

Modelo matemático para la distribución de los
biomas de Sabana y Bosque teniendo en cuenta los
incendios

David Alejandro Muñoz Cruz

Febrero 2023

Universidad del Valle



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas

Trabajo presentado para optar por el título de matemático

Modelo matemático para la distribución de los biomas de Sabana y Bosque teniendo en cuenta los incendios

David Alejandro Muñoz Cruz

Director de tesis

Marlio Paredes

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

Evaluadora

Carmen Alicia Ramirez

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

Febrero 2023

David Alejandro Muñoz Cruz

Modelo matemático para la distribución de los biomas de Sabana y Bosque teniendo en cuenta los incendios

Trabajo presentado para optar por el título de matemático, Febrero 2023

Director: Marlio Paredes

Evaluadora: Carmen Alicia Ramirez

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Calle 13 100-00, Edificio 320, Ciudadela Universitaria Meléndez

76001 Cali

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es investigar las propiedades de las soluciones de un modelo matemático formulado en los artículos “*Integrating Theoretical Climate and Fire Effects on Savanna and Forest Systems*” y “*Mathematical model for the dynamics of Savanna ecosystem considering fire disturbances*” de los autores *Staver - Levin* y *Brhane*, respectivamente. Este modelo examina la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque bajo los efectos típicos de fuego, lluvia y competencia por el espacio. En particular, se estudia la existencia de soluciones de equilibrios y su respectiva estabilidad en términos de los parámetros demográficos. Se corroboran los resultados hallados por medio de simulaciones numéricas, con la ayuda del software MATLAB.

Palabras clave

Soluciones de equilibrio, ecosistema de sabana, ecosistema de bosque, modelos matemáticos, sistemas dinámicos, sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Agradecimientos

En primer lugar, a Dios por darme la fortaleza para culminar el presente trabajo. A mi familia, en especial a mis padres por su apoyo constante. A mis profesores, en particular a Marlio Paredes por su paciencia, consejo y guía en el desarrollo de este proyecto. Por último, a Eugenia Noriega, por su amor incondicional.

Índice general

Introducción	1
1 Preliminares	5
1.1 Conceptos de ecología	5
1.1.1 Organización ecológica	5
1.1.2 Estabilidad ecológica	6
1.2 Conceptos matemáticos	7
2 Modelo de <i>Staver</i> y <i>Levin</i>	15
2.1 Descripción del modelo	15
2.2 Generalidades del trabajo de <i>Brhane</i>	18
3 Coexistencia de Hierba (G) y árboles de Bosque (F)	23
3.1 Soluciones de equilibrio	23
3.2 Análisis de estabilidad	28
4 Coexistencia de Hierba (G) y árboles de Sabana (S y T)	33
4.1 Soluciones de equilibrio	33
4.2 Análisis de estabilidad	41
5 Coexistencia de Hierba (G) y árboles (S,T,F)	49
5.1 Soluciones de equilibrio	49
5.2 Análisis de estabilidad	50
6 Conclusiones	55
Bibliografía	57

Introducción

” *Biocooperación ecológica... A Janine Benyus le gusta recalcar que Darwin ha sido malinterpretado, que la teoría de la evolución no se reduce a la supervivencia de los más aptos, y que la naturaleza teje conexiones, fomenta la cooperación y la dependencia entre los organismos, y construye así ecosistemas prodigiosos y resilientes.*

— C. Fresno.

Los problemas en distintas áreas del conocimiento como biología, física, química, ingeniería, economía, o como se verá a lo largo de este documento, ecología; se pueden plantear en términos de modelos matemáticos. Muchos de estos modelos se pueden representar por medio de *ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)*. En este trabajo estaremos interesados en los *sistemas dinámicos* (en especial, los denominados *sistemas autónomos*), los cuales permiten describir el paso del tiempo de todos los puntos de un espacio dado, de tal manera que con su estudio se puede reconstruir el pasado y predecir el futuro.

A medida que aumenta la complejidad de las ecuaciones diferenciales, mayor es la dificultad para obtener soluciones analíticas. Existen incluso ecuaciones que no se sabe cómo se resuelven o ecuaciones en las que obtener su solución es bastante costoso. Una alternativa es hacer un análisis cualitativo, pues muchas veces no es importante conocer los valores puntuales de las soluciones, sino que bastará con obtener una descripción cualitativa de su comportamiento, saber si existen soluciones constantes, si existen soluciones periódicas o que pasa con las soluciones cuando la variable tiempo tiende a infinito.

Un ejemplo de lo hablado previamente se puede ver en [SL12], en donde *Staver y Levin* proponen un modelo matemático que examina la dinámica de los ecosistemas de sabana y bosque unificando la vida vegetal en cuatro estados; árboles de bosque, árboles de sabana, árboles jóvenes de sabana y pastos, bajo los efectos típicos de fuego, lluvia y competencia por el espacio.

Los biomas de sabana y bosque tropical representan entre el 15 a 20% de la superficie terrestre del planeta. Además, dichos biomas cumplen con la función de ser reservorios de carbono (la sabana en menor medida) [MB12]. En este sentido, es fundamental entender los mecanismos de la dinámica que caracteriza a estos dos biomas [BG20; SL12], debido a que es necesario un análisis que abarque la

transición de sabana a bosque para evaluar los procesos que diferencian a ambos [SAL11].

Los ecologistas han notado que los principales mecanismos que determinan la dinámica son: la intervención humana, pastoreo, tipo de suelo, cambio climático, fuego, competencia por nutrientes y espacio. Sin embargo, se ha observado que las lluvias y el fuego, junto con la competencia por espacio juegan un papel fundamental en la distribución de la sabana, los bosques y su cobertura arbórea.

La lluvia y el fuego están íntimamente relacionados, ya que la ausencia de lluvia puede generar aumento en la aparición de incendios. Por otra parte, los incendios afectan a mayor escala los bosques, pues los árboles de este tipo de bioma son más propensos a ser exterminados comparándolos con árboles de sabana con características similares [MB12]. Mientras que en el bioma de la sabana, el fuego actúa como un limitante de la cobertura arbórea, pues disminuye el reclutamiento de árboles jóvenes a adultos, ya que un árbol joven no puede alcanzar un tamaño resistente al fuego y se mantiene en un estado reprimido por episodios repetidos de muerte y rebrote [Hof+12]. Por lo anterior, la propagación del fuego actúa como un proceso de percolación, en el cual los pastos ayudan a la propagación mientras que los árboles actúan como barreras, interrumpiendo el paso del fuego. [SL12].

En este trabajo, nos centraremos en estudiar el modelo matemático desarrollado por *Staver* en [SL12], para predecir la distribución de biomas de sabana y bosque teniendo en cuenta la incidencia de incendios. Adicionalmente, se describe el modelo de *Staver* haciendo un cambio substancial en algunas variables demográficas que dependen de la propagación del fuego propuesto por *Brhane* en [BG20].

En el primer capítulo, se presentan las herramientas tanto ecológicas como matemáticas necesarias para el entendimiento del modelo. En primer lugar, se darán algunos conceptos referentes a ecología como bioma, sabana o bosque. En segunda instancia, nos sumergiremos de manera superflua por el mundo de los sistemas dinámicos, conociendo conceptos como sistemas autónomos, equilibrios, estabilidad, entre otros. Así mismo, miraremos algunos resultados importantes del análisis cualitativo de sistemas autónomos.

El segundo capítulo esta enfocado en describir el modelo de *Staver* y *Levin* desarrollado en [SL12]. Igualmente, se busca revisar algunos resultados y conceptos estudiados en [BG20] por *Brhane*, motivados por el modelo antes mencionado pero enfocado solamente en el bioma de sabana.

En el tercer, cuarto y quinto capítulo, se busca conocer la dinámica que ocurre cuando coexisten hierba y bosque, hierba y árboles de sabana, y por último, hierba y árboles (tanto de sabana y bosque). En los tres casos, se analizaron las múltiples soluciones

de equilibrio y su respectiva estabilidad, así mismo, se hicieron simulaciones con ayuda del software MATLAB, para corroborar los resultados hallados.

Preliminares

Este apartado se dividirá en dos partes; en la primera, se mencionarán aquellos conceptos de ecología relevantes para el entendimiento del modelo, los cuales fueron tomados primordialmente del libro de *Ecología y medioambiente* [Lec13]. En segunda instancia, se presentarán algunos conceptos, resultados y ejemplos relacionados con los sistemas dinámicos, es decir, se hará una tímida introducción sobre sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, soluciones de equilibrio y estabilidad de las soluciones, los cuales fueron extraídos en su mayoría del libro *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* [BC12].

1.1 Conceptos de ecología

1.1.1 Organización ecológica

En ecología, los objetos de estudio se pueden observar en diferentes niveles de jerarquía. Estos niveles de organización, empiezan desde el individuo, especie, población, comunidad, ecosistema, bioma y por último, la biosfera. En este caso, se hablará de las características de los biomas, poniendo un enfoque especial en la sabana y los bosques tropicales (los objetos de estudio de este trabajo).

Bioma. Es un sistema ecológico constituido por una gran zona geográfica generalmente ubicada a una cierta latitud. El área que ocupa no se encuentra del todo delimitada, pues más bien un bioma da paso a los adyacentes de forma gradual, sin embargo, su fisionomía nos permite distinguirlos de forma más o menos fácil debido a que presentan una cierta homogeneidad en cuanto a la forma en como están estructurados, su organización y sus patrones de funcionamiento. Entre los principales tipos de biomas conocidos, se encuentran los bosques, las sabanas, los desiertos, las tundras, los ecosistemas acuáticos epicontinentales, litorales y oceánicos.

Sabana o Pastizal. Son comunidades caracterizadas por la presencia de pastos que representan las especies dominantes del ecosistema, pues los árboles y arbustos son escasos. Este tipo de bioma se encuentra sobre todo en planicies y mesetas, en regiones que tienen una larga época seca durante el año, donde el clima es desfavorable para los árboles que de otro modo podrían formar bosques. Por lo general, la sabana

presenta un clima tropical seco con lluvias en verano, una temperatura promedio anual de alrededor de 20°C y una precipitación promedio de entre 250 y 2000 *mm*.

Bosque Tropical. Es un ecosistema con fauna y flora muy diversas, cada especie con frecuencia presenta una población no tan numerosa, pero si muy diseminada, por lo que no suele existir una clara especie dominante. La mayoría de los bosques tropicales se ubican a baja altitud y cercanas a la costa. Su clima suele ser cálido húmedo, con temperaturas promedio cercanas a los 27°C que no varían prácticamente con las estaciones o con la noche. La precipitación suele ser abundante y equitativamente repartida en todos los meses del año, por lo regular de más de 1000 *mm* anuales, aunque en algunas áreas del amazonas o del sureste de Asia puede superar los 4000 *mm*.

Sucesión Ecológica. Es la variación temporal no estacional de la diversidad de especies que constituyen a una comunidad. Para que una sucesión ecológica tenga lugar es necesaria la existencia de un disturbio que afecte e incluso elimine a los organismos de la comunidad, dejando espacios abiertos a la colonización de nuevos organismos.

1.1.2 Estabilidad ecológica

El término estabilidad, en el contexto ecológico es multifacético. Dicho concepto puede referirse a la persistencia que tiene un ecosistema para preservar su estado a través del tiempo, esto quiere decir que un ecosistema que perdure durante más tiempo, será más estable. Por otra parte, la estabilidad también puede hablarse en términos de perturbación, si un ecosistema retorna a un estado de equilibrio después de perturbado, entonces se dice que dicho ecosistema es estable, sin importar la magnitud de la perturbación [RBM76; Mor18]. Esta última definición es equivalente a la estabilidad asintótica que se maneja en los modelos dinámicos en matemática, cuya definición se verá en la siguiente sección.

La estabilidad es un concepto que puede tener varias clasificaciones, dependiendo de la magnitud de la perturbación o de acuerdo a la coexistencia de más de un estado estable. A continuación se presentan algunas de estas clasificaciones.

Estabilidad local y global. Se dice que un sistema posee estabilidad local cuando es estable sobre pequeñas perturbaciones de corta duración, mientras que la estabilidad global se refiere a un sistema altamente resistente al cambio en la composición de especies y / o la dinámica de la red alimentaria.

Estados estables alternativos. Un sistema posee estados estables alternativos si bajo las mismas condiciones externas (carga de nutrientes, temperatura, entre

otras) puede establecerse en diferentes estados estables. Este nombre esta reservado especialmente cuando se trabaja con modelos [Lev+09].

1.2 Conceptos matemáticos

Definición 1.2.1 Sea $\mathcal{A}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se llamará autónomo si es de la forma,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}) \quad (1.2.1)$$

donde $\vec{x} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Es decir, si el lado derecho de (1.2.1) no depende de la variable independiente t .

Note que la función $\vec{x} \mapsto (\vec{x}, f(\vec{x}))$ define un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ asociada al sistema de ecuaciones diferenciales 1.2.1. En este caso, la primera componente representa el punto base y la segunda componente especifica el vector en el punto base. Note que una solución de la forma $t \mapsto \phi(t)$ de 1.2.1 tiene la propiedad que su vector tangente en cada instante de tiempo t este dado por,

$$(\phi(t), \phi'(t)) = (\phi(t), f(\phi(t))).$$

En otras palabras, si $\zeta \in \mathbb{R}^n$ está en la orbita de esta solución entonces la recta tangente a la orbita en ζ es generada por el vector $(\zeta, f(\zeta))$ [Chi06].

Ejemplos 1.2.2 . A continuación se presentan algunos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales,

- (Ecuación de Verhulst) También denominado modelo logístico. Fue propuesta en 1838 por el matemático *Pierre Verhulst* con el fin de representar el crecimiento de poblaciones en donde la tasa de crecimiento relativa no permanezca constante sino que disminuye conforme aumenta la población [CAG14]. A continuación se presenta el modelo logístico,

$$\frac{dx}{dt} = x(r - \mu x).$$

donde $x(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t , mientras que r y μ son constantes.

