

Estimaciones en los espacios de Sobolev de la solución del problema de Cauchy periódico lineal para la ecuación de onda amortiguada

Pavel I. Naumkin

Universidad Nacional Autónoma de México

Joel A. Rodríguez Ceballos

Universidad Nacional Autónoma de México

Recibido Dic. 20, 2008

Aceptado Feb. 25, 2009

Abstract

We study, in the standard Sobolev spaces as well as in the Sobolev spaces of functions with zero mean value, the estimates of solutions to the Cauchy periodic problem for the damped wave equation that satisfy a periodic boundary condition on the space real axis with positive time, being both the force and the initial data 2π -periodic on the space real axis for all non-negative time.

Keywords: Damped wave equation, periodic solutions, H^s -estimates, asymptotic behavior.

MSC(2000): 35L05, 35B10, 35C20.

Resumen

Estudiamos en los espacios de Sobolev estándar y en los espacios de Sobolev para las funciones con valor medio 0 las estimaciones de las soluciones al problema periódico de Cauchy de la ecuación de onda amortiguada que satisfacen una condición de frontera periódica en el eje espacial real y semieje temporal positivo, siendo la fuerza y las condiciones iniciales funciones 2π -periódicas con respecto a la variable espacial para todo tiempo no negativo.

Palabras y frases claves: Ecuación de onda amortiguada lineal, soluciones periódicas, H^s -estimaciones, comportamiento asintótico.

1 Introducción

En [4] se estudia el comportamiento asintótico para tiempos largos de las soluciones al problema periódico para una ecuación de evolución no lineal modelo, que para casos particulares de su estructura se reduce a varias ecuaciones conocidas de la física matemática, por ejemplo la de Korteweg-de Vries y la no lineal de Schrödinger. Por otra parte, en [3] se estudia la existencia global de soluciones al problema de Cauchy de la ecuación de onda amortiguada no lineal (véase [2]). Siguiendo la metodología de [4] para el problema periódico correspondiente, el primer paso lo constituye la obtención de las estimaciones aquí presentadas en el caso lineal (véase también [5]). Comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 1.1. *El espacio de Sobolev para el caso de las funciones periódicas se*

define como sigue (véase [4]):

$$\mathbf{H}^s = \left\{ \varphi \in \mathbf{D}' : \|\varphi\|_{\mathbf{H}^s}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\varphi}_n|^2 < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

siendo $\langle n \rangle = \sqrt{1 + n^2}$ y

$$\hat{\varphi}_n = (1/2\pi) \int_{\Omega} e^{-inx} \varphi(x) dx$$

los coeficientes de Fourier de la función 2π -periódica $\varphi(x)$.

Observación 1.2. Con $\mathbf{D}$ denotamos el subespacio de $C^\infty(\mathbb{R})$ que consiste de aquellas funciones que tienen período 2π con el modo de convergencia: $\phi_j \rightarrow \phi$ en $\mathbf{D}$ si para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que $\phi_j^{(k)} \rightarrow \phi^{(k)}$ uniformemente en $\mathbb{R}$. Con $\mathbf{D}'$ denotamos el espacio de los funcionales lineales $\langle \varphi, \cdot \rangle : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\langle \varphi, \phi_j \rangle \rightarrow \langle \varphi, \phi \rangle$ cuando $\phi_j \rightarrow \phi$ en $\mathbf{D}$.

Definición 1.3. Para las funciones con valor medio 0 introducimos el espacio (véase [4])

$$\mathbf{H}_0^s = \{\varphi \in \mathbf{H}^s : \hat{\varphi}_0 = 0\}.$$

La norma en este espacio $\mathbf{H}_0^s$ la denotamos

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\varphi}_n|^2.$$

Estudiamos aquí entonces las $\mathbf{H}^s$ -estimaciones y $\mathbf{H}_0^s$ -estimaciones (estimaciones en los espacios $\mathbf{H}^s$ y $\mathbf{H}_0^s$, respectivamente), con $s > 1/2$, de las soluciones al problema periódico lineal de Cauchy de la ecuación de onda amortiguada

