó su programa en los siguientes términos:

“El conductista pregunta: ¿porqué no hacer de lo que podemos observar el verdadero campo de la psicología? Limitémonos a lo observable y formulemos leyes sólo relativas a estas cosas. Ahora bien: ¿qué es lo que podemos observar? Podemos observar la conducta - lo que el organismo hace o dice. Y apresurémonos a señalar que hablar es hacer, esto es, comportarse. El hablar explícito o con nosotros mismos [pensar] representa un tipo de conducta exactamente tan objetivo como el béisbol. La regla o cartabón que el conductista jamás pierde de vista es: ¿puedo describir la conducta que veo, en términos de “estímulo y respuesta”? Entendemos por estímulo cualquier objeto externo o cualquier cambio en los tejidos mismos debidos a la condición fisiológica del animal; tal como el que observamos cuando impedimos a un animal su actividad sexual, lo privamos de alimento, no le dejamos construir el nido. Entendemos por respuesta todo lo que el animal hace, como volverse hacia o en dirección opuesta a la luz, saltar al oír un sonido, o las actividades más altamente organizadas, por ejemplo: edificar un rascacielos, dibujar planos, tener familia, escribir libros, etc.” ([16], p. 23).

El conductismo, introducido por Watson desde 1912, intentó desterrar de la psicología el concepto de “conciencia”. Watson argumentó que la conciencia no puede ser sometida al estudio experimental y que la introspección no hace parte del método científico:

“Como resultado de este postulado principal - de que existe una cosa que llamamos conciencia y que podemos estudiarla por introspección -, encontramos tantos análisis como psicólogos. No existe modo de atacar experimentalmente, resolver los problemas psicológicos y establecer métodos normativos” ([16], p. 22).

E. L. Thorndike empleó los esquemas conductistas en su concepción del aprendizaje como los cambios de conducta manifestados por un animal - o por una persona - y que resultan de la adquisición de conocimientos. Thorndike aplicó esta teoría en sus investigaciones sobre los algoritmos rutinarios de la aritmética y el álgebra, orientadas a medir la eficacia del proceso de enseñanza - aprendizaje por los resultados que se obtienen en la aplicación de tests. Pueden obtenerse mejores resultados del aprendizaje fortaleciendo los lazos entre los estímulos y las respuestas mediante ejercicios repetitivos o apelando al premio y al castigo: Son estas las leyes fundamentales del aprendizaje postuladas por Thorndike y se las conoce como la Ley del Ejercicio y la Ley del Efecto. De acuerdo con esta concepción, el papel fundamental del profesor es encontrar aquellos estímulos que con mayor velocidad y eficacia dan la respuesta deseada.

Una versión actualizada del conductismo fue la teoría de R. Gagné [5], según la cual la instrucción se reduce a una secuencia de tareas que es necesario ir cumpliendo en un orden jerárquico de tópicos y subtópicos, a partir de la adquisición de ciertas habilidades. Se trataba de una teoría orientada hacia los resultados y las destrezas, no hacia los procesos mismos del aprendizaje por parte de los alumnos.

1.2 Piaget

La contribución fundamental de J. Piaget a la psicología experimental radicó en su punto de vista “genético”, que lo llevó a estudiar el desarrollo de los procesos sensori—motores, perceptivos e intelectuales en el niño. Entre sus múltiples contribuciones, destacamos sus investigaciones sobre el desarrollo del entendimiento de los sistemas de conceptos matemáticos, particularmente los de número, espacio, tiempo y probabilidad. (Véase *La Genèse du nombre chez l'enfant*, escrito con A. Szeminska, 1941, y *La Représentation de l'espace chez l'enfant*, escrito con B. Inhelder, 1948).

Piaget estudia el desarrollo de las funciones cognitivas, es decir, aquellas que proporcionan un conocimiento del mundo externo. Considera el desarrollo cognitivo del individuo como un avance gradual hacia el logro de una adaptación “inteligente” al entorno, que se manifiesta por un “equilibrio” más completo entre los distintos procesos psicológicos.

La confrontación del conocimiento nuevo con el antiguo abre paso a un período de transición, en el cual el individuo reconstruye su estructura de conocimiento y llega finalmente a un estado de equilibrio más maduro. Piaget explica este fenómeno mediante los conceptos de asimilación - es decir, la incorporación de nuevas ideas a las estructuras antiguas -, y acomodamiento - es decir, la modificación de las estructuras ya existentes para permitir la asimilación.

