

EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS ANTE LA FALTA DE HOMOGENEIDAD EN EL MATERIAL EXPERIMENTAL

Oscar Brand V.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle

El diseño de experimentos se beneficia de las ideas de estratificación introducidas muy tempranamente en el tratamiento del muestreo de poblaciones finitas. En efecto, la clasificación adecuada de la población a muestras mediante una partición que tienda a agrupar unidades homogéneas en un mismo subconjunto logrando al mismo tiempo, que estos subconjuntos sean dispares, lleva a obtener expresiones tan compensadoras como la correspondiente a la varianza de la media muestral obtenida con penetración proporcional al tamaño de los subconjuntos, o sea:

$$V(\bar{y} \text{ prop.}) = \frac{S_w^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

donde S_w es la variabilidad dentro de los subconjuntos considerada constante. Esta consideración no entra en conflicto con la manera de trabajar en la mayoría de los modelos tratados en hipótesis lineales y permite dar al resultado anterior toda la evidencia de su utilidad.

En diseño de experimentos lo que se trata es de formar subconjuntos homogéneos de material experimental, antes de aplicar a él los tratamientos. Clásicamente la idea de bloques completos o la de clasificación en dos o más direcciones ortogonales (cuadrados latinos y sus generalizaciones) han denotado intentos válidos en esta dirección.

El mayor inconveniente es cuando el número de tratamientos a aplicar supera al número de unidades experimentales que contienen esos grupos homogéneos. Cuando entre tratamientos no existe ninguna relación, el problema deriva hacia la aplicación de los bloques incompletos, balanceados o parcialmente balanceados. En el caso de los experimentos factoriales, en que entre los tratamientos existe una estructura, aparece la posibilidad del "confundido" como una técnica para desarrollar investigación eficiente con conjuntos pequeños de unidades experimentales homogéneas.

En este trabajo, se intenta resumir ideas fundamentales sobre confundido, presentar en la forma más detallada posible algunos ejemplos y luego ver algunas posibilidades que estas técnicas han demostrado tener en su aplicación a restricciones en el proceso mismo de la aleatorización (parcelas divididas).

Experimentos factoriales. Confundido

En un experimento factorial 2^2 se necesitarían bloques de tamaño 4. Supongamos que sólo conjuntos de 2 unidades homogéneas se disponen. Para la materialización de dicho experimento se propone un diseño basado en 6 repeticiones en las que, dos a dos, los tratamientos que aparecen con igual signo en la definición de cada uno de los efectos principales e interacciones, se colocan en los mismos bloques (de tamaño 2).

La estructura propuesta, dando por supuesta la aleatorización intra-bloque será:

REPETICION I		REPETICION II		REPETICION III	
$Y_{111} : (1)$	$Y_{122} : a$	$Y_{211} : (1)$	$Y_{222} : a$	$Y_{311} : (1)$	$Y_{323} : b$
$Y_{114} : ab$	$Y_{123} : b$	$Y_{213} : b$	$Y_{224} : ab$	$Y_{312} : a$	$Y_{324} : ab$
REPETICION IV		REPETICION V		REPETICION VI	
$Y_{411} : (1)$	$Y_{422} : a$	$Y_{511} : (1)$	$Y_{522} : a$	$Y_{611} : (1)$	$Y_{623} : b$
$Y_{414} : ab$	$Y_{423} : b$	$Y_{513} : b$	$Y_{524} : ab$	$Y_{612} : a$	$Y_{624} : ab$

Se define como

$$\begin{aligned}
 A &= 1/2 \quad (-(1) + a - b + ab) \\
 B &= 1/2 \quad (-(1) - a + b + ab) \\
 AB &= 1/2 \quad ((1) - a - b + ab)
 \end{aligned}$$

y con base en el modelo

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \beta_{ij} + \tau_k + \epsilon_{ijk}$$

donde $i = 1, 2, \dots, 6$; $j = 1, 2$; $k = 1, 2, 3, 4$.

Los términos ρ, β, τ representan efectos fijos debidos a repeticiones, bloques y tratamientos respectivamente. Los términos ϵ_{ijk} se consideran distribuidos normal con media cero y varianza $\sigma^2 > 0$. Resultando el correspondiente análisis de varianza.

