



Una Secuencia de Tareas que Integra el Software GeoGebra para la Modelación de la Función Logística en el crecimiento del área de una hoja de frijol

Alex Adriano Aponza Viveros

Universidad del Valle – Sede Meléndez

Facultad de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali, Colombia

2023



Una Secuencia de Tareas que Integra el Software GeoGebra para la Modelación de la Función Logística en el crecimiento del área de una hoja de frijol

Alex Adriano Aponza Viveros

Código: 0440274

Proyecto de Trabajo de Grado Presentado para Optar al Título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Diana Ximena Ortiz Collazos

Magíster en Educación Matemática

Tutora del Trabajo de Grado

Universidad del Valle – Sede Meléndez

Facultad de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Santiago de Cali, Colombia

2023

Contenido

Introducción	5
Resumen	7
Capítulo I: Aspectos Generales del Trabajo	9
Planteamiento del Problema	9
Antecedentes	13
Investigaciones en torno a la modelación que involucran la función logística	13
<i>A nivel local</i>	13
<i>A nivel nacional</i>	15
<i>A nivel internacional</i>	16
Justificación	18
Planteamiento de los Objetivos	20
<i>Objetivo General</i>	20
<i>Objetivos específicos</i>	20
Capítulo II: Marco Teórico de Referencia	21
Descriptores y palabras clave	21
Referente Matemático	22
Referente Curricular	27
Referente Didáctico	32
Referente Cognitivo	34
Capítulo III: Metodología	38
Enfoque Metodológico: Investigación Cualitativa	38
Estrategia Metodológica: Estudio de Casos	39
Campo de Trabajo y Contexto de Implementación	40
Desarrollo Metodológico	41
<i>Fase 1 Construcción del Problema</i>	42
<i>Fase 2: Diseño de Tareas y Experimentación</i>	42
<i>Fase 3: Análisis de los Registros</i>	43
Estrategias e instrumentos para la recolección de información	43
Análisis Retrospectivo	44

Tareas y Conocimientos	44
Tabla 1, Tareas y Conocimientos	44
Descripción de las tareas	47
Tabla 2, Tareas Propuestas Actividad I	47
Tabla 3, Tareas Propuestas Actividad II	49
Tabla 4, Tareas Propuestas Actividad III	55
Codificación de datos	62
Codificación de datos: Tabla 4 Codificación de datos, Tarea II	62
Tabla 5 Codificación de datos, Tarea III	65
Categorización de los códigos	67
Tarea 2.	81
Tarea 3.	84
Referentes bibliográficos	94
Tabla de índices y figuras	100

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la línea de Prácticas y Tecnología de la Información y la Comunicación en Educación Matemática (PTICEM) del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

De este modo, este trabajo brindara una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para la modelación de la función logística para el crecimiento del área de una hoja de frijol para estudiantes de grado once de media vocacional en el colegio bilingüe LACORDAIRE del municipio de Santiago de Cali.

A continuación, se realiza una presentación de los capítulos del trabajo del trabajo de grado en mención:

El primer capítulo trata sobre la exposición del problema de investigación, los antecedentes, la forma de contextualización en el medio, la justificación para llevar a cabo esta investigación y los objetivos que se pretende alcanzar en este trabajo.

En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos en el cual se desarrolla la presente investigación, entre ellos se encuentran los matemáticos, curriculares, cognitivos y didácticos.

En el tercer capítulo se expone el marco metodológico que es realizado en este trabajo, en el cual muestra un enfoque cualitativo e indica la estrategia metodológica a desarrollar, el estudio de casos y el estudio de implementación lugar donde se realizará la investigación para la secuencia de tareas propuesto por Margolinas.

Esta investigación se realizará con 24 estudiantes de grado undécimo dividido en grupos de 4 a 6 personas del colegio bilingüe Lacordaire. Lo que se busca es poder observar, analizar, recolectar e interpretar adecuadamente la información brindada por los estudiantes teniendo en cuenta los referentes teóricos y con esto, analizar y comprender formalmente lo que sucede en este proceso de aprendizaje.

Para la realización de los análisis se tienen en cuenta unas rejillas que involucran las teorías recopiladas y que buscan mostrar de buena manera los resultados con la intención de reconocer los aportes que genera el aprendizaje, el diseño e implementación de una propuesta de secuencia de tareas. Ya, por último, se tienen en cuenta los resultados de la investigación y agregando a ello las conclusiones.

Resumen

Las funciones matemáticas son herramientas esenciales para modelar y describir fenómenos del mundo real en campos diversos como la economía, la biología y la demografía. Su comprensión es fundamental para que los estudiantes puedan aplicarlas en situaciones cotidianas y analizar el comportamiento de diversos sucesos. Sin embargo, el aprendizaje de las funciones presenta desafíos significativos.

Uno de los principales retos es la dificultad que experimentan los estudiantes para cambiar entre diferentes representaciones de una función (algebraica, gráfica, tabular). Esta habilidad es crucial para una comprensión profunda del concepto. Además, el desarrollo del pensamiento variacional, necesario para entender las funciones, es un proceso lento y complejo que requiere tiempo y práctica.

La modelación juega un papel clave en la interpretación de funciones, pero los estudiantes a menudo enfrentan problemas al modelar situaciones reales. Estos incluyen el mal uso de símbolos y términos matemáticos, y la dificultad para ver las representaciones tabulares como una forma válida de función en sí misma.

Este trabajo propone una secuencia de tareas innovadora que utiliza el crecimiento del área de una hoja de frijol para explorar la función logística. La propuesta integra el software GeoGebra como herramienta dinámica para graficar y expresar algebraicamente el comportamiento del crecimiento, facilitando el análisis de datos complejos.

El objetivo es mejorar la comprensión de los estudiantes sobre las funciones y su aplicación en contextos reales, abordando el pensamiento variacional y las dificultades comunes en el aprendizaje de este concepto matemático fundamental. Esta aproximación práctica y tecnológica

busca hacer más accesible y significativo el aprendizaje de las funciones, especialmente la función logística, en el contexto del crecimiento biológico.

Capítulo I: Aspectos Generales del Trabajo

Planteamiento del Problema

Las funciones permiten representar, modelar y describir situaciones del mundo real, ya sean fenómenos físicos, económicos, biológicos o demográficos. Por ejemplo, conocer la variación del precio de la moneda en un periodo de tiempo permite predecir el valor de una acción de una empresa en la bolsa de valores, el crecimiento de una especie, entender la oferta, la demanda y el equilibrio del mercado en la economía. Joya Vega (2013 p. 88). De este modo, las funciones influyen mucho en la vida diaria para conocer el comportamiento de sucesos, por ello es necesario que los estudiantes conozcan su utilidad, la forma de como modelar cierta situación y poder representarla como función.

Por ello es pertinente resaltar que, “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista”. (MEN, 1998).

“En las observaciones que se han podido hacer en el aprendizaje de las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos estudiantes en los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible” (Duval, 1999, p. 15) y que cuando se tiene éxito al realizar actividades de conversión, la aplicación de las reglas tiene un sentido único, es decir, si un estudiante tiene éxito al realizar una conversión de un registro a otro, no implica que el estudiante tendrá éxito en realizar la conversión inversa. Por tales motivos, es aconsejable explorar las situaciones de conversión para todos los pasajes posibles.

De acuerdo con ello es por esto que el desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables. (MEN, 2006, p. 68)

Dicho lo anterior se puede establecer una relación de distintos términos que son llevados por el estudiante para interpretar de manera correcta el concepto de función a través esquemas, fórmulas y gráficos. Teniendo esto se obtiene una manipulación o habilidad para poder establecer una distinción de objetos matemáticos y decir el comportamiento.

Por otra parte, para interpretar a fondo el concepto de función la modelación juega un papel crucial a la hora de entender el comportamiento de un suceso que puede ser representado algebraica o gráficamente, ya que aporta información importante para el análisis de ciertas situaciones de crecimiento, decrecimiento o diversas situaciones que involucren un patrón.

Se puede evidenciar que los estudiantes presentan problemas a la hora de modelar un suceso. Otro autor como Radatz (1980) mencionado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006) argumentan que los estudiantes tienen errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos. Consideran el registro tabular como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Esto se remite a identificar algunos errores frecuentes que tienen los estudiantes al interpretar el concepto de función al no tener claro la simbología correcta con que se representa una función y la manera de cómo se puede graficar en el plano cartesiano a partir de la forma tabular.

Según plantea el MEN en su documento Estándares de Matemáticas, un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas, razonamientos y construir conceptos básicos para avanzar hacia las demostraciones.

Ciertas situaciones pueden ser representadas o transformadas, mediante un conjunto de valores y símbolos para apoyar algunos casos donde se exige un razonamiento de apoyo a una investigación. Todo ello conduce a refutar o demostrar patrones de comportamientos de variables que estén afectando un entorno.

El pensamiento variacional señala la importancia de los cambios de funciones, analizando su comportamiento específico. En este trabajo se basará en presentar un enfoque sobre el concepto de función, la relación de independencia y dependencia entre las variables y la función logística.

Este interés surge como resultado del análisis de algunas investigaciones en torno a la función logística, ya que es una función que permite describir diferentes crecimientos poblacionales (desde parásitos, animales, plantas, hasta humanos) y para realizar esta propuesta se requiere tomar una hoja de frijol y a partir de ello encontrar una expresión matemática que describa la manera como crece el área de la hoja de esta planta al transcurrir los días y también predecir el área de la hoja para un día determinado y poder evidenciar a través de GeoGebra que el modelo que más se ajusta a este crecimiento es logístico. Habiendo dicho esto la función logística es la función más indicada para describir y modelar de forma correcta el comportamiento de crecimiento de una planta, L. Lazzari (2020).

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior este trabajo pretende proponer una situación donde los estudiantes sembraran una semilla de frijol verde y de acuerdo con ello tomaran los datos del crecimiento del área de la hoja a partir del día ocho donde es aproximadamente que la hoja se encuentra desarrollada en cierta parte. Todo ello se hace necesario para evidenciar la importancia de la función logística en una situación de contexto real como lo es el crecimiento de la hoja y el proceso de desarrollo de la planta. Se hace necesario abordar el pensamiento variacional, debido a los fenómenos de cambio o variación que presenta este crecimiento con el pasar del tiempo.

Para realizar esta propuesta se utilizará el software GeoGebra como herramienta dinámica para graficar y expresar algebraicamente el comportamiento del crecimiento del área de la hoja de frijol en determinado tiempo. En ella, se puede realizar un mejor análisis del comportamiento de cierta función a través del gráfico y la forma algebraica. Este software es necesario utilizarlo cuando los datos que se van a analizar son demasiados y es complejo realizarlo a papel y lápiz.

En este sentido la pregunta que da cuenta de este trabajo de investigación es:

¿Qué aportes genera al aprendizaje la implementación de una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para la medición del área de una hoja de frijol con un modelo logístico en grado once?

Antecedentes

Para poder desarrollar este trabajo se realizó una búsqueda de distintas investigaciones que tiene que ver con los problemas de modelación por parte de los estudiantes y su relación con la función logística. En este apartado se exponen algunos escritos, resaltando las problemáticas y el desarrollo de los objetivos planteados.

Investigaciones en torno a la modelación que involucran la función logística

A nivel local

Menciona Choco Bonilla (2019) en su trabajo de grado denominada “Dificultades y errores de estudiantes de grado undécimo en torno al estudio de las funciones racionales” que las dificultades presentes en los estudiantes al modelar alguna función, tiene que ver con la variación y el cambio; usualmente, en la observación de los cambios los estudiantes tienen dificultad para identificar cuáles son los objetos que están cambiando o cuáles son los que permanecen fijos (Sierpinska, 1991). Por tal razón, se sostiene que el planteamiento en el aula de situaciones que requieran el desarrollo de argumentos y estrategias variacionales puede favorecer la comprensión significativa del concepto de función y colaborar al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes; este estudio implica la apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otras y da la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional (Vasco, 2003). De esta manera las nociones de variable y función constituyen la base de la matemática de la variación y el cambio Choco Bonilla (2019).

Esta investigación es de interés para el presente trabajo ya que permite constatar una de las dificultades existentes en el aprendizaje de los estudiantes al querer modelar una función y poder

identificar la relación entre independencia y dependencia entre las variables. Tiene que ver con la concepción errada de los estudiantes de involucrar la variación y el cambio en situaciones del contexto.

Además, Choco Bonilla (2019) añade textualmente: se hacen evidentes otras dificultades relacionadas al estudio de las funciones racionales, y de manera específica, las dificultades que tienen los estudiantes de articular conceptos como el dominio, discontinuidad, comportamiento asintótico, caracterizando las funciones racionales desde lo algebraico, lo tabular y lo gráfico. Los problemas presentes se dan en general, cuando este tipo de funciones son discontinuas, lo cual genera dificultades en los estudiantes, por un lado, por la experiencia que ellos han tenido previamente con el estudio de las funciones polinómicas, las cuales tienen como dominio el conjunto de los números reales, y además son continuas (Noreña, 2013), obligándolos a hacer un cambio conceptual, en el que deben desligarse de pensar en un dominio de todos los reales, para pensar en un dominio que discrimina valores reales.

Lo anterior revela ciertos elementos que pueden tenerse en cuenta para el diseño de ciertas situaciones que requieran la representación gráfica de una función y poder establecer sus asíntotas bien sea horizontales o verticales, dominio, rango, puntos de inflexión y demás.

Esto es importante debido a que la función logística es una composición de la función exponencial y racional, el estudiante debe tener en cuenta estos elementos para la representación gráfica y a partir de ello poder realizar la predicción de cierto suceso de forma correcta.

Seguidamente, se presenta la investigación realizada por Gallego (2021), denominada “Una Secuencia de Situaciones Didácticas mediada por GeoGebra para dar cuenta de la función exponencial en grado noveno de educación básica” donde realiza un análisis de una institución

educativa local donde se revisó los resultados de pruebas saber aplicadas a estudiantes de grado 9° del año 2017, donde indica que el 75% de la población estudiantil de grado noveno está por debajo del rango de mínimo e insuficiente en lo que respecta a la competencia de resolución de problemas y además de ello Desde la propuesta de los Estándares Básicos de Aprendizaje que se evalúan en estas pruebas, se tiene el resultado del estándar “Resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos”. En cuanto a este estándar, los resultados arrojan: que el 67% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos, una cifra de más del 50% de la población de este grado.

Esta investigación revela que los estudiantes tienen problemas al momento de resolver problemas que involucran situaciones donde haya una variación en las funciones, particularmente la función exponencial, donde no hallan la forma de su representación gráfica, simbólica o tabular.

A nivel nacional

López (2015) presenta en su investigación “modelación del crecimiento del área foliar de una hoja de frijol”. En el cual se desea encontrar una expresión matemática que describa la manera como crece el área de la hoja de una planta de frijol, a lo largo de los días. Predecir el área de la hoja para un día determinado o dada un área aproximada, estimar el tiempo transcurrido.

En el trabajo anterior con la ayuda del software dinámico GeoGebra se procedió a obtener una gráfica, para realizar la respectiva regresión y obtener la expresión matemática del crecimiento del área de la hoja, en función del tiempo. El software muestra una curva que se ajusta a los puntos dibujados, y también una expresión matemática, concluyendo que este crecimiento puede modelarse mediante una función logística. Cabe resaltar que en el trabajo que estoy realizando se da una continuidad a la investigación de López (2015) para estudiantes de grado undécimo y

además a ello se realiza el estudio de forma más minuciosa, teniendo en cuenta los referentes y la mediación instrumental.

Parra (2019) presenta los resultados obtenidos mediante una estrategia metodológica que involucra la noción de crecimiento poblacional, crecimiento restringido y ecuaciones recursivas, en el desarrollo de un curso de cálculo diferencial para la formación de ingenieros forestales. Se implementa un enfoque de investigación-acción, que permite contrastar resultados entre dos grupos; experimental y control, con los cuales se valida la propuesta. Esta forma de trabajar las nociones en los grupos permitió identificar falencias en los diferentes tipos de representación usados en algunos objetos matemáticos como lo son función, sucesión y límite. Igualmente, el contraste final evidencia que el uso de contextos propios de la ingeniería fortalece el aprendizaje del cálculo diferencial.

El artículo anterior expone la importancia metodológica de crecimiento poblacional, secuencia que se encuentra muy relacionada con la función logística y exponencial, ya que son modelos de crecimientos que involucran la noción de límite (función logística), debido a la asíntota horizontal que presenta y sus aproximaciones. El cálculo diferencial juega un rol importante para el estudiante de grado undécimo debido a los contenidos abordados.

A nivel internacional

Valero Cazeres (2020) en su investigación “Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México” En el presente documento se reportan los resultados de una experiencia didáctica con una población de estudiantes de un bachillerato tecnológico mexicano en su curso de Cálculo Diferencial. Los jóvenes probaron un par de modelos exponenciales para la modelación de los datos de la pandemia del COVID19 en México usando el software GeoGebra. La interacción profesor – estudiante fue

a distancia y se basó en una serie de preguntas relacionadas con los aspectos variacionales del comportamiento de los datos Contagios Acumulados vs. Tiempo y Nuevos Contagios vs. Tiempo.