$$\begin{aligned} Lu &= f(t, x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(0, x) &= \phi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\Omega = [0, 2\pi]$, $L = \partial_t^2 + \partial_t - \partial_x^2$, que satisfacen la condición de frontera periódica $u(t, x) = u(t, 2\pi + x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, siendo la función f y las condiciones iniciales ϕ y ψ 2π -periódicas con respecto a la variable espacial x : $f(t, x + 2\pi) = f(t, x)$, $\phi(x) = \phi(2\pi + x)$, $\psi(x) = \psi(2\pi + x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

2 Métodos

Consideramos los operadores lineales de tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t)\psi &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_n e^{inx} K_n(t), \\ |K_n(t)| &\leq C_n e^{-k_n t} \end{aligned}$$

que satisfacen la condición de disipación

$$k_n \geq k_0 + \mu |n|^\nu \quad (2)$$

para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, donde $\mu > 0$, $\nu \geq 0$.

Definición 2.1. *El operador de Green G para el problema periódico (1) se define como*

$$G(t)\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_n e^{inx-t/2} L_n(t),$$

cuyo símbolo es

$$\mathcal{L}_n(t) = e^{-t/2} L_n(t),$$

donde para $n \neq 0$

$$L_n(t) = \frac{\sin n^* t}{n^*}, \quad n^* := \sqrt{|n|^2 - \frac{1}{4}},$$

y

$$L_0(t) = e^{t/2} (1 - e^{-t}).$$

Por lo tanto, la solución del problema de Cauchy (1) puede escribirse por la fórmula de Duhamel en la forma

$$u(t, x) = \tilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (3)$$

donde el operador $\tilde{G}(t)$ es

$$\tilde{G}(t) = (\partial_t + 1)G(t).$$

Observación 2.2. *Si*

$$0 < \mu \leq 1/2, \quad (4)$$

entonces el operador lineal G satisface la condición de disipación (2) con $k_0 = 0$, $k_n = 1/2$, $n \neq 0$, $\nu = 0$.

3 Resultados obtenidos

Demostramos el siguiente

Lema 3.1. *Para cualesquiera $\phi, \psi \in \mathbf{H}^s$ y $f(t) \in \mathbf{H}^s$, donde $s > 1/2$, tenemos las estimaciones*

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{-\lambda t} \|\phi\|_{\mathbf{H}^s}, \\ \|G(t)\psi\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda t} \|\psi\|_{\mathbf{H}^s}, \\ \left\| \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{(\lambda-\Lambda)\tau} d\tau \sup_{0 < \tau < t} e^{\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}^s} \end{aligned} \quad (5)$$

para todo $t > 0$, donde $\lambda = 0$, $\Lambda \in \mathbb{R}$. Además, si $\phi, \psi \in \mathbf{H}^s$ y la función f se toma de manera que la función de τ definida por $e^{\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}$ es acotada en el intervalo $(0, +\infty)$, donde $\Lambda > 1$, $s > 1/2$, entonces la siguiente asintótica toma lugar cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$,

$$u(t, x) = \hat{\phi}_0 + (1 - e^{-t}) \hat{\psi}_0 + \int_0^\infty (1 - e^{-(t-\tau)}) \hat{f}_0(\tau) d\tau + O\left(\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}^s} + \|\psi\|_{\mathbf{H}^s} + \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}\right) e^{-\chi t}\right), \quad (6)$$

donde $\chi \in (\lambda, \lambda + \mu)$, μ se toma de (4).

Observación 3.2. Sean dos funciones $f(t), g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos $f(t) = O(g(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$ si la desigualdad $|f(t)| \leq C|g(t)|$ es válida para alguna constante positiva C y todo $t \geq t_0 > 0$ (véase [3]).