- (Ecuaciones de Lotka-Volterra) También conocidas como modelo predador-presa, dichas ecuaciones fueron propuestas en 1926 por el matemático italiano

Vito Volterra en conexión con el estudio de poblaciones de peces [CAG14]. A continuación se presentan las ecuaciones,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(\lambda - by), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\mu + cx).\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Donde $x(t)$ y $y(t)$ representa la población de presas y predadores existentes en un instante t , respectivamente. Mientras que b, c, μ y λ son constantes.

- (Modelo SIR) Un modelo importante en epidemiología es el modelo SIR, que describe la dinámica de una enfermedad que confiere inmunidad contra la reinfección [BC12]. En este caso, S, I y R representan la densidad de individuos susceptibles, infecciosos y recuperados de alguna enfermedad, respectivamente. A continuación se presenta el modelo SIR simple,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}$$

Donde β y γ representan la tasa de reclutamiento de susceptibles a infectados y de infectados a recuperados, respectivamente.

Definición 1.2.3 Un punto $\vec{x}_\infty \in \mathcal{A}$ se dice que es un equilibrio (o un punto estacionario) del sistema autónomo (1.2.1) si satisface que $f(\vec{x}_\infty) = \vec{0}$.

Ejemplo 1.2.4 Hallar los puntos de equilibrio para el sistema predador-presa.

Solución. Aplicando la definición de solución de equilibrio (1.2.3) al sistema 1.2.2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$x(\lambda - by) = 0; \quad y(-\mu + cx) = 0.$$

Para encontrar las soluciones de equilibrio, se utilizarán dos casos, teniendo en cuenta si x se anula o no.

- Si $x = 0$.
Reemplazando en la segunda ecuación obtenemos igualmente que $y = 0$. Por tanto, el equilibrio trivial del sistema de predador-presa es $(0, 0)$.

- Si $x \neq 0$.

De la primera ecuación se obtiene que $y = \lambda/b$ (pues $x \neq 0$). Por otra parte, note que $y \neq 0$, en dicho caso, obtenemos $x = \mu/c$. Por tanto, un punto estacionario no trivial del sistema es $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$.

Definición 1.2.5 Se define la matriz de la linealización (o matriz de la comunidad) en el punto $\vec{x}_\infty$ como la matriz Jacobiana de f evaluada en el punto estacionario, esto es $J_f(\vec{x}_\infty)$.

Definición 1.2.6 (Linealización) La linealización del sistema (1.2.1) en el equilibrio $\vec{x}_\infty$ está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = J_f(\vec{x}_\infty) \cdot \vec{x}$$

Un resultado importante en el estudio cualitativo de los sistemas autónomos se conoce como el teorema de Hartman-Grobman. De manera escueta, esta proposición garantiza que si todos los valores propios de $J_f(\vec{x}_\infty)$ poseen parte real distinta de 0, entonces el sistema (1.2.1) en cercanías del equilibrio cualitativamente posee el mismo comportamiento de su linealización. Si el lector está interesado en conocer más detalles acerca de este resultado puede consultarlo en [Chi06] y [PP96].

Ejemplo 1.2.7 Determinar la matriz de la comunidad para el sistema predador-presa.

Solución. Hallemos las derivadas parciales del sistema 1.2.2,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x(\lambda - by)) &= \lambda - by, & \frac{\partial}{\partial y}(x(\lambda - by)) &= -bx, \\ \frac{\partial}{\partial x}(y(-\mu + cx)) &= cy, & \frac{\partial}{\partial y}(y(-\mu + cx)) &= -\mu + cx. \end{aligned}$$

Ahora, se determinan dos matrices de linealización de acuerdo a cada punto estacionario del sistema.

- punto estacionario $(0, 0)$.

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

- punto estacionario $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$.

$$J(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b\mu}{c} \\ \frac{c\lambda}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 1.2.8 (Estabilidad) *A continuación, veremos las distintas clasificaciones que puede tener un equilibrio,*

- Un equilibrio $\vec{x}_\infty$ se dice que es estable si para cada solución $\vec{x}(t)$ con condición inicial $\vec{x}(0)$ suficientemente cerca del equilibrio permanece cerca del equilibrio para todo $t \geq 0$.
- Un equilibrio $\vec{x}_\infty$ se dice que es asintóticamente estable si para cada solución $\vec{x}(t)$ con condición inicial $\vec{x}(0)$ suficientemente cerca al equilibrio tiende al equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.
- Un equilibrio $\vec{x}_\infty$ se dice que es inestable si no es estable.

La estabilidad de una solución de equilibrio $\vec{x}_\infty$ se puede deducir por medio de los valores propios de la matriz de la linealización $J_f(\vec{x}_\infty)$. Debido al constante uso de este resultado a lo largo del trabajo, se procederá a enunciarlo de forma precisa, así mismo, realizar su respectiva prueba.

Teorema 1.2.9 *Si $\vec{x}_\infty$ es un equilibrio del sistema (1.2.1) y si todos los valores propios de la matriz de la linealización en este equilibrio poseen parte real negativa entonces el equilibrio $\vec{x}_\infty$ es asintóticamente estable.*

La prueba recae en el uso de cuatro teoremas que en su mayoría se pueden revisar en textos de Análisis, además, las pruebas se pueden consultar en [Chi06]. A continuación se enuncian dichos teoremas.

- **Teorema 1.2.10 (Teorema de Taylor)** *Sea U un subconjunto abierto de X . Si $f : U \rightarrow Y$ es de clase C^1 y $x + th \in U$ para todo $0 \leq t \leq 1$, entonces*

$$f(x + h) = f(x) + J_f(x)h + \int_0^1 (J_f(x + h)h - J_f(x)h)dt.$$

- **Teorema 1.2.11 (Teorema del Valor Medio)** Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable en un conjunto abierto $U \subset X$ con $a, b \in U$ y $a + t(b - a) \in U$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Si existe algún $M > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0,1]} \|J_f(a + t(b - a))\| \leq M,$$

entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

- **Teorema 1.2.12** Sea $f : [a, b] \rightarrow X$ una función regular, entonces

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

- **Teorema 1.2.13** Considere el problema de valor inicial,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + g(\vec{x}, t), \quad x(t_0) = \vec{x}_0.$$

Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa y existen constantes positivas $a > 0$ y $k > 0$ tal que $\|g(\vec{x}, t)\| \leq k\|\vec{x}\|^2$ cuando $\|\vec{x}\| < a$, entonces existen constantes positivas C, b , y α que son independientes de la escogencia del tiempo inicial t_0 tal que la solución $t \mapsto \vec{x}(t)$ del problema de valor inicial satisface,

$$\|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}_0\|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

para todo $t \geq t_0$ siempre que $\|\vec{x}_0\| \leq b$. En particular, la función $t \mapsto \vec{x}(t)$ esta definida para todo $t \geq t_0$, la solución cero (la solución con valor inicial $\vec{x}(t_0) = 0$), es asintóticamente estable.

Ahora se tienen las herramientas necesarias para realizar la prueba.

Demostración. Se hará la demostración para $\vec{x}_\infty = 0$, lo que es suficiente para el desarrollo de la prueba.

Por el teorema 1.2.10 se tiene que $f(\vec{x}) = J_f(0)\vec{x} + g(\vec{x})$ tal que,

$$g(x) := \int_0^1 (J_f(s\vec{x}) - J_f(0))\vec{x} ds$$

Por medio del Teorema del Valor Medio 1.2.11 se obtiene que,

$$\begin{aligned}\|J_f(s\vec{x}) - J_f(0)\| &\leq \|s\vec{x}\| \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau s\vec{x})\|, \\ &\leq \|\vec{x}\| \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau\vec{x})\|,\end{aligned}$$

Donde $D^2 f$ denota la matriz de las derivadas de segundo orden de f . Por la suavidad de la función f , existe una bola B centrada en el origen y una constante $k > 0$ tal que,

$$\sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau\vec{x})\| \leq k, \quad \forall \vec{x} \in B,$$

Ahora, usando el teorema 1.2.12, y lo hecho previamente obtenemos,

$$\begin{aligned}\|g(\vec{x})\| &= \|\vec{x}\| \cdot \left\| \int_0^1 (J_f(s\vec{x}) - J_f(0)) \vec{x} ds \right\|, \\ &\leq \|\vec{x}\| \cdot \sup_{s \in [0,1]} \|J_f(s\vec{x}) - J_f(0)\|, \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \sup_{\tau \in [0,1]} \|D^2 f(\tau\vec{x})\|, \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \cdot k,\end{aligned}$$

Siempre que $\vec{x} \in B$. El resultado es consecuencia directa del teorema 1.2.13.

Corolario 1.2.14 Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{x}_\infty$ es una solución de equilibrio del sistema (1.2.1) tal que $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y además,

$$\text{tr} J_f(\vec{x}_\infty) < 0, \quad \det J_f(\vec{x}_\infty) > 0.$$

Entonces el equilibrio $\vec{x}_\infty$ es asintóticamente estable.

Demostración. La prueba es una consecuencia inmediata del teorema 1.2.9.

El resultado anterior se conoce como las condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz para sistemas 2×2 . Si se considera el sistema (1.2.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias 3×3 , el equilibrio $\vec{x}_\infty$ es asintóticamente estable si y solo sí, $\det J_f(\vec{x}_\infty) < 0$, $\text{tr} J_f(\vec{x}_\infty) < 0$ y $\det J_f(\vec{x}_\infty) > \text{tr} J_f(\vec{x}_\infty) \cdot a_2$, donde a_2 es la suma de los determinantes de las menores principales de $J_f(\vec{x}_\infty)$. Lo expuesto anteriormente se conoce como las condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz para sistemas 3×3 . Una descripción buena y precisa del problema de Routh-Hurwitz se puede encontrar en [Cop65].

Ejemplo 1.2.15 Determine el tipo de estabilidad de los equilibrios del sistema (1.2.2).

Solución. Para el caso del equilibrio trivial $(0,0)$, se tiene que el determinante $\det J(0,0) = -\lambda\mu < 0$, en consecuencia el punto estacionario es inestable. Por otra parte, no se puede determinar la naturaleza del equilibrio $(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b})$ con el teorema 1.2.9 debido a que la traza se anula.

Definición 1.2.16 Un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ se denomina positivamente invariante asociado al sistema (1.2.1) Si para todo $\vec{x}(0) \in S$ entonces $\vec{x}(t) \in S$ para todo $t > 0$.

En otras palabras, ninguna solución que comience dentro de S podrá salir de S en el futuro. De manera análoga se puede definir el conjunto *negativamente invariante*.

Definición 1.2.17 Sea $\vec{x}(t)$ una solución que es acotada cuando $t \rightarrow \infty$. se dice que esa solución es periódica si $C^+ = \{\vec{x}(t) : t \geq 0\}$ es una curva cerrada.

En este caso, se presenta un resultado que proporciona un criterio para determinar cuando no existen soluciones periódicas en un sistema de ecuaciones autónomas.

Teorema 1.2.18 (Criterio de Dulac) Sea $\mathcal{D}$ un conjunto simplemente conexo en el plano y además,

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y).$$

es un sistema autónomo en $\mathcal{D}$. Entonces, el sistema no posee soluciones periódicas si existe una función escalar $\varphi \in C^1(\mathcal{D})$ tal que,

$$\frac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi f_2)}{\partial y}$$

No cambia de signo en $\mathcal{D}$.

Demostración. Procederemos por contradicción, es decir, supongamos que existe una órbita periódica contenida en $\mathcal{D}$. Sea γ la órbita periódica con periodo τ . Por otra parte, por hipótesis se tiene la existencia de la función escalar ϕ , entonces se puede definir un campo vectorial $(x, y) \mapsto (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1)$. Tenemos que,

$$\int_{\gamma} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot ds = \int_0^{\tau} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot dt, \quad (1.2.3)$$

$$= \int_0^{\tau} [-\phi \cdot f_2 \cdot f_1 + \phi \cdot f_1 \cdot f_2] \cdot dt = 0, \quad (1.2.4)$$

Por otra parte, sea $\mathcal{D}^*$ la región contenida en $\mathcal{D}$ la cual está limitada por la curva γ . Note que $\mathcal{D}^*$ es simplemente conexo debido a que $\mathcal{D}$ es simplemente conexo y además $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$. Entonces, por el *teorema de Green* tenemos que,

$$\int_{\gamma^+} (-\phi \cdot f_2, \phi \cdot f_1) \cdot ds = \iint_{\mathcal{D}^*} \frac{\partial(\phi f_1)}{\partial x} - \frac{\partial(-\phi f_2)}{\partial y} dxdy = \iint_{\mathcal{D}^*} \frac{\partial(\phi f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi f_2)}{\partial y} dxdy,$$

Debido a que $\mathcal{D}^*$ posee área positiva y además, la función integrando posee signo constante, por tanto, la integral anterior es diferente de cero. Lo cual contradice lo hallado en (1.2.4). En conclusión, el sistema autónomo no posee soluciones periódicas en $\mathcal{D}$.

