

Fecha de presentación del Informe: Día Mes Año

1. Datos generales del Proyecto

Código del proyecto: 71206				
Título del proyecto: ESTUDIO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE UN SISTEMA TIPO BENJAMIN-ONO PARA ONDAS INTERNAS				
Facultad o Instituto Académico: CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS				
Departamento o Escuela: MATEMÁTICAS				
Grupo (s) de investigación: ECUACIONES DIFERENCIALES DISPERSIVAS Y TEORÍA DE CONTROL				
Entidades: UNIVERSIDAD DEL VALLE				
Palabras claves: Sistema Benjamin-Ono generalizado, método Fourier Galerkin, ondas viajeras				
Investigadores ¹	Nombre	Tiempo asignado	Tiempo dedicado	
Investigador Principal	JUAN CARLOS MUÑOZ GRAJALES	5 horas/semana	5 horas /semana	
Coinvestigadores	LEÓN DARÍO ESCOBAR	5 horas/semana	5 horas/semana	
Otros participantes				

2. Resumen ejecutivo:

¹ Todas las personas relacionadas en el informe y que participen en el proyecto deben haber suscrito el acta de propiedad intelectual de acuerdo con los formatos establecidos.

Se espera que describa el proyecto, planteamiento del problema, objetivos, metodología, principales resultados obtenidos y las conclusiones. La extensión debe ser de máximo de 500 palabras (en español y en inglés).

Español:

En este proyecto, se estudió con un enfoque numérico un sistema de tipo Benjamin-Ono generalizado (gBO) que describe la propagación de ondas internas que se forman en un fluido estratificado que consta de dos capas con densidades constantes diferentes. Los objetivos específicos que se propusieron son los siguientes:

1. Implementar un esquema numérico de tipo espectral para aproximar la solución del problema de Cauchy asociado al sistema (gBO).
2. Analizar numéricamente el orden de error, y propiedades de los esquemas numéricos propuestos, tales como, la convergencia y la estabilidad.
3. Implementar un esquema numérico para aproximar soluciones de onda viajera (periódicas y no periódicas) para el sistema (gBO).

La metodología consistió de revisión bibliográfica intensa, un seminario permanente donde el equipo de investigación presentó los resultados parciales, participación en algunos eventos científicos, experimentación numérica con librerías de Python, y métodos de espacios de Hilbert.

Los objetivos planteados se cumplieron plenamente con la implementación de esquemas numéricos para aproximar las soluciones del problema de Cauchy asociado al sistema (gBO) y para aproximar una familia de soluciones de onda viajera periódicas en el espacio.

En cuanto a estrategias de comunicación, se generaron tres artículos; dos de ellos ya publicados y el tercero sometido para publicación. En estos artículos se presentan los resultados finales del proyecto sobre el sistema (gBO) y otros modelos afines considerados. Además se generó una actividad investigativa importante alrededor del problema estudiado por parte de los integrantes del grupo de investigación EDD-TC, incluso animando nuevos estudiantes de los niveles de pregrado, maestría y doctorado a comenzar a trabajar en sus tesis en el marco del proyecto.

English:

In this project, we studied from numerical emphasis a generalized Benjamin-Ono-type system (gBO) that describes the propagation of internal waves arising in a stratified fluid consisting of two layers with different constant densities. The specific objectives were the following:

- 1.To implement a spectral numerical scheme for approximating the solution of the Cauchy problem associated with the system (gBO).
- 2.To analyze the error order numerically and properties of the numerical solvers proposed, such as convergence and stability.
- 3.To implement a numerical scheme for approximating travelling-wave solutions (periodic and non-periodic) for the system (gBO).

The methodology consisted of intense bibliographical revision, a permanent seminar where the research team presented partial results, participation in some scientific events, numerical experimentation with Python libraries, and Hilbert space methods.

The objectives proposed were accomplished fully with the implementation of numerical schemes for approximating the solutions of the Cauchy problem associated with the system (gBO) and for the approximation of a family of spatially periodic travelling-wave solutions.