Piaget distingue cuatro fases de equilibrio en el paso de la infancia a la adolescencia. Son ellas:

- i) Fase sensori—motora, previa al desarrollo del habla en el niño.
- ii) Fase pre—operacional, en la cual el niño se da cuenta de que los objetos físicos permanecen y continúan existiendo aunque

no los vea. Surgen así los conceptos primarios, que son abstraídos de la experiencia empírica concreta, a partir de los objetos particulares. Por ejemplo, para que el niño aprenda lo que es una “esfera” es necesario entregarle algunas esferas concretas y permitirle que las manipule.

- iii) Fase de operaciones concretas, en la que el niño considera los conceptos asociados con los objetos físicos. Se presentan en esta etapa los conceptos secundarios, que no tienen que ser abstraídos de la experiencia concreta de objetos particulares.
- iv) Fase de operaciones formales, en la que se organizan los sistemas y se hace posible el pensamiento abstracto. Estos están regidos por reglas, que aseguran el mantenimiento de su estructura y la confiabilidad del pensamiento. En esta fase son posibles los razonamientos deductivos del tipo “Si, ...entonces”, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Es característica de esta fase la liberación del pensamiento, que puede despreocuparse de los objetos reales y pasar a examinar relaciones hipotéticas entre representaciones simbólicas.

Algunos autores ([13], p.8) sugieren la imagen de una espiral cognitiva, en la cual el ciclo (i), (ii), (iii) de Piaget es el primer nivel y la fase (iv) marca el comienzo de un nuevo ciclo del mismo tipo en un nivel más alto de abstracción.

Piaget ejerció una enorme influencia, particularmente a partir de 1950, cuando se hicieron notorias las deficiencias de la concepción conexionista del aprendizaje preconizada por Thorndike en su texto *Educational Psychology* de 1913. Al perder la supremacía el conductismo, se buscaron métodos de investigación más cualitativos. Se impuso entonces la visión constructivista, cuyo punto de partida es la admisión expresa de que es posible explorar de manera científica los procesos cognitivos que se dan en la mente de los aprendices. Los

procesos, las imágenes y los algoritmos asociados con un concepto matemático, así como las relaciones de éste con otros conceptos, son representados en la mente del aprendiz bajo la forma de una estructura cognitiva. Es esencial a la visión constructivista la idea de que estas estructuras cognitivas se construyen gradualmente en la mente del aprendiz por un proceso de abstracción creciente, y que se deben al intercambio activo del alumno con el profesor y con otros aprendices.

En su intervención ante el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática, en 1973, Piaget expuso lo que consideramos como el elemento común a todas las concepciones constructivistas, en los siguientes términos:

“Conviene, si queremos llevar a cabo esta aproximación necesaria entre las estructuras lógico-matemáticas del maestro y las del alumno en los distintos niveles del desarrollo, recordar algunos principios psicopedagógicos muy generales. El primero es el de que la comprensión real de una noción o una teoría supone su reinvencción por el sujeto. Es evidente que en muchos casos éste puede dar la impresión de haber comprendido sin cumplir esta condición de reinvencción, basta para ello cierta capacidad de reproducción y de aplicación en algunas situaciones prefabricadas. Pero la verdadera comprensión, aquella que se manifiesta por medio de nuevas aplicaciones espontáneas, o, dicho de otro modo, por una generalización activa, supone mucho más: que el sujeto haya sido capaz de encontrar por sí mismo las razones de la verdad que intenta comprender, y, por tanto, que la haya reinventado él mismo, al menos parcialmente. Como es natural, esto no quiere decir que el maestro ya no sea necesario: su papel no debe consistir en dar “lecciones”, sino en organizar situaciones que inciten a investigar utilizando los dispositivos apropiados” ([9], p. 225).

Más adelante, concluyó Piaget su discurso con las siguientes palabras:

“Por tanto, en la medida en que el maestro, informado por los trabajos psicológicos arriba citados, conoce las estructuras subyacentes de que dispone el niño, puede ayudarle a tomar conciencia de ellas, bien sea mediante discusiones adecuadas con el propio alumno, bien mediante la organización de trabajos en equipos en los que niños de la misma edad o de edades vecinas [actuando el mayor como responsable del grupo] discuten entre ellos, lo que favorece la verbalización y la toma de conciencia” ([9], p. 227).