Modelo de *Staver* y *Levin*

” *El objetivo de la ciencia no debe ser conquistar la naturaleza, sino poder vivir con ella.*

— Barry Commoner

2.1 Descripción del modelo

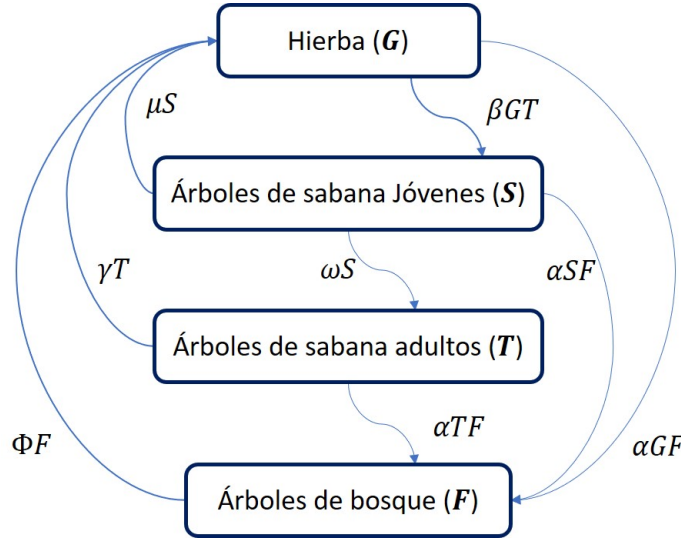
El modelo del cual hablaremos en esta sección es el propuesto por *Staver* en [SL12], el cual busca establecer la dinámica entre los biomas de sabana y bosques, reduciendo la población vegetal a árboles de bosque (F), árboles de sabana (T), árboles jóvenes de sabana (S) y pastos (G), bajo los efectos típicos del fuego, la lluvia y la competencia por el espacio (ver figura 2-1). El modelo en cuestión es temporal, debido a que no es espacialmente explícito pues todo el espacio se contabiliza implícitamente teniendo en cuenta que es ocupado por G , S , T ó F en todo instante de tiempo, es decir,

$$G(t) + S(t) + T(t) + F(t) = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.1)$$

Los supuestos del modelo son:

1. El fuego genera disturbio en los ecosistemas, produce un proceso de sucesión ecológica, por tal motivo, se observa una jerarquización forestal en donde, la hierba se planta inicialmente, posteriormente llegan al lugar los árboles jóvenes y por último se establecen los árboles adultos.
2. La hierba dificulta la formación de árboles adultos al retrasar el reclutamiento de árboles jóvenes a adultos.
3. Los árboles jóvenes de sabana son producidos por los árboles adultos de sabana en proporción a la densidad de árboles.
4. Al morir los árboles (tanto de sabana como de bosque) son reemplazados por la hierba.

Fig. 2-1: Diagrama de flujo del modelo. Adaptada de [SL12].



A continuación con lo antes expuesto se presenta el sistema de ecuaciones que representa el modelo de *Staver*, además, se presentan las variables de estado y demográficas junto con su interpretación ecológica (Ver *Tabla 2-1*).

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF \\
 \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S - \alpha SF \\
 \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T - \alpha TF \\
 \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2}$$

Los árboles jóvenes de sabana se establecen en espacio ocupado sólo por pasto y en proporción al número de árboles adultos de sabana presentes en el sistema (tasa constante β). El reclutamiento de árboles de sabana jóvenes a adultos se da a una tasa $\omega(G)$ en proporción a la cantidad de árboles jóvenes de sabana disponibles. Cuando mueren los árboles dicho espacio es ocupado por el pasto de acuerdo a la cantidad de árboles en el sistema (tasas μ , γ y $\phi(G)$). Los árboles de bosque se establecen en espacios ocupados por hierba y árboles de sabana en proporción a la cantidad de dichos árboles disponibles (tasa constante α).

El modelo incorpora dos suposiciones fundamentales sobre la ecología de la sabana. Primero, se asume que la propagación del fuego en la sabana depende de la abundancia del pasto, como se refleja en la función $\omega(G)$ y $\phi(G)$. La sabana con una cobertura arbórea por debajo del 40 % se quema con frecuencia, pero el fuego es casi inexistente en los sistemas con cobertura arbórea por encima del umbral del 40 %. Se incorpora esta respuesta no lineal de frecuencia de incendios a la abundancia de

Símbolo	Interpretación Ecológica
Variables de Estado:	
G	Hierba o pastos.
S	Árboles de sabana jóvenes.
T	Árboles de sabana Adultos.
F	Árboles de Bosque.
Parámetros demográficos:	
α	Tasa de nacimiento de árboles de bosque (F).
β	Tasa de nacimiento de árboles de sabana jóvenes (S).
ω	Tasa de reclutamiento de árboles jóvenes (S) a adultos (T) de Sabana.
ϕ	Tasa de mortalidad de los árboles de bosque (F).
μ	Tasa de mortalidad de árboles de sabana Adultos (T).
γ	Tasa de mortalidad de árboles de sabana jóvenes (S).

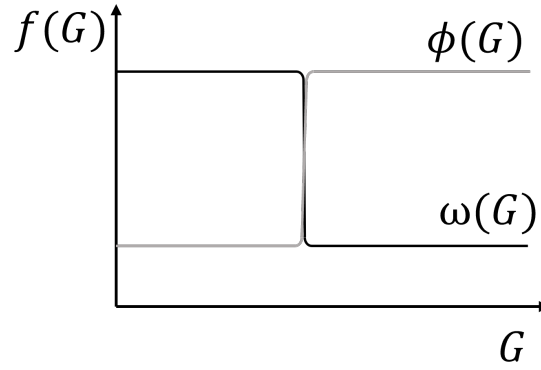
Tab. 2-1: Parámetros y variables del modelo.

pasto a través de $\omega(G)$, el reclutamiento de plántulas en árboles. El fuego rara vez mata a los árboles jóvenes de la sabana, que pueden rebrotar después del fuego, y rara vez afecta a los árboles adultos. El fuego impone un control importante sobre el reclutamiento de árboles de jóvenes en adultos. Estas características de los sistemas de sabana significan que el reclutamiento de árboles debe ser alto cuando la abundancia de pastos (y la frecuencia de incendios) es baja, debe disminuir rápidamente cerca del 40 % de la cubierta de árboles y debe permanecer baja en abundancia de hierba alta [SAL11].

Por otra parte, la ecología del bosque es diferente a la sabana. La propagación del fuego ejerce un limitante para los árboles, afectando directamente su tasa de mortalidad $\phi(G)$. En este caso igualmente se asume que la propagación del fuego en el bosque depende de la abundancia del pasto. Es decir, la mortalidad de los árboles de bosque intrínseca (causas ajenas a los incendios) debería ocurrir cuando la abundancia de pasto está por debajo del 40 % y que la mortalidad inducida por el fuego debe ocurrir cuando la abundancia del pasto sea alta [SL12].

En este caso, se asume que $\omega(G)$ y $\phi(G)$ son funciones suaves y poseen forma sigmoidal. La tasa de reclutamiento de árboles jóvenes a adultos de la Sabana (ω) junto con la tasa de mortalidad de los árboles de bosque (ϕ) están condicionadas por la propagación del fuego y las condiciones climáticas, por tanto, indirectamente serán variables que dependerán de la disponibilidad de G (Figura 2-2).

Fig. 2-2: Gráfica de las funciones $\omega(G)$ y $\phi(G)$. Adaptada de [SL12].



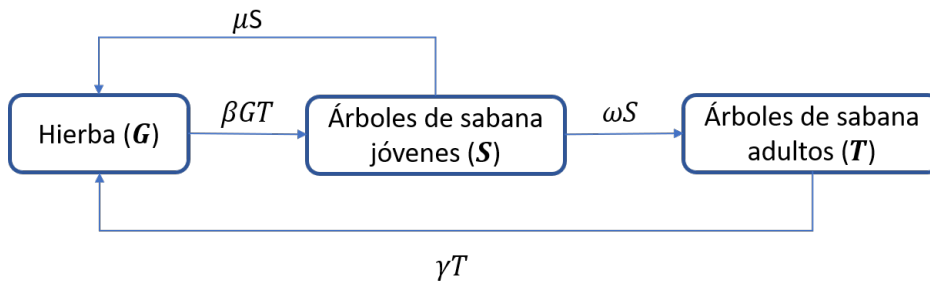
2.2 Generalidades del trabajo de *Brhane*

En esta sección se presentan algunos resultados encontrados por *Brhane* en [BG20]. El modelo que se estudiará es el planteado en [SAL11] y [SL12]. Sin embargo, se hace una simplificación al no incluir los árboles de bosque, es decir, esta enfocado sólo en el bioma de sabana (ver figura 2-3). De acuerdo a lo anterior, el modelo simplificado será,

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Adicionalmente, se hace un cambio en la concepción de la función ω (ver figura 2-4),

Fig. 2-3: Diagrama de flujo del modelo. Adaptada de [SAL11] y [BG20].



pues tiene una discontinuidad de salto. Por tanto, en este trabajo se propuso definirla como una función a trozos (ver figura 2-4) la cual se presenta a continuación,

$$\omega(G) = \begin{cases} \omega_0 & \text{si } G \leq a, \\ \omega_0 - \frac{(G-a)(\omega_0-\omega_1)}{\epsilon} & \text{si } a \leq G \leq a + \epsilon, \\ \omega_1 & \text{si } G \geq a + \epsilon. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

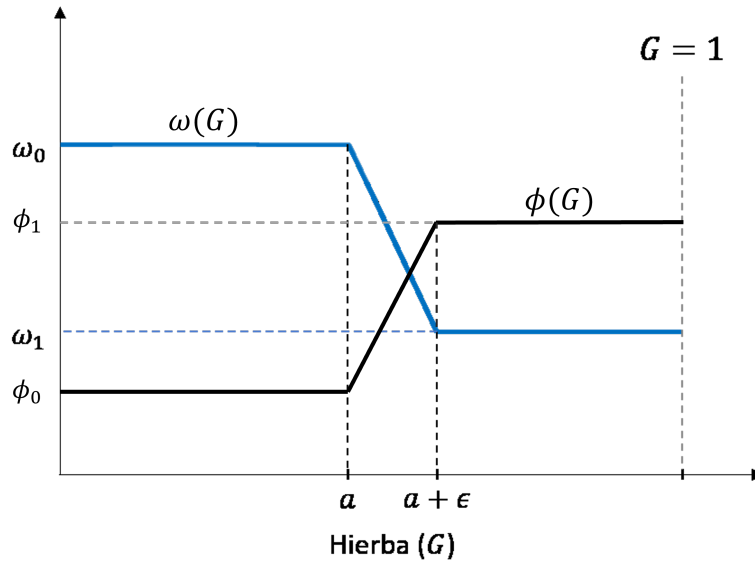
Donde $\omega_0 > \omega_1 > 0$ y $0 < a < 1$, además, ϵ es un número suficientemente pequeño mayor que cero.

Igualmente, se propone para trabajos futuros cambiar la función ϕ (ver figura 2-4), como se describe a continuación,

$$\phi(G) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } G \leq a, \\ \phi_0 - \frac{(G-a)(\phi_0-\phi_1)}{\epsilon} & \text{si } a \leq G \leq a + \epsilon, \\ \phi_1 & \text{si } G \geq a + \epsilon. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Donde $\phi_1 > \phi_0 > 0$ y $0 < a < 1$, además, ϵ es un número suficientemente pequeño mayor que cero.

Fig. 2-4: Representación de las función $\omega(G)$ y $\phi(G)$. Adaptada de [BG20].



En este caso el dominio de definición de las soluciones será el conjunto,

$$\Omega = \{(G, S, T) : G, S, T \geq 0, \quad G + S + T = 1\}$$

Teorema 2.2.1 Todas las soluciones del sistema con condición inicial positiva son no negativas para todo tiempo $t \geq 0$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que $G(0) > 0$, $S(0) > 0$ y $T(0) > 0$. Definimos $\tau \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\tau = \sup \{t > 0, \quad \forall s < t : \quad G(s) > 0, S(s) > 0, T(s) > 0\},$$

evidentemente note que si $\tau = \infty$ entonces el teorema está probado. Por tanto, procederemos por contradicción, supongamos que $0 < \tau < \infty$. Se tendrán tres posibilidades, $G(\tau) = 0$, $S(\tau) = 0$ ó $T(\tau) = 0$. Sin pérdida de generalidad suponga que $T(\tau) = 0$. Evaluando en τ en el sistema 2.2.1 y reduciendo se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt}(\tau) &= \mu S(\tau), \\ \frac{dS}{dt}(\tau) &= -[\omega(G(\tau)) + \mu] S(\tau), \\ \frac{dT}{dt}(\tau) &= \omega(G(\tau)) S(\tau). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Note que las ecuaciones presentadas en 2.2.4 se satisfacen puntualmente. Supongamos que la segunda ecuación se cumple para todo instante de tiempo t , en particular, se cumplirá para $t = \tau$. Así mismo, se supone que $\omega(G(\tau))$ es constante. Por tanto, se tendrá la siguiente ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dS}{dt} = -[\omega(G(\tau)) + \mu] S(t), \tag{2.2.5}$$

La ecuación 2.2.5 es denominada de crecimiento exponencial o *modelo de Malthus* cuya solución será,

$$S(t) = S(0) e^{-[\omega(G(\tau)) + \mu]t},$$

En este caso, evaluando en $t = \tau$,

$$S(\tau) = S(0) e^{-[\omega(G(\tau)) + \mu]\tau} > 0,$$

Tomando la tercera ecuación de 2.2.4 se obtiene que,

$$\frac{dT}{dt}(\tau) = \omega(G(\tau)) S(\tau) > 0. \tag{2.2.6}$$

Por otra parte, note que,

$$\frac{dT}{dt}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \frac{T(\tau) - T(t)}{\tau - t} = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \frac{-T(t)}{\tau - t} < 0.$$

Lo anterior, contradice el resultado presentado en 2.2.6, en consecuencia, se tiene que $T(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. De la misma manera como se procedió, se puede probar que $G(t) > 0, \forall t \geq 0$ [BG20] y $S(t) > 0, \forall t \geq 0$. Con lo cual se concluye la prueba.