El documento anterior expone la importancia de la modelación y el enfoque variacional para una situación pandémica como lo fue el COVID 19 en México, a través de ello realizan un comparativo entre dos funciones exponenciales: la Gompertz y la logística, con el objetivo de cuál de las dos funciones se ajustaba más al achatamiento de la curva pandémica y brindar un diagnóstico de la cantidad de personas infectadas en determinado día. Según (Valero) El énfasis en el diseño de las apps de GeoGebra y de las preguntas que debían contestar los estudiantes se colocó en el análisis del comportamiento gráfico de los datos diarios de la enfermedad relativos a los contagios acumulados y de los dos modelos mencionados en el Logístico y Gompertz, y de su velocidad de cambio o nuevos contagios, que en el discurso didáctico y matemático está asociado a la noción de “derivada” de la función Contagios Acumulados vs. Tiempo.

Teniendo en cuenta los trabajos de investigación realizados anteriormente se puede evidenciar que en todos ellos se basan en el buen uso de la modelación, la variación y la capacidad de poder representarlo como función, bien sea gráficamente, algebraica o tabular, para que a partir de ello se pueda brindar un buen diagnóstico de un suceso que está ocurriendo. El presente trabajo que aquí expongo trata de complementar todas estas investigaciones que ya han sido abordadas y poder desarrollar un modelo que busque un comportamiento del crecimiento del área de una hoja de frijol y mediante esto poder indicar que el modelo que más se ajusta es el logístico, empleando el software dinámico GeoGebra, a través de una secuencia de tareas.

Justificación

La modelación es una de las habilidades más importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. Consiste en matematizar situaciones en diferentes contextos (reales, hipotéticos o formales), mediante el análisis de variables, el uso de diferentes representaciones, la definición de conceptos y la obtención de expresiones matemáticas que sintetizan las relaciones entre las variables, permitiendo estimar y calcular nuevos valores y predecir resultados al variar los parámetros iniciales. López Mendoza, L (2015)

Es por ello, que este trabajo pretende proponer una situación que consiste encontrar una expresión matemática que describa la manera como crece el área de la hoja de una planta de frijol al transcurrir los días y también predecir el área de la hoja para un día determinado y poder evidenciar a través de GeoGebra que el modelo que más se ajusta a este crecimiento es logístico, considerando diferentes tipos de representaciones (tabular, simbólico y gráfico).

Esto pretende establecer cuál es la función más adecuada para la modelación de la situación e indicando las curvas de crecimiento y decrecimiento de la función con datos tomados por los estudiantes. Adicionalmente se pretende generar proyecciones sobre datos futuros y argumentar dicha proyección.

Con la anterior situación, se diseñará una secuencia de tareas exploratorias de Margolinas (2013) esta teoría presenta una óptica en el cual describe algunos aspectos sobre un concepto matemático y como está relacionado para llegar a un aprendizaje sobre una noción determinada. También brinda situaciones que permite a los estudiantes solucionar a partir de actividades iniciales y de fácil entendimiento, tareas posteriores para enfrentarse a matemáticas un poco más complejas de lo que no se esperaba.

Para potenciar la secuencia de tareas se integra un micro mundo diseñado con finalidades didácticas como es el caso de GeoGebra, el cual cuenta con herramientas dinámicas que proporcionan múltiples representaciones sobre las cuales los estudiantes pueden anclar su comprensión. Además, se considera este Software ya que cuenta con una plataforma de uso libre como es el caso de GeoGebraTube, el cual contiene un número significativo de recursos de fácil acceso al público en general.

Estas características dichas anteriormente, permiten que GeoGebra sea un Software asequible para cualquier docente o estudiante que lo necesite y además de ello se puede descargar de una manera fácil y sencilla permitiendo de esta forma un libre uso por parte de cualquier persona.

Este trabajo también pretende incentivar al estudiante y a los docentes al buen uso de este software para ser utilizado como herramienta de ayuda y mejora para el aprendizaje y las clases puedan ser desarrolladas bajo un ambiente dinámico y exploratorio. Se espera que con esta propuesta se modele, grafique e interprete bajo un esquema variacional y espacial la función logística.

Cabe anotar que pese al método de enseñanza tradicional donde se utiliza el papel y lápiz a veces puede ser monótono y algo confuso, es por eso por lo que se hace necesario conocer de nuevas herramientas educativas que no solo llamen la atención de los jóvenes que han nacido en una era digital sino que también sea el vehículo para llevar los conceptos académicos y el trabajo de enseñanza aprendizaje sea efectivo e innovador, en la necesidad de querer llevar a los estudiantes a contextos reales.

Planteamiento de los Objetivos

Objetivo General

- Diseñar e implementar una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para identificar si la función logística responde a una situación de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, utilizando datos reales de medición.

Objetivos específicos

- Determinar algunos fenómenos, pensamientos y procesos matemáticos asociados al proceso de aprendizaje de la función logística desde una perspectiva epistemológica, didáctica, cognitiva y curricular.
- Diseñar una secuencia de tareas que gire en torno a la función logística, usando como contexto el crecimiento del área de una hoja de frijol en grado undécimo de educación media vocacional.
- Caracterizar los procesos de mediación instrumental que se dieron en la puesta en acto de las secuencias de tareas.

Capítulo II: Marco Teórico de Referencia

Descriptores y palabras clave

- Modelación matemática en biología
- Aplicación de la función logística
- Uso de GeoGebra en la enseñanza de funciones
- Crecimiento de plantas como contexto matemático
- Pensamiento variacional en educación secundaria
- Representaciones múltiples de funciones
- Aprendizaje contextualizado de matemáticas
- Análisis de datos en crecimiento biológico
- Tecnología educativa en matemáticas
- Secuencias didácticas para funciones
- Medición y análisis del área foliar
- Predicción matemática en fenómenos naturales
- Integración de matemáticas y biología
- Desarrollo del pensamiento algebraico
- Modelación del crecimiento poblacional
- Aplicaciones reales de funciones matemáticas
- Estrategias de enseñanza para funciones complejas
- Interpretación gráfica de datos biológicos

- Competencias matemáticas en contextos científicos
- Interdisciplinariedad en la enseñanza de matemáticas

Los descriptores anteriores abarcan los principales aspectos de este trabajo, desde un enfoque matemático específico (función logística, modelación) hasta el contexto biológico (crecimiento de plantas), pasando por la herramienta empleada en este proyecto (GeoGebra) y los enfoques pedagógicos (aprendizaje contextualizado, secuencias didácticas). También reflejan la naturaleza interdisciplinaria del proyecto y su énfasis en aplicaciones prácticas y tecnología educativa.

Referente Matemático

En este trabajo se presenta de manera general el concepto de función y función logística, se describen algunas representaciones de una función, así como la definición de alguno de sus elementos, como por ejemplo la relación de independencia y dependencia entre las variables y sus diversas aplicaciones. Vale la pena aclarar que no se tienen en cuenta todos los elementos que hacen parte del concepto de función, ya que este trabajo solo se centrará en algunos elementos del objeto matemático. Entre ellos podemos destacar la representación de la función logística, discontinuidad, asíntotas, entre otros.

Para empezar, definiremos el concepto de función, Una función de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y (G. Zill 2012 p.200)

Se acostumbra a representar una función por una letra, por ejemplo, f , g o h . Entonces, se puede representar una función f de un conjunto X a un conjunto Y mediante la notación $f: X \rightarrow Y$.

El conjunto X se llama dominio de f. El conjunto de elementos correspondientes y del conjunto Y se llama rango de la función (G. Zill 2012 p.200).

Para modelar los datos se va a considerar las ecuaciones diferenciales, dado que el crecimiento exponencial se deriva del hecho de que el ritmo o velocidad de cambio de una variable y es proporcional a un valor determinado y. El crecimiento exponencial es ilimitado, pero cuando describe, una población, con frecuencia existe algún límite superior L más allá del cual no puede haber crecimiento. El límite superior L se llama capacidad límite o de soporte, la cual es la máxima población que se puede sostener o soportar a medida que se incrementa el tiempo t. Es por ello que un modelo que con regularidad se usa para este tipo de crecimiento es la ecuación diferencial logística.

$$dy/dt = ky (1-y/L)$$

Donde k, L Son constantes positivas. Una población que satisface esta ecuación no crece sin límite, pero se aproxima a la capacidad límite o de soporte L al aumentar t.

Función logística

La función logística permite describir diferentes crecimientos poblacionales (desde parásitos, animales plantas, hasta humanos). En epidemiología, es una función que puede expresar la propagación de enfermedades epidemiológicas. El modelo logístico y sus variantes han sido empleados para la modelización para procesos biológicos y demográficos, con el fin de realizar

pronósticos poblacionales, también ha sido aplicado con éxito para múltiples investigaciones sobre la difusión tecnológica.

Una infección puede describirse como el crecimiento de la población de un agente patógeno, por lo que un modelo logístico parece razonable.

La función logística adopta esta forma:

$$f(t) = a / (1 + be^{-kt})$$

En esta fórmula, tenemos la variable t que es el tiempo y tres parámetros: a , b , k .

a : es el valor del crecimiento máximo de la población infectada.

b : es cualquier número real positivo que depende de la condición inicial (de personas infectadas).

k : es la tasa de crecimiento.

Según referencia *López Mendoza* (2020) El crecimiento del área de la hoja de una planta, es similar a la forma como crece un ser humano o una población, y este crecimiento puede modelarse mediante una función logística. Esta función también tiene un punto de inflexión en $f(x_i) = a/2$, este valor de x_i es el punto en el que la primera derivada comienza a disminuir (es decir, el pico después del cual la infección comienza a ser menos agresiva y disminuye).

La función logística que modela el crecimiento logístico de una magnitud $m(t)$ tiene las siguientes propiedades:

- crecimiento acotado para todo se cumple que: $0 < m(t) < k$

- aproximación exponencial para valores pequeños de m/k o también para valores $t \rightarrow -\infty$

la función logística puede aproximarse por un modelo de crecimiento continuo del tipo

$$m(t) \approx m e^t$$

- la función logística generalizada tiene los siguientes límites:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = a \frac{m}{n}, \quad P(0) = a \frac{1+m}{1+n}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = a$$

La función logística se representa de la siguiente forma: Grafico tomado de: (Víctor Hugo Gil Avendaño 2020)

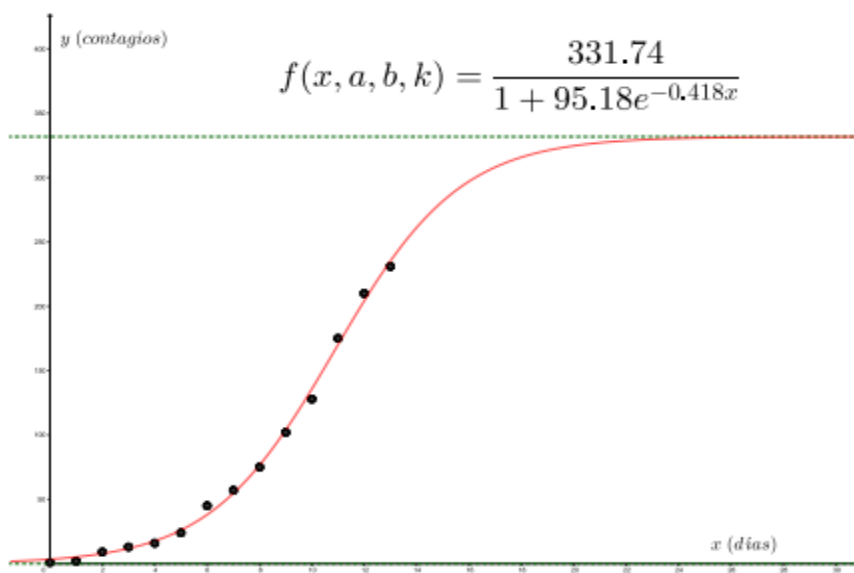


Ilustración 1 Gráfico función logística

En este orden de ideas, se evidencia que la función logística asume diferentes representaciones, entre ellas; la simbólica, tabular y gráfica. Estas representaciones serán consideradas en este trabajo.

La función logística ha sido usada cada vez con más frecuencia para el análisis demográfico. en una primera etapa la función logística fue usada para predecir la población total de un país o área, posteriormente se ha usado para predecir o reproducir la tendencia de ciertas características de la población, como porcentaje urbano, porcentajes de alfabetos o para interpolación (Arriaga, 1975 ; Naciones Unidas,1982) más recientemente la función logística ha sido utilizada para suavizar funciones de la tabla de mortalidad, para estimar distribuciones de población por edades correspondientes a sub-áreas, para proyectar poblaciones de pequeñas áreas (Brass, 1975; CELADE,1982 Naciones Unidas, 1982) aunque el uso de funciones logísticas en el análisis demográfico se ha extendido y aumentado notoriamente, los supuestos implícitos que encierran dichas aplicaciones, no deben descuidarse.

Como es de notar todos estos aspectos, aplicaciones y diferencias son de utilidad para la comprensión y la construcción de la función logística y exponencial, teniendo en cuenta que el modelo logístico es un caso particular de la función exponencial, presentando un comportamiento exponencial y asintótico que manifiesta internamente un concepto de límite , es decir partimos de un conjunto de datos y realizando una modelización encontramos una función que requiere un tratamiento mediante límites.

Referente Curricular

Los lineamientos curriculares “son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el MEN con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación en su artículo 23” (MEN, 1998).

En lo que se refiere a los lineamientos curriculares, cabe decir que este documento es el referente que promueve la enseñanza a nivel nacional y en particular en las matemáticas, promueve el desarrollo de los cinco pensamientos que son: pensamiento numérico, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio, pensamiento variacional y pensamiento espacial.

El pensamiento que orienta este trabajo es el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (M.E.N. 2006. p.66).

Se hace necesario abordar el pensamiento variacional, debido a los fenómenos de cambio o variación que presenta el crecimiento del área de una hoja con el pasar del tiempo. Entre estas representaciones encontramos; verbal, algebraica y gráfica.

Otro aspecto que se va a considerar en este trabajo son los procesos generales; formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Particularmente la modelación, que según los estándares básicos de competencia se define como un sistema figurativo mental, gráfico o

tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible.

La modelación, es “una estructura” que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 1998). Según lo que se plantea es que el estudiante debe ser capaz de representar alguna situación determinada, por medio de un lenguaje algebraico, para poder comprender la situación de manera más sencilla.

La presente propuesta aborda la competencia de modelación con la intención de que el estudiante pueda matematizar y a través de ello brinde pronósticos de crecimiento del área de la hoja de frijol que según establece los estándares, el estudiante debe establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

Cabe resaltar que el contexto matemático que se desarrollará el problema mencionado anteriormente se realizará bajo un ambiente escolar que según lo establece el M.E.N dicha relación es importante para despertar su interés y permitirles acceder a las actividades con una cierta familiaridad y comprensión previa. Es por eso que las matemáticas brindarán la manera de cómo se comporta el crecimiento de la hoja de la planta a medida que transcurre el tiempo. Del mismo modo se espera que estas predicciones sean compartidas en algún momento con otros miembros de la comunidad educativa y por qué no de su entorno local o regional.

Cabe resaltar que, en los estándares básicos de competencia, se establece que deben saber y hacer los estudiantes para poder avanzar al siguiente año escolar, instauro: “Análisis en

representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas” (p, 87).

Sumado a lo anterior, este documento tiene en cuenta los lineamientos curriculares, con su respectivo contexto y pensamiento, indicando así ciertos niveles de complejidad, en el cual se verá reflejado tanto en las formas de aproximarse a un conocimiento, como en los conceptos de las matemáticas, que tendrá en cuenta además de su desarrollo académico, también lo personal y social. También se puede hacer alusión a dos elementos importantes que son: la coherencia vertical y coherencia horizontal. En el podemos ver cómo se desarrollan ciertas competencias para los grados 1 a 11 y en qué manera según el grado que pertenece el estudiante el estudiante debe abordarlo.

En la siguiente figura se presenta la coherencia vertical.