A pesar de todos sus méritos, la obra de Piaget fue criticada. Inicialmente, se presentaron algunas objeciones a la metodología empleada por él para la recolección y el análisis de los datos. Por otro lado, en sus trabajos no se ocupó de manera específica de las estrategias pedagógicas, actitud que concuerda con su afirmación de que el paso de una fase de equilibrio a la siguiente no puede ser acelerado de manera significativa por la docencia. Finalmente, como observa Tall ([13], p. 8), es difícil aplicar la teoría de las cuatro fases a la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria norteamericana y en los primeros años de la universidad, debido al pobre desempeño de los estudiantes en el nivel abstracto de las operaciones lógicas — nivel que, de acuerdo con Piaget, debe ser alcanzado por los niños en su adolescencia temprana.

2 El modelo educativo de Van Hiele

En los modelos educativos el objeto es el proceso de enseñanza y aprendizaje. Podemos sintetizar en dos los elementos principales del modelo de van Hiele:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los aprendices

con respecto a los conceptos matemáticos. Cada nivel supone un modo de pensamiento y un lenguaje específicos, de modo que el aprendiz sólo puede comprender y razonar sobre los conceptos adecuados a su nivel.

2. El propósito de la enseñanza es facilitarle al aprendiz el progreso en el nivel de razonamiento, a través de una secuencia específica de fases de aprendizaje que van desde la instrucción directa, ajustada al nivel del alumno, hasta alcanzar la total independencia respecto al maestro.

Los estudios acerca de este modelo se remontan a 1957, cuando los esposos van Hiele presentaron sus respectivas memorias doctorales en la Universidad de Utrecht, Holanda, acompañadas de un desarrollo teórico y experimental acerca de los niveles de razonamiento, cuyo propósito era ayudar a los alumnos de la escuela elemental a desarrollar la percepción [insight] en geometría. P. van Hiele formuló el esquema teórico y los principios sicólogos; D. van Hiele-Geldof se orientó a elevar el nivel de los aprendices, por medio de experiencias didácticas.

Los van Hiele enunciaron originalmente su modelo distinguiendo cinco niveles (nivel 0 o básico y niveles I, II, III y IV). P. van Hiele, en la revisión de su teoría [15], enfatizó la importancia de los niveles I, II y III, a los que se refirió como “nivel básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico”, y observó que los niveles superiores a estos presentan dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico.

La forma habitual de referirse a los niveles es distinguiendo cuatro de ellos. Adoptamos la nomenclatura siguiente: nivel 0, predescriptivo; nivel 1, de reconocimiento visual; nivel 2, de análisis; nivel 3, de clasificación y relación; nivel 4, de deducción formal ([2], p. 59).

2.1 Niveles de razonamiento y fases de aprendizaje

Para aplicar el modelo a una materia concreta es necesario establecer una serie de descriptores de cada uno de los niveles estudiados, que permitan la detección de éstos a partir de la actividad de los aprendices. Los niveles de van Hiele se caracterizan por las propiedades siguientes, cuyos nombres fueron asignados por Usiskin [14]:

1. **Secuencialidad fija.** El aprendiz no puede alcanzar un nivel sin haber superado antes el nivel inferior.
2. **Adyacencia.** El objeto de percepción del nivel $n-1$ se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n .
3. **Distinción.** Para alcanzar el nivel n el aprendiz debe reorganizar y reinterpretar el conocimiento adquirido en el nivel $n-1$, de modo que llegue a la percepción de una nueva estructura completa con sus propios símbolos lingüísticos.
4. **Separación.** De acuerdo con esta propiedad, dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático. Cada nivel tiene un lenguaje característico, a tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles se manifiestan, de manera notoria, en la expresión verbal y en el significado asignado al vocabulario específico. La palabra demostrar, por ejemplo, presenta significados típicamente diferentes según el nivel de razonamiento y el aprendiz puede demostrar a la altura de su nivel, aunque el término “demostrar” no tenga un significado unívoco.
5. **Adquisición.** El progreso de un nivel al inmediatamente superior sólo puede darse de forma gradual. Con el fin de

ayudarle al aprendiz en dicha transición, los van Hiele propusieron una especie de receta que se debe seguir al impartir la instrucción correspondiente. Dicha receta se compone de cinco fases de aprendizaje, al final de las cuales el discípulo habrá alcanzado el nuevo nivel. Son ellas:

Fase 1. Indagación. El maestro sostiene un diálogo con los alumnos acerca de los objetos de estudio, que le permite conocer las interpretaciones que los alumnos les dan a las palabras. Los alumnos, por su parte, entran en contacto con el vocabulario y con los objetos de la materia que se va a estudiar mediante el intercambio de preguntas y observaciones. En esta fase se prepara el terreno conceptual para el estudio posterior.

Fase 2. Orientación dirigida. El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos puedan tomar conciencia de los objetivos que se persiguen y se familiaricen con las estructuras características. La mayoría de las actividades en esta fase consisten en tareas de un solo paso que estimulen a los alumnos a dar respuestas específicas.