Demostración. Por la identidad de Parseval encontramos

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^s}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(\partial_t + 1)e^{-t/2} L_n(t)\right|^2 \langle n \rangle^{2s} \left|\hat{\phi}_n\right|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \|\phi\|_{\mathbf{H}^s}^2, \\ \|G(t)\psi\|_{\mathbf{H}^s}^2 &= e^{-t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |L_n(t)|^2 \langle n \rangle^{2s} \left|\hat{\psi}_n\right|^2 \leq \frac{4}{3} \|\psi\|_{\mathbf{H}^s}^2, \end{aligned}$$

de donde se siguen la primera y segunda estimaciones de (5). Además por la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} \left(\int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} \left|\hat{f}_n(\tau)\right| d\tau\right)^2 \\ &= \frac{4}{3} \int_0^t \int_0^t d\tau d\tau' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} \left|\hat{f}_n(\tau)\right| \left|\hat{f}_n(\tau')\right| \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\int_0^t e^{-\Lambda\tau} d\tau\right)^2 \sup_{0 < \tau < t} e^{2\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue la tercera estimación de (5). Para probar la asintótica (6) extraemos el valor medio en la serie de Fourier para el operador de Green

$$G(t)\psi = \hat{\psi}_0 (1 - e^{-t}) + G_0(t)\psi,$$

donde el operador residual

$$G_0(t)\psi = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \hat{\psi}_n e^{inx-t/2} L_n(t)$$

es estimado como sigue

$$\|G_0(t)\psi\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \frac{4}{3}e^{-t} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\psi}_n|^2 \leq \frac{4}{3}e^{-2\mu t} \|\psi\|_{\mathbf{H}^s}^2,$$

de lo cual por la desigualdad de inmersión de Sobolev para $s > 1/2$ (véase [1]) obtenemos la asintótica uniforme con respecto a $x \in \Omega$

$$G(t)\psi = \hat{\psi}_0 (1 - e^{-t}) + O(\|\psi\|_{\mathbf{H}^s} e^{-\chi t}),$$

donde $\chi = \lambda + \mu$, $\lambda = 0$. De manera análoga extraemos el valor medio en la serie de Fourier para el operador

$$\tilde{G}(t)\phi = \hat{\phi}_0 + \tilde{G}_0(t)\phi,$$

donde el operador residual

$$\tilde{G}_0(t)\phi = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \hat{\phi}_n e^{inx-t/2} \left(\frac{1}{2} L_n(t) + \cos n^* t \right)$$

es estimado como sigue

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}_0(t)\phi\|_{\mathbf{H}^s} &\leq \frac{1}{2} \|G_0(t)\phi\|_{\mathbf{H}^s} + \left(e^{-t} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\phi}_n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) e^{-\mu t} \|\phi\|_{\mathbf{H}^s}, \end{aligned}$$

de lo cual por la desigualdad de inmersión de Sobolev para $s > 1/2$ obtenemos la asintótica uniforme con respecto a $x \in \Omega$

$$\tilde{G}(t)\phi = \hat{\phi}_0 + O(\|\phi\|_{\mathbf{H}^s} e^{-\chi t}),$$

donde $\chi = \lambda + \mu$, $\lambda = 0$. Entonces escribimos la identidad

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau &= \int_0^\infty (1 - e^{-(t-\tau)}) \hat{f}_0(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_t^\infty (1 - e^{-(t-\tau)}) \hat{f}_0(\tau)d\tau + \int_0^t G_0(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

donde estimamos la segunda integral en el miembro derecho de (7) con ayuda a su vez de las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \left| \int_t^\infty \hat{f}_0(\tau)d\tau \right| &\leq \int_t^\infty e^{-\Lambda\tau} d\tau \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \frac{e^{-\Lambda t}}{\Lambda} \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}, \\ \left| \int_t^\infty e^{-(t-\tau)} \hat{f}_0(\tau)d\tau \right| &\leq e^{-t} \int_t^\infty e^{(1-\Lambda)\tau} d\tau \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ &\leq \frac{e^{-\Lambda t}}{\Lambda - 1} \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}. \end{aligned}$$

