



**Grupo de investigación en
Gravitación
Departamento de Física
Universidad del Valle**

Estudio de la Energía Oscura en el Marco de la Gravitación Modificada y el Principio Holográfico

Tesis que presenta

Germán Darío Rojas Chacón

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Física

Director de Tesis:
Dr Luis Norberto Granda

Cali, Colombia

Marzo 2023

El presente trabajo fue realizado en Santiago de Cali, Colombia, bajo la supervisión del Dr. Luis Norberto Granda Velásquez en los espacios y con el soporte del Grupo de Gravitación del departamento de Física de la Universidad del Valle.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad del Valle por la posibilidad que me ha brindado de realizar mis estudios superiores en Física. Doy gracias especialmente a mi director, Dr. Luis Norberto Granda V. por el apoyo y formación que me ha dado, y la paciencia que me ha tenido durante todo mi proceso académico. También agradezco al Dr. Wilmar Alberto Cardona por la ayuda brindada. Gracias a mis amigos(as), a mis tios José, Adolfo, Edgar y Mario; a mis primos(as), a sus esposos(as) e hijos(as), familiares presentes y aquellos que ya no lo están. Gracias a mi hermano Daniel Arbeláez por su continua lealtad y apoyo. Gracias totales a mis segundas madres Chili y mi Illa (q.e.p.d) por todo el amor que siempre me han dado. Gracias a mi querida tía Meme y a mi abue (q.e.p.d.), cuyo amor por mí siempre ha estado presente. Gracias a Dios, sea cual sea la concepción que se tenga de él/ella. Por último, gracias infinitas a mi amado ángel Dorys; la mayor parte de este esfuerzo ha sido por y para tí.

Índice

Resumen	5
Abstract	6
1. Introducción y estado del arte	7
2. Objetivos	19
2.1. Objetivos generales	19
2.2. Objetivos específicos	19
3. Marco teórico y resultados	20
3.1. Formalismo general.	20
3.2. Gravedad modificada y energía de vacío holográfica	30
3.3. $f(R)$ y energía de vacío holográfica con $F \approx 1$	41
3.4. Modelo $f(R)$	54
4. Discusión	93
5. Perspectivas	96
Apéndices	106

Resumen

Se plantea el análisis de diversos escenarios que podrían acercarnos al entendimiento de la energía oscura en el universo. Inicialmente se estudia el comportamiento general de modelos de gravedad modificada tipo $f(R)$ en el marco del *principio holográfico* analizando las ecuaciones de campo asociadas y la dinámica cosmológica a partir de un *sistema dinámico*. Seguidamente, los resultados obtenidos se aplican al modelo $f(R)$ de *Hu-Sawicki*, y se propone una expansión analítica del modelo alrededor de Λ CDM para posteriores análisis perturbativos. Finalmente se sugiere un modelo exponencial $f(R)$ para el cual se determinan las condiciones básicas de viabilidad así como aquellas necesarias para cumplir los requerimientos de Sistema Solar, y se analiza el *sistema dinámico* asociado. Igualmente se efectúa una aproximación analítica de la tasa de Hubble del modelo alrededor de Λ CDM a partir de la cual se estudia la evolución de los distintos parámetros cosmológicos, y se calcula la tasa e índice de crecimiento de perturbaciones de materia. Haciendo uso de la aproximación analítica hallada para el parámetro de Hubble se calcula el espectro de potencias de materia por medio del código *EFCLASS*. Se concluye que las alternativas presentadas pueden describir la dinámica de la energía oscura en el universo desde una perspectiva geométrica en el marco holográfico y a su vez explicar la evolución cosmológica de los diferentes sectores de energía. Adicionalmente, el modelo $f(R)$ propuesto puede explicar la evolución de las perturbaciones de materia manteniendo a su vez una diferencia con el modelo cosmológico estándar, la cual podría verificarse en observaciones futuras a bajo *redshift*.

Palabras clave: Cosmología, Gravedad Modificada, Principio Holográfico, Expansión Acelerada, Perturbaciones Escalares, Índice de Crecimiento de Perturbaciones de Materia, Tasa de Crecimiento de Perturbaciones de Materia, Espectro de Potencias de Materia.

Abstract

We propose the analysis of different scenarios that can help us to understand the nature of dark energy in our universe. Initially, the general behaviour of $f(R)$ modified gravity models is studied in the *holographic principle* framework and then we analyze the associated field equations and the cosmological dynamics from a *dynamic system*. Next, the obtained results are applied to the $f(R)$ model of *Hu-Sawicki*, and an analytical expansion of the *Hubble rate* around Λ CDM is developed for future perturbative analysis. Finally, we suggest an $f(R)$ exponential-type model for which the basic viability conditions and Solar System constraints are found, and the associated *dynamic system* is analyzed. Likewise, an analytical approach of the expansion rate around Λ CDM is calculated, from which the evolution of different cosmological parameters is studied, and the *growth rate* and *growth index* of matter perturbations are calculated. Making use of the analytical approximation found for the *Hubble rate*, the matter power spectrum is obtained from the *EFCLASS* code. We conclude that the proposals put forward can describe the *dark energy* dynamics in the universe from a geometrical point of view in the *holographic principle* framework and also explain the cosmological evolution of different energy sectors. In addition, the proposed $f(R)$ model can explain the evolution of matter perturbations while maintaining a difference with the standard cosmological model that could be verified in near future observations at low *redshift*.

Keywords: Cosmology, Modified Gravity, Holographic Principle, Accelerated Expansion, Scalar Perturbations, Growth Index of Matter Perturbations, Growth Rate of Matter Perturbations, Matter Power Spectrum.

1. Introducción y estado del arte

A lo largo de la historia diversos modelos cosmológicos han tratado de describir apropiadamente el origen y evolución del universo tanto a grandes como a pequeñas escalas. Después del descubrimiento de principios físicos y el desarrollo de herramientas matemáticas, las teorías en general se han basado en lagrangianos que involucran la geometría del espacio-tiempo por medio de su métrica y curvatura, y su posible comportamiento y evolución ante la presencia de materia y/o energía. A partir de allí, las ecuaciones de campo resultantes que describen la dinámica del espacio-tiempo en todas las escalas deben ajustarse a las observaciones de lentes débiles, formación de estructuras a gran escala, oscilaciones bariónicas, polarización y anisotropías en la radiación cósmica de fondo de microondas, supernovas tipo Ia (SNIa), y observaciones de ondas gravitacionales y explosiones de rayos gamma [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Las observaciones de SNIa restringen los modelos a tener una fase de expansión acelerada en tiempo tardío, mientras que las de ondas gravitacionales les exigen predecir una velocidad de ondas gravitacionales muy cercana a la de la luz. Diversos modelos han fallado en uno u otro aspecto yendo de esta forma en contra de las observaciones o exigencias teóricas.

La Relatividad General (RG), en la cual se basa el modelo cosmológico estándar o de concordancia (Λ CDM), ha sido fuertemente soportada [20, 21, 22, 95] por resultados observacionales de más de un siglo, desde la deflexión de la luz estelar causada por el Sol detectada por Eddington en 1919, hasta resultados recientes obtenidos con proyectos sofisticados como la detección y caracterización de ondas gravitacionales [96, 14, 15, 16], la validación precisa a escala galáctica del *principio de equivalencia de Einstein* [17], y pruebas extragalácticas en el régimen de campo débil de la gravedad [97]. Ante esto, el modelo de concordancia se ha erigido como una exitosa teoría para describir la dinámica del cosmos. Sin embargo, existen varios problemas que lo ponen bajo sospecha: 1) El muy bajo valor de energía de vacío requerido para justificar la tasa de expansión del universo presente, comparada con la predicha por la *teoría cuántica de campos* (QFT), 2) el inconveniente de *ajuste fino* necesitado por la teoría para acoplarse con las observaciones actuales y 3) la tensión detectada últimamente en la medición de la tasa de expansión del universo actual (H_0) a través de dos métodos distintos, uno basado en el análisis del espectro de la radiación cósmica de fondo (CMB) y el otro en los datos de SNIa. Lo anterior sugiere la necesidad de plantear alternativas teóricas que, aunque imiten de cerca el comportamiento de Λ CDM, puedan tener

un componente dinámico de *energía oscura* y a su vez eviten los problemas que tiene el modelo estándar. Se ha propuesto entonces que es probable que el modelo de concordancia esté basado en una energía de vacío que quizás no posea las características necesarias para generar la aceleración en el *background* cósmico actual y como consecuencia requiera una modificación de los principios básicos de la teoría [18].

El objetivo principal de la astrofísica y cosmología modernas es enfrentar el enigma del sector oscuro (energía oscura -EO- y materia oscura -MO-) del universo. Desde que los efectos de la energía oscura en el universo actual fueron detectados, la ausencia de una teoría fundamental que los explique satisfactoriamente dio lugar a diversos modelos cosmológicos que condujeron a ecuaciones de campo asociadas a una etapa de aceleración de tiempo tardío. Entre estos se encuentran aquellos que asumen la energía oscura proveniente de un término constante, campos escalares, vectoriales y tensoriales, independientes o acoplados, en cuatro o más dimensiones, como el origen de dicha aceleración. Un segundo tipo de propuestas sugiere que no es necesario invocar la presencia de energía oscura (en su forma habitual) sino que asocian la expansión acelerada a una modificación de las leyes de la gravedad (gravedad modificada -GM- o energía oscura geométrica -EOG-) cambiando la forma en la cual la geometría del espacio-tiempo responde a la presencia de energía y materia. Otros modelos asumen una mezcla entre energía oscura y gravedad modificada. Una revisión amplia de los tipos de modelos mencionados se encuentra en [20].

