



**Un estudio sobre el Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio
del sector público de Cali**

Juan Carlos Galindo Realpe

Karen Velasco Restrepo

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Media con énfasis en Matemáticas y Física

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

2019



**Un estudio sobre el Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio
del sector público de Cali**

Juan Carlos Galindo Realpe

Karen Velasco Restrepo

Requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física.

Requisito parcial para optar por el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en
Matemáticas.

Director:

David Benítez Mojica

Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Media con énfasis en Matemáticas y Física

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

2019

Tabla de contenido

Agradecimientos	10
Resumen	11
Introducción	12
Capítulo I Antecedentes y planteamiento del problema.	14
1.1 Contexto.....	14
1.2 Antecedentes	15
1.2.1 Antecedentes de Investigación.....	15
1.2.2 Antecedentes Curriculares	19
1.2.3 Resultados de Pruebas.....	27
1.2.4 Necesidad de implementar el uso de tecnologías digitales	31
1.3 Justificación	32
1.4 Objetivos	35
1.4.1 General.....	35
1.4.2 Específicos	35
1.5 Preguntas.....	36
1.5.1 Pregunta Central.....	36
1.5.2 Preguntas Auxiliares	36
Capítulo II Referentes Teóricos.....	37
2.1 Introducción	37
2.2 Resolución de Problemas	37
2.2.1. Trabajo de Polya	37

2.2.2. Trabajo de Schoenfeld	39
2.3 Niveles de Razonamiento Probabilístico	41
2.3.1. Impredicción	41
2.3.2. Determinístico.....	42
2.3.3. Mecánico.....	42
2.3.4. Pre-rigor	43
2.3.5. Rigor	44
2.4 Uso de Múltiples Representaciones	44
2.5 Mediación Instrumental	46
2.5.1. Representaciones ejecutables.....	47
2.5.2. De las herramientas a instrumentos matemáticos	47
2.6 GeoGebra como herramienta estadística.....	48
2.7 Probabilidad	50
2.7.1. Experimento Aleatorio.....	50
2.7.2. Espacio Muestral (S).....	50
2.7.3. Sucesos, clases y relaciones.....	51
2.7.4. Definiciones de Probabilidad.....	53
Capítulo III Diseño Metodológico.....	54
3.1 Introducción	54
3.2 Tipo de estudio.....	54
3.2.1 Análisis cualitativo.....	54
3.2.2 Análisis cuantitativo.....	55

3.3	Sujetos.....	55
3.4	Fases.....	56
3.4.1	Diseño	56
3.4.2	Validación.....	58
3.4.3	Uso de la tecnología.....	58
3.4.4	Recolección de la información.....	59
3.4.5	Análisis	60
Capítulo IV Análisis de resultados.		61
4.1	Introducción	61
4.2	Encuesta diagnóstica.....	61
4.2.1	Presentación de la actividad.....	61
4.2.2	Objetivos.....	62
4.2.3	Condiciones de la aplicación.....	62
4.2.4	Análisis cuantitativo.....	63
4.2.5	Análisis cualitativo.....	76
4.2.6	Comentarios finales	85
4.3	Análisis de las hojas de trabajo.....	86
4.3.1.	Hoja de trabajo No. 1.....	86
4.3.2.	Hoja de trabajo No. 2.....	98
4.3.3.	Hoja de trabajo No. 3.....	109
Capítulo V Conclusiones y sugerencias.....		121
5.1	Introducción	121

5.2	Respuesta a las preguntas de investigación.....	121
5.2.1	Respuesta a la pregunta central de investigación.....	121
5.2.2	Respuesta a las preguntas auxiliares	124
5.3	Sugerencias para investigaciones posteriores	129
5.4	Reflexiones finales.....	130
	Referencias	132
	Anexo No. 1: Encuesta diagnóstica	136
	Anexo No. 2: Hoja de trabajo No. 1	145
	Anexo No. 3: Hoja de trabajo No. 2	149
	Anexo No. 4: Hoja de trabajo No. 3	154

Índice de figuras

<i>Figura 1</i> Coherencia Horizontal (Elaboración propia).....	24
<i>Figura 2</i> Grafica del lanzamiento de un dado. Tomado de: Recursos GeoGebra.	45
<i>Figura 3</i> Hoja de cálculo GeoGebra. Tomado de: GeoGebra	48
<i>Figura 4</i> Histograma y grafica realizadas en GeoGebra. Tomado de: GeoGebra.	49
<i>Figura 5</i> Ejemplo de una distribución de Pearson. Tomado de: Burbano y Valdivieso, 2013.....	49
<i>Figura 6</i> Fases del estudio. (Elaboración propia).....	56
<i>Figura 7</i> Gráfica del porcentaje de aciertos en preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).	65
<i>Figura 8</i> Espacio Muestral del lanzamiento de tres monedas (Elaboración propia).	67
<i>Figura 9</i> Circuito probabilístico de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).....	68
<i>Figura 10</i> Grafico del uso y creencia de amuletos y/o supersticiones. (Elaboración propia).....	74
<i>Figura 11</i> Grafica general del análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.	76
<i>Figura 12.</i> Diseño N°1 “Lanzamiento de monedas”. Elaboración propia.	87
<i>Figura 13.</i> Gráfica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo N°1. (Elaboración propia).....	91
<i>Figura 14.</i> Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).	92
<i>Figura 15</i> Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N°1 (Elaboración propia).	97
<i>Figura 16</i> Grafica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo No. 2. (Elaboración propia).....	103
<i>Figura 17</i> Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).	104

<i>Figura 18</i> Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo No. 2 (Elaboración propia).	108
<i>Figura 19</i> Grafica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo No. 3. (Elaboración propia).....	114
<i>Figura 20</i> Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).	115
<i>Figura 21</i> Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo No. 3 (Elaboración propia).	119

Índice de tablas

Tabla 1 <i>Coherencia vertical</i>	25
Tabla 2 <i>Resultados promedio de las Pruebas Saber 11° del año 2018 – 2</i>	28
Tabla 3 <i>Resultados promedio de la Prueba Saber 11°, de cada grupo de comparación.</i>	29
Tabla 4 <i>Resultados de las pruebas saber 11°, de la sede “Los Vencedores”</i>	30
Tabla 5 <i>Ejemplo de las actividades cognitivas</i>	45
Tabla 6 <i>Análisis Cuantitativo de la encuesta diagnóstica.</i>	64
Tabla 7 <i>Problemas de la encuesta diagnóstica con menor porcentaje de acierto.</i>	66
Tabla 8 <i>Problemas de la encuesta diagnóstica con mayor porcentaje de acierto.</i>	70
Tabla 9 <i>Resumen de las ocho preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica.</i>	73
Tabla 10. <i>Análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.</i>	77
Tabla 11 <i>Análisis cuantitativo de la hoja de trabajo N° 1.</i>	90
Tabla 12. <i>Análisis cualitativo de la hoja de trabajo N° 1.</i>	93
Tabla 13 <i>Análisis cuantitativo de la Hoja de trabajo No.2.</i>	102
Tabla 14 <i>Análisis cualitativo de la hoja de trabajo n° 2.</i>	105
Tabla 15 <i>Análisis cuantitativo de la hoja de trabajo N° 3.</i>	113
Tabla 16 <i>Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 3.</i>	116

Agradecimientos

A Dios, por darnos la sabiduría y la fortaleza en cada momento a lo largo de este proceso.

A nuestros padres y familiares por su apoyo incondicional, por sus palabras de ánimo y su ejemplo de superación, que nos llevaron a lograr esta meta.

Agradecemos a nuestro director de trabajo de grado, David Benítez Mojica por su acompañamiento, y sus valiosos aportes para nuestra formación profesional.

A la Universidad del Valle y a los docentes que hicieron parte de este proceso educativo, por ser la guía y el apoyo, con sus valiosos aportes.

Resumen

La vida diaria se encuentra permeada de eventos que se encuentran relacionados con el azar y la probabilidad. Sin embargo, a pesar de la presencia tan evidente de esta ciencia en la cotidianidad la importancia que se le da, en Colombia, aún sigue siendo mínima en comparación con otros conceptos matemáticos que se dan en la escuela. Por lo tanto, este trabajo se orienta en abordar las dificultades que presentan los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas probabilísticos, a causa del sistema de creencias (carga cultural) que influye de manera significativa durante la toma de decisiones que se presentan en nuestra vida. Para ello se realizó el diseño de una encuesta diagnóstica y tres hojas de trabajo, en las cuales se propusieron actividades que giraban en torno a tres diseños realizados en GeoGebra, los cuales emulan situaciones probabilísticas comunes para los estudiantes.

Palabras clave: GeoGebra, Probabilidad, Razonamiento, Razonamiento Probabilístico, Resolución de Problemas, sistema de creencias.

Introducción

El desarrollo tecnológico se ha destacado por brindar comodidades al ser humano en diferentes ámbitos de la vida diaria, entre los cuales se encuentra la educación. Estos avances tecnológicos resultan convenientes para el desarrollo de competencias en los estudiantes y, además, puede brindar una ayuda significativa en la resolución de problemas tanto en contextos personales como profesionales.

De acuerdo con múltiples trabajos que se han desarrollado hasta el día de hoy, la matemática de los colegios es una de las áreas en las que más se presentan problemas durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Son muchos los factores que pueden ser causantes de tal deficiencia, en este trabajo se pretende profundizar, en aquellos factores que afectan considerablemente las competencias del estudiante en el proceso de resolver problemas probabilísticos, como lo son el sistema de creencias de los estudiantes.

Considerando lo anterior se plantea como objetivo general del presente trabajo: Documentar la importancia que tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra, en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali.

A continuación, se presenta una visión general del presente trabajo de grado en la que se realizará una descripción de cada uno de los cinco capítulos que lo conforman.

En el primer capítulo, se realiza una contextualización y se justifican las razones por las que se decide llevar a cabo el trabajo de grado. Además, se definen y se acota el tema de estudio a través de las preguntas de investigación y se definen los objetivos específicos y el general del trabajo. Para las justificaciones se tienen en cuenta los bajos rendimientos que se han dado en las pruebas estandarizadas nacionales (ICFES), algunas investigaciones centradas en el área de la probabilidad y en la importancia de la tecnología en la educación. Finalmente se presentan algunos antecedentes investigativos y curriculares.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que sirven de base para el presente trabajo de grado. Estos referentes aluden aspectos como la resolución de problemas, los niveles de Razonamiento Probabilístico, el uso de múltiples representaciones, la mediación instrumental, GeoGebra como herramienta estadística, y algunos conceptos fundamentales de probabilidad. Es importante aclarar que estos referentes conforman el marco teórico, el cual fue de suma importancia para el análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la encuesta y hojas de trabajo que fueron presentadas a los estudiantes.

En el tercer capítulo se presenta la metodología, en el cual se explica cada fase que conforma el proceso de investigación y las herramientas que fueron necesarias para ello. De manera general, se puede decir que el proceso consiste generalmente en: el diseño, la validación, taller sobre el uso de la tecnología, la recolección y el análisis. Además, se describen los participantes de la investigación y el lugar en el que esta se realiza.

En el cuarto capítulo se realiza el análisis de los datos recolectados por medio de la encuesta diagnóstica y las hojas de trabajo. Teniendo en cuenta, que a estos datos se les realizaron dos tipos de análisis, el cualitativo y el cuantitativo, para los cuales es necesario elaborar gráficas y tablas en las que se presentan las características destacables de las evidencias obtenidas. Al finalizar el análisis de cada hoja de trabajo, se realiza una comparación entre los datos obtenidos en cada hoja y los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica, con el fin de observar como las actividades influyeron en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de los participantes.

Finalmente, en el quinto capítulo se da respuesta a las preguntas que se definieron en el primer capítulo y que se encargaron de encaminar el trabajo de grado hacia los objetivos. De las respuestas a estas preguntas, se realizan una serie de sugerencias para trabajos posteriores y también se presentan reflexiones sobre el trabajo realizado.

Capítulo I

Antecedentes y planteamiento del problema.

1.1 Contexto

La vida cotidiana está rodeada de diferentes eventos que se encuentran permeados y se relacionan con el azar y la probabilidad, dentro de los cuales se pueden resaltar: el deporte, los juegos, el estado del clima, el mundo biológico, entre otros. Pero lo anterior no indica que sean comprendidos de manera adecuada; incluso para los matemáticamente instruidos algunos aspectos de la probabilidad no resultan tan intuitivos (Bennet, 2000).

En Colombia la importancia que se le da a la probabilidad sigue siendo mínima en comparación con la que se les da a otros conceptos de la matemática y el reflejo de esto, se evidencia en los salones de clases en los cuales la enseñanza de esta ciencia suele estar ausente, se reduce a pocas sesiones o se ha centrado en la memorización de fórmulas y procedimientos. Respecto a lo mencionado anteriormente, se puede decir que la problemática radica en el hecho del cómo se enseña la probabilidad y el cómo se organizan las clases para enseñarla, en lo cual el profesor no carga con todo el peso de la responsabilidad.

Lo anterior, se puede justificar tomando en cuenta artículos de investigación como el de Zapata y Rocha (2013), en el cual se exponen las tensiones por las que debe pasar una profesora de estadística, quien debe cumplir con una serie de demandas curriculares que por primera vez incluye la estadística en la matemática escolar de primaria y secundaria. Se puede notar entonces, que los estudiantes se enfrentan a muchas dificultades de diferente naturaleza en el momento de abordar el concepto de probabilidad y es de suma importancia abordar a fondo estas dificultades.

Por lo tanto, es de interés para el desarrollo de este trabajo, abordar las dificultades presentes en los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas en probabilidad, a causa del sistema de creencias (carga cultural) que influye de manera significativa, cuando se toman decisiones.

Por otra parte, el Ministerio de Educación Nacional publicó los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, (MEN, 1998), y planteó tres elementos fundamentales: procesos generales, tipos de pensamientos y contextos, los cuales están presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Específicamente, para la elaboración de este trabajo, se tomó en cuenta el proceso de Resolución de Problemas, del Pensamiento Aleatorio, en contextos realistas, con estudiantes de grado once de un colegio del sector público de Cali.

Otro aspecto que se tomó en cuenta, es la importancia del uso de la tecnología computacional en el salón de clase, ya que permite realizar simulaciones de fenómenos probabilísticos, con grandes cantidades de casos, lo que posibilita que el estudiante pueda evidenciar tendencias y abordar los fenómenos probabilísticos desde diversas representaciones semióticas, tales como: tablas, números, gráficas, y ecuaciones, etc.; de tal forma, que el estudiante construya conceptos y propiedades, es decir, que razone matemáticamente.

En resumen, en este primer capítulo se define el problema de investigación, tomando en cuenta: investigaciones anteriores a esta, aspectos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional y los resultados de las pruebas saber 11º; con lo que se realiza la justificación de la realización de este trabajo.

Adicionalmente, debido a que abordar las dificultades presentes en los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas en probabilidad, puede resultar un tema extenso; fue necesario, para cumplir con el propósito de este trabajo, delimitar esta problemática, a través de: la pregunta general y las preguntas auxiliares; los objetivos (general y específicos), los cuales se encuentran al final de este capítulo.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes de Investigación

Existen algunas investigaciones que anteceden a la presente, como las realizadas por Batanero, (2005), Sanchez y Benitez, (1997), Alarcón, Arriaga y Barrón, (2001), Zuñiga (2017), Inzunza (2014) y Mera y Santana (2018), en las cuales se evidencian las ventajas de la enseñanza de la

probabilidad el salón de clase, las diversas dificultades presentes en los estudiantes, el uso de Geogebra y una aproximación a la caracterización del Razonamiento Probabilístico, cuando estudiantes de grado noveno, se enfrentan a problemas relacionados con el concepto de probabilidad.

Por ejemplo Batanero (2005), señala que la probabilidad presenta problemas y episodios que en su momento fueron desafiantes, tanto así, que para los matemáticos de la época, su solución y respuesta no fue tan inmediato. Por lo tanto, considera que de igual manera sucede con los estudiantes, quienes construyen su conocimiento mediante un proceso gradual, superando las diversas dificultades y errores presentes en el proceso, aspecto que no es tenido en cuenta por muchos profesores. Además, analiza los diferentes significados de la probabilidad (intuitivo, laplaciano, frecuencial y matemático), mencionando que la enseñanza de la probabilidad no debe limitarse a uno en especial, ya que están enlazados dialécticamente y en la experiencia, resalta que las funciones semióticas están relacionadas con la Resolución de Problemas, y que es importante tener en cuenta la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas, con el fin de poder, ayudarlos a superar sus errores y dificultades.

Por su parte, Sanchez y Benitez, (1997) presentan un informe de un proyecto, realizado a estudiantes de diversos grados de escolaridad y que tiene como fin describir y caracterizar el razonamiento de los estudiantes, en los niveles de Razonamiento Probabilístico, cuando se enfrentan a problemas relacionados con el concepto de probabilidad. Con el que concluyen, que la gran mayoría de los estudiantes consideran, por un lado, para las situaciones regidas por el azar, es imposible predecir los resultados y por otro, tratan de explicar el comportamiento de los fenómenos de azar mediante la suerte, aspectos físicos, experiencia o intervención divina, tal como lo hacían antiguas civilizaciones. Lo que indica, que es necesario repensar la forma en la cual se presenta este concepto en el salón de clase y qué estrategias se pueden implementar para ayudar a superar, de alguna manera, las diversas dificultades.

De igual forma, Alarcón et al. (2001, pp. 331-332), destacan la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en el salón de clase, debido a que está presente en diversas áreas de

la vida cotidiana, lo que indica que estos conocimientos no son necesarios sólo para los estudiosos o especialistas, sino para ser ciudadanos informados en el mundo actual.

Adicionalmente, consideran que el estudio de la probabilidad en el salón de clase, ofrece las siguientes ventajas:

- Se presta para lograr un ambiente de estudio participativo, generando que los estudiantes puedan formular hipótesis, contrastar sus expectativas con los resultados que se presentan experimentalmente, y producir y discutir sus propias explicaciones, lo que se considera como un aspecto importante en el aprendizaje de las nociones matemáticas.
- Debido a que la probabilidad es rica en problemas interesantes, estos, pueden despertar o generar un interés por parte de los estudiantes para el estudio de las matemáticas.
- Debido a que diariamente se debe valorar y tomar decisiones en circunstancias donde hay incertidumbre o interviene el azar, se han desarrollado ciertas intuiciones acerca de los fenómenos probabilísticos, aspecto que brinda al profesor un excelente comienzo para afinarlas y acercarse gradualmente a formulaciones matemáticas más precisas.

En otras palabras, para Alarcón et al. (2001), la probabilidad constituye un terreno fértil para que el profesor enriquezca sus actividades de enseñanza.

Así mismo, Zuñiga (2017) en su tesis de maestría expone la importancia de abordar la noción de aleatoriedad con estudiantes de grado cuarto de primaria, a través de plantear una propuesta educativa basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), ya que considera que es una noción que se omite en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, lo que genera conocimientos incompletos en estas áreas. A modo de conclusión, afirma que la propuesta a pesar de ser muy efectiva para romper una concepción arraigada, hace la invitación de continuar trabajando en este aspecto, con el fin de calar en el pensamiento del estudiante y fortalecer la idea de aleatoriedad.

Respecto al uso de software dinámico para la enseñanza de la probabilidad es pertinente tener en cuenta el artículo de investigación presentado por Inzunza (2014), en el cual se realiza un análisis acerca del potencial que tiene GeoGebra para ser utilizado en la enseñanza de la probabilidad, enfocándose en la perspectiva frecuencial de esta. Para ello, expone los criterios que debe cumplir una herramienta computacional para ser considerada una herramienta cognitiva y de este modo se verifica que GeoGebra cumple con las diferentes funciones de una herramienta cognitiva.

Según Inzunza:

Para poder implementar el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad de forma adecuada, se requiere de herramientas computacionales diseñadas con propósitos educativos que permitan crear y manipular modelos y representaciones para producir y mostrar resultados de las simulaciones de una forma interactiva, dinámica y flexible que permita a los estudiantes identificar patrones de comportamiento en los fenómenos aleatorios y con ello generar una comprensión adecuada. (2014, p.3).

Además, el autor caracteriza a GeoGebra, como un software que permite al estudiante ser partícipe de la construcción de su propio conocimiento, brindándole herramientas para la exploración de nuevos conceptos, es decir, que realiza un aporte en el modelo constructivista de la enseñanza. En cuanto a la probabilidad, se dice que GeoGebra no solo se enfoca en los aspectos tradicionales de la enseñanza de la probabilidad, sino que permite abordar diferentes tipos de representaciones como la simbólica, grafica o numérica.

Finalmente, Mera y Santana (2018) en su trabajo de grado, tenían como propósito identificar el impacto de GeoGebra como mediadora en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de grado noveno, y entre las conclusiones y reflexiones finales detectaron que el uso sistemático de GeoGebra como herramienta computacional, permite confrontar las ideas previas de los estudiantes en torno al concepto de probabilidad, con los resultados de explorar los diseños en GeoGebra. Además, que el uso de los diseños elaborados en GeoGebra favorece el empleo de diferentes tipos de representación de los fenómenos probabilísticos, lo que permite un acercamiento lúdico, a la resolución de problemas de probabilidad.

De igual manera, tener en cuenta estas investigaciones es de gran importancia, debido a que se constituyen como un referente y apoyo para el presente trabajo.

1.2.2 Antecedentes Curriculares

1.2.2.1 Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, publicados en 1998, plantea criterios para la construcción y orientación de los currículos de las Instituciones Educativas en Colombia, y según Vasco (2002), enfatiza en la siguiente idea:

El propósito de las matemáticas no solo es el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales o simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (p. 61)

Para ello, se definen a continuación los aspectos anteriormente resaltados, haciendo especial énfasis en el proceso de Resolución de Problemas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, así como del contexto realista presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.2.2.1.1 Conocimientos básicos

Según el MEN (1998), los conocimientos básicos tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Por ello, definen cinco tipos de pensamientos y sistemas matemáticos:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
- Pensamiento aleatorio y sistema de datos.

Particularmente, para el desarrollo de este trabajo, se centra la atención en el Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, el cual es establecido por el MEN, (1998, 2006), como uno de los conocimientos básicos para todo estudiante, dado que desarrolla los procedimientos para cuantificar, proponer leyes para controlar y elaborar modelos para explicar situaciones, que por ser variables e impredecibles son regidas por el azar. Además, sugiere el desarrollo de este pensamiento, debido a que crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo, está presente no solo en la vida cotidiana del estudiante, sino que tiene una incidencia en la ciencia y la cultura, permite adquirir capacidades de comunicación, resolución de problemas, facilita el trabajo cooperativo y el uso de tecnologías computacionales, aspectos de gran importancia dentro del salón de clase.

De acuerdo con el MEN (1998), para el desarrollo de este pensamiento, se necesitan de contextos significativos, relacionados con temas externos a la matemática, los conceptos se deben introducir de manera práctica y no centrarse solamente en la enseñanza y el aprendizaje de fórmulas, que poco reflejan la naturaleza específica de la aleatoriedad.

1.2.2.1.2 Procesos generales

El (MEN, 1998), define cinco procesos, los cuales están presentes en toda actividad matemática y se definen a continuación:

El razonamiento: Se conoce como la acción de ordenar las ideas en la mente para llegar a una conclusión, por lo tanto, debe estar presente en todo el trabajo matemático del estudiante. Según el (MEN, 1998), razonar matemáticamente tiene que ver, entre tantas cosas, con formular hipótesis, realizar conjeturas y predicciones, justificar y dar cuenta del cómo y del porqué de las estrategias y los procedimientos usados al resolver un problema, además comprender que las matemáticas no son solo una estructura o conjunto de fórmulas y procedimientos que se deben memorizar.

La comunicación: Es la esencia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y según Benitez, Mederos, Londoño, y Ruiz (2010) y el MEN, (1998):

La comunicación juega un papel fundamental, para ayudar a los estudiantes a articular sus nociones informales e intuitivas con el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones gráficas, numéricas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas.

Por lo tanto, es importante que el salón de clase sea un lugar propicio para que los estudiantes se expresen libremente, se motiven a hacer preguntas, intercambien ideas matemáticas con sus compañeros, con el fin de que la comunicación sea una práctica natural, que ocurre regularmente en el salón de clase.

La modelación: Es considerada por Vasco (2002) como la forma para describir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas, que parte de situaciones problemáticas reales y que permite al estudiante observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y construir a partir de esto, conceptos matemáticos significativos. Es válido recalcar, que este proceso se relaciona ampliamente con el proceso de Resolución de Problemas.

La resolución y planteamiento de problemas: Es un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas, por lo tanto el MEN (1998), propone una educación matemática que no se centre en el aprendizaje y memorización de fórmulas, conceptos y teoremas, sino que permita alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, aspecto que es abordado por la Resolución de Problemas.

Adicionalmente, reconoce la Resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas, ya que permite comunicar ideas, hacer preguntas, lanzar conjeturas, formular contraejemplos, ganar confianza en el uso de las matemáticas y desarrollar una mente adquisitiva y perseverante (MEN, 1998; Santos Trigo, 1997; Schoenfeld y Conner, 1992), logrando que los estudiantes puedan tener un aprendizaje significativo, y además relacionar las matemáticas con el entorno que les rodea.

La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: En muchas ocasiones, se han relacionado los procedimientos con fórmulas, operaciones y algoritmos, que tienen un orden y que se usan para dar solución a una determinada situación, pero el MEN (1998) los define de la siguiente manera:

Bajo el nombre de procedimientos nos estamos refiriendo a los conocimientos en cuanto a actuaciones, a las destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, resaltando en el alumno la capacidad de enfocar y resolver las propias actuaciones de manera cada vez más hábil y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud. (p.103).

La importancia de este proceso radica en que el estudiante debe ser capaz de verificar los resultados de un procedimiento por sus propios medios; identificar el tipo de algoritmo que se debe usar en una situación dada; reconstruir o generar un determinado procedimiento, en caso de olvidar el que ha sido enseñado, y encontrar que procedimientos alternativos pueden satisfacer una misma necesidad.

1.2.2.1.3 *El contexto*

De acuerdo con el MEN, (1998, 2006), los contextos tienen que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Estos contextos, en los cuales se plantean diversas situaciones problemáticas, son definidos por Barrera y Santos (2002) de la siguiente forma:

Contextos del mundo real: Son aquellos en los cuales se plantean situaciones problemáticas que están relacionadas con el entorno del estudiante, pero que en muchas ocasiones se deben hacer simplificaciones para poder construir una representación matemática aproximada a la realidad.

Según Benitez et al., (2010), estas simplificaciones permiten que la situación planteada sea más sencilla de abordar desde el punto de vista matemático y pueda manejarse en el salón de clase en un determinado grupo escolar.

Contextos puramente matemáticos: Hace referencia a las abstracciones que se proponen al estudiante, las cuales no tienen ningún tipo de aplicación o relación con la vida cotidiana del

estudiante. Según Benitez et al., (2010) “el objetivo de plantear situaciones en este contexto es que los estudiantes pueden hacer uso de recursos y estrategias para diseñar métodos de solución, encontrar patrones, construir conjeturas y darles seguimiento” (p. 20).

Contexto hipotético: Las situaciones planteadas a partir de este contexto, se constituyen a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetro que explican el desarrollo de la situación. Según Barrera & Santos (2002), "estas situaciones son muy adecuadas y sirven para que el estudiante pueda comparar las ventajas o desventajas que ofrecen los diferentes métodos que se utilizan al representar y resolver un problema"(p. 168).

1.2.2.2 Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

Más adelante, en el 2006, el MEN publica los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, por medio del cual resaltan que la Educación Matemática debe responder a las nuevas demandas globales y nacionales, con el fin de desarrollar en el estudiante, las competencias necesarias para que ejerzan sus derechos y deberes democráticos.

Además, plantean la estructuración del conocimiento matemático desde dos tipos básicos: el conceptual que se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, y se asocia con el saber qué y el saber por qué; y el procedimental que está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar representaciones; asociándose al saber cómo.

Esto implica que ser matemáticamente competente según MEN, hace referencia a que el estudiante sea capaz de:

Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de diferentes contextos, utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas, usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración y dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. (MEN, 2006, pp. 50-51).

Aspecto que es abordado ampliamente por el Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y que se toma en cuenta para el desarrollo de este trabajo. Además, se centra la atención en el proceso de formular y resolver problemas, y el contexto de la vida diaria, debido a su importancia dentro del currículo de matemáticas.

Es importante reconocer que el concepto de probabilidad, no solamente se debe enseñar porque hace parte de un plan educativo o por cumplir con los estándares básicos establecidos por el Ministerio de Educación, sino porque su importancia radica más allá de su aplicación en un contexto educativo, ya que está presente en la vida diaria, en los juegos de azar, en las discusiones, el estado del clima, en el mundo biológico, entre otros.

Por otro lado, también es importante tener en cuenta, las coherencias horizontal y vertical establecidas por el MEN (2006), entendidas de la siguiente manera:

1.2.2.2.1 Coherencia Horizontal

Esta coherencia está dada por la relación que tiene determinado estándar, con otros estándares de los demás pensamientos del mismo conjunto de grados. Para este caso, se considera la siguiente coherencia:

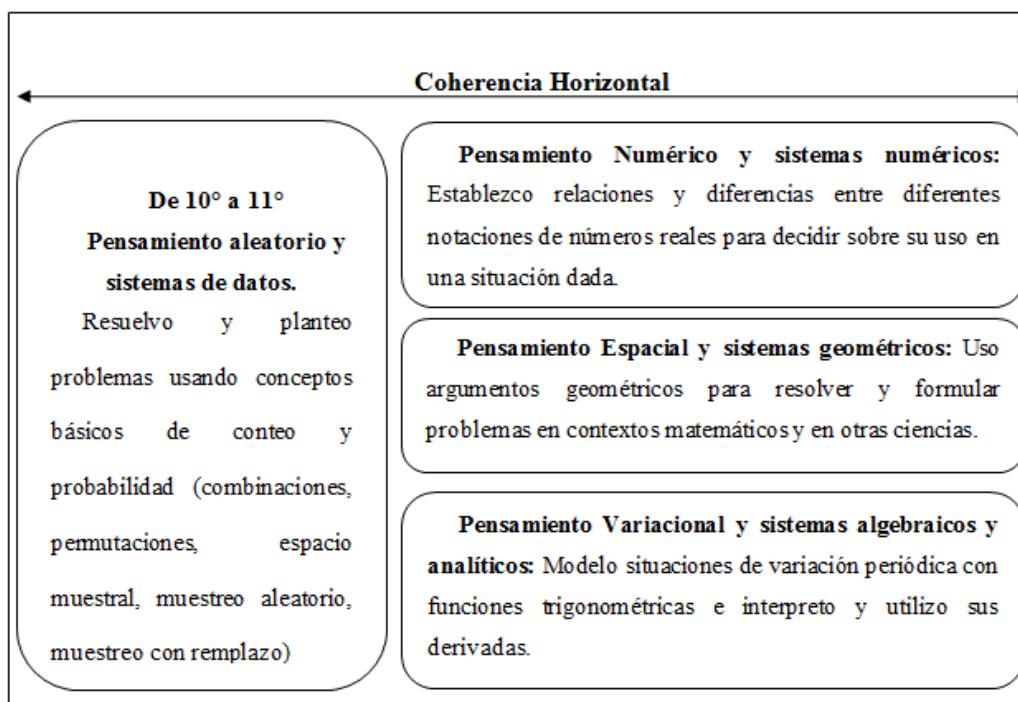


Figura 1 Coherencia Horizontal (Elaboración propia).