Para la tercera integral en el miembro derecho de (7) tenemos la estimación

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t G_0(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \\ & \leq \frac{4}{3} e^{-2\mu t} \left(\int_0^t e^{(\mu-\Lambda)\tau} d\tau \right)^2 \sup_{\tau>0} e^{2\Lambda\tau} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} \left| \hat{f}_n(\tau) \right|^2 \\ & \leq \frac{4e^{-2\chi t}}{3(\Lambda-\mu)^2} \sup_{t>0} e^{2\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}^2, \end{aligned}$$

donde $\chi \in (\lambda, \lambda + \mu)$, $\Lambda > 1$. De esta forma la estimación del término residual en la fórmula asintótica (6) es verdadera. El Lema 3.1 está demostrado. $\square$

Observación 3.3. *Para la última integral en el miembro derecho de (7) podemos tener también la estimación alternativa*

$$\left\| \int_0^t G_0(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \frac{4e^{-2\chi t}}{3\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)^2} \sup_{t>0} e^{2\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}^2,$$

donde ahora $\chi \in (\lambda + \mu, 1/2)$, $\Lambda > 1$. En efecto

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t G_0(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} \left(\int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(t-\tau)/2} \left| \hat{f}_n(\tau) \right| d\tau \right)^2 \\ & = \frac{4}{3} e^{-t} \int_0^t \int_0^t d\tau d\tau' e^{(1/2-\Lambda)\tau} e^{(1/2-\Lambda)\tau'} \\ & \quad \times \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} e^{\Lambda\tau} e^{\Lambda\tau'} \left| \hat{f}_n(\tau) \right| \left| \hat{f}_n(\tau') \right| \\ & \leq \frac{4}{3} e^{-t} \left(\int_0^t e^{(1/2-\Lambda)\tau} d\tau \right)^2 \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} e^{2\Lambda\tau} \left| \hat{f}_n(\tau) \right|^2 \\ & \leq \frac{4}{3} e^{-t} \left(\int_0^t e^{(1/2-\Lambda)\tau} d\tau \right)^2 \sup_{\tau>0} e^{2\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}^2 \\ & \leq \frac{4e^{-2\chi t}}{3\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)^2} \sup_{t>0} e^{2\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}^s}^2. \end{aligned}$$

De la misma manera para las funciones con valor medio 0 tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Para cualesquiera $\phi, \psi \in \mathbf{H}_0^s$ y $f(t) \in \mathbf{H}_0^s$, donde $s > 1/2$, tenemos*

las estimaciones

$$\begin{aligned}\|\tilde{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}_0^s} &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) e^{-\lambda t} \|\phi\|_{\mathbf{H}_0^s}, \\ \|G(t)\psi\|_{\mathbf{H}_0^s} &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda t} \|\psi\|_{\mathbf{H}_0^s}, \\ \left\|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{\mathbf{H}_0^s} &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\lambda t} \int_0^t e^{(\lambda-\Lambda)\tau} d\tau \sup_{0<\tau<t} e^{\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}_0^s}\end{aligned}\quad (8)$$

para todo $t > 0$, donde $\lambda = 1/2$, $\Lambda \in \mathbb{R}$. Además, si $\phi, \psi \in \mathbf{H}_0^s$ y la función f se toma de manera que la función de τ definida por $e^{\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}_0^s}$ es acotada en el intervalo $(0, +\infty)$, donde $\Lambda > \lambda$, $s > 1/2$, entonces la siguiente asintótica toma lugar cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}u(t, x) &= e^{-t/2} \sum_{n=\pm 1} e^{inx} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \hat{\phi}_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\hat{\psi}_n \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \int_0^\infty e^{\tau/2} \hat{f}_n(\tau) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} (t - \tau) d\tau \right) \right\} \\ &\quad + O\left(\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}_0^s} + \|\psi\|_{\mathbf{H}_0^s} + \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}_0^s} \right) e^{-\chi t} \right), \quad (9)\end{aligned}$$

donde $\chi \in (\lambda/2, \min(\Lambda, \lambda + \mu)/2)$, μ se toma de (4).