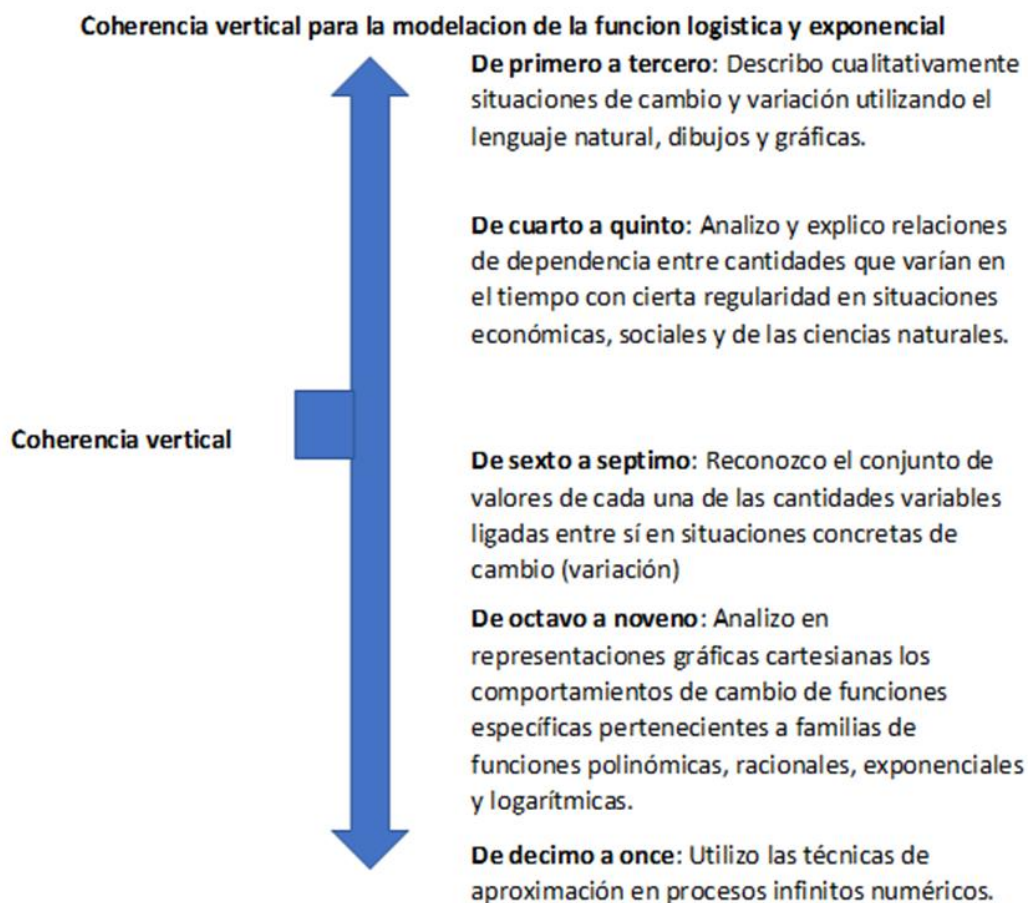


Ilustración 2 Coherencia vertical

Figura 2. Coherencia vertical

Nota. La figura corresponde a una elaboración propia.

La realización de la coherencia vertical permite analizar los conocimientos previos con los que cuenta el estudiante, que son elementos para considerar en el diseño de tareas de este trabajo.

A continuación, se presenta la coherencia horizontal:

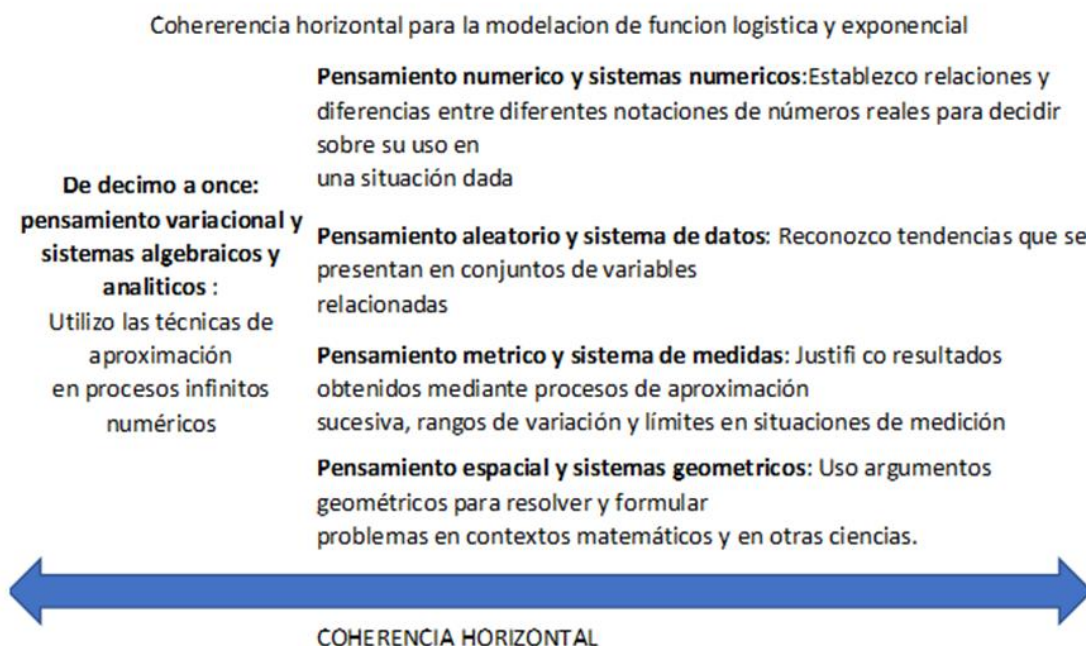


Ilustración 3 Coherencia horizontal

Figura 3. Coherencia horizontal

Nota. La figura corresponde a una elaboración propia.

Mediante los conocimientos curriculares que se mencionan anteriormente se puede observar que los estudiantes necesitan conocimientos matemáticos para poder desarrollar de buena forma el pensamiento variacional y tener en cuenta que existen muchos factores globales que se pueden relacionar matemáticamente, con una situación de exploración, donde se efectúe todo lo pertinente para realizar una buena actividad de aprendizaje.

Referente Didáctico

Este trabajo aborda elementos sobre la secuencia de tareas basado en Margolinas (2013), este modelo trata un enfoque donde describe distintos aspectos de un concepto matemático y la forma en que se encuentran relacionados y cómo están vinculados para lograr el aprendizaje de un campo conceptual por completo. Asimismo, proporciona experiencias que permiten a los estudiantes resolver a partir de tareas iniciales y sencillas tareas posteriores, las cuales abren paso para enfrentarse a matemáticas más avanzadas de lo que hubieran sido de otra manera. Díaz-Chamizo (2019).

El diseño de tareas propuesto por Margolinas (2013), permite estudiar varios aspectos de la función logística, la manera como se encuentra relacionada con el crecimiento, todo ello con el fin de adquirir un aprendizaje total del concepto matemático a estudiar. Además, permite dar una estructura al diseño de secuencia de tareas y tomar una decisión de cuál diseño se va a emplear. Díaz-Chamizo (2019).

Según Margolinas (2013) argumenta que las tareas son todas aquellas actividades en la que el estudiante conozca y se apropie de los elementos que se quieran abordar. En este trabajo se pretende abordar ciertos elementos de la función logística, cuyo aprendizaje estará realizado bajo los ambientes de geometría dinámica, como lo es GeoGebra.

En cuanto al diseño de tareas Margolinas (2013) refiere que el diseño varía de acuerdo a la forma de cómo se trabajan las tareas y como se encuentra estructurado el diseño. Adicionalmente a ello el estudiante también puede realizar preguntas o tener algún material físico, cuyas indicaciones que el maestro pueda decir, ya se encuentren explícitas.

El presente trabajo tiene en cuenta el contexto real de los estudiantes y los elementos que se trabajan con la función logística, se brinda un espacio de interacción y exploración, con las indicaciones señaladas, planteando preguntas de acuerdo con las actividades a desarrollar en GeoGebra, aumentando el grado de complejidad a medida que vayan avanzando.

Por otra parte, para la secuencia de tareas, Margolinas (2013) argumenta que para lograr el fundamento en la enseñanza de un concepto totalmente (función logística) se tiene que examinar los diferentes elementos del conocimiento y la manera como se encuentran relacionados. Ello quiere decir que los estudiantes se deben enfrentar a diferentes situaciones o tareas y a medida que se avance irá aumentando el nivel de complejidad.

Para comprender el desarrollo de la secuencia de tareas se realizarán actividades de exploración del estudiante con el medio, con el objeto de que el estudiante se familiarice con las situaciones allí planteadas, a partir de unos saberes previos que irá desarrollando a medida que vaya avanzando, para que al final el docente formalice ese saber y se pueda relacionar estas situaciones con el entorno.

En este trabajo los estudiantes se enfrentarán a una primera tarea de reconocimiento y conceptualización de manera específica de la función, explicitando la relación de independencia o dependencia entre las variables. Los estudiantes interactúan con el diseño planteado en las secuencias de tareas, mediante preguntas allí planteadas, adquiriendo un saber implícito que tiene como objetivo la explicitación del conocimiento por parte del docente y los conocimientos previos para las siguientes tareas.

En el desarrollo de las otras tareas, se busca que el estudiante articule y relacione las representaciones de la función (logística), adquiriendo más saberes implícitos, a través de la

interacción con el software. Es importante señalar que, al finalizar la serie de secuencia de tareas, el docente formaliza todo lo concerniente a las actividades, para transformar ese conocimiento implícito en un conocimiento explícito.

Ahora bien, Margolinas (2013) explica tres secuencias de tareas, donde la primera secuencia tiene que ver con la existencia de un problema de menor complejidad, donde el estudiante llega a una forma de resolver lo allí planteado de manera sencilla, donde también se recurra a una forma de solución. Otro tipo de tarea donde aumente el nivel de complejidad, en referencia a la anterior, adicionando elementos que enriquezcan el aprendizaje y el nivel de complejidad. La tercera tarea consiste en una secuencia de actividades, donde el concepto matemático va adquiriendo forma y complejidad a medida que se explora e indaga.

La secuencia de tareas que se emplean en este trabajo presenta preguntas inicialmente de fácil interpretación y solución, pero a medida que se vaya avanzando los estudiantes notarán que el nivel de complejidad aumenta, conllevando entonces a un análisis más profundo. Para realizar estas secuencias es necesario que el estudiante tenga conocimientos previos sobre la función exponencial, ya que de ahí es que guarda una estrecha relación con la función logística.

Referente Cognitivo

La referencia cognitiva toma en cuenta todo lo concerniente en torno a las teorías de la mediación y génesis instrumentales, en el cual nos indican los procesos que llevan a cabo los estudiantes por medio de un artefacto, que conlleva a procesos de acción y uso de un instrumento. Esto se remite a pensar en la relación entre la mediación y la secuencia de tareas, que debe ser muy estrecha con el fin de contribuir al aprendizaje del estudiante con ciertos elementos de la función logística.

Rabardel (1995), plantea un enfoque donde trata de mostrar que tan complejo es el instrumento y la génesis del instrumento en el individuo, mirando la relación de este con la actividad del contexto. Ya dicho esto todo ello sirve para construir un pensamiento matemático en particular y que puede ser representado bajo un sistema didáctico, que es la relación entre el profesor y el estudiante, el profesor y el saber que se realizan en la actividad instrumentada.

En las actividades propuestas se tiene en cuenta la mediación con GeoGebra, con el objetivo de tener en cuenta los elementos de variación y cambio, fijando la atención en la visualización. Las acciones de los estudiantes en el aprendizaje de la función logística son mediadas por GeoGebra, ya que permite observar las interacciones que se dan entre el estudiante y las funciones.

Por tanto, en la génesis instrumental los artefactos se convierten en instrumentos y las acciones de los estudiantes, también están influenciadas por la manera como el artefacto es comprensible para ellos, es decir que tan visible es el artefacto o parte de él Chumpitaz-Malpartida (2019).

De este modo la evolución de artefactos según Chumpitaz-Malpartida (2019), concierne a dos dimensiones, dos orientaciones diferentes y a la vez conjuntas, la instrumentalización dirigida hacia el artefacto y la instrumentalización dirigida hacia el sujeto mismo (estudiantes).

Menciona Chumpitaz-Malpartida (2019), que la instrumentalización es un proceso referido al surgimiento y evolución de los componentes artefacto del instrumento: selección, reagrupación, producción, institución de funciones, atribución de propiedades y transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, etc.), que prolongan las creaciones y realizaciones de artefactos cuyos límites son difíciles de determinar debido a este proceso de transformación.

Asimismo, la instrumentación es un proceso relativo al surgimiento y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada: constitución, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación recíproca, combinación y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos Chumpitaz-Malpartida (2019). Esto se refiere a la realización de esquemas que va a utilizar el sujeto. En este trabajo, se genera un esquema de acción instrumental cuando el estudiante identifica las estrategias para modelar cierto suceso de crecimiento y pueda establecer a qué función corresponde realmente (logística u otras) y pueda interpretar lo que sucede allí. A medida que el sujeto utiliza los esquemas de acción instrumental, puede constatar sus potencialidades y limitaciones. Los esquemas generados dependen de los conocimientos del sujeto Montero (2020). Dicho esto, se refiere al conocimiento del estudiante y a través de ello puede darse cuenta de que tanto aumenta su conocimiento o si hay alguna limitación que se lo impide.

De acuerdo a ello es donde el estudiante desarrolla estrategias basándose en aspectos como traducir de lo verbal a lo algebraico y de lo algebraico a lo gráfico. También se distinguen unos niveles de esquemas de utilización que son los siguientes según menciona Chumpitaz-Malpartida (2019)

- Los esquemas de uso están orientados a las actividades secundarias, es decir, a la gestión de las características y propiedades, que corresponden a las acciones naturales del artefacto. En este primer nivel se sitúan los esquemas de utilización elementales, por ejemplo, la manipulación del deslizador (Rabardel, 1995, p.172).
- Los esquemas de acción instrumentada están orientados a mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de las actividades principales, para las que el artefacto es un medio de realización. Los esquemas del primer nivel (esquemas de uso) constituyen,

según la terminología de Cellier, módulos especializados, que se coordinan unos con otros y también con otros esquemas, se asimilan y se acomodan recíprocamente para construir los esquemas de acción instrumentada (Rabardel, 1995, p.172)

De este modo podemos decir que los esquemas juegan un papel fundamental a la hora de enfrentarse a cierta problemática, que requiera el diseño de cierta estrategia para poder desarrollar un conocimiento que nos conduzca a la solución de las tareas establecidas.

Capítulo III: Metodología

Hay muchos métodos para abordar una investigación, entre ellos se encuentra el método cuantitativo, cualitativo y mixto. El método cuantitativo hace referencia al manejo a la recopilación de toda la información que se puede medir y tiene como objetivo poder contar, analizar estadísticamente, matemáticamente, todos estos datos que han sido recopilados, por medio de sondeos, cuestionarios o encuestas, mediante el uso de procesos estadísticos; el método cualitativo hace alusión al comportamiento o percepción de las personas sobre algún tema en particular, se desarrollan ideas a partir de supuestos, para ayudar a entender cómo se concibe un problema por la población objeto y mediante ello poder definir o identificar cuáles son las opciones que tienen relación con el problema; ahora bien el método mixto posee parte de los dos métodos mencionados anteriormente.

Enfoque Metodológico: Investigación Cualitativa

En este trabajo se emplea la metodología cualitativa que también emplea una investigación naturalista, que según Marrero (2008) consiste en recopilar información de eventos, según estos ocurren en su ambiente natural, (selva, calle, escuela.). En esta investigación no hay control del ambiente ni de las variables, lo que no permite establecer relaciones causales.

Los métodos utilizados para la investigación cualitativa engloban diferentes técnicas para conseguir información que han dejado una clara evidencia de su conveniencia para conocer, aprender e instruirse sobre la vida de las personas, su comportamiento, las relaciones sociales, los sistemas de reproducción, etc. Incluyen además diversidad de técnicas y procedimientos Mongue. C (2011). Esto quiere decir que este método aborda diferentes formas de investigación, pero todas con el fin de saber el comportamiento de los individuos a ciertas situaciones planteadas por el investigador.

Por lo anterior según plantea el documento metodología de la investigación (2014 p. 358) uno de los propósitos de la investigación cualitativa es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados. En nuestra investigación optamos por este método de investigación debido a que este trabajo trata de que aportes genera al aprendizaje la implementación de una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para la medición del área de una hoja de frijol con un modelo logístico en grado once, involucrando al estudiante con los fenómenos de crecimiento que lo rodean y a través de secuencias de tareas dar una interpretación de la situaciones y cómo puede afectar al entorno en el cual se encuentra involucrado.

También plantea el documento metodología de la investigación (2014 p. 358) El enfoque cualitativo es recomendable cuando el tema del estudio ha sido poco explorado o no se ha hecho investigación al respecto en ningún grupo social específico (Marshall, 2011 y Preissle, 2008). De acuerdo a esto la función logística es una función poco conocida por los estudiantes de grado once y se puede realizar una situación de modelación con el crecimiento para que los estudiantes den cuenta de su aplicación no solo de este fenómeno, sino que pueda relacionarlo con otros fenómenos cotidianos del contexto.

Estrategia Metodológica: Estudio de Casos

Según menciona Muñiz en su documento estudio de casos, los estudios de caso tienen como característica básica que abordan de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución (Stake, 1994). Puede ser algo simple o complejo, pero siempre una unidad; aunque en algunos estudios se incluyen varias unidades, cada una de ellas se aborda de forma individual. En nuestro estudio la unidad que abordaremos son los estudiantes de la institución educativa.

En la presente investigación prestaremos atención especial del proceso de aprendizaje de los estudiantes y cómo se realizará esa evolución, que es a través de una secuencia de tareas propuesto por Margolinas, que comenzará con una tarea sencilla y a medida que avance la secuencia se irá aumentando su nivel de complejidad y es allí que se puede evidenciar la evolución de aprendizaje del estudiante.

Los estudios de caso en este ámbito pueden clasificarse en exploratorias y descriptivas, según señala Martínez Carazo(2006 p.171) en el documento El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica Pensamiento & Gestión, núm. 20, indica lo descriptivo si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio. Por consiguiente, en este trabajo, también se observa al maestro y el análisis se realizará sobre la forma en que se hará la actividad en el aula en favor de la forma de caracterización de los procesos de aprendizaje y articulando una secuencia de tareas mediante GeoGebra.

Campo de Trabajo y Contexto de Implementación

La implementación de la secuencia de tareas se realizará en la institución educativa colegio “bilingüe Lacordaire” en la ciudad de Cali, ubicado en la calle 5 #89-70 al sur de la ciudad. Esta institución cuenta con nivel preescolar, básico primario y secundario, pertenece al sector privado y es de carácter mixto, maneja el calendario de funcionamiento B. La jornada educativa es diurna, esta institución maneja una población heterogénea de 900 estudiantes aproximadamente.