Regarding communication strategies, three papers were developed; two of them were already published and the third one was submitted for publication. These papers present the final project results on the system (gBO) and other affine models considered. Furthermore, important research activity was generated around the problem studied by the members of the research group EDD-TC, even cheering for new students at the undergraduate, master's, and doctoral level to start working on their theses within the framework of the project.

3. Síntesis del proyecto:

En una extensión máxima de 5 páginas, se debe mostrar el cumplimiento de los objetivos del proyecto y debe incluir:

Tema

Objetivos: general y específicos

Metodología

Resultados obtenidos

Principales conclusiones y/o recomendaciones

En este proyecto se consideró un sistema de tipo dispersivo de tipo Benjamin-Ono (gBO), recientemente introducido por Arenas y Quintero (2020), para describir matemáticamente la propagación de ondas bi-direccionales con pequeña amplitud y gran elongación en la interface que se forma entre dos fluidos con densidad constante distinta. El estudio físico-matemático de este fenómeno ha captado mucho interés en los últimos años tanto para matemáticos puros como aplicados, dando paso a varios estudios previos con diversos modelos propuestos para describir este tipo de fenómeno como un primer paso en la comprensión de la formación y propagación de ondas internas en un fluido estratificado donde la densidad no es ya constante por partes. Es importante destacar que el sistema considerado (gBO) incluye efectos físicos correspondientes a un régimen de escalas características del problema diferentes a los estudiados anteriormente, lo cual origina que términos de tipo dispersivo adicionales aparezcan en el modelo. Lo anterior hace muy interesante el estudio de este sistema tanto desde el punto de vista analítico como numérico.

La metodología empleada por el equipo de investigación para el estudio del sistema (gBO) incluyó los siguientes actividades:

-Revisión bibliográfica de los resultados y técnicas analíticas y numéricas ya conocidas

acerca de sistemas de tipo dispersivo.

- Métodos de diferencias finitas para la discretización temporal del tipo implícito-explicito, los cuales presentaron buenas propiedades de estabilidad para el sistema (gBO).

- Experimentación numérica intensiva, sobretodo en el caso de la aproximación de ondas viajeras del sistema (gBO) para lo cual es necesario ajustar parámetros numéricos a fin de obtener convergencia de la iteración de Newton empleada.

- Seminario permanente donde los investigadores y estudiantes participantes expusieron sobre los aspectos teóricos básicos relacionados con el proyecto y sobre los resultados parciales que se iban obteniendo.

- Implementación de esquemas numéricos con diferentes discretizaciones temporales para otros modelos afines, tales como la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación de Benjamin-Ono, y sistemas reducidos los cuales solo poseen algunos términos del sistema original (gBO).

Los resultados que dan cumplimiento a los objetivos específicos planteados en el proyecto se presentan en el artículo [3], ya sometido a publicación y el cual se anexa a este informe. Específicamente, en dicho artículo se introduce un esquema numérico de tipo Fourier-espectral y se presentan resultados de algunas simulaciones obtenidas. La implementación se realizó usando las librerías SciPy y Numpy sobre Python. Lo anterior corresponde al objetivo específico 1. Igualmente, en dicho artículo se realiza en las secciones 3 y 4 un análisis riguroso del orden del error en la etapa semidiscreta del método, al igual que se presenta un análisis de estabilidad numérica para el caso del sistema (gBO) linealizado. Esto corresponde al objetivo específico 2. De estos resultados, se corrobora la llamada precisión espectral esperada para este tipo de métodos. Finalmente, se presenta un esquema numérico que combina una iteración de Newton con un método de tipo colocación basado en la base de Fourier-cosenos para aproximar una familia de soluciones de onda viajera periódicas pares del sistema (gBO). Se presentan algunas soluciones de onda viajera obtenidas y se realiza la verificación de que éstas se propagan con velocidad casi constante, sin dispersión o atenuación numéricas apreciables y sin visible cambio de forma, de acuerdo con lo esperado.