Fase 3. Explicitación. Los estudiantes refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. La intervención del maestro en esta fase debe restringirse a lo mínimo indispensable y orientarse a facilitar la expresión explícita de las opiniones de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas del estudio. En esta fase, los alumnos empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio, a partir del cual podrán operar con eficacia en la solución de los problemas.

Fase 4. Orientación libre. Los alumnos encuentran ahora tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes. Esto les permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas. Los alumnos

llegan a hacer explícitas muchas de las relaciones entre los objetos de estudio cuando se les estimula a orientarse por sí mismos en el campo de investigación.

Fase 5. Integración. Los alumnos revisan ahora los métodos que tienen a su disposición y lanzan una mirada de conjunto, con lo cual unifican los objetos y las relaciones y logran asimilarlos internamente en un nuevo dominio de pensamiento. La ayuda del maestro en esta fase consiste en proporcionarles a los alumnos algunas vistas panorámicas de aquello que ellos ya conocen, teniendo cuidado de no presentarles ideas nuevas o discordantes.

Hoffer ([6], p. 208) observa que la tercera fase de aprendizaje - la de explicitación - no debe confundirse con las explicaciones dadas por el maestro, pues lo esencial en esta fase son las observaciones que los estudiantes formulan explícitamente más que las lecciones que reciben.

2.2 Diferencias entre la Teoría de Van Hiele y la de Piaget

Las raíces de esta teoría se encuentran en Piaget. Sin embargo, aunque ambos admitían la existencia de niveles, podemos señalar las siguientes diferencias entre sus concepciones:

1. Piaget pensaba que el paso de un nivel a otro es función del desarrollo, van Hiele del aprendizaje. La preocupación de van Hiele acerca de cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente lo llevó a su concepción de las fases del aprendizaje. Van Hiele escribió lo siguiente:

“La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella [esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo

biológico]. Por lo tanto es posible y deseable que el profesor ayude y acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede prestar ayuda al estudiante de forma eficaz" ([4], p. 246).

2. Piaget no le concedía importancia al lenguaje en el paso de un nivel a otro. Van Hiele sostenía que cada nivel desarrolla un lenguaje característico: *"La transición de un nivel de pensamiento al siguiente no es un proceso natural, sino que tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje"* ([4], p. 50).
3. Piaget no concebía el surgimiento de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura. Hoffer expuso esta concepción en los términos siguientes:

"Los niveles de pensamiento que van unidos al aprendizaje de una materia particular son de naturaleza inductiva: (a) En el nivel $n-1$ lo estudiado son ciertas versiones limitadas de los objetos. Algunas de las relaciones entre los objetos están establecidas de manera explícita; sin embargo, existen otras relaciones que no están explícitamente establecidas, aunque posiblemente son de fácil acceso. (b) En el nivel n los objetos estudiados son ahora los enunciados que fueron formulados explícitamente en el nivel $n-1$, además de aquellos enunciados explícitos que solamente estaban implícitos en el nivel $n-1$. En efecto, los objetos que hay en el nivel n consisten en extensiones de los objetos que había en el nivel $n-1$ " ([6], p. 206).

2.3 Aplicaciones recientes del modelo de Van Hiele al análisis

Las investigaciones iniciales del modelo de van Hiele se dirigieron a la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. Algunos estudios posteriores han extendido el modelo al ámbito del Análisis matemático y a su enseñanza en el período de la finalización de la secundaria y el primer año universitario. De especial importancia en este sentido fue la tesis doctoral presentada por Land [7] en 1991, con el propósito de aplicar el modelo a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Aunque Land se centró en las habilidades y las destrezas más que en la evolución del razonamiento del alumno, su memoria sirvió de base a una serie de investigaciones llevadas a cabo en el departamento de matemática aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia (España). Se han estudiado allí algunos conceptos fundamentales del Análisis, vía el modelo de van Hiele, como el de aproximación local [8] y el de la continuidad en la versión de Cauchy — Weierstrass [1]. En la próxima sección presentamos un informe sucinto de nuestro trabajo sobre el continuo [2].

3 La modelización del espacio y del tiempo: Su estudio via el modelo de Van Hiele

3.1 Las dos fases de la investigación

Tanto los filósofos como los psicólogos han encontrado dificultades insuperables en sus intentos de dar las definiciones de espacio y de tiempo. Las matemáticas no intentan definir estos conceptos sino que escogen el camino de modelizar el sistema de sensaciones e intuiciones que asociamos con ellos. El punto de partida del proceso

de la modelización del espacio y del tiempo es aquella armazón sobre la cual descansan nuestras percepciones y representaciones a la que, parodiando a Poincaré, podemos denominar “mundo representativo” ([11], p. 52).