El MEN (2006), plantea breves situaciones particulares refiriéndose a las maneras del cómo se relacionan los diferentes tipos de pensamiento matemático expuestos en la figura anterior. Respecto a la relación entre el pensamiento aleatorio y el pensamiento numérico, se hace evidente la omnipresencia de los números en cualquier situación matemática, en este caso este pensamiento es necesario para representar numéricamente el conjunto de datos que se va a manejar, para realizar conteo u operaciones relacionadas, o para encontrar el promedio de algún conjunto de números.

Por otro lado, también resulta importante tener en cuenta el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, por ejemplo, en el caso de crear gráficos para describir cierto grupo de datos, ya que para las construcciones de diferentes tipos de diagramas se deben tener en cuenta conceptos básicos del pensamiento espacial; por lo menos para poder diferenciar figuras geométricas o saber elegir representaciones, cuyas características métricas faciliten el manejo de cierto grupo de datos.

Finalmente, el pensamiento variacional se hace presente cuando el estudiante debe utilizar las diferentes fórmulas que emplean en probabilidad como, por ejemplo, la fórmula de la esperanza matemática, la varianza o la desviación típica.

1.2.2.2.2 Coherencia Vertical

La cual está dada por la relación, de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento, en los otros conjuntos de grados. Para este caso, se considera la siguiente coherencia:

Tabla 1 *Coherencia vertical*

De 10° a 11° Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.	De 8° a 9° Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.
Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo)	De 6° a 7° Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares.)
	De 4° a 5° Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
	De 1° a 3° Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.

Se muestra la coherencia vertical de estándar del pensamiento aleatorio de los grados 10° a 11° y los estándares relacionados de grados anteriores.

Desde la coherencia presentada anteriormente, se puede identificar que en los diferentes grupos de grados se aborda el mismo contenido matemático, pero a medida que se avanza de un conjunto de grados a otro, varía la complejidad y precisión del concepto de probabilidad y las representaciones a utilizar.

Por ejemplo, en el primer grupo de grados (De 1° a 3°) la probabilidad de que suceda un evento, se aborda desde “posibilidad” o “imposibilidad” de que suceda determinado evento. Mientras que en el grupo de grados de 4° a 5°, se habla de que el estudiante ya pueda conjeturar y validar sus predicciones de la ocurrencia de un evento. Adicionalmente, en los grados de 6° a 9°, el estudiante puede identificar, producir y reconocer tendencias desde las diferentes representaciones.

Finalmente, en el grupo de grado de 10° a 11°, podrá resolver problemas haciendo uso de los conceptos básicos de probabilidad y conteo, desarrollados a través de los estándares propuestos en los grupos de grados anteriores.

1.2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje

Para el desarrollo de este trabajo, no se tomarán en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), debido a que se considera que esta propuesta genera un retroceso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por las siguientes razones, algunas de ellas abordadas en Gómez, Castro, Bulla, & Pinzón (2016):

- Se centran en el proceso de *elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*, y dejan de lado procesos fundamentales como la *Resolución de Problemas*, el cual será abordado ampliamente a lo largo de este trabajo.
- Los enunciados se enmarcan mayormente en el contexto de las mismas matemáticas (*Contextos puramente matemáticos*), olvidando la riqueza de situaciones, presente en los contextos hipotéticos y de la vida real.
- Se percibe el afán por alcanzar contenidos, más que por el desarrollo de los estándares en cada conjunto de grados.

- Se enfocan más en los contenidos matemáticos, que en el desarrollo de los procesos generales en el estudiante.
- No es evidente la coherencia horizontal, que promueven los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.
- Debido a que los estudiantes son evaluados por el ICFES, en los años 3°, 5°, 9° y 11°, es importante que los documentos curriculares, aborden los requerimientos de las Pruebas Saber. En este caso, las pruebas están enfocadas en la evaluación de competencias y los DBA se quedan cortos en este aspecto.

1.2.3 Resultados de Pruebas

Es importante, para el desarrollo de este trabajo, fijarse en los resultados de las Pruebas Saber aplicadas a los estudiantes de 11° en Colombia, que están diseñadas teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establecidos por el MEN (2006) y de las cuales se puede decir, que en el área de matemáticas los resultados no son alentadores.

Por lo anterior, se realiza un breve análisis y comparación de los resultados obtenidos por los estudiantes de Cali y el resto de Colombia, en el área de matemáticas en las Pruebas Saber 11° en el año 2018-2. Es válido resaltar que se tomaron en cuenta, únicamente, los resultados obtenidos en el periodo 2018-2, debido a que se evalúan las instituciones que pertenecen al Calendario A.

Finalmente, se analizaron los resultados obtenidos por los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina sede “Los Vencedores”, en las Pruebas Saber 11° presentadas en el año 2018-2 y específicamente se centra la atención en los resultados obtenidos en el pensamiento aleatorio. Lo anterior, teniendo en cuenta los datos presentados por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2016).

A continuación, se muestran, en porcentaje, los resultados obtenidos, por 14709 estudiantes de Cali, frente a 463035 estudiantes de Colombia con resultados publicados, en las Pruebas Saber 2018-2, en el área de matemáticas.

Tabla 2 *Resultados promedio de las Pruebas Saber 11° del año 2018 – 2*

Lugar	Avanzado	Satisfactorio	Mínimo	Insuficiente
Cali	2%	49%	41%	8%
Colombia	5%	49%	38%	8%

Se muestran los resultados promedio (porcentajes) de las Pruebas Saber 11 en el periodo 2017-1, con el fin de comparar los resultados obtenidos de Cali y Colombia.

De la Tabla 2, se puede concluir: (i) En el periodo 2018-2, existe un porcentaje muy bajo de estudiantes de Cali en el nivel avanzado, y que el 49% de los estudiantes, se encuentran en un nivel mínimo e insuficiente. (ii) La diferencia en el rendimiento de los estudiantes de Cali con respecto al resto del país en los niveles mínimo e insuficiente, es mínima.

Por otro lado, realizando un análisis más profundo se evidenciaron brechas considerables en los resultados obtenidos por cada grupo de comparación, los cuales son descritos por el (ICFES, 2016), de la siguiente manera:

Grupo de comparación 2 (GC 2): Estudiantes con mayor probabilidad de tener mejor condición de vida, aunque no es suficiente, cuentan con bienes electrónicos y eléctricos. La gran mayoría pertenecen a colegios con un pago de pensión bajo y sus padres tienen un nivel educativo superior a primaria, y se encuentran asociados a Nivel 2 de SISBEN.

Grupo de comparación 3 (GC 3) Estudiantes que pertenecen a familia con ingresos suficientes para no ser elegibles a programas sociales del Estado. Existe una mayor probabilidad de encontrar padres de familia que tengan estudios tecnológicos y técnicos, lo que genera que puedan tener un empleo más estable e ingresos superiores al promedio de la población. Los estudiantes que están dentro de este grupo pertenecen a colegios con un pago de pensión medio.

Grupo de comparación 4 (GC 4): Estudiantes que pertenecen, mayormente, a familias conformadas por padres de familia con estudios de Educación Superior y Posgrado, y que ocupan altos cargos. Los jóvenes que pertenecen a este grupo estudian en colegios privados con las pensiones más altas.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las Pruebas Saber 11° de los grupos de comparación GC2 y GC3:

Tabla 3 Resultados promedio de la Prueba Saber 11°, de cada grupo de comparación.

Lugar	Avanzado	Satisfactorio	Mínimo	Insuficiente
Cali	2%	49%	41%	8%
GC 2	0%	39%	50%	11%
GC 3	3%	56%	35%	5%

Se muestran los resultados promedio (porcentajes) de las Pruebas Saber 11 en el periodo 2018-2, por medio del cual se evidencia la brecha existente en el rendimiento académico, entre los grupos de comparación GC2 y GC3.

Se puede concluir de la Tabla 3, que existe una diferencia notable en los resultados obtenidos por cada grupo de comparación. Un ejemplo de ello, se evidencia en los estudiantes que pertenecen al GC 2 en el cual, casi un 61% obtuvo resultados con un nivel de desempeño mínimo e insuficiente; mientras que con los estudiantes que pertenecen a GC 3, sucede lo contrario, un 59% se ubica en niveles de desempeño Avanzado y Satisfactorio, y solo el 5% de estos estudiantes se ubican en un nivel de desempeño Insuficiente.

Este fenómeno presente en Colombia, se puede caracterizar desde lo que expone Bourdieu (2005), cuando expresa que:

Las familias tienen un interés creciente en la educación, y en sobre todo las familias privilegiadas y, entre ellas, las familia de intelectuales, de enseñantes o de miembros de profesiones liberales, en todo los países avanzados, y sin duda en Japón más que en otros lados; permite comprender también que las más altas instituciones escolares, aquellas que conducen a las más altas posiciones sociales, son cada vez más completamente monopolizadas por los hijos de las categorías privilegiadas (p. 61).

Lo anterior, aplica para el caso de Colombia, debido a que las familias de los jóvenes categorizados en el GC 3, según el ICFES (2016), pertenecen a familias con ingresos suficientes, sus padres, en su mayoría, tienen estudios tecnológicos y técnicos, lo que genera que puedan tener un empleo más estable e ingresos superiores al promedio de la población. Mientras que para aquellos estudiantes que pertenecen al GC 2, las condiciones son totalmente diferentes, muchos no cuentan con las condiciones suficientes para tener un proceso educativo de calidad, y deben desempeñar labores desde muy jóvenes.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina sede Los Vencedores, los cuales reflejan lo siguiente:

Tabla 4 Resultados de las pruebas saber 11°, de la sede “Los Vencedores”.

Lugar	Avanzado	Satisfactorio	Mínimo	Insuficiente
Cali	2%	49%	41%	8%
Colombia	5%	49%	38%	8%
Los Vencedores	-	53%	43%	4%

Se muestran los resultados promedio (porcentajes) de las Pruebas Saber 11 en el periodo 2018-2, de los estudiantes de grado once de la sede los vencedores.

De forma general, se puede evidenciar que los estudiantes de grado once de un colegio del sector oficial de Cali, obtuvieron resultados en su gran mayoría (53%), satisfactorios.

Por otro lado, resulta interesante consultar los resultados y las reflexiones elaboradas por la Institución Educativa el día E sobre el Pensamiento Aleatorio, con el fin de ampliar los antecedentes de esta investigación. Sin embargo, no fue posible tener acceso a esa información.

1.2.4 Necesidad de implementar el uso de tecnologías digitales

A modo de hipótesis, se puede decir que el uso de tecnologías digitales puede influir en el paso de un nivel de Razonamiento Probabilístico a otro. Para ello es pertinente primero realizar una encuesta diagnóstica, en la cual se pueda evidenciar el nivel inicial que tienen los estudiantes y a partir de ello, plantear problemas y sus respectivas soluciones, mediante la interferencia de instrumentos digitales como el software dinámico Geogebra.

Comúnmente al escuchar el término “tecnologías”, se relaciona inmediatamente con cualquier herramienta computacional, sin tener en cuenta que cualquier instrumento que pueda ser usado y brinde una mayor facilidad en el desarrollo de cierta actividad, también hace parte de las tecnologías.

Respecto a lo anterior Moreno (2011), afirma que el conocimiento producido por la actividad humana está relacionado, de una manera compleja, a los artefactos que intervienen en cada acción y que no hay manera de adquirir un conocimiento sin que intervenga algún tipo de instrumento. Plantea además dos principios que orientan esta idea, los cuales son:

- a. Principio Cognitivo: Este principio dice que “la cognición humana depende de la mediación de artefactos materiales y simbólicos para ganar conocimiento”. (Moreno, 2011, p. 3).
- b. Principio Epistemológico: Este principio dice que “las herramientas y artefactos que median la cognición humana no son epistemológicamente neutros”. (Moreno, 2011, p. 3)

Chance et al. 2007, (citado en Inzunza S., 2010, p. 426) identifican aspectos en los que la tecnología digital puede contribuir en el aprendizaje de la estadística y la probabilidad, como por ejemplo en la aplicación de procedimientos automáticos en gráficas y cálculos, en el aumento de la cantidad de casos de fenómenos probabilísticos, en la exploración de estos casos, entre otros.

Siendo Geogebra parte de esas tantas herramientas que brinda la tecnología digital, se puede decir que esta “contribuye a mejorar una actividad central de la matemática como la resolución de problemas, porque proporciona estrategias diferentes para plantear los enunciados, facilita la exploración dinámica de las situaciones y aporta ayudas diversas y nuevos métodos de resolución” (Cotic, 2014, p. 4).

Además, Geogebra posee cualidades por las cuales vale la pena ser destacada como un instrumento fundamental en el desarrollo del pensamiento aleatorio y en el desarrollo de distintos pensamientos de los estudiantes. Entre esas cualidades se puede apreciar que tiene licencia abierta, es fácil de usar y por ende puede utilizarse tanto en espacios universitarios como en escuelas secundarias, es muy versátil en el sentido de que puede utilizarse para el desarrollo de actividades de distintas áreas como la aritmética, la geometría, el cálculo y, las que son de interés dentro de este trabajo de grado, la estadística y probabilidad; a todo esto podemos sumarle que cuenta con una hoja de cálculo, la cual nos brinda herramientas que pueden ayudar en el análisis de los datos que se incorporen en ella.

Por estas virtudes y adicionando un diseño adecuado de diferentes actividades didácticas, se puede constituir como una herramienta pedagógica que contribuya a mejorar la enseñanza de la estadística y probabilidad, y de esta forma poder crear materiales que puedan ser utilizados a gran escala en las aulas (Inzunza, 2014).

1.3 Justificación

A lo largo de la Educación Matemática, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han considerado como esenciales en el desarrollo de una sociedad, pero es importante resaltar que estos procesos han causado diversas dificultades en la mayoría de los estudiantes, ya que en algunas ocasiones se han mostrado como algo que se encuentra fuera de la realidad, algo abstracto; que resulta difícil de enseñar adecuadamente e interiorizar por parte de los estudiantes.

Por su parte, la enseñanza de la Probabilidad no está exenta de las dificultades presentes en la mayoría de los estudiantes, debido a que suele estar ausente en los salones de clase o se reduce a pocas secciones, las cuales en muchas ocasiones se centran meramente, en la enseñanza de procedimientos y fórmulas, que difícilmente el estudiante puede relacionar con su entorno real, ya que tiene poca oportunidad de experimentar, analizar datos e indagar, tal como lo expresa (Batanero, 2009).

En Colombia específicamente, el Ministerio de Educación Nacional mediante los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998), y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN 2006), establecen el Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, como uno de los conocimientos básicos para todo estudiante, dado que desarrolla los procedimientos para cuantificar, proponer leyes para controlar y elaborar modelos para explicar situaciones, situaciones que por ser variables e impredecibles son regidas por el azar. Pero, la realidad en el salón de clase, es bien diferente, debido a que no se ha dado el valor suficiente al Pensamiento aleatorio y muchos profesores no tienen una formación para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística.

Es fácil evidenciar este hecho anteriormente mencionado, solo basta con observar el orden y la forma de presentar estos temas en un libro de texto de matemáticas de último grado de secundaria, fijarse en los resultados de las Pruebas Saber 11°, que están diseñadas según los estándares establecidos por el MEN (2006) y de las cuales se puede decir, que los resultados no son alentadores.

Este panorama, es bastante alertador debido a que desde muy pequeño, el niño se encuentra rodeado de una realidad regida por el azar, y diariamente debe valorar y tomar decisiones en circunstancias en las cuales interviene la incertidumbre o el azar. Lo anterior, motiva al desarrollo de este trabajo, ya que es necesario como docentes, identificar las creencias o concepciones presentes en los estudiantes, con el fin de caracterizar su razonamiento y diseñar actividades que permitan que el estudiante alcance un nivel superior.

Aunque diversos autores han abordado esta problemática desde diferentes perspectivas, tales como: materiales manipulativos, las etapas del aprendizaje de Dienes, la Teoría de las Situaciones

Didácticas y Unidades didácticas. Es importante abordar esta problemática, desde la Resolución de Problemas reales, y las Tecnologías Digitales como mediadoras del proceso de aprendizaje, debido a que como lo han expresado varios autores, las Tecnologías Digitales en el salón de clase han hecho más accesible para los estudiantes el concepto de Probabilidad, y la exploración de problemas reales permite la elaboración de modelos de Probabilidad.

Por último, vale la pena resaltar que este trabajo está dirigido a docentes de matemáticas de último grado de educación secundaria, a diseñadores de materiales didácticos, y a formadores de profesores interesados en aportar al cambio de la enseñanza de la probabilidad en los salones de clase.

1.4 Objetivos

1.4.1 General

Documentar la importancia que tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de secundaria

1.4.2 Específicos

- Describir las creencias iniciales que tienen los estudiantes de grado 11° de un colegio del sector público de Cali con respecto a la probabilidad de un evento.
- Documentar las características de las actividades didácticas, presentadas a estudiantes de grado once de secundaria, que promueven el desarrollo del Razonamiento Probabilístico.
- Describir la importancia de las múltiples representaciones estadísticas en la solución de problemas de probabilidad en estudiantes de grado once de secundaria

1.5 Preguntas

1.5.1 Pregunta Central

¿Qué importancia tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de secundaria?

1.5.2 Preguntas Auxiliares

- a. ¿Cuál es el sistema de creencias inicial, presente en los estudiantes de grado 11° de un colegio del sector público de Cali, con respecto a la probabilidad de un evento
- b. ¿Cuáles deben ser algunas de las características de las actividades didácticas presentadas a los estudiantes de grado 11°, con el fin de que estas promuevan el desarrollo del Razonamiento Probabilístico?
- c. ¿Cuál es la importancia de las múltiples representaciones estadísticas en la solución de problemas de probabilidad en estudiantes de grado once de secundaria?

Capítulo II

Referentes Teóricos

2.1 Introducción

En esta sección se presentan los referentes teóricos que permiten fundamentar la problemática presentada y ser el marco para el diseño de los instrumentos de investigación y el análisis de los resultados obtenidos a través de estos instrumentos. Este marco abarca cinco elementos fundamentales para el desarrollo de este trabajo: el proceso de Resolución de Problemas, los niveles de Razonamiento Probabilístico de los estudiantes, el uso de múltiples representaciones, la Mediación Instrumental y la Probabilidad.

2.2 Resolución de Problemas

A lo largo de este trabajo, se ha enfatizado en la importancia del proceso de Resolución de Problemas, el cual, según Benítez (2017) se ha considerado como un aspecto importante en el desarrollo de las matemáticas y el estudio del conocimiento matemático. De hecho, Halmos (1980) sugirió que el proceso de resolver problemas es el corazón de las matemáticas y Kleiner (1986) señaló que el desarrollo del conocimiento y de las teorías matemáticas se origina a partir del esfuerzo al resolver un determinado problema, ambos citados en Santos (1992, p. 16).

Ahora bien, es importante aclarar, qué es un problema. Para ello, se toma en cuenta, por un lado, la perspectiva de Polya y por otro, el trabajo de Schoenfeld, autores que han aportado significativamente con sus propuestas en este campo.

2.2.1. Trabajo de Polya

Polya (1961) citado en Conejo y Ortega (2013), considera que: “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata” y concibe la resolución de problemas como un proceso, que está compuesto por las siguientes fases:

- Comprender el problema
- Trazar un plan
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución

A continuación, se hace la descripción de cada una de las fases:

Comprender el Problema: En esta fase, se identifican los elementos del problema, tal como, la incógnita, los datos, y las condiciones a fin de decidir si son suficientes, y no redundantes ni contradictorias. Estos elementos se deben encontrar cuando se da respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?

Trazar un Plan: Es importante en esta fase, según Benítez (2017), identificar las relaciones que están presentes en los elementos encontrados en el paso anterior, a fin de establecer uno o varios caminos de solución. Adicionalmente, Polya sugiere que el problema debe relacionarse con problemas semejantes o dividirlo en subproblemas, aspectos que se constituyen en estrategias heurísticas, estrategias que por sí mismas no garantizan el éxito, pero que resultan de bastante ayuda cuando se utilizan.

Ejecución del Plan: La idea central de esta fase, es materializar el plan que ha sido trazado, es decir, realizar las tareas una a una a fin de obtener la solución.

Visión retrospectiva: Dentro del proceso de solución, es una fase muy importante, debido a que el hecho de obtener una respuesta no indica el final del proceso, es necesario detenerse a observar qué fue lo que se hizo, verificar los resultados obtenidos en relación con el problema planteado, explorar caminos más cortos y aplicar el resultado a otro problema; esto permite identificar la amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema. Lo anterior, se puede lograr, al dar respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?
- ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Aunque el modelo propuesto por Polya, resulta interesante diversas investigaciones han demostrado que no ha sido suficiente para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas. Debido a que, las cuatro fases muestran características de un *resolutor* ideal y siguiendo lo que expresa Benítez (2017), dentro del trabajo de Polya no hay respuesta para los siguientes interrogantes:

- a. ¿Qué debe hacer un resolutor cuando no ha entendido un problema?
- b. ¿Qué acciones instruccionales se deben emprender para promover el entendimiento de los problemas?
- c. ¿Qué sucede cuando las alternativas y estrategias seleccionadas por el estudiante lo conducen a caminos oscuros que no prometen llevarlo con éxito a la solución del problema?

Por lo tanto, se hace preciso revisar el trabajo de Alan Schoenfeld, quien reconoce la importancia del trabajo de Polya, pero resalta que los estudiantes no toman en cuenta estas fases al momento de resolver problemas en matemáticas.

2.2.2. Trabajo de Schoenfeld

De acuerdo con Santos (1992), los trabajos de Schoenfeld constituyen aportes valiosos para la implementación de actividades que involucren Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas y su propuesta se fundamenta en lo que denomina un “microcosmo matemático¹” en el salón de clase.

¹ El microcosmo matemático, consiste en propiciar en el aula condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso del desarrollo de las matemáticas.

En su propuesta, Schoenfeld señala que en el proceso de resolución de problemas intervienen las siguientes dimensiones:

- Dominio del conocimiento
- Estrategias Cognoscitivas
- Estrategias Metacognitivas
- Sistema de Creencias

Se explican a detalle las cuatro dimensiones a continuación:

Dominio del conocimiento: Se puede decir, que se refiere a los conocimientos sobre los cuales la Resolución de Problemas es construida, lo que el estudiante sabe o el conocimiento que posee y las formas en las que accede a este conocimiento, es decir: las definiciones, los hechos y procedimientos. Es importante aclarar, que este conocimiento no puede ser solo teoría, deben estar bien estructurados, de tal forma que el estudiante, pueda disponer de los teoremas y definiciones claves involucradas en el problema.

Estrategias Cognitivas: Hacen referencia a los métodos heurísticos, que son utilizados por el estudiante cuando resuelve problemas en matemáticas, tales como: descomponer el problema en problemas más simples, invertir el problema, hacer tablas, listas ordenadas y gráficas, usar material manipulable, etc.

Estrategias Metacognitivas: Consiste en monitorear o evaluar constantemente el proceso de resolución que se está llevando a cabo. También, se refiere a poder seleccionar de la estrategia adecuada o identificar cuando es necesario cambiar de dirección en el proceso de resolución.

Sistema de creencias: Alude a las ideas de los estudiantes sobre las matemáticas y como resolver problemas, se considera un aspecto muy importante dentro de la propuesta de Schoenfeld, debido a que, lo que un estudiante piensa acerca de las matemáticas influye fuertemente en la forma en como resuelve problemas en matemáticas.

Lo anterior, se evidencia en la investigación llevada a cabo por Sánchez y Benítez (1997), en la cual, se puede observar que las creencias erróneas que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad, influyen considerablemente en el proceso de Resolución de Problemas.

La investigación en mención, es detallada en el siguiente apartado.

2.3 Niveles de Razonamiento Probabilístico

Aunque la probabilidad es un concepto aparentemente conocido por muchos estudiantes, en el proceso de resolver problemas relacionados con el concepto de Probabilidad, influye fuertemente el sistema de creencias de cada individuo.

Lo anterior, se evidenció en el proyecto realizado por Sanchez y Benitez, (1997) en el que buscaban describir algunas características del razonamiento probabilista de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de probabilidad, definiendo así, cinco diferentes niveles de Razonamiento Probabilístico, que van desde la impredeción hasta un pensamiento riguroso. Los cuales se describen a continuación.

2.3.1. Impredeción

En este nivel, se ubican los estudiantes que consideran que es imposible predecir resultados en situaciones aleatorias.

Un ejemplo de ello, es cuando se plantea al estudiante, la situación del lanzamiento de dos monedas de 500 pesos y se pregunta: ¿Qué es más probable, obtener dos caras- dos sellos- o cara y sello? y este responde que no es posible saber cuál es el resultado porque es una situación de azar.

2.3.2. Determinístico

En esta categoría, se ubican los estudiantes que consideran que los resultados de una situación en la cual interviene el azar dependen de causas poderosas, las cuales pueden ser: físicas, místicas o empíricas.

- **Físicas:** Consideran que la fuerza de lanzamiento, la posición, el tamaño de un determinado objeto intervienen en el resultado de la situación.
- **Místicas:** Consideran que en el resultado del experimento intervienen, la suerte, los poderes sobrenaturales, el poder de Dios o la voluntad divina.
- **Empíricas:** Se pueden ubicar aquí, a aquellos estudiantes que basan sus argumentos en experiencias anteriores, obtenidas con juegos de azar en el mayor de los casos. Estas experiencias se encuentran tan marcadas dentro del pensamiento del estudiante, que se consideran creencias que afectan la forma en la cual argumenta.

Un ejemplo de este nivel, puede ser que al preguntarle a un estudiante la causa de que una persona gane la lotería dos veces seguidas, y lo considere como un golpe de suerte.

2.3.3. Mecánico

Se ubican aquí, los estudiantes que hacen uso de algoritmos para dar respuesta al problema propuesto, pero su uso se hace de manera incorrecta lo que refleja que es resultado de un aprendizaje memorístico por parte del estudiante, obtenido en muchas ocasiones por algunas clases anteriores de probabilidad. Cabe aclarar que este aprendizaje es carente de significado.

Un ejemplo tomado de Sanchez y Benitez, (1997) plantea la siguiente situación:

Si tenemos una caja con 3 bolas blancas y 3 bolas negras. ¿Si tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, que es más probable?

- a. *Tomar 2 bolas blancas*
- b. *Tomar 2 bolas negras*
- c. *Tomar 1 bola blanca y 1 bola negra*
- d. *Los tres eventos anteriores son igualmente probables.*

A lo que un estudiante universitario de México respondió: “D. Pues hay 6 bolas en total o sea 3 de cada color, entonces podríamos decir que 3/6 son blancas y que 3/6 son negras. Simplifico $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ por eso de lo mismo”.

En este caso, el estudiante tiene como referente la fórmula para calcular la probabilidad de un evento, $(\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}})$ y mira los eventos como casos independientes, pero olvida que para este caso en particular, las bolas se extraen “simultáneamente”, y se puede acudir a la combinatoria. Por lo tanto está contestando mecánicamente.

2.3.4. Pre-rigor

A este nivel pertenece el grupo de estudiantes, que ya pueden vislumbrar algunos de los resultados de un experimento (no todos), tiene una capacidad más elevada para argumentar y se puede decir que ya se han alejado un poco del pensamiento mítico, físico o empírico.

Por ejemplo, cuando un estudiante considera que al lanzar dos dados y sumar los puntos resultantes, el evento de obtener un cuatro es igualmente probable al de obtener un cinco porque las combinaciones que dan estos resultados son las siguientes:

Para cuatro: $1 + 3, 2 + 2$

Para cinco: $1 + 4, 2 + 3$

En este caso, se evidencia que el estudiante solo ha identificado algunas de las combinaciones posibles, lo que lo ubica en este nivel de razonamiento.

2.3.5. Rigor

En este nivel se encuentran los estudiantes, que para argumentar hacen uso de diferentes representaciones para un problema, en otras palabras, pueden argumentar matemáticamente.

Basados en el ejemplo anterior, el estudiante podrá identificar todas las combinaciones posibles y adicionalmente, podrá realizar un diagrama de árbol o un plano cartesiano, en el cual se evidencie el espacio muestral del experimento.

2.4 Uso de Múltiples Representaciones

Para el desarrollo y análisis dentro de este trabajo de investigación, se hace necesario considerar dentro de este trabajo, lo que propone Duval (1993, 1995) citado en Hitt (2001), quien plantea que un sistema semiótico de representación es caracterizado como un sistema de representación, si permite las siguientes actividades cognitivas:

- **La presencia de una representación identificable**
- **El tratamiento de una representación:** La cual, hace referencia a las transformaciones de la representación dentro del mismo registro. Un ejemplo de esto se evidencia en la Tabla N° 5, dentro del registro semiótico *Lenguaje natural*, en el cual se muestran representaciones de la probabilidad de obtener cierto número específico al lanzar un dado, por ejemplo: “Un caso favorable entre seis posibles” se puede ver también como “Cinco casos desfavorables entre seis posibles”.
- **La conversión de una representación:** Hace referencia a las transformaciones de una representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Las actividades cognitivas mencionadas, se ejemplifican a través de la tabla 5:

Tabla 5 *Ejemplo de las actividades cognitivas*

Registro semiótico: Lenguaje Natural • Representación 1: Un caso favorable entre seis posibles”. • Representación 2: Cinco casos desfavorables entre seis posibles.		TRATAMIENTO
Registro semiótico: Lenguaje Aritmético • Representación 1: $1/6$ • Representación 2: 0,17 • Representación 3: $17\% \cdot 10^{-1}$		CONVERSIÓN
Registro semiótico: Lenguaje Algebraico • Representación 1: $P(E) = 1/6$ • Representación 2: $P(Q) = 1 - P(E) = 1 - 1/6 = 0,83$		
Registro semiótico: Lenguaje Grafico		

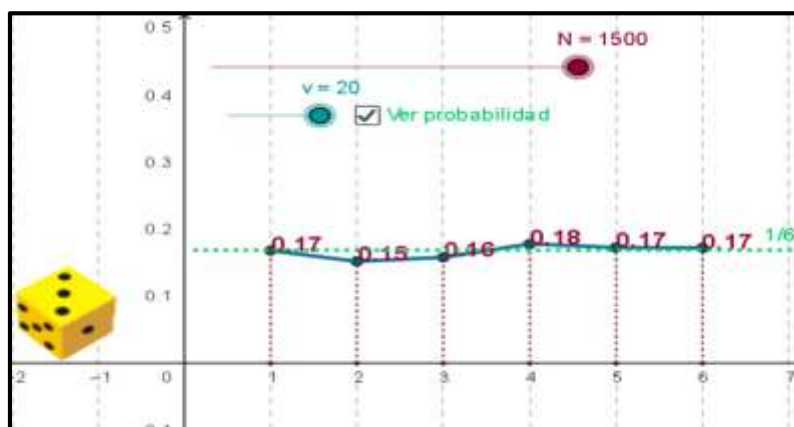


Figura 2 Grafica del lanzamiento de un dado. Tomado de: Recursos GeoGebra.