Demostración. Por la identidad de Parseval encontramos

$$\begin{aligned}\|\tilde{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 &= \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^\infty \left| (\partial_t + 1) e^{-t/2} L_n(t) \right|^2 \langle n \rangle^{2s} |\hat{\phi}_n|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 e^{-t} \|\phi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2, \\ \|G(t)\psi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 &\leq \frac{4}{3} e^{-t} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^\infty \langle n \rangle^{2s} |\hat{\psi}_n|^2 \leq \frac{4}{3} e^{-t} \|\psi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2,\end{aligned}$$

de donde se siguen la primera y segunda estimaciones de (8). Además por la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 &\leq \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^\infty \langle n \rangle^{2s} \left(\int_0^t \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-(t-\tau)/2} |\hat{f}_n(\tau)| d\tau \right)^2 \\ &= \frac{4}{3} e^{-t} \int_0^t \int_0^t e^{(\tau+\tau')/2} d\tau d\tau' \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^\infty \langle n \rangle^{2s} |\hat{f}_n(\tau)| |\hat{f}_n(\tau')| \\ &\leq \frac{4}{3} e^{-t} \left(\int_0^t e^{-(\Lambda-1/2)\tau} d\tau \right)^2 \sup_{0<\tau<t} e^{2\Lambda\tau} \|f(\tau)\|_{\mathbf{H}_0^s}^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue la tercera estimación de (8). Para probar la asintótica (9) extraemos los términos con $|n| = 1$ de la serie de Fourier para el operador de Green

$$G(t)\psi = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t \sum_{n=\pm 1} e^{inx}\hat{\psi}_n + G_1(t)\psi$$

(recuerde que ahora $\hat{\psi}_0 = 0$ ya que $\psi \in \mathbf{H}_0^s$), donde el operador residual

$$G_1(t)\psi = \sum_{n=-\infty, |n| \neq 1}^{\infty} \hat{\psi}_n e^{inx-t/2} L_n(t)$$

es estimado como sigue

$$\begin{aligned} \|G_1(t)\psi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 &= e^{-t} \sum_{n=-\infty, |n| \neq 1}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\psi}_n|^2 |L_n(t)|^2 \\ &\leq \frac{4}{15} e^{-(\mu+1/2)t} \|\psi\|_{\mathbf{H}_0^s}^2, \end{aligned}$$

de lo cual por la desigualdad de inmersión de Sobolev para $s > 1/2$ obtenemos la asintótica uniforme con respecto a $x \in \Omega$

$$G(t)\psi = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t \sum_{n=\pm 1} e^{inx}\hat{\psi}_n + O(\|\psi\|_{\mathbf{H}_0^s} e^{-\chi t}),$$

donde $\chi = (\lambda + \mu)/2$, $\lambda = 1/2$. De manera análoga extraemos los términos con $|n| = 1$ de la serie de Fourier para el operador

$$\tilde{G}(t)\phi = e^{-t/2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \sum_{n=\pm 1} e^{inx}\hat{\phi}_n + \tilde{G}_1(t)\phi$$

(recuerde que $\hat{\phi}_0 = 0$), donde el operador residual

$$\tilde{G}_1(t)\phi = \sum_{n=-\infty, |n| \neq 1}^{\infty} \hat{\phi}_n e^{inx-t/2} \left(\frac{1}{2}L_n(t) + \cos n^*t \right)$$

es estimado como sigue

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}_1(t)\phi\|_{\mathbf{H}_0^s} &= \left(e^{-t} \sum_{n=-\infty, |n| \neq 1}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\phi}_n|^2 \left| \frac{1}{2}L_n(t) + \cos n^*t \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|G_1(t)\phi\|_{\mathbf{H}_0^s} + \left(e^{-t} \sum_{n=-\infty, |n| \neq 1}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\hat{\phi}_n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{15}} \right) e^{-(\mu+1/2)t/2} \|\phi\|_{\mathbf{H}_0^s}, \end{aligned}$$

de lo cual por la desigualdad de inmersión de Sobolev para $s > 1/2$ obtenemos la asintótica uniforme con respecto a $x \in \Omega$

$$\tilde{G}(t)\phi = e^{-t/2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \sum_{n=\pm 1} e^{inx} \hat{\phi}_n + O(\|\phi\|_{\mathbf{H}_0^s} e^{-\chi t}),$$

donde $\chi = (\lambda + \mu)/2$, $\lambda = 1/2$. Entonces escribimos la identidad