Corolario 2.2.2 *El conjunto Ω es positivamente invariante.*

Demostración. Supongamos que $(G(0), S(0), T(0)) \in \Omega$, es decir,

$$G(0) > 0, \quad S(0) > 0, \quad T(0) > 0$$

y además,

$$G(0) + S(0) + T(0) = 1,$$

Note que sumando el sistema de ecuaciones de 2.2.1 se obtiene

$$\frac{dG}{dt} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT}{dt} = 0,$$

integrando con respecto a t ,

$$G(t) + S(t) + T(t) = c$$

donde c es la constante de integración. Note que por la condición inicial se tiene que $c = 1$. Es decir obtenemos que,

$$G(t) + S(t) + T(t) = 1,$$

Por último, por el teorema demostrado previamente se tiene que las soluciones serán no negativas siempre que $t \geq 0$. En consecuencia, cualquier solución con $t \geq 0$ cumple las condiciones para pertenecer a Ω .

Para reducir la complejidad del sistema 2.2.1, se puede utilizar la condición espacial, $S(t) = 1 - G(t) - T(t)$ para todo instante de tiempo $t \geq 0$, con lo cual se obtiene un sistema de dos ecuaciones ordinarias no lineales como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Teorema 2.2.3 *El sistema de ecuaciones diferenciales no posee soluciones periódicas en Ω .*

Demostración. En este caso, el conjunto solución Ω es simplemente conexo (pues, geoméricamente es la porción de un plano limitado en el primer octante). Por otra parte,

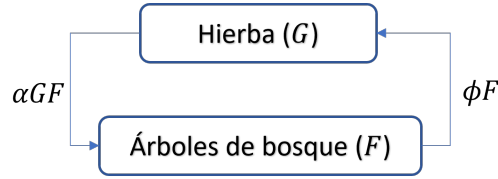
$$\frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{dG}{dt} \right) = -\mu - \beta G, \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{dT}{dt} \right) = -\omega(G) - \gamma.$$

Tomando $\phi(G, T) = 1$, entonces $\frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{dG}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{dT}{dt} \right)$ no cambia de signo por lo menos en Ω . En consecuencia, usando el *criterio de Dulac* (teorema 1.2.18) se concluye que el sistema no posee soluciones periódicas en Ω .

Coexistencia de Hierba (G) y árboles de Bosque (F)

Este capítulo está enfocado en el estudio de un caso particular del modelo de *Staver* y *Levin* [SL12], en donde se conocerán las soluciones de equilibrio del sistema con la ausencia de los árboles de Sabana (S y T), mirando la dinámica poblacional que puede ocurrir entre la hierba (G) y los árboles de bosque (F) (ver figura 3-1). Adicionalmente, se tomará la función ϕ tal como lo sugiere *Brhane* [BG20] (ver ecuación (2.2.3) y figura 2-4).

Fig. 3-1: Diagrama de flujo del modelo. Adaptada de [SL12].



En este caso el sistema que se estudiará será,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \phi(G)F - \alpha GF \\ \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

3.1 Soluciones de equilibrio

El sistema (3.0.1) se anula siempre que $F = 0$ y $G = 1$, este es el equilibrio trivial del sistema. Ahora, supongamos que los árboles de bosque y la hierba coexisten simultáneamente (esto es $F > 0$); en este caso, por la condicional espacial se puede reducir el sistema 3.0.1 de la siguiente manera,

$$\frac{dG}{dt} = \phi(G)(1 - G) - \alpha G(1 - G) \quad (3.1.1)$$

Proposición 3.1.1 Las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (3.0.1) se obtienen cuando,

$$\check{G} = \frac{\phi(\check{G})}{\alpha}, \quad \check{F} = \frac{\alpha - \phi(\check{G})}{\alpha}.$$

Demostración. Note que 3.1.1 se anula siempre que,

$$\phi(G) = \alpha G,$$

El resultado es inmediato despejando la variable $\check{G}$ de la condición anterior, posteriormente usando la condición espacial se determina $\check{F}$.

El equilibrio trivial siempre es admisible. Por otra parte, las soluciones de equilibrio no triviales serán admisibles siempre que la tasa de nacimientos de árboles de bosque sea superior a la tasa de mortalidad de árboles de bosque, es decir, $\alpha > \phi$. En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evoluciona a un estado donde solo existe hierba (G).

Definiendo una función g que depende de G tal que,

$$g(G) = \alpha \cdot G, \quad G \in [0, 1]. \quad (3.1.2)$$

Se puede inferir por medio de lo anterior que toda solución de equilibrio del sistema debe satisfacer que,

$$\phi(G) = g(G),$$

Así mismo, las soluciones de equilibrio son raíces de la función definida como,

$$m_1(G) = g(G) - \phi(G).$$

Donde la función m_1 representa la tasa de variación de los árboles de bosque. Bajo ciertas condiciones que deben satisfacer los parámetros demográficos, se puede garantizar la existencia de un máximo de cuatro soluciones de equilibrio. El siguiente resultado nos da razón de las condiciones para encontrar los equilibrios no triviales y la cuantía de estos.

Lema 3.1.2 Suponga que $g(1) > \phi_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

1. Si $g(a) < \phi_0$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\check{G}, \check{F})$ para el sistema (3.0.1) tal que $a + \epsilon < \check{G} < 1$.

2. Si $g(a) > \phi_1$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\check{G}, \check{F})$ para el sistema (3.0.1) tal que $0 < \check{G} < a$.
3. Si $\phi_0 < g(a) < \phi_1$ entonces existen soluciones de equilibrio no triviales $(\check{G}_1, \check{F}_1)$, $(\check{G}_2, \check{F}_2)$ y $(\check{G}_3, \check{F}_3)$ para el sistema (3.0.1) tal que $0 < \check{G}_1 < a$, $a < \check{G}_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < \check{G}_3 < 1$.

Demostración. En primer lugar, caractericemos la función $m_1(G)$. La derivada de dicha función es $m'_1(G) = \alpha - \phi'(G)$. Note que $m'_1(G) > 0$ siempre que $0 < G < a$ ó $a + \epsilon < G < 1$, mientras que será positiva si $a < G < a + \epsilon$. Lo anterior garantiza que dicha función es estrictamente decreciente o creciente en alguno de los tres intervalos. Ahora,

(a) Considere el intervalo $0 < G < a$.

$$m_1(G) = g(G) - \phi(G) = g(G) - \phi_0 < g(a) - \phi_0 < 0,$$

Entonces, la función m_1 no posee raíces para $0 < G < a$. En consecuencia, no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m_1(a) &= g(a) - \phi(a) = g(a) - \omega_0 < 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < \phi_0 + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior y teniendo en cuenta que la función m_1 posee comportamiento estrictamente monótono, dicha función no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia, no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < \phi_0 + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0, \\ m_1(1) &= g(1) - \phi_1 > 0, \quad m'_1(G) > 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

(b) Considere el intervalo $0 \leq G \leq a$.

$$m_1(a) = g(a) - \phi_0 > \phi_1 - \phi_0 > 0, \quad m_1(0) = -\phi_0 < 0.$$

Por el teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $0 < G < a$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$m_1(G) = g(G) - \phi(G) > g(a) - \phi(G) > \phi_1 - \phi(G) > 0.$$

Lo anterior prueba que la función m_1 no posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m_1(G) &= g(G) - \phi_1 > g(a) - \phi_1 > 0, & m_1(1) &= g(1) - \phi_1 > 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m_1 no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

(c) Considere el intervalo $0 \leq G \leq a$.

$$m_1(a) = g(a) - \phi_0 > 0, \quad m_1(0) = -\phi_0 < 0.$$

Por el teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $0 < G < a$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m_1(a) &= g(a) - \phi_0 > 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m_1(1) &= g(1) - \phi_1 > 0, \\ m_1(a + \epsilon) &= g(a + \epsilon) - \phi_1 = g(a) + \zeta(\epsilon) - \phi_1 < 0. \end{aligned}$$

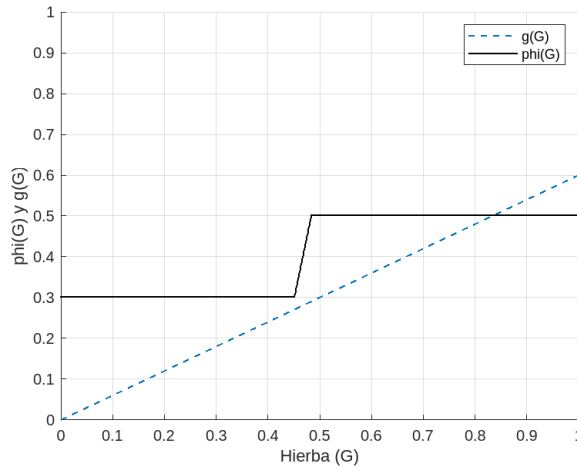
Por el teorema de Bolzano, la función m_1 posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. La unicidad de dicha raíz se garantiza debido al comportamiento monótono de la función. En consecuencia, existe una única solución de equilibrio en dicho intervalo.

A continuación procederemos a presentar algunos ejemplos donde se evidencie la existencia de las soluciones de equilibrio no triviales de acuerdo al lema 3.1.2.

Ejemplo 3.1.3 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0.6$, $\phi_0 = 0.3$, $\phi_1 = 0.5$, $a = 0.45$, $\epsilon = 0.033$.

Con estos valores se obtiene que $g(1) = 0.6 > 0.5 = \phi_1$ y además, $g(a) = 0.27 < 0.3 = \phi_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 3-2.

Fig. 3-2: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del lema 3.1.2.



Ejemplo 3.1.4 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0.88$, $\phi_0 = 0.25$, $\phi_1 = 0.42$, $a = 0.52$, $\epsilon = 0.001$.

Con estos valores se obtiene que $g(1) = 0.88 > 0.42 = \phi_1$ y además, $g(a) = 0.45 < 0.42 = \phi_1$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 3-3.

Ejemplo 3.1.5 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0.6$, $\phi_0 = 0.28$, $\phi_1 = 0.52$, $a = 0.52$, $\epsilon = 0.001$.

Al utilizar los valores de este ejemplo se obtiene que $g(1) = 0.6 > 0.52 = \phi_1$ y además, $\phi_0 = 0.28 < g(a) = 0.45 < 0.42 = \phi_1$. En consecuencia se cumple el tercer caso del lema anterior, por tanto, existen tres soluciones de equilibrio tal como lo muestra la figura 3-4.

Fig. 3-3: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del lema 3.1.2.

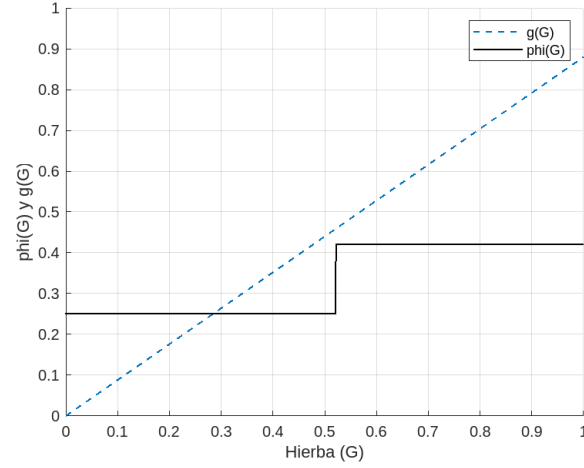
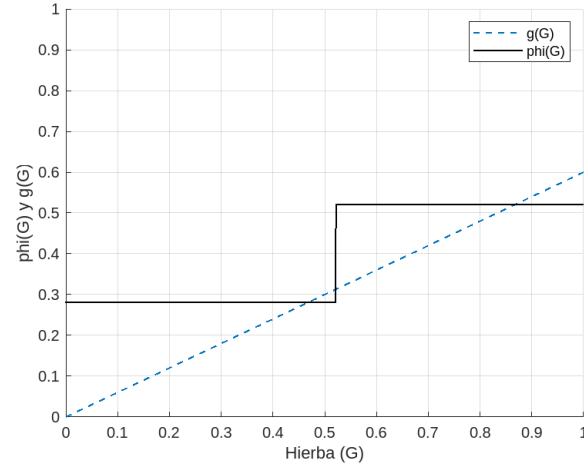


Fig. 3-4: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (c) del lema 3.1.2.



3.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se buscará encontrar alguna condición que garantice que las soluciones halladas en el apartado anterior sean asintóticamente estables. En primera instancia, miremos un resultado relacionado con la estabilidad de la solución de equilibrio trivial.

Lema 3.2.1 *La solución de equilibrio $(1, 0)$ del sistema (3.0.1) es asintóticamente estable siempre que $g(1) < \phi_1$. Por el contrario, si $g(1) > \phi_1$ entonces el equilibrio $(1, 0)$ es inestable.*

Demostración. Derivando la ecuación (3.1.1) con respecto a G y evaluando en $G = 1$ se obtiene que,

$$\frac{d}{dG} \left(\frac{dG}{dt} \right) \Big|_{G=1} = -(\phi(1) - \alpha),$$

Por el teorema 1.2.9, el sistema es asintóticamente estable si la derivada presentada previamente es negativa, lo cual ocurre siempre que $\alpha < \phi(1)$.

Proposición 3.2.2 *Cualquier solución de equilibrio $(\check{G}, \check{F})$ del sistema (3.0.1) es asintóticamente estable siempre que,*

$$\alpha > \phi'(\check{G}),$$

En donde el lado derecho de la expresión es la derivada del parámetro ϕ .