Se ejemplifican las actividades cognitivas, que deben permitir los sistemas semióticos para ser caracterizados como sistemas de representación.

Lo anterior, debido a que como lo expone Hitt (2001), en la Resolución de Problemas, las representaciones son consideradas como el corazón de las matemáticas. Por lo tanto, es importante presentar a los estudiantes tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones.

De acuerdo con Rivas (2009), el problema es que la mayoría de profesores de matemáticas, tienden a centrar su atención y aceptar como único medio de representación, el sistema simbólico algebraico (considerado el más formal), y pocas veces se hace explícita la relación entre las distintas formas de representación de los conceptos matemáticos, lo que genera que el aprendizaje adquirido por los estudiantes sea deficiente.

Por lo tanto, se considera importante dentro de este trabajo desarrollar una propuesta didáctica que conlleve a la utilización y articulación de los diferentes tipos de representación semiótica y permita que el estudiante interiorice el concepto que se pretende trabajar.

2.5 Mediación Instrumental

De acuerdo con Moreno (2002), “las herramientas, como instrumentos de mediación, han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos. Son parte integral de las actividades humanas”. Esto, se puede evidenciar en el siguiente ejemplo:

Considere un profesor en estas últimas cinco décadas. Quizá hace cincuenta años las clases se dictaban haciendo uso de un tablero de tiza y una tiza, pero los trazos o la caligrafía no era tan clara, como lo fue años después cuando unas de las herramientas de clase, eran el marcador y el tablero; o mejor aún cuando muchos profesores decidieron involucrar en sus clases, como instrumentos de mediación, las herramientas computacionales por medio de las cuales los trazos o gráficas deberían dejar de ser objetos estáticos para ser objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla y que se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material.

Lo anterior es un punto clave dentro de este marco teórico, debido a que como lo expone Moreno (2002), las herramientas computacionales en la educación son consideradas como herramientas de mediación de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

2.5.1. Representaciones ejecutables

Moreno (2002), considera que los sistemas de representaciones, se pueden considerar herramientas de mediación. Específicamente, hablando de herramientas computacionales, se puede decir que aquí las representaciones tienen como característica central, ser ejecutables.

Un ejemplo de lo anterior es GeoGebra, un software en el cual se puede realizar la construcción de diversos polígonos, con medidas exactas y manipulables, lo que permite que el estudiante a través de la visualización y el arrastre pueda evidenciar las características de las figuras, aspecto que no se evidencia fácilmente con el lápiz y el papel.

Es así como al usar un computador, un estudiante no solo tiene a su disposición un espacio de representación externa, sino la posibilidad de procesar esa información de cierta manera debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la herramienta.

Por lo tanto, para Moreno (2002) la representación instrumental comienza desde el momento en que se pueden re-definir los objetos matemáticos en términos de condiciones ejecutables.

2.5.2. De las herramientas a instrumentos matemáticos

Antes de desarrollar este apartado, hay dos metáforas que se deben aclarar debido a que son importantes en la construcción del conocimiento matemático en la escuela cuando se usan instrumentos de mediación, y son definidas en Moreno (2002), de la siguiente manera:

- La metáfora de las herramientas de amplificación: se puede pensar aquí en una lupa, debido a que una herramienta de amplificación no cambia la estructura del objeto de la visión. Pero si nos permite ver, amplificado, lo que no podía ser visto a simple vista.
- La metáfora de las herramientas de re-organización cognitiva: sugiere pensar en un microscopio, debido a que permite ver lo que no era posible sin la herramienta. Moreno (2002) asegura que se accede entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto y se abre la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo.

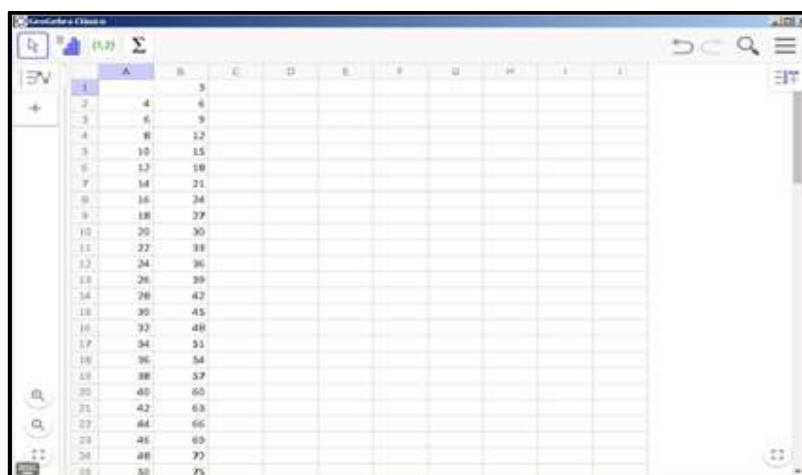
Con lo anterior, se puede decir entonces que se habla de herramienta, cuando un estudiante la usa como auxilio en la realización de cálculos o gráficas dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, es decir, solo genera efectos de amplificación. En este caso, la herramienta no modifica, sino que complementa el pensamiento del estudiante.

Por otra parte, de acuerdo con Moreno (2002) es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas y a nivel de la manera misma como se plantea el problema. En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta y se generen efectos de reorganización conceptual, entonces se puede decir que la herramienta se ha tornado un instrumento.

2.6 GeoGebra como herramienta estadística

En esta sección se podrá visualizar, con un poco más de detalle, las diferentes herramientas que se pueden usar en GeoGebra para desenvolverse en el área de la estadística y la probabilidad.

En primer lugar, este software cuenta con hojas de cálculo, las cuales tienen un estilo parecido a Excel. Estas hojas de cálculo cuentan con una serie de comandos estadísticos y a partir de los datos introducidos en ellas también se pueden realizar gráficos, hallar probabilidades y realizar diferentes cálculos estadísticos.



The image shows the 'Calculadora' (Calculator) window in GeoGebra. It features a spreadsheet interface with columns labeled A through I and rows numbered 1 through 25. The data entered in the spreadsheet is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	4	6							
3	6	9							
4	8	12							
5	10	15							
6	12	18							
7	14	21							
8	16	24							
9	18	27							
10	20	30							
11	22	33							
12	24	36							
13	26	39							
14	28	42							
15	30	45							
16	32	48							
17	34	51							
18	36	54							
19	38	57							
20	40	60							
21	42	63							
22	44	66							
23	46	69							
24	48	72							
25	50	75							

Figura 3 Hoja de cálculo GeoGebra. Tomado de: GeoGebra

Otra tarea que se puede realizar con GeoGebra son las creaciones de histogramas, diagramas, gráficos, entre otros.

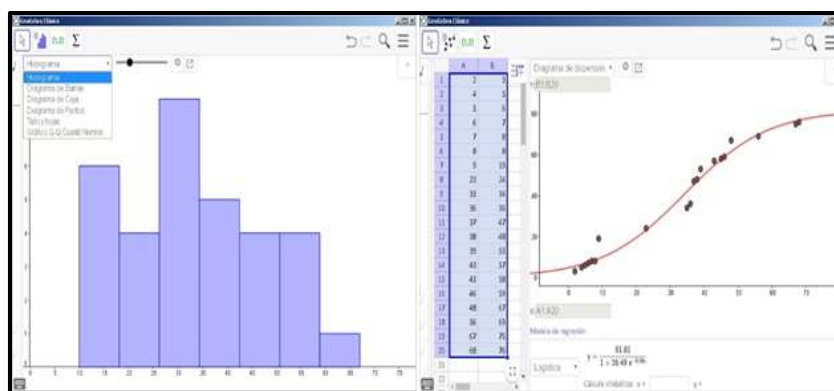


Figura 4 Histograma y grafica realizadas en GeoGebra. Tomado de: GeoGebra.

También se pueden realizar procedimientos un poco más complejos que tengan que ver con las distintas distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, en la figura 5 se puede observar el valor de la probabilidad sobre la densidad de una distribución de Pearson o chi cuadrado, entre los valores 6.4 y 9.6 con 4 grados de libertad, donde se expresa una media poblacional de 4 y una desviación estándar de 2.8284.

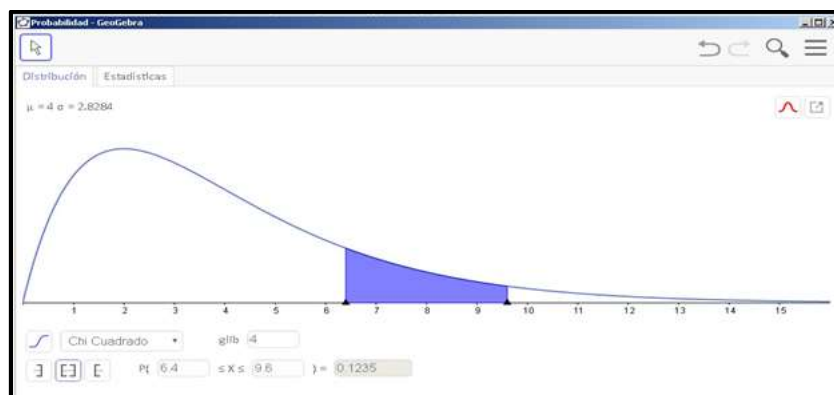


Figura 5 Ejemplo de una distribución de Pearson. Tomado de: Burbano y Valdivieso, 2013.

La idea de dejar en evidencia los distintos sistemas de representación con los que cuenta GeoGebra, resulta de la intención de garantizar que este software dinámico supera las expectativas en cuanto a la gran funcionalidad que puede tener en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. También puede ayudar con la búsqueda del interés de los estudiantes frente a la

estadística y a la Probabilidad, y contribuir en mostrar la importancia que tienen estas ciencias en los diferentes ámbitos sociales.

2.7 Probabilidad

Dentro de este apartado se definen los conceptos que serán necesarios para la realización de las hojas de trabajo, las cuales serán desarrolladas por cada participante en este trabajo de investigación. Estas definiciones se tomaron de las ideas propuestas por Tamayo, (2008) y Lopez-Klein, (2012).

2.7.1. Experimento Aleatorio

Según Lopez-Klein, (2012) un experimento es aleatorio, si cumple las siguientes condiciones:

- Se puede repetir indefinidamente y cada vez en las mismas condiciones.
- No se puede predecir el resultado que se va a obtener.
- El resultado obtenido pertenece a un conjunto conocido: el espacio muestral S .
- Como los eventos son subconjuntos, se puede hablar de unión, intersección y complemento.

De forma más resumida, Tamayo, (2008) considera que un experimento es aleatorio si el resultado no se puede predecir; lo único que se puede afirmar es que el resultado es un elemento de cierto conjunto dado, llamado conjunto de resultados posibles. Un ejemplo de experimento aleatorio sería: predecir la balota que saldrá de una urna.

2.7.2. Espacio Muestral (S)

Según Tamayo (2008) y Lopez-Klein, (2012), el espacio muestral hace referencia al conjunto de todos los resultados (elementales) posibles en una realización de un experimento aleatorio.

Si se considera el lanzamiento de un dado de seis caras, el espacio muestral sería:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.7.3. Sucesos, clases y relaciones

Un suceso se define, de acuerdo con Tamayo (2008), como un conjunto de resultados que a la vez es subconjunto del espacio muestral. Estos conjuntos se denotan con letras mayúsculas y se dividen en las siguientes clases:

- *Suceso elemental*: Es el que consta de un solo elemento del espacio muestral.
- *Suceso compuesto*: Es aquel que consta de dos o más elementos del espacio muestral.

Adicionalmente, entre los sucesos compuestos se pueden establecer las siguientes relaciones:

- Un suceso puede estar contenido en otro
- Dos sucesos pueden ser iguales
- Unión de dos o más sucesos
- Intersección de sucesos
- Sucesos incompatibles
- Sucesos complementarios
- Sucesos seguros

A continuación, se explican a detalle:

Un suceso puede estar contenido en otro: es decir, las posibles soluciones del primer suceso también son del segundo, pero el segundo suceso tiene soluciones propias.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salga el número 5, y B: que salga un número par. Si se detallan los sucesos presentados: A está contenido en B, pero no sucede al contrario debido a que B cuenta con soluciones propias que no están contenidas en A.

Dos sucesos pueden ser iguales: esto ocurre cuando siempre que se cumple uno de ellos, se cumple obligatoriamente el otro, y viceversa. En otras palabras, dos sucesos son iguales si contienen los mismos elementos.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salgan los múltiplos de 2, y B: que salga número par. Los elementos que forman parte de estos sucesos, son los mismos.

Unión de dos o más sucesos: será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se unen.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salga número par, y B: que el resultado sea mayor que 5. Por lo tanto, el conjunto de unión, contendrá los siguientes elementos: el 2, el 4 y el 6.

Intersección de sucesos: es el conjunto compuesto por los elementos comunes de dos o más sucesos que se interceptan.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salga número par, y B: que el resultado sea mayor que 5. El conjunto de intersección de estos dos sucesos sería: el número 6. (Es el único elemento que es par y mayor que 5, a la vez)

Sucesos incompatibles: Se trata de aquellos sucesos que no se pueden dar al mismo tiempo, debido a que no tienen elementos comunes.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salga número menor que 4, y B: que salga el número 5. Es claro, que ambos sucesos no se pueden dar a la misma vez.

Sucesos complementarios: son aquellos que, si no se da uno, obligatoriamente se debe dar el otro.

Ejemplo: Se lanza un dado, y se describen dos sucesos: A: que salga un número par, y B: que salga un número impar. El suceso A es el contrario de B, entonces B es el contrario de A.

Sucesos seguros: Sea tal que $A=S$, se dice que A es un suceso seguro ya que en cada realización del experimento el resultado necesariamente es un elemento en A.

2.7.4. Definiciones de Probabilidad

2.7.4.1 Probabilidad Clásica

Tamayo (2008), considera que esta es la definición más antigua de probabilidad, y la define de la siguiente manera:

Si el espacio muestral (S) del experimento, tiene n resultados mutuamente excluyentes o igualmente probables, y si un suceso **A** definido sobre el espacio muestral tiene n_A elementos entonces la probabilidad de A, denotada por $P(A)$, se define como:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Las probabilidades determinadas mediante esta definición, se consideran como probabilidades *a priori* ya que no es realizado realizar el experimento para obtener la probabilidad. Adicionalmente, esta definición se utiliza mayormente en los juegos de azar.

2.7.4.2 Probabilidad Subjetiva

Por otro lado, la probabilidad subjetiva es definida como la probabilidad de ocurrencia de un evento asignada por un individuo en particular de acuerdo con su experiencia.

Keynes, Ramsey y de Finetti, citados en Batanero (2005) consideran que la probabilidad de un suceso siempre está condicionada por un cierto sistema de conocimientos y puede ser, por tanto, diferente, para distintas personas.

Capítulo III

Diseño Metodológico

3.1 Introducción

En este capítulo, se describe la metodología y las fases que se usaron para llevar a cabo este Trabajo de Grado y se define el tipo de estudio que se tuvo en cuenta para analizar los resultados obtenidos. Adicionalmente, se detallan las características de los sujetos, que participaron en este proyecto, los materiales e instrumentos utilizados para la recolección y el análisis de los datos e información recogida, con el fin de dar respuesta a las preguntas planteadas y dar cuenta de los objetivos propuestos anteriormente.

3.2 Tipo de estudio

Teniendo en cuenta los objetivos planteados en este trabajo, el tipo de estudio hace referencia a un método mixto, definido por Bryman (2006) citado en Moscoso (2017), como el método que se basa en el empleo simultaneo de métodos cualitativos y cuantitativos.

A continuación, se describe como se aplicó el método mixto en cada tipo de análisis.

3.2.1 Análisis cualitativo.

Desde el análisis de tipo cualitativo, se analizaron las reflexiones, consideraciones, estrategias de resolución de los problemas planteados y las creencias presentes en los estudiantes, al momento de desarrollar las hojas de trabajo y las actividades propuestas. Adicionalmente, se realizó la categorización de los niveles del Razonamiento Probabilístico de los estudiantes, y los datos recogidos permitieron determinar el grado de avance de los estudiantes, de acuerdo a los niveles de Razonamiento Probabilístico tomados como referente teórico.

3.2.2 Análisis cuantitativo.

Desde el análisis de tipo cuantitativo se analizó el rendimiento de los estudiantes, y se presentaron los resultados obtenidos, a través de representaciones gráficas y tabulares, con el fin de cuantificar en términos porcentuales el rendimiento de los estudiantes.

Ambos análisis permitieron contrastar los resultados de la encuesta diagnóstica y cada hoja de trabajo aplicada a los estudiantes, para determinar el impacto de la propuesta didáctica y el uso de la tecnología computacional en el aprendizaje de la probabilidad.

Se debe tener en cuenta, que ambos tipos de análisis son complementarios, ya que por sí solos no proporcionarían información suficiente, para dar respuesta a las preguntas planteadas y cumplir con los objetivos propuestos.

3.3 Sujetos

La aplicación de la propuesta didáctica se realizó en la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina sede Los Vencedores, el cual desarrolla sus labores en las jornadas: mañana y la tarde, se encuentra ubicada en el barrio San Luis II de Cali, en el departamento del Valle de Cauca, más específicamente en la Carrera 1A 4 No. 72D – 19.

La Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina, es una institución pública de calendario A, tiene un modelo de formación basado en valores y consideran la convivencia en la comunidad, como un elemento importante dentro del salón de clase. Cabe resaltar que esta institución tiene como objetivos institucionales, principalmente mejorar los niveles de convivencia en toda la comunidad y fortalecer la cultura en la aplicación de las Tecnologías Digitales en todas las áreas de la Institución educativa.

Los estudiantes que participaron en este proyecto pertenecían al grado once de la sede Los Vencedores y sus edades oscilaban entre los 16 y 19 años. El grupo estaba conformado por 23 mujeres (54,76%) y 19 hombres (45,24%), para un total de 42 estudiantes, de entre los 16 y 19 años de edad, pero en su mayoría de 17 años.

Es importante mencionar que debido a que el año escolar estaba finalizando y a las actividades programadas, en el momento de la aplicación de la encuesta diagnóstica y de las hojas de trabajo, algunos estudiantes no pudieron asistir, por lo tanto, solo se tomaron en cuenta 30 estudiantes, de los cuales 17 (56,7%) son mujeres y 13 (43,3%) son hombres.

3.4 Fases

En la *figura 6*, se muestran las cinco fases que conforman el presente trabajo de investigación, las cuales se explicaran a lo largo de este apartado.

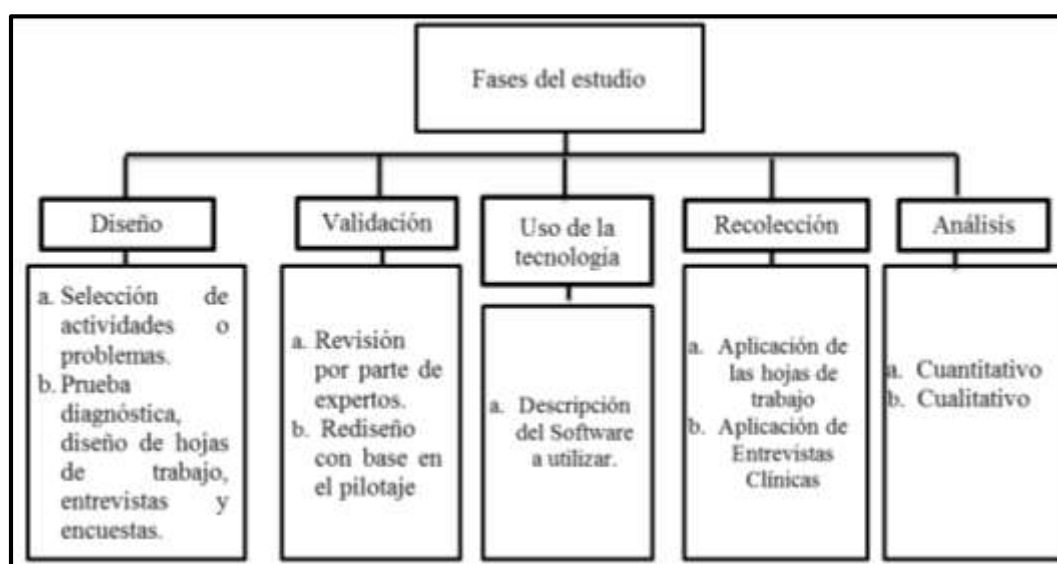


Figura 6 Fases del estudio. (Elaboración propia)

3.4.1 Diseño

En esta primera fase se presentan los siguientes dos momentos: el primero hace referencia a la selección de actividades o problemas, los cuales serán estructuradas de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemática propuestos por el Ministerio de Educación de Colombia para el grado once y teniendo en cuenta, los aportes de diversos autores. Lo anterior permitió diseñar la encuesta diagnóstica y las hojas de trabajo, lo que se constituye como un segundo momento.

3.4.1.1 Selección de actividades o problemas

Dentro de esta sub-fase, se realizó la selección de actividades que resolvieron los participantes del estudio. Para ello, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios expuestos por Benítez (2006):

- En la solución de las actividades escogidas, deben estar contempladas las siguientes características del quehacer matemático: particularizar, la búsqueda de patrones, el desarrollo del lenguaje matemático, conjeturar, generalizar, utilizar múltiples representaciones, extraer información de una representación específica, construir modelos y formular contraejemplos, entre otras.
- Podrán ser resueltas software, tales como GeoGebra y Excel.
- Se tendrá en cuenta los tres tipos de contextos descritos anteriormente, en especial, los contextos hipotéticos y reales.
- Que resulten interesantes para los estudiantes, que se constituyan como un reto y se fomente el trabajo en equipo en caso sea que sea necesario.

3.4.1.2 Diseño de encuesta diagnóstica, hojas de trabajo, entrevistas y encuestas.

Para el desarrollo de este trabajo de investigación, fue importante diseñar una encuesta diagnóstica a los estudiantes, ya que a partir de los resultados obtenidos de esta, se pudieron identificar: los errores, dificultades y sobre todo las concepciones que tenían los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, sobre el concepto de probabilidad y de esta manera, se obtuvo un referente más, para el diseño de las actividades que se propusieron a los estudiantes en las hojas de trabajo, cuyo objetivo era el de favorecer el desarrollo del Razonamiento Probabilístico en los estudiantes.

Es importante aclarar, que la encuesta diagnostica, las hojas de trabajo y los tres manipulativos de GeoGebra (Lanzamiento de tres monedas, chance y Circuito Probabilístico), son materiales de creación propia y solo han sido utilizado en el presente trabajo de investigación.

3.4.2 Validación

3.4.2.1 Revision por parte de expertos

Una vez diseñadas la encuesta diagnóstica y las hojas de trabajo, fueron presentadas a las siguientes instancias:

- Director del presente proyecto de trabajo de grado.
- Profesores que tengan conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC y en la resolución de problemas matemáticos.
- Profesor encargado del área de Matemáticas, en la Institución Educativa escogida.

Lo anterior, con la intención de perfeccionar y elaborar hojas de trabajo que permitieran dar cuenta del objeto de estudio.

3.4.2.2 Rediseño

De acuerdo a las sugerencias recibidas por parte de las instancias mencionadas anteriormente, en esta fase se realizaron los cambios y ajustes necesarios, debido a que se consideró que tales orientaciones fueron significativas dentro de este proceso para alcanzar los objetivos propuestos.

Otro aspecto, que se tuvo en cuenta para la realización de ajustes dentro de esta propuesta, fue el tiempo y las circunstancias que se presentaron en la Institución Educativa y con los estudiantes.

3.4.3 Uso de la tecnología

El propósito de esta fase, es presentar a los estudiantes participantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra, el tiempo destinado para ello fue de media hora y se realizó en el salón de clase, que estaba dotado con los equipos suficientes y el software requerido.

Adicionalmente, siguiendo a Benítez (2006), dentro de esta fase se implementaron las siguientes acciones: descripción general del software, taller de manejo de tecnología y solución de problemas.

3.4.3.1 Descripción general del software

Se presentaron las características relevantes de cada software, las funciones y comandos principales y la forma de operar estos comandos. Es importante indicar que en cada aplicación de las hojas de trabajo se explicó la funcionalidad del diseño, el uso de los botones y como ingresar cantidades en los cuadros de control.

3.4.3.2 Taller de manejo de tecnología

Se realizará con los estudiantes un taller, de 60 minutos, con el fin de que resuelvan una serie de actividades sobre el manejo básico de cada herramienta. El profesor estará atento a las dudas que se puedan presentar.

3.4.4 Recolección de la información

La fase de recolección de la información, se llevó a cabo en la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, durante el segundo semestre del año en curso, con estudiantes de grado once, tal como se ha mencionado anteriormente.

Dentro de este trabajo, se considera como una fase fundamental, debido a que a partir de esta se analizó y se procesó la información que se obtuvo en cada una de las actividades que conforman la propuesta didáctica.

La información, fue obtenida de las siguientes fuentes:

- La encuesta diagnóstica de entrada.
- Las hojas de trabajo.

Los resultados obtenidos, a través de estos instrumentos, se presentan en el apartado de Análisis (Capítulo IV).

3.4.5 Análisis

Como se mencionó anteriormente, una vez recolectada la información se procedió a realizar el análisis de la misma, en términos cualitativos y cuantitativos. A partir de los resultados obtenidos fue posible dar respuesta a las preguntas de investigación que fueron la guía para la realización de este trabajo y se pudo evaluar el impacto de las actividades que fueron propuestas en el salón de clase a los participantes.

Esta fase del estudio, se desarrolló teniendo en cuenta los referentes propuestos en los capítulos I y II del presente documento, con lo que se evidencio que la resolución de Problemas y el uso de la tecnología, juegan un papel importante dentro del salón de clase, ya que permiten que el estudiante avance dentro de los niveles de Razonamiento Probabilístico.

Capítulo IV

Análisis de resultados.

4.1 Introducción

En este capítulo se realiza el análisis de los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica y en las tres hojas de trabajo, actividades que integran la propuesta didáctica. El análisis comprende un estudio cuantitativo y otro cualitativo, considerados fundamentales para evaluar el progreso de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa.

La estructura de este capítulo, es de la siguiente manera: en un primer momento se muestran, de forma ordenada, los datos recogidos de la encuesta diagnóstica, posteriormente se analiza cada hoja de trabajo presentada a los estudiantes. Para presentar los datos obtenidos, se hace uso de tablas, gráficas y se muestran evidencias de las respuestas de los estudiantes a las actividades propuestas.

Finalmente, se realiza un análisis comparativo de la encuesta diagnóstica y cada hoja de trabajo, a fin de presentar una idea clara del impacto de la propuesta.

4.2 Encuesta diagnóstica

En este apartado se describen las características destacadas de la encuesta diagnóstica y su aplicación, se ejemplifican las estrategias de solución, se plantean los objetivos y las condiciones de aplicación. Adicionalmente, se realiza el análisis cuantitativo y cualitativo de la encuesta diagnóstica.

4.2.1 Presentación de la actividad

La encuesta diagnóstica (Anexo 1), permite visualizar las concepciones que los estudiantes tenían respecto a la no equiprobabilidad, el significado de probabilidad, su habilidad para calcular probabilidades simples, su habilidad para leer gráficas de representación y tablas con contenido probabilístico. Además, se buscaba identificar características en cuanto a las bases,

habilidades y estrategias, que utilizaban al momento de dar respuestas a problemas relacionados con la probabilidad, lo anterior relacionando con el sistema de creencias.

Es preciso mencionar que cada pregunta tiene un propósito esencial, y se pueden agrupar de la siguiente manera:

- a. Sondear características del sistema de creencias: preguntas 1, 2, 3, 5, 9, 14, 15, 16 y 17.
- b. Cálculo de probabilidad simple: preguntas 4, 6, 12, 18a, 18b, 18c y 18d
- c. Cálculo de probabilidad compuesta: preguntas 7 y 10.
- d. Habilidad para leer gráficas de representación y tablas: preguntas 8, 11 y 13.

Es válido aclarar, que la clasificación anterior no es restrictiva, debido a que algunas preguntas se pueden agrupar en dos o más propósitos anteriores.

4.2.2 Objetivos

La encuesta diagnóstica tiene como objetivo identificar las dificultades y el sistema de creencias que influye significativamente en el momento que los estudiantes resuelven problemas en torno al concepto de probabilidad. Adicionalmente, teniendo en cuenta que el trabajo de grado consiste en el desarrollo de una propuesta didáctica, la encuesta diagnóstica fue importante para reconocer los conocimientos previos que poseen los estudiantes respecto al concepto de probabilidad. De esta manera esta encuesta fue el punto de partida y la guía para el diseño de las hojas de trabajo.

4.2.3 Condiciones de la aplicación

La encuesta diagnóstica está compuesta por 18 preguntas, de las cuales trece (13) preguntas son de opción múltiple y cinco (5) preguntas abiertas. Sin embargo, cada pregunta contó con un cuadro en blanco, en el cual se les pedía a los estudiantes que justificaran cada una de sus respuestas, ya fueran preguntas de opción múltiple o no.

La encuesta diagnóstica se contestó de manera individual, en un tiempo de 90 minutos, y fue aplicada a un grupo de grado once de la Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina sede Los Vencedores, descrita en el apartado 3.3.

4.2.4 Análisis cuantitativo

La encuesta diagnóstica está conformada por ocho preguntas cerradas relacionadas con aspectos de la probabilidad, en las cuales también influyen aspectos relacionados con las creencias de los estudiantes (supersticiones, Dios, suerte, agüeros, etc).

En la tabla 6, se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en los doce problemas relacionados con la probabilidad. Para la calificación se tuvo en cuenta que si la respuesta y su justificación eran correctas se calificaba con 1, en caso contrario se calificaba con 0. Adicionalmente, si el estudiante no respondía se insertaba una línea al medio (-).