La institución está provista de 4 salas de computadoras, donde cada sala tiene aproximadamente 24 computadores, como herramientas tecnológicas para el aprendizaje de sus

estudiantes. El trabajo se lleva a cabo de manera grupal con los estudiantes del grado undécimo de dicha institución, haciendo uso de tres sesiones de dos horas aproximadamente cada una. Se hace uso de los artefactos con los que cuenta la institución, como lo son; tableros, video beam, entre otros.

Desarrollo Metodológico

Para poder realizar el trabajo de investigación, es necesario acudir a unas fases metodológicas, que se han planteado en el desarrollo de la realización de este caso, por ello es menester desarrollar el proceso metodológico, mediante el siguiente esquema.

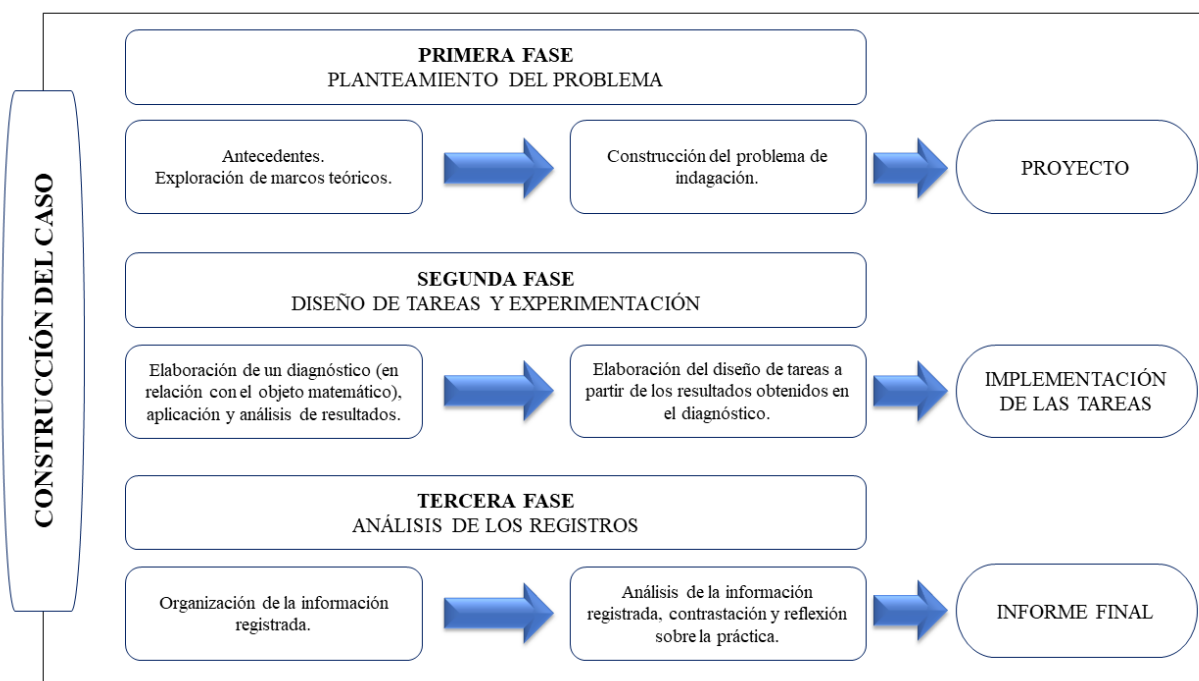


Ilustración 4 Esquema construcción del caso

Figura 4. Esquema construcción del caso

Nota. La figura corresponde a una elaboración propia.

El anterior esquema consta de tres fases para el buen desarrollo de la construcción del caso, en el cual se basa este trabajo.

Fase 1 Construcción del Problema

Para la construcción del problema se hace necesario, investigar sobre los antecedentes del problema, las investigaciones que existen acerca de la problemática en construcción, todo ello teniendo en cuenta un nivel local, regional e internacional, y poder establecer la problemática del trabajo, que para efectos de esta gira en torno a la modelación y la función logística. Mediante esto se realiza un análisis, para estudiar la situación expuesta y a partir de ello con el referente didáctico seleccionado, pueda contribuir al mejoramiento de esta problemática. La problemática en mención tiene un enfoque de investigación cualitativa y un estudio de casos que gira en torno al aprendizaje de los estudiantes.

Fase 2: Diseño de Tareas y Experimentación

En la parte inicial del diseño de tareas, consta de una actividad de campo introductoria en el cual los estudiantes sembraron una semilla de frijol verde en la huerta de la institución con el objetivo de que reconozcan el proceso de siembra, germinación del frijol y la forma del proceso de medición de la hoja. Posterior a esto se recurre a realizar la explicación de la toma de datos y la manera que ejecutaran tal medición para luego llevar el registro de medición en la tabla propuesta por la guía uno, todo esto teniendo en cuenta el objeto matemático en mención, para poder ser aplicado a los 16 estudiantes de undécimo grado de la presente institución. Luego se procede al diseño de las otras tareas que consisten en actividades de exploración y experimentación con el software de GeoGebra con la intencionalidad de que el estudiante adquiera ciertas habilidades con el uso del artefacto y puedan obtener una mejor visualización y puedan

comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje que se desarrolla en esta actividad, con la mediación del estudiante con el artefacto.

Fase 3: Análisis de los Registros

En este análisis de registros, se emplean materiales fílmicos, fotografías, escritos que realizan los estudiantes, mediante formatos elaborados en Word, observaciones que realizan los estudiantes a través del material propuesto, el actuar y las palabras del docente de la clase.

A partir de lo dicho anteriormente se procede a organizar la información recolectada, se realiza un análisis de la información que han suministrado los estudiantes y el actuar del docente, todo ello se realiza mediante el referente teórico empleado en este trabajo. Ya mediante todo esto se procede a efectuar una auto reflexión de la investigación, con el propósito de interpretar lo que se expone y es allí donde se detecta la problemática que se plantea en este informe.

Estrategias e instrumentos para la recolección de información

Como estrategia para la recolección de la información, se emplearon los siguientes registros: cámaras de video, fotografías o pantallazos, bitácoras, apuntes de los estudiantes, GeoGebra, secuencia de tareas, cuestionarios de registros de aprendizajes. Por tanto, por medio de todas estas herramientas ya mencionadas permiten la recolección de la información para su correcto análisis

Análisis Retrospectivo

En el siguiente capítulo se realizan unas rejillas las cuales se recolectarán toda la información que emanaron los estudiantes en la puesta en acto de la secuencia de tareas, con el fin de poder describir las tareas, recoger todos los códigos que se dieron en cada tarea y codificarlos, y finalmente agrupar los códigos en unas categorías que se relacionan con un correspondiente elemento de aprendizaje.

Tareas y Conocimientos

En la siguiente rejilla se hace la descripción del propósito, y el conocimiento que emana cada tarea. Estas tareas se diseñaron con el propósito de que, por medio de la interacción y realización de cada tarea, el estudiante pueda identificar si la función logística responde a una situación de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, utilizando datos reales de medición.

Tabla 1, Tareas y Conocimientos

<i>TAREAS</i>	<i>CONOCIMIENTOS</i>
	Reconocer la importancia de la siembra y el proceso matemático del crecimiento del área de la hoja del frijol, en el cual

Actividad I

involucra el área y la manera aproximada de medición.

En general los estudiantes realizan un trabajo de campo, que consiste en la siembra del frijol, según las bases teóricas explicadas en la clase de manera extensiva, con el objetivo de que el proceso del crecimiento del frijol se realiza de forma correcta y además a ello encuentren la forma de como calcular el área de la hoja mientras transcurren los días

Actividad II

Situar en un contexto real, mediante los conceptos aprendidos en clase de forma teórica y abstracta, la noción de función y los elementos que intervienen, para que a partir de ello se pueda formular un modelo matemático que dé respuesta a problemas que cotidianamente se desarrolle en nuestro contexto. En el planteamiento y desarrollo de la actividad realizada con los estudiantes, se van a trabajar entre otros los

siguientes conceptos y técnicas

matemáticas:

- Función
- Dominio y rango
- Grafo
- Variable dependiente e independiente
- Extraer información de la tabla
- Representación de funciones
- Relación
- Solución analítica del problema

Actividad III

Encontrar una expresión matemática y gráfica, que describa la manera como crece el área de la hoja de la planta de frijol, a lo largo de los días y también predecir el área de la hoja para un determinado día o dada un área aproximada, estimar el tiempo transcurrido. Todo lo anterior se realiza mediante el software de geometría dinámica GeoGebra.

Descripción de las tareas

En la siguiente rejilla, se hará una descripción de las tareas propuestas, lo que se espera es que el estudiante visualice y realice en cada una de las tareas, basándose en el referente teórico del estudio y la interacción a desarrollar con el artefacto.

Tabla 2, Tareas Propuestas Actividad I

<i>Actividad I Trabajo de campo</i>	<i>Referente teórico de Margolinas</i>
<i>Los estudiantes sembraran una semilla de frijol verde. Aproximadamente en 2 o 3 días los estudiantes observaran el proceso de germinación del frijol, que es el brote de la semilla. Posteriormente dos días después, es decir el quinto y sexto día se observará el abandono de los cotiledones. Ya la medición se efectúa aproximadamente en el día séptimo u octavo ya que empieza el brote de la hoja de la planta. El proceso de medición se realizará hasta el día catorce o quince.</i> <i>Para realizar las medidas de las áreas de la hoja, se efectuará el siguiente procedimiento:</i>	se presenta el análisis a priori, el docente encargado presentó antes de iniciar el desarrollo de esta actividad una breve explicación acerca de elementos que se debían tener en cuenta para el desarrollo de la primera situación en este caso se ha construido una secuencia de situaciones enmarcadas en la teoría de situaciones didácticas de Margolinas, el elemento matemático que envuelve esta secuencia es la función logística, dicho esto, la finalidad es la de dar cuenta de los procesos de aprendizaje de la función logística en estudiantes de grado once en cuanto al proceso de siembra de la planta y el

- | | |
|--|--|
| <p>1. <i>Se coloca sobre una hoja de papel y se dibuja el perímetro con lápiz.</i></p> <p>2. <i>Se cuentan y se enumeran los cuadritos que cubren la región encerrada.</i></p> <p>3. <i>Se efectúan aproximaciones y estimaciones, esto quiere decir que se completan cuadritos de 0.5cm x 0.5cm.</i></p> <p>4. <i>Se procede a contar los cuadritos y el número total de cuadritos obtenidos se divide entre cuatro, para expresar la medida de las áreas en cm^2 (4 cuadritos = $1 cm^2$)</i></p> <p>5. <i>Las medidas se registrarán en la siguiente tabla:</i></p> | <p>cambio de área de la hoja a medida que transcurre el tiempo.</p> <p>En general los estudiantes realizan un trabajo de campo, que consiste en la siembra del frijol, según las bases teóricas explicadas en la clase de manera extensiva, con el objetivo de que el proceso del crecimiento del frijol se realiza de forma correcta y además a ello encuentren la forma de como calcular el área de la hoja mientras transcurren los días</p> <p>La secuencia de tareas, Margolinas (2013) argumenta que para lograr el fundamento en la enseñanza de un concepto totalmente (función logística) se tiene que examinar los diferentes elementos del conocimiento y la manera como se encuentran relacionados. Ello quiere decir que los estudiantes se deben enfrentar a esta situación o tarea y a medida que se avance irá aumentando el nivel de complejidad.</p> <p>Para comprender el desarrollo de esta secuencia de tarea se realiza esta</p> |
|--|--|

DIA	AREA FOLIAR (cm^2)	actividad de exploración del estudiante con el medio (campo de siembra), con el objeto de que el estudiante se familiarice con las situaciones allí planteadas, a partir de unos saberes previos que irá desarrollando a medida que vaya avanzando, para que al final el docente formalice ese saber y se pueda relacionar esta situación con el entorno.
8		
9		
10		
11		
1		
13		
14		
15		

Tabla 3, Tareas Propuestas Actividad II

Actividad II

Después de haber llenado los datos de la tabla del área foliar vs tiempo, responda las siguientes preguntas:

DIA	AREA FOLIAR (cm^2)
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

1. ¿Qué se observa del comportamiento del área con respecto al tiempo, qué percibe?

Referente teórico de Margolinas

El estudiante deberá de analizar de forma muy detallada cada una de las preguntas que se presentan en la guía de acuerdo con las observaciones que se efectúa del crecimiento del área de la hoja de frijol durante los días 8 al 15. Al frente de cada pregunta está el espacio para que el estudiante responda.

¿Qué se observa del comportamiento del área con respecto al tiempo, qué percibe?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes deberán comparar los valores de las dos variables en mención y a partir de ello observaran el comportamiento de los valores observados, fijándose principalmente en sus cambios de comportamiento y lograr establecer una relación de crecimiento que transcurre y finalmente poder decir que a medida que aumenta los días, va creciendo el área de la hoja hasta un determinado tamaño. Esto es,

- | | |
|---|---|
| <p>2. <i>¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique</i></p> <p>3. <i>¿Cuál es la variable dependiente e independiente?</i></p> <p>4. <i>¿Los datos anteriores corresponden a una relación o a una función? Justifique</i></p> <p>5. <i>¿Cuál es el dominio y rango</i></p> <p>6. <i>¿Cuál es el grafo de la función?</i></p> | <p>transcurre un cambio del área en función del tiempo. Deben tener presente que el área aumentara su tamaño en cada intervalo de tiempo, creciendo sin un límite, pero se debe tener en cuenta que el crecimiento del área de la hoja no solo depende del tiempo sino que también puede estar limitado por condiciones ambientales(exceso de lluvias, hormigas, insectos u otros animales) que podrían afectar su normal desarrollo.</p> <p>¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique</p> <p>Lo que se espera del estudiante: el estudiante a partir de la tabla analizara los valores de cambio y observara que esto podría tratarse de un modelo de crecimiento, que puede regular su tamaño, hasta un valor límite K. y que la construcción del modelo obliga a generar tablas y gráficas, que permiten analizar el comportamiento del área de la hoja y solo pueden ser acertados bajo ciertas condiciones iniciales. También podrán leer</p> |
|---|---|

que trata de una tendencia creciente de manera rápida en estos primeros días, debido a que a medida que aumentan los números de días también va creciendo el área de la hoja.

¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes observaran la tabla de valores que trata de un modelo de crecimiento y a partir de ello logran establecer una relación entre el tiempo y el área de la hoja, analizando cierta relación de independencia, dependencia y poder identificar, mediante el comportamiento del tiempo y el área que variable depende de cierta magnitud e identificar cierto razonamiento: que esta dependencia sea elemento a elemento; es decir, a un elemento le corresponde solo un elemento.

Variable dependiente: Área de la hoja

Variable independiente: número de días

¿Los datos anteriores corresponden a una relación o a una función? Justifique

Lo que se espera del estudiante: es importante que los estudiantes comprendan el concepto de relación y función, la regla de correspondencia de cada función y destaque que esta relaciona dos variables: una independiente y otra dependiente. El estudiante de grado undécimo tendrá presente de acuerdo a sus grados anteriores que cuando una función depende de otra se suele decir que está en función de ella y además se les recuerda a los estudiantes el concepto matemático de función que exige que esta dependencia sea elemento a elemento; es decir que todo ello corresponde a una función ya que cada elemento del conjunto de partida (número de días), le corresponde un solo elemento de conjunto de llegada (área de la hoja).

¿Cuál es el dominio y rango de la función?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes deben hallar el dominio y rango de la función, teniendo en cuenta que el dominio es el conjunto formado por las primeras componentes de la función (tiempo) y el rango es el conjunto formado por las segundas componentes de las parejas de la función (crecimiento del área) y además a ello se les indica cual es el valor más pequeño que puede asumir la variable área cuando el tiempo es igual a cero. Para que a partir de ello pueda establecer el rango de la función.

Para esta función el dominio y el rango se pueden expresar de la siguiente manera

Dominio= números reales positivos

Rango= números reales positivos, incluyendo el cero.

¿Cuál es el grafo de la función?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes observaran que las funciones no tienen una única forma de expresión, y sin embargo, de todas ellas se pueden

extraer elementos importantes, como hallar el dominio, rango y el grafo, que es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas y observaran que el dominio y rango es la primera y segunda componente de la pareja ordenada y se puede extraer cierta información para poder ser ubicada en un plano cartesiano y hallar gráficamente el comportamiento del modelo.

$$A = \{(8-7,12) ; (9-8,62) ; (10-14,45) ; (11-23,8) ; (12-30,1) ; (14-50,2)\}$$

Tabla 4, Tareas Propuestas Actividad III

Actividad III	Referente teórico de Margolinas
<i>Después de haber realizado la actividad de la guía #2 y con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, se procede a realizar un gráfico, para efectuar una regresión y a partir de ello obtener la expresión matemática del crecimiento del área de la hoja en función del tiempo. Se</i>	El estudiante deberá de analizar de forma muy detallada cada una de las preguntas que se presentan en la guía III de acuerdo con las observaciones que se efectúa del crecimiento del área de la hoja de frijol durante los días 8 al 15. En GeoGebra deben realizar la tabla de valores según las

debe abrir GeoGebra y la siguiente tabla muestra el paso a paso y las actividades a desarrollar:

PASO	ACTIVIDAD	VISTA
1	En el menú vista seleccionar hoja de calculo	Hoja de calculo
2	En la celda A1 escribir Día y en la celda B1 escribir área foliar (cm^2)	Hoja de calculo
3	Escribir los datos registrados en las mediciones del día 8 al 15, con su respectiva área en las celdas respectivamente	Hoja de calculo
4	Seleccionar todos los datos	Hoja de calculo

instrucciones planteadas y posteriores a ello realizar un gráfico que relacionen las variables en mención y a partir de ello responder de forma analítica las preguntas propuestas. En esta guía III se tiene en cuenta la propuesta de Margolinas (2013) de desarrollar tareas más complejas a medida que se avance en su desarrollo.