Demostración. Derivando la ecuación (3.1.1) con respecto a G y evaluando en $G = \check{G}$ se obtiene que,

$$\frac{d}{dG} \left(\frac{dG}{dt} \right) \Big|_{G=\check{G}} = \left(\frac{\alpha - \phi(\check{G})}{\alpha} \right) (\phi'(\check{G}) - \alpha),$$

Por el teorema 1.2.9, el sistema es asintóticamente estable si la derivada presentada previamente es negativa, lo cual ocurre siempre que $\phi'(\check{G}) < \alpha$.

Corolario 3.2.3 *Suponga que $g(1) > \phi_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,*

1. *Toda solución de equilibrio no trivial G del modelo 3.0.1 tal que $0 < G < a$ o $a + \epsilon < G < 1$ es asintóticamente estable.*
2. *Toda solución de equilibrio no trivial G del modelo 3.0.1 tal que $a < G < a + \epsilon$ es inestable.*

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.2.

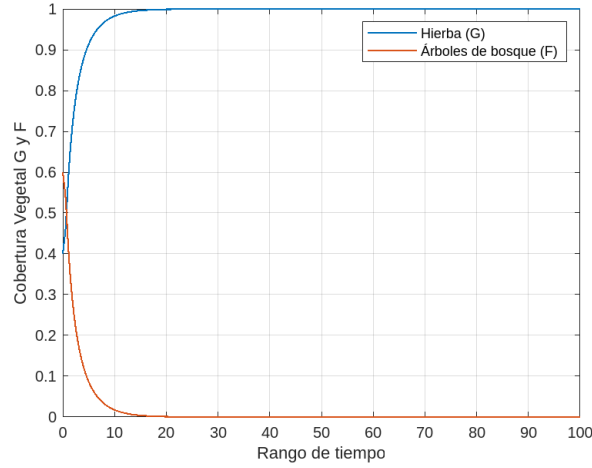
Ejemplo 3.2.4 *Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\alpha = 0.5$, $\phi_0 = 0.4$, $\phi_1 = 0.8$, $a = 0.45$, $\epsilon = 0.033$.*

Con estos valores se obtiene que

$$g(1) = \alpha = 0.5 < 0.8 = \phi_1,$$

En consecuencia, el sistema no admite soluciones de equilibrio no triviales, entonces la única solución de equilibrio será $E_1 = (0, 1)$. Por el lema 3.2.1, se puede aseverar que la solución de equilibrio E_1 es estable. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_1 , se toma el valor inicial $(G(0), F(0)) = (0.20, 0.80)$. Como se observa en la figura 3-5, el sistema evoluciona rápidamente a la solución de equilibrio trivial.

Fig. 3-5: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0.80, 0.20)$.



Ejemplo 3.2.5 Considere los parámetros demográficos del ejemplo 3.1.5

De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el lema 3.1.2, existen cuatro soluciones de equilibrio que se describen a continuación,

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0), & E_2 &= (0.4667, 0.5333), \\ E_3 &= (0.5201, 0.4799), & E_4 &= (0.8667, 0.1333). \end{aligned}$$

Por el lema 3.2.1 y el corolario 3.2.3, se tiene que E_2 y E_4 son asintóticamente estables, mientras que E_1 y E_3 son inestables. Si se toma el valor inicial $(G(0), F(0)) = (0.35, 0.65)$, el sistema evoluciona rápidamente al equilibrio E_1 , como se muestra en la figura 3-6.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio E_4 , se toma como valor inicial $(G(0), F(0)) = (0.55, 0.45)$. En este caso, como se observa en la figura 3-7, el sistema evoluciona rápidamente a este equilibrio.

De esta simulación se puede asegurar que coexisten para el sistema dos equilibrios simultáneamente estables. Para el caso donde se presenta ausencia del fuego, el

Fig. 3-6: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0.35, 0.65)$.

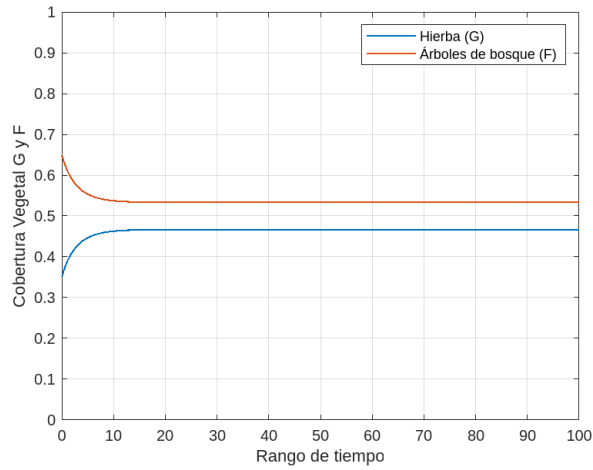
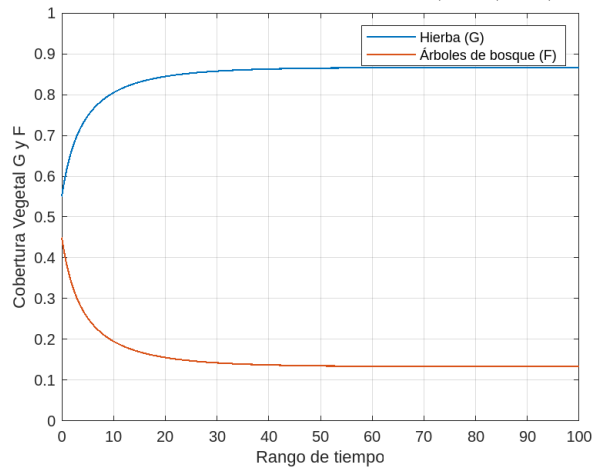


Fig. 3-7: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, F) = (0.55, 0.45)$.



sistema tiende a evolucionar a un estado donde predominan los árboles de bosque (en este caso se habla del equilibrio E_2). Por otra parte, cuando hay mayor incidencia de incendios, como es de esperar, la hierba se vuelve dominante (para este caso se habla del equilibrio E_4), debido a que el fuego ejerce un limitante para los árboles de bosque.

Coexistencia de Hierba (G) y árboles de Sabana (S y T)

Este capítulo está enfocado en encontrar las soluciones de equilibrio del sistema con la ausencia de los árboles de bosque (F), mirando los equilibrios y la dinámica que puede ocurrir entre la hierba y los árboles de sabana. En este caso el sistema que se estudiará será,

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \mu S + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dS}{dt} &= \beta GT - \omega(G)S - \mu S \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)S - \gamma T\end{aligned}\tag{4.0.1}$$

4.1 Soluciones de equilibrio

Dentro de los equilibrios del sistema, podemos encontrar que existe un equilibrio trivial cuando todo el espacio está ocupado por hierba, esto es, $G = 1$ y $S = T = 0$. Ahora, supongamos que los árboles de sabana y la hierba coexisten simultáneamente (esto es, $S > 0$, $T > 0$). Por la ausencia de bosque y teniendo en cuenta que $S = 1 - G - T$, obtenemos la siguiente reducción del sistema (4.0.1),

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT \\ \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Proposición 4.1.1 *Las soluciones de equilibrio no triviales $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ del sistema (4.1.1) satisfacen que,*

$$\hat{T} = \frac{(1 - \hat{G})\omega(\hat{G})}{\omega(\hat{G}) + \gamma}, \quad \hat{G} = \frac{(\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma}{\omega(\hat{G})\beta}, \quad \hat{S} = \frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\omega(\hat{G}) + \gamma}.$$

Demostración. Por la definición de solución de equilibrio, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}\mu(1 - T - G) + \gamma T - \beta GT &= 0, \\ \omega(G)(1 - T - G) - \gamma T &= 0.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

Despejando T de la primera ecuación de (4.1.2) obtenemos,

$$T = \frac{(1 - G)\mu}{\mu + \beta G - \gamma},$$

así mismo, despejando la misma variable de la segunda ecuación de (4.1.2) obtenemos,

$$T = \frac{\omega(G)(1 - G)}{\omega(G) + \gamma},$$

igualando los resultados hallados previamente,

$$\begin{aligned}T &= \frac{\omega(G)(1 - G)}{\omega(G) + \gamma} = \frac{(1 - G)\mu}{\mu + \beta G - \gamma}, \\ \Rightarrow \frac{\omega(G)}{\omega(G) + \gamma} &= \frac{\mu}{\mu + \beta G - \gamma},\end{aligned}$$

Despejando la variable G obtenemos,

$$G = \frac{(\omega(G) + \mu)\gamma}{\omega(G)\beta}$$

Por último, para determinar la expresión faltante para S basta con utilizar la condición $S = 1 - G - T$ y reemplazar la expresión hallada para la variable T .

Lema 4.1.2 *Las soluciones de equilibrio no triviales del sistema (4.1.1) son admisibles siempre que,*

$$\omega(\hat{G})(\beta - \gamma) > \gamma\mu.$$

Demostración. Para que $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ sea una solución de equilibrio no trivial, se debe garantizar que $\hat{S}, \hat{T} > 0$, lo cual se cumple siempre que $1 - \hat{G} > 0$, por tanto,

$$\begin{aligned}1 - \hat{G} &> 0, \\ 1 - \frac{(\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma}{\omega(\hat{G})\beta} &> 0, \\ \omega(\hat{G})\beta - (\omega(\hat{G}) + \mu)\gamma &> 0, \\ \omega(\hat{G})(\beta - \gamma) - \mu\gamma &> 0.\end{aligned}$$

Las soluciones de equilibrio no triviales deben satisfacer las ecuaciones propuestas en 4.1.1, sin embargo, basta con que se cumpla la ecuación para la variable G , pues las demás variables dependen de ésta. Despejando de la condición para G el parámetro ω obtenemos,

$$\omega(\hat{G}) = \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma}.$$

Definiendo una función f que depende de G tal que,

$$f(G) = \frac{\mu\gamma}{\beta G - \gamma}, \quad (4.1.3)$$

con dominio $(\gamma\beta^{-1}, 1]$. Se puede inferir que toda solución de equilibrio del sistema debe satisfacer que,

$$\omega(G) = f(G),$$

Por otra parte, las soluciones de equilibrio son raíces de la función definida como,

$$m(G) = f(G) - \omega(G).$$

Aparte de la condición descrita en el lema 4.1.2, las soluciones de equilibrio no triviales existen siempre y cuando $\gamma\beta^{-1} < 1$, lo cual es equivalente a $\beta > \gamma$. En otras palabras, las soluciones de equilibrio no trivial son admisibles siempre y cuando la tasa de natalidad de árboles de sabana jóvenes (S) supere la tasa de mortalidad de árboles de sabana jóvenes (S). En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evoluciona al estado donde solo existe hierba (G).

De acuerdo a las ecuaciones de la proposición 4.1.1 que debe satisfacer todo equilibrio no trivial, se pueden encontrar un máximo de cuatro soluciones de equilibrio (una de ellas es la trivial). Los dos siguientes resultados nos dan razón sobre las condiciones que deben satisfacer los parámetros para garantizar la existencia de las soluciones de equilibrio y su cuantía.

Lema 4.1.3 *Suponga que $f(1) > \omega_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,*

- (a). *Si $f(a) > \omega_0$ entonces no existen soluciones de equilibrio no triviales para el sistema (2.2.1).*
- (b). *Si $f(a) < \omega_0$ entonces existen dos soluciones de equilibrio no triviales $(\hat{G}_1, \hat{S}_1, \hat{T}_1)$ y $(\hat{G}_2, \hat{S}_2, \hat{T}_2)$ del sistema (2.2.1) con $\gamma\beta^{-1} < \hat{G}_1 < a$ y $a < \hat{G}_2 < a + \epsilon$.*

Demostración. La función f como se definió en la ecuación 4.1.3 es estrictamente decreciente, debido a que su derivada siempre es negativa. Además, dicha función es continua en su dominio de definición, lo cual induce que m también lo sea.

(a) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$\begin{aligned} m(G) &= f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_0 \geq f(a) - \omega_0 > 0, \\ m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0. \end{aligned}$$

Determinemos la derivada de la función m , la cual es,

$$m'(G) = -\frac{\gamma\mu\beta}{(\beta G - \gamma)^2} + \frac{\omega_0 - \omega_1}{\epsilon}.$$

Por tanto, tenemos que $m'(G) > 0$ en $a < G < a + \epsilon$, debido a que ϵ es suficientemente pequeño. Por lo anterior la función m no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon < G < 1$.

$$\begin{aligned} m(G) &= f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a + \epsilon) - \omega_1 > f(1) - \omega_1 > 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) = f(1) - \omega_1 > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión no existen soluciones de equilibrio no triviales con las condiciones dadas.

(b) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$m(a) = f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 < 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty.$$

Note que para $G \in (\gamma\beta^{-1}, a] \cup [a + \epsilon, 1]$ la derivada de m será,

$$m'(G) = -\frac{\gamma\mu\beta}{(\beta G - \gamma)^2},$$

debido a que la función $\omega(G)$ es constante. En consecuencia, $m'(G) < 0$.

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + \mathcal{O}(\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

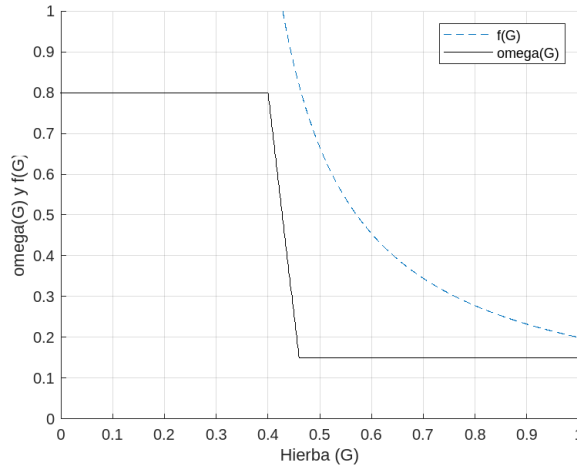
$$\begin{aligned} m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + \mathcal{O}(\epsilon) > 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) > 0, \quad m'(G) < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existen dos soluciones G_1 y G_2 tal que $\gamma\beta^{-1} < G_1 < a$ y $a < G_2 < a + \epsilon$ con las condiciones dadas.