Tabla 6 *Análisis Cuantitativo de la encuesta diagnóstica.*

Estudiante	N° de pregunta												Total	Porcentaje
	2	4	7	8	10	11	12	13	18					
									a	b	c	d		
1	0	1	0	1	0	1	0	1	-	-	-	-	4	0,333
2	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	4	0,333
3	0	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	1	0,083
4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0,167
5	0	1	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	1	0,083
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	0	0,000
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	3	0,250
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0,083
9	0	0	0	0	0	0	0	1	-	-	-	-	1	0,083
10	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	6	0,500
11	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	6	0,500
12	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	6	0,500
13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0,083
14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	3	0,250
15	0	0	0	0	0	1	0	0	-	-	-	-	1	0,083
16	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0,167
17	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	4	0,333
18	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0,083
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,083
20	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0,250
21	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	6	0,500
22	0	1	0	0	0	1	0	1	-	-	-	-	3	0,250
23	0	0	0	0	0	1	0	0	-	-	-	-	1	0,083
24	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6	0,500
25	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0,167
26	0	1	0	1	0	1	0	1	-	-	-	-	4	0,333
27	1	0	0	0	0	1	0	0	-	-	-	-	2	0,167
28	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	5	0,417
29	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0,167
30	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	3	0,250
Total respuestas acertadas	2	16	0	7	0	22	0	9	7	7	9	6	Promedio	
Total porcentaje de acierto	7%	53%	0%	23 %	0%	73%	0%	30%	23%	23%	30%	20 %	0,236	
Desviación Estándar				0,154				Coeficiente de variación				65,13%		

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en los doce problemas relacionados con la probabilidad.

La media del grupo de estudiantes fue de 0,236 en una escala de 0 a 1, lo cual indica que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes fue del 23,6%.

Luego por medio de la media y la desviación estándar se obtuvo la relación que existe entre ellas, a lo cual se le conoce como coeficiente de variación, según Rustom J, (2012):

El coeficiente de variación (CV), es una medida útil porque mide la dispersión en forma relativa y es posible establecer rangos que determinan niveles de variabilidad poblacional de homogeneidad o heterogeneidad, así por ejemplo CV menores al 5% indican, por lo general, gran homogeneidad, CV de alrededor del 20% corresponden por lo general a una homogeneidad moderada, mientras que mayores al 50% indican gran heterogeneidad. (p.20).

En este caso, el coeficiente de variación para los datos obtenidos fue del 65,13% lo cual indica una dispersión considerablemente alta en la calificación de los estudiantes. Debido a lo anterior pudimos concluir que el grupo es heterogéneo y esto se podía evidenciar debido a que se presentaron diferentes grupos de varios estudiantes con notas de 6/12, 4/12, y 2/12.

A continuación, se presentará una gráfica que describe el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente cada una de las doce preguntas cerradas que se presentaron en la hoja de trabajo.



Figura 7 Gráfica del porcentaje de aciertos en preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).

Como se puede ver el rendimiento de los estudiantes fue bastante bajo. Solo en las preguntas 4 y 11 se obtuvo un porcentaje de eficacia mayor al 50%, sin embargo, en la pregunta 4 solo se supera el 50% de eficacia en un 3%. En el resto de preguntas se obtuvo una eficacia por debajo del 30%, entre ellas se encuentran las preguntas 7, 10 y 12 que tuvieron un porcentaje de acierto del 0%.

Para evidenciar lo anterior, a continuación, se mostrarán las preguntas en las cuales se obtuvo el menor porcentaje de efectividad por parte de los estudiantes y a la par se presentará la explicación de la respuesta correcta de cada ítem.

Tabla 7 Problemas de la encuesta diagnóstica con menor porcentaje de acierto.

Nº de pregunta	Pregunta con porcentaje bajo de aciertos.	Porcentaje de acierto
2	Usted va a comprar una rifa, y le ofrecen el boleto con el número 00. ¿Compraría ese boleto? a. ☐ Si. b. ☐ No.	7%
7	Usted lanza tres veces seguidas una moneda de doscientos pesos, ¿Cuál de las siguientes combinaciones de caras y sello, ocurre con mayor probabilidad?: a. ☐ Dos caras y un sello. b. ☐ Tres caras. c. ☐ Tres sellos. d. ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir. e. ☐ No se puede predecir cuál de los tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir. f. ☐ No sé	0%
10	El diagrama muestra un camino de canica que comienza en un punto etiquado como 'Inicio'. Desde 'Inicio', el camino se divide en dos ramas principales. La rama izquierda tiene dos subdivisiones que terminan en los agujeros A y B. La rama derecha también tiene dos subdivisiones que terminan en los agujeros C y D. Las flechas azules indican la dirección del flujo de la canica. El camino hacia A y D parece más largo o más complejo que el hacia B y C. Supongamos que va a lanzar una canica desde el “inicio”. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?: a. ☐ Que la canica caiga en el agujero A, es igual de probable que caiga en el agujero D. b. ☐ Es más probable que la canica caiga en el agujero C. c. ☐ Todos los agujeros tienen la misma probabilidad. d. ☐ No se puede predecir cuál de los tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir. e. ☐ No sé.	0%

Suponga un sorteo de chance, en el que usted tiene el número 1234.
¿Qué es más probable?:

- 12
- a. ☐ Que salgan las cuatro cifras.
 - b. ☐ Que salgan las tres últimas cifras.
 - c. ☐ Que salgan las dos últimas cifras.
 - d. ☐ Que salga la última cifra.
 - e. ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
 - f. ☐ No se puede predecir cuál de los cuatro eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
 - g. ☐ No sé.

0%

En la pregunta número dos (2) la respuesta correcta es “sí”, se compraría el boleto, considerando que los sorteos del chance son eventos totalmente independientes. En este caso todos los boletos del 00 al 99 tienen la misma probabilidad de resultar premiados y que su probabilidad es $\frac{1}{100}$.

En el caso de la pregunta número siete (7), es necesario determinar el espacio muestral y las combinaciones posibles. Para ello, se puede realizar un diagrama de árbol, como el siguiente:

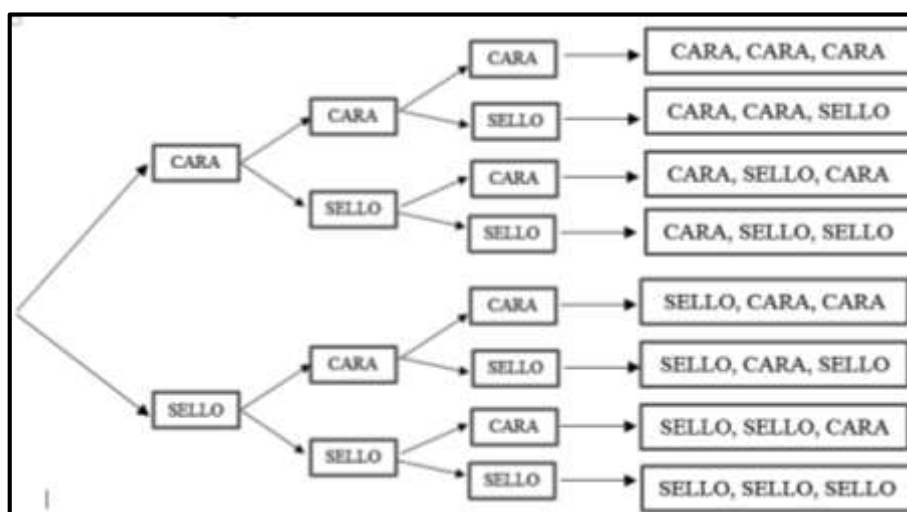


Figura 8 Espacio Muestral del lanzamiento de tres monedas (Elaboración propia).

A partir de este diagrama se puede decir que el espacio muestral consta de 8 resultados posibles, de los cuales tres combinaciones contienen dos caras y un sello, y solo una combinación contiene tres veces cara o tres veces sello.

Por lo tanto, es más probable obtener dos caras y un sello $\left(\frac{3}{8}\right)$, que obtener tres veces cara o tres veces sello $\left(\frac{1}{8}\right)$. En este sentido, la respuesta correcta es el literal “a”.

En lo correspondiente a la pregunta diez (10), la respuesta correcta es que es más probable que las canicas caigan en el agujero C.

Para llegar a esta respuesta, se puede acudir al concepto de probabilidad compuesta, teniendo en cuenta los siguientes valores:

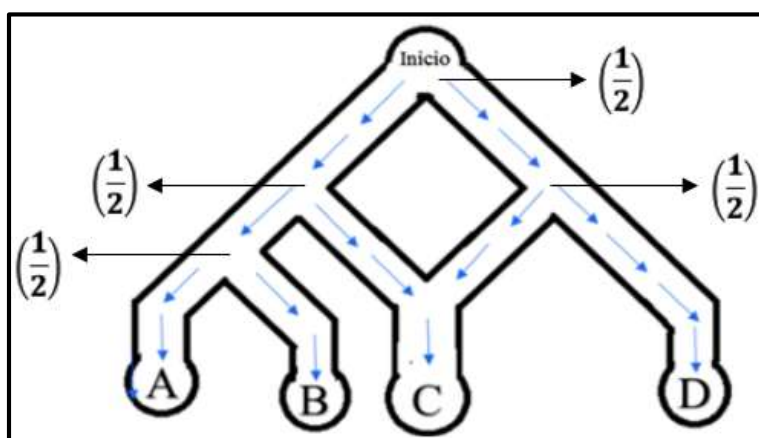


Figura 9 Circuito probabilístico de la encuesta diagnóstica. (Elaboración propia).

Ahora, se calcula la probabilidad de que una canica caiga en cada agujero de la siguiente manera:

A $\rightarrow$ Que la canica caiga en el agujero A.

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)$$

B $\rightarrow$ Que la canica caiga en el agujero B.

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)$$

C $\rightarrow$ Que la canica caiga en el agujero C.

$$P(C) = \left[\left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) = \left(\frac{2}{4} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)$$

D $\rightarrow$ Que la canica caiga en el agujero D.

$$P(D) = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{4} \right)$$

Por lo anterior, se puede concluir que la probabilidad de que la canica caiga en el agujero C, es de $\left(\frac{1}{2} \right)$ y esta probabilidad es mayor a las demás.

Finalmente, en la pregunta doce (12), la respuesta correcta es que es más probable que salga la última cifra. Para justificar la respuesta a esta pregunta, se pueden calcular la probabilidad de obtener cuatro, tres, dos o una cifra, de la siguiente manera:

A $\rightarrow$ Probabilidad de obtener la última cifra.

$$P(A) = \left(\frac{1}{10} \right) = 0,1 = 10\%$$

B $\rightarrow$ Probabilidad de obtener las dos últimas cifras.

$$P(B) = \left(\frac{1}{100} \right) = 0,01 = 1 \%$$

C $\rightarrow$ Probabilidad de obtener las tres últimas cifras.

$$P(C) = \left(\frac{1}{1000} \right) = 0,001 = 0,1 \%$$

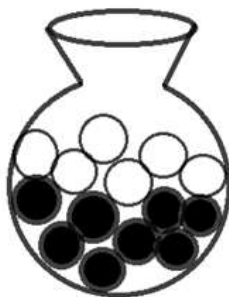
D $\rightarrow$ Probabilidad de obtener las cuatro cifras.

$$P(D) = \left(\frac{1}{10000} \right) = 0,0001 = 0,01 \%$$

Lo anterior para concluir que la probabilidad de obtener la última cifra es mayor que obtener la probabilidad de obtener cuatro cifras.

Por otro lado, también es necesario analizar los problemas que obtuvieron un porcentaje de acierto mayor. Por ende, a continuación, se presentarán los problemas y posteriormente se resolverá cada uno.

Tabla 8 *Problemas de la encuesta diagnóstica con mayor porcentaje de acierto.*

Nº de pregunta	Preguntas con porcentaje alto de aciertos	Porcentaje de acierto										
4	Observa la siguiente bolsa, que contiene pelotas negras y blancas.  Si tomamos simultáneamente (al azar) UNA pelota de la urna. ¿Qué es más probable? a. () Sacar una pelota BLANCA b. () Sacar una pelota NEGRA c. () Los dos eventos anteriores son igualmente probables d. () No se puede predecir e. () No sé	53%										
11	Para tomar la decisión de construir una plaza de mercado en el barrio Los Rosales, la Junta de Acción Comunal desea contar con el apoyo de la mayoría de las familias que allí viven. Para determinar qué quiere la mayoría, realizaron un sondeo en el que preguntaron: "¿Cree usted que sería de beneficio para el sector la construcción de una plaza de mercado?". Los resultados se muestran en la siguiente tabla: <table><tr><th>Respuesta</th><th>Número de familias</th></tr><tr><td>Si</td><td>225</td></tr><tr><td>No</td><td>150</td></tr><tr><td>Está inseguro</td><td>75</td></tr><tr><td>No respondió</td><td>300</td></tr></table> La Junta de Acción Comunal se inclinó por NO construir una plaza de mercado, debido a que los resultados del sondeo muestran	Respuesta	Número de familias	Si	225	No	150	Está inseguro	75	No respondió	300	73%
Respuesta	Número de familias											
Si	225											
No	150											
Está inseguro	75											
No respondió	300											

que:

- a. ☐ El 70% de familias encuestadas no respondió afirmativamente
 - b. ☐ La mitad de familias encuestadas estuvieron inseguras o no respondieron la encuesta
 - c. ☐ El número de familias que respondieron "sí", supera a quienes respondieron negativamente en un 50%.
 - d. ☐ El número de familias que respondieron "no" es el doble de las que están inseguras
 - e. ☐ Ninguna de las anteriores.
 - f. ☐ ¿Otra? ¿Cuál?
-

En el caso de la pregunta cuatro (4), es importante resaltar que a pesar de ser una de las preguntas con mayor porcentaje de respuestas correctas (53%), el porcentaje de acierto sigue siendo considerablemente bajo, teniendo en cuenta la sencillez del ejercicio.

Este problema, se resolvía teniendo en cuenta la cantidad de pelotas negras y blancas que habían dentro de la urna, para posteriormente al hacer la comparación entre las cantidades se pudiera dar la respuesta correcta. El 53% de los estudiantes efectivamente respondió que era más probable sacar una pelota negra, debido a que había mayor cantidad de pelotas negras que de pelotas blancas. Mientras tanto, la gran mayoría del 47% restante de estudiantes, respondió basando sus argumentos en la posición de las pelotas, justificando que era más probable obtener una pelota blanca debido a que en la imagen se veía que estaban en la parte superior de la urna y por ende, al meter la mano la primera que se tomaría sería una de estas. Otro argumento, era que no se podía predecir cuál de estos eventos era más probable debido a que todo dependería de que tan profundo ingresara la mano a la urna.

La respuesta formal de este problema consiste en calcular la probabilidad de que ocurra cada evento, es decir, calcular la probabilidad de obtener una pelota negra y una pelota blanca. Utilizando la fórmula de Laplace se obtiene que la probabilidad de sacar una pelota negra es de $\left(\frac{8}{14}\right)$ y la probabilidad de sacar una pelota blanca es de $\left(\frac{6}{14}\right)$. De ahí, que la opción correcta es que es más probable sacar una pelota negra, es decir el literal “b” del ejercicio.

En la pregunta once (11), se obtuvo el porcentaje más alto de respuestas correctas de la encuesta diagnóstica (73%). Lo anterior pudo ocurrir, debido a que esta pregunta contaba con dos respuestas correctas, las cuales eran los literales “a” y “b”. Sin embargo, el literal más utilizado como respuesta fue el “b” el cual decía que “la mitad de familias encuestadas estuvieron inseguras o no respondieron la encuesta”. En este caso, pudo haber sido la respuesta más elegida debido a que solo consistía en contar la cantidad de familias que estuvieron inseguras o no respondieron y verificar si efectivamente esta cantidad representaba la mitad del total de encuestados.

Por su parte, en el literal “a” se debía hallar el porcentaje de familias que no contestó afirmativamente y verificar que si correspondía con el porcentaje que se muestran en el literal. Lo anterior, deja ver que los estudiantes no tienen claro cómo sacar porcentajes y debido a esto preferían elegir el literal “b” por encima del “a”.

La respuesta formal del problema once (11), se podía llevar a cabo de dos maneras. La primera consistía en tener en cuenta la cantidad de familias encuestadas que no respondieron afirmativamente y la cantidad total de familias encuestadas, estas cantidades eran 525 y 750 respectivamente. Luego multiplicando por 100 el cociente de 525 y 750 se obtiene el porcentaje de personas que no respondieron afirmativamente, el cual efectivamente es 70%, por ende, una de las opciones correctas era el literal “a”.

La segunda respuesta, como ya se mencionó, consiste en sumar la cantidad de familias que estuvieron inseguras o no respondieron y verificar si efectivamente esta cantidad representaba la mitad del total de encuestados, lo cual resulta ser cierto y finalmente la segunda respuesta correcta, y la más elegida, fue la del literal “b”.

Una vez analizados los problemas con mayor y menor porcentaje de acierto, es preciso presentar un resumen de los resultados cuantitativos de la encuesta diagnóstica, con el fin de tener una idea precisa de los resultados obtenidos. Para ello, se organiza la información de las preguntas (2, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 13), en la tabla 9.

Esta tabla, presenta las ocho preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica y el porcentaje obtenido en cada opción posible, señalando, de color azul la respuesta correcta. Adicionalmente, en cada celda se muestra cantidad absoluta y en porcentaje, de estudiantes que eligieron cada opción.

Tabla 9 *Resumen de las ocho preguntas cerradas de la encuesta diagnóstica.*

Nº de pregunta	A	B	C	D	E	F	G	No contestó
2	14	16						
	46,7%	53,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
4	6	16	5	3				
	20,0%	53,3%	16,7%	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
7	1	1	1	13	8	6		
	3,3%	3,3%	3,3%	43,3%	26,7%	20,0%	0,0%	0,0%
8	6	3	7	7	7			
	20,0%	10,0%	23,3%	23,3%	23,3%	0,0%	0,0%	0,0%
10	9	14		3	4			
	30,0%	46,7%	0,0%	10,0%	13,3%	0,0%	0,0%	0,0%
11	7	12	2	4	1		4	
	23,3%	40,0%	6,7%	13,3%	3,3%	0,0%	13,3%	0,0%
12		3	2		13	9	3	
	0,0%	10,0%	6,7%	0,0%	43,3%	30,0%	10,0%	0,0%
13	2	11		4	7	5	0	1
	6,7%	36,7%	0,0%	13,3%	23,3%	16,7%	0,0%	3,3%

Finalmente, teniendo en cuenta lo que plantea Santos (1992) a cerca de la influencia del sistema de creencias en la forma en cómo los estudiantes resuelven problemas en matemáticas. Dentro de este trabajo, también fue importante conocer el sistema de creencias presente en los estudiantes.

Por tal motivo, a través de las preguntas 14 y 15 se cuestionó a cada estudiante, sobre el uso de amuletos y las creencias en supersticiones; los resultados se muestran en la figura 9 y se describen en seguida:

- El 70% de los estudiantes usa amuletos y/o cree en supersticiones.

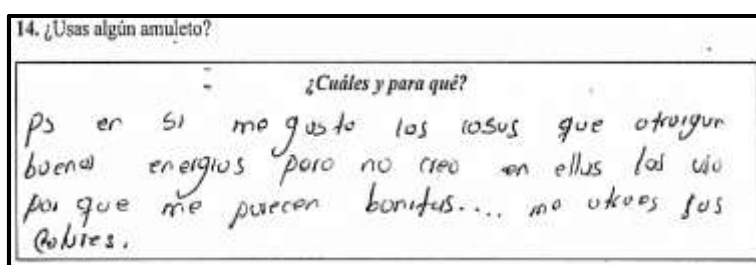
- Sólo el 30% de los estudiantes respondió que no usa amuletos ni cree en supersticiones, a pesar de que en algunos casos las conoce.
- El 46,7% de los estudiantes que participaron en la investigación, usa amuletos.
- El 56,7% de los estudiantes que participaron en la investigación, creen en supersticiones.



Figura 10 Gráfico del uso y creencia de amuletos y/o supersticiones. (Elaboración propia).

A continuación, se muestran algunas explicaciones de los estudiantes respecto al uso de amuletos y la creencia de supersticiones:

Por ejemplo, una estudiante asegura lo siguiente:



Indicando que usa amuletos, pero no cree que estos puedan influenciar positivamente en las decisiones o acciones de las personas.

En cambio, esta estudiante afirma:

14. ¿Usas algún amuleto?

-

¿Cuáles y para qué?

Si, manillas. las uso para darme esperanza en situaciones ya que las personas que me las dieron son importantes para mi o las situaciones en donde las obtuve.

15. ¿Conoces alguna superstición?

-

¿Cuáles y para qué?

Se conocen muchas, es más como para evitar comportamientos con consecuencias falsas o verdaderas de forma exagerada como la de la escalera y pasarla por debajo o no barrer la sala o no barrer los pies.

Por su parte, otro estudiante afirma que:

-

¿Cuáles y para qué?

Uso una camarótera que me regalo mi abuelita y esta bendecida para me proteja de todo los peligros que hay y es muy especial para mi por ser regalo de ella.

En las respuestas anteriores, se puede evidenciar el uso y credibilidad hacia un tipo de amuleto que está relacionado con creencias místicas y religiosas.

Aunque no todos los estudiantes manifiestan usar amuletos o creer en supersticiones, los que aceptan haberlo hecho, tienen justificaciones relacionadas con aspectos místicos y/o mágicos (protección, esperanza, suerte, buenas energías), lo que influye fuertemente cuando resuelven problemas relacionados con probabilidad.

4.2.5 Análisis cualitativo

Para este trabajo no era suficiente realizar un análisis cuantitativo, debido a que ignoraban las experiencias y/o creencias que constituyen los argumentos de una persona. Por lo tanto, en este apartado se realiza un análisis cualitativo, que tiene como propósito fundamental recoger información sobre el sistema de creencias presente en los estudiantes, ya que de acuerdo con Santos (1992), lo que un estudiante piensa acerca de las matemáticas influye fuertemente en la forma en como resuelve problemas en matemáticas.

Para empezar, se realizó una categorización a partir de las justificaciones planteadas por los estudiantes en las respuestas que respondieron en la encuesta diagnóstica. Como punto de partida, para realizar esta categorización se toman como referencia los niveles de razonamiento probabilístico planteados por Benítez y Sánchez (1997).

La categorización realizada, se muestra en la siguiente gráfica:

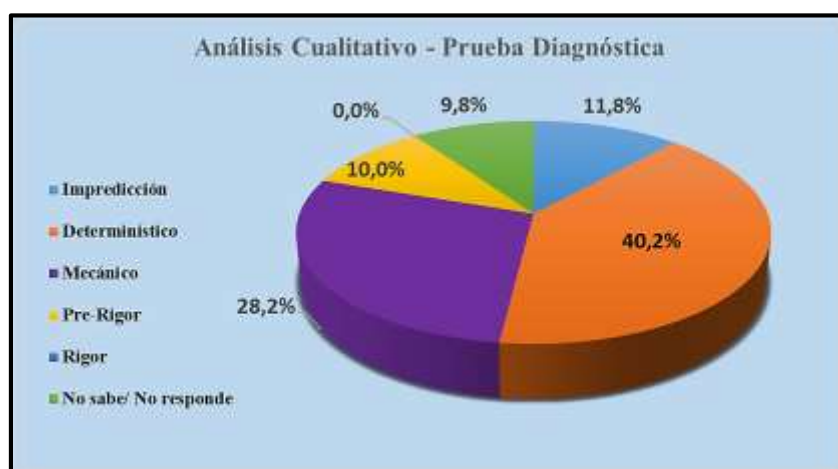


Figura 11 Grafica general del análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.
(Elaboración propia).

De la información obtenida se puede observar que, en el grupo de estudiantes que desarrollaron la encuesta diagnóstica predomina el pensamiento determinista con un 40,2%; seguido de un pensamiento mecánico con un 28,2%; luego sigue el nivel de impredicción con un 11,8, y por último el nivel de Pre – rigor y Rigor que solo alcanzaron un 10% y 0% respectivamente. También resulta importante indicar que un 9,8% de las respuestas fueron “No

sé” o no se respondieron. Este panorama resulta desalentador debido a que refleja un bajo rendimiento de los estudiantes, pero se constituye como una justificación para el desarrollo de la propuesta didáctica.

Es importante mencionar que, al momento de realizar la caracterización, algunas justificaciones se podían ubicar en uno o más niveles de pensamiento, sin embargo, se escogió el nivel predominante. Adicionalmente, se encontró que los argumentos de un mismo estudiante se ubican en diferentes niveles de pensamiento.

Para este análisis solo se consideraron las preguntas cerradas, de las cuales los estudiantes debían presentar el argumento de cada una de las respuestas. A continuación, se presenta una tabla en la que se precisa con mayor detalle los resultados obtenidos en la encuesta diagnóstica, tomando como base los niveles de razonamiento probabilístico.

Tabla 10. *Análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica.*

Pregunta	Niveles de Razonamiento Probabilístico							
	Impredicción	Determinístico			Mecánico	Pre - Rigor	Rigor	No justificó o escogió la opción "No sé"
		Físico	Empírico	Mítico/ Mágicas				
1	16,7%	0,0%	23,3%	46,7%	6,7%	6,7%	0,0%	0,0%
2	3,3%	3,3%	23,3%	10,0%	50,0%	10,0%	0,0%	0,0%
3	0,0%	33,3%	33,3%	30,0%	3,3%	0,0%	0,0%	0,0%
4	6,7%	30,0%	0,0%	3,3%	10,0%	50,0%	0,0%	0,0%
5	0,0%	3,3%	10,0%	60,0%	13,3%	6,7%	0,0%	6,7%
6	33,3%	13,3%	6,7%	13,3%	13,3%	13,3%	0,0%	6,7%
7	36,7%	23,3%	3,3%	3,3%	30,0%	0,0%	0,0%	3,3%
8	20,0%	0,0%	50,0%	0,0%	10,0%	20,0%	0,0%	0,0%
9	6,7%	0,0%	33,3%	43,3%	10,0%	0,0%	0,0%	6,7%
10	3,3%	46,7%	6,7%	0,0%	26,7%	3,3%	0,0%	13,3%
11	0,0%	0,0%	6,7%	0,0%	90,0%	3,3%	0,0%	0,0%
12	33,3%	0,0%	6,7%	0,0%	50,0%	0,0%	0,0%	10,0%
13	3,3%	0,0%	36,7%	0,0%	46,7%	0,0%	0,0%	13,3%
18a	13,3%	0,0%	13,3%	6,7%	26,7%	13,3%	0,0%	26,7%
18b	10,0%	0,0%	13,3%	6,7%	30,0%	13,3%	0,0%	26,7%
18c	10,0%	0,0%	10,0%	6,7%	33,3%	13,3%	0,0%	26,7%
18d	3,3%	0,0%	10,0%	13,3%	30,0%	16,7%	0,0%	26,7%
Total en porcentaje	11,8%	9,0%	16,9%	14,3%	28,2%	10,0%	0,0%	9,8%
		40,2%						

De acuerdo, con el análisis cuantitativo las preguntas con mayor porcentaje de acierto, fueron la once (73%) y la diez (53%). Sin embargo, al clasificar las justificaciones de los estudiantes se obtiene que un 90% son de tipo mecánica y que un 53,4% son de tipo determinístico respectivamente.

Por otro lado, en tabla anterior se puede observar que el nivel de pensamiento de tipo determinístico se divide en tres subgrupos, entre los cuales el nivel pensamiento de determinístico empírico, es el que cuenta con mayor porcentaje de estudiantes que argumentan de esta manera, es decir basándose en eventos que acontecieron en el pasado y que consideran, pueden afectar el resultado de eventos posteriores.

A continuación, se presentarán algunas evidencias de los tipos de respuestas de los estudiantes en la encuesta diagnóstico, en las cuales se puede evidenciar los diferentes niveles de razonamiento probabilístico que se presentaron en la tabla 10.

Para el nivel de impredeción, se muestran los siguientes dos ejemplos:

12. Suponga un sorteo de chance, en el que usted tiene el número 1234. ¿Qué es más probable?:

- a. ☐ Que salgan las cuatro cifras.
- b. ☐ Que salgan las tres últimas cifras.
- c. ☐ Que salgan las dos últimas cifras.
- d. ☐ Que salga la última cifra.
- e. ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- f. ☒ No se puede predecir cuál de los cuatro eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- g. ☐ No sé.

Espacio para justificar

Porque el chance es un juego de azar, y es incierto su resultado..

En la pregunta doce, el 30% de los estudiantes escogió esta opción y un 33,3% de las justificaciones corresponde al nivel de impredeción. En este caso, la respuesta del estudiante es característica de las personas que se ubican en este nivel, debido a que le atribuyen al azar la imposibilidad de predecir el resultado.

Por otro lado, en la pregunta ocho, esta fue la respuesta de otro estudiante:

El centro comercial escogerá al azar a un comprador, con el fin de premiarlo con un bono de \$100000 para el maquillaje del disfraz. De acuerdo con lo anterior, es correcto afirmar que:

- ☐ Un hombre tienen mayor probabilidad de ganar el bono que un joven.
- ☐ Una mujer tiene menor probabilidad de ganar el bono que un hombre.
- ☐ Un joven tiene mayor probabilidad de ganar el bono que un hombre.
- ☐ Un joven tiene igual probabilidad de ganarse el bono que una mujer.
- ☒ No se puede decidir cuál grupo de personas tiene mayor probabilidad de ganar.

Espacio para justificar

Ya que en una o más oportunidades los hombres, mujeres y niños llegaron a comprar más disfraces y es muy impredecible deducir que grupo gana.

En este caso, podemos evidenciar que, aunque el estudiante puede reconocer a través de la gráfica la cantidad de compras realizadas por los grupos de personas, asegura que no se puede predecir el resultado.

Por otro lado, en lo relativo al nivel de pensamiento determinístico, se muestran los siguientes ejemplos:

1. Determinístico – Físico

- ☒ No está arrojando los dados con la suficiente fuerza.
- ☐ La mala energía que producen sus amigos le causa mala suerte.
- ☐ La falta de vidrio en el parque hace que los dados tomen valores que normalmente no tomarían.
- ☐ No sacudió los dados el tiempo suficiente como para obtener buenos números.
- ☐ Sus amigos sacaban buenos números y le dejaban siempre los peores.
- ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

Porque los dados deben ir con una cantidad de fuerza, de lo contrario como los casquitos y en la mejor no se midió bien la fuerza.