Dentro del segundo tipo encontramos, entre las más simples, aquellas que usan invariantes no lineales de la curvatura (escalar y tensorial) como el invariante de Gauss-Bonnet y los modelos $f(R)$ en los cuales el escalar de Ricci R que aparece en el lagrangiano de Einstein-Hilbert (EH) es reemplazado por una función general de este [20]. En cualquier modelo viable de gravedad modificada la evolución del factor de escala debe mantenerse en valores muy cercanos a los obtenidos para el modelo estándar Λ CDM (constante cosmológica con materia oscura fría) el cual, como ya se mencionó, a pesar de describir de buena forma la evolución del universo desde la época de dominancia de radiación hasta la actual de aceleración y generar una ecuación de estado efectiva muy cercana a la observada actualmente, no explica satisfactoriamente el origen físico de la constante cosmológica Λ . Los modelos escalar-tensor han tenido algún éxito al explicar esta aceleración asociándola a un sector de energía oscura, pero la relativamente reciente medición de la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales $-c_g-$, muy cercana a la velocidad de la luz

[14, 15, 16] junto con los resultados observacionales ya citados y requerimientos teóricos [20, 23, 26, 27, 28, 29, 32], han dejado vigentes únicamente los modelos acoplados mínimamente a la gravitación y entre los no mínimamente acoplados se destaca $f(R)$.

En general, los modelos $f(R)$ han sido utilizados para explicar diversos aspectos del comportamiento del universo, entre ellos la expansión acelerada, inflación, y materia oscura en halos galácticos. También, debido a la no renormalizabilidad de la Relatividad General -RG-, estos modelos han adquirido un interés adicional ya que los invariantes de mayor grado (no lineales) de la curvatura serían necesarios para construir una teoría renormalizable.

Un modelo $f(R)$ completo debe describir las diferentes etapas de evolución del universo, incluyendo inflación, época de dominancia de radiación durante la que se presentó la nucleosíntesis del Big Bang, época de dominancia de materia en la cual se generó la formación de estructuras a partir del crecimiento de las perturbaciones primordiales [26, 27, 28, 32], y la época actual de expansión acelerada. También debe cumplir todas las restricciones teóricas ya citadas y ajustarse a los resultados observacionales mencionados anteriormente. No obstante, hay algunas teorías de este tipo que describen parcialmente la historia del universo lo cual no significa que estén erradas sino incompletas y pueden darnos pistas valiosas sobre el comportamiento del cosmos. Algunos aspectos generales que incluyen ventajas, restricciones y debilidades de los modelos $f(R)$ pueden ser encontrados en [23, 29].

Los primeros artículos de $f(R)$ fueron publicados en 1969-1970 [33]. Estos contenían una corrección cuadrática mas algunos términos no locales agregados al lagrangiano de EH obteniendo con esto una fase cuasi de Sitter con un decaimiento de tipo "slow-roll". *Starobinsky* [34] mostró que esta corrección cuadrática provendría de fluctuaciones cuánticas tenidas en cuenta en las ecuaciones de Einstein, obteniendo de esta manera una fase de Sitter altamente simétrica (inflación) en el universo temprano. Sin embargo, este modelo no describe las últimas etapas de evolución del universo, incluyendo la actual de expansión acelerada, ya que el término de segundo grado se hace irrelevante para valores muy pequeños de curvatura escalar como sucede en la actualidad. El comportamiento de algunos modelos $f(R)$ para inflación es analizado por *Barrow y Otewill* [35]. En [37] *Schmidt* presenta soluciones de las ecuaciones de Friedmann obtenidas a partir de modelos $f(R)$ del tipo ley de potencias (power-law) en R para inflación.

Algunos modelos de este tipo han sido propuestos para tratar el problema de la materia oscura. En ese sentido han sido empleados para probar la formación y evolución estelar, emisión de ondas gravitacionales y restricciones en los modos de gravitón masivos, curvas de rotación planas de galaxias espirales, velocidad de dispersión de galaxias elípticas, formación de estructuras, evolución del universo y para describir el agrupamiento de galaxias [38]. Entre otros, en [39] *Capozziello et al.* propusieron un modelo que se ajusta bien a la curva de rotación de la Vía Láctea sin requerir materia oscura. En [40] se presenta un análisis de modelos $f(R)$ tipo ley de potencias, y se sugiere que un lagrangiano más complejo puede ser necesario para explicar toda la fenomenología del “sector oscuro” en todas las escalas. En [41] *Zhang* propuso una corrección $f(R)$ de tipo exponencial al lagrangiano de EH que produce resultados interesantes relacionados con el sector de materia oscura mostrando una tasa de factor de crecimiento en concordancia con las observaciones. Un lagrangiano diferente pero cercano al de EH fue presentado por *Sobouti* [42] (y *Safari* y *Sobouti* [43]) para explicar la dinámica en ambientes galácticos. Por medio de un modelo $f(R)$ de ley de potencias, *Borka et al.* [44] mostraron que el plano fundamental de galaxias elípticas puede ser recuperado sin necesidad de materia oscura. En otra aproximación, *Capozziello et al.* discuten, basados en la termodinámica, el agrupamiento de galaxias en un universo en expansión teniendo en cuenta el potencial de Newton modificado proveniente de modelos de energía oscura geométrica [45].

Varios de los primeros modelos de EOG propuestos para tratar el problema de la aceleración en tiempo tardío, agregaron un término del tipo R^{-1} al lagrangiano de EH [46, 47]. El término adicional (con potencia negativa) dominaría a medida que el universo se expande produciendo así la aceleración, pero este modelo no pasó las pruebas de Sistema Solar y presenta inestabilidades ante perturbaciones locales de modo que no es viable [48, 49]. No obstante, *Sotiriu* mostró que la inestabilidad que hace inviable el modelo solo está presente en el formalismo métrico pero no en el de Palatini [50]. Como dato adicional, *Mena et al.* argumentaron que diversos modelos con potencias negativas de la curvatura no pueden explicar la dinámica del universo considerando únicamente una componente de materia bariónica [19]. *Nojiri* y *Odintsov* presentaron una particular combinación de términos del tipo R^{-1} y R^2 [51] la cual constituyó el primer intento para unificar inflación temprana y aceleración de tiempo tardío (aunque esta última propiedad no fue cumplida satisfactoriamente [29]). La inestabilidad arriba mencionada podría ser significativamente reducida por términos no lineales como R^2 (o R^3) en este mo-

delo, y podría pasar las pruebas de Sistema Solar. Los mismos autores sugirieron tener en cuenta correcciones de tipo logarítmico ($\ln R$) [52] las cuales básicamente son introducidas por efectos cuánticos en el espacio-tiempo curvo y podrían servir para la unificación de inflación y expansión acelerada. Otros modelos contienen un término adicional de la forma R^n , donde la potencia n es un número real [53]. A través de observaciones de SNIa y la edad del universo calculada de los resultados de *WMAP*, los autores restringieron su modelo a valores de n alrededor de -0.4 y 1.37 . Algunos modelos sugirieron una suma de potencias positivas y negativas de R [54] donde los términos con potencias positivas dominarían a pequeñas escalas mientras que aquellos con potencias negativas lo harían en escalas grandes produciendo de esta manera la expansión acelerada. Sin embargo, algunos de estos no son viables para aceleración de tiempo tardío [55]. En [29, 30, 31] *Amendola et al.* mostraron que los modelos con ley de potencias tienen ya sea una era de expansión acelerada o una estándar de dominancia de materia transitoria pero no ambas. *Jaime et al.* [75] proporcionaron evidencia numérica adicional de los resultados de *Amedola et al.* pero sin realizar transformación conforme del marco de Jordan al marco de Einstein, sino considerando a R como un grado de libertad independiente. En 2006, *de la Cruz-Dombriz y Dobado* [57] presentaron un modelo escrito en términos de funciones hipergeométricas sin requerimiento de una constante cosmológica pero capaz de imitar los resultados de la RG con constante cosmológica. *Appleby y Battye* propusieron un modelo simple e interesante [58] que contiene funciones logarítmicas e hiperbólicas de la curvatura construidas por integración, el cual describe adecuadamente las dos últimas etapas del universo, de dominancia de materia y aceleración, satisfaciendo a la vez los requerimientos teóricos de consistencia pero necesitando, como muchos otros, un *ajuste fino*.

Con el fin de que el campo escalar con dinámica propia (evidenciada en la ecuación de la traza como se verá más adelante) que surge en los modelos $f(R)$ dé lugar a un escenario de expansión acelerada a gran escala pero a su vez no viole el *principio de equivalencia* (hasta donde ha sido corroborado), pilar esencial del modelo cosmológico estándar, diversos modelos de gravedad modificada han implementado el llamado *mecanismo camaleón* [60, 61], a través del cual el rango de interacción del nuevo campo escalar depende de la densidad local de materia; esto permite evitar correcciones detectables a los fenómenos de Sistema Solar donde la densidad es alta y que están bien descritos por la RG, pero a su vez tener efectos cosmológicos apreciables. Un modelo $f(R)$ de referencia que hace uso de este mecanismo, fue presentado por *Hu y Sawicki* (HS) [62] el cual contiene una corrección de tipo racional (al lagrangiano de EH) en la cual tanto el numerador

como denominador son expresiones tipo ley de potencias de R . Este modelo de “un paso” (un valor de curvatura de transición aguda o suave) produce una cosmología viable, es decir una época de dominancia de materia seguida por una de expansión acelerada en tiempo tardío, evadiendo pruebas de Sistema Solar, produciendo expansión acelerada consistente con las observaciones, y satisfaciendo las condiciones generales [29] de viabilidad de cualquier modelo $f(R)$ [63]. *Nojiri* y *Odintsov* propusieron otros dos modelos [64, 65] con características similares (expansión acelerada de tiempo temprano -inflación- y tardío, época de dominancia de materia y fase de desaceleración/aceleración) pero significativamente más complejos. Los mismos autores sugirieron otros dos modelos de gravedad modificada [66] que contienen términos exponenciales, con límites similares a los del modelo de HS en regímenes de baja y alta curvatura, y con una cosmología similar.