Ejemplo 4.1.4 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.5$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 0.7$, $\omega_0 = 0.8$, $\omega_1 = 0.15$, $a = 0.4$, $\epsilon = 0.06$.

Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0.2 > 0.15 = \omega_1$ y además, $f(a) = 1.25 > 0.8 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, no existen soluciones de equilibrio tal como lo muestra la figura 4-1.

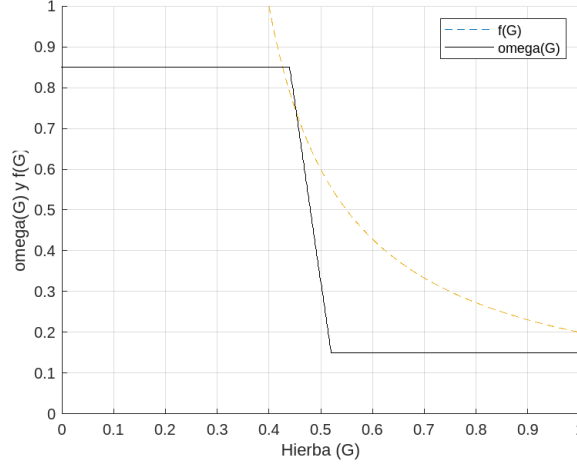
Fig. 4-1: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del lema 4.1.3.



Ejemplo 4.1.5 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 0.8$, $\omega_0 = 0.85$, $\omega_1 = 0.15$, $a = 0.44$, $\epsilon = 0.06$.

Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0.2 > 0.15 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0.79 < 0.85 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existen dos soluciones de equilibrio no triviales, tal como lo muestra la figura 4-2.

Fig. 4-2: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del lema 4.1.3.



Lema 4.1.6 Suponga que $f(1) < \omega_1$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

- (a). Si $f(a) > \omega_0$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ para el sistema (2.2.1) tal que $a + \epsilon < \hat{G} < 1$.
- (b). Si $f(a) < \omega_1$ entonces existe una solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ para el sistema (2.2.1) tal que $\gamma\beta^{-1} < \hat{G} < a$.
- (c). Si $\omega_1 < f(a) < \omega_0$ entonces existen soluciones de equilibrio no trivial $(\hat{G}_1, \hat{S}_1, \hat{T}_1)$, $(\hat{G}_2, \hat{S}_2, \hat{T}_2)$ y $(\hat{G}_3, \hat{S}_3, \hat{T}_3)$ para el sistema (2.2.1) tal que $\gamma\beta^{-1} < \hat{G}_1 < a$, $a < \hat{G}_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < \hat{G}_3 < 1$.

Demostración.

(a) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$m(G) = f(G) - \omega(G) = f(G) - \omega_0 \geq f(a) - \omega_0 > 0,$$

$$m(a) = f(a) - \omega(a) = f(a) - \omega_0 > 0, \quad m(\gamma\beta^{-1}) = \infty.$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a < G < a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &> 0, \quad m'(G) < 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega_1 = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > \omega_0 - \omega_1 + \mathcal{O}(\epsilon) > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon < G < 1$.

$$\begin{aligned} m(1) &= f(1) - \omega_1 < 0, \\ m(a + \epsilon) &> 0, \quad m'(G) < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

(b) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega_0 = \omega_1 - \omega_0 < 0, \\ m(\gamma\beta^{-1}) &= \infty, \quad m'(G) < 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega_0 < \omega_1 - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega(a + \epsilon) = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 < 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m no posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m(a + \epsilon) &< 0, \quad m'(G) < 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m no posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia no existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existe una solución G tal que $\gamma\beta^{-1} < G < a$ con las condiciones dadas.

(c) Considere el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega_0 < 0, \\ m(\gamma\beta^{-1}) &= \infty, \quad m'(G) < 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $\gamma\beta^{-1} < G \leq a$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Ahora, considere el intervalo $a \leq G \leq a + \epsilon$.

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) - \omega_0 < \omega_1 - \omega_0 < 0, \quad m'(G) > 0, \\ m(a + \epsilon) &= f(a + \epsilon) - \omega_1 = f(a) + \mathcal{O}(\epsilon) - \omega_1 > 0. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que la función m posee raíces en el intervalo $a < G < a + \epsilon$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo.

Por último considere el intervalo $a + \epsilon \leq G \leq 1$.

$$\begin{aligned} m(a + \epsilon) &> 0, \quad m'(G) < 0, \\ m(1) &= f(1) - \omega(1) < 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior la función m posee raíces para $a + \epsilon < G < 1$. En consecuencia existe solución de equilibrio en dicho intervalo. En conclusión, existen tres soluciones de equilibrio G_1, G_2 y G_3 tal que $\gamma\beta^{-1} < G_1 < a$, $a < G_2 < a + \epsilon$ y $a + \epsilon < G_3 < 1$ con las condiciones dadas.

Ejemplo 4.1.7 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.3$, $\gamma = 0.3$, $\beta = 0.7$, $\omega_0 = 0.6$, $\omega_1 = 0.4$, $a = 0.5$, $\epsilon = 0.05$.

Con estos valores se obtiene que $f(1) = 0.225 < 0.4 = \omega_1$ y además, $f(a) = 1.8 > 0.6 = \omega_0$. En consecuencia se cumple el primer caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 4-3.

Ejemplo 4.1.8 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.4$, $\gamma = 0.2$, $\beta = 0.6$, $\omega_0 = 0.75$, $\omega_1 = 0.6$, $a = 0.6$, $\epsilon = 0.01$.

Se obtiene que $f(1) = 0.2 < 0.6 = \omega_1$ y además, $f(a) = 0.5 < 0.6 = \omega_1$. En consecuencia se cumple el segundo caso del lema anterior, por tanto, existe una solución de equilibrio tal como lo muestra la figura 4-4.

Fig. 4-3: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (a) del lema 4.1.6.

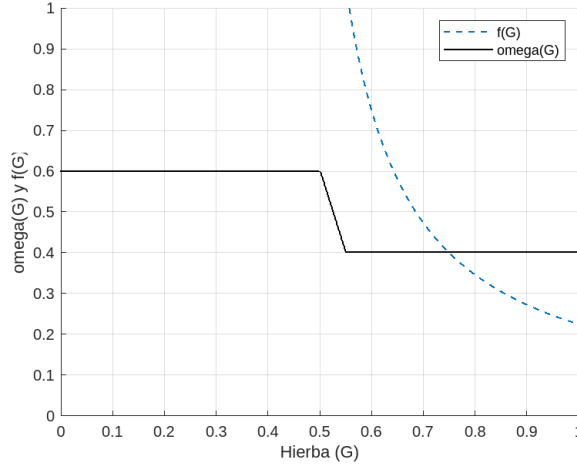
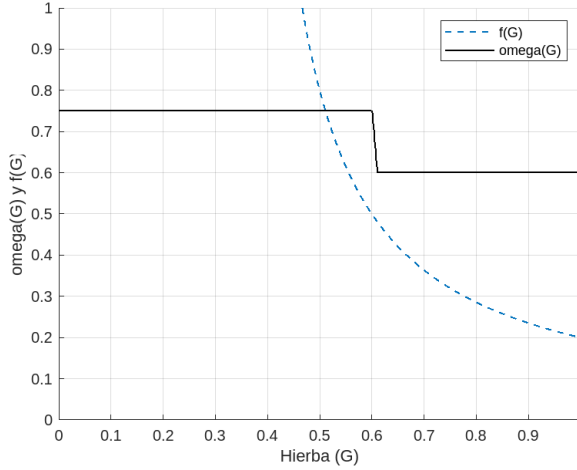


Fig. 4-4: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (b) del lema 4.1.6.



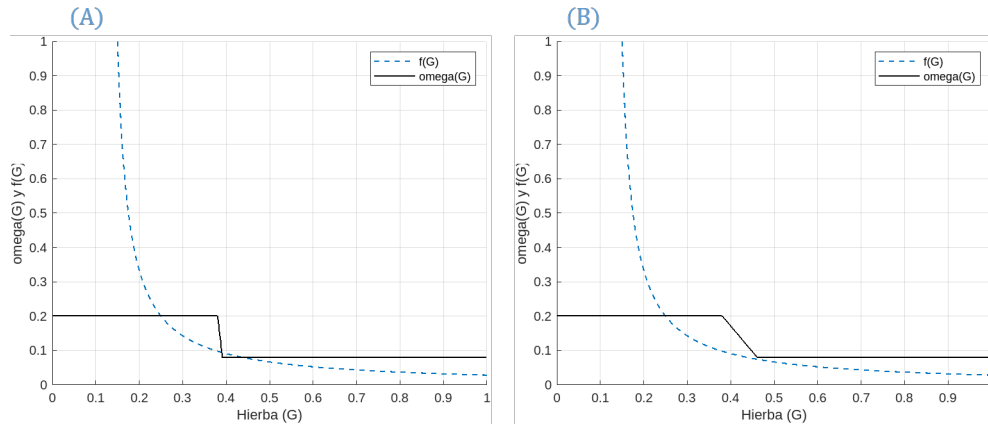
Ejemplo 4.1.9 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.2$, $\gamma = 0.1$, $\beta = 0.8$, $\omega_0 = 0.2$, $\omega_1 = 0.08$, $a = 0.4$, $\epsilon_1 = 0.01$ y $\epsilon_2 = 0.08$.

Con los parámetros mencionados previamente se cumple el caso (c) del lema anterior. Se tienen tres soluciones de equilibrio, sin embargo, dicha existencia depende del parámetro ϵ . En la gráfica 4-5 se observa que para $\epsilon = 0.01$ se logran obtener las tres soluciones (caso A). Mientras que cuando se toma $\epsilon = 0.08$ solo se obtiene una solución (Caso B).

4.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se buscará encontrar alguna condición que permita que las soluciones halladas en el apartado anterior sean asintóticamente estables. En primera instancia,

Fig. 4-5: Existencia de soluciones de equilibrio para el caso (c) del lema 4.1.6.



miremos un resultado relacionado con la estabilidad de la solución de equilibrio trivial.

Teorema 4.2.1 Si $\omega_1 (\beta - \gamma) < \gamma\mu$ entonces el equilibrio $(1, 0, 0)$ del sistema (4.1.1) es asintóticamente estable.

Demostración. La matriz de la linealización en la solución de equilibrio trivial será,

$$J(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & \omega_1 \\ \gamma - \mu - \beta & -(\omega_1 + \gamma) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Note que la traza de la matriz anterior es negativa. En consecuencia, se debe garantizar que $\det J(1, 0, 0) > 0$ para concluir que la solución es asintóticamente estable (Teorema 1.2.9).

$$\begin{aligned} \det J(1, 0, 0) &= \mu (\omega_1 + \gamma) + \omega_1 (\gamma - \mu - \beta) > 0, \\ \mu\gamma + \omega_1\gamma - \omega_1\beta &> 0, \\ \mu\gamma - \omega_1 (\beta - \gamma) &> 0. \end{aligned}$$

En conclusión, el equilibrio trivial es estable siempre que $\omega_1 (\beta - \gamma) < \gamma\mu$.

A continuación, se presenta un resultado que puede ayudar a determinar la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales por medio de la función f , descrita en (4.1.3).

Proposición 4.2.2 Cualquier equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ es asintóticamente estable siempre que,

$$\omega'(\hat{G}) > \frac{-\beta\mu\gamma}{(\beta\hat{G} - \gamma)^2},$$

En donde el lado izquierdo de la expresión es la derivada del parámetro ω mientras que el lado derecho es la derivada de la función f , descrita en la ecuación (4.1.3).

Demostración. Determinemos la matriz de la comunidad del modelo 4.1.1,

$$J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta\hat{T}) & \omega'(\hat{G})\hat{S} - \omega(\hat{G}) \\ \gamma - \mu - \beta\hat{G} & -(\omega(\hat{G}) + \gamma) \end{bmatrix}$$

Note que la traza de la matriz es negativa, por tanto, por las condiciones del teorema 1.2.9 los equilibrios antes mencionados serán asintóticamente estables siempre que $\det J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) > 0$. Denotemos como A al producto de la diagonal principal, mientras que B será el producto de la diagonal secundaria de la matriz $J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S})$. Ahora se reducirá las expresiones para A y B teniendo en cuenta la proposición 4.1.1 y el parámetro ω evaluado en $\hat{G}$. Se hará un abuso de la notación para reducir escritura, tomando $\omega = \omega(\hat{G})$ y $\omega' = \omega'(\hat{G})$. Empecemos por reducir A ,

$$\begin{aligned} A &= (\mu + \beta\hat{T})(\omega + \gamma) = \left(\mu + \beta \left(\frac{(1 - \hat{G})\omega}{\omega + \gamma} \right) \right) (\omega + \gamma), \\ &= \mu(\omega + \gamma) + \beta\omega(1 - \hat{G}), \\ &= \mu \left(\frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} + \gamma \right) + \beta \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} (1 - \hat{G}), \\ &= \mu \left(\frac{\mu\gamma + \beta\gamma\hat{G} - \gamma^2}{\beta\hat{G} - \gamma} \right) + \frac{\mu\gamma\beta}{\beta\hat{G} - \gamma} (1 - \hat{G}), \\ &= \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} (\mu + \beta\hat{G} - \gamma + \beta(1 - \hat{G})), \end{aligned}$$

Haciendo lo propio con B ,

$$\begin{aligned} B &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G})(\omega'\hat{S} - \omega) = (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\omega + \gamma} \right) - \omega \right), \\ &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} + \gamma} \right) - \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \\ &= (\gamma - \mu - \beta\hat{G}) \left(\omega' \left(\frac{(1 - \hat{G})\gamma}{\frac{\mu\gamma + \gamma\beta\hat{G} - \gamma^2}{\beta\hat{G} - \gamma}} \right) - \frac{\mu\gamma}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \\ &= -(1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma) \omega' - \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma}, \\ &= - \left((1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma) \omega' + \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} \right), \end{aligned}$$

Por la condición que debe satisfacer el determinante tenemos que,

$$\begin{aligned} \det J(\hat{G}, \hat{T}, \hat{S}) &= \frac{\mu\gamma(\mu - \gamma + \beta)}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' + \frac{\mu\gamma(\gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} > 0 \\ &\quad \frac{\mu\gamma(\mu - \gamma + \beta + \gamma - \mu - \beta\hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' > 0 \\ &\quad \frac{\mu\gamma\beta(1 - \hat{G})}{\beta\hat{G} - \gamma} + (1 - \hat{G})(\beta\hat{G} - \gamma)\omega' > 0 \end{aligned}$$

Por último, despejando ω' de la desigualdad anterior se obtiene la expresión deseada.