3. Usted se encuentra jugando, acompañado de sus amigos, con un parqués que no tiene vidrio. De las cinco partidas que jugó con sus amigos usted no ganó ninguna, un argumento para dicho fracaso podría ser que:

- a. ☐ No está arrojando los dados con la suficiente fuerza.
- b. ☐ La mala energía que producen sus amigos le causa mala suerte.
- c. ☒ La falta de vidrio en el parqués hace que los dados tomen valores que normalmente no tomarían.
- d. ☐ No sacudió los dados el tiempo suficiente como para obtener buenos números.
- e. ☐ Sus amigos sacaban buenos números y le dejaban siempre los peores.
- f. ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

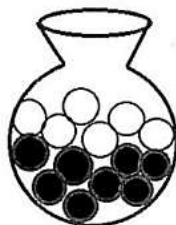
Espacio para justificar

por que el vidrio hace que caiga el número que es pero cuando no esta hay veces que va a salir un número bueno pero por estar así se mueve y cae otro

De acuerdo con la tabla 10, el 97,7% de las justificaciones de los estudiantes en esta pregunta, se encontraban en el nivel de pensamiento determinístico y de ellas, el 33,3% de las justificaciones son de tipo determinismo - físico, como en los casos anteriores, en los cuales los estudiantes afirman que el resultado es alterado, a causa de que el parqués no tiene vidrio, o la fuerza con la que se lanzan los dados. Es decir, les atribuyen una explicación física a los malos resultados obtenidos al lanzar los dados.

De igual manera, la siguiente justificación de un estudiante es considerada de tipo determinismo-físico, debido a que considera que influye la posición de las pelotas dentro de la bolsa.

4. Observa la siguiente bolsa, que contiene pelotas negras y blancas. Si tomamos simultáneamente (al azar) UNA pelota de la urna. ¿Qué es más probable?:



- a. ☐ Sacar una pelota BLANCA
- b. ☐ Sacar una pelota NEGRA
- c. ☒ Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- d. ☐ No se puede predecir
- e. ☐ No sé

Espacio para justificar

para mi serian igualmente probables debido a que hay mas pelotas negras pero las blancas se encuentran en la parte superior

Adicionalmente, contestó que los eventos son equiprobables, y considera que tienen un criterio compensatorio. Es decir, tiene en cuenta que es probable que salga una pelota negra porque hay más, pero también puede salir una pelota blanca porque está encima.

2. Determinismo – Místico/Mágico.

1. Usted va a realizar un chance, con la lotería que juega en la tarde de hoy. ¿Cuál es el criterio para escoger el número del chance?

- a. ☐ El número que le dio el horóscopo de hoy.
- b. ☐ Su número de la suerte.
- c. ☐ La fecha de su cumpleaños.
- d. ☐ Un número que se soñó.
- e. ☒ Con un número al azar.
- f. ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

La lotería es cuestión de suerte, entonces lo dejo a la suerte.

En esta respuesta se puede observar que el estudiante adjudica a la suerte el hecho de poder ganar en la lotería, lo cual es propio del pensamiento de nivel determinístico (específicamente místico/mágicas), en el cual se encuentran clasificados el 40,2% de los argumentos presentados por los estudiantes.

Otro tipo de respuestas que caben en la clasificación anterior son las siguientes:

1. Usted va a realizar un chance, con la lotería que juega en la tarde de hoy. ¿Cuál es el criterio para escoger el número del chance?

- a. ☐ El número que le dio el horóscopo de hoy.
- b. ☐ Su número de la suerte.
- c. ☒ La fecha de su cumpleaños.
- d. ☐ Un número que se soñó.
- e. ☐ Con un número al azar.
- f. ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

Normalmente se escoge el número de la fecha de nacimiento, porque es un número, sagrado por decirlo así, como una buena suerte

9. Una persona tuvo muchas dificultades esta semana: tuvo un accidente de automovilístico, extravió los documentos de identidad, lo echaron del trabajo y se peleó con la novia. ¿Por qué ocurrió esto? Escoja la opción que mejor se ajuste a su respuesta.

- a. ☐ La persona tiene mala suerte.
- b. ☐ La persona está salada.
- c. ☒ Le hicieron brujería.
- d. ☐ Es una maldición del cielo.
- e. ☐ Es una coincidencia.
- f. ☐ No sé.

Espacio para justificar

Ya que le pueden causar daño si no le cae bien a alguien.

5. Una persona se encontró en la calle un paquete que contenía mucho dinero ¿Por qué razón ocurrió el evento? Escoja la opción que mejor se ajuste a su respuesta.

- a. ☒ La persona tiene mucha suerte.
- b. ☐ Es una bendición de Dios.
- c. ☐ La persona se ha portado muy bien.
- d. ☐ Es una mera coincidencia.
- e. ☐ No sé
- f. ☐ Otra. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

Una persona que tiene mucha suerte, puede ganarse o encontrarse cosas como (dinero, celulares etc).

En estas respuestas se puede evidenciar la influencia que los diferentes tipos de creencias, tienen en los estudiantes, respecto a la toma de decisiones en la vida diaria.

3. Determinismo - Empírico:

2. Usted va a comprar una rifa, y le ofrecen el boleto con el número 00. ¿Compraría ese boleto?

- a. ☐ SI.
- b. ☒ No.

Espacio para justificar

Porque he visto que muy pocas veces sale ese número

En esta respuesta se puede evidenciar que el estudiante tiene en cuenta eventos que sucedieron con antelación para poder determinar si compraría un boleto de dos números repetidos, en este caso el 00. Esto se puede afirmar debido a que, para que el estudiante realice tal juicio debe haber tenido experiencias que le hayan hecho pensar que es más difícil, o poco

probable, que “caiga dos veces un mismo número”. Estas características pertenecen al pensamiento de nivel determinístico empírico.

Algo similar, sucede con la siguiente justificación:

1. Usted va a realizar un chance, con la lotería que juega en la tarde de hoy. ¿Cuál es el criterio para escoger el número del chance?

- ☐ El número que le dio el horóscopo de hoy.
- ☐ Su número de la suerte.
- ☒ La fecha de su cumpleaños.
- ☐ Un número que se soñó.
- ☐ Con un número al azar.
- ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

porque siempre pasa con algunas personas de mi familia entonces es como la costumbre

La estudiante asegura que el criterio para escoger el número de chance, se encuentra relacionado con la fecha del cumpleaños, basándose en las experiencias previas con su familia e identificándolas como costumbres.

A continuación se presentan algunas evidencias catalogadas en el nivel mecánico, otro nivel en la escala del razonamiento probabilístico:

7. Usted lanza tres veces seguidas una moneda de doscientos pesos. ¿Cuál de las siguientes combinaciones de caras y sello, ocurre con mayor probabilidad?

- ☐ Dos caras y un sello.
- ☐ Tres caras.
- ☐ Tres sellos.
- ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- ☐ No se puede decir cuál de los tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- ☒ No sé.

Espacio para justificar

creería que se debería hacer un diagrama de árbol para mayor claridad, si es que las hay, pero mientras pienso que sería (a y b.) también la (a) pero de otra forma podría ir: los sellos y una cara

En el ejemplo anterior, se evidencia que el estudiante tiene una idea remota sobre el proceso a seguir, y reconoce que se debería hacer un diagrama de barras, pero a causa de que es un

aprendizaje mecánico, no lleva a cabo su idea y por ende no escoge la respuesta correcta. Este tipo de justificaciones son características de este nivel de pensamiento.

Por otro lado, en el siguiente ejemplo podemos observar el caso de un estudiante que escogió la opción correcta al responder, sin embargo, su justificación se queda corta respecto a la manera con la que se espera que se responda el problema.

Veamos:

11. Para tomar la decisión de construir una plaza de mercado en el barrio Los Riales, la Junta de Acción Comunal desea contar con el apoyo de la mayoría de las familias que allí viven. Para determinar qué quiere la mayoría, realizaron un sondeo en el que preguntaron: "¿Cree usted que sería de beneficio para el sector la construcción de una plaza de mercado?". Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Respuesta	Número de familias
Si	225
No	150
Está inseguro	75
No respondió	300

La Junta de Acción Comunal se inclinó por NO construir una plaza de mercado, debido a que los resultados del sondeo muestran que:

- ☒ El 70% de familias encuestadas no respondió afirmativamente
- ☐ La mitad de familias encuestadas estuvieron inseguras o no respondieron la encuesta
- ☐ El número de familias que respondieron "sí", supera a quienes respondieron negativamente en un 50%.
- ☐ El número de familias que respondieron "no" es el doble de las que están inseguras
- ☐ Ninguna de las anteriores.
- ☐ ¿Otra? ¿Cuál?

Espacio para explicar

Porque fueron menos los votos positivos, por lo cual se crean inseguridades de parte de la junta de Acción comunal

El estudiante logra responder a la pregunta utilizando más, la intuición que los conocimientos básicos de estadística y probabilidad que debería tener. En este caso se presenta el pensamiento de nivel mecánico, debido a que el estudiante identifica cierto concepto, en este caso porcentajes, y logra tomar una decisión teniendo en cuenta lo que conoce, pero estos conocimientos no los tiene muy claros o los maneja a medias, lo cual le impide profundizar más en el momento de responder. Lo que se esperaría es que el estudiante explicara de qué valores resulta ese 70% para que haya certeza de que dicha respuesta es la correcta.

4.2.6 Comentarios finales

Al realizar el análisis cualitativo y cuantitativo de la encuesta diagnóstica se puede decir, de manera general, que:

- a. En la mayoría de las respuestas se encuentra presente el sistema de creencias de los estudiantes, en especial las creencias de tipo físicas o de tipo místicas/mágicas. Por ejemplo, al preguntar sobre un juego de parques sin vidrio (pregunta tres) un 63,3% de los estudiantes considera que el resultado se altera por causas físicas o de la suerte.
- b. El 62% de las respuestas de los estudiantes se ubican en los dos niveles más inferiores de los niveles de Razonamiento Probabilístico. Un gran porcentaje de las respuestas se ubicó en un nivel de pensamiento determinista (40,2%) y el porcentaje restante (11,8%) se ubicó en el nivel de pensamiento de impredeción.
- c. Ningún estudiante tuvo en cuenta el concepto de probabilidad compuesta para resolver las preguntas 7 y 10, relacionadas con este concepto.
- d. Aunque algunas respuestas mencionaban que era necesario realizar alguna representación gráfica, ningún estudiante utilizó representaciones gráficas ni tablas.
- e. Se detectó un sistema de creencias muy fuerte en los estudiantes, un 70% de los estudiantes aseguro creer en las supersticiones y/o usar amuletos.
- f. En términos generales, los estudiantes no tienen una idea clara sobre el concepto de probabilidad.

4.3 Análisis de las hojas de trabajo

En este apartado se describen las características destacadas de las hojas de trabajo y su aplicación. Se plantean los objetivos, las condiciones de aplicación y se realiza el análisis cuantitativo y cualitativo de cada hoja de trabajo. Adicionalmente, se presentan algunos comentarios finales, de las actividades didácticas presentadas a los estudiantes.

Es importante aclarar que debido a la dinámica de los colegios públicos y los eventos programados para los estudiantes de grado once, en algunas sesiones no asistieron todos los estudiantes y no fue posible aplicar en otra ocasión, la hoja de trabajo a los estudiantes que no la realizaron en su momento. Por lo tanto, como se mencionó anteriormente, para los fines de este trabajo se tomaron en cuenta los datos de 30 estudiantes quienes asistieron de manera frecuente a las secciones programadas.

4.3.1. Hoja de trabajo No. 1

4.3.1.1 Presentación de la actividad

En la hoja de trabajo N°1 (Anexo 2) se diseñaron una serie de preguntas que se realizaron a los estudiantes en el momento que interactuaban con un diseño en GeoGebra llamado “Lanzamiento de monedas” (Figura 11). Este diseño simula varias cantidades de lanzamientos (100, 500, 1000, 5000, 10000 y hasta 20000) de tres monedas. Para ello, cada cantidad debe ser escrita en la casilla de entrada de color azul y posteriormente se da clic sobre el botón “Animación” para que GeoGebra simule los lanzamientos.

Para tener una idea del diseño mencionado anteriormente en la Figura 11, se muestra una imagen el diseño presentado a los estudiantes:

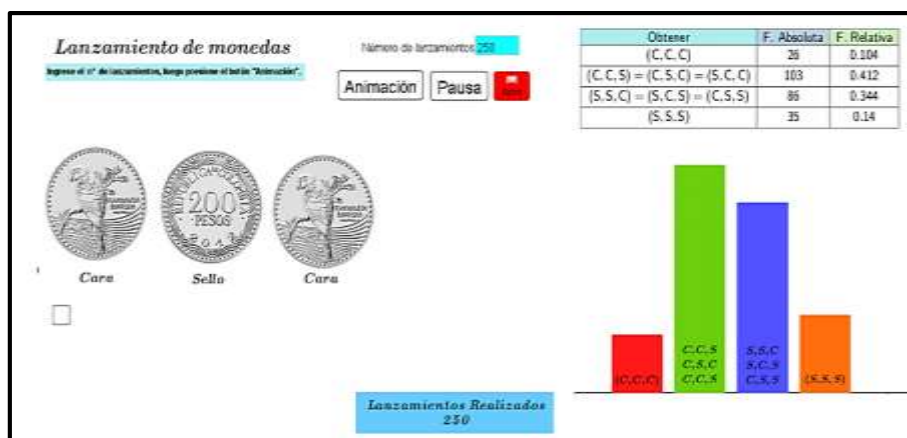


Figura 12. Diseño N°1 “Lanzamiento de monedas”. Elaboración propia.

En la primera parte de la hoja de trabajo se esperaba que los estudiantes observaran con atención la gráficas de barras e identificaran que las combinaciones con mayor probabilidad de salir son: dos caras y un sello o dos sellos y una cara; y que las combinaciones con menos probabilidad de salir son: tres caras o tres sellos. En otras palabras, que identificaran que el lanzamiento de tres monedas no es un evento equiprobable.

Por otro lado, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes debían realizar la misma cantidad de lanzamientos, pero debían centrar su atención en la tabla de frecuencias, con el fin de que observaran la cantidad de veces que sale cada combinación y pudieran evidenciar cual sucede con mayor o menor frecuencia.

Finalmente, en la tercera parte de la hoja de trabajo, se buscaba que los estudiantes relacionaran los resultados obtenidos en las dos partes anteriores y se plantearon dos situaciones problema relacionadas con lo que han observado en el diseño. La primera se trata de una apuesta en la cual se espera que el estudiante, con lo que ha desarrollado en la parte uno y dos de la hoja de trabajo, pueda identificar que la combinación dos caras y un sello es más probable que tres sellos. Por su parte, en la segunda situación, se esperaba que el estudiante lograra identificar que el resultado del lanzamiento de una moneda, no depende de los resultados obtenidos anteriormente.

4.3.1.2 Proposito de la actividad

En la encuesta diagnóstica se presentó un ejercicio que tenía que ver con el lanzamiento de tres monedas (pregunta 7), específicamente consistía en elegir la combinación que era más probable que saliera en cada lanzamiento. El rendimiento en esta pregunta fue deficiente, debido a que ningún estudiante respondió con una justificación acertada esta pregunta y el 36,7% de las justificaciones se clasificaron en el nivel de pensamiento de impredeción.

Por este motivo se pensó en diseñar una actividad con tres monedas que tuviera como propósitos fundamentales:

- Abarcar situaciones equiprobables y no equiprobables.
- Presentar, de manera indirecta, el algoritmo para el cálculo de la probabilidad.
- Combatir creencias erróneas respecto a la imposibilidad de predecir diferentes tipos de situaciones probabilísticas.
- Visualizar que tan factible resulta presentar actividades por medio de las tecnologías computacionales.
- Trabajar con diferentes tipos de representación.

Para cumplir con estos propósitos se presentó en el diseño realizado en GeoGebra, un diagrama de barras, una tabla de frecuencias y un modelo del lanzamiento de tres monedas. Adicional a esto, las preguntas que se presentaron a los estudiantes tenían la intención de encaminarlos, para que pudieran percatarse de las diferentes características que tenía dicha situación.

4.3.1.3 Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo No. 1 (Anexo 2), se aplicó en condiciones equivalentes a la encuesta diagnóstica en lo que concierne a metodología y cantidad de alumnos (ver apartado 4.2.3). Esta aclaración se hace con la finalidad de no ser reiterativos.

En lo relacionado con el tiempo, se aplicó durante dos sesiones de clase (90 minutos en total), de manera individual en un salón de clase y con el uso de tecnología computacional, específicamente con el software dinámico GeoGebra, a través de tablets.

Generalmente, la hoja de trabajo contiene un pequeño instructivo en la parte inicial y una breve descripción de cada parte que conforma el diseño en GeoGebra. El documento se encuentra dividido en tres partes y está conformado por preguntas abiertas en las dos primeras partes, mientras que en la última parte se presenta una pregunta abierta y dos cerradas de opción múltiple y con espacio para justificar la opción elegida.

Es importante tener en cuenta, que la actividad por sí sola no asegura la consecución de los propósitos mencionados, por lo que, se hizo necesario el acompañamiento a la actividad por parte de los encuestadores, con el fin de guiar a los estudiantes a través del diseño de GeoGebra y la hoja de trabajo. De esta manera, los estudiantes pudieron desarrollar individualmente la hoja de trabajo y una vez resuelta pudieron socializar sus respuestas con los demás compañeros para así llegar a un consenso de las respuestas que consideraban correctas.

4.3.1.4 Análisis de resultados

De acuerdo a los propósitos del presente estudio, resulta importante categorizar los argumentos de los estudiantes dentro de los niveles de Razonamiento Probabilístico. Para ello, el análisis de la información se hace desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativa.

4.3.1.4.1 Análisis cuantitativo

En la tabla 11 se presenta el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante. Para la calificación se tuvo en cuenta que si la respuesta y su justificación eran correctas se calificaba con 1, en caso contrario se calificaba con 0. Adicionalmente, si el estudiante no respondía se insertaba una línea al medio (-) y si marcaba la opción “No sé” se insertaba un asterisco (*).

Tabla 11 *Análisis cuantitativo de la hoja de trabajo N° 1.*

Estudiante	Primera Parte		Segunda Parte			Tercera Parte			Total	Porcentaje
	a	b	a	b	c	A	b	c		
1	1	1	0	1	1	1	1	1	7	0,88
2	0	0	1	1	1	0	0	0	3	0,38
3	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
5	1	0	1	1	1	1	0	*	5	0,63
6	1	1	1	1	1	0	1	0	6	0,75
7	0	0	1	1	1	1	0	1	5	0,63
8	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
9	1	0	0	1	1	0	0	0	3	0,38
10	1	0	0	1	1	0	1	1	5	0,63
11	1	1	1	1	1	1	0	0	6	0,75
12	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
13	1	1	1	1	1	1	0	0	6	0,75
14	1	1	1	0	0	1	0	0	4	0,5
15	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
16	1	1	1	1	1	1	0	1	7	0,88
17	1	1	1	1	1	1	1	-	7	0,88
18	1	1	1	1	1	0	1	1	7	0,88
19	0	0	0	1	1	1	1	1	5	0,63
20	1	0	1	1	1	0	0	0	4	0,5
21	1	1	1	1	1	1	0	1	7	0,88
22	1	0	1	1	1	0	1	1	6	0,75
23	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1
24	1	0	1	1	1	1	1	1	7	0,88
25	1	1	1	0	1	1	0	1	6	0,75
26	1	1	-	1	1	1	0	*	5	0,63
27	1	1	1	1	1	0	1	0	6	0,75
28	1	1	1	0	0	1	0	1	5	0,63
29	1	1	1	1	1	1	0	0	6	0,75
30	1	1	1	1	1	1	0	1	7	0,88
Total respuestas acertadas	27	21	25	27	28	22	15	18	Promedio	
Total porcentaje de acierto	90%	70%	83%	90%	93%	73%	50%	60%	0,765	
Desviación Estándar	0,183				Coeficiente de variación				23,93%	

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en las ocho preguntas relacionadas con el diseño en GeoGebra “Lanzamiento de tres monedas”.

De los datos organizados en la tabla anterior, se puede decir que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 76,5%, lo anterior debido a que la media del grupo es 0,765 en una escala de 0 a 1.

Por otro lado, en una escala de 0 a 1, el valor de la desviación estándar es 0,183, lo que indica que el nivel de desempeño de los estudiantes en su mayoría está a 0,183 de la media (0,785).

Finalmente, debido a que el coeficiente de variación es de 23,93% lo que indica una baja dispersión en la calificación del desempeño de los estudiantes y según lo que plantea Rustom J, (2012), se concluye que el grupo es homogéneo moderado.

A continuación, se muestra el porcentaje de acierto de los estudiantes en cada pregunta de la hoja de trabajo N° 1.

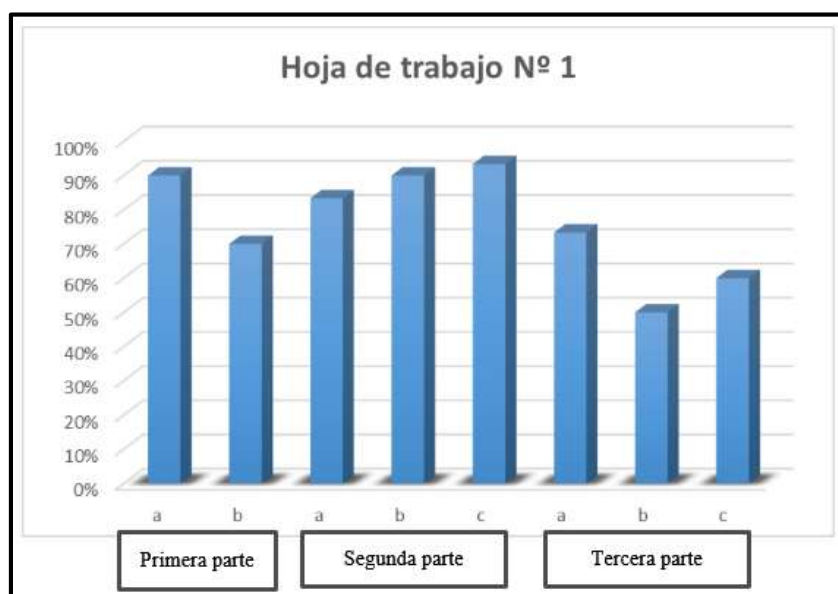


Figura 13. Gráfica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo N°1.
(Elaboración propia).

De la gráfica anterior, se puede decir de forma general que:

- El porcentaje de acierto de todas las preguntas es mayor o igual al 50%.

- La pregunta c de la segunda parte obtuvo el mayor porcentaje de acierto con un 93%.
- La pregunta b de la tercera parte obtuvo el menor porcentaje de acierto igual al 50%.
- La pregunta a de la primera parte y la pregunta b de la segunda parte obtuvieron igual porcentaje de acierto (90%).
- La pregunta c de la tercera parte de la hoja de trabajo es muy similar a la pregunta de 7 de la encuesta diagnóstica, sin embargo, el porcentaje de acierto de la pregunta en la hoja de trabajo fue del 60%, mientras que el porcentaje de acierto en la encuesta diagnóstica fue del 0%. Al realizar la comparación, se puede notar un gran avance en los argumentos de los estudiantes, después de interactuar con el diseño en GeoGebra.

4.3.1.4.2 Análisis cualitativo

En la siguiente gráfica se muestra la clasificación de las justificaciones de los estudiantes en los niveles de Razonamiento Probabilístico planteados por Sánchez y Benítez (1997).



Figura 14. Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 68,3%; seguido del nivel mecánico con un 20,8%; luego los niveles de impredeción y determinístico con un 4,2% cada uno; y por último el nivel de rigor con un 0%. También se puede notar que el 2,5% de las preguntas no fueron justificadas o los estudiantes escogieron la opción “No sé”.

Es importante resaltar que los datos reflejan una mejoría en los niveles de razonamiento en comparación con los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica. A continuación, se presenta a través la tabla 12, de manera más específica, la clasificación en los niveles de razonamiento de las ocho preguntas.

Tabla 12. *Análisis cualitativo de la hoja de trabajo N° 1.*

Parte	Pregunta	Niveles de Razonamiento Probabilístico							
		Impredeción	Determinístico			Mecánico	Pre - Rigor	Rigor	No justificó o escogió la opción "No sé"
			Físico	Empírico	Mítico/ Mágicas				
1	a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	23,3%	76,7%	0,0%	0,0%
	b	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	46,7%	53,3%	0,0%	0,0%
2	a	0,0%	3,3%	0,0%	0,0%	36,7%	56,7%	0,0%	3,3%
	b	0,0%	0,0%	0,0%	3,3%	3,3%	93,3%	0,0%	0,0%
	c	0,0%	0,0%	0,0%	3,3%	3,3%	93,3%	0,0%	0,0%
3	a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	36,7%	63,3%	0,0%	0,0%
	b	20,0%	0,0%	10,0%	10,0%	10,0%	50,0%	0,0%	0,0%
	c	13,3%	0,0%	0,0%	3,3%	6,7%	60,0%	0,0%	16,7%
Total en porcentaje		4,2%	0,4%	1,3%	2,5%	20,8%	68,3%	0,0%	2,5%

Del análisis de la tabla anterior, se puede concluir que:

- Todas las respuestas a las preguntas de la hoja de trabajo N° 1, superan el 49,9% en el nivel de pre-rigor.
- Ninguna justificación de los estudiantes alcanzo el nivel de rigor.

- En algunas respuestas a las preguntas de la segunda y tercera parte de la hoja de trabajo persiste el nivel determinismo, especialmente en las creencias mítico/mágicas. Un ejemplo de esto es la pregunta b de la tercera parte de la hoja de trabajo, la cual tiene un porcentaje de 10% en el sub-nivel mítico/mágico. Sin embargo, es un porcentaje bajo.
- El nivel de impredeción aún está presente en algunas respuestas de los estudiantes. Esto se evidencia en las preguntas b y c de la tercera parte de la hoja de trabajo; cada una con un porcentaje del 20% y 13% respectivamente.

Con el fin de dar cuenta de lo mencionado anteriormente, se muestran algunas evidencias de las respuestas a las preguntas por parte de los estudiantes y que fueron categorizadas los niveles de razonamiento probabilístico: Determinístico, Mecánico y Pre-Rigor.

1. Dentro del nivel determinístico, encontramos la siguiente justificación:

b) Dos amigos apuestan un iPhone Xs Max último modelo que se ganaron en una rifa y resuelven que se quedará con el celular quien al lanzar tres monedas obtenga en dos de tres ocasiones la combinación que ha elegido. Javier eligió la combinación de dos caras y un sello, mientras que Francisco eligió la combinación de tres sellos. Al realizar los dos primeros lanzamientos se obtienen ambas combinaciones, por lo tanto, se deben lanzar las monedas una tercera vez para desempatar el juego. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta?

a. ☒ Javier y Francisco tienen la misma probabilidad de ganar la apuesta.
 b. ☐ No se puede predecir quien de los dos tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
 c. ☐ Entre los dos, Francisco tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
 d. ☐ Entre los dos, Javier tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
 e. ☐ No sé.
 f. ☐ Otra, ¿Cuál?

Explica tu respuesta:

Espacio para justificar

Pues es una apuesta que implica tener suerte.

En este caso la estudiante considera que cualquiera de los dos puede ganar y argumenta que por ser una apuesta implica suerte y no tiene en cuenta los resultados que dejaba ver el diseño de GeoGebra. Esta estudiante no fue la única que respondió de esta manera ya que un 10% de los estudiantes dio una respuesta similar.

2. Nivel de razonamiento probabilístico: mecánico.

Primera parte

1. Realiza 50, 100, 150, 180, 200, 250 y 270 lanzamientos con las monedas y en cada caso observa el diagrama de barras y responde las siguientes preguntas:

a) Escribe las cosas comunes que observaste en el diagrama de barras, después de realizar los lanzamientos indicados.

Espacio para justificar

Uno de los situaciones más notables que hallé en los diagramas fue que las frecuencias absolutas de C,C,C y S,S,S fue inferior a la de las de la mitad.

b) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones de aquellas características que observo en el diagrama de barras, después de realizar los lanzamientos indicados.

Espacio para justificar

El número de lanzamientos.

Esta respuesta puede ubicarse en el nivel mecánico, debido a que en la pregunta a de la primera parte la estudiante manifestó que las barras más bajas del diagrama de barras fueron las de tres veces caras (C, C, C) y tres veces sellos (S, S, S). Sin embargo, en la respuesta b manifiesta que lo anterior se debe a la cantidad de lanzamientos y no reconoce que es debido a que la probabilidad de que salgan estas combinaciones es más baja.

3. Nivel de razonamiento probabilístico: Pre-Rigor.

b) Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones NO elegirías? Y ¿Por qué?

Espacio para justificar

CCC y SSS porque tienen menos posibilidades de salir.

b) Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones NO elegirías? Y ¿Por qué?

Espacio para justificar

No elegiría CCC y SSS porque son la que menos que a cambio las otras tienen mas posibilidades.

b) Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones NO elegirías? Y ¿Por qué?

Espacio para justificar

no elegiría SSS o CCC porque es muy poco probable

De acuerdo con Sánchez y Benítez (1997), en el nivel de pre-rigor se ubican aquellos estudiantes que se alejan radicalmente de la impredeción y de lo determinista. Estos estudiantes dan argumentos matemáticos y son capaces de avizorar resultados. En los casos anteriores los estudiantes manifiestan que no elegiría las combinaciones de (C, C, C) y (S, S, S) debido a que son las combinaciones con menos probabilidad de salir, sin embargo, hace falta que sean capaces de describir el espacio muestral y así la probabilidad exacta.

4. Nivel de razonamiento probabilístico: Pre-Rigor.

c) Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones SÍ elegirías? Y ¿Por qué?

Espacio para justificar

Elegiría las combinaciones S,S,C - S,C,S - C,S,S
Porque según la tabla es la más probable

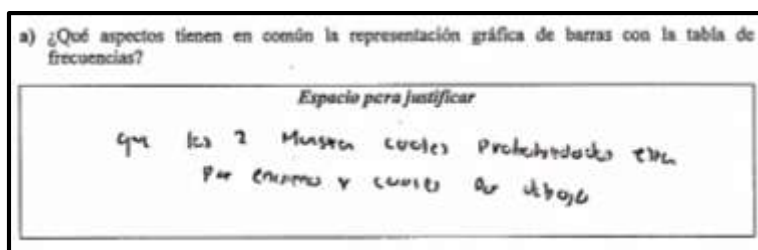
Esta justificación fue clasificada en el nivel de pre-rigor debido a que su argumento muestra avances en la interpretación de las gráficas, en este caso de la tabla de frecuencias, aspecto que se considera de gran importancia en el proceso de Resolución de Problemas y que deja ver que los argumentos de la estudiante se alejan de lo impredecible y determinístico, aunque es claro que falta madurarlos un poco.

5. Nivel de razonamiento probabilístico: Pre-Rigor.

a) ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla de frecuencias?