El modelo, es decir, la estructura teórica construida en el proceso, es el sistema de números reales que se conoce como continuo aritmético, caracterizado en el Análisis matemático como un campo ordenado completo arquimediano. Este es equivalente al continuo geométrico lineal, de acuerdo con el axioma de Cantor - Dedekind ([3], p. VIII).

Dicha modelización permitió resolver múltiples problemas relacionados con los cuerpos materiales - por ejemplo, las cuerdas vibrantes y los sólidos rígidos - pero llevaba consigo un cúmulo de obstáculos. Algunas de estas dificultades fueron señaladas desde la antigüedad por Zenón de Elea, quien las enunció bajo la forma de paradojas. La teoría de conjuntos desarrollada a partir del último tercio del siglo XIX permite resolver estas paradojas de manera satisfactoria.

El tema central del estudio es el razonamiento seguido por el aprendiz en la construcción del concepto de continuo como modelo matemático del espacio y del tiempo. Incluye, por un lado, el concepto cantoriano de equipotencia de agregados infinitos de puntos y, por otro, la explicación de las paradojas de Zenón - la de Aquiles y la tortuga y la de la flecha - a la luz del modelo.

Empleamos la entrevista clínica, instrumento indicado cuando se estudian los procesos de pensamiento que se dan en la mente del aprendiz. ([12], p. 435; [7], p. 101). Dichas entrevistas, semiestructuradas, se conducen mediante un guión pero éste no se asume como una camisa de fuerza sino que el entrevistador interviene en función de las respuestas del entrevistado. No se limitan las entrevistas a

la detección de niveles de razonamiento sino que su propósito es, además, el de incitar en el alumno un progreso en su nivel. Esta pretensión armoniza con el papel fundamental que juega la experiencia en el modelo de van Hiele.

Con el fin de que nuestras entrevistas se convirtieran en experiencias de aprendizaje para los entrevistados, nos valimos de un método similar al aplicado por Sócrates en los *Diálogos* de Platón. El propósito de Sócrates es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea este la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de Sócrates sino por propia reflexión.

El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir la verdad que lleva en sí mismo.

En este sentido, nuestras entrevistas clínicas fueron socráticas. Algunas preguntas se formulan con el fin de aportar información, otras buscan la consolidación en la mente del alumno de los conceptos adquiridos y se proponen darle una sensación de seguridad. Hay también preguntas dedicadas a entorpecer, cuyo objetivo es provocar al alumno y llevarlo a una readaptación del concepto y eventualmente a un salto en el razonamiento. En efecto, Platón se refiere en el diálogo de *Menón* a la importancia pedagógica del entorpecimiento o “adormecimiento”, que es el vocablo escogido por el traductor F. Larroyo para denominar el efecto producido en la víctima por las descargas eléctricas del pez torpedo. Dice Platón:

“SÓCRATES - Mira ahora de nuevo, Menón, lo que ha andado el esclavo en el camino de la reminiscencia. No sabía al principio cual es la línea con que se forma el espacio de ocho pies, como ahora no lo sabe; pero entonces creía saberlo, y respondió con confianza como si lo supiese; y no creía ser ignorante en este punto. Ahora reconoce su embarazo, y no lo sabe; pero tampoco cree saberlo.

MENON - Dices verdad.

SÓCRATES - ¿No está actualmente en mejor disposición respecto de la cosa que él ignoraba?

MENON - Así me lo parece.

SÓCRATES - Enseñándole a dudar y adormeciéndole a la manera de torpedo, ¿le hemos causado algún daño?

MENON - Pienso que no.

SÓCRATES - Por el contrario, le hemos puesto, a mi parecer, en mejor posición para descubrir la verdad. Porque ahora, aunque no sepa la cosa, la buscara con gusto; mientras que antes hubiera dicho con mucho desenfado, delante de muchas personas y creyendo explicarse perfectamente, que el espacio doble debe formarse con una línea doble en longitud.

MENON - Así sería.

SÓCRATES - ¿Piensas que hubiera intentado indagar y aprender lo que él creía saber ya, aunque no lo supiese, antes de haber llegado a dudar; si convencido de su ignorancia, no se le hubiera puesto en posición de desear saberlo?

MENON - Yo no lo pienso, Sócrates.

SÓCRATES - El adormecimiento le ha sido, pues, ventajoso.