Como se presentó en la sección pasada, pueden existir hasta cuatro soluciones de equilibrio, sin embargo, no se conoce nada acerca de su estabilidad. A continuación se presenta un resultado que da razón de la estabilidad de las soluciones de equilibrio no triviales.

Corolario 4.2.3 (a). Toda solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ tal que $\gamma\beta^{-1} < \hat{G} < a$ o $a + \epsilon < \hat{G} < 1$ es asintóticamente estable.

(b). Toda solución de equilibrio no trivial $(\hat{G}, \hat{S}, \hat{T})$ tal que $a < \hat{G} < a + \epsilon$ es inestable.

Demostración. El resultado es una consecuencia directa de la proposición 4.2.2.

Ejemplo 4.2.4 Considere los parámetros demográficos del ejemplo 4.1.9 (Caso A).

De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el lema 4.1.6, existen cuatro soluciones de equilibrio que se describen a continuación,

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= (0.250, 0.250, 0.500), \\ E_3 &= (0.389, 0.314, 0.297), & E_4 &= (0.438, 0.312, 0.250). \end{aligned}$$

Con estos valores se obtiene que

$$f(1) = 0.03 < 0.08 = \omega_1$$

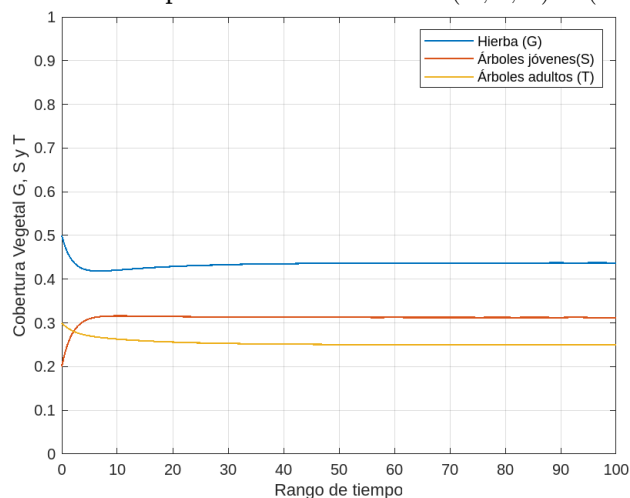
y además,

$$f(a) = 0.09 < 0.20 = \omega_0, \quad f(a) = 0.09 > 0.08 = \omega_1.$$

Por el corolario 4.2.3, se puede aseverar que las soluciones de equilibrio E_1 y E_3 son inestables, mientras que las otras serán asintóticamente estables. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_2 , se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) =$

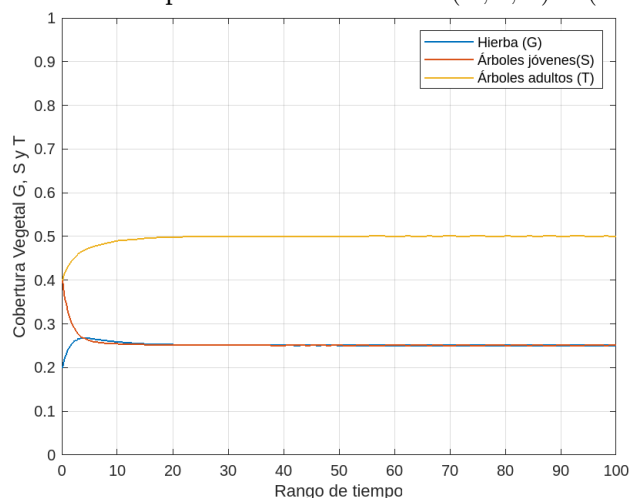
$(0.50, 0.20, 0.30)$. Como se observa en la figura 4-6, el sistema evoluciona rápidamente a la solución E_2 .

Fig. 4-6: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0.50, 0.20, 0.30)$.



Por otra parte, si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0.40, 0.40, 0.20)$, el sistema evoluciona rápidamente al otro equilibrio estable, es decir E_4 , tal como se observa en la figura 4-7.

Fig. 4-7: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0.40, 0.40, 0.20)$.



En términos ecológicos, la simulación hecha anteriormente permite evidenciar que coexisten dos equilibrios simultáneamente estables. Uno de ellos está asociado a la ausencia de fuego, en este caso se habla del equilibrio E_2 . Bajo estas condiciones, predominan los árboles de sabana adultos. Por otra parte, cuando hay incidencia de incendios el sistema tiende a un estado en el que predomina la hierba (asociado al equilibrio E_4), en cuyo caso, esta es la dinámica usual de los biomas de sabana.

Ejemplo 4.2.5 Considere los parámetros demográficos del ejemplo 4.1.5

De acuerdo a lo expuesto en la sección pasada, en especial el lema 4.1.3, existen tres soluciones de equilibrio que se describen a continuación,

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= (0.427, 0.109, 0.464), \\ E_3 &= (0.448, 0.115, 0.437). \end{aligned}$$

Con estos valores de los parámetros se obtiene que

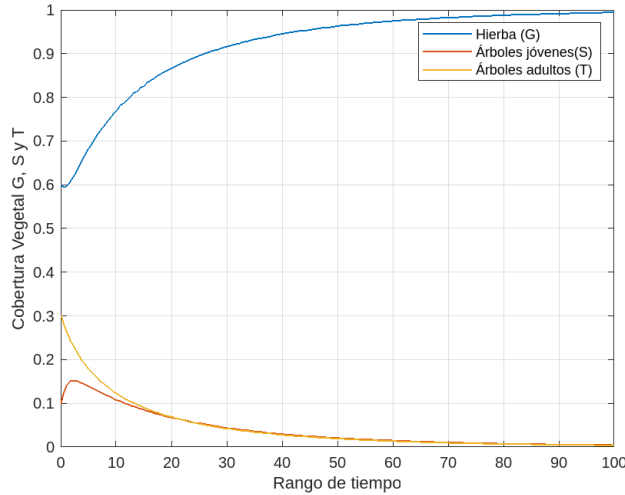
$$f(1) = 0.2 > 0.15 = \omega_1$$

y además,

$$f(a) = 0.79 < 0.85 = \omega_0.$$

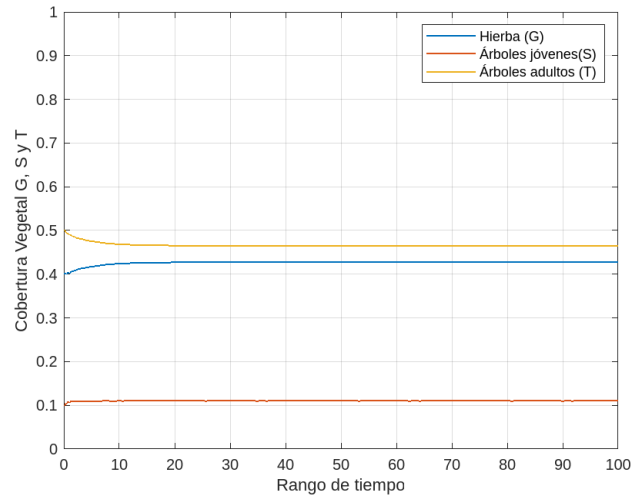
Por el corolario 4.2.3, se tiene que E_1 y E_2 son asintóticamente estables, mientras que E_3 es inestable. Si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0.60, 0.30, 0.10)$, el sistema evoluciona rápidamente al equilibrio E_1 , como se muestra en la figura 4-8.

Fig. 4-8: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0.60, 0.30, 0.10)$.



Ahora, estudiaremos la estabilidad del equilibrio E_2 . Para ello, tomaremos el valor inicial $(G(0), S(0), T(0)) = (0.40, 0.10, 0.50)$. En este caso, como se observa en la figura 4-9, el sistema evoluciona rápidamente a este equilibrio.

Fig. 4-9: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T) = (0.40, 0.10, 0.50)$.



Nuevamente, se obtienen dos equilibrios estables. Cuando hay incidencia de incendios, los árboles de sabana tienden a desaparecer, evolucionando a un estado donde la hierba es la única variable que se encuentra. Sin embargo, cuando hay ausencia de fuego, los árboles adultos de sabana predominan.

Coexistencia de Hierba (G) y árboles (S,T,F)

Este capítulo tiene como propósito presentar las múltiples soluciones de equilibrio del modelo propuesto por *Staver* en [SL12], teniendo en cuenta las modificaciones propuestas por *Brhane* en [BG20]. Así mismo, realizar un análisis del tipo de estabilidad que posee cada equilibrio.

5.1 Soluciones de equilibrio

En esta sección se encontraran las soluciones de equilibrio del sistema con presencia de todas las variables de estado, es decir, hierba (G), árboles de sabana jóvenes (S), árboles de sabana adultos (T) y árboles de bosque (F); mirando los equilibrios y la dinámica poblacional que puede ocurrir entre ellos. En este caso el sistema que se estudiará será el descrito en (2.1.2).

El equilibrio trivial del sistema se presenta cuando todo el espacio es ocupado por hierba, esto es, $G = 1$ y $S = T = F = 0$. Por otra parte, si $S > 0$, $T > 0$, $F > 0$, usando la definición 1.2.3 las soluciones de equilibrio del sistema deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}\mu S + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF &= 0 \\ \beta GT - \omega(G)S - \mu S - \alpha SF &= 0 \\ \omega(G)S - \gamma T - \alpha TF &= 0 \\ [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F &= 0\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Teniendo en cuenta que $F > 0$, de la última ecuación de (5.1.1) se obtiene la condición $\alpha(1 - F) - \phi(G) = 0$, con lo cual se obtiene que,

$$F = \frac{\alpha - \phi(G)}{\alpha}$$

Note que la expresión anterior tiene validez siempre que $\alpha > \phi(G)$. Ahora, determinemos una razón entre las variables S y T teniendo en cuenta la segunda ecuación de (5.1.1),

$$\begin{aligned}\beta GT - (\omega(G) + \mu + \alpha F) S &= 0, \\ \Rightarrow \frac{S}{T} &= \frac{\beta G}{\omega(G) + \mu + \alpha F}.\end{aligned}$$

Haciendo lo propio con la tercer ecuación de (5.1.1),

$$\begin{aligned}\omega(G)S - (\gamma + \mu + \alpha F) T &= 0, \\ \Rightarrow \frac{S}{T} &= \frac{\gamma + \alpha G}{\omega(G)}.\end{aligned}$$

Proposición 5.1.1 *Toda solución de equilibrio no trivial $(\bar{G}, \bar{S}, \bar{T}, \bar{F})$ del sistema (2.1.2) debe satisfacer que,*

$$\begin{aligned}\frac{\bar{S}}{\bar{T}} &= \frac{\gamma + \alpha \bar{F}}{\omega(\bar{G})} = \frac{\beta \bar{G}}{\omega(\bar{G}) + \mu + \alpha \bar{F}}, \\ \bar{F} &= \frac{\alpha - \phi(\bar{G})}{\alpha}.\end{aligned}$$

Donde $\bar{S}, \bar{T}, \bar{F} \neq 0$.

Lo anterior se puede combinar para encontrar una condición en términos de G ,

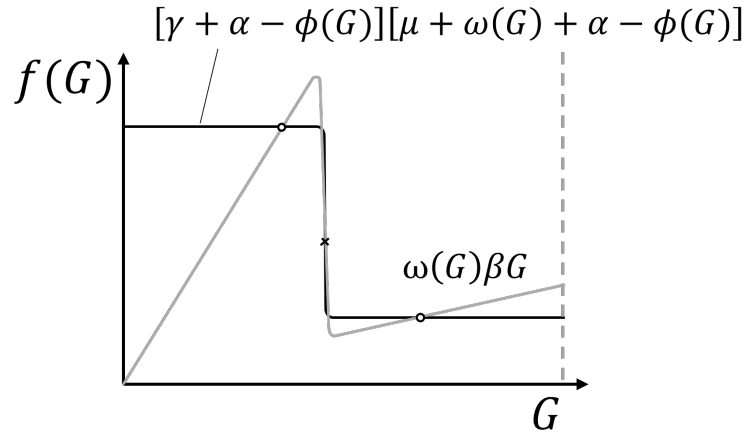
$$\begin{aligned}\frac{\gamma + \alpha \bar{F}}{\omega(\bar{G})} &= \frac{\beta \bar{G}}{\omega(\bar{G}) + \mu + \alpha \bar{F}} \\ \Rightarrow \beta \bar{G} \omega(\bar{G}) &= (\gamma + \alpha \bar{F}) (\mu + \omega(\bar{G}) + \alpha \bar{F}) \\ \Rightarrow \beta \bar{G} \omega(\bar{G}) &= (\gamma + \alpha - \phi(\bar{G})) (\mu + \omega(\bar{G}) + \alpha - \phi(\bar{G}))\end{aligned}$$

De acuerdo a la condición presentada anteriormente, se pueden encontrar un máximo de cuatro soluciones de equilibrio (una de ellas es la trivial), tal como se observa en la figura 5-1.