En [67] se presenta un modelo de tipo racional, con términos de ley de potencias en el numerador y denominador. Este modelo tiene límites similares a los de HS y puede describir la evolución del universo desde inflación hasta la época actual de aceleración, pero infortunadamente tiene un régimen de antigravedad que lo haría inviable. En el mismo artículo, se efectúa un intento para solucionar este problema al considerar una función a trozos que contiene el modelo racional mencionado. Además, en este artículo se presenta una propuesta diferente, construida por integración de una función exponencial, que puede evitar el régimen de antigravedad. Los mismos autores plantearon en [68] otro modelo de unificación de aceleración de tiempo temprano y tardío el cual pasa las pruebas de Sistema Solar y puede imitar el modelo Λ CDM. En [69] presentaron un modelo de unificación de aceleración temprana y tardía de tipo *quintaesencia* o *phantom* consistente con la historia de expansión del universo y pruebas de Sistema Solar. Igualmente, en [70] sugirieron un modelo por reconstrucción que presenta aceleración temprana y tardía, consistente con las observaciones a pequeña y gran escala y a su vez libre de singularidades futuras. En [71] se proponen varios modelos de “un paso” y “dos pasos” (dos valores de curvatura de transición) compuestos por términos racionales los cuales a su vez contienen términos exponenciales en el numerador y denominador. Uno de los modelos de “un paso” descritos, puede ser reescrito como una combinación de tangentes hiperbólicas, tiene límites similares al los del modelo HS, es capaz de producir aceleración en tiempo tardío, y no presenta regímenes de antigravedad en el pasado pero sí quizás en el futuro. El modelo de “dos pasos” exhibe los límites del modelo HS, puede describir inflación y expansión acelerada actual, y no presenta regímenes de antigravedad. En estos modelos, la ley de Newton se respeta y todas las soluciones de cuerpo esférico (Tierra, Sol,

etc.) son estables. *Miranda et al.* [72] sugirieron un modelo logarítmico que reproduce la época de dominancia de materia al igual que la fase acelerada actual. Cuando se transforma al marco de Einstein, el potencial del campo escalar no presenta patologías, y los autores encontraron que el modelo es consistente con una cosmología basada en una métrica FLRW y no aparecen singularidades en objetos compactos idealizados, resultados confirmados por *Jaime et al.* [73]. Además, este modelo permite la adición de correcciones de alto grado (no lineales en R) que pueden producir inflación. El modelo de *Starobinsky* [74] es capaz de producir una etapa adecuada de dominancia de materia seguida por una de aceleración, y puede pasar exitosamente las pruebas de Sistema Solar, pero conduce a potenciales con deficiencias cuando se transforma al marco de Einstein [75].

En 2007, *Deser y Woodard* realizaron la primera propuesta [76] de energía oscura geométrica no local para expansión acelerada, muy cercana al modelo Λ CDM, para explicar los datos cosmológicos sin necesidad de un ajuste fino (de parámetros del modelo) extremo, y permitiendo una respuesta retardada a eventos cósmicos, por ejemplo, la transición de época de dominancia de radiación a una de dominancia de materia. *Maggiore y Mancarella* [77] también propusieron un modelo de este tipo, el cual puede producir energía oscura geométrica capaz de ajustarse a los datos observacionales al tiempo que permite un espectro de potencia de materia compatible con las observaciones [78]. A través del método de reconstrucción [79, 80, 32, 81, 82, 83], *Karami y Khaledian* plantearon en [84] varios modelos $f(R)$ teniendo como fuente una densidad de energía calculada con base en el *principio holográfico* [113, 114, 115, 116, 117] y *agegráfico* [120], y la proveniente de estos dos pero con correcciones cuánticas en la relación entropía-área. Estos modelos pueden describir la historia de expansión del universo y generar escenarios tipo *quintaesencia* y *phantom*. Similarmente, *Majumder* [85] propone algunos modelos de GM obtenidos por reconstrucción, teniendo como fuentes de energía oscura las mismas de [84], pero con correcciones a la relación entropía-área debidas a una generalización del *principio de incertidumbre de Heisenberg* en regímenes de curvatura elevada. Dichos modelos están compuestos por una suma de términos de ley de potencias (permitiendo potencias fraccionarias de R) y términos logarítmicos, los cuales pueden dar lugar a escenarios acelerados de tipo *quintaesencia*, de Sitter o *phantom*.

Otra aproximación novedosa de gravedad modificada fue presentada por *Harko et al.* [86] en la que introdujeron una corrección al lagrangiano de EH que depende de R a la *Palatini*, es decir, el escalar de curvatura de esta corrección depende tan-

to de la métrica como de la conexión afín (como campos independientes), pero el término de EH, es decir R , depende únicamente de la métrica. Esta aproximación predice la existencia de un campo escalar ligero de largo alcance capaz de cumplir los requerimientos observacionales de Sistema Solar y puede conducir a escenarios de aceleración de tiempo tardío.

Otros modelos de EOG son propuestos y analizados en [71, 91, 92, 93, 94, 98, 99, 105, 106, 107, 87], y específicamente aquellos relacionados con gravedad modificada tipo exponencial son estudiados en [100] en el contexto de los resultados observacionales recientes. Se encontró que este tipo de modelos pueden explicar el problema de la energía oscura desde el punto de vista geométrico sin una diferencia significativa con el modelo Λ CDM. Una extensión de estos puede describir inflación satisfaciendo los requerimientos de las observaciones de *Planck* [6]. En [101] se analiza un modelo unificado desde inflación hasta la era de dominancia de energía oscura. Para este propósito, un término cuadrático en R con constante de acople dependiente del tiempo (obtenida de correcciones a un loop de gravedad cuántica) es usado para producir inflación, un término de tipo exponencial es agregado para producir expansión acelerada en tiempo tardío, y un término “reparador” es también adicionado para prevenir singularidades no físicas causadas por el término exponencial. Para inflación, el índice espectral y la relación escalar-tensor coinciden con los resultados de *Planck* [6] y para expansión acelerada el modelo se ajusta muy bien a los resultados observacionales más recientes para energía oscura. En [102] también se presenta un modelo de unificación (desde inflación hasta expansión acelerada) el cual para describir inflación sugiere dos alternativas como corrección al lagrangiano de EH: La primera consiste en un término cuadrático en la curvatura con una constante de acople dependiente de R que hace posible la salida de la inflación hacia una época de dominancia de radiación; esta constante es de tipo logarítmico, lo cual se inspira en correcciones a un loop de constantes de acople en gravedad cuántica. La otra posible corrección para producir inflación es de tipo exponencial mas un término del tipo ley de potencias. Este tipo de corrección produce una inflación tipo *constant-roll*, lo cual hace compatible el modelo con las observaciones sin necesidad de un ajuste fino. Por otra parte, la corrección sugerida para describir una época de dominancia de EO contiene el producto de una *constante cosmológica* por una función logarítmica de R multiplicada a su vez por una función de R de tipo exponencial. Para la era inflacionaria, el índice espectral de perturbaciones primordiales de curvatura y la relación escalar-tensor pueden ser compatibles con las observaciones recientes. Para expansión acelerada, el modelo puede pasar pruebas de Sistema Solar y cosmológicas. En [103] se

planteó un modelo $f(R)$ con acople al campo electromagnético que puede generar aceleración temprana y tardía, campos magnéticos a gran escala, y es consistente con observaciones cosmológicas y pruebas de Sistema Solar. En [104] se hizo una propuesta de gravedad modificada que contiene dos funciones $f(R)$ una de las cuales tiene acople con el lagrangiano de un campo escalar. Este modelo se desarrolló a través del formalismo de *Palatini* y puede generar escenarios *phantom* o *quintaesencia*.

Recientemente *Granda* propuso diversos modelos [88, 89, 90] que contienen correcciones de tipo exponencial al término de Einstein que sustentan el comportamiento del universo desde escenarios de *high-redshift* hasta el actual de expansión acelerada y que pueden ser extendidos para describir inflación. Igualmente estos modelos cumplen con las características de viabilidad [29] y bajo ciertas condiciones sobre sus parámetros evitan las inestabilidades usuales de modelos $f(R)$ y pasan las pruebas de Sistema Solar. Así mismo, tienen las características propias de los modelos viables de $f(R)$ en diversos indicadores de evolución de perturbaciones que los diferencian del modelo Λ CDM las cuales podrían verificarse en proyectos observacionales futuros.

Aún es una tarea no resuelta encontrar una teoría que describa con alto grado de precisión las diferentes etapas de evolución del universo, desde una inicial de expansión acelerada - inflación - que permita la amplificación suficiente de las perturbaciones primordiales y el decrecimiento significativo de la influencia de la curvatura espacial en la dinámica del cosmos, permitiendo una transición a una etapa de dominancia de radiación en la cual se haya presentado la Nucleosíntesis del Big Bang, pasando posteriormente a una época donde la densidad de materia domine sobre los demás sectores y dure lo suficiente para permitir la formación de estructuras (supercúmulos, cúmulos, galaxias, estrellas, planetas, etc.) evolucionando hacia una época (aún vigente) donde la densidad de energía oscura sea dominante permitiendo una expansión acelerada del universo, y que a su vez sea capaz de pasar las pruebas a pequeña escala (Sistema Solar, límite newtoniano y post-newtoniano) de modo que respete los logros de la RG, se ajuste a observaciones a mayor escala como lentes gravitacionales, ondas gravitacionales, oscilaciones bariónicas, índice espectral, relación escalar-tensor y demás detalles que puedan ser observados en la radiación cósmica de fondo [6], y a su vez evite los inconvenientes mencionados del modelo estándar además de ser estable ante perturbaciones.

Se espera que las observaciones a pequeña escala (escalas galácticas y de Sistema Solar) con el paso del tiempo sean más precisas para que permitan corroborar o descartar modelos con predicciones a este nivel. Las observaciones a mayor escala (cosmológica) usualmente presentan un mayor margen de error, y se requieren proyectos más avanzados que los desarrollados hasta la fecha, que permitan una mayor precisión en estas escalas, de modo que sus observaciones verifiquen o refuten los modelos hasta hora viables. Este es el caso de los modelos de gravedad modificada, los cuales recobraron impulso ante las observaciones de ondas gravitacionales [14, 15, 16]. Diversos modelos como algunos de los citados anteriormente son viables teórica y observacionalmente, pero aún está abierta la posibilidad de que se planteen modelos con predicciones distintas que puedan ser verificados con el paso del tiempo a partir de observaciones más precisas de ondas gravitacionales, evolución de perturbaciones, CMB, oscilaciones acústicas y cartografiado galáctico.