En conclusión, consideramos que el esquema numérico aprovecha muy bien la presencia de un variado número de términos regularizantes hasta de orden 4 en el sistema (gBO), y presenta así buenas propiedades numéricas, tales como la convergencia y la estabilidad, que lo hacen una herramienta importante para el estudio de fenómenos relacionados con ondas internas en fluidos estratificados, y como apoyo en el estudio de futuros problemas relacionados, tales como teoría de control, problemas inversos, estabilidad de ondas viajeras y estudio de fenómenos de interacción ondas interna-topografía.

En referencia a productos de divulgación de los resultados directos, y otros obtenidos como resultado de los trabajos de tesis dirigidos por el investigador principal y coinvestigador, además de discusiones llevadas a cabo en los seminarios que se realizaron en el marco del proyecto, se tienen los siguientes artículos :

[1] Analytical and Rothe time-discretization method for a Boussinesq-type system over uneven bottom. Publicado en Commun. Nonlinear Science Numerical Simulation 102, 1-24, 2021 (revista clasificación A1, MinCiencias).

Este artículo es en coautoría con el Prof. Luis F. Mejía de la Universidad Nacional sede Palmira, quien participó en el seminario del proyecto. En este artículo se analiza desde el punto de vista numérico y analítico un sistema de tipo Boussinesq en 2D para describir la propagación de ondas en la superficie de un canal con fondo variable. Este trabajo fue importante en el presente proyecto a fin de familiarizarse con las librerías de Python y ensayar varias estrategias de discretización temporal.

[2] Non-homogeneous boundary value problems for some KdV-type equations on a finite interval: A numerical approach. Publicado en Commun. Nonlinear Science Numerical Simulation 96, 1-17, 2021 (revista clasificación A1, MinCiencias).

En este artículo se analizan desde el punto de vista numérico diversos problemas de control en la frontera asociados a la clásica ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y a un sistema de ecuaciones KdV acopladas debido a Gear-Grimshaw. Las técnicas numéricas empleadas e implementación numérica en Python fueron importantes para el diseño de los esquemas numéricos para el caso del sistema (gBO).

[3] On a Fourier-Galerkin method applied to a Benjamin-Ono system for internal wave propagation. Sometido, 2021.

Se anexan copias de los artículos [1] y [2] ya publicados y el correo de recepción de la revista del artículo [3].

Otra estrategia de divulgación fue la participación de los Profesores León Escobar y Juan Carlos Muñoz en el evento I ESOM2A, realizado entre el 20 y el 22 de noviembre de 2019 en la ciudad de Cali, Colombia, donde presentaron resultados de investigación generados en el marco del proyecto. Se anexan copias de los certificados de

participación.

En cuanto a la formación de recurso humano, tenemos los siguientes resultados de estudiantes vinculados al proyecto :

-Los estudiantes de pregrado en Matemáticas Mayra V. Alvear y John Alexander Gómez Montaña terminaron y sustentaron sus trabajos de grado titulados “Estudio analítico y numérico de las ecuaciones de Stokes-Coriolis, usando teoría de semigrupos y elementos finitos” y “Estudio de existencia y unicidad para la ecuación de Chen-Lee”, respectivamente.

-El estudiante Juan J. Molina del programa de Maestría en Ciencias Matemáticas desarrolló y sustentó su tesis titulada “Identificación de la fuente en la ecuación del calor 2D a partir de datos en la frontera mediante el método iterativo de Landweber y L-BFGS-B”. El estudiante obtuvo calificación de aprobado. Se anexan copias de los trabajos de grado y tesis de maestría junto con las actas de sustentación, correspondientes.

4. Impactos actual o potencial:

Haga una descripción y/o relacione los impactos que tenga el proyecto en los diferentes ámbitos:

Académico (aportes a la docencia, aportes a la formación de recursos humanos)
Investigativo (divulgación de resultados)

Si posee información acerca de los impactos actuales o potenciales de la investigación, preséntela en máximo una página. Se refiere a los aportes que ofrece en el campo de investigación al que corresponde. Incluye las tecnologías y resultados de IDi que puedan transferirse a los sectores productivos y de servicios, tanto nacionales como internacionales.