5.2 Análisis de estabilidad

En esta sección se busca determinar las condiciones requeridas para que las soluciones de equilibrio del sistema (2.1.2) sean asintóticamente estables. En primer lugar, se hará una reducción del sistema por medio de la condición espacial, es decir, teniendo en cuenta que $S(t) = 1 - G(t) - T(t) - F(t)$, en cuyo caso se obtiene el sistema,

Fig. 5-1: Análisis gráfico de los equilibrios internos. Adaptada de [SL12].



$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= \mu(1 - G - T - F) + \gamma T + \phi(G)F - \beta GT - \alpha GF \\
 \frac{dT}{dt} &= \omega(G)(1 - G - T - F) - \gamma T - \alpha TF \\
 \frac{dF}{dt} &= [\alpha(1 - F) - \phi(G)]F
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Teniendo en cuenta la forma de las soluciones de equilibrio, la matriz de la comunidad del modelo 5.2.1 será,

$$J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} -\mu + \phi'(\bar{G})\bar{F} - \beta\bar{T} - \alpha\bar{F} & \gamma - \mu - \beta\bar{G} & -\mu + \phi(\bar{G}) - \alpha\bar{G} \\ \omega'(\bar{G})\bar{S} - \omega(\bar{G}) & -(\omega(\bar{G}) + \gamma + \alpha\bar{F}) & -(\omega(\bar{G}) + \alpha\bar{T}) \\ -\phi'\bar{F} & 0 & -\alpha\bar{F} \end{bmatrix},$$

Teorema 5.2.1 Sea $(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ una solución de equilibrio no trivial del sistema (5.2.1).

- (a). Si $\omega(\bar{G}) \approx 0$ y $\phi(\bar{G}) \approx 0$, entonces la solución de equilibrio es asintóticamente estable.
- (b). Si $\omega(\bar{G}) \ll 0$ y $\phi(\bar{G}) \gg 0$, entonces la solución de equilibrio es inestable.

Demostración.

(a) Para este caso la matriz de la linealización será,

$$J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta\bar{T} - \alpha\bar{F} & \gamma - \mu - \beta\bar{G} & -\mu + \phi - \alpha\bar{G} \\ -\omega & -(\omega + \gamma + \alpha\bar{F}) & -(\omega + \alpha\bar{T}) \\ 0 & 0 & -\alpha\bar{F} \end{bmatrix},$$

Es evidente que la traza de la matriz jacobiana es negativa. resta corroborar las otras dos condiciones.

- (Condición $\det J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) < 0$).

El determinante se puede obtener a través de $\det J = -\alpha \bar{F} \cdot \det M_{33}$, donde M_{33} es la menor de la matriz $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ que se obtiene al eliminar la tercer fila y columna.

$$\begin{aligned} \det M_{33} &= (\mu + \beta \bar{T} + \alpha \bar{F}) (\omega + \gamma + \alpha \bar{F}) - \omega (\mu + \beta \bar{G} - \gamma), \\ &= (\mu + \beta \bar{T} + \alpha \bar{F}) (\gamma + \alpha \bar{F}) + \omega (\beta \bar{T} + \alpha \bar{F} + \gamma) - \omega \beta \bar{G}, \\ &= (\mu + \omega + \alpha \bar{F}) (\gamma + \alpha \bar{F}) + \beta \bar{T} (\omega + \gamma + \alpha \bar{F}) - \omega \beta \bar{G}, \\ &= \beta \bar{T} (\omega + \gamma + \alpha \bar{F}). \end{aligned}$$

En consecuencia el determinante de $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ es negativo debido a que $\det M_{33} > 0$.

- (Condición $\det J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) > \text{tr} J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F}) \cdot a_2$)

Por último, resta corroborar la tercera condición, realizando algunos calculos y utilizando lo hallado previamente con respecto al determinante se obtiene que,

$$\begin{aligned} \det J - \text{tr} J \cdot a_2 &= \alpha \bar{F} \beta \bar{T} \left(\omega + \gamma + \alpha \bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\alpha \bar{F}} \right) + \\ &\alpha \bar{F} \left(\omega + \gamma + \alpha \bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\beta \bar{T}} + \frac{\det M_{33}}{\alpha \bar{F}} \right) \left(\mu + 2\alpha \bar{F} + \frac{\det M_{33}}{\beta \bar{T}} \right) > 0, \end{aligned}$$

En conclusión, una solución de equilibrio del sistema (2.1.2), tal que $\omega'(G) \approx 0$ y $\phi'(G) \approx 0$, será asintóticamente estable.

(b) La traza de $J(\bar{G}, \bar{T}, \bar{F})$ bajo estas condiciones es positiva, debido a que ϕ' es suficientemente grande. Por tanto, una solución de equilibrio del sistema (2.1.2) es inestable.

Corolario 5.2.2 (a). Toda solución de equilibrio no trivial G tal que $0 < G < a$ ó $a + \epsilon < G < 1$ es asintóticamente estable.

(b). Toda solución de equilibrio no trivial G tal que $a < G < a + \epsilon$ es inestable.

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema 5.2.1.

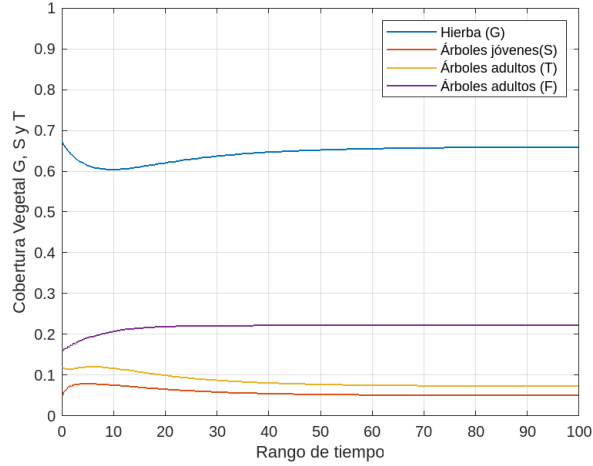
Ejemplo 5.2.3 Considere los siguientes valores para los parámetros demográficos, $\mu = 0.03$, $\gamma = 0.26$, $\beta = 0.86$, $\omega_0 = 0.63$, $\omega_1 = 0.13$, $a = 0.687$, $\epsilon_1 = 0.0093$, $\phi_0 = 0.6$ y $\phi_1 = 0.68$.

Para las condiciones dadas, se encuentran las siguientes soluciones de equilibrio,

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, 0, 0), & E_2 &= (0.6587, 0.0489, 0.0716, 0.2208), \\ E_3 &= (0.6950, 0.1115, 0.0619, 0.1316), & E_4 &= (0.7826, 0.0733, 0.0272, 0.116). \end{aligned}$$

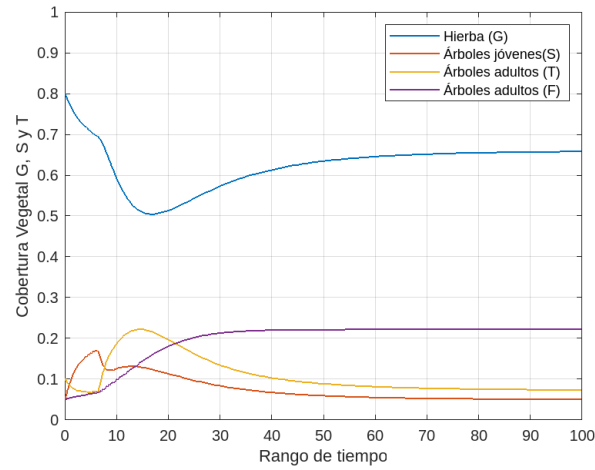
En este caso, por el corolario 5.2.2 se puede garantizar que E_2 y E_4 son asintóticamente estables, mientras que E_3 será inestable. Para analizar la estabilidad del equilibrio E_2 , se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0), F(0)) = (0.67, 0.05, 0.12, 0.16)$. Como se observa en la figura 5-2, el sistema evoluciona rápidamente a la solución E_2 .

Fig. 5-2: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T, F) = (0.67, 0.05, 0.12, 0.16)$.



Por otra parte, si se toma el valor inicial $(G(0), S(0), T(0), F(0)) = (0.80, 0.05, 0.10, 0.05)$, el sistema evoluciona rápidamente al otro equilibrio estable, es decir E_4 , tal como se observa en la figura 5-3.

Fig. 5-3: Dinámica del sistema para la condición inicial $(G, S, T, F) = (0.80, 0.05, 0.10, 0.05)$.



En este tipo de trabajos es importante además de caracterizar las soluciones de equilibrio, reconocer las soluciones periódicas que pueden ocurrir bajo ciertas condiciones. Sin embargo, dicho análisis se sale de los objetivos del presente trabajo, aunque hay que aclarar que si existen soluciones periódicas para este modelo. Si se desea conocer más al respecto, el lector puede revisar [SL12].

Conclusiones

Al tener en cuenta las condiciones climáticas y los incendios en el modelo y sus simplificaciones, se pudo determinar que existe un máximo de cuatro soluciones de equilibrio en cada caso. La solución trivial, es decir, el estado donde el área de estudio es cubierta por sólo hierba, existe sin importar la escogencia de los parámetros demográficos. Si se obtienen G_1 , G_2 y G_3 soluciones de equilibrio tal que $0 < G_1 < G_2 < G_3 < 1$, entonces G_1 y G_3 serán estables mientras que G_2 no lo será. Igualmente, G_3 es un equilibrio asociado a las condiciones de mayor influencia de incendios. Además, se resalta el hecho que internamente puede ocurrir una biestabilidad en la distribución de los biomas.

Para el caso del modelo simplificado donde solo están presentes la hierba y bosque, las soluciones de equilibrio no triviales serán admisibles siempre que la tasa de nacimientos de árboles de bosque sea superior a la tasa de mortalidad de árboles de bosque. En efecto, si ocurriese lo contrario, el sistema evoluciona a un estado donde solo existe hierba. Por otra parte, cuando se tiene en cuenta la hierba y los árboles de sabana, se encuentra que las soluciones de equilibrio no triviales son admisibles siempre que la tasa de natalidad de árboles jóvenes supere su tasa de mortalidad.

Debido a que el sistema ecológico está influenciado permanentemente por las perturbaciones, es importante además de lo desarrollado en este trabajo de grado, realizar un análisis de las soluciones periódicas presentes cuando están presentes todas las variables de estado.

Bibliografía

- [BC12] F. Brauer y C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2012 (vid. págs. 5, 8).
- [BG20] K.W. Brhane y M G. Gebru. „Mathematical model for the dynamics of Savanna ecosystem considering fire disturbances“. En: *Journal of Theoretical Biology* (2020) (vid. págs. 1, 2, 18, 19, 21, 23, 49).
- [CAG14] G. Calderón, J. Arango y A. Gómez. *Ecuaciones diferenciales: para estudiantes de Ciencias e ingenierías*. Universidad del Valle, Programa editorial, 2014 (vid. págs. 7, 8).
- [Chi06] Carmen Chicon. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 2006 (vid. págs. 7, 9, 10).
- [Cop65] William Andrew Coppel. „Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations“. En: Heath, 1965 (vid. págs. 12).
- [Hof+12] W.A. Hoffmann, E.L. Gotsch, S.G. Rossatto et al. „Ecological thresholds at the savanna-forest boundary: How plant traits, resources and fire govern the distribution of tropical biomes“. En: *Ecology Letters* 15(7) (2012), págs. 759-768 (vid. págs. 2).
- [Lec13] A. Lecona. *Ecología y Medioambiente*. Mcgraw-Hill, 2013 (vid. págs. 5).
- [Lev+09] S.A. Levin, S.R. Carpenter, H.C.J. Godfray et al. *The Princeton Guide to Ecology*. Princeton University Press, 2009 (vid. págs. 7).
- [MB12] Brett Murphy y David Bowman. „What controls the distribution of tropical forest and savanna? Ecol Lett“. En: *Ecology letters* 15 (mar. de 2012), págs. 748-58 (vid. págs. 1, 2).
- [Mor18] A.S. Mori. „Modern Threats to the Stability of Biological Communities“. En: *Encyclopedia of the Anthropocene*. Ed. por Dominick A. Dellasala y Michael I. Goldstein. Oxford: Elsevier, 2018, págs. 77-83 (vid. págs. 6).
- [PP96] L. Perko y L.M. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1996 (vid. págs. 9).
- [RBM76] Robert W. Rutledge, Bennett L. Basore y Robert J. Mulholland. „Ecological stability: An information theory viewpoint“. En: *Journal of Theoretical Biology* 57.2 (1976), págs. 355-371 (vid. págs. 6).

- [SAL11] A Staver, Sally Archibald y Simon Levin. „The Global Extent And Determinants Of Savanna And Forest As Alternative Biome States“. En: *Science (New York, N.Y.)* 334 (oct. de 2011), págs. 230-2 (vid. págs. 2, 17, 18).
- [SL12] A Staver y Simon Levin. „Integrating Theoretical Climate and Fire Effects on Savanna and Forest Systems“. En: *The American naturalist* 180 (ago. de 2012), págs. 211-24 (vid. págs. 1, 2, 15-18, 23, 49, 51, 54).

Declaración

Yo David Alejandro Muñoz Cruz me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo.

Cali, Febrero 2023

David Alejandro Muñoz Cruz