Por otra parte, el *principio holográfico* proviene originalmente de trabajos desarrollados en teoría de cuerdas basándose en algunos aspectos de la gravedad cuántica [113, 114, 115, 138]. A grandes rasgos sugiere que la información incluida en el volumen de algún espacio determinado puede conocerse a partir de aquella contenida en la frontera de dicha región. Una de las consecuencias de esta propuesta es que la cantidad máxima de información que puede tener una determinada zona del espacio está limitada por el área total de la superficie en su contorno. Aplicado a sistemas gravitacionales, algunos de los primeros desarrollos con base en este principio surgieron de los trabajos de *J. Bekenstein*, *S. Hawking* y *J. M. Bardeen* [108, 109, 110, 111, 112] en la década de 1970 a partir de los cuales se estableció que la entropía de un agujero negro es directamente proporcional al área de la superficie de su horizonte de eventos. Posteriormente los trabajos de *Cohen et al.* y *Hsu* [139, 140] permitieron establecer una restricción en el tamaño de sistemas que sufren colapso gravitatorio, de acuerdo a la cual el agujero negro de mayor masa que puede caber en una región dada es aquel cuyo horizonte de eventos corresponda justamente a la frontera de dicha región. Extrapolado a la cosmología y teniendo en cuenta al universo entero como el sistema en estudio, se sugiere que la energía de vacío proveniente de este principio podría interpretarse como una fuente de energía oscura llamada comunmente *energía oscura holográfica*, habiendo surgido posteriormente diversos trabajos que proponen distintas formas para su densidad [116, 117, 118, 119].

De acuerdo a lo anterior, el propósito del presente proyecto es sugerir modelos

cosmológicos de energía oscura que incluyan gravedad modificada y densidad de energía holográfica o gravedad modificada únicamente como fuentes de EO. En ese orden inicialmente en la **Sección 3.2** se tomará un modelo $f(R)$ viable (ya propuesto y analizado) como responsable de un comportamiento no convencional de la gravedad a escalas cosmológicas, y se lo dotará de una densidad de energía de vacío inspirada en el principio holográfico. En este contexto, la modificación a la gravedad y la densidad holográfica serían responsables de la expansión acelerada del universo actual. A partir de las ecuaciones de campo se estudiará la dinámica del universo descrita por dicho modelo a partir del análisis de su respectivo *sistema dinámico* y se mostrarán los aportes que la densidad holográfica propuesta tiene sobre la dinámica del cosmos. Los resultados obtenidos están publicados en [121]. Posteriormente dentro de este mismo formalismo, y debido a la cercanía que tiene el comportamiento del universo con el descrito por el modelo de concordancia, en la **Sección 3.3** se considerará como caso particular que $df/dR \approx 1$ en la densidad holográfica propuesta, y con base en esto se hará un análisis de la dinámica cosmológica a partir del estudio del *sistema dinámico*. Igualmente, se efectuará una expansión analítica en serie para la expresión del parámetro de Hubble alrededor de aquella para Λ CDM de la forma sugerida en [122], en la que habrá un primer término que contiene una densidad constante de energía oscura cuyo origen es la modificación a la gravedad únicamente, y los términos adicionales en la expansión actuarían como elementos “correctivos” provenientes tanto de la gravedad modificada como de la densidad de energía holográfica como se planteará más adelante. Dichas correcciones podrían tener efectos en la formación de estructuras durante la etapa de dominancia de materia, los cuales podrían viabilizarse o descartarse al compararlos con las observaciones recientes de parámetros asociados al crecimiento de tales estructuras, pero esto último será objeto de una investigación posterior. Finalmente se propondrá en la **Sección 3.4** un modelo de gravedad modificada que contiene una corrección de tipo exponencial. Se hará un análisis de las condiciones básicas de viabilidad que le permitan evitar las diferentes inestabilidades detectadas para otros modelos (regímenes de antigravedad, masa efectiva negativa, inestabilidad de Dolgov-Kawasaki [49, 24]), se analizarán las condiciones para el cumplimiento de las pruebas de Sistema Solar que le concedan al modelo la posibilidad de explicar fenómenos gravitacionales a pequeñas escalas descritos satisfactoriamente por la RG a este nivel, se hará un análisis del *sistema dinámico* asociado y se mostrará como cambian a lo largo del tiempo los distintos parámetros cosmológicos asociados al modelo. Finalmente se estudiará la evolución de la tasa e índice de crecimiento de perturbaciones y se esbozará el espectro lineal de potencias de materia calculado a través del código *EFCLASS*

[124, 125]. Vale la pena aclarar que los resultados obtenidos en las secciones **3.3** y **3.4** aún no han sido publicados.

2. Objetivos

2.1. Objetivos generales

- Estudiar modelos cosmológicos de energía oscura basados en la gravitación modificada tipo $f(R)$ y en el marco del *principio holográfico*.
- Proponer y analizar un modelo viable de gravedad modificada $f(R)$.
- Con el trabajo de investigación realizado se espera cumplir los requisitos para obtener el título de Doctor en Ciencias-Física de la Universidad del Valle.

2.2. Objetivos específicos

- Hacer un estudio general de las ecuaciones de la *gravitación modificada* tipo $f(R)$ considerando como fuentes la materia oscura y bariónica, y la energía del vacío modelada a partir de la *gravedad modificada* y el *principio holográfico*.
- Analizar nuevos efectos obtenidos de considerar modelos viables de $f(R)$ ya estudiados, en el marco del *principio holográfico*.
- Hacer un análisis del *sistema dinámico* asociado a los modelos anteriores y calcular sus puntos críticos para determinar nuevas posibilidades de transición entre las diferentes épocas de evolución del universo.
- Proponer un nuevo modelo $f(R)$ de tipo exponencial, realizarle un estudio de viabilidad, y con base en este efectuar una expansión analítica del parámetro de Hubble alrededor del modelo de concordancia de la forma sugerida por *Basilakos et al.* [122] y a partir de allí analizar el comportamiento de la tasa e índice de crecimiento de perturbaciones lineales de materia y el espectro de potencias de materia.

3. Marco teórico y resultados

3.1. Formalismo general.

Las teorías de gravedad modificada tienen como base el lagrangiano y las ecuaciones de la Relatividad General y sus resultados deben respetar en el límite de pequeñas y grandes escalas los resultados de la teoría de Einstein y del modelo Λ CDM.

La acción general para modelos tipo $f(R)$ es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_{\mathcal{M}}(g_{\mu\nu}, \psi) \right) , \quad (1)$$

donde se asume un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, cualquier índice en letra griega “corre” desde 0 hasta 3, donde el 0 corresponde a la dimensión temporal y 1, 2 y 3 corresponden a cada una de las dimensiones espaciales respectivamente, $\kappa^2 = 8\pi G$, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ es la densidad lagrangiana de “materia” que puede incluir materia bariónica, materia oscura fría (CDM), radiación, o algún tipo exótico de materia/energía que en nuestro caso asociaremos a la energía del vacío. A partir del *principio de mínima acción* y a través del *formalismo métrico*, de (1) se obtienen las siguientes ecuaciones de campo:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu} + \nabla^\sigma \nabla_\sigma [f'(R)]g_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu [f'(R)] = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2)$$

que se pueden escribir como:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \left(\nabla_\nu \nabla_\mu - g_{\mu\nu} \square \right) f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} , \quad (3)$$

y su traza

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa^2 T , \quad (4)$$

donde $\square \equiv \nabla^\sigma \nabla_\sigma = \nabla_\sigma \nabla^\sigma$ es el operador D'Alembertiano covariante, cada comilla ' representa derivación con respecto al argumento de la función y

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5)$$

es el tensor energía-momentum proveniente de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ y cuya traza es T .

Las expresiones (3) y (4) constituyen las ecuaciones de campo principales para teorías $f(R)$ a partir del *formalismo métrico*. La ecuación (3) puede también escribirse, después de alguna manipulación algebraica, de forma similar a las ecuaciones de Einstein con un tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}^{(f)}$ para el sector de energía oscura generada por $f(R)$, que contiene términos dependientes del escalar de curvatura R a través de $f(R)$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 \tilde{T}_{\mu\nu} + \kappa^2 \left[\frac{1}{\kappa^2 f'(R)} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + (\nabla_\nu \nabla_\mu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) \right] \right] , \quad (6)$$

donde

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{f'(R)} , \quad (7)$$

y

$$T_{\mu\nu}^{(f)} \equiv \frac{1}{\kappa^2 f'(R)} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + (\nabla_\nu \nabla_\mu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) \right] . \quad (8)$$

Aplicando los anteriores resultados a la dinámica del universo, se tiene que asumiendo homogeneidad e isotropía del cosmos a gran escala, se puede hacer uso de la métrica *FLRW* con signatura $(-, +, +, +)$ que se expresa como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] , \quad (9)$$

siendo $a(t)$ el factor de escala y K la curvatura espacial del universo, para la cual las observaciones recientes sugieren que $K \approx 0$ desde épocas de alto *redshift*. Adicionalmente, teniendo que:

- El escalar de Ricci con la métrica dada y $K = 0$ toma la forma

$$R^\mu_\mu \equiv R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 6 \left(2H^2 + \dot{H} \right) , \quad (10)$$

donde cada punto sobre una letra significa derivación con respecto al tiempo cósmico t , y $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ es la tasa (parámetro) de Hubble,