Con base a las actividades ¿cuántos gráficos obtuviste en total? ¿Qué variables se relacionan en cada una de ellas?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes, a través de la casilla modelo de regresión deben desplegar la herramienta y con cada opción allí planteada, seleccionaran cada modelo de gráfico y observaran que hay seis modelos de gráficos presentados

- Exponencial
- Senoidal
- Logarítmica
- Crecimiento

	ingresados, dar clic derecho, seleccionar crea y luego lista de puntos.		- Logística - Lineal Deben seleccionar cada modelo y mediante esto observaran el comportamiento del gráfico, las variables y como se relacionan de acuerdo a la curva allí descrita. El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes analizaran profundamente el comportamiento de cada gráfico y observaran la manera de crecimiento de cada curva y como involucra las variables. Posteriormente de haber realizado las diferentes actividades ¿qué modelo crees que se ajusta mejor a los datos? Lo que se espera del estudiante: los estudiantes después de haber contestado la pregunta anterior, por medio de la casilla opción regresión: logística, observaran que es el modelo que más se ajusta a la curva debido a que se trata de un crecimiento limitado, y la principal razón que plantearan es que su punto de inflexión parece situarse en un tiempo determinado.
5	Ir a vista grafica ajustar, los ejes para ver los puntos, A, B, C, D y F.	Vista grafica	
6	Seleccionar todos los datos, ir y desplegar el menú superior izquierdo, elegir la opción análisis de regresión de dos variables.	Hoja de calculo	
7	Seleccionar en modelo de regresión: cada una de las	Hoja de calculo	

	funciones allí establecidas	
--	--------------------------------	--

1. *Con base a las actividades
¿cuántos gráficos obtuviste en
total? ¿Qué variables se relacionan
en cada una de ellas?*
2. *Posteriormente de haber realizado
las diferentes actividades ¿qué
modelo crees que se ajusta mejor a
los datos?*
3. *De acuerdo con el desarrollo de las
tareas planteadas y al modelo que
más se haya ajustado ¿dentro de
cuántos días crees que la hoja de
frijol deja de crecer?*

*Con el modelo obtenido construye
una tabla con valores reales de la
situación problemática y los
arrojados por el modelo obtenido.*

DIA	AREA REAL	AREA MODELO
-----	--------------	----------------

Además, a ello los datos se ajustan más a la curva que describe el gráfico, después de haber realizado el modelo de regresión.

De acuerdo con el desarrollo de las tareas planteadas y al modelo que más se haya ajustado ¿dentro de cuántos días crees que la hoja de frijol deja de crecer?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes al momento de graficar los datos ya en el software y haber seleccionado el modelo logístico para la representación de los datos observan de manera detallada el gráfico, la expresión algebraica y observan la asíntota que presenta el modelo para que a través de ello pueden observar el crecimiento lento de la función tendiendo a sí a un valor constante. Es importante que los estudiantes comprendan la relación de los parámetros, la forma y la orientación gráfica para finalmente asegurarse de una estimación de modelo logístico.

16		
17		
18		

Con ayuda de los datos arrojados por tu modelo, responde:

- ¿Qué área tiene la hoja de frijol en el día 17
- ¿Qué diferencia existe con la del dato original?
- ¿Qué área tiene la hoja de frijol en el día 18
- ¿Qué diferencia existe con la del dato original?
- ¿Cuál habrá sido el área de la hoja de frijol al nacer?
- ¿Con relación a los datos originales es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer? ¿Por qué?

Con ayuda de los datos arrojados por tu modelo, responde:

- Qué área tiene la hoja de frijol en el día 16,17 y 18

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes deben construir una tabla de valores con los valores reales de la situación problema y los valores arrojados por el modelo en GeoGebra, tal como lo muestra en la figura:

DIA	AREA REAL	AREA MODELO
16		
17		
18		

Después realizan un comparativo, que realizaran mediante la opción variable x que en el modelo representa el número de días. En este caso deben realizarlo para el día 16, 17 y 18 y a partir de este se observará el aumento del área que representa la casilla con la variable Y en

GeoGebra y puedan observar el aumento del área para esos días en mención.

- ¿Qué diferencia existe con la del dato original?

Lo que se espera del estudiante: los estudiantes después de haber contestado las preguntas anteriores del crecimiento del área de la hoja para determinado día deben realizar la diferencia de áreas para los días señalados y observan que el modelo encontrado por ellos numéricamente no presenta grandes diferencias de consideración, es decir se parecen mucho con los reales de la situación, notando así que el modelo logístico es el modelo más adecuado para estimar este conjunto de datos.

- ¿Cuál habrá sido el área de la hoja de frijol al nacer?

Lo que se espera del estudiante: primeramente, los estudiantes en el modelo (logístico) que lograron obtener en

GeoGebra, en la casilla variable x (número de día), deben realizar tanteo de valores, como por ejemplo $x=1, 2, 3$ o 4 y observar para estos días, que valor arroja la casilla en la variable Y (crecimiento del área), por medio de ello los estudiantes podrán ver de manera gráfica el valor del área de la hoja de frijol. El objetivo de esta pregunta se centra en realizar un análisis gráfico e interpretativo de la variación del área en función del tiempo y compararlo con la del modelo real.

- ¿Con relación a los datos originales es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer?
¿Por qué?

Lo que se espera del estudiante: se indica a los estudiantes realizar un análisis comparativo del modelo real, con el modelo en GeoGebra para poder así realizar una interpretación del comportamiento del área de la hoja según esto los estudiantes discutan si es posible medir el área de la

planta, cuando recién nace, es decir que cuando aún no hay presencia de las hojas.

Codificación de datos

En las siguientes tablas se recolectan los códigos que emanaron de los registros filmicos, fotográficos y las fichas de los estudiantes de grado undécimo en la puesta en acto de la modelación de la función logística en el crecimiento del área de una hoja de frijol, en cada tarea se escriben las frecuencias que tuvo cada una de las afirmaciones que hicieron los estudiantes con respecto al desarrollo de cada tarea.

Codificación de datos: Tabla 4 Codificación de datos, Tarea II

Fase II: Experiencias significativas

Códigos	Frecuencia	Tiempo
• Afirma que el área aumento de manera muy rápida en los primeros días	18	18:54
• Afirma en los últimos días el crecimiento del área de la hoja se hacía más lento	18	19:00
• Afirma en los primeros días crece muy rápido el área de la hoja	18	19:12
• Afirma que el modelo tiende a una función creciente	18	19:30
• Afirma que el área tiene tendencia de forma indeterminable	4	21:30
• Afirma durante los 8 días hay un crecimiento continuo	4	21:40
• Afirma que en la línea de tiempo $n+1$ el área foliar no ha disminuido sino ha aumentado su área	4	22:02
• Afirma que la relación es directamente proporcional	4	22:06
• Afirma que del día 8 para atrás no hay área foliar	11	22:39
• Afirma que en el día 8 posiblemente hay área, a pesar de que ese mismo día comenzó la observación	7	22:50
• Afirma que la variable dependiente es el área porque depende del tiempo, y que el tiempo es la variable independiente ya que los días transcurren sin depender de nada	18	24:48
• Afirma que las dos magnitudes (tiempo vs área) son directamente proporcionales	18	25:18
• Afirma que en un momento del tiempo la planta no va a crecer mas	15	25:20
• Afirma que el área de la hoja es directamente proporcional, es decir a medida que transcurre los días va creciendo el área foliar	18	26:04
• Afirma que las variables no son directamente proporcionales del todo, hay un tiempo en el cual la hoja deja de crecer a medida que transcurre el tiempo	4	26:30
• Afirma que están realizando un modelo matemático algo cercano a la realidad	4	27:54
• Afirma que las partes que crecen son directa o inversamente proporcionales	4	28:13
• Afirma que no estamos viendo del todo función exponencial	4	28:22
• Afirma que el crecimiento de la planta no es infinito	4	28:32
• Afirma que el crecimiento de la planta los primeros días es muy rápida	4	29:32

• Afirma que la planta empieza a crecer y en un punto determinado empieza a estabilizarse	4	29:48
• Afirma que es una función porque la variable x es el tiempo y en este caso al tiempo le corresponde un solo valor, cuando la variable dependiente que es al área de la hoja, es decir por cada tiempo que hay en el experimento hay solamente una medida del área de la hoja, esto quiere decir, que en un día no podrá tener dos áreas, bueno en el mismo tiempo no podrá tener dos áreas la hoja distinta, si estamos hablando de la misma hoja, si es una función.	4	33:16
• Afirma que el dominio seria todos los tiempos, es decir del cero hasta que terminemos el experimento y el rango sería el cero que es lo que inicia el área de la hoja hasta el tamaño máximo	18	33:58
• Afirma que modelar es buscar una función que más se aproxime	4	35:18
• Afirma que modelar es crear una forma de abstraer de la realidad los datos que sacamos a un pensamiento matemático, es crear una representación de algo de lo que estamos viendo de la realidad a una expresión matemática, entonces buscaríamos una función, precisamente un modelo que se asemeje a lo que estamos buscando	4	36:12
• Afirma que modelo en matemáticas es una representación de algo que ya está, el modelo de x cosa es la representación del fenómeno que pasa y ya hemos tomado la representación	4	37:36
• Afirma que todos los fenómenos cotidianos se pueden modelar matemáticamente porque son cosas palpables materiales que nos pueden llevar a un contexto de análisis de la mente	4	38:36
• Afirma que los fenómenos de la naturaleza son datos que se pueden meter dentro de una gráfica, ya cosas como la moral, la ética son cosas que no se pueden modelar matemáticamente.	4	39:30
• Afirma que el fuerte de las matemáticas es lo objetivo, hay fenómenos que se pueden interpretar	4	41:56

Al presentar el video, se logró observar que en los estudiantes hubo una comprensión con respecto a los elementos que se discutieron, dado que la gran mayoría comunicó de manera correcta las primeras preguntas que eran de interacción entre pares y servían como insumo para trabajar la secuencia, se logró evidenciar que la gran mayoría de estudiantes tenían claro el concepto de función y los elementos y ya al final se realiza una socialización y discusión de las preguntas y respuestas respondidas por parte de los estudiantes, direccionado por el docente.

Tabla 5 Codificación de datos, Tarea III

Fase III: modelación en GeoGebra		
Códigos	Frecuencia	Tiempo
Afirma que se obtuvieron seis gráficas y se relacionan las variables del área foliar y el número de días	18	11:20
Afirma que las gráficas que obtuvieron son: lineal, logística, seno, crecimiento, exponencial, potencia, polinomio y logaritmo	14	11:34
Afirma que les dio esos mismos gráficos, pero también podrían ser similares a otros gráficos propuestos.	4	11:52
Afirma que el modelo que más se ajusta a los datos es el modelo de logística, porque es el único que al final se mantiene constante y las otras funciones van exponencial o van de caída	14	12:46
Afirma que el modelo es logístico, porque cuando comparamos con los datos del área real, coinciden con la línea de la función logística y, además, al final se mantiene constante	14	13:36

Afirma que el modelo que más se ajusta es una polinómica cubica, pero eso no puede ser porque se podría volver infinitamente grande no presenta asíntotas en comparación a la otra y eso no puede ser, entonces el modelo que más se puede ajustar también así los datos estén más dispersos es el logarítmico.	4	14:25
Afirma que hubo un modelo que se ajustó a los datos es el modelo con exponente cuatro, pero este modelo planteaba, que después del último dato, la hoja empezaría a decrecer en tamaño, cosa que después vemos que no se da cuando hacemos las mediciones después del día quince e igual pensamos que el modelo que más se ajusta es el modelo logístico.	4	15:40
Afirma que dentro del día 18 en adelante no deja de crecer como tal, pero crece de manera más lenta, ya en el día 20 se desvía del todo el crecimiento de la hoja	4	17:32
Afirma que en el modelo real en el día 20 la hoja deja de crecer ya eran cuestiones muy pequeñas, en el modelo de GeoGebra eran más constantes y los cambios eran más pequeños.	4	18:11
Afirma que el área de la hoja de frijol en el día 17 en GeoGebra es de 26,76 cm, lo calculamos en el eje x y nos dio ese aproximado y en el modelo real nos dio 26,75 ósea muy pequeña diferencia.	18	19:46
Afirma que la diferencia entre el dato del modelo y el modelo real es que el día 17 el dato real nos dio 22,5 cm cuadrados y en el modelo 23,5 cm cuadrados, estaríamos hablando de un centímetro cuadrado de diferencia	4	20:38
Afirma que el área de la hoja de frijol en el día 18 es de 50,34 centímetros cuadrados y la diferencia que existe con la del dato original es de 0,34 centímetros cuadrados y afirma que es una diferencia muy pequeña con respecto a la original	18	21:44
Afirma que el área de la hoja de frijol al nacer es de cero, porque cuando la sembramos la hoja de frijol no había nacido.	14	22:26
Afirma que el área de la hoja de frijol al nacer es de 7,4 porque recordamos que el día ocho fue el día que nació la planta, según la gráfica del modelo ese fue el día, en el eje x están los días y de ahí buscamos cual sería la imagen de esa función y nos mas o menos 7,4.	4	22:48
Afirma que con relación a los datos originales no es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer porque cuando nace el área de la hoja de frijol es muy pequeña es como cero, entonces no tendría sentido, que tuviera 13 centímetros cuadrados del área.	14	24:46

Afirma que con relación a los datos originales no es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer, no sería cero, ya que no habría área foliar y cuando germina la planta quiere decir que ya tiene área foliar entonces, no podría ser cero, puede ser muy pequeña pero no puede ser cero, porque eso es antes de que germine la planta	4	25:28
---	---	-------

En el desarrollo de la puesta en acto por medio de Geogebra y colocando atención especial en la génesis instrumental se pudo evidenciar en el video que fue necesario aclararles a los estudiantes algunas funciones de la hoja de cálculo en el software, como por ejemplo la selección de datos para realizar el análisis de regresión de las dos variables y conforme a ello pudieran observar la gráfica, mediante el modelo de regresión que se ajustara a los datos y seleccionar la función que más se adecuara a ello. Pero a pesar de todo ello se cumplió la expectativa central en que identificaran que a partir de un grupo de funciones determinadas (lineal, logarítmica, polinómica, senoidal, crecimiento y logística) la función logística es la función más adecuada para modelar el crecimiento del área de la hoja empleando el software de geometría dinámica Geogebra.

Categorización de los códigos

En esta tabla se distribuyen los códigos definidos por los estudiantes en ocho categorías, con el fin de analizar las afirmaciones que pertenezcan a una misma categoría y así evidenciar si los propósitos de las tareas se han cumplido y qué papel ha tenido la mediación instrumental para el desarrollo de la secuencia.