FUENTE DE VARIACION	G.L.	C.M.E.
Bloques	11	
Repeticiones	5	$\sigma^2 + 2A^2$
A de repet. II y V	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{22} + \beta_{52} - \beta_{21} - \beta_{51} + 2A)^2$
B de repet. III y VI	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{32} + \beta_{62} - \beta_{31} - \beta_{61} + 2B)^2$
AB de Repet. I y IV	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{11} + \beta_{41} - \beta_{12} - \beta_{42} + 2AB)^2$
Ax Repet. II y V	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{22} + \beta_{51} - \beta_{21} - \beta_{52})^2$
Bx Repet. III y VI	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{32} + \beta_{61} - \beta_{31} - \beta_{62})^2$
ABx Repet. I y IV	1	$\sigma^2 + 1/2(\beta_{11} + \beta_{42} - \beta_{12} - \beta_{41})^2$
Tratamientos	3	
A de Repet. I., III., IV., VI.	1	$4A^2 + \sigma^2$
B de Repet. I., II., IV., V.	1	$4B^2 + \sigma^2$
ABx Repet. II., III., V., VI.	1	$4(AB)^2 + \sigma^2$
Error	9	
Ax Repet. I., III., IV., VI.	3	σ^2
Bx Repet. I., II., IV., V.	3	σ^2
ABx Repet. II., III., V., VI.	3	σ^2
Total	23	

Es claro que la suma de cuadrados debida a bloques contiene alguna información sobre tratamientos.

En el caso clásico de bloques incompletos se intenta una recuperación de parte de dicha información (Yates, F.).

Es justamente este tipo de recuperación la parte fundamental del análisis de los llamados experimentos en parcelas divididas.

Parcelas divididas

Los experimentos en parcelas divididas se presentan como una solución a la imposibilidad de aleatorizar completamente los tratamientos dentro de los bloques, la que se realiza en forma restringida y en la que el efecto principal aparece totalmente confundido como solución al problema. Sin embargo, es correcto pensar que si los bloques dentro de cada repetición, son conjuntos homogéneos, la información entre bloques y sus diferencias se deben a diferentes niveles del tratamiento confundido, que por supuesto es posible estimar.

Como ilustración supongamos que efectos de niveles de tratamiento A y efectos de niveles de tratamiento de B y sus interacciones se desean esti-

mar, pero la restricción impuesta como característica del experimento hace imposible asignar a cada unidad y al azar cada una de las combinaciones de tratamientos, se impone asignar a "porciones" del material experimental y al azar, los niveles correspondientes de A para luego aplicar a subdivisiones que se efectúan en el material de A, los niveles del tratamiento B al azar.

Si no hubiese habido la ya planeada restricción en la aleatorización la correspondiente tabla de análisis de varianza, en lo que respecta a fuente de variación y grados de libertad tomará el formato.

<u>Fuente de Variación</u>	<u>Grados de Libertad</u>
Repeticiones	$r-1$
Tratamientos	$ab-1$
A	$a-1$
B	$b-1$
AB	$(a-1)(b-1)$
Error	$(ab-1)(r-1)$

Nuestra manera de trabajar, implica un "confundido" entre parcelas principales y niveles del tratamiento A. Son esas parcelas principales dentro de cada repetición las que recibirían tratamiento de bloque en el confundido clásico.

De esa forma los tres primeros renglones de la tabla del análisis de varianza que se incluyen a continuación tendrían el sentido de "bloques". A pesar de ello la comparación entre tratamiento A es válida.

Análisis de Varianza

<u>Fuente de Variación</u>	<u>Grados de Libertad</u>
Repeticiones	$r-1$
Tratamiento A	$a-1$
Tratamiento A $\times$ Repet. (Error (a))	$(a-1)(r-1)$
Tratamiento B	$b-1$
Interacción AB	$(a-1)(b-1)$
Tratamiento B $\times$ Repet. (Error (b))	$a(r-1)(b-1)$
Tratamiento AB $\times$ Repet.	
Total	$rab-1$

De las ideas de confundido del ejemplo anterior y de la presente tabla de análisis de varianza, el efecto principal A que aparece "confundido", la

esperanza de los cuadrados medios está expresada como una función de efectos debido a los bloques. Esto es justamente la parte fundamental del análisis de experimentos en parcelas divididas en donde por las razones ya expuestas este efecto no existe debido a que $(\beta_{22} - \beta_{21}) = 0$ y $(\beta_{52} - \beta_{51}) = 0$ teniéndose por lo tanto que la esperanza de cuadrados medios para tratamiento A es

$$\sigma^2 + 2A^2$$

En la esperanza para tratamientos $A \times \text{Rept.}$ ó Error (a), también se tiene el mismo efecto debido a bloques e igual a cero.

Bibliografía

- Kempthorne Oscar.** *The Design and Analysis of Experiments.* New York, John Wiley, 1952.
- Cochran William G., & Cox M. Gertrude.** *Experimental Designs,* New York, John Wiley, 1962.
- Cochran William.** *Sample Techniques.* New York, John Wiley, 1973.
- Hicks Charles R.** *Fundamental Concepts in the Design of Experiments,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.
- Stell Robert, G.D., & Torrie James H.** *Biostatística, Principios y Procedimientos,* McGraw-Hill, Inc., 1988.
- Ostle Bernard.** *Statistics in Research,* The Iowa State University Press. 1972.