- Para el tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}$ definido en (5) se utiliza el modelo de fluido perfecto, quedando descrito por

$$T^\mu_\nu \equiv p\delta^\mu_\nu + (\rho + p)\mathcal{U}_\nu\mathcal{U}^\mu , \quad (11)$$

donde ρ es la densidad de energía, p es la presión, $\mathcal{U}_\mu$ es el cuadvivector velocidad covariante dado por $\mathcal{U}_\mu = (-1, 0, 0, 0)$, $\mathcal{U}^\mu$ es el cuadvivector velocidad contravariante dado por $\mathcal{U}^\mu = (1, 0, 0, 0)$,

- La traza de (11) está dada por

$$T^\mu_\mu \equiv T = -\rho + 3p , \quad (12)$$

la componente temporal de la ecuación de campo (3) resulta:

$$3H^2 F = \kappa^2 \rho + \frac{1}{2} \left[RF - f \right] - 3H\dot{R}F' , \quad (13)$$

que tambien puede verse como

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \frac{1}{2} \left[RF - f \right] - 3H\dot{R}F' + 3H^2(1 - F) , \quad (14)$$

donde $f \equiv f(R)$ y $F \equiv F(R) \equiv f'(R)$, los cuales se utilizarán indistintamente de aquí en adelante, y se ha tenido en cuenta que $\dot{F} = \dot{R}F'$, siendo F' la segunda derivada de $f(R)$ con respecto a R . De igual manera, haciendo uso de la forma que toma $\kappa^2 \rho$ a partir de (13), se tiene que cualquier componente espacial de la ecuación (3) está dada por:

$$(2\dot{H} + 3H^2)F = - \left[\kappa^2 p + 2H\dot{R}F' + \frac{f - RF}{2} + \ddot{F} \right] , \quad (15)$$

la cual puede reescribirse como

$$2\dot{H} + 3H^2 = - \left[\kappa^2 p + 2H\dot{R}F' + \frac{f - RF}{2} + \ddot{F} + (2\dot{H} + 3H^2)(F - 1) \right] . \quad (16)$$

Cabe destacar que las ecs. (13) y (15) (o (14) y (16)) son ecuaciones generalizadas y su límite cuando $f(R) \rightarrow R$ son las ecuaciones habituales de la *Relatividad General*. Similarmente, la ecuación de la traza (4) toma la forma

$$FR - 2f + 3\Box F = \kappa^2(3p - \rho) , \quad (17)$$

cuya solución en ausencia de fuentes correspondería a los escenarios de Sitter de curvatura constante propios del modelo $f(R)$ propuesto. Puede verse que surge un grado de libertad adicional en la teoría, este es F , pues dicho campo, al cual llamaremos *escalarón*, claramente adquiere su propia dinámica través de (17). Esta ecuación se puede interpretar como una ecuación de movimiento para un campo escalar representado por F con un potencial efectivo $V_{F\text{eff}}$, la cual se expresaría como

$$\Box F - \frac{dV_{F\text{eff}}}{dF} = 0 , \quad (18)$$

donde

$$\frac{dV_{F\text{eff}}}{dF} \equiv \frac{1}{3} \left[2f - FR + \kappa^2(3p - \rho) \right] . \quad (19)$$

De las ecs. (18) y (19) se tiene que, acogiendo la interpretación usual de “masa” desde el punto de vista de la física de partículas, la masa del *escalarón* estaría dada por:

$$m_F^2 \equiv \frac{d^2 V_{F\text{eff}}}{dF^2} \Big|_{R_m} = \frac{1}{3} \left(2 \frac{F}{F'} - \left(R + \frac{F}{F'} \right) \right) \Big|_{R_m} = \frac{1}{3} \left(\frac{F}{F'} - R \right) \Big|_{R_m} , \quad (20)$$

donde se ha tenido presente que $d/dF = (d/dR)(dR/dF) = (d/dR)(F')^{-1}$, y

R_m corresponde al valor de R que minimiza $V_{F_{\text{eff}}}$, es decir, la solución a $\frac{dV_{F_{\text{eff}}}}{dF} = 0$ cuando $\frac{d^2V_{F_{\text{eff}}}}{dF^2} > 0$ (ver [25, 62] para discusiones sobre el tema).

Por otra parte, realizando un desarrollo similar al efectuado para obtener la ecuación (6) y comparando las ecuaciones obtenidas con las ecuaciones de Einstein teniendo en cuenta la métrica $FLRW$ con $K = 0$, las ecuaciones (13) y (15) toman la forma equivalente:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\tilde{\rho} + \rho_{EO}) \quad (21)$$

y

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 (\tilde{p} + p_{EO}) \quad (22)$$

respectivamente, donde se pueden identificar una densidad y presión asociadas a un *fluido efectivo* dadas por $\rho_{\text{eff}} \equiv \tilde{\rho} + \rho_{EO}$ y $p_{\text{eff}} \equiv \tilde{p} + p_{EO}$ con $\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{F}$, $\tilde{p} \equiv \frac{p}{F}$, $\rho_{EO} \equiv \rho_f + \tilde{\rho}_\Lambda$, $p_{EO} \equiv p_f + \tilde{p}_\Lambda$, $\tilde{\rho}_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{F}$, $\tilde{p}_\Lambda \equiv \frac{p_\Lambda}{F}$,

$$\rho_f \equiv \frac{1}{\kappa^2 F} \left(\frac{RF - f}{2} - 3H\dot{R}F' \right) \quad (23)$$

y

$$p_f \equiv \frac{1}{\kappa^2 F} \left(2H\dot{R}F' + \frac{f - RF}{2} + \dot{R}^2 F'' + \ddot{R}F' \right), \quad (24)$$

en donde se ha tenido en cuenta la relación $\ddot{F} = \dot{R}^2 F'' + \ddot{R}F'$, y los subíndices EO , f y Λ indican cantidades asociadas a los sectores de energía oscura, gravedad modificada y vacío respectivamente. Si en la ec. (22) se tiene en cuenta que $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ y seguidamente se reemplaza en ella la forma de H^2 dada en la ec. (21) se obtiene:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} \rho_{\text{eff}} (1 + 3w_{\text{eff}}), \quad (25)$$

donde $w_{\text{eff}} \equiv \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}}$ corresponde a la *ecuación de estado* del *fluido efectivo*. De (25) podemos observar que si $\rho_{\text{eff}} > 0$ entonces cuando $w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ se obtienen escenarios correspondientes a un universo con expansión acelerada descritos por las ecuaciones (21) y (22). A partir de estas ecuaciones se observa que w_{eff} también se puede escribir como

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{3}(2z - 1) \quad , \quad (26)$$

donde z en este caso es la *variable dinámica* que se establecerá en breve.

A diferencia del modelo Λ CDM, las ecuaciones de campo de las teorías $f(R)$ son ecuaciones diferenciales que presentan un alto grado de no linealidad lo que las hace difíciles de manejar, por lo cual es útil tener una herramienta que permita efectuar el estudio de la dinámica cosmológica de estos modelos de manera más sencilla. Con base en esto, a menudo se recurre al análisis del llamado *sistema dinámico* para modelos de gravedad modificada el cual se describirá a continuación. Definiendo las *variables dinámicas* x , y y z , y la fracción de materia oscura fría y bariónica (denotadas en adelante por el subíndice “ m ”) dada por el parámetro de densidad de materia Ω_m , despreciando el contenido de otras especies en el universo, se tiene que

$$x \equiv -\frac{\dot{F}}{HF} \quad y \equiv -\frac{f}{6H^2F} \quad z \equiv \frac{R}{6H^2} = 2 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad \Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2F} \quad , \quad (27)$$

con lo cual la ecuación (13) se puede escribir como

$$1 = x + y + z + \Omega_m \quad , \quad (28)$$

en donde se ha asumido que $\rho_\Lambda = 0$. De la ec. anterior se obtiene:

$$\Omega_m = 1 - x - y - z \quad . \quad (29)$$

Igualmente, se puede apreciar que a partir de la ecuación (28) podemos definir el parámetro de densidad de energía oscura $\Omega_f \equiv x + y + z$ proveniente de la modificación a la gravedad. Derivando cada una de las *variables dinámicas* definidas arriba con respecto a la variable de *e-folding* $N \equiv \ln a$, se obtienen las siguientes relaciones [29]:

$$\frac{dx}{dN} = x^2 - xz - 3y - z - 1 \quad , \quad (30)$$

$$\frac{dy}{dN} = xy + \frac{xz}{m} - 2y(z - 2) \quad , \quad (31)$$

$$\frac{dz}{dN} = -\frac{xz}{m} - 2z(z - 2) \quad , \quad (32)$$

donde $z = r y$, y los parámetros m y r están dados por

$$m \equiv \frac{RF'}{F} = \frac{d(\ln F)}{d(\ln R)} \quad \text{y} \quad r \equiv \frac{z}{y} = -\frac{RF}{f} . \quad (33)$$

Es pertinente notar que el parámetro m no depende explícitamente de r ni de las *variables dinámicas*, y que tanto m como r dependen implícitamente del tiempo a través de la evolución de R . El conjunto de ecuaciones (30), (31) y (32) es llamado *sistema dinámico*, y ayudará a determinar la evolución cosmológica permitiendo saber si el modelo puede describir un universo que pase por una época de dominancia de materia con una duración apropiada para posibilitar la formación de estructuras y luego evolucionar hacia una de expansión acelerada.