MENON - Me parece que sí.” ([10], p. 215)

Inicialmente, llevamos a cabo una serie de más de 30 entrevistas individuales en las cuales abordamos nuestro tema de estudio con alumnos de Bachillerato de Medellín, alumnos de los programas de

Matemáticas (Pregrado y Maestría) de la Universidad de Antioquia (Medellín) y alumnos de Primer Curso de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia (España). Estas entrevistas preliminares nos dieron la pauta metodológica para dividir nuestra investigación en dos fases bien diferenciadas:

La primera fase se relaciona con el concepto matemático de continuo y su asimilación por el alumno y constituye una preparación para la modelización deseada. En esta parte, empleamos un lenguaje estrictamente geométrico para poner a punto al aprendiz en las nociones geométricas básicas de punto, segmento y longitud de éste y para entrenarlo en la técnica de la proyección, como mecanismo que permite establecer una correspondencia 1-1 entre figuras geométricas. El alumno es conducido gradualmente hasta que él mismo formula la definición cantoriana de equipotencia de figuras geométricas.

La segunda fase estudia la modelización del espacio y del tiempo como un continuo y la del fenómeno del movimiento como una función. Es una fase de geometrización de percepciones y fenómenos físicos y en ella buscamos, con un lenguaje más coloquial, el camino seguido por el alumno en la formulación del modelo y en la explicación que éste permite darles a los hechos del mundo físico.

3.2 Los niveles y sus descriptores

Conseguimos, en nuestra investigación teórica y experimental, los siguientes descriptores para los niveles 0, 1, 2 y 3.

Nivel 0.

0.1 El aprendiz reconoce de manera intuitiva que el segmento se compone de puntos. Cada segmento tiene una longitud, que es la medida de su extensión. Dados dos segmentos, el ojo discrimina

cuál de ellos tiene una longitud mayor.

0.2 Se percata de que los objetos físicos que ocupan el espacio no pueden ser fraccionados tantas veces como queramos.

0.3 Se percata de que no es posible empíricamente obtener fracciones de tiempo tan pequeñas como queramos.

Nivel 1.

1.1 Relaciona el desplazamiento de un móvil con el segmento.

1.2 Relaciona el período temporal con el segmento.

1.3 Admite que el segmento está compuesto de una cantidad indefinida de puntos, cada uno de los cuales no tiene magnitud.

1.4 Para pasar del nivel 1 al 2, el aprendiz deberá abandonar la apelación a la longitud como criterio para decidir cuál de dos segmentos dados está constituido por mayor cantidad de puntos.

1.5 Admite que es imposible que dos segmentos de longitudes diferentes estén constituidos por cantidades finitas distintas de puntos.

Nivel 2.

2.1 Analiza la relación entre desplazamiento y segmento: el alambre material no puede ser fraccionado tantas veces como queramos, en cambio el segmento sí.

2.2 Analiza la relación entre período temporal y segmento: mientras el segmento puede ser bisectado tantas veces como se quiera, es imposible obtener empíricamente fracciones de tiempo arbitrariamente pequeñas.

2.3 Admite que dos segmentos dados de longitudes diferentes están

constituídos por la misma cantidad indefinida de puntos.

2.4 Dada una proyección concreta con la cual se establezca una correspondencia punto a punto entre dos figuras geométricas, el aprendiz afirma que están constituídas por la misma cantidad de puntos.

La técnica de la proyección de una figura geométrica sobre otra puede sugerir en el entrevistado conclusiones contradictorias con respecto a cual de ellas tiene más puntos, dependiendo del punto a partir del cual se haga la proyección. El aprendiz requiere un criterio preciso para decidir si dos figuras están constituídas por la misma cantidad de puntos.

Nivel 3.

3.1 El aprendiz define adecuadamente cuándo dos figuras geométricas están constituídas por la misma cantidad de puntos: dadas las figuras, debe encontrar una proyección sobre ellas que las ponga en correspondencia punto a punto.

3.2 Reconoce que Aquiles puede ocupar la misma cantidad de posiciones distintas que la tortuga, aunque las distancias recorridas sean distintas.

3.3 Reconoce que dos períodos temporales están constituídos por la misma cantidad de instantes, aunque sus duraciones sean distintas.

3.4 Asocia instante con posición, así como período temporal con desplazamiento.

3.5 Interpreta el movimiento como una correspondencia punto a punto entre dos segmentos.

3.6 Modeliza el movimiento como una función.

3.7 Considera el movimiento como constituido por una cantidad in-

definida de reposos, lo que le permite distinguir entre el movimiento y la ilusión del mismo proporcionada por la pantalla cinematográfica.