Tabla 6, Categoría I

Categoría I: Afirmaciones sobre el crecimiento del área de la hoja de frijol	Códigos
En esta categoría se agruparon los códigos que se encuentran ya establecidos por cada una de las respuestas de los estudiantes. Se puede analizar que los estudiantes involucran el área y la manera aproximada de medición donde aseguran un crecimiento rápido o lento según los días de las diferentes observaciones. Los códigos que aparecen corresponden a la fase de experiencias significativas, donde observan que a medida que transcurren los días hay un cambio de tamaño del área de la planta, que tiende a estabilizarse muy lentamente en unos días determinados, donde algunos estudiantes aseguran que el crecimiento del área y el número de días son magnitudes proporcionales. De acuerdo a lo anteriormente planteado el crecimiento del área de la hoja se hace rápido en los primeros días de análisis, pero posterior a ello el crecimiento se hace aún más lento.	Afirma que el área aumento de manera muy rápida en los primeros días
	Afirma en los últimos días el crecimiento del área de la hoja se hacía más lento
	Afirma en los primeros días crece muy rápido el área de la hoja
	Afirma durante los 8 días hay un crecimiento continuo
	Afirma que en la línea de tiempo $n+1$ el área foliar no ha disminuido sino ha aumentado su área
	Afirma que el área de la hoja es directamente proporcional, es decir a medida que transcurre los días va creciendo el área foliar
	Afirma que las variables no son directamente proporcionales del todo, hay un tiempo en el cual la hoja deja de crecer a medida que transcurre el tiempo
	Afirma que en un momento del tiempo la planta no va a crecer mas
	Afirma que en el día 8 posiblemente hay área, a pesar de que ese mismo día comenzó la observación
	Afirma que la planta empieza a crecer y en un punto determinado empieza a estabilizarse

Tabla 7, Categorías II, III, IV

Categoría II: Afirmaciones sobre la proporcionalidad de las magnitudes (crecimiento vs tiempo)	Códigos

En esta categoría se han establecido todos aquellos códigos donde los estudiantes afirman que las magnitudes crecimiento y tiempo son directamente proporcionales. Aquí se realiza una pregunta del comportamiento de las variables y algunos manifiestan la proporcionalidad directa de ellas. Los códigos que aparecen corresponden a la fase de experiencias significativas donde los estudiantes relacionan las magnitudes y establezcan la relación entre estos. De acuerdo con lo anterior las magnitudes no son directamente proporcionales, ya que el crecimiento del área de la hoja no se comporta lineal y además a ello se reitera que hay unos días (finales) que el crecimiento de la hoja se hace más lento y en un punto determinado la hoja dejara de crecer, por ende, las magnitudes no son del todo directamente proporcionales.	Afirma que el área de la hoja es directamente proporcional, es decir a medida que transcurre los días va creciendo el área foliar
	Afirma que la relación es directamente proporcional
	Afirma que las dos magnitudes (tiempo vs área) son directamente proporcionales
	Afirma que las variables no son directamente proporcionales del todo, hay un tiempo en el cual la hoja deja de crecer a medida que transcurre el tiempo
Categoría III: Afirmaciones sobre la variable dependiente e independiente	Afirma que las partes que crecen son directa o inversamente proporcionales
	Códigos
A partir de esta categoría se obtuvieron aquellos códigos que se refieren a las afirmaciones sobre la variable dependiente e independiente en las experiencias significativas de los estudiantes En los códigos en mención se puede evidenciar claramente que los estudiantes identifican las variables que intervienen en las observaciones y su relación de dependencia e independencia, justificando adecuadamente que el tiempo es una magnitud que no depende del crecimiento del área de la hoja, porque transcurre sin que nada lo afecte y el área aumenta cuando el tiempo pasa.	Afirma que la variable dependiente es el área porque depende del tiempo, y que el tiempo es la variable independiente ya que los días transcurren sin depender de nada
	Afirma que es una función porque la variable x es el tiempo y en este caso al tiempo le corresponde un solo valor, cuando la variable dependiente que es al área de la hoja, es decir por cada tiempo que hay en el experimento hay solamente una medida del área de la hoja, esto quiere decir, que en un día no podrá tener dos áreas, bueno en el mismo tiempo no podrá tener dos áreas la hoja distinta, si estamos hablando de la misma hoja, si es una función.
Categoría IV Afirmaciones sobre si los datos corresponden a una función y cuál es el dominio y rango	Códigos
Para esta categoría se determinan todos los códigos que hacen referencia a la afirmación y determinación si los datos corresponden a una función y por medio de esto si se puede establecer un modelo matemático que pronostique el crecimiento del área de la hoja.	Afirma que están realizando un modelo matemático algo cercano a la realidad
	Afirma que no estamos viendo del todo función exponencial

Los estudiantes afirman que el crecimiento del área de la hoja corresponde a una función, porque las magnitudes que se relacionan en las observaciones con sus elementos tienen una sola imagen de correspondencia. También argumentan que modelar es buscar una función que más se aproxime a la situación que se requiere expresar, bien sea algebraica o gráficamente. E incluso manifiestan que todos los fenómenos de la naturaleza son datos que se pueden graficar y establecer un modelo matemático, mientras que ya variables cualitativas no pueden ser posibles. Se puede evidenciar que los estudiantes tienen claramente definido el concepto de función y los elementos que intervienen allí, pero afirman también que todos los fenómenos de la naturaleza se pueden representar gráficamente y mediante esto poder establecer un diagnóstico de su comportamiento. Sin embargo, no se puede llegar a esta formalización, porque no todos los fenómenos naturales establecen un patrón exacto de comportamiento, debido a que algunos fenómenos naturales son del todo impredecibles.	Afirma que es una función porque la variable x es el tiempo y en este caso al tiempo le corresponde un solo valor, es decir por cada tiempo que hay en el experimento hay solamente una medida del área de la hoja, esto quiere decir, que en un día no podrá tener dos áreas y en el mismo tiempo no podrá tener dos áreas la hoja distinta, si estamos hablando de la misma hoja, por ende, si es una función.
	Afirma que el dominio sería todos los tiempos, es decir del cero hasta que terminemos el experimento y el rango sería el cero que es lo que inicia el área de la hoja hasta el tamaño máximo
	Afirma que modelar es buscar una función que más se aproxime
	Afirma que los fenómenos de la naturaleza son datos que se pueden meter dentro de una gráfica, ya cosas como la moral, la ética son cosas que no se pueden modelar matemáticamente
	Afirma que todos los fenómenos cotidianos se pueden modelar matemáticamente porque son cosas palpables materiales que nos pueden llevar a un contexto de análisis de la mente
	Afirma que modelar es crear una forma de abstraer de la realidad los datos que sacamos a un pensamiento matemático, es crear una representación de algo de lo que estamos viendo de la realidad a una expresión matemática, entonces buscaríamos una función, precisamente un modelo que se asemeje a lo que estamos buscando
	Afirma que modelo en matemáticas es una representación de algo que ya está, el modelo de x cosa es la representación del fenómeno que pasa y ya hemos tomado la representación.
	Afirma que el dominio sería todos los tiempos, es decir del cero hasta que terminemos el experimento y el rango sería el cero que es lo que inicia el área de la hoja hasta el tamaño máximo

Tabla 8, Categoría V, VI

Categoría V Afirmaciones sobre los gráficos que se obtuvieron y las variables que se relacionan	Códigos
A partir de esta categoría se obtuvieron aquellos códigos que hacen énfasis sobre cuáles son los gráficos que se obtuvieron y como se relacionan las variables. Se observa que las afirmaciones de los estudiantes se quedan solo en decir cuáles son las variables que se relacionan y no justifican la respuesta.	Afirma que se obtuvieron seis gráficos y se relacionan las variables del área foliar y el número de días
	Afirma que las gráficos que obtuvieron son: lineal, logística, seno, crecimiento, exponencial, potencia, polinomio y logaritmo
	Afirma que las gráficos que obtuvieron son: lineal, logística, seno, crecimiento, exponencial, potencia, polinomio y logaritmo, pero también podrían ser similar a otros gráficos propuestos.
Categoría VI Afirmaciones sobre el modelo que más se ajusta a los datos	Códigos
Para esta categoría se determinaron todos los códigos que hacen alusión a la afirmación sobre el modelo que más se ajusta a los datos. La mayoría de los estudiantes afirman que el modelo que más se ajusta a los datos es la función logística, debido a que en un principio el crecimiento del área es demasiado rápido y conforme pasa el tiempo el crecimiento se hace aún más lento tendiendo a mantener un área constante. Sin embargo, hay otras justificaciones: Algunos afirman que hay varios modelos que pueden ser representados por el crecimiento del área de la hoja, como, por ejemplo: la cubica y logarítmica. Otro grupo describe que podría ser una función polinómica de grado cuatro, pero	Afirma que el modelo que más se ajusta a los datos es el modelo de logística, porque es el único que al final se mantiene constante y las otras funciones van exponencialmente o van de caída
	Afirma que el modelo es logístico, porque cuando comparamos con los datos del área real, coinciden con la línea de la función logística y, además, al final se mantiene constante
	Afirma que el modelo es logístico, porque cuando comparamos con los datos del área real, coinciden con la línea de la función logística y, además, al final se mantiene constante
	Afirma que el modelo que más se ajusta es una polinómica cubica, pero eso no puede ser porque se podría volver infinitamente grande no presenta asíntotas en comparación a la otra y eso no puede ser, entonces el modelo que más

realmente no podría ser del todo exponente cuatro, porque hay un momento que el área de la hoja no crece tan rápido. Se puede evidenciar que los estudiantes tienen algunos elementos que se deben considerar al estructurar el modelo que más se ajusta a la situación en mención. Sin embargo, hubo un grupo que no llega a la formalización como tal.	se puede ajustar también así los datos estén más dispersos es el logarítmico.
	Afirma que hubo un modelo que se ajustó a los datos es el modelo con exponente cuatro, pero este modelo planteaba, que después del último dato, la hoja empezaría a decrecer en tamaño, cosa que después vemos que no se da cuando hacemos las mediciones después del día quince e igual pensamos que el modelo que más se ajusta es el modelo logístico.

Tabla 9, Categoría VII

Categoría VII: Afirmaciones sobre la comparación del área real y el área modelo	códigos
En esta categoría se agruparon los códigos en la que los estudiantes realizaban afirmaciones sobre la comparación del área real y el área modelo (GeoGebra). Los estudiantes respondieron que en el día 20 aproximadamente la hoja deja de crecer y mientras en el modelo de GeoGebra los cambios eran más	Afirma que en el modelo real en el día 20 la hoja deja de crecer ya eran cuestiones muy pequeñas, en el modelo de GeoGebra eran más constantes y los cambios eran más pequeños. Afirma que el área de la hoja de frijol en el día 17 en GeoGebra es de 26,76 cm, lo calculamos en el

pequeños. En lo que respecta a estas afirmaciones, no es que la hoja deje de crecer, sino que su crecimiento se hace aún más lento a medida que transcurren los días. Los estudiantes afirman que el área de la hoja de frijol en el día 17 y 18 en lo que respecta al área real y al modelo la diferencia es mínima. Esta comparación se realiza mediante el dato real y el dato del modelo que es la gráfica de la función logística en GeoGebra y mediante ello se realiza el comparativo. Los estudiantes afirman que de acuerdo con el modelo real el área de la hoja de frijol al nacer es cero y con respecto al modelo en GeoGebra es de 7,4 unidades cuadradas. Esto conlleva a pensar que los estudiantes que afirman que el área de la hoja de frijol al nacer es cero es una respuesta incorrecta, debido que cuando la hoja empieza a nacer ya ha desplegado una cantidad mínima de hoja y en ella se puede calcular el área.	eje x y nos dio ese aproximado y en el modelo real nos dio 26,75 ósea muy pequeña diferencia. Afirma que la diferencia entre el dato del modelo y el modelo real es que el día 17 el dato real nos dio 22,5 cm cuadrados y en el modelo 23,5 cm cuadrados, estaríamos hablando de un centímetro cuadrado de diferencia Afirma que el área de la hoja de frijol en el día 18 es de 50,34 centímetros cuadrados y la diferencia que existe con la del dato original es de 0,34 centímetros cuadrados y afirma que es una diferencia muy pequeña con respecto a la original Afirma que el área de la hoja de frijol al nacer es de cero, porque cuando la sembramos la hoja de frijol no había nacido. Afirma que el área de la hoja de frijol al nacer es de 7,4 porque recordamos que el día ocho fue el día que nació la planta, según la gráfica del modelo ese fue el día. En el eje x están los días y de ahí buscamos cual sería la imagen de esa función y nos da más o menos 7,4. Afirma que con relación a los datos originales no es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer porque cuando nace el área de la hoja de frijol es muy pequeña es como cero, entonces no tendría sentido, que tuviera 13 centímetros cuadrados del área. Afirma que con relación a los datos originales no es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer, no sería cero, ya que no habría área foliar y cuando germina la planta quiere decir que ya tiene área foliar entonces, no podría ser cero, puede ser muy pequeña pero no puede ser cero, porque eso es antes de que germine la planta
---	--

Tabla 10, Categoría VIII

Categoría VIII: Afirmaciones sobre la mediación instrumental	Códigos
Al transcurrir la puesta en acto de las diferentes secuencias, se pudo obtener respecto a la gestión didáctica, las diferentes clases de orquestación y la implementación de la visualización y exploración del artefacto, para la modelización de la función logística. Cabe mencionar que, a medida que trascurría el tiempo, el profesor en ese momento, fue un observador del proceso de interacción de los estudiantes con el artefacto, con el fin de cuidar los procesos de construcción del conocimiento, interviniendo solamente para realizar aclaraciones de las tareas y manejo del software como también guiar a los estudiantes a una mayor comprensión de las preguntas allí formuladas.	Afirma que en el menú seleccionar, despliega la opción hoja de cálculo e inmediatamente aparece la hoja de cálculo.
	Afirma que para seleccionar todos los datos se debe ir y desplegar el menú superior izquierdo y dar clic en la hoja de cálculo la opción análisis de regresión de dos variables.
	Afirma que, para seleccionar el modelo de regresión de cada una de las funciones allí establecidas, se debe desplegar en regresión de dos variables y seleccionar función por función que modelo se ajusta más a los datos.
	Afirma que las variables que se relacionan en cada gráfico, se debe desplegar la casilla análisis de regresión y seleccionar función por función e indicar las variables que intervienen en cada una de ellas.
	Afirma que, para seleccionar todos los datos ingresados, se debe dar clic derecho, en la hoja de cálculo, dar seleccionar crea y luego lista de puntos.
	Afirma que para ver el grafico aún más amplio, se debe arrastrar el borde la barra hasta que quede acorde con el tamaño que se requiere.
	Afirma que, para saber los distintos modelos de regresión planteados, se debe dar clic en la barra modelo de regresión y seleccionar función por función y a partir de ello observar y analizar cual modelo se ajusta más a los datos planteados.

En esta categorización se logró ver que las afirmaciones de los estudiantes permiten agruparse en categorías, tales como; el crecimiento del área, relación entre variables, y en las mediaciones que brindó el artefacto. Con ello posibilitando un análisis con respecto a los propósitos de las tareas y las mediaciones instrumentales que se dieron en la puesta en acto.

Capítulo IV: Resultados de la investigación

Teniendo en cuenta el objetivo general del presente trabajo, lo cual tiene la intención de diseñar e implementar una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para identificar si la función logística responde a situaciones de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, que se logró alcanzar por medio de resultados reales presentados a continuación:

Tabla 11, Categoría en relación con los aprendizajes de los estudiantes y el artefacto

<i>Tareas</i>	<i>Categoría en relación con los aportes al aprendizaje alrededor del objeto matemático</i>	<i>Categorías relacionadas con el potencial del artefacto en relación con el objeto matemático.</i>
<i>Tarea 2</i>	I, II, III, IV	IV
<i>Tarea 3</i>	IV, V, VI,	VII, VIII

La primera tarea se pudo evidenciar según las guías elaboradas que era una fase exploratoria de introducción y siembra de la semilla, por ende, no se clasificó a ninguna categoría, debido a que

no hubo actividades planteadas o interrogantes que los estudiantes deberían desarrollar en la presente investigación. La secuencia de tareas que se emplean en este trabajo presenta preguntas inicialmente de fácil interpretación y solución, pero a medida que se vaya avanzando los estudiantes notarán que el nivel de complejidad aumenta, conllevando entonces a un análisis más profundo. Margolinas (2013) explica tres secuencias de tareas, donde la primera secuencia tiene que ver con la existencia de un problema de menor complejidad, donde el estudiante llega a una forma de resolver lo allí planteado de manera sencilla, donde también se recurra a una forma de solución.

En la segunda tarea se logró observar la relación con las categorías I, II, II, IV, donde los estudiantes daban cuenta de un análisis descriptivo del crecimiento de la hoja de frijol, donde su etapa inicial corresponde a un modelo exponencial, en ese momento inicial el crecimiento de la hoja no se ve afectado por ningún factor externo que impida su crecimiento y por tanto se produce un crecimiento exponencial. Ya después de cierto tiempo el crecimiento se ve afectado por factores que afectan el medio, impidiendo de este modo su crecimiento exponencial y efectuándose de un modo aún más lento a medida que pasa el tiempo. Por último, se puede decir que el área de la hoja alcanza una fase de equilibrio donde hay una desaceleración del crecimiento, conllevando a ocurrir un equilibrio de este. En esta etapa Los estudiantes interactúan con el diseño planteado en las secuencias de tareas, mediante preguntas allí planteadas, adquiriendo un saber implícito que tiene como objetivo la explicitación del conocimiento por parte del docente y los conocimientos previos para la siguiente tarea.

La tarea III se relacionó con las categorías IV, V, VI, VII, VIII; donde los estudiantes articulan y relacionan las representaciones de la función (logística), adquiriendo más saberes implícitos, a través de la interacción con el software. Es importante señalar que, al finalizar la serie

de secuencia de tareas, el docente formaliza todo lo concerniente a las actividades, para transformar ese conocimiento implícito en un conocimiento explícito. Los estudiantes a partir de los datos que tomaron en la tarea dos, identificaron por grupos de trabajo las variables que allí se relacionan para ser graficados en el software de geometría dinámica (Geómetra) e interpretar que tipo de comportamiento presenta la situación. Luego se procede ajustar los datos ya establecidos por medio de la casilla regresión lineal, que modelo (lineal, cuadrática, exponencial, logística y polinomial) se ajusta más a los datos, para ya finalmente con el modelo seleccionado, los estudiantes puedan estimar mediante los parámetros allí establecidos, el tamaño del área de la hoja en cualquier día x .

Cabe notar que los estudiantes ajustan un conjunto de datos a un modelo establecido, buscando también, de esta forma una representación algebraica que mejor describa la situación, tal cual como lo señala Ulloa y Rodríguez (2013) no basta con encontrar un modelo, en su representación algebraica, que mejor se ajusta a un conjunto de datos, sino identificar que tanto se relacionan y si tienen coherencia con el conocimiento científico a estudiar en una situación en particular.