Si el conjunto de ecuaciones (30), (31) y (32) se iguala a cero, se tendrá que el *sistema dinámico* se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas acopladas para las variables x , y y z , cuyas distintas soluciones x_c , y_c y z_c corresponderán a los puntos críticos del dicho sistema, es decir, aquellos puntos (x_c, y_c, z_c) donde cada una de las *variables dinámicas* es invariante en el tiempo. Hallando algebraicamente las soluciones al sistema $dx/dN = 0$, $dy/dN = 0$ y $dz/dN = 0$ y reemplazando dichas soluciones en las ecs. (29) y (26) se obtiene [29]:

$P = (x_c, y_c, z_c)$	Ω_m	w_{eff}
$P_1 = (-4, 5, 0)$	0	1/3
$P_2 = (-1, 0, 0)$	2	1/3
$P_3 = (0, -1, 2)$	0	-1
$P_4 = (1, 0, 0)$	0	1/3
$P_5 = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{4m+1}{2(1+m)^2}, \frac{4m+1}{2(1+m)} \right)$	$(2-8m^2-3m)/2(1+m)^2$	$-\frac{m}{1+m}$
$P_6 = \left(\frac{2(1-m)}{(1+2m)}, -\frac{4m-1}{m(1+2m)}, \frac{(1+m)(4m-1)}{m(1+2m)} \right)$	0	$\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{(2(1+m)(-1+4m))}{(m+2m^2)} \right) \right]$

Tabla 1. Puntos críticos, parámetro de densidad de materia y *ecuación de estado* efectiva para el *sistema dinámico* de teorías $f(R)$. Puede observarse que diversas cantidades dependen del valor del parámetro m el cual a su vez depende implícitamente del tiempo a través de R .

Como se observa, varios de estos puntos corresponden (o pueden corresponder dependiendo del valor de m) a épocas de dominancia de radiación ($\Omega_m = 0$ y $w_{\text{eff}} = 1/3$), materia ($\Omega_m \approx 1$ y $w_{\text{eff}} \approx 0$) o energía oscura ($\Omega_m \approx 0$ y $w_{\text{eff}} < -1/3$). Es importante ahora analizar la estabilidad de dichos puntos ante perturbaciones al sector de energía oscura geométrica, es decir sobre las *variables dinámicas* cuya suma corresponde a Ω_f . Siguiendo el formalismo presentado en [20], consideremos pequeñas perturbaciones sobre las *variables dinámicas* en sus puntos críticos, es decir

$$x \rightarrow x_c + \delta x \quad , \quad y \rightarrow y_c + \delta y \quad , \quad z \rightarrow z_c + \delta z \quad , \quad (34)$$

las cuales al reemplazarlas en el sistema de ecuaciones (30), (31) y (32), y recordando que en los puntos críticos se cumple que $(dx/dN)|_{x_c} = 0$, $(dy/dN)|_{y_c} = 0$ y $(dz/dN)|_{z_c} = 0$, dan lugar a

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad , \quad (35)$$

donde $\mathcal{J}$ está dada por

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{dx}{dN})}{\partial x} & \frac{\partial(\frac{dx}{dN})}{\partial y} & \frac{\partial(\frac{dx}{dN})}{\partial z} \\ \frac{\partial(\frac{dy}{dN})}{\partial x} & \frac{\partial(\frac{dy}{dN})}{\partial y} & \frac{\partial(\frac{dy}{dN})}{\partial z} \\ \frac{\partial(\frac{dz}{dN})}{\partial x} & \frac{\partial(\frac{dz}{dN})}{\partial y} & \frac{\partial(\frac{dz}{dN})}{\partial z} \end{pmatrix} \quad , \quad (36)$$

la cual debe evaluarse en los puntos críticos $x = x_c$, $y = y_c$ y $z = z_c$ para hallar posteriormente sus autovalores. La solución a la ec. (35) en los puntos críticos corresponde a

$$\begin{aligned} \delta x &= C_1 e^{j_1 N} + C_2 e^{j_2 N} + C_3 e^{j_3 N} \\ \delta y &= C_4 e^{j_1 N} + C_5 e^{j_2 N} + C_6 e^{j_3 N} \quad , \\ \delta z &= C_7 e^{j_1 N} + C_8 e^{j_2 N} + C_9 e^{j_3 N} \end{aligned} \quad (37)$$

donde j_1 , j_2 y j_3 son los autovalores de $\mathcal{J}$, y las C_i son constantes de integración.

Como puede verse de (37), si $j_1 < 0$, $j_2 < 0$ y $j_3 < 0$, las perturbaciones δx , δy y δz desaparecen a medida que crece el factor de escala, generándose de esta manera un punto crítico estable. Si los autovalores son complejos pero su parte real es negativa, se presenta también un punto estable. Si todos los autovalores son positivos, las perturbaciones crecen indefinidamente a medida que el universo se expande, dándose de esta manera un punto inestable, es decir, aquel donde se alcanza rápidamente dominancia del sector de energía oscura geométrica. Si uno o dos autovalores son positivos, únicamente los términos de la perturbación que los contienen crecen indefinidamente, produciéndose así un punto de silla que permite la evolución hacia otros escenarios cosmológicos.

A partir de lo anterior, analizando la estabilidad de los diferentes puntos críticos presentados en la **Tabla 1**, tenemos que P_3 es un punto interesante ya que genera un universo acelerado de tipo de Sitter ($w_{\text{eff}} = -1$). Los autovalores de $\mathcal{J}$ para este punto son:

$$j_1 = -3 \quad , \quad j_2, j_3 = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - \frac{16}{m}}}{2} \quad , \quad (38)$$

donde m está definido en (33) y se tiene que para el segundo autovalor (j_2) se toma el signo positivo, y para el tercero (j_3) el negativo. Como se observa, el primer autovalor es negativo, y si se da que $0 < m < 1$, los autovalores j_2 y j_3 también son negativos por lo cual P_3 sería un punto estable tipo de Sitter.

Analizando el punto P_5 se observa que este puede generar varios escenarios ya que dependiendo del valor de m la *ecuación de estado* efectiva w_{eff} puede ser mayor o menor que -1 , originando así condiciones tipo *phantom* ($w_{\text{eff}} < -1$) o *quintaesencia* ($-1/3 > w_{\text{eff}} > -1$), y también de dominancia de materia ($w_{\text{eff}} \approx 0$, $\Omega_m \approx 1$) si $m \rightarrow 0$ (cuando $r \rightarrow -1$) donde r está definido en (33). Por su parte, para P_6 es posible encontrar soluciones estables o punto de silla de dominancia de radiación o energía oscura dependiendo del valor de m . P_6 corresponde a escenarios de expansión acelerada $w_{\text{eff}} < -1/3$ si $m < -(1+\sqrt{3})/2$ o $-1/2 < m < 0$ o $m > (\sqrt{3}-1)/2$. Es posible notar que los puntos críticos P_5 y P_6 se caracterizan por cumplir con la relación $m = -r - 1$. Aunque no es una condición, vale la pena anotar que estos dos parámetros dependen explícitamente de la geometría del espacio-tiempo (gravedad modificada) a través de R , $f(R)$ y sus derivadas.

Los autovalores de $\mathcal{J}$ en P_5 son:

$$j_1 = 3(1 + m') \quad ; \quad j_2, j_3 = \frac{-3m \pm \sqrt{m(256m^3 + 160m^2 - 31m - 16)}}{4m(m+1)} \quad , \quad (39)$$

donde $m' \equiv \frac{dm}{dr}$ que puede calcularse a través de $\frac{dm}{dr} = \frac{dm/dR}{dr/dR}$.

Si $|m| \ll 1$, los autovalores en P_5 se pueden escribir aproximadamente como:

$$j_1 = 3(1 + m') \quad ; \quad j_2, j_3 = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m}} \quad . \quad (40)$$

Es posible trazar trayectorias en el plano m vs. r para cada modelo en particular ya que tanto m como r están totalmente determinados por la forma de $f(R)$. Aquellos modelos para los cuales en el plano m vs r su trayectoria se acerque al punto P_5 con $m \rightarrow 0^-$, sus dos últimos autovalores divergen, por lo tanto el sistema no podría permanecer mucho tiempo alrededor de P_5 lo que desfavorece la formación de estructuras durante la época de dominancia de materia. En términos generales, los modelos que se acercan a P_5 con $m < 0$ no son aceptables. Por el contrario, si la trayectoria del modelo se acerca a P_5 con $0 < m < 0.327$, los dos últimos autovalores toman valores complejos con partes reales negativas. En este caso, si el primer autovalor es positivo (lo cual se logra con $m' > -1$), el punto P_5 sería un punto de silla con oscilación amortiguada, lo cual permitiría que el universo llegue a una etapa de dominancia de materia, permanezca algún tiempo en ella y evolucione hacia una época de expansión acelerada como la actual. Como para este punto se cumple que $m = -r - 1$, se tiene que $m > 0$ implica $r < -1$, lo cual se traduciría en que para tener una época transitoria de dominancia de materia se requieren las condiciones $m(r \leq -1) > 0$ y $m'(r \leq -1) < -1$.

Los autovalores de $\mathcal{J}$ en P_6 son:

$$-4 + \frac{1}{m} \quad , \quad \frac{2 - 3m - 8m^2}{m(1 + 2m)} \quad , \quad -\frac{2(m^2 - 1)(1 + m')}{m(1 + 2m)} \quad . \quad (41)$$

Se puede ver que la estabilidad de este punto depende del valor de m y m' cuando la trayectoria del modelo en el plano m vs r llega a P_6 . Si $m \rightarrow \pm\infty$ se tiene $P_6 \approx (-1, 0, 2)$ con $w_{\text{eff}} \rightarrow -1$ que corresponde a escenarios acelerados tipo de Sitter. Si $m' > -1$, P_6 sería un punto estable. P_6 también sería tipo de Sitter si $m(r = -2) = 1$ pero en este caso sería un punto marginalmente estable ya que

uno de sus autovalores valdría cero.

El punto P_6 es estable y acelerado bajo las siguientes condiciones:

1. $m' > -1$ y
 - a) $m < -\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$ con $w_{\text{eff}} > -1$.
 - b) $-\frac{1}{2} < m < 0$ con $w_{\text{eff}} < -7.6$
 - c) $m \geq 1$ con $-1.07 < w_{\text{eff}} \leq -1$. Si $m \rightarrow 1$ o $m \rightarrow +\infty$, P_6 tiende a ser tipo de Sitter.
2. $m' < -1$
 - a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < m < 1$, con $w_{\text{eff}} > -1$

Nótese que para modelos $f(R)$ (despreciando el contenido de radiación) la etapa de expansión acelerada en el punto crítico P_6 **no está descrita** por una *ecuación de estado* en el intervalo $-7.6 < w_{\text{eff}} < -1.07$.