Académicos:

Como se dijo antes, el proyecto generó una actividad matemática investigativa por parte de los estudiantes y profesores participantes en torno al problema estudiado y otros

afines que se pudieron tratar con técnicas semejantes. Además se destaca la formación de varios estudiantes de los niveles de pregrado y maestría a quienes se les propuso temas de investigación y desarrollaron sus trabajos de grado y tesis en el marco del proyecto.

Investigativos:

Los resultados obtenidos en el proyecto se han socializado ante la comunidad científica nacional e internacional a través de participación en eventos y dos artículos ya publicados y uno sometido en revistas de investigación de alta categoría en la clasificación de MinCiencias. Además, se han discutido por medios virtuales los resultados y futuras aplicaciones con homólogos de instituciones académicas nacionales e internacionales, tales como Ricardo Pastrán (Universidad Nacional, sede Bogotá), Alberto Mercado y Rodrigo Lecaros (Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile) y Daniel Alfaro (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil).

Desarrollos futuros:

Durante el estudio del sistema (gBO) se comenzó a trabajar en diferentes estrategias para la discretización del operador transformada de Hilbert, cuya presencia es una de las mayores dificultades del análisis de este modelo matemático. En el caso periódico, la estrategia propuesta basada en la base de Fourier permite aproximar bien las soluciones periódicas en la variable espacial del sistema (gBO). Incluso se podría aproximar el caso no periódico usando una ventana (periodo) suficientemente grande a fin de que la solución no alcance las fronteras computacionales. Sin embargo, si el sistema es muy complejo esta solución no es muy satisfactoria y en general, hemos visto que el problema en la recta no está aún resuelto satisfactoriamente y de acuerdo a la bibliografía disponible solo existen algunos esfuerzos para la ecuación clásica de Benjamin-Ono.

Para el problema de aproximar sistemas generales del tipo Benjamin-Ono en la recta de manera satisfactoria, y en particular el operador transformada de Hilbert, ensayamos varias estrategias para aproximar la variable espacial en los modelos, entre ellos, esquemas de elementos finitos usando bases de funciones polinomiales de primer grado por partes, la misma base de Fourier y bases de funciones tipo sinc. La última estrategia ha dado hasta el momento mejores resultados que las otras dos en cuanto al comportamiento del error y tiempo de computación. Estos desarrollos los hemos encontrado muy interesantes y prometedores, y por lo tanto serán objeto de un próximo proyecto de investigación.

5. Productos:

Tabla No. 1. **Cantidad y tipo de productos pactados en el *Acta de Trabajo y Compromiso* y productos finalmente presentados**

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS				No. de PRODUCTOS PRESENTADOS			
Productos de nuevos conocimientos								
Artículo en revista ISI-SCOPUS:	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
Artículo completo publicado en revistas indexadas	A1	A2	B	C	A1	A2	B	C
		1			2	1		
Libros de autor que publiquen resultados de investigación								
Capítulos en libros que publican resultados de investigación								
Productos o procesos tecnológicos patentados o registrados								
• Prototipos y patentes								
• Software								
Productos o procesos tecnológicos usualmente no patentables o protegidos por secreto industrial								
Normas basadas en resultados de investigación								
Formación de recursos humanos	No. de estudiantes vinculados		No. de tesis		No. De estudiantes Vinculados		No. De tesis	

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS		No. de PRODUCTOS PRESENTADOS	
Estudiantes de pregrado			2	2
Semillero de Investigación				
Estudiantes de maestría			1	1
Estudiantes de doctorado				
Joven investigador				
Productos de divulgación				
Publicaciones en revistas no indexadas				
Ponencias presentadas en eventos (congresos, seminarios, coloquios, foros)	No. de ponencias nacionales	No. de ponencias internacionales	No. de ponencias nacionales	No. de ponencias internacionales
	1		2	
Propuesta de investigación				
Propuestas presentadas en convocatorias externas para búsqueda de financiación.				