Espacio para justificar

Bueno en todo el sentido estas representaciones tienen mucho en común, porque dependiendo el valor de la frecuencia así se vea reflejado en la gráfica de barras



En esta pregunta se pretendía que los estudiantes relacionaran dos tipos de representación (la tabla y el gráfico de barras) e identificaran que tienen en común. Las respuestas presentadas anteriormente dejan ver que los estudiantes, encuentran que los datos de la tabla coinciden con lo que muestra el gráfico de barras. Las justificaciones de este tipo se situaron en el nivel de razonamiento de pre-rigor, debido a que utilizan argumentos matemáticos y avizoran algunos resultados. Es importante resaltar que hubo un progreso notable en las justificaciones, ya que un 63,3% de los estudiantes justificó de manera similar.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N° 1.



Figura 15 Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N°1 (Elaboración propia).

De acuerdo a la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas categorizadas en los niveles de razonamiento de impredeción y mecánico. Pasó de un 11,8% a un 4,2% y de un 28,2% a un 20,8% respectivamente.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 4,2%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 68,3%.

Entre los aspectos que no se evidencia mejoría, se encuentran el siguiente:

- Ninguna justificación fue considerada en el nivel de razonamiento de Rigor.

4.3.2. Hoja de trabajo No. 2

4.3.2.1 Presentación de la actividad

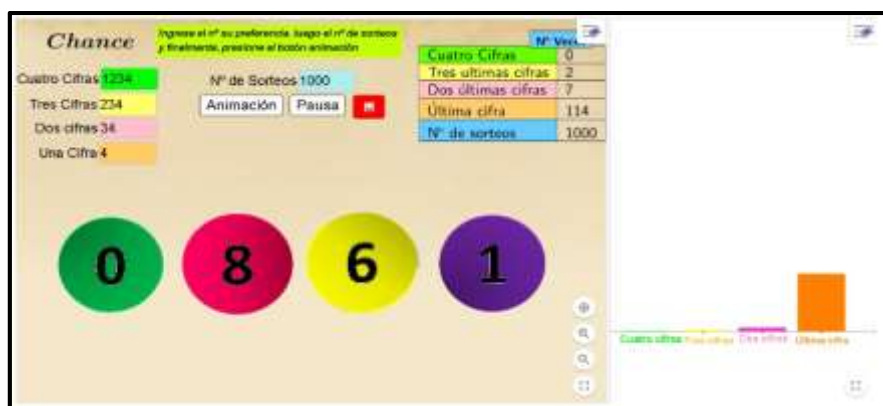
En la hoja de trabajo No. 2 (Anexo 3), se plantean una serie de preguntas que respondieron los estudiantes interactuando con un diseño elaborado en GeoGebra llamado “Chance”, el cual simula diferentes cantidades de resultados obtenidos en sorteos de chance. Para que esto sea posible, se debe escribir la cantidad deseada en una casilla llamada “número de sorteos” y dando clic en “Animación” se simulan los resultados obtenidos en cada sorteo. Por otro lado, los estudiantes también encontrarán la opción de “pausa” y una vez terminada la dinámica para una cantidad, el diseño cuenta con un recuadro rojo para borrar los resultados obtenidos y así ingresar una cantidad diferente de sorteos.

En la primera parte se invitaba a los estudiantes para que pusieran atención en la gráfica y la tabla de frecuencias e identificaran que barras eran las que lograban más altura, a su vez se esperaba que intuyeran que la probabilidad en cada cantidad de cifras era distinta, logrando argumentar porque sucedía este fenómeno, es decir que identificaran que la probabilidad de ganar en el chance variaba respecto a las cantidades de cifras que se esperaban obtener.

La segunda parte de la hoja de trabajo, se realiza con ayuda del mismo diseño elaborado en GeoGebra. En esta ocasión, los estudiantes realizaron una nueva cantidad de lanzamientos y se les presentaron preguntas respecto a que decisiones tomarían, teniendo en cuenta lo que habían acabado de observar en las distintas gráficas. Las preguntas trataban de dejar en evidencia si los estudiantes habían captado que a menor cantidad de cifras era más probable ganar en el chance y que esto no dependía de la suerte o de cuestiones mágicas.

En la tercera parte, al igual que en la primera hoja de trabajo, se presentan situaciones en las que los estudiantes deben responder basándose en lo que vieron durante el desarrollo de las primeras dos partes de la hoja de trabajo. Con estas preguntas se buscaba indagar si las creencias que tenían los estudiantes, antes de la aplicación de las hojas de trabajo, seguían presentes luego de haber interactuado con el diseño.

A continuación, se presenta el diseño con el que se trabajó en la hoja de trabajo N° 2 utilizando la herramienta GeoGebra.



En la imagen se pueden observar cuatro casillas de diferentes colores (verde, amarillo, rosado y naranja) en las que deben ingresar las cifras del número que se haya escogido para los sorteos y en la casilla azul debe ingresarse el número de sorteos que se desean realizar. Luego de esto se da clic en la opción “Animación” para comenzar la simulación de los sorteos, además se cuenta con el botón “Pausa” para detener la simulación en caso de ser necesario.

Luego de que GeoGebra haya realizado cada simulación, se puede observar un recuadro rojo el cual permitirá borrar todos los datos obtenidos en la simulación de cierta cantidad de sorteos, para así poder realizar una nueva cantidad de sorteos sin tomar en cuenta los resultados anteriores.

Se debe tener en cuenta que, tanto en la gráfica como en la tabla de frecuencias, se presentarán la cantidad de aciertos obtenidos, respecto a cada cantidad de cifras del número elegido.

4.3.2.2 Propósitos de la actividad

En la encuesta diagnóstica se presentaron las preguntas 12 y 18, las cuales eran similares a las preguntas: b de la tercera parte y la c de la cuarta parte de la hoja de trabajo No.2. La pregunta No.12, tenía que ver con la preferencia de jugar el chance con diferentes cantidades de cifras, se buscaba que los estudiantes eligieran que era más probable ganar el chance jugando con una cifra. Sin embargo, en esta pregunta el 0% logró argumentar adecuadamente su respuesta.

Por otro lado, en las preguntas 18, se buscaba que los estudiantes indicaran cual era la probabilidad de acertar al chance con una, dos, tres o cuatro cifras. Sin embargo, en promedio solo el 24% de las preguntas fue acertada, teniendo en cuenta que ningún estudiante calculó la probabilidad de forma numérica.

Debido a esto se consideró realizar esta hoja de trabajo utilizando como eje central la actividad del chance, con la cual, se tiene como propósito:

- Que los estudiantes resuelvan un problema en contexto real.
- Que el estudiante logre llegar a conclusiones por medio de la visualización de gráficas y tablas de frecuencia.
- Combatir creencias erróneas que tienen los estudiantes respecto a juegos de azar como el chance.
- Alcanzar niveles de razonamiento probabilístico, superiores al de impredeción.

Es importante resaltar, que la hoja de trabajo se apoya en tres sistemas de representación: una gráfica, una tabla de frecuencias y un modelo de balotas de chance. Con dichas características se busca que el estudiante indague respecto a lo que sucede durante cada sorteo y así se puedan cumplir con los propósitos planteados.

4.3.2.3 Condiciones de aplicación

Debido a que algunos de los estudiantes tenían programado una actividad deportiva, la hoja de trabajo No.2, se aplicó solo a veintidós (22) estudiantes, de los cuales, trece (13) eran mujeres (59.09%) y nueve (9) eran hombres (40.91%), de entre los 16 y 19 años de edad, pero en su mayoría de 17 años. Esta hoja de trabajo se aplicó durante una sesión de 90 minutos, y se realizó de manera individual en el salón de clase con uso de la tecnología computacional y la herramienta GeoGebra.

En general la hoja de trabajo contiene una breve instrucción al inicio y una descripción de cada parte que conforma el diseño de la actividad creada en GeoGebra. Adicionalmente, tiene tres partes, con preguntas abiertas, las cuales cuentan con un espacio para justificar.

Es importante tener en cuenta que la actividad tuvo que estar acompañada de un seguimiento por parte de los encuestadores, debido a que para que esta pudiera tener un desarrollo adecuado se requería establecer una dinámica, de tal modo que los estudiantes avanzaran con mayor rapidez y precisión en la solución de las actividades. Los estudiantes pudieron desarrollar individualmente la hoja de trabajo y una vez resulta pudieron socializar sus respuestas con los demás compañeros para así llegar a un consenso de las respuestas que consideraban correctas.

4.3.2.4 Análisis de resultados

Con el fin de cumplir los propósitos del presente estudio, resulta importante categorizar los argumentos de los estudiantes dentro de los niveles de Razonamiento Probabilístico. Para ello, el análisis de la información se hace desde dos perspectivas: cuantitativa y cualitativa.

4.3.2.4.1 Análisis cuantitativo

En la tabla 13, se presenta el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante. Para la calificación se tuvo en cuenta lo siguiente: Si la respuesta y su justificación eran correctas se calificaba con 1, en caso contrario se califica con 0.

Tabla 13 Análisis cuantitativo de la Hoja de trabajo No.2.

Estudiante	Primera Parte		Segunda Parte			Tercera Parte						
	A	b	a	b	c	a	c.a	c.b	c.c	c.d	Total	Porcentaje
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	6	0,6
2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	9	0,9
3	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	7	0,7
4	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	5	0,5
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
6	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	7	0,7
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
9	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6	0,6
10	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9	0,9
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
13	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	8	0,8
14	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	7	0,7
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
16	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8	0,8
17	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	5	0,5
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
19	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0,2
20	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5	0,5
21	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	9	0,9
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
Total respuestas acertadas	21	16	19	19	20	16	18	14	15	17	Promedio	
Total porcentaje de acierto	95%	73%	86%	86%	91%	73%	82%	64%	68%	77%	0,786	
Desviación Estándar	0,227					Coeficiente de variación					28,92%	

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en las diez preguntas relacionadas con el diseño en GeoGebra “Chance”.

Se puede decir que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 78,6%, lo anterior debido a que la media del grupo es 0,786 en una escala de 0 a 1, de acuerdo a los datos organizados en la tabla anterior.

Por otro lado, en una escala de 0 a 1, el valor de la desviación estándar es 0,227, lo que indica que el nivel de desempeño de los estudiantes en su mayoría está a 0,227 de la media (0,786).

Finalmente, se concluye que el grupo es homogéneo moderado, debido a que el coeficiente de variación es de 28,92% lo que indica baja dispersión en la calificación del desempeño de los estudiantes.

A través de la siguiente grafica se puede observar el porcentaje de acierto de los estudiantes en cada pregunta de la hoja de trabajo N° 2.

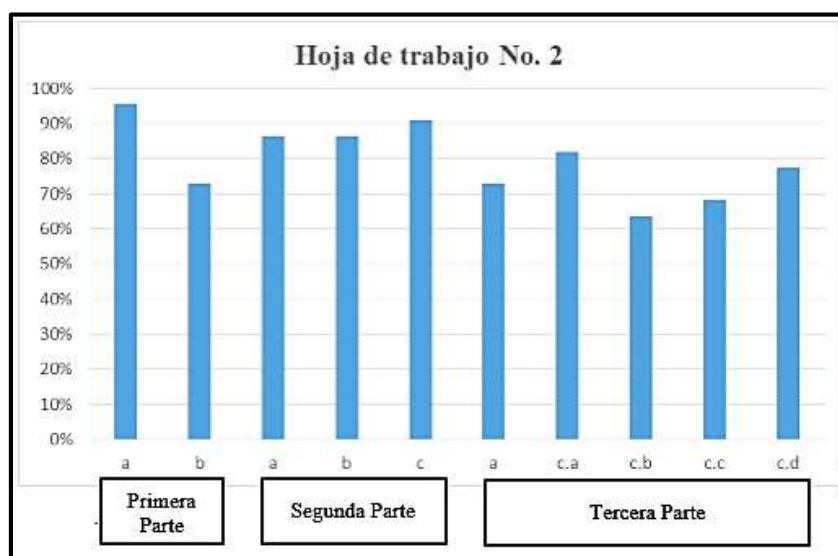


Figura 16 Grafica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo No. 2.

(Elaboración propia).

De la gráfica anterior, se puede decir de forma general que:

- El porcentaje de acierto de todas las preguntas es mayor o igual al 64%.
- La pregunta a de la primera parte, obtuvo el mayor porcentaje de acierto con un 95%.

- La pregunta b del literal c de la tercera parte, obtuvo el menor porcentaje de acierto igual al 64%.
- Las preguntas a y b de la segunda parte obtuvieron igual porcentaje de acierto (86%).
- Se notó un avance en las justificaciones de los estudiantes, lo anterior debido a que en la pregunta c de la segunda parte de la hoja de trabajo, la cual era muy similar a la pregunta 12 de la encuesta diagnóstica, se obtuvo un porcentaje de acierto de 91%, mientras que en la pregunta de la encuesta diagnóstica el porcentaje de acierto fue del 0%.
- Las preguntas a, b, c y d, del literal c de la tercera parte de la hoja de trabajo, son las mismas preguntas a, b, c, y d, del numeral 18 de la encuesta diagnóstica. Sin embargo, el porcentaje de acierto de las preguntas en la hoja de trabajo fueron del 82%, 64%, 68% y 77% respectivamente, mientras que los porcentajes de acierto en la encuesta diagnóstica fueron del 23%, 23%, 30% y 20% respectivamente. Al realizar la comparación, se evidencia un gran avance en los argumentos de los estudiantes, después de interactuar con el diseño en GeoGebra.

4.3.2.4.1 Análisis cualitativo

En la siguiente gráfica se muestra la clasificación de las justificaciones de los estudiantes en los niveles de Razonamiento Probabilístico planteados por Sánchez y Benítez (1997).



Figura 17 Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 53,5%; seguido del nivel mecánico con un 43,5%; luego el nivel determinístico con un 3%; y por último el nivel de rigor y el nivel de impredeción con un 0%. También se puede notar que no hubo ninguna pregunta que no fuera justificada o en la cual se hubiera escogido la opción “No sé”.

Es importante resaltar que los datos reflejan una mejoría en los niveles de razonamiento en comparación con los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica. A continuación, se presenta a través la tabla 14, de manera más específica, la clasificación en los niveles de razonamiento de las diez preguntas.

Tabla 14 *Análisis cualitativo de la hoja de trabajo n° 2.*

Parte	Pregunta	Niveles de Razonamiento Probabilístico							
		Impredeción	Determinístico			Mecánico	Pre - Rigor	Rigor	No justificó o escogió la opción "No sé"
			Físico	Empírico	Mítico/ Mágicas				
1	a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	75,0%	0,0%	0,0%
	b	0,0%	0,0%	10,0%	10,0%	20,0%	60,0%	0,0%	0,0%
2	a	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	30,0%	60,0%	0,0%	0,0%
	b	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	45,0%	55,0%	0,0%	0,0%
	c	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	75,0%	0,0%	0,0%
3	a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	50,0%	50,0%	0,0%	0,0%
	b.a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	60,0%	40,0%	0,0%	0,0%
	b.b	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	60,0%	40,0%	0,0%	0,0%
	b.c	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	60,0%	40,0%	0,0%	0,0%
	b.d	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	60,0%	40,0%	0,0%	0,0%
Total en porcentaje		0,0%	0,0%	2,0%	1,0%	43,5%	53,5%	0,0%	0,0%
			3,0%						

Del análisis de la tabla anterior, se puede concluir que:

- Más de la mitad de las respuestas a las preguntas de la hoja de trabajo N° 2, superan el 49,9% en el nivel de pre-rigor.
- Ninguna justificación de los estudiantes alcanzo el nivel de rigor.

- Solo en la pregunta b de la primera parte y en la pregunta a de la segunda parte, persiste el nivel determinístico con un porcentaje del 10%, especialmente en las creencias mítico/mágicas y empíricas. Sin embargo, es un porcentaje bajo.
- No hay respuestas que se encuentren clasificadas en el nivel de impredeción y en el nivel de rigor.

Con el fin de dar cuenta de lo mencionado anteriormente, se muestran algunas evidencias de las respuestas a las preguntas por parte de los estudiantes y que fueron categorizadas los niveles de razonamiento probabilístico: Determinístico, Mecánico y Pre-Rigor.

1. Nivel de razonamiento probabilístico: determinístico.

b) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las cuales crees que hay barras mas altas que otras.

Espacio para justificar

Las razones para mi serian que para acertar tendrian que tener mucha suerte

En este caso el estudiante le atribuye a la suerte el hecho de que haya barras más altas que otras. Es decir, el estudiante cree que el hecho de que ciertos números, que tienen diferente cantidad de cifras, se obtengan con mayor frecuencia en un chance es solo cuestión de suerte. Por lo tanto, este razonamiento es considerado de tipo mítico/mágico.

2. Nivel de razonamiento probabilístico: mecánico.

c) En GeoGebra ingrese un número de cuatro cifras de su preferencia y realice 20000 lanzamientos. Con los datos que aparecen en la tabla, contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

Espacio para justificar

$\frac{4}{2000}$ Menor probabilidad de acertar

En este caso se puede observar que el estudiante utiliza la regla de Laplace, sin embargo, los datos que utiliza no son los correctos, ya que en lugar de 20000 lanzamientos utiliza 2000 lanzamientos y en lugar de utilizar los datos de la cantidad de veces que acertó en la última cifra utiliza la cantidad de veces que acertó en las cuatro cifras. Por lo tanto, este tipo de razonamiento se considera mecánico.

c. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las tres últimas cifras?

Espacio para justificar

0,001%

En este otro caso el estudiante parece no identificar la diferencia entre probabilidad y porcentaje, además no muestra ningún tipo de procedimiento que haya desarrollado para llegar a ese resultado. Por estas razones se considera un razonamiento de tipo mecánico.

3. Nivel de razonamiento probabilístico: Pre-Rigor.

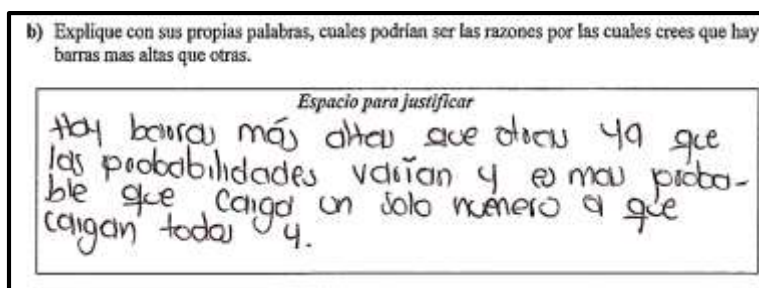
c) En GeoGebra ingrese un número de cuatro cifras de su preferencia y realice 20000 lanzamientos. Con los datos que aparezcan en la tabla, contesta las siguientes preguntas

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

Espacio para justificar

$$\frac{1415}{20000} = 0,07$$
 mayor probabilidad de acertar con la última cifra, en una apuesta chance

En este caso el estudiante toma en cuenta la regla de Laplace para poder hallar la probabilidad de acertar a la última cifra, además reconoce los datos del número favorable de casos y el número de resultados totales que debe identificar en el diseño de GeoGebra. Por estas razones este razonamiento se considera de tipo Pre-rigor.



En este caso el estudiante toma en cuenta la información obtenida tanto en el diagrama de barras como en la tabla de frecuencias y le amerita la diferencia de altura que tienen las barras a la probabilidad que tenía cada cantidad de cifras de salir en cada sorteo. De ese modo el estudiante concluye que es más probable obtener una cifra en un sorteo en lugar de obtener cuatro.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N° 2.

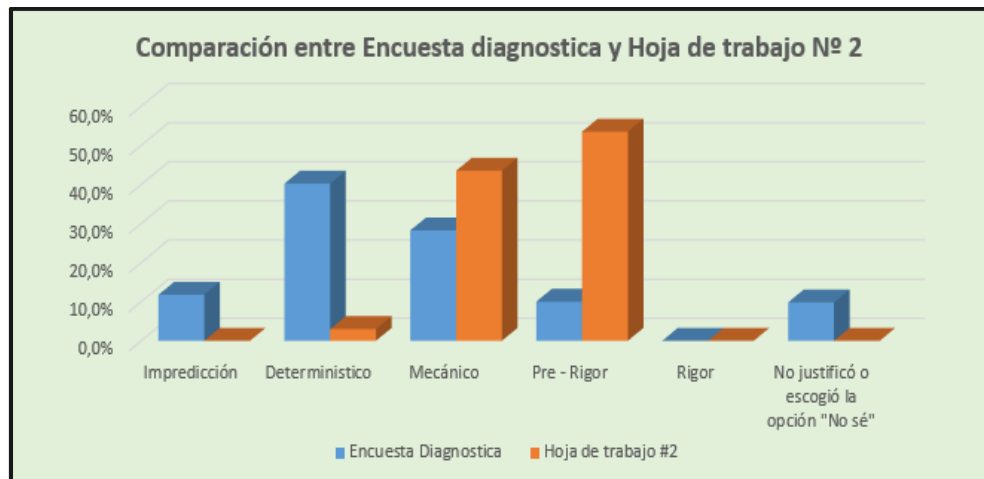


Figura 18 Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo No. 2 (Elaboración propia).

De acuerdo a la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó totalmente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento de impredeción y las respuestas no justificadas o respuestas con la opción “No sé”. Pasaron de un 11,8% a un 0% y de un 28,2% a un 0% respectivamente.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 3%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 53,5%.

Entre los aspectos que no se evidencia mejoría, se encuentran el siguiente:

- Ninguna justificación fue considerada en el nivel de razonamiento de Rigor.
- Aumentaron las respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento mecánico. Pasó de un 28,2% a un 43,5%.

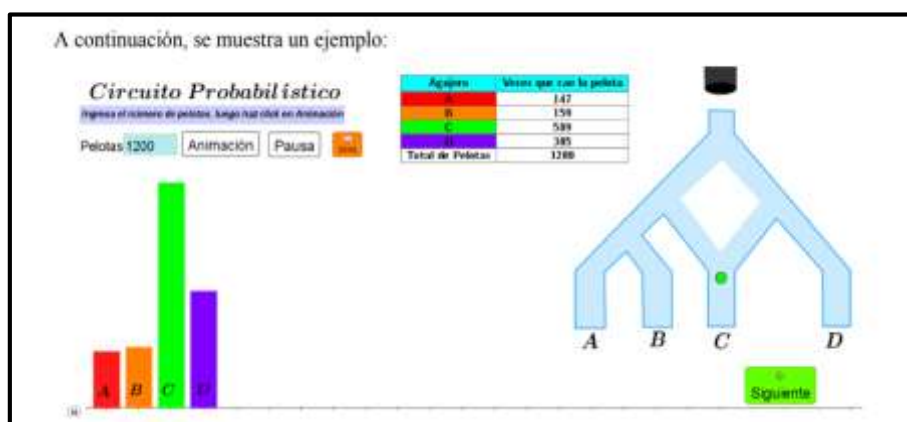
4.3.3. Hoja de trabajo No. 3

4.3.3.1 Presentacion de la actividad

En esta hoja de trabajo se diseñaron una serie de ejercicios que se encuentran divididos en tres partes. Estos ejercicios fueron presentados a los estudiantes, a la vez que interactuaban con un diseño en GeoGebra llamado “Circuito Probabilístico”.

Este diseño simula varias cantidades de lanzamientos de balotas que recorren el circuito presentado. La cantidad de balotas, que se desea lanzar debe ser escrita en la casilla de entrada de color azul y posteriormente se da clic sobre el botón “Animación” para que GeoGebra simule los lanzamientos. Una vez finalizados los lanzamientos se debe dar clic en el botón “Pausa” y posteriormente en la casilla naranja para borrar los datos obtenidos y poder ingresar una nueva cantidad de lanzamientos.

Para tener una idea del diseño mencionado anteriormente en la Figura, se muestra una imagen el diseño presentado a los estudiantes:



En la primera parte de la hoja de trabajo se esperaba que los estudiantes observaran con atención la gráficas de barras e incluso se les propuso, en el primer punto de las actividades, dibujar el diagrama de barras que observaban después de realizar el lanzamiento indicado, para que posteriormente pudieran identificar cual barra era la de mayor altura y por tanto, respondieran a la pregunta de cuál agujero tenía más probabilidad de caer una pelota.

Por otro lado, en la segunda parte de la hoja de trabajo los estudiantes debían realizar la misma cantidad de lanzamientos, pero en esta ocasión debían centrar su atención en la tabla de frecuencias, con el fin de relacionar cada cantidad de balotas que ingresan en cada orificio con las probabilidades de que eso suceda.

En la tercera parte de la hoja de trabajo se les presentaron dos actividades, con el fin de reflexionar basados en lo observado anteriormente y finalmente, se presenta una situación problema en la cual se le presentan distintas afirmaciones relacionadas con los dos circuitos presentados.

4.3.3.2 Proposito de la actividad

En la encuesta diagnóstica se presentó un ejercicio que tenía que ver con el lanzamiento de balotas a través de un circuito (pregunta 10). En el ejercicio se presentaban múltiples

afirmaciones de las cuales se debía elegir la que era verdadera y estaban relacionadas a la probabilidad que tenía la balota de ingresar en cada orificio que estaba al final del circuito. El rendimiento en esta pregunta fue deficiente. Específicamente el 0% de los estudiantes respondieron adecuadamente esta pregunta y el 46.7% de las justificaciones se clasificaron en el nivel de pensamiento determinístico-físico.

Por este motivo se pensó en diseñar una actividad con circuitos que tuviera como propósitos fundamentales:

- Abarcar situaciones equiprobables y no equiprobables.
- Estimular la capacidad que tienen los estudiantes para leer los gráficos de barras y las tablas de frecuencia.
- Combatir el nivel de pensamiento determinístico-físico que está tan presente en los argumentos relacionados a la probabilidad.
- Visualizar que tan factible resulta presentar actividades por medio de las tecnologías computacionales.
- Trabajar con diferentes tipos de representación.

Para cumplir con estos propósitos se presentó en el diseño realizado en GeoGebra, un diagrama de barras, una tabla de frecuencias y un modelo del lanzamiento de balotas a través de un circuito. Adicional a esto, las preguntas que se presentaron a los estudiantes tenían la intención de encaminarlos, para que pudieran percatarse de las diferentes características que tiene esta situación.

4.3.3.3 Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo se aplicó durante dos sesiones de clase (90 minutos), de manera individual en un salón de clase y con el uso de tecnología computacional, específicamente con el software dinámico GeoGebra, a través de tablets.

Generalmente, la hoja de trabajo contiene un pequeño instructivo en la parte inicial y una breve descripción de cada parte que conforma el diseño en GeoGebra. El documento se encuentra dividido en tres partes y está conformado por cuatro preguntas abiertas y una de opción múltiple en la primera parte, dos preguntas abiertas en la segunda parte y dos preguntas abiertas y una cerrada en la tercera parte.

Es importante tener en cuenta, que la actividad por sí sola no asegura la consecución de los propósitos mencionados, por lo que, se hizo necesario el acompañamiento a la actividad por parte de los encuestadores, con el fin de guiar a los estudiantes a través del diseño de GeoGebra y la hoja de trabajo. De esta manera, los estudiantes pudieron desarrollar individualmente la hoja de trabajo y una vez resuelta pudieron socializar sus respuestas con los demás compañeros para así llegar a un consenso de las respuestas que consideraban correctas.

4.3.3.4 Análisis de resultados.

A continuación, se realizará un análisis desde dos perspectivas: La cuantitativa y la cualitativa. En estos análisis se tomarán en cuenta los datos obtenidos en la resolución de la hoja de trabajo No. 3, y se hará énfasis en los argumentos de los estudiantes encuestados.

4.3.3.4.1 Análisis cuantitativo.

En la tabla 13 se presenta el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante. Para la calificación se tuvo en cuenta que si la respuesta y su justificación eran correctas se calificaba con 1, en caso contrario se calificaba con 0. Adicionalmente, si el estudiante no respondía se insertaba una línea al medio (-) y si marcaba la opción “No sé” se insertaba un asterisco (*).

Tabla 15 *Análisis cuantitativo de la hoja de trabajo N° 3.*

Estudiante	Primera parte					Segunda parte		Tercera parte			Total	Porcentaje
	a	b	c	d	e	a	b	a	b	c		
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	0,9
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9	0,9
3	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	7	0,7
4	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	7	0,7
5	1	1	1	1	0	1	0	0	-	0	5	0,5
6	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	7	0,7
7	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	8	0,8
8	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	8	0,8
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	7	0,7
10	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	8	0,8
11	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	8	0,8
12	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	7	0,7
13	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	8	0,8
14	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	8	0,8
15	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	8	0,8
16	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	0,9
17	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	8	0,8
18	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	8	0,8
19	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	8	0,8
20	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9	0,9
21	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	0,9
22	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	0,9
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1
24	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	5	0,5
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	0,9
26	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	0,9
27	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	8	0,8
28	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	7	0,7
29	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	7	0,7
30	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8	0,8
Total respuestas acertadas	28	26	21	29	19	22	23	26	22	21	Promedio	
Total porcentaje de acierto	93%	87%	70%	97%	63%	73%	77%	87%	73%	70%	0,790	
Desviación Estándar	0,112					Coeficiente de variación					14,24%	

Se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en las diez preguntas relacionadas con el diseño en GeoGebra “Circuito Probabilístico”.

En la tabla anterior, se muestra el porcentaje de respuestas correctas de cada estudiante en las diez preguntas relacionadas con el diseño de GeoGebra llamado “Círculo Probabilístico”. Se muestra además que el rendimiento de la mayoría de los estudiantes es del 79%, lo anterior debido a que la media del grupo es 0,790 en una escala de 0 a 1. Se puede notar que sin duda alguna, es mejor que el rendimiento que se tuvo en la encuesta diagnóstica (23,6%).

Por otro lado, en una escala de 0 a 1, el valor de la desviación estándar es 0,112, lo que indica que el nivel de desempeño de los estudiantes en su mayoría está a 0,112 de la media (0,770).

Finalmente se puede observar que el coeficiente de variación es del 14,24% lo que indica una baja dispersión en la calificación del desempeño de los estudiantes y según lo planteado por Rustom J, (2012), se concluye que el grupo cumple con una homogeneidad moderada.

A continuación, se muestra el porcentaje de acierto de los estudiantes, en cada pregunta de la hoja de trabajo N° 3.