Cualquier modelo cosmológico requiere tener una época de dominancia de materia transitoria (punto de silla) lo suficientemente extensa para permitir la formación de estructuras con una *ecuación de estado* efectiva cercana a cero con el fin de ajustarse a las observaciones de distancia de diámetro de los picos acústicos de las anisotropías observadas en la CMB. La época de materia debe estar seguida por una de expansión acelerada con $w_{\text{eff}} \approx -1$.

3.2. Gravedad modificada y energía de vacío holográfica

A partir del anterior análisis sugerimos en [121] que el sector de *energía oscura* del universo podría estar generado por más de una fuente de diferente naturaleza, en este caso por modificaciones geométricas tipo $f(R)$ y por la inclusión del *principio holográfico* en el cálculo de la densidad de energía del vacío. De este modo, asumiendo que:

- El contenido del universo es principalmente materia (oscura fría y bariónica) y energía del vacío,
- La presión que ejerce la materia a escalas cosmológicas es cero,

- En un espacio-tiempo con métrica *FLRW* y curvatura espacial nula ($K = 0$) el escalar de curvatura está dado por $R = 6(2H^2 + \dot{H})$,
- La energía del vacío es calculada con base en el *principio holográfico* [113, 114, 138, 115, 116, 117, 118, 119], y su densidad toma la forma

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{3}{\kappa^2} F(\alpha H^2 + \beta \dot{H}) \quad , \quad (42)$$

donde a α y β los llamaremos *parámetros holográficos*,

de la ec. (13) se obtiene la siguiente relación para el caso particular del modelo [121] :

$$1 = \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6H^2 F} - \frac{\dot{F}}{HF} + \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2 F} + \alpha + \beta \frac{\dot{H}}{H^2} \quad , \quad (43)$$

la cual, con las *variables dinámicas* definidas en (27) se puede escribir como:

$$1 = x + y + (1 + \beta)z + \alpha - 2\beta + \Omega_m \quad . \quad (44)$$

Como se observa, las variables x, y y z , junto con los parámetros α y β permiten expresar (44) como

$$1 = \Omega_{EO} + \Omega_m \quad , \quad (45)$$

donde $\Omega_{EO} \equiv x + y + (1 + \beta)z + \alpha - 2\beta$ correspondería a la fracción de energía oscura proveniente de la gravedad modificada y la densidad de energía holográfica propuesta.

Ahora, para observar la evolución de dichas *variables dinámicas*, se tiene que después de algún desarrollo matemático (**Apéndice 5**) estas cumplen con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} = x^2 + \left(\frac{\beta}{m} + \beta - 1 \right) xz + (\alpha - 2\beta)x \\ - 3y + (\beta - 2\alpha - 1)z + \alpha - 2\beta - 1 \quad , \quad (46) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dN} = xy + \frac{xz}{m} - 2y(z - 2) \quad , \quad (47)$$

$$\frac{dz}{dN} = -\frac{xz}{m} - 2z(z - 2) \quad , \quad (48)$$

donde, como ya se mencionó, $N \equiv \ln a$, siendo a el factor de escala y m el parámetro definido en (33). Como se mostró en la **Sección 3.2**, si el anterior sistema de ecuaciones (*sistema dinámico*) se iguala a cero, se podrán encontrar los puntos críticos (x_c, y_c, z_c) del mismo, en los cuales cada una de las variables dinámicas es invariante respecto al tiempo, y posteriormente se podrá saber si el modelo puede describir un universo que pase por una época de materia con una duración apropiada para permitir la formación de estructuras y evolucionar hacia una de expansión acelerada. Para determinar la fracción del contenido de materia en los puntos críticos, de (44) se tiene que el parámetro de densidad de materia es:

$$\Omega_m = 1 - x - y - (1 + \beta)z - \alpha + 2\beta \quad . \quad (49)$$

De forma similar a lo descrito en la sección anterior, se calculan los puntos críticos del *sistema dinámico*, y se determina su respectivo valor de Ω_m y w_{eff} a partir de las ecs. (49) y (26):

$P = (x_c, y_c, z_c)$	Ω_m	w_{eff}
$P_1 = (-4, 5 - \alpha + 2\beta, 0)$	0	1/3
$P_2 = (-1, 0, 0)$	$2 - \alpha + 2\beta$	1/3
$P_3 = (0, -1 - \alpha, 2)$	0	-1
$P_4 = (1 - \alpha + 2\beta, 0, 0)$	0	1/3
$P_5 = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right)$	$\frac{(2(1-\alpha) - 2(4+\alpha)m^2 + (3\beta - 4\alpha - 3)m + 3\beta)}{(2(1+m)^2)}$	$-\frac{m}{1+m}$
$P_6 = \left(\frac{2m((1-m) - \alpha(1+m))}{m(1+2m) - \beta(1+m)}, \frac{1-4m - (\alpha - 2\beta)}{m(1+2m) - \beta(1+m)}, \frac{(1+m)((4m-1) + (\alpha - 2\beta))}{m(1+2m) - \beta(1+m)} \right)$	0	$\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{2(1+m)((4m-1) + \alpha - 2\beta)}{[m(1+2m) - \beta(1+m)]} \right) \right]$

Tabla 2. Puntos críticos, parámetro de densidad de materia y *ecuación de estado* efectiva para el *sistema dinámico* de teorías $f(R)$ con energía del vacío holográfica de la forma (42). Se observa como la inclusión de ρ_Λ hace que diversos puntos críticos y sus respectivos valores de Ω_m y w_{eff} dependan no solo de m sino también de los parámetros α y β , dando así la posibilidad de escenarios cosmológicos que no se logran únicamente con $f(R)$.

Varios de estos puntos corresponden a épocas tipo radiación, de dominancia de materia o de energía oscura. Como ya se describió, la estabilidad de cada uno de ellos ante perturbaciones al sector de energía oscura se determina a través de los autovalores del Jacobiano evaluados en cada punto crítico. Por ejemplo, el punto P_3 es un punto interesante ya que genera un universo acelerado tipo de Sitter. Los autovalores de $\mathcal{J}$ en este punto son:

$$j_1 = -3 \quad , \quad j_2, j_3 = \frac{m(\alpha - 3) + 2\beta \pm \sqrt{16m(m(\alpha + 1) + (\alpha - 1)) + (-3m + m\alpha + 2\beta)^2}}{2m} \quad (50)$$

donde para j_2 se toma el signo positivo, y para j_3 el negativo.

Como ya se mencionó, cualquier punto crítico es un atractor (estable) si todos los correspondientes autovalores son negativos. Ya que $r \equiv -\frac{RF}{f} = \frac{z}{y}$, es posible ver que en P_3 se cumple que $r = -\frac{2}{1+\alpha}$, y su estabilidad se logra sí:

$$m < -1 \quad y \quad \alpha < \frac{1-m}{1+m} \quad y \quad \beta \geq \frac{1}{2}m(3 - \alpha) + 2\sqrt{m((1 + \alpha)(1 - m) - 2\alpha)} \quad , \quad (51)$$

$$\text{ó} \quad -1 < m < 0 \quad y \quad \alpha > \frac{1-m}{1+m} \quad y \quad \beta \geq \frac{1}{2}m(3 - \alpha) + 2\sqrt{m((1 + \alpha)(1 - m) - 2\alpha)} \quad , \quad (52)$$

$$\text{ó} \quad m > 0 \quad y \quad \alpha < \frac{1-m}{1+m} \quad y \quad \beta \leq \frac{1}{2}m(3 - \alpha) - 2\sqrt{m((1 + \alpha)(1 - m) - 2\alpha)} \quad , \quad (53)$$

de otra manera es repulsivo (inestable) o transitorio (punto de silla).

Otro punto que puede conducir a escenarios acelerados es el P_6 . Como puede verse, este punto puede ser tipo *quintaesencia*, *de Sitter* o *phantom*, dependiendo

de los valores de m , α y β ($w_{\text{eff}_{P_6}}$ depende de estos tres parámetros). Sus autovalores son:

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{2(1+m')(1+m)((1+\alpha)(1-m)-2\alpha)}{m(1+2m)-\beta(1+m)} , \\ j_2 &= -\frac{2(4+\alpha)m^2+(3+4\alpha-3\beta)m-2(1-\alpha)-3\beta}{m(1+2m)-\beta(1+m)} , \\ j_3 &= \frac{1-4m-\alpha+2\beta}{m} . \end{aligned} \quad (54)$$

La estabilidad de este punto depende de los valores de los parámetros holográficos α y β , y de m y $m' \equiv \frac{dm}{dr}$. Es importante aclarar que usualmente no es posible encontrar una dependencia explícita $m(r)$, de modo que m' se calcula a través de la forma equivalente $\frac{dm}{dr} = \frac{dm}{dR} / \frac{dr}{dR}$ ya mencionada.

P_5 puede ser un punto tipo materia si $m \rightarrow 0$ ($w_{\text{eff}_{P_5}} \rightarrow 0$) y presentar dominancia de materia dependiendo de los valores de m , α y β . Los autovalores de $\mathcal{J}$ en este punto son:

$$j_1 = 3(1+m') , \quad j_2, j_3 = \frac{2m^2\alpha + \beta + m(2\alpha + \beta - 3) \pm \sqrt{A}}{4m(1+m)} \quad (55)$$

donde $A = 4m^4(8+\alpha)^2 + 4m^3[40+2\alpha^2-24\beta+\alpha(33+\beta)] + m^2[4\alpha^2-126\beta+\beta^2+\alpha(84+8\beta)-31] + 2m[\beta^2-15\beta+2\alpha(4+\beta)-8] + \beta^2$.