3.3 Procedimientos de validación

En la primera fase complementamos el estudio clínico de casos individuales con una prueba escrita que reprodujo el guión de la entrevista semiestructurada, sustituyendo las acciones socráticas de ésta por aportes de información intercaladas en el test en la medida de lo posible. La prueba consistió en un cuestionario de respuesta múltiple en el cual las opciones ofrecidas correspondieron a los tipos de respuestas, acertadas o no, dadas con mayor frecuencia durante las entrevistas individuales. En cada una de las preguntas del test se ofreció una alternativa de respuesta libre, que el entrevistado podía usar en caso de que ninguna de las opciones previstas le resultara satisfactoria; esta alternativa nos daba acceso al lenguaje del encuestado, lenguaje que es un indicio de su nivel de razonamiento.

Nos valimos de un algoritmo K-medias, con la asistencia del programa SPSS®, para asignarle a cada una de las encuestas uno de los niveles de razonamiento 1,2, 3 respecto al concepto que investigamos, bajo el supuesto de que ninguna de ellas se clasifica en el nivel 0. En dicho algoritmo, que es uno de los métodos de agrupación alrededor de centros móviles, los casos se asignan al centro del conglomerado más próximo. Seleccionando, como lo hicimos, la opción de medias actualizadas la localización del centro se actualiza después de añadir cada caso. Se asignan todos los casos y el proceso se va repitiendo hasta que la solución converja.

De acuerdo con nuestra clasificación de niveles, el número de conglomerados debe ser 3. La puesta en marcha del algoritmo requiere la determinación previa de los centros iniciales. Para ello, preclasi-

ficamos aquellas encuestas a las que podía asignárseles un nivel con toda claridad. Lo que hicimos fue agrupar las preguntas del test en 3 bloques y elegimos un primer criterio de preclasificación dado por el experto. Calculamos los porcentajes de “aciertos” (coincidencias con el patrón ideal de respuestas) de cada pregunta según el nivel de razonamiento asignado a la encuesta. Tomamos estos porcentajes como los centros iniciales.

Consideramos adicionalmente otro criterio de preclasificación, acorde también con los resultados experimentales obtenidos previamente en las entrevistas clínicas y con la opinión del experto. El algoritmo arrojó una nueva clasificación de todas las encuestas en tres centros, agrupación que coincidió en lo esencial con la obtenida a partir del primer criterio del experto. Confirmamos así la estabilidad del análisis estadístico, pues pequeñas desviaciones de los datos iniciales produjeron desviaciones sin importancia de los resultados finales.

En la segunda fase empleamos exclusivamente métodos cualitativos, es decir, más entrevistas clínicas, pues la naturaleza especialmente sutil y verbal de los argumentos de Zenón requiere la presencia permanente del entrevistador ante el entrevistado. Se trata aquí de examinar la forma como el entrevistado va accediendo al modelo, para lo cual es esencial determinar si en un momento dado se está moviendo en el mundo de la realidad física o en el de las matemáticas. Esto sólo puede ser conocido a través del lenguaje empleado por el alumno en una entrevista personal.

3.4 Validación experimental

Los resultados de la primera fase fueron validados mediante un test de 28 preguntas, que aplicamos a una muestra de 236 estudiantes de primer año de Ingeniería de Sistemas en la Universidad de Medellín

y en la Universidad EAFIT, de Medellín. Obtuvimos la clasificación en tres niveles que presentamos en el diagrama 1 y en la tabla 1. Corroboramos así que en la muestra hay tres esquemas diferenciados de respuestas y que ellos corresponden a los niveles cuya existencia hemos afirmado. Además, confirmamos que nuestros descriptores son adecuados y que pueden ser detectados mediante un test escrito. Ratificamos, por último, que el lenguaje empleado con los aprendices durante la primera fase del estudio experimental se ajustaba de manera apropiada a sus edades.