Las categorías se relacionan con las actividades propuestas por Margolinas, donde se realizan de manera secuencial donde la primera secuencia tiene que ver con la existencia de un problema de menor complejidad en el cual los estudiantes exploraron e indagaron el proceso de siembra de la hoja y la manera de cómo medir el área de la hoja, donde el estudiante llega a una forma de resolver lo allí planteado de manera sencilla, donde también se recurra a una forma de solución. La segunda tarea donde aumenta el nivel de complejidad, en referencia a la anterior, adicionando elementos que enriquezcan el aprendizaje y el nivel de complejidad, donde el estudiante toma datos de medición de la hoja y responde a ciertas preguntas de comprensión sobre

el concepto de función y el crecimiento del área de la hoja. La tercera tarea consiste en una secuencia de actividades, donde el concepto matemático va adquiriendo forma y complejidad a medida que se explora e indaga colocando datos en la hoja de cálculo y seleccionando diversas herramientas del software para ajustar adecuadamente el modelo que corresponde el determinado grupo de datos.

Análisis de acuerdo con los objetivos de cada tarea

De acuerdo a lo esperado en la primera tarea, en la etapa de exploración y las diferentes propuestas de los estudiantes, se pudo evidenciar el cumplimiento del objetivo que consiste en realizar un proceso matemático desde una perspectiva didáctica, que se desarrolla en la siembra de la semilla de frijol y a partir de ello se pueda hallar una forma de medir el área de crecimiento de la hoja a partir de una situación real representativa de un proceso biológico y matemático de modelación y mediante este se construya un conocimiento científico.

En la segunda tarea se constató de acuerdo a las preguntas que se le plantearon a los estudiantes y el intercambio de información entre ellos y también algunas veces con el docente, que tiene como objetivo principal que los estudiantes mediante la representación tabular (tabla de valores) observen si los datos se encuentran relacionados entre sí, además a esto desarrollaran la capacidad de relacionar una situación del contexto con el concepto de función y sus elementos. El estudiante inicia la secuencia de aprendizaje propuesto por Margolinas mediante la situación anterior de la guía uno.

La tercera tarea se espera que el estudiante al realizar la actividad por medio de GeoGebra encuentre el modelo que más se ajuste a los datos. Ingresan los datos en la hoja de cálculo,

y a partir de la herramienta análisis de regresión de dos variables observan si los puntos se ajustan a la curva y analicen la estimación de los parámetros de la función a través de la opción cálculo simbólico y respondan las preguntas.

El propósito de esta tarea es que con los mismos datos anteriores de la tarea 1 el estudiante describa un crecimiento mediante los parámetros del modelo que lo representa (logístico) y un ajuste de curvas. Los estudiantes ingresan a GeoGebra Ingresaran los datos en la hoja de cálculo, y a partir de la herramienta análisis de regresión de dos variables observen si los puntos se ajustan a la curva y analicen la estimación de los parámetros de la función a través de la opción cálculo simbólico.

Resultados de la implementación

En este apartado se presentan los resultados que se obtuvo en la implementación del diseño de tareas en el marco de una Secuencia de Tareas, comenzando con el desarrollo de las tres tareas de tal forma que se tuvieron aspectos tales como: la acción, la comunicación y el razonamiento entre los estudiantes de grado undécimo de la institución educativa Lacordaire al momento de la puesta en acto de la secuencia de tareas.

Tarea 1

El propósito de esta tarea fue que los estudiantes realizaron una actividad de campo y a partir de ello realizaron la siembra de la semilla (frijol verde) en la huerta del colegio cuyo sitio ya ha sido preparado con anterioridad por una persona con experiencia (jardinero del colegio) y con

indicaciones de siembra por parte del jardinero de la institución, también se les explico el proceso de medición de la hoja, el proceso de registro de la medición por medio de una tabla de valores que incluyen las variables de estudio y un preámbulo de las otras actividades a realizar. De esta manera, la función del profesor en esta actividad fue realizar la presentación del trabajo y del contexto en el cual se realizó la presente tarea, también como realizar toda la demostración técnica para el ingreso a las otras guías de trabajo.



Figura 7. Siembra de la semilla de frijol tarea 1.



Ilustración 5 medicion del área de la hoja de frijol

Figura 8. Medición del área de la hoja de frijol.

Una vez realizado todo esto, el profesor estuvo atento para realizar su actuación y manejo de las distintas preguntas que surgieron con un tiempo estimado de 1 hora. Cabe aclarar que en esta guía número uno no hay preguntas concretas para los estudiantes, sino que trae una guía de desarrollo para la ejecución de la actividad practica en la huerta de la institución.

Tarea 2.

Para esta segunda tarea se dispuso de un tiempo de 30 minutos para su desarrollo y después se realizó una socialización de los interrogantes planteados en la guía con un tiempo estimado de 30 a 40 minutos. Se les presento a los estudiantes la tabla de valores según la toma de medidas que realizaron en los días anteriores, esperando que hayan realizado un análisis de los datos recopilados, además a esto, se les presento a los estudiantes seis preguntas con relación a los datos

de la tabla. Los estudiantes iniciaron la secuencia de aprendizaje propuesto por Margolinas mediante la situación anterior de la guía número uno que indica lo siguiente: Después de haber llenado los datos de la tabla del área foliar vs tiempo, responda las siguientes preguntas:

<i>DIA</i>	<i>AREA FOLIAR (cm²)</i>
<i>8</i>	
<i>9</i>	
<i>10</i>	
<i>11</i>	
<i>12</i>	
<i>13</i>	
<i>14</i>	
<i>15</i>	

¿Qué se observa del comportamiento del área con respecto al tiempo, qué percibe? en esta pregunta los estudiantes mediante la tabla propuesta (forma tabular), analizaron el comportamiento del área en función del tiempo y juzgaron que a medida que transcurre el tiempo el área crece. Los estudiantes manifestaban que para responder esta pregunta era necesario graficar y el docente manifestó que basta con mirar la tabla podría darse cuenta si la función crece o decrece.

¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique

El interrogante plantea la forma de como el estudiante percibe los datos y como cree que es el comportamiento de la gráfica, si es una línea creciente, una curva o algo distinto y a partir de esto también observe si puede crecer o decrecer. Algunos estudiantes con solo ver el comportamiento de los datos aseguran que es una función lineal creciente, otros estudiantes se tomaron la molestia de realizar un gráfico de los datos y a partir de ello manifiestan que es una curva que crece rápidamente al principio y después se hace aún más lento.

¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

Los estudiantes observaron la tabla y analizaron la relación de las variables y cómo se comportan de manera individual, para a través de ello afirmaron que la variable depende de otra y poco a poco descubrieron que el modelo trata de una función. Algunos grupos de trabajo tuvieron la dificultad de relacionar de cómo se podría identificar la variable dependiente e independiente, Por ende, fue necesario de realizar un repaso de tal variable.

¿Los datos anteriores corresponden a una relación o a una función? Justifique

Cuál es el dominio y rango, ¿Cuál es el grafo de la función?

Los interrogantes anteriores tienen como objeto que los estudiantes después de haber identificado que los datos se acomodan a una función, indiquen los elementos de la función y otra forma de representación. La presenta actividad se desarrolla en el aula de clase de la institución, para este interrogante no tuvieron ninguna clase de dificultad.



Ilustración 6 socialización puesta en acto tarea 6

Figura 9. Socialización puesta en acto tarea 2.

Tarea 3.

Para la última tarea se dispuso de 120 minutos para su desarrollo. Finalmente, esta tarea llevo a los estudiantes a comprobar o demostrar las hipótesis que anteriormente se habían formulado. Los estudiantes por medio de GeoGebra encontraron el modelo que más se ajustó a los datos. Ingresaron los datos en la hoja de cálculo, y a partir de la herramienta análisis de regresión de dos variables observaron si los puntos se ajustaban a la curva y analizaron la estimación de los parámetros de la función a través de la opción cálculo simbólico y respondieron las preguntas solicitadas.

El docente fue quien realizó la presentación de la actividad y la situación en el cual se desarrolló la tarea, estando atento en la actuación de los estudiantes y la interacción del artefacto con estos.

El propósito de esta tarea es que con los mismos datos anteriores de la tarea 1 el estudiante describa un crecimiento mediante los parámetros del modelo que lo representa (logístico) y un ajuste de curvas. Los estudiantes accedieron a GeoGebra e ingresaron los datos en la hoja de cálculo, y a partir de la herramienta análisis de regresión de dos variables observarán si los puntos se ajustaron a la curva y analizaron la estimación de los parámetros de la función a través de la opción cálculo simbólico.

Ya habiendo dicho lo anterior los estudiantes respondieron las nueve preguntas para poder concluir que se trata de un modelo logístico y poder indicarle que el crecimiento del área de una hoja de frijol puede también modelarse mediante diferentes representaciones (tabular, algebraico y gráfico). Esta actividad se desarrolló en la sala de sistemas de la institución en grupos de 4 o 5 personas.

En esta actividad la mayor parte de grupos afirmaron después de haber realizado el ajuste de datos en GeoGebra que los datos se ajustaban a un modelo logístico tal como lo manifiestan en la fase III de las rejillas de claves y categorías “Afirma que el modelo que más se ajusta a los datos es el modelo de logística, porque es el único que al final se mantiene constante y las otras funciones van exponencial o van de caída” hubo un grupo de trabajo que la función no le dio del todo logístico, ello se puede reflejar en la fase III de la rejilla de claves y categorías “Afirma que el modelo que más se ajusta es una polinómica cubica, pero eso no puede ser porque se podría volver infinitamente grande no presenta asíntotas en comparación a la otra y eso no puede ser, entonces el modelo que más se puede ajustar también así los datos estén más dispersos es el logarítmico”.



Ilustración 7 modelacion crecimiento área una hoja de frijol

Figura 10. Modelación crecimiento área de una hoja de frijol tarea 3.

Capítulo V: Conclusiones

En este presente trabajo de grado se planteó como objetivo general; diseñar e implementar una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para identificar si la función logística responde a una situación de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, utilizando datos reales de medición. Con la intención de darle respuesta a este objetivo, se expusieron tres objetivos específicos. Con ello a continuación, se presenta qué se logró concluir con cada uno de los objetivos.

En este capítulo, se toman en cuenta las conclusiones del trabajo mostrando una óptica de los tres objetivos específicos: en el primero se conciben aspectos de gran importancia vinculados con el referente teórico y metodológico, en el segundo se menciona la estructura de las unidades de análisis del referente teórico, y por último, en el tercero se analizan las mediaciones instrumentales que hubo en la implementación con el fin de evidenciar si el instrumento permitió que se desarrollara un aprendizaje en identificar si la función logística responde a una situación de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, utilizando datos reales de medición.

En lo que concierne al primer objetivo específico, con respecto al referente teórico, este se acordó como base central para trabajar la problemática de investigación, a través de las pautas que permitieron consolidar el diseño de tareas, los cuales surgen de cuatro referentes teóricos (matemático, curricular, didáctico y cognitivo) que se articularon para fundamentar la propuesta e identificar qué aportes generó el trabajo.

El primer referente es el matemático a partir de este elemento se pretende buscar esos objetos matemáticos e incluso geométricos que se tuvieron en cuenta en el momento de organizar y diseñar la secuencia de tareas. Para ello fue clave el manejo de la situación del docente que en algunos

actos debía intervenir para aclarar diversas dudas que presentaban los estudiantes de grado undécimo para permitir el normal desarrollo de las diferentes tareas que se desarrollarían en las diferentes propuestas ya establecidas.

En este segundo referente que es el curricular, que consiste en tomar los aspectos curriculares propuestos por el MEN, acorde a ello, se analizó lo que se debía plantear y después de ello se realiza un análisis sobre la coherencia vertical y horizontal, la cual fue primordial para reconocer elementos propios del grado undécimo, como los pensamientos, procesos y contextos que se abordan en este trabajo, y con ello elaborar el diseño de la secuencia de tareas.

El tercer referente es el didáctico, lo cual muestra la secuencia de tareas en relación, con las demás tareas exploratorias que pudieron abordar procesos de aprendizaje en los estudiantes; esto conlleva a mostrar los resultados de los estudiantes, por medio de lo que hacen y de cómo se comunican durante la puesta en acto. Cabe mencionar que, los estudiantes expresaban cierto interés, análisis y buena disposición por aprender, lo que les permitió en buena forma seguir de buena forma el desarrollo de las tareas, de manera que fuera importante en la elaboración de las habilidades por parte de ellos en el desarrollo de las diferentes tareas.

El cuarto referente es el cognitivo, en este referente toma gran importancia las mediaciones instrumentales que les permitieron a los estudiantes junto con el artefacto GeoGebra, una relación de mediación entre el conocimiento y el estudiante. Cabe decir que, este artefacto es un mediador en los procesos cognitivos del estudiante y facilita dejar en evidencias las formas de aprendizaje en las diferentes tareas propuestas, conllevando así a que el estudiante por medio de la visualización, interacción y retroacción lograra construir formas para desarrollar manera correcta la construcción del pensamiento matemático.

También destaca las diferentes acciones que realizaron los estudiantes al interactuar con el artefacto, ya que ayudo a la buena comprensión del ejercicio en sí, para poder en buena manera modelar la función que más se ajusta a los datos. Téngase en cuenta también que esto se efectuó bajo los parámetros de la investigación cualitativa para la implementación, ejecución y desarrollo de las diferentes actividades planteadas y el desarrollo de la investigación.

Teniendo en cuenta el objetivo, se diseñó una secuencia de tareas fundamentada bajo la teoría de Margolinas (2013), el cual consiste en ir aumentando la complejidad de las tareas adicionando elementos a medida que se avanza. Entonces las tareas se realizaron con la finalidad de un desarrollo de manera secuenciada y en la ejecución de estas, los estudiantes de grado undécimo lograran construir un aprendizaje con la modelización de datos en GeoGebra.

Ya con esto, se pudo constituir el referente teórico en la secuencia de tareas exploratorias, teniendo en cuenta que estos cuatro referentes estuvieron relacionados entre ellos para así ser el cimiento que permite aportar una secuencia de tareas que integra el software de GeoGebra para la modelación de la función logística en el crecimiento del área de una hoja de frijol para estudiantes de grado undécimo. Con ello logrando cumplir el primer objetivo específico, el cual fue elaborado para realizar este diseño de Secuencia de Tareas, con la finalidad de observar y analizar los aportes que esta secuencia de tareas genere a partir del uso de GeoGebra en el campo matemático.

Así es como se pudo obtener un diseño que esté reglamentado a los estándares nacionales con respecto a identificar si la función logística responde a una situación de crecimiento producida por el área de una hoja de frijol, utilizando datos reales de medición. Igualmente reconociendo la importancia de hacer uso de un software como lo es GeoGebra y las interacciones que este les

pueda propiciar a los estudiantes, y esto ligado a una problemática y contexto que les produzca interés a los estudiantes de grado undécimo.

En lo que respecta al tercer objetivo específico, que guarda relación con el referente cognitivo, se admitió que en cada tarea de la secuencia se hiciera un análisis de la importancia que tenía la interacción del estudiante con el artefacto, conllevando así las mediaciones instrumentales que brindan aprendizaje a cada estudiante, esto se pudo evidenciar en que el docente intervino pocas veces para la ejecución de tareas que realizaban los estudiantes, conforme a que cada tarea se diseñó para que en cada acción realizada por el estudiante se brindara una retroacción; con la finalidad de que los estudiantes logaran desarrollar las competencias de comunicación y razonamiento.

Considerando así los objetivos específicos, se puede observar que el objetivo general sí se alcanzó, debido a que se logró obtener un acercamiento al aprendizaje de los estudiantes mediante el trabajo de una secuencia de tareas integrando el software GeoGebra, puesto que esto permitió que se desarrollara de manera dinámica la modelación de la función logística en el crecimiento del área, ya que esas herramientas que le brindó el software, como la visualización, interacción y retroacción, fueron claves para que los estudiantes reconocieran qué es una hoja de cálculo, análisis de variables y modelo de regresión, para qué sirve, cómo se localizan y como se selecciona un modelo ajustado a una curva de datos.

Y con esto, desarrollando esa capacidad de comunicar y analizar lo que está comprendiendo y permitiéndole razonar con respecto a lo que se está realizando, y en conclusión logrando resolver la problemática de investigación, qué aportes genera al aprendizaje la implementación de una

secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para la medición del área de una hoja de frijol con un modelo logístico en grado once.

Por otra parte, como lo mencionan los Estándares Básico de Competencias en Matemáticas, el estudiante al terminar undécimo grado en el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos debe “análisis en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas” (p, 87). Dicho lo anterior, tenemos que esta secuencia de tareas también se planificó y se realizó con el fin de lograr desarrollar esta competencia.

Con respecto a la expectativa que se tenían para las retroacciones e interacciones del software GeoGebra, se pudo evidenciar que fue necesario aclararles a los estudiantes algunas funciones de la hoja de cálculo en el software, como por ejemplo la selección de datos para realizar el análisis de regresión de las dos variables y conforme a ello pudieran observar la gráfica, mediante el modelo de regresión que se ajustara a los datos y seleccionar la función que más se adecuara a ello. Pero a pesar de todo ello se cumplió la expectativa central en que identificaran que a partir de un grupo de funciones determinadas (lineal, logarítmica, polinómica, senoidal, crecimiento y logística) la función logística es la función más adecuada para modelar el crecimiento del área de la hoja empleando el software de geometría dinámica GeoGebra.