Tabla No. 2. Detalle de productos

Para cada uno de los productos obtenidos y relacionados en la tabla anterior, indique la información solicitada para cada uno, anexando copia de las respectivas constancias. Como anexo a este formato encontrará el instructivo para la revisión de informes finales y productos

Tipo de producto:	Artículo
Nombre General:	Communications in Nonlinear Science and Numerical simulation 96, 105669, 1-17, 2021. Revista clasificación A1 MinCiencias.
Nombre Particular:	Non-homogeneous boundary value problems for some KdV-type equations on a finite interval: a numerical approach
Ciudad y fechas:	Febrero 2021
Participantes:	Juan Carlos Muñoz Grajales
Sitio de información:	https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1007570420304998
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Artículo
Nombre General:	Communications in Nonlinear Science and Numerical simulation 102, 105951, 1-24. Revista clasificación A1 MinCiencias.
Nombre Particular:	Analytical and Rothe time-discretization method for a Boussinesq-type system over an uneven bottom.
Ciudad y fechas:	Julio 2021
Participantes:	Luis Fernando Mejía y Juan Carlos Muñoz Grajales
Sitio de información:	https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S100757042100263X
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Artículo
Nombre General:	Artículo sometido a la revista Communications on Pure and Applied Mathematics. Se anexa copia correo de recibo de la revista.
Nombre Particular:	On a Fourier-Galerkin method applied to a Benjamin-Ono system for internal wave propagation.
Ciudad y fechas:	
Participantes:	Juan Carlos Muñoz Grajales
Sitio de información:	
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Ponencia
Nombre General:	I Encuentro Sur Occidental de Matemática y Matemáticas Aplicadas ESOM2A
Nombre Particular:	Problemas inversos y de control asociados a una familia de ecuaciones diferenciales de tipo dispersivo
Ciudad y fechas:	Cali, 20-22 noviembre 2019
Participantes:	Juan Carlos Muñoz Grajales
Sitio de información:	https://www.univalle.edu.co/lo-que-pasa-en-la-u/primer-encuentro-suroccidental-de-matematicas-y-matematicas-aplicadas
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Ponencia
Nombre General:	I Encuentro Sur Occidental de Matemática y Matemáticas Aplicadas ESOM2A
Nombre Particular:	Introducción a la programación científica con Python
Ciudad y fechas:	Cali, 20-22 noviembre 2019
Participantes:	León Escobar
Sitio de información:	https://www.univalle.edu.co/lo-que-pasa-en-la-u/primer-encuentro-suroccidental-de-matematicas-y-matematicas-aplicadas
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Trabajo de grado
Nombre General:	
Nombre Particular:	Estudio de existencia y unicidad para la ecuación de Chen-Lee
Ciudad y fechas:	Cali, julio 2, 2019
Participantes:	Jhon Alexander Gómez Montaña
Sitio de información:	Se anexa copia acta de sustentación
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Trabajo de grado
Nombre General:	
Nombre Particular:	Estudio analítico y numérico de las ecuaciones de Navier-Stokes usando teoría de semigrupos y elementos finitos
Ciudad y fechas:	Cali, 21 mayo, 2020
Participantes:	Mayra Vanessa Alvear
Sitio de información:	Se anexa copia acta de sustentación
Formas organizativas:	Universidad del Valle

Tipo de producto:	Tesis de maestría
Nombre General:	
Nombre Particular:	Identificación de la fuente en la ecuación de calor 2D a partir de datos en la frontera, mediante el método iterativo de Landweber y el método de L-BFGS-B.
Ciudad y fechas:	Cali, 5 octubre, 2020
Participantes:	Juan José Molina
Sitio de información:	Se anexa copia acta de sustentación
Formas organizativas:	Universidad del Valle



La presente versión del informe contiene las observaciones de los evaluadores:

Firma del investigador principal

VoBo. Vicedecano de Investigaciones

Por favor presente su informe impreso y en formato digital en hoja tamaño carta, letra arial 11, con espacios de 1 1/2