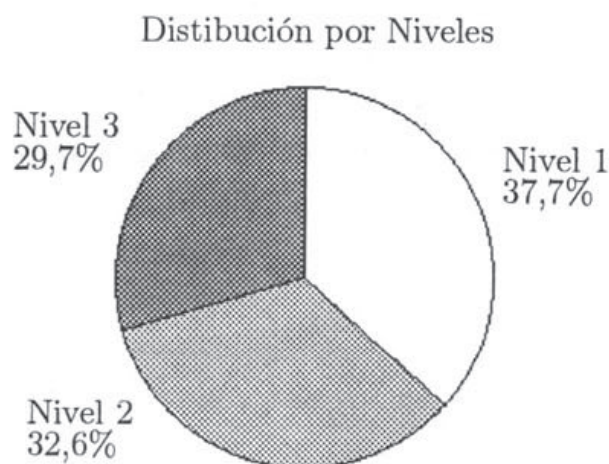


Diagrama 1

Los resultados de la segunda fase fueron validados mediante una serie de 23 entrevistas a alumnos de cursos superiores de los programas de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, que ya habían alcanzado previamente el nivel 3 en la primera fase. La clasificación en niveles arrojada por las entrevistas clínicas aparece en la tabla 2. Resaltamos el hecho de que todos los entrevistados que llegaron hasta la modelización del espacio y del tiempo como un continuo fueron capaces de llegar posteriormente a la del movimiento como una función.

Nivel	Encuestados
1	89
2	70
3	77

Tabla1

Nivel	Entrevistados
1	2
2	5
3	16

Tabla2

4 Conclusiones

Podemos resumir en dos los objetivos de nuestra investigación:

1. Probar que existen tres niveles de razonamiento de van Hiele en la modelización del espacio y del tiempo como un continuo, dando además una lista comprobada de descriptores de los niveles.
2. Elaborar una propuesta didáctica de 1 hora de duración para ayudarle al alumno de primer año de universidad a estructurar esta modelización.

Con respecto al primer objetivo, hemos encontrado los descriptores de los niveles 1, 2 y 3 en el proceso de razonamiento asociado con el concepto de equipotencia de agregados infinitos de puntos, visualizado mediante la proyección de una figura geométrica sobre otra. También hemos encontrado los descriptores de los niveles 1, 2 y 3 en el proceso de razonamiento asociado con la modelización del espacio y del tiempo como un continuo, incluida la explicación, a la luz del modelo, de las paradojas de Zenón.

Por otra parte, nuestra propuesta didáctica consiste en la entrevista socrática que hemos diseñado. Gracias a ella el aprendiz, conducido por el maestro, puede hacer matemáticas en tres aspectos específicos:

1. Reconoce que la longitud de un segmento nada tiene que ver con la cantidad de puntos que lo constituyen.
2. Construye la definición cantoriana de equipotencia.
3. Construye la definición de función.

Referencias

- [1] CAMPILLO HERRERO, P., PÉREZ CARRERAS, P. *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Divulgaciones Matemáticas, 6(1), (1998), 69-80.
- [2] DE LA TORRE GÓMEZ, A., PÉREZ CARRERAS, P. *La modelización del espacio y del tiempo*, Divulgaciones Matemáticas, 8(1), (2000), 57-68.
- [3] EHRLICH, PHILIP, Ed., *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [4] FUYS, D., GEDDES, D., TISCHLER, R. *English translations of selected writings of Dina van Hiele - Goeldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn College, City University of New York, 1984.
- [5] GAGNÉ, R. M. *The Conditions of Learning*, 2d ed., Rinehart York, 1970.
- [6] HOFFER, A. *Van Hiele — based research*, en *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, (eds. Lesh, R., Landau, M.), pp. 205 — 227, Academic Press, 1983.
- [7] LAND, J. H. *Appropriateness of the van Hiele model for describing student's cognitive processes on algebra task as typified by college student's learning of functions*, The University of Boston, 1991.

- [8] LLORENS, J.L., PÉREZ CARRERAS, P. *An extensión of van Hiele's model to the study of local approximation*, Int. J. Math. Educ. Sel. Technol., 28(5), (1997), 713 — 726.
- [9] PIAGET, J., CHOQUET, G., DIEUDONNE, J., THOM, R. y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.
- [10] PLATON. *Diálogos*, Porrúa, México, 1996.
- [11] POINCARÉ, H. *Science and Hypothesis*, Dover, New York, 1952.
- [12] SELDEN, A., SELDEN, J. *Collegiate Mathematics Education Research: what would that be like?*, Journal of Mathematics Behavior, 8, pp. 45 — 56, 1989.
- [13] TALL, D. O. *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*, en *Advanced Mathematical Thinking*, (ed. Tall), Kluwer, 1991.
- [14] USISKIN, Z. *Van Hiele levels and achievements in secondary school geometry*, CRRSSG Report, University of Chicago, 1982.
- [15] VAN HIELE, P. M. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, 1986.
- [16] WATSON, J. B. *El Conductismo*, Editorial Paidós, Buenos Aires, 1961.

ANDRÉS DE LA TORRE GÓMEZ

e-mail: adatorre@matematicas.udea.edu.co

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, MEDELLÍN, COLOMBIA