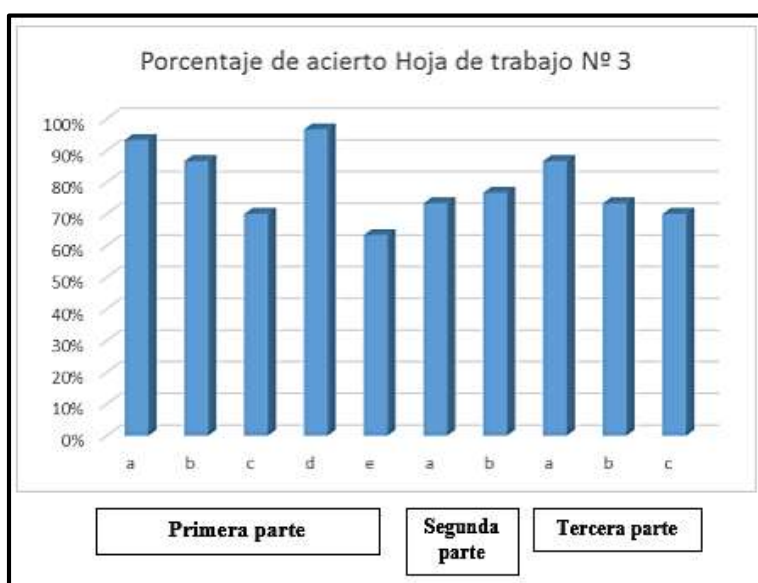


Figura 19 Grafica del porcentaje de aciertos en las preguntas de la hoja de trabajo No. 3.
(Elaboración propia).

De la gráfica anterior, se puede decir de forma general que:

- El porcentaje de acierto de las preguntas es mayor o igual al 60%.

- La pregunta d, de la primera parte obtuvo el mayor porcentaje de acierto con un 97%.
- La pregunta e de la segunda parte, es muy similar a la pregunta 10 de la encuesta diagnóstica. Tomando en cuenta ambos casos, se pudo observar que el porcentaje de acierto de esta pregunta aumentó considerablemente ya que en la encuesta diagnóstica tuvo un porcentaje del 0%, mientras que en esta hoja de trabajo el porcentaje de acierto de la pregunta d, fue del 60%. Al realizar la comparación, se puede notar un avance considerable en los argumentos de los estudiantes, después de interactuar con el diseño en GeoGebra.

4.3.3.4.2 Análisis cualitativo

En la siguiente gráfica se muestra la clasificación de las justificaciones de los estudiantes en los niveles de Razonamiento Probabilístico planteados por Sánchez y Benítez (1997).



Figura 20 Porcentajes de respuestas categorizadas en cada nivel de Razonamiento Probabilístico. (Elaboración propia).

De la anterior gráfica se puede notar que el nivel de pre-rigor tiene mayor porcentaje con un 61,50%; seguido del nivel mecánico con un 23,30%; luego el nivel determinístico con un 12,20% y por último los niveles de rigor e impredicción obtuvieron un 0%. También se puede

notar que el 3,00% de las preguntas no fueron justificadas o los estudiantes escogieron la opción “No sé”.

Es importante resaltar que los datos reflejan una mejoría en los niveles de razonamiento en comparación con los datos obtenidos en la encuesta diagnóstica, ya que por lo menos el porcentaje del nivel de pre-rigor aumentó considerablemente mientras del nivel determinístico disminuyó de una manera muy notable. A continuación, se presenta a través la tabla, de manera más específica, la clasificación en los niveles de razonamiento de nueve preguntas de la hoja de trabajo No. 3.

Tabla 16 *Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 3.*

Parte	Pregunta	Niveles de Razonamiento Probabilístico							
		Impredicción	Determinístico			Mecánico	Pre - Rigor	Rigor	No justificó o escogió la opción "No sé"
			Físico	Empírico	Mítico/ Mágicas				
1	a	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	6,7%	93,3%	0,0%	0,0%
	b	0,0%	3,3%	0,0%	0,0%	33,3%	63,3%	0,0%	0,0%
	c	0,0%	13,3%	3,3%	0,0%	10,0%	73,3%	0,0%	0,0%
	e	0,0%	30,0%	3,3%	0,0%	13,3%	50,0%	0,0%	3,3%
2	a	0,0%	13,3%	0,0%	0,0%	20,0%	66,7%	0,0%	0,0%
	b	0,0%	13,3%	0,0%	0,0%	46,7%	33,3%	0,0%	6,7%
3	a	0,0%	6,7%	0,0%	0,0%	33,3%	56,7%	0,0%	3,3%
	b	0,0%	6,7%	3,3%	0,0%	13,3%	70,0%	0,0%	6,7%
	c	0,0%	13,3%	0,0%	0,0%	33,3%	46,7%	0,0%	6,7%
Total en porcentaje		0,0%	11,1%	1,1%	0,0%	23,3%	61,5%	0,0%	3,0%
			12,2%						

Del análisis de la tabla anterior, se puede concluir que:

- La mayoría de las respuestas a las preguntas de la hoja de trabajo N° 3, superan el 50% en el nivel de pre-rigor.
- Ninguna justificación de los estudiantes alcanzo el nivel de rigor.

- El porcentaje más alto de respuestas que pertenecen al nivel determinístico es del 30%, en este caso las respuestas a la pregunta e de la primera parte. Mientras que las respuestas de tipo mítico/mágicas y empíricas son casi nulas.
- El nivel de impredeción ya no está presente en las respuestas de los estudiantes.

Con el fin de dar cuenta de lo mencionado anteriormente, se muestran algunas evidencias de las respuestas a las preguntas por parte de los estudiantes y que fueron categorizadas en los niveles de razonamiento probabilístico: Determinístico, Mecánico y Pre-Rigor.

1. Dentro del nivel determinístico, encontramos la siguiente justificación:

e) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.

Espacio para justificar

porque queda que al bajar por hay tengo en
mayor de nivel para que sea por hay

En este caso el estudiante le atribuye un aspecto físico al hecho de que la mayoría de las balotas hayan caído en el agujero C del primer circuito que se le presenta. Su argumento es que quizás por una cuestión de un desnivel las pelotas tienden a caer más en ese agujero. Hay que tener en cuenta que está fue la pregunta con más respuestas de tipo determinístico físico.

e) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.

Espacio para justificar

Por que tiene dos entradas entonces dependiendo la velocidad,
con la que vaya, así mismo esta propenso a entrar en
distintos agujeros.

En este otro ejemplo la estudiante también les atribuye una cualidad física a los datos obtenidos respecto a la cantidad de balotas que cayeron en el agujero C. Esta vez el argumento

está relacionado a la velocidad con que la pelota avanza por el circuito, lo cual terminaría por definir el orificio por el que cae la balota.

2. Nivel de razonamiento probabilístico: mecánico.

e) Una persona deja caer una pelota por el circuito AZUL y otra por el circuito VERDE. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- ☐ Que caiga por el agujero C del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☒ Que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☐ La probabilidad de que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es mayor de que caiga por el agujero B del circuito VERDE.
- ☐ No sé.

Espacio para justificar

Porque ambos tienen probabilidades similares.

En este caso se puede observar que el estudiante escogió la respuesta correcta a la pregunta, sin embargo, su argumento no fue lo suficientemente relevante como para sostener dicha elección. El estudiante prácticamente argumenta con la misma afirmación que se le presenta, lo cual no deja claro el porqué de su elección, por lo tanto, se considera su respuesta de tipo determinístico mecánico por tener aún una idea inconclusa de su elección.

3. Nivel de razonamiento probabilístico: Pre-Rigor.

e) Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.

Espacio para justificar

las razones podrian ser, porque la entrada C, tiene mas entradas que los otros dos canales

En este caso la estudiante toma en cuenta la figura y la información que se le está proporcionando para encontrar las características que diferencian a cada uno de los agujeros por los que entran las pelotas. La característica que ella encontró fue la de la cantidad de entradas

que conducen al agujero C, ya que como son dos los caminos que conducen a este entonces es más probable que las pelotas caigan en C, a diferencia de los otros agujeros que solo cuentan con un camino.

e) Una persona deja caer una pelota por el circuito AZUL y otra por el circuito VERDE. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- ☒ (V) Que caiga por el agujero C del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☒ (V) Que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☒ (V) La probabilidad de que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es mayor de que caiga por el agujero B del circuito VERDE.
- ☐ () No sé.

Espacio para justificar

La (B) Porque es lo que en ambos circuitos los resultados se asemejan.

En este caso el estudiante toma en cuenta la información obtenida tanto en el diagrama de barras como en la tabla de frecuencias y compara los dos circuitos que se le presentaron. Al hacer esto puede notar que la cantidad de balotas que entran por los orificios mencionados se asemejan en los diferentes lanzamientos que realiza, por lo tanto, su probabilidad debe ser igual o muy parecida.

Finalmente, se presenta un comparativo global de los resultados obtenidos al realizar la clasificación de cada pregunta en los niveles de razonamiento entre la encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo N° 3.

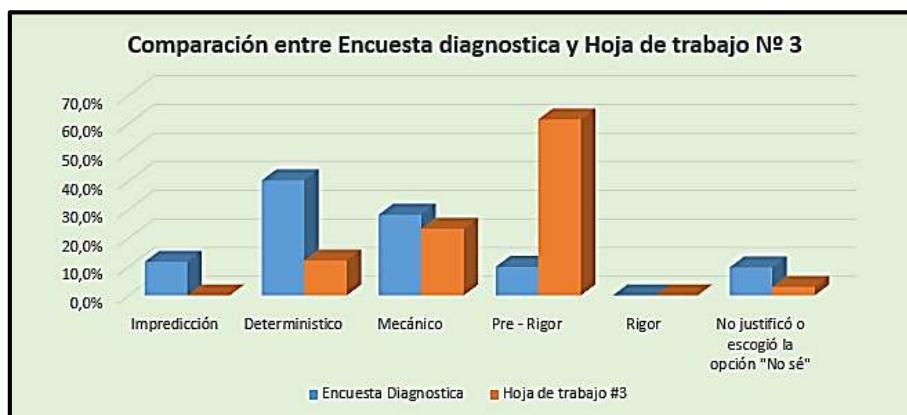


Figura 21 Comparativa entre los resultados de la Encuesta diagnóstica y la Hoja de trabajo No. 3 (Elaboración propia).

De acuerdo a la gráfica anterior se puede decir que se obtuvieron avances importantes en los siguientes aspectos:

- Disminuyó totalmente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento de impredeción, pasando de un 11,8% a un 0%.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento determinístico. Pasó de un 40,2% a un 12,2%.
- Disminuyó notablemente el porcentaje de respuestas categorizadas en el nivel de razonamiento mecánico. Pasó de un 28,2% a un 23,3%.
- Se incrementaron considerablemente las justificaciones de los estudiantes, clasificadas en el nivel de razonamiento de pre-rigor. Pasó de un 10% a un 61,5%.
- Disminuyó la cantidad de estudiantes que no justificaban o no sabían las respuestas de las preguntas. Pasó de un 9,8% a un 3%.

Entre los aspectos que no se evidencia mejoría, se encuentran el siguiente:

- Ninguna justificación fue considerada en el nivel de razonamiento de Rigor.

Capítulo V

Conclusiones y sugerencias.

5.1 Introducción

Al inicio de este trabajo, se plantearon una serie de preguntas y objetivos de investigación, que tienen relación con la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de grado once. Estas preguntas sirvieron como base fundamental para el desarrollo e implementación de actividades. Por lo tanto, es a partir del análisis del rendimiento que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de las actividades, que se da paso a presentar las respuestas de los cuestionamientos que incentivaron el inicio y desarrollo de este trabajo.

Por otro lado, además de responder las preguntas de investigación y presentar algunas conclusiones, se pretende brindar algunas sugerencias pertinentes que puedan servir como guía para investigaciones posteriores que estén direccionadas a esta misma temática.

5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

En el capítulo I (apartado 1.5), se presentaron las preguntas que guiaron el presente trabajo, de las cuales una se considera central (apartado 1.5.1) y tres son consideradas auxiliares (apartado 1.5.2). A continuación, se da respuesta a cada una de ellas:

5.2.1 Respuesta a la pregunta central de investigación

La pregunta central, es la siguiente:

¿Qué importancia tiene la intervención de la mediación computacional de GeoGebra en el desarrollo de los niveles de Razonamiento Probabilístico de estudiantes de grado once de secundaria?

Los adelantos tecnológicos computacionales han sido una característica constante e importante en los últimos tiempos. Estos adelantos han significado un cambio drástico en la

cultura de la sociedad, debido a la versatilidad que han tenido en los diferentes ámbitos del ser humano.

Específicamente, la educación es uno de los ámbitos que se ha beneficiado con el desarrollo de las tecnologías computacionales y es por ello, que su implementación en los salones de clase es promovida en las políticas educativas de muchos países. El MEN (1998) por ejemplo, plantea que la implementación adecuada de tecnologías computacionales facilita el aprendizaje de contenidos matemáticos en los estudiantes, que estas tecnologías amplían el campo de indagación para poder realizar avances en las estructuras didácticas ya planteadas, e incentiva a investigar cada vez más a fondo para poder realizar un uso competente de las tecnologías computacionales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tomando en cuenta la importancia del uso de la tecnología computacional en la educación, en el presente trabajo se contó con el uso del software dinámico GeoGebra, el cual sirvió de gran apoyo para el desarrollo del Razonamiento Probabilístico en estudiantes de grado once, a partir de la resolución de problemas en base a diseños realizados en este software. Algunas de las ventajas relevantes de utilizar la tecnología computacional en este trabajo, se presentan a continuación:

- a) El uso del software dinámico GeoGebra, permitió generar conflictos cognitivos entre los conocimientos previos de los estudiantes, identificados en la encuesta diagnóstica, y los resultados de las simulaciones de los experimentos aleatorios. Este hecho, permite construir nuevos conocimientos, por esta razón se realizó un diseño para cada hoja de trabajo con el fin de propiciar este tipo de situaciones.
- b) Las tecnologías son una herramienta motivacional para los estudiantes, debido a que abarca la resolución de problemas probabilísticos de una manera más lúdica y las simulaciones de situaciones cotidianas para los estudiantes, lo que produce un verdadero interés en dar solución a los problemas que les son planteados.

- c) La gran capacidad de cálculo que posee GeoGebra, permite que se pueda profundizar en la teoría de los grandes números debido a que, al poder realizar una cantidad elevada de simulaciones computacionales, poco a poco la probabilidad frecuencial se aproxima a la probabilidad clásica. Lo anterior, se considera una característica importante debido a que disminuye las creencias erróneas que se presentan con más frecuencia al realizar un número reducido de experimentos aleatorios, es decir, que GeoGebra resulta considerablemente efectivo para disminuir las justificaciones categorizadas en el nivel de pensamiento de determinismo (Físico, determinístico/mágico y empírico).
- d) La facilidad de presentar diferentes tipos de representación de los fenómenos estocásticos y la conversión de una representación a otra, planteada por Duval (1993, 1995) citado en Hitt (2001), es otra de las grandes ventajas de la tecnología computacional, debido a que permite que el estudiante visualice las situaciones desde diferentes tipos de vista. De ahí, que sea más sencillo para el estudiante el realizar comparaciones entre los diferentes tipos de representaciones y que a la vez, puedan encontrar patrones entre las múltiples simulaciones.
- e) En el presente trabajo de grado se evidenciaron avances significativos en el análisis cualitativo de las hojas de trabajo. En la encuesta diagnóstica un elevado porcentaje de estudiantes se ubicaron en los niveles de impredeción y determinismo (11,8% y 40,2%, respectivamente), solo un 10% en el nivel de pre-rigor y un 0% en el de rigor; mientras que en las hojas de trabajo, el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles de impredeción y determinismo son casi nulos. Por ejemplo, en la primera hoja de trabajo solo el 4,2% de estudiantes se ubicó en el nivel de impredeción, al igual que en el nivel de determinismo, mientras que el 68,3% de estudiantes se ubicó en el nivel de pre-rigor.

Resumiendo, se puede observar tras cada evidencia y argumentos presentados, que el uso de la tecnología computacional sirvió como una base sólida para realizar avances importantes en el desarrollo del Razonamiento Probabilístico de los estudiantes que participaron en la investigación.

5.2.2 Respuesta a las preguntas auxiliares

De la pregunta central se desprenden tres preguntas auxiliares las cuales se mencionarán a continuación y posteriormente se dará respuesta a cada una de ellas.

5.2.2.1 Primera pregunta auxiliar

La primera pregunta auxiliar, es la siguiente:

¿Cuál es el sistema de creencias inicial, presente en los estudiantes de grado 11° de un colegio del sector público de Cali, con respecto a la probabilidad de un evento?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario remitirse a los resultados del análisis cualitativo de la encuesta diagnóstica, en el cual se caracterizaron las justificaciones de los estudiantes teniendo en cuenta la categorización del razonamiento probabilístico propuesto por Sánchez y Benítez (1997).

Del análisis realizado se pudo observar que en el grupo de estudiantes que presentó la encuesta diagnóstica predomina el nivel de pensamiento determinista (40,2%) y que a través de las justificaciones se evidencio, en gran manera, el sistema de creencias presente en los estudiantes de grado 11°.

Esto se pudo dar por hecho debido a que, al presentarle situaciones probabilísticas a los estudiantes, estos en su mayoría le atribuían la responsabilidad de ciertos resultados a la suerte, al azar, a Dios, a las condiciones físicas y a sus experiencias previas. Lo anterior, de acuerdo con Batanero (2005), es propio del significado subjetivo, el cual describe la probabilidad como algo basado en las creencias personales y las experiencias de cada individuo.

Adicionalmente, con los resultados de la encuesta diagnóstica se pudo observar que un gran porcentaje de los estudiantes se situó en los niveles más inferiores de la categorización de los niveles de razonamiento probabilístico. Teniendo en cuenta que el 70% de los estudiantes aseguró usar amuletos y/o creer en supersticiones, es probable que la categorización de los

estudiantes en los niveles más inferiores de los niveles de razonamiento probabilístico tenga relación con este hecho.

Finalmente, de acuerdo con Schoenfeld (1985), en cuanto a las dimensiones que influyen en la resolución de problemas se puede concluir que los aspectos del sistema de creencias inicial de los estudiantes, mencionados anteriormente, impactan significativamente el desempeño de los estudiantes.

5.2.2.2 Segunda pregunta auxiliar

¿Cuáles deben ser algunas de las características de las actividades didácticas presentadas a los estudiantes de grado 11º, con el fin de que estas promuevan el desarrollo del Razonamiento Probabilístico?

De manera particular las actividades didácticas deben contar con una cierta cantidad de características que puedan brindar comodidad al momento de que estas sean resueltas. Adicionalmente, éstas características deben pensarse de manera que puedan permitir un análisis efectivo y por ende conllevar a resultados significativos para el presente trabajo.

Desde una perspectiva estructural las actividades didácticas deberían estar orientadas a tomar situaciones que involucren el concepto de probabilidad desde diferentes contextos. Además, se deben considerar actividades en las que se presenten diferentes tipos de representaciones y preguntas de opción múltiple, con espacios en blanco para que los estudiantes puedan justificar cada una de sus respuestas o presentar los procedimientos que tuvieron que llevar a cabo. Estas justificaciones son necesarias para realizar el análisis de las características del tipo de Razonamiento Probabilístico de cada estudiante.

De manera general las actividades deben cumplir con una serie de procesos e instrumentos para poder desarrollar el Razonamiento Probabilístico del estudiante. Por lo tanto, desde una perspectiva metodológica se deben tener en cuenta algunos aspectos mencionados en el tercer capítulo del presente trabajo. Entre los aspectos se mencionan los siguientes:

- a) **Condiciones de ejecución:** Lo primero a tener en cuenta corresponde con el aval que deben brindar los lineamientos curriculares propuestos por el MEN (1998), para que de esta forma se pueda asegurar que el contenido presente en las actividades didácticas cumpla con los requerimientos exigidos.

Se debe tener en cuenta el tiempo que será requerido para realizar cada una de las actividades propuestas y el espacio, a fin de establecer si se realizarán trabajos individuales o se conformarán equipos. Finalmente resulta conveniente realizar la socialización de las diferentes respuestas que dan los estudiantes, con el fin de generar espacios de discusión que funcionen como métodos para esclarecer ciertas dudas que puedan permanecer aún en los estudiantes.

- b) **Instrumentos:** Para la implementación de las actividades didácticas son necesarios un conjunto de instrumentos que brinden facilidades en la recolección y análisis de los datos. Estos instrumentos pueden ser: Encuesta diagnóstica, hojas de trabajo y diseños de software dinámicos.
- c) **Fases de trabajo:** Es importante aclarar que los instrumentos no son efectivos por si solos, sino que es necesario contar con una secuencia didáctica acertada, y se describe a continuación:
- *Diagnóstico:* Esta etapa trata, como su nombre lo indica, de realizar un examen diagnóstico para poder conocer los conocimientos probabilísticos previos que poseen los estudiantes, de manera que esto permita identificar concepciones erróneas que los hayan acompañado hasta el momento. Adicionalmente, puede ayudar a conocer las habilidades que los estudiantes poseen respecto a diferentes aspectos estadísticos y probabilísticos, y en caso de encontrar deficiencias en ciertas habilidades, la encuesta puede servir como un punto de partida para que estas dificultades sean tratadas en las hojas de trabajo.
 - *Exploración:* En esta parte se deben diseñar hojas de trabajo con situaciones centradas en contextos cotidianos para los estudiantes y que las preguntas promuevan en el estudiante el

desarrollo de habilidades que le permitan argumentar ampliamente mientras utiliza conceptos probabilísticos. Cada hoja de trabajo se divide en tres partes: la primera, busca instruir al estudiante para que realice ciertos procedimientos por medio del diseño de software dinámico que corresponde a cada hoja de trabajo. En la segunda parte se busca incentivar al estudiante para realice comparaciones entre las gráficas y las tablas de frecuencia de tal forma que pueda concebir por su propia cuenta la relación que existe entre ellas y pueda explicar adecuadamente el porqué de las características constantes de los datos obtenidos. Finalmente, en la tercera parte se presentan problemas que representan situaciones cotidianas, para los cuales el estudiante deberá presentar soluciones partiendo de los conceptos que, se supone, ha adquirido en las dos partes previas de las hojas de trabajo.

Cabe resaltar, que cada diseño cuenta con representaciones gráficas y tablas de frecuencia, por medio de las cuales el estudiante responderá múltiples interrogantes basándose en los datos obtenidos en cada representación y tabla presentada.

- *Institucionalización y comunicación:* Finalizada la aplicación de las hojas de trabajo se realiza una breve socialización para compartir las diferentes concepciones que han quedado en cada estudiante, de manera que se pueda llegar a un acuerdo mutuo para elegir las respuestas correctas y aclarar posibles dudas restantes.

En conclusión, desde los resultados de este trabajo de grado, se puede decir que para lograr un desarrollo significativo en el Razonamiento Probabilístico de los estudiantes es importante partir de una encuesta diagnóstica que permita saber en qué condiciones se encuentran los estudiantes, es decir, que permita identificar dificultades y creencias erróneas. Luego, los resultados obtenidos en la encuesta diagnóstica, permitirán diseñar y aplicar hojas de trabajo que estén encaminadas a generar conflictos cognitivos en los estudiantes.

Finalmente, es recomendable que el desarrollo de las hojas de trabajo esté acompañado del uso de tecnología, debido a que como lo han reflejado esta y anteriores investigaciones, las herramientas computacionales permiten, entre tantas virtudes, realizar grandes números de experimentos aleatorios y se pueden presentar diferentes representaciones a los estudiantes.

5.2.2.3 Tercera pregunta auxiliar

¿Cuál es la importancia de las múltiples representaciones estadísticas en la solución de problemas de probabilidad en estudiantes de grado once de secundaria?

Teniendo en cuenta que Hitt (2001) plantea que en la resolución de Problemas las representaciones son consideradas como el corazón de las matemáticas, en este trabajo se presentaron tareas a los estudiantes que implicaban la utilización y análisis de diferentes sistemas de representación, las cuales promovían la articulación coherente entre representaciones.

Lo anterior fue posible debido a que la herramienta GeoGebra favoreció la construcción del concepto de probabilidad, ya que permite el uso de diferentes sistemas de representación, tales como: tablas de frecuencia, gráficos de barra, histogramas, registro numérico y algebraico, entre otros. Lo que permitió que el estudiante pudiera interpretar y evidenciar algunos aspectos de probabilidad por través de diferentes registros, en pocas palabras, el conocimiento y manejo adecuado de estas representaciones fue importante para que el estudiante contara con un amplio abanico de oportunidades que le permitiera comprender conceptos probabilísticos con mayor facilidad.

Adicionalmente, el interpretar las diferentes representaciones le permitió al estudiante entender las situaciones presentadas, encontrar diferentes caminos para solucionarlos e identificar las relaciones existentes entre los diferentes tipos de representación presentados en cada caso.

Por otro lado, teniendo en cuenta a Moreno (2002), quien considera que los sistemas de representación se pueden considerar herramientas de mediación y pueden ser vistas de dos maneras: herramientas de ampliación (permite ver, amplificado, lo que no puede ser visto a simple vista), y herramientas de re-organización cognitiva (permite ver lo que no era posible sin la herramienta), se puede decir que la importancia de los sistemas de representación radica en que puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por

la presencia de la herramienta (sistemas de representación) y se generen efectos de reorganización conceptual.

Finalmente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el análisis de las hojas de trabajo y las justificaciones de los estudiantes, en las cuales se debía evidenciar el manejo de los registros de representación, se puede decir que el uso de diferentes tipos de representación influye significativamente en el proceso de resolución de problemas de probabilidad y en el desarrollo del razonamiento probabilístico del estudiante. Además, se puede decir que cuando un estudiante logra asociar diferentes representaciones con la competencia de resolución de problemas (Benítez, 2006); cuando gestiona estrategias heurísticas, pasando de una representación a otra para entender y dar solución a una situación presentada (Polya 1945; Schoenfeld, 1985) y cuando, según Schoenfeld (1985), reconoce, identifica y vincula los sistemas de representación con un mismo ente matemático, entonces adquiere verdaderamente un concepto, en este caso, de probabilidad.

5.3 Sugerencias para investigaciones posteriores

En el desarrollo de este trabajo surgieron interrogantes que estaban por fuera del alcance del objetivo planteado. Por lo tanto, se presentan a continuación y se sugieren para trabajos posteriores:

- ¿El sistema de creencias del estudiante se encuentra relacionado con el nivel socioeconómico al que pertenece?
- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del Razonamiento Probabilístico del estudiante, si se realiza un diseño de secuencia didáctica que también incorpore material manipulativo (Dados, monedas y otros juegos de azar)?
- Sería interesante, realizar una investigación similar a la presente, con poblaciones de diferentes culturas, por ejemplo, indígenas, afrodescendientes, mestizos. ¿Es posible que el sistema de creencias que se ha caracterizado en este trabajo, permee la cultura?

Adicionalmente se presentan algunas sugerencias:

- En caso de trabajar con grados pertenecientes a la educación media es muy importante tener en cuenta los tiempos y las dinámicas de la Institución Educativa.
- Para el análisis de los datos se recomienda tomar una muestra de la población de máximo 20 estudiantes.
- Se considera importante realizar un pilotaje a los instrumentos diseñados.
- Es conveniente realizar la revisión y configuración de los computadores o aparatos tecnológicos, por medio de los cuales se presentarán los diseños, antes de la aplicación de la secuencia didáctica. Lo anterior, con el fin de evitar contratiempos.
- El lenguaje usado en los instrumentos de recolección de datos y en las secciones de aplicación debe ser acorde al grado de escolaridad.

5.4 Reflexiones finales

En el desarrollo de este trabajo, se evidenció que el uso de los diferentes sistemas de representación, en el salón de clase y en el diseño de propuestas, juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, ya que de acuerdo con Rivas (2009), el problema es que la mayoría de profesores de matemáticas, tienden a centrar su atención y aceptar como único medio de representación, el sistema simbólico algebraico (considerado el más formal), y pocas veces se hace explícita la relación entre las distintas formas de representación de los conceptos matemáticos, lo que genera que el aprendizaje adquirido por los estudiantes sea deficiente.

Por otro lado, se notó que las herramientas computacionales son de gran ayuda para los docentes y estudiantes, debido a que permiten evidenciar aspectos que no eran posible sin la herramienta, en otras palabras, se habla de una herramienta de re-organización cognitiva, tal como lo expresa Moreno (2002). Por ejemplo, las herramientas computacionales, entre tantas

virtudes, permiten realizar una gran cantidad de experimentos aleatorios con una velocidad asombrosa, y abordar lo que se conoce, como la Ley de los grandes números.

Finalmente, aunque no se trata del objetivo principal de este trabajo, y teniendo en cuenta la investigación de Sánchez y Benítez (1997) y Mera y Santana (2018), y lo que plantea Bachelard. (1987), es importante mencionar con visos de generalización, que el sistema de creencias de los estudiantes, podría constituirse como un obstáculo epistemológico. Lo anterior, debido a que a pesar de la instrucción a lo largo de su proceso educativo, los resultados de la encuesta diagnóstica, en un principio estaban relacionado con aspectos físicos, empíricos o mágicos.

Referencias

- Alarcón Bortolussi, J., Arriaga Coronilla, A., y Barrón Rodríguez, H. (2001). Nociones de probabilidad. En *Libro para el maestro: matemáticas: secundaria* (pp. 329–363). México: SEP, Subsecretaría de Educación Básica y Normal, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. Recuperado de: <https://www.uv.mx/personal/grihernandez.h>
- Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.
- Barrera, F., y Santos Trigo, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento, 166–185. Recuperado de: <https://www.uaeh.edu.mx/investigacionh>.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 8(3), 247–263. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/9683/1/Batanero2005Significados.pdf>
- Batanero, C. (2009). Retos para la Formación Estadística de los Profesores. *II Encontro de Probabilidade E Estatística Na Scola.*, 23. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~batanero>
- Benítez, D. (2006). *La importancia que tiene percibir la estructura superficial o profunda de los problemas matemáticos en el proceso de solución. (Trabajo de Doctorado)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N, México.
- Benítez, D. (2017). *La Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas. (Publicación interna)*. Cali, Colombia.
- Benítez, D., Mederos, O. B., Londoño, N., y Ruiz, L. M. (2010). El Desarrollo de Competencias Disciplinarias de matemáticas en el Ámbito Escolar. *Memorias Tercer Encuentro Nacional de Profesores de Ciencias Exactas Y Naturales. “Las TIC En El Proceso de Aprendizaje,”* 6–22.

- Bennet, D. J. (2000). *Aleatoriedad*. (G. F. y M. Fierro, Trans.). Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Bourdieu, P. (2005). *Capital cultural, escuela y espacio social*. (I. Jiménez, Trans.) (6a ed.). México: Siglo XXI.
- Conejo, L., y Ortega, T. (2013). *Educación matemática*. (Vol. 25). Editorial Santillana.
Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx>
- Cotic, N. (2014). Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. GeoGebra como puente para aprender matemática, (pág. 4). Buenos Aires: OEI.
- Díaz, J., Batanero, M. del C., y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., y Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Educación y Educadores*, 19(3), 315–338. <https://doi.org/10.5294/edu.2016.19.3.1>
- Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática, en Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 165–176). Universidad de Granada, Granada.
- ICFES. (diciembre de 2016). Guía de interpretación y usos de resultados del examen Saber 11°. Bogotá D. C.
- Inzunza, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista mexicana de investigación educativa*, 15, 423-452.