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \left(\int_0^\infty - \int_t^\infty \right) e^{\tau/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} (t-\tau) \sum_{n=\pm 1} e^{inx} \hat{f}_n(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t G_1(t-\tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

donde estimamos la segunda integral del miembro derecho de (10) como sigue

$$\begin{aligned} e^{-t/2} \left| \int_t^\infty e^{\tau/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} (t-\tau) \hat{f}_n(\tau) d\tau \right| &\leq e^{-t/2} \int_t^\infty e^{(1/2-\Lambda)\tau} d\tau \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}_0^s} \\ &\leq \frac{e^{-\Lambda t}}{\Lambda - \frac{1}{2}} \sup_{t>0} e^{\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}_0^s}, \end{aligned}$$

$n = \pm 1$, y para la tercera integral del miembro derecho de (10) tenemos la estimación

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t G_1(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{H}_0^s}^2 &\leq \frac{4}{15} e^{-t} \left(\int_0^t e^{(1/2-\Lambda)\tau} d\tau \right)^2 \sup_{\tau>0} e^{2\Lambda\tau} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^\infty \langle n \rangle^{2s} |\hat{f}_n(\tau)|^2 \\ &\leq \frac{4e^{-2\chi t}}{15 \left(\Lambda - \frac{1}{2} \right)^2} \sup_{t>0} e^{2\Lambda t} \|f(t)\|_{\mathbf{H}_0^s}^2, \end{aligned}$$

donde $\chi \in (\lambda/2, \min(\Lambda, \lambda + \mu)/2)$, $\Lambda > 1/2$. De esta forma la estimación del término residual en la fórmula asintótica (9) es verdadera. El Lema 3.4 está demostrado. $\square$

4 Reconocimientos y agradecimientos

Los resultados de este artículo son parte del trabajo desarrollado por el segundo autor, bajo la dirección del primer autor, durante la estancia posdoctoral (Febrero de 2008-Enero de 2009) de aquél en el Instituto de Matemáticas, Campus

Morelia, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), con el apoyo de una beca posdoctoral otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México dentro del Programa de Apoyos Vinculados al Fortalecimiento de la Calidad del Posgrado Nacional 2007. El segundo autor está profundamente agradecido al primer autor y a las instituciones mencionadas.

Referencias

- [1] Cordes, H.O.: The Technique of Pseudodifferential Operators, Cambridge University Press, (1995), Cambridge, UK.
- [2] Hayashi, N., Kaikina, E.I., Naumkin, P.I.: Asymptotics for nonlinear damped wave equations with large initial data, Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 4, pp. 249-277, (2007).
- [3] Hayashi, N., Kaikina, E.I., Naumkin, P.I., Shishmarev, I.A.: Asymptotics for dissipative nonlinear equations, Springer, (2006), Berlin Heidelberg New York.
- [4] Kaikina, E.I., Naumkin, P.I., Shishmarev, I.A.: Periodic problem for a model nonlinear evolution equation, Advances in Differential Equations, Vol. 7, No. 5, pp. 581-616, (2002).
- [5] Naumkin, P.I., Rodríguez-Ceballos, J.A.: $\mathbf{H}^s$ -estimaciones con $s > 1/2$ de la solución del problema lineal periódico para la ecuación de onda amortiguada, Memoria Digital 4to. Congreso Estatal de Ciencia y Tecnología, Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología (COECYT) Michoacán, Morelia, Mich., México, (2008).

Dirección de los autores

Pavel I. Naumkin — Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, Michoacán, México

e-mail: pavelni@matmor.unam.mx

Joel A. Rodríguez Ceballos — Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia, Michoacán, México

e-mail: joel@ifm.umich.mx