En vista de ello, las reacciones de los estudiantes al respecto de un trabajo como estos fueron bastantes positivos, debido a que la gran mayoría tenían nociones fundamentales en el manejo del software, pero no habían tenido la experiencia más a fondo del manejo de la hoja de cálculo y los modelos de regresión allí inmersos y la manera de realizar una puesta en acto con el contexto, para

ser más exacto con alguna situación práctica de la vida real. Se pudo percibir una gran motivación para desarrollar las diferentes tareas, y con ello sacando el mayor beneficio para el trabajo y logrando armar la construcción del aprendizaje.

En consideración a las proyecciones que puede dejar este trabajo, se podría pensar en tres direccionamientos que puedan sacar provecho y enriquecer la investigación; estos direccionamientos logran estar relacionados a nuevos interrogantes, que pueden establecerse como ideas para trabajos a futuro.

El primer direccionamiento podría estar relacionado con que no solo el estudiante, busque un modelo matemático, que mejor represente una situación, sino que ahora se tome en cuenta lo que se analiza, el contexto, el conocimiento científico y el matemático aplicado, para una mejor resignificación de conceptos por parte del estudiante.

El segundo direccionamiento puede estar ligado a la pregunta ¿Qué aportes genera a la enseñanza, la implementación de una secuencia de tareas que integra la función logística en la propagación de enfermedades desde la perspectiva de la orquestación instrumental? En este direccionamiento se estaría promoviendo trabajar con la misma temática de la investigación, pero dándole otro enfoque, más tecnológico y con una temática más macro y optar si la función logística también se ajusta a la mayoría o una de las enfermedades que afectan nuestro entorno.

Un tercer direccionamiento estaría asociado a plantearse esta investigación en términos de la enseñanza, ya que la mirada del docente también es relevante para la construcción de conocimiento, un posible interrogante ¿Qué aportes genera a la enseñanza la implementación de una secuencia de tareas que integra el software GeoGebra para la comparación de modelos

logísticos y exponenciales en tiempo de post pandemia? Es importante observar lo anterior bajo una óptica experimental aún más avanzada e involucrando en un protagonismo mayor al docente.

Referentes bibliográficos

- Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J (2006) Errores y dificultades en Matemática. Recuperado a partir de https://www.academia.edu/26468683/ERRORES_Y_DIFICULTADES_EN_MATEM%C3%81TICA_An%C3%A1lisis_de_causas_y_sugerencias_de_trabajo
- Arce Rios, A., & Gómez Mulcué, F (2021). Diseño de una Secuencia de Tareas Mediado por GeoGebra Respecto al Análisis Exploratorio de Datos. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado a partir de <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/handle/10893/21465>
- Castro. R. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte 1. Recuperado a partir de <https://www.redalyc.org/journal/4576/457651376007/html/>
- Cejas, M. (2012). Actividades interdisciplinares. Revista de Educación Matemática (España), Vol. 29 (2), No 81, 41-51. Recuperado a partir de <http://funes.uniandes.edu.co/18390/1/Cejas2012Actividades.pdf>
- Collado Fernández, C., & Lucio Baptista, P. (2014). Metodología de la Investigación. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Córdoba Gómez (2011). La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería (Trabajo Final de Maestría presentado como requisito parcial para optar al título de: maestría en ciencias en matemática educativa) Instituto Politécnico Nacional, México

Choco Bonilla, A. (2019). Dificultades y errores de Estudiantes de Grado Undécimo en Torno al estudio de las funciones racionales. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chumpitaz, L. (2013). Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería. (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú.

Díaz Carvajal, D., & Chamizo Chepe, D (2019). Diseño de una secuencia de tareas para dar cuenta de la función lineal integrando GeoGebra en grado noveno de educación básica. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado a partir de <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/18505/0600890.pdf?sequence=1&isAllowed=>

Diferencia principal - Crecimiento exponencial y crecimiento logístico (s.f). Recuperado a partir de <https://es.sawakinome.com/articles/science/difference-between-exponential-and-logistic-growth.html>

Gallego Caicedo J, (2021). Una Secuencia de Situaciones Didácticas mediada por GeoGebra para dar cuenta de la función exponencial en grado noveno de educación básica. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gil Avendaño, V (2020). Infección del Covid-19 en Colombia. Una comparación de modelos logísticos y exponenciales aplicados a la infección por el virus en Colombia. Recuperado a partir de

<https://www.researchgate.net/publication/340092755>

Jaramillo K, (2020). Una propuesta de enseñanza desde la perspectiva de la orquestación instrumental; homotecia en grado séptimo de educación básica. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia.

López Mendoza, L (2015). Modelación del crecimiento del Área Foliar De la hoja de Frijol. Recuperado a partir de https://gpcambiemos.org/portal/articulos/21_modelacion-crecimiento-area-foliar-con-geogebra.html

Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. (M. Acosta, & J. E. Fiallo, Trans.) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Margolinas, C. (2013), Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI

Marrero, E (s.f). Principios de psicología. Recuperado a partir de <https://docplayer.es/45317066-Principios-de-psicologia-prof-eddie-marrero-ph-d-upr-rum-departamento-de-ciencias-sociales.html>

Martínez Carazo, P. El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica Pensamiento & Gestión, núm. 20, julio, 2006, pp. 165-193 Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado a partir de <https://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Monge, C. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica. Neiva: Universidad Sur colombiana.

Muñiz, M. (2010). Estudio de caso en la investigación cualitativa. Facultad de Psicología, División de Estudios de Posgrado Universidad Autónoma de Nuevo León (México). Recuperado a partir de https://www.psico.edu.uy/sites/default/files/cursos/1_estudios-de-caso-en-la-investigacion-cualitativa.pdf

Noreña, R. A. (2012). Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional. (Tesis de pregrado), Cali: Universidad del Valle.

Ortiz, Diana Ximena; Espinosa, Luis Fernando (2012). Decisiones didácticas del profesor en una secuencia didáctica que integra un AGD respecto a la proporcionalidad en grado séptimo. Recuperado a partir de <http://funes.uniandes.edu.co/2661/>

Parra, E (2018). Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza-Aprendizaje desde las ecuaciones recursivas. Recuperado a partir de

https://www.researchgate.net/publication/330975391_Modelos_de_Crecimiento_Poblacional_En_senanza-Aprendizaje_desde_las_Ecuaciones_Rekursivas

¿Qué es la investigación cualitativa? (s.f). Recuperado a partir de

https://www.questionpro.com/es/investigacion-cualitativa.html#que_es_cualitativa

Rabardel (1995) Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. *Sciences et techniques éducatives*, volume 2 n°2, 1995. pp. 237-239

Rodríguez, J & Ulloa, J (2017). *Alternativa didáctica para el estudio del modelo Gompertz*.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 2, pp. 98-114. Recuperado a partir de

<http://funes.uniandes.edu.co/15530/>

Salazar Caicedo, G., & Montaña Ramos, R (2018). Caracterización de los niveles de Matematización que logran alcanzar los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Senon Fabio Villegas, con respecto a la relación existente entre los conceptos de área y perímetro. (Trabajo Final de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas) Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado a partir de

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/18520/0600899.pdf?sequence=1>

Sierpiska A. (1992). On understanding the notion of function, IN: Harel & Dubinsky (1991). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, Washington, DC: Mathematical Association of America, 25-58. Traducción al castellano (inédita) de Cesar Delgado

Valero Cazares, M (2020). Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID 19 en México. El cálculo y su enseñanza, Enseñanza de las ciencias y las matemáticas, 15, 1-19. Recuperado a partir de

<https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/57>

Vega, J. (2014). Matemáticas grado 9. Colombia: Editorial Santillana

Villa Ochoa, J, & Souza de Alencar, E (2019). Un panorama de investigaciones sobre modelación matemática en Colombia y Brasil. Recuperado a partir de

<http://funes.uniandes.edu.co/12701/1/215-644-1-PB.pdf>

Zill G, D., & Dewar M, J. (2012). Álgebra y Trigonometría. México: Editorial Mc Graw Hill

Tabla de índices y figuras

Ilustración 1 Gráfico función logística.....	25
Ilustración 2 Coherencia vertical	30
Ilustración 3 Coherencia horizontal	31
Ilustración 4 Esquema construcción del caso	41
Ilustración 5 medición del área de la hoja de frijol.....	81
Ilustración 6 socialización puesta en acto tarea 6	84
Ilustración 7 modelación crecimiento área una hoja de frijol	86

Anexos



UNIVERSIDAD DEL VALLE
SEDE MELÉNDEZ SUR DE CALI
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



FICHA DEL ESTUDIANTE

ESTUDIANTE _____

INSTITUCIÓN: _____

GRADO _____ FECHA _____

AREA FOLIAR DE UNA HOJA DE FRIJOL

Tarea 1

Área: Matemáticas	Grado: Undécimo	Tiempo: 40 minutos
Objetivo de aprendizaje: Presentar la secuencia de trabajo y la forma de medición del área en una hoja de frijol.		Habilidad/ Conocimiento: modelación, comunicación y solución de problemas

Presentación

La modelación es una de las habilidades más importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. Consiste en matematizar situaciones en diferentes contextos (reales, hipotéticos o formales), mediante el análisis de variables, el uso de diferentes representaciones, la definición de conceptos y la obtención de expresiones matemáticas que sintetizan las relaciones entre las variables, permitiendo estimar y calcular nuevos valores y predecir resultados al variar los parámetros iniciales.

Como lo plantea el MEN en su documento Estándares de Matemáticas, un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y construir conceptos básicos para avanzar hacia las demostraciones (MEN; 2008).

Planteamiento

Se desea encontrar una expresión matemática que describa la manera como crece el área de la hoja de una planta de frijol, a lo largo de los días. Predecir el área de la hoja para un día determinado o dada un área aproximada, estimar el tiempo transcurrido.

Procedimiento

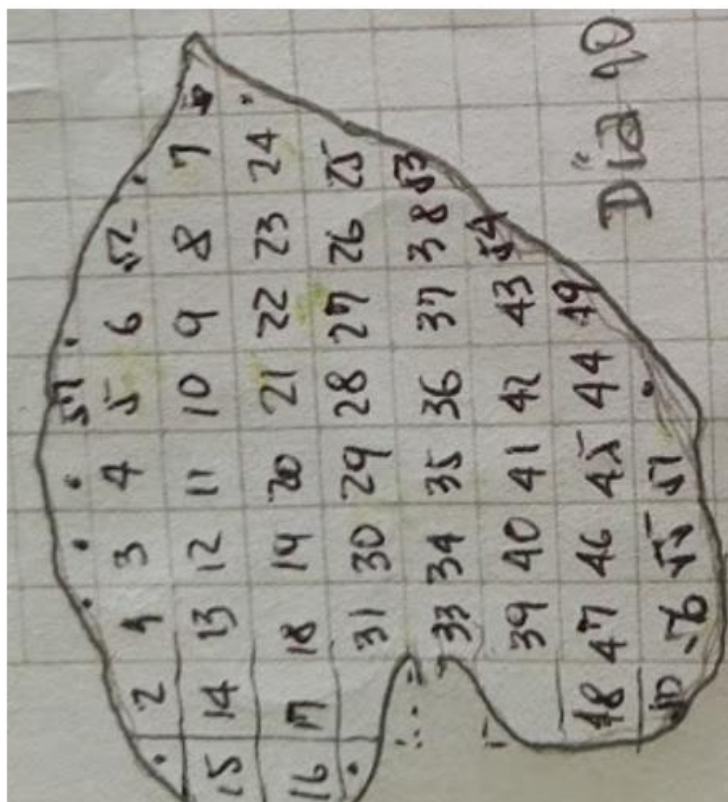
Los estudiantes sembraran una semilla de frijol verde. Aproximadamente en 2 o 3 días los estudiantes observaran el proceso de germinación del frijol, que es el brote de la semilla. Posteriormente dos días después, es decir el quinto y sexto día se observará el abandono de los cotiledones. Ya la medición se efectúa aproximadamente en el día séptimo u octavo ya que empieza el brote de la hoja de la planta. El proceso de medición se realizará hasta el día catorce o quince.

Para realizar las medidas de las áreas de la hoja, se efectuará el siguiente procedimiento:

6. Se coloca sobre una hoja de papel y se dibuja el perímetro con lápiz.
7. Se cuentan y se enumeran los cuadritos que cubren la región encerrada.
8. Se efectúan aproximaciones y estimaciones, esto quiere decir que se completan cuadritos de 0.5cm x 0.5cm.
9. Se procede a contar los cuadritos y el número total de cuadritos obtenidos se divide entre cuatro, para expresar la medida de las áreas en cm^2 (4 cuadritos = 1 cm^2)
10. Las medidas se registrarán en la siguiente tabla:

DIA	AREA FOLIAR (cm^2)
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Las siguientes figuras nos brindan de forma semejante, la germinación, el crecimiento de la hoja y la forma que se efectuara para medir el área



Después con la ayuda del software dinámico GeoGebra se procede luego a obtener una gráfica, para realizar la respectiva regresión y obtener la expresión matemática de crecimiento del área de la hoja, en función del tiempo.



UNIVERSIDAD DEL VALLE
SEDE MELÉNDEZ SUR DE CALI
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FICHA DEL ESTUDIANTE

ESTUDIANTE _____

INSTITUCIÓN: _____

GRADO _____ FECHA _____

AREA FOLIAR DE UNA HOJA DE FRIJOL		
Tarea 2		
Área: Matemáticas	Grado: Undécimo	Tiempo: 1 hora
Objetivo de aprendizaje: analizar el comportamiento del área en función del tiempo y juzgar que pasa con el área a medida que transcurre el tiempo. 		Habilidad/Conocimiento: modelación, comunicación y solución de problemas

Después de haber llenado los datos de la tabla del área foliar vs tiempo, responda las siguientes preguntas:

<i>DIA</i>	<i>AREA FOLIAR (cm²)</i>
<i>8</i>	
<i>9</i>	
<i>10</i>	
<i>11</i>	
<i>12</i>	
<i>13</i>	
<i>14</i>	
<i>15</i>	

7. ¿Qué se observa del comportamiento del área con respecto al tiempo, qué percibe?_____

8. ¿Qué tendencia cree que sigue este comportamiento? Justifique

9. ¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

10. ¿Los datos anteriores corresponden a una relación o a una función? Justifique

11. ¿Cuál es el dominio y rango

12. ¿Cuál es el grafo de la función?



UNIVERSIDAD DEL VALLE
SEDE MELÉNDEZ SUR DE CALI
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



FICHA DEL ESTUDIANTE

ESTUDIANTE _____

INSTITUCIÓN: _____

GRADO _____ FECHA _____

AREA FOLIAR DE UNA HOJA DE FRIJOL		
Tarea 3		
Área: Matemáticas	Grado: Undécimo	Tiempo: 2 horas
Objetivo de aprendizaje: comprobar o demostrar por medio de Geogebra el modelo que más se ajusta a los datos 		Habilidad/ Conocimiento: modelación, comunicación y solución de problemas

Después de haber realizado la actividad de la guía #2 y con la ayuda del software de geometría dinámica GeoGebra, se procede a realizar un gráfico, para efectuar una regresión y a partir de ello obtener la expresión matemática del crecimiento del área de la hoja en función del tiempo. Se debe abrir GeoGebra y la siguiente tabla muestra el paso a paso y las actividades a desarrollar:

PASO	ACTIVIDAD	VISTA
1	En el menú vista seleccionar hoja de calculo hoja de calculo	Hoja de calculo

2	En la celda A1 escribir Día y en la celda B1 escribir área foliar (cm^2)	Hoja de calculo
3	Escribir los datos registrados en las mediciones del día 8 al 15, con su respectiva área en las celdas respectivamente	Hoja de calculo
4	Seleccionar todos los datos ingresados, dar clic derecho, seleccionar crea y luego lista de puntos.	Hoja de calculo
5	Ir a vista grafica ajustar, los ejes para ver los puntos, A, B,C,D y F.	Vista grafica
6	Seleccionar todos los datos, ir y desplegar el menú superior izquierdo, elegir la opción análisis de regresión de dos variables.	Hoja de calculo

7

Seleccionar en modelo de Hoja de calculo
regresión: cada una de las
funciones allí establecidas

1. Con base a las actividades ¿cuántos gráficos obtuviste en total? ¿Qué variables se relacionan en cada una de ellas?

2. Posteriormente de haber realizado las diferentes actividades ¿qué modelo crees que se ajusta mejor a los datos?

3. De acuerdo al desarrollo de las tareas planteadas y al modelo que más se haya ajustado ¿dentro de cuántos días crees que la hoja de frijol deja de crecer?

Con el modelo obtenido construye una tabla con valores reales de la situación problemática y los arrojados por el modelo obtenido.

DIA	AREA REAL	AREA MODELO
16		
17		
18		

Con ayuda de los datos arrojados por tu modelo, responde:

- ¿Qué área tiene la hoja de frijol en el día 17 _____
- ¿Qué diferencia existe con la del dato original? _____
- ¿Qué área tiene la hoja de frijol en el día 18 _____
- ¿Qué diferencia existe con la del dato original? _____

- ¿Cuál habrá sido el área de la hoja de frijol al nacer?
- ---

¿Con relación a los datos originales es lógico que este valor haya sido el área de la hoja de frijol al nacer? ¿Por qué?