- Inzunsa, S. (2014). Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. *GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad*, (pág. 4). Buenos Aires: OEI.
- López-Klein, L. (2012). Probabilidad. En *Bioestadística* (pp. 15–29). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103. Recuperado de: <https://www.mineducacion.gov.co>.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp.46–95). Recuperado de: <https://www.mineducacion.gov.co>.
- Mera, B. y Santana, A., (2018). *La mediación computacional de Geogebra en el desarrollo de los niveles de razonamiento probabilístico en estudiantes de noveno grado (Trabajo de grado)*. Universidad del Valle, Colombia.
- Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ed.), *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia*. (pp. 81–86). Bogotá, Colombia.
- Moreno, L., (2011, Junio). ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación matemática?. Trabajo presentado en *xiii conferencia interamericana de educación matemática*, Universidade federal de Pernambuco. Recife, Brasil.
- Rivas, A. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria (Tesis de Maestría)*. Universidad Autónoma de Coahuila, México.

- Rustom J, A. (2012). Unidad 1. Estadística Descriptiva. En A. Rustom J, Estadística descriptiva, probabilidad e inferencia. Una visión conceptual y aplicada. (págs. 9-31). Santiago, Chile: Departamento de Economía Agraria, Universidad de Chile. Recuperado de: <http://www.agren.cl/estadistica>
- Sánchez, E., y Benítez, D. (1997). Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos. *Actas de Las Undécima Reunión Latinoamericana de Matemáticas Educativa*, 11, 157–161. Recuperado de: <http://clame.org.mx/uploads/actas/alme 11.pdf>
- Santos, M. (1992). Resolución de Problemas: El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 4(agosto), 16–23.
- Santos Trigo, M. (1997). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Recuperado de: <https://www.uv.es/puigl/MSantos>
- Schoenfeld, A. H., & Conner, E. (1992). Problem solving, metacognition, and sense-making en Mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan. Recuperado de: <http://hplengr.engr.wisc.edu/Math>
- Tamayo, L. G. (2008). Teoría de probabilidades. En *Estadística* (pp. 207–245). Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas* (pp. 61–70). Bogotá, Colombia. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co>.
- Zuñiga, F. (2017). *Implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problema para promover la comprensión de la noción de aleatoriedad. (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle, Colombia



Anexo No. 1: Encuesta diagnóstica
Institución Educativa Pedro Antonio Molina
Sede: “Los Vencedores”
Área de Matemáticas



Estudiante: _____

Edad: _____ **Grado:** _____ **Fecha:** _____

Importante: *El presente documento es parte de un proyecto de investigación, que tiene como fin caracterizar el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once. Por lo tanto, te sugerimos que:*

- *Leas detenidamente cada pregunta.*
- *Justifique cada respuesta en el espacio en blanco.*
- *En caso de que no sepas, selecciona la opción: No sé.*

1. Usted va a realizar un chance, con la lotería que juega en la tarde de hoy. ¿Cuál es el criterio para escoger el número del chance?
- a. ☐ El número que le dio el horóscopo de hoy.
 - b. ☐ Su número de la suerte.
 - c. ☐ La fecha de su cumpleaños.
 - d. ☐ Un número que se soñó.
 - e. ☐ Con un número al azar.
 - f. ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

2. Usted va a comprar una rifa, y le ofrecen el boleto con el número 00. ¿Compraría ese boleto?
- a. ☐ Si.
 - b. ☐ No.

Espacio para justificar

3. Usted se encuentra jugando, acompañado de sus amigos, con un parqués que no tiene vidrio. De las cinco partidas que jugó con sus amigos usted no ganó ninguna, un argumento para dicho fracaso podría ser que:
- ☐ No está arrojando los dados con la suficiente fuerza.
 - ☐ La mala energía que producen sus amigos le causa mala suerte.
 - ☐ La falta de vidrio en el parqués hace que los dados tomen valores que normalmente no tomarían.
 - ☐ No sacudió los dados el tiempo suficiente como para obtener buenos números.
 - ☐ Sus amigos sacaban buenos números y le dejaban siempre los peores.
 - ☐ Otro criterio. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

4. Observa la siguiente bolsa, que contiene pelotas negras y blancas. Si tomamos simultáneamente (al azar) **UNA** pelota de la urna. ¿Qué es más probable?:



- ☐ Sacar una pelota BLANCA
- ☐ Sacar una pelota NEGRA
- ☐ Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- ☐ No se puede predecir
- ☐ No sé

Espacio para justificar

5. Una persona se encontró en la calle un paquete que contenía mucho dinero ¿Por qué razón ocurrió el evento? Escoja la opción que mejor se ajuste a su respuesta.

- a. ☐ La persona tiene mucha suerte.
- b. ☐ Es una bendición de Dios.
- c. ☐ La persona se ha portado muy bien.
- d. ☐ Es una mera coincidencia.
- e. ☐ No sé
- f. ☐ Otra. ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

6. Cuando una persona gana en el juego de “Cara y Sello”, ¿A qué crees que se deba?

- a. ☐ A la suerte.
- b. ☐ A Dios.
- c. ☐ Al azar.
- d. ☐ A hacer trampa.
- e. ☐ No sé.
- f. ☐ Otra. ¿Cuál? _____

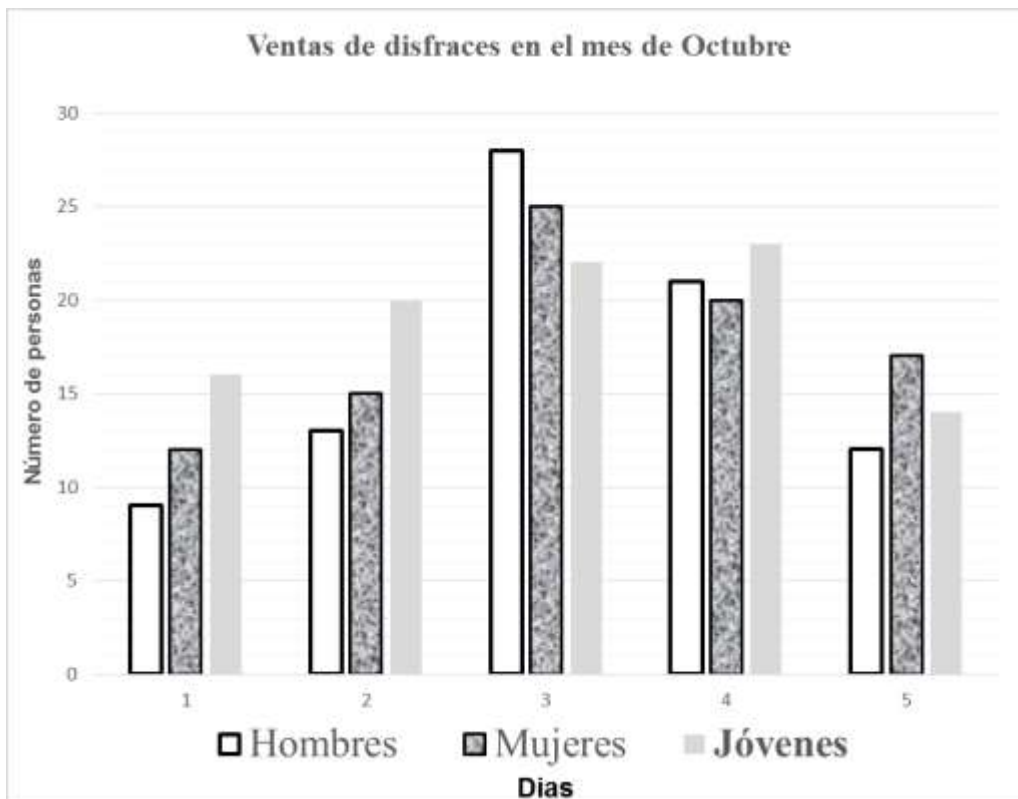
Espacio para justificar

7. Usted lanza tres veces seguidas una moneda de doscientos pesos, ¿Cuál de las siguientes combinaciones de caras y sello, ocurre con mayor probabilidad?:

- a. ☐ Dos caras y un sello.
- b. ☐ Tres caras.
- c. ☐ Tres sellos.
- d. ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- e. ☐ No se puede predecir cuál de los tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- f. ☐ No sé.

Espacio para justificar

8. En la siguiente gráfica, se muestra la cantidad de hombres, mujeres y jóvenes de la ciudad de Cali, que compraron su disfraz en una tienda del centro comercial Cosmocentro, durante los primeros días del mes de octubre.



El centro comercial escogerá al azar a un comprador, con el fin de premiarlo con un bono de \$100000 para el maquillaje del disfraz. De acuerdo con lo anterior, es correcto afirmar que:

- ☐ Un hombre tienen mayor probabilidad de ganar el bono que un joven.
- ☐ Una mujer tiene menor probabilidad de ganar el bono que un hombre.
- ☐ Un joven tiene mayor probabilidad de ganar el bono que un hombre.
- ☐ Un joven tiene igual probabilidad de ganarse el bono que una mujer.
- ☐ No se puede decidir cuál grupo de personas tiene mayor probabilidad de ganar.

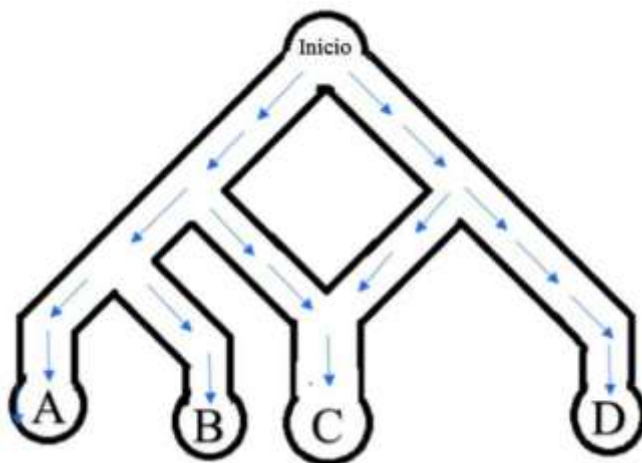
Espacio para justificar

9. Una persona tuvo muchas dificultades esta semana: tuvo un accidente de automovilístico, extravió los documentos de identidad, lo echaron del trabajo y se peleó con la novia. ¿Por qué ocurrió esto? Escoja la opción que mejor se ajuste a su respuesta.

- a. ☐ La persona tiene mala suerte.
- b. ☐ La persona está salada.
- c. ☐ Le hicieron brujería.
- d. ☐ Es una maldición del cielo.
- e. ☐ Es una coincidencia.
- f. ☐ No sé.

Espacio para justificar

10. Supongamos que va a lanzar una canica desde el “inicio”. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:



- a. ☐ Que la canica caiga en el agujero A, es igual de probable que caiga en el agujero D.
- b. ☐ Es mas probable que la canica caiga en el agujero C.
- c. ☐ Todos los agujeros tienen la misma probabilidad.
- d. ☐ No se puede predecir cuál de los tres eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- e. ☐ No sé.

Espacio para justificar

11. Para tomar la decisión de construir una plaza de mercado en el barrio Los Rosales, la Junta de Acción Comunal desea contar con el apoyo de la mayoría de las familias que allí viven. Para determinar qué quiere la mayoría, realizaron un sondeo en el que preguntaron: "¿Cree usted que sería de beneficio para el sector la construcción de una plaza de mercado?". Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Respuesta	Número de familias
Si	225
No	150
Está inseguro	75
No respondió	300

La Junta de Acción Comunal se inclinó por NO construir una plaza de mercado, debido a que los resultados del sondeo muestran que:

- ☐ El 70% de familias encuestadas no respondió afirmativamente
- ☐ La mitad de familias encuestadas estuvieron inseguras o no respondieron la encuesta
- ☐ El número de familias que respondieron "sí", supera a quienes respondieron negativamente en un 50%.
- ☐ El número de familias que respondieron "no" es el doble de las que están inseguras
- ☐ Ninguna de las anteriores.
- ☐ ¿Otra? ¿Cuál? _____

Espacio para justificar

12. Suponga un sorteo de chance, en el que usted tiene el número 1234. ¿Qué es más probable?:

- ☐ Que salgan las cuatro cifras.
- ☐ Que salgan las tres últimas cifras.
- ☐ Que salgan las dos últimas cifras.
- ☐ Que salga la última cifra.
- ☐ Todos los eventos anteriores tienen la misma probabilidad de ocurrir.
- ☐ No se puede predecir cuál de los cuatro eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- ☐ No sé.

Espacio para justificar

13. Una empresa ha hecho un estudio para determinar qué tan conocido es el producto que ofrece. Para este estudio realizaron encuestas dividiendo la población encuestada en tres grupos. Los resultados fueron los siguientes:

Grupo	Total de personas encuestadas	Cantidad de personas que conocen que existe el producto pero no lo usan	Cantidad de personas que conocen y usan el producto
1	200	110	70
2	500	250	220
3	250	120	20

Según las expectativas de la empresa, se fijó que el producto permanecería en el mercado si el 60% de la población hace uso de él. A partir de los resultados del estudio es más probable que:

- ☐ El producto continúe en el mercado, porque en todos los grupos la cantidad de personas que no usan el producto es menor que la cantidad de los que lo usan.
- ☐ El producto no continúe en el mercado, porque sólo 31 de cada 85 personas encuestadas usan el producto.
- ☐ El producto continúe en el mercado, porque sólo 6 de cada 85 personas encuestadas no conocen el producto.
- ☐ El producto no continúe en el mercado, porque el porcentaje de encuestados en el grupo 3 que usa el producto es aproximadamente el 2,3% de los encuestados.
- ☐ Ninguna de las anteriores.
- ☐ ¿Otra? ¿cuál? _____

Espacio para justificar

14. ¿Qué significa para ti la palabra SUERTE?

Espacio para justificar

15. ¿Usa algún amuleto? ¿Para qué?

Espacio para justificar

16. ¿Conoces alguna superstición o agüero? ¿Para qué?

Espacio para justificar

17. ¿Qué significa para ti la palabra PROBABILIDAD?

Espacio para justificar

18. Si vas a jugar al chance con un número de cuatro cifras. Contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las dos últimas cifras?

c. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las tres últimas cifras?

d. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las cuatro cifras?



Anexo No. 2: Hoja de trabajo No. 1
Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina
Sede: “Los Vencedores”
Área de Matemáticas
Hoja de trabajo No.1



Estudiante: _____

Edad: _____ **Grado:** _____ **Fecha:** _____

Importante: *El presente documento es parte de un proyecto de investigación, que tiene como fin caracterizar el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once. Por lo tanto, te sugerimos que:*

- *Leas detenidamente cada pregunta.*
- *Justifique cada respuesta en el espacio en blanco.*
- *En caso de que no sepas, selecciona la opción: No sé.*

Abre el archivo de GeoGebra llamado “Tres monedas”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

- **Cuadro de lanzamientos:** Un pequeño cuadro de color azul en el cual se puede escribir el número de lanzamientos que se desea realizar.
- **Botón Animación:** Se encuentra en la parte superior, y activa la animación de los lanzamientos.
- **Botón Pausa:** Se encuentra en la parte superior, y pausa la animación de los lanzamientos.
- **Botón Borra:** Restablece las gráficas y los datos a cero (0).
- **Tabla de frecuencias:** En esta tabla encontrará la cuenta de las posibles combinaciones obtenidas en el número de lanzamientos que usted decidió realizar y las frecuencias relativas de cada combinación obtenida.
- **Gráfica de dados:** se podrán encontrar con la imagen de tres monedas, las cuales mostrarán las combinaciones obtenidas que usted decidió ejecutar en el cuadro de lanzamientos.
- **Gráfica de barras:** estas se encuentran al lado derecho y muestran la cantidad de veces que se obtuvieron las diferentes combinaciones de las tres monedas.
- **Casilla de control:** Esta se encuentra en la parte inferior y al dar clic sobre ella podrá obtener información respecto a la probabilidad de obtener cada una de las combinaciones de monedas.

A continuación, se muestra un ejemplo:



En esta ocasión se realizaron 250 lanzamientos de los cuales, se puede verificar en el diagrama de barras y en la tabla de frecuencias, la combinación $(C, C, S) = (C, S, C) = (S, C, C)$ (dos caras y un sello), fue la que más veces se repitió (103 veces). Además se puede observar que la última combinación obtenida fue (C, S, C) (cara, sello, cara).

Primera parte

- Realiza 50, 100, 150, 180, 200, 250 y 270 lanzamientos con las monedas y en cada caso observa el diagrama de barras y responde las siguientes preguntas:
 - Escribe las cosas comunes que observaste en el diagrama de barras, después de realizar los lanzamientos indicados.

Espacio para justificar

- Explique con sus propias palabras, cuales podrían ser las razones de aquellas características que observo en el diagrama de barras, después de realizar los lanzamientos indicados.

Espacio para justificar

Segunda parte

2. Realice de nuevo la siguiente cantidad de lanzamientos: 50, 100, 150, 180, 200, 250 y 270, y en cada caso observe la tabla de frecuencias y conteste las siguientes preguntas:
- a. ¿Qué características podría destacar de la tabla de frecuencias, después de realizar los lanzamientos indicados? y ¿Qué explicación podría darles a dichas características encontradas?

Espacio para justificar

- b. Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones NO elegirías? Y ¿Por qué?

Espacio para justificar

- c. Si tuvieras que acertar dos de tres veces, al lanzar tres monedas, en una apuesta con un amigo ¿Qué combinaciones SI elegirías? y ¿Por qué?

Espacio para justificar

Tercera parte

3. De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:
- a. ¿Qué aspectos tienen en común la representación gráfica de barras con la tabla de frecuencias?

Espacio para justificar

b. Dos amigos apuestan un iPhone Xs Max último modelo que se ganaron en una rifa y resuelven que se quedará con el celular quien al lanzar tres monedas obtenga en dos de tres ocasiones la combinación que ha elegido. Javier eligió la combinación de dos caras y un sello, mientras que Francisco eligió la combinación de tres sellos. Al realizar los dos primeros lanzamientos se obtienen ambas combinaciones, por lo tanto, se deben lanzar las monedas una tercera vez para desempatar el juego ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la correcta

- a. ☐ Javier y Francisco tienen la misma probabilidad de ganar la apuesta.
- b. ☐ No se puede predecir quien de los dos tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- c. ☐ Entre los dos, Francisco tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- d. ☐ Entre los dos, Javier tiene mayor probabilidad de ganar la apuesta.
- e. ☐ No sé.
- f. ☐ Otra, ¿Cuál? Explica tu respuesta:

Espacio para justificar

c. Al lanzar tres monedas a la misma vez cuatro veces, se obtiene la combinación cara-cara-cara (C,C,C) en las cuatro ocasiones. Teniendo en cuenta esto, si decidiéramos lanzar las tres monedas por quinta vez podríamos decir que:

- a. ☐ Lo más probable es que por quinta vez se obtenga la combinación cara-cara-cara (C,C,C).
- b. ☐ Es más probable que obtenga la combinación sello-sello-sello (S,S,S).
- c. ☐ La probabilidad de obtener dos caras y un sello o dos sellos y una cara sigue siendo mayor.
- d. ☐ No se puede predecir cual de todas las combinaciones tiene mayor probabilidad de salir.
- e. ☐ No sé.
- f. ☐ Otra, ¿Cuál? Explica tu respuesta:



Anexo No. 3: Hoja de trabajo No. 2
Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina
Sede: “Los Vencedores”
Área de Matemáticas
Hoja de trabajo No. 2



Estudiante: _____

Edad: _____ **Grado:** _____ **Fecha:** _____

Importante: *El presente documento es parte de un proyecto de investigación, que tiene como fin caracterizar el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once. Por lo tanto, te sugerimos que:*

- *Leas detenidamente cada pregunta.*
- *Justifiques cada respuesta en el espacio en blanco.*
- *En caso de que no sepas, selecciona la opción: No sé.*

Primera parte

Abre el archivo de GeoGebra llamado “Chance-Final”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

- **Cuadros de cifras:** En la parte izquierda encontrará cuatro cuadros en los cuales deberá introducir un número de cuatro cifras, las tres últimas cifras, las dos últimas cifras y la última cifra de dicho número, según como lo que indique cada cuadro.
- **Cuadro de número de sorteos:** En este cuadro podrá ingresar el número de sorteos que desea emular.
- **Casilla de “Animación” y “Pausa”:** Con estas casillas podrá dar inicio y detener, respectivamente, la emulación del número de sorteos que va a realizar.
- **Tabla del “número de veces”:** Esta tabla se encuentra ubicada en la parte derecha e indicara el número de veces en los que, tras realizar los sorteos, se obtienen las balotas con los números que se eligieron en cada cuadro de cifras.
- **Balotas:** En la parte inferior aparecerán diferentes balotas que representarán los números obtenidos en cada sorteo tras haber ingresado todos los valores a los cuadros y haber dado clic en la casilla de animación.
- **Grafica de barras:** Están ubicadas en la parte derecha y representan el número de sorteos en los que se obtuvieron las cuatro, ultimas tres, ultimas dos y última cifra del número que se haya elegido.

- **Casilla roja:** Una vez finalizada la animación con la cantidad de sorteos seleccionado se debe dar clic en esta casilla para comenzar desde cero alguna otra cantidad de sorteos.

A continuación, se muestra un ejemplo:



En esta ocasión se eligió el 1234 como el número de cuatro cifras y a partir de este se fueron ingresando las tres, dos y una cifra en su

respectivo cuadro. Luego se ingresó la cantidad 1000 en el cuadro de número de sorteos y posteriormente se dio clic en la casilla “Animación”. De esta forma las balotas mostraron rápidamente los números obtenidos en cada sorteo y se detuvieron finalmente en el número obtenido en el último sorteo. En la tabla se muestra el número de veces que salieron cada cantidad de cifras, al igual que en la gráfica de barras.

1. Realiza la siguiente cantidad de sorteos utilizando tres números diferentes de cuatro cifras: 10, 100, 1000, 2000, 10000, 20000 (Recuerde dar clic en el botón rojo una vez hayan finalizado todos los sorteos de la cantidad que eligió) en cada caso observa la gráfica de barras y responde:

- a. ¿Qué barra es más alta y más baja? Explique en cada caso.

Espacio para justificar

- b. Explique con sus propias palabras, cuáles podrían ser las razones por las cuales cree que hay barras más altas que otras.

Espacio para justificar

Segunda Parte

2. Realice de nuevo la siguiente cantidad de lanzamientos con tres números diferentes de cuatro cifras: 10, 150, 2000, 10000, 20000, (Recuerde dar clic en el botón rojo una vez hayan finalizado todos los sorteos de la cantidad que eligió) y en cada caso observe la tabla y conteste las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué características podría destacar de la tabla, después de realizar los lanzamientos indicados? y ¿Qué explicación podría darles a dichas características encontradas?

Espacio para justificar

- b. ¿En las tablas hay cantidades de cifras, que salen un número mayor de veces que otros? Explique con sus propias palabras, las razones por las que esto sucede.

Espacio para justificar

- c. Si tuvieras que elegir entre apostar con cuatro cifras o con dos cifras ¿Qué opción elegirías?
y ¿Por qué?

Espacio para justificar

Tercera Parte

- a. Compara los resultados de las tablas, con los resultados de las barras. ¿Encuentra alguna relación entre ellas?

Espacio para justificar

Presta atención a la instrucción para calcular la probabilidad. Luego:

En GeoGebra ingresa un número de cuatro cifras de su preferencia y realice 20000 lanzamientos.

Con los datos que aparecen en la tabla, contesta las siguientes preguntas:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a la última cifra?

Espacio para justificar

b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las dos últimas cifras?

Espacio para justificar

c. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las tres últimas cifras?

Espacio para justificar

d. ¿Cuál es la probabilidad de acertar a las cuatro cifras?

Espacio para justificar



Anexo No. 4: Hoja de trabajo No. 3
Institución Educativa Técnico Industrial Pedro Antonio Molina
Sede: “Los Vencedores”
Área de Matemáticas
Hoja de trabajo No. 3



Estudiante: _____

Edad: _____ **Grado:** _____ **Fecha:** _____

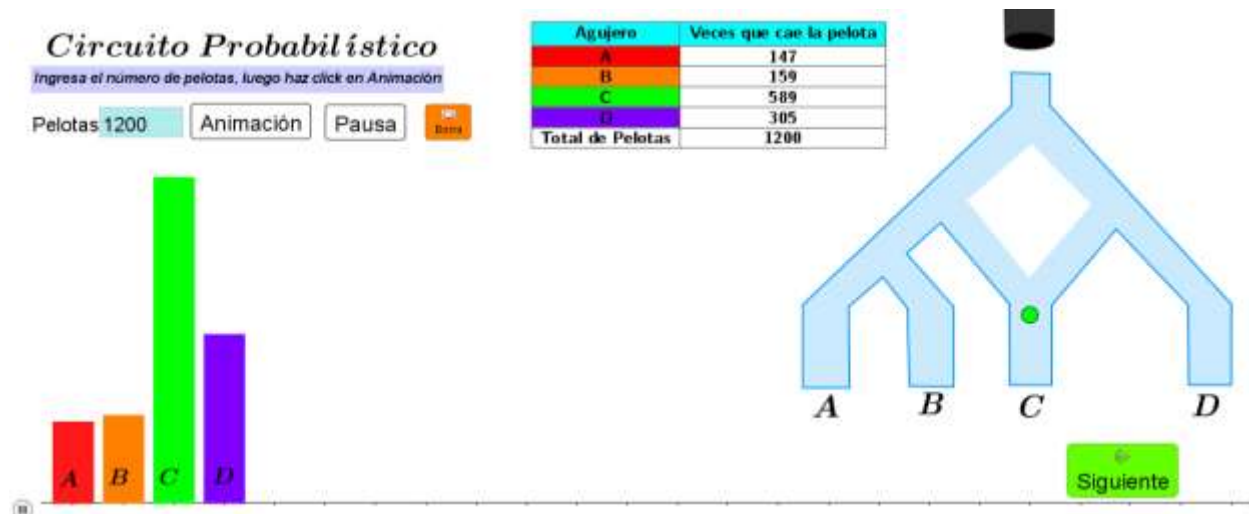
Importante: *El presente documento es parte de un proyecto de investigación, que tiene como fin caracterizar el razonamiento probabilístico de estudiantes de grado once. Por lo tanto, te sugerimos que:*

- *Leas detenidamente cada pregunta.*
- *Justifiques cada respuesta en el espacio en blanco.*
- *En caso de que no sepas, selecciona la opción: No sé.*

Abre el archivo de GeoGebra llamado “Circuito”. En este archivo te encontraras con una ventana que contiene los siguientes elementos:

- **Cuadro de n° de pelotas:** Un pequeño cuadro de color azul en el cual se puede escribir el número de pelotas que se desean lanzar.
- **Botón Animación:** Se encuentra en la parte superior izquierda, y activa la animación de los lanzamientos.
- **Botón Pausa:** Se encuentra en la parte superior izquierda, y pausa la animación de los lanzamientos.
- **Botón Borra:** Restablece las gráficas y los datos, a cero (0).
- **Tabla de frecuencias:** En esta tabla encontrará la cuenta de las veces en las que cae una pelota en un determinado agujero.
- **Grafica de los lanzamientos:** se encontrará con la imagen de un circuito, que mostrara la caída del número de pelotas que usted decidió lanzar.
- **Grafica de barras:** estas se encuentran al lado izquierdo y muestran la cantidad de veces que cayó una pelota en un determinado agujero.
- **Botón Siguiente:** Este se encuentra en la parte inferior y al dar clic sobre él, podrá observar un circuito diferente al anterior.
- **Botón Anterior:** Este se encuentra en la parte inferior y al dar clic sobre él, podrá observar el circuito anterior.

A continuación, se muestra un ejemplo:



En esta ocasión se lanzaron 1200 pelotas, se puede verificar en el diagrama de barras y en la tabla de frecuencias, el agujero C, fue en el que cayeron más pelotas (589 pelotas). Además se puede observar que la última pelota cayó en el agujero C.

Primera parte

- Realiza 5000, 10000, y 15000 lanzamientos de pelotas, en cada caso observa el grafico de barras y responde las siguientes preguntas:
 - En el siguiente espacio en blanco reproduce las gráficas de barras que aparecen para cada uno de los lanzamientos indicados

5000 lanzamientos de pelotas	10000 lanzamientos de pelotas	15000 lanzamientos de pelotas

b. ¿Qué elementos comunes pudiste notar en las gráficas de barras de estos tres lanzamientos?

Espacio para justificar

c. Con tus propias palabras explica por qué hay barras que tienen menos altura que otras.

Espacio para justificar

d. De acuerdo con el diseño en Geogebra, ¿En cuál agujero tiene mayor probabilidad de caer una pelota?

- a. ☐ En el agujero A.
- b. ☐ En el agujero B.
- c. ☐ En el agujero C.
- d. ☐ En el agujero D.
- e. ☐ Todos son igualmente probables.
- f. ☐ No sé.

e. Explique con sus propias palabras, cuáles podrían ser las razones por las que las pelotas caen con mayor frecuencia en ese agujero.

Espacio para justificar

Segunda parte

2. Presione el botón **SIGUIENTE** y realice de nuevo la siguiente cantidad de lanzamientos: 5000, 10000, y 15000, en cada caso observe la tabla de frecuencias y conteste las siguientes preguntas:
- a. ¿Qué características podría destacar de la tabla de frecuencias, después de realizar los lanzamientos indicados? y ¿Qué explicación podría darles a dichas características encontradas?

Espacio para justificar

- b. Ahora observa la tabla. Encontrarás que en la columna “**Veces en la cae la pelota**”, hay valores muy similares o cercanos entre sí. ¿Cómo puedes explicar eso?

Espacio para justificar

Tercera parte

3. De acuerdo con la primera y segunda parte de la actividad, responde las siguientes preguntas:
- a. En ambos circuitos, ¿en cuáles agujeros existe la misma probabilidad de que una pelota caiga ahí? y ¿Cómo los identificaste?

Espacio para justificar

b. Supongamos que decides realizar una apuesta de \$50000 con un compañero. Para ello, debes seleccionar de cada circuito dos agujeros, teniendo en cuenta que los agujeros a escoger son en los que consideras que una pelota tiene mayor probabilidad de caer. ¿A qué agujeros le apostarías? y ¿Por qué?

Circuito Azul	
Agujero	¿Por qué?
Circuito Verde	

c. Una persona deja caer una pelota por el circuito AZUL y otra por el circuito VERDE. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- ☐ Que caiga por el agujero C del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☐ Que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es igual de probable que caiga por el agujero C del circuito VERDE.
- ☐ La probabilidad de que caiga por el agujero D del circuito AZUL, es mayor de que caiga por el agujero B del circuito VERDE.
- ☐ No sé.

Espacio para justificar