En el límite $|m| \ll 1$, donde $\omega_{\text{eff}_{P_5}} \rightarrow 0$ corresponde a la EoS de materia, los autovalores se reducen aproximadamente a:

$$3(1+m') , \quad \frac{\beta}{2m} , \quad \frac{2\alpha + \beta - 3}{4} . \quad (56)$$

Si $m \rightarrow 0^-$ y $\beta > 0$, el segundo autovalor de $P_5 \rightarrow -\infty$ pero el tercer autovalor puede ser modificado con los valores de los parámetros holográficos α y β . Si $m' < -1$ y $\frac{2\alpha+\beta}{4} > \frac{3}{4}$, P_5 es un punto de silla con un autovalor positivo no divergente, dando lugar a un punto transitorio que puede conducir a una época de dominancia de materia lo suficientemente larga. La misma situación ocurre si $m' > -1$ sin importar los valores de α y β siempre y cuando no diverjan. Si $m \rightarrow 0^+$ y $\beta < 0$, el segundo autovalor de P_5 es divergente negativo y la existencia

de un punto adecuado (suficientemente largo) de silla tipo materia está determinada por el valor de m' ($m' > -1$ ó $m' < -1$) en el primer autovalor, y por α y β ($2\alpha - 3 > |\beta|$ ó $2\alpha - 3 < |\beta|$) en el tercer autovalor.

Para un modelo con $f(R)$ como única fuente de energía oscura, el punto tipo de Sitter P_3 en el plano m vs. r está siempre localilizado en $r = -2$ y es estable sí $0 < m < 1$. Por otra parte, cuando ρ_Λ se agrega como fuente de energía del vacío, el mismo punto de Sitter se localiza en $r = -\frac{2}{1+\alpha}$ y es estable bajo ciertas condiciones sobre α and β las cuales a su vez dependerán del valor de m , pero ahora para $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Esto muestra que la introducción de ρ_Λ enriquece al punto P_3 ya que en el plano m vs. r puede ser localizado en un rango más amplio de valores de r y ser estable no solamente para $0 < m < 1$. Esto genera la posibilidad de que algunas trayectorias de diversos modelos $f(R)$ viables puedan ahora alcanzar atractores tipo de Sitter para valores de m y r que no dan lugar a escenarios de Sitter estables por fuera del marco holográfico.

En el caso de P_6 (sin introducir energía holográfica) se puede ver que si $m = 1$ entonces $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1$ lo cual corresponde a un escenario de Sitter. Analizando los autovalores de P_6 con este valor de m , dos de ellos son negativos, mientras que el otro es cero, lo que corresponde a una estabilidad marginal. Para tener certeza del comportamiento (estable o de silla) de este punto, es necesario hacer uso del mecanismo de variedad central. Sin embargo, en el marco del *principio holográfico* (ρ_Λ agregada como energía del vacío) este punto puede pasar a ser un atractor con valores apropiados de los parámetros holográficos α y β como puede ser visto en la forma que toman los autovalores.

La línea $m = 0$ en el plano m vs r corresponde al modelo Λ CDM. Es posible ver que, en ausencia de energía holográfica, si $m \rightarrow 0$ entonces P_6 se convierte en un punto singular, y $w_{\text{eff}_{P_6}} \rightarrow \pm\infty$. No obstante, teniendo en cuenta ρ_Λ , el punto P_6 con $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$ deja de ser singular, la *EoS* toma el valor $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1$ recobrándose así el modelo Λ CDM. Adicionalmente, si $\alpha \approx 1$ y $\beta \neq 0$, P_6 es no singular y cuasi-de Sitter.

Otra ventaja de trabajar en el marco holográfico es que si $\alpha = \frac{1-m}{1+m}$ entonces $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1$, logrando de esta forma una solución general tipo de Sitter (para cualquier valor de m excepto $m = -1$) en P_6 lo cual no es posible solo con $f(R)$ como

fuente de energía oscura. También, si

$$\beta = \frac{\frac{1}{3}(6m^2 - 17m - 20\alpha m - 20\alpha + 20)}{1 + m}$$

$$\text{ó } \beta = \frac{\frac{1}{3}(6m^2 + 23m + 20\alpha m + 20\alpha - 20)}{1 + m}, \quad (57)$$

se tiene que la *ecuación de estado* efectiva en el punto P_6 toma los valores $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1.1$ y $w_{\text{eff}_{P_6}} = -0.9$ respectivamente, para cualquier valor de m (excepto $m = -1$), dando soluciones cuasi-de Sitter que son factibles de acuerdo a las observaciones actuales.

Los autovalores de $\mathcal{J}$ en P_6 para la solución de Sitter con $\alpha = \frac{1-m}{1+m}$ son:

$$j_1 = 0, \quad j_2 = -5 + \frac{8}{1+m} + \frac{2\beta(m-3) + 6m}{\beta + (\beta-1)m - 2m^2}, \quad j_3 = 2\left(\frac{1}{1+m} + \frac{\beta}{m} - 2\right), \quad (58)$$

de modo que si

$$\begin{aligned} & m < -1 \text{ y } \beta > \frac{m(1+2m)}{1+m} \\ \text{o } & -1 < m < 0 \text{ y } \beta > \frac{m(1+2m)}{1+m} \\ \text{o } & 0 < m \leq 1 \text{ y } \beta < \frac{10m^3 + 5m^2 + 3m}{3m^2 + 6m + 3} \\ \text{o } & m > 1 \text{ y } \beta < \frac{m(1+2m)}{1+m}, \end{aligned} \quad (59)$$

el segundo y tercer autovalor son negativos con lo cual la solución general tipo de Sitter es marginalmente estable y eventualmente puede conducir a atractores con $w_{\text{eff}} = -1$.

Si el sector de energía oscura está dado únicamente por $f(R)$, la forma de la *ecuación de estado* efectiva vs. m para el punto P_6 se visualiza en la **Figura 1**, pero si se incluye energía del vacío ρ_Λ , toma la forma que se observa en la **Figura 2** y **Figura 3**. Como puede verse, con la inclusión de ρ_Λ la *ecuación de estado* efectiva puede tomar un rango más amplio de valores en el régimen *phantom*, lo

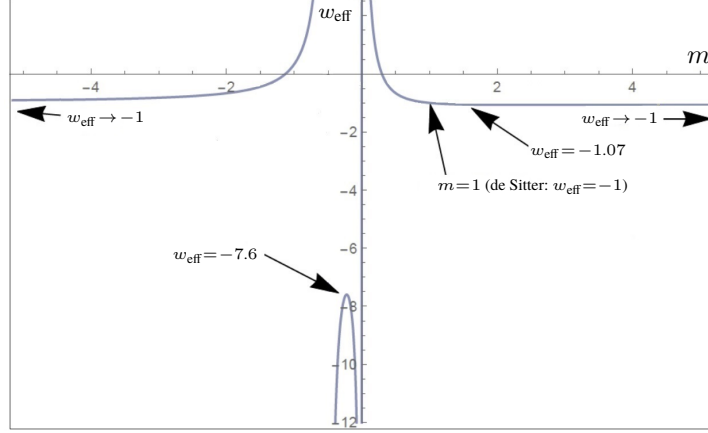


Figura 1: $w_{\text{eff}_{P_6}}$ vs. m en ausencia de densidad de energía de vacío holográfica ρ_Λ para el punto crítico P_6 . Se observa que el escenario tipo *phantom* con $-7.6 < w_{\text{eff}} < -1.07$ no se logra en este punto.

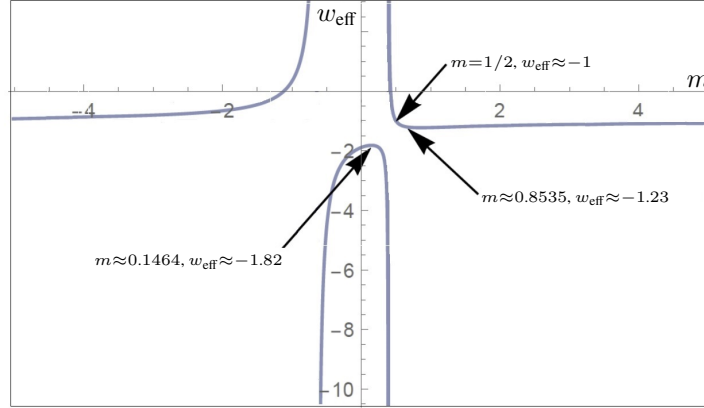


Figura 2: $w_{\text{eff}_{P_6}}$ vs. m con $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Se aprecia que la inclusión de energía de vacío holográfica de la forma propuesta le permite al modelo describir un rango más amplio de escenarios cosmológicos principalmente de tipo *phantom* en el punto P_6 .

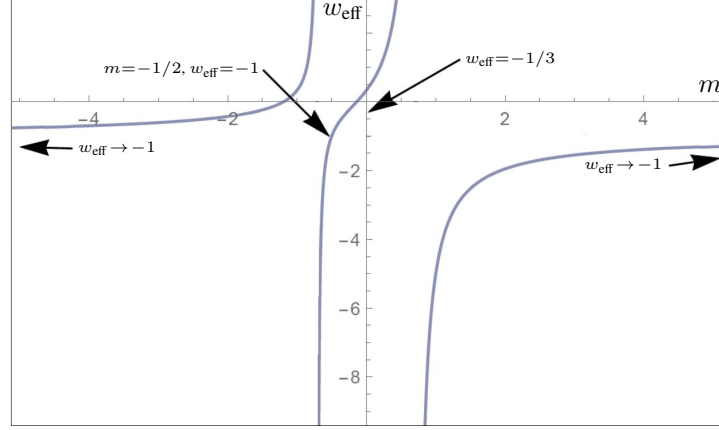


Figura 3: $w_{\text{eff}_{P_6}}$ vs. m con $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. Se observa que la densidad holográfica propuesta le brinda la posibilidad al modelo de describir una gama más amplia de escenarios cosmológicos de tipo *phantom* en el punto crítico P_6 .

cual no sucede con $f(R)$ como única fuente de energía oscura.

En la **Figura 2** ($\alpha = 1/3$ y $\beta = 1/2$), se tiene que si $m' < -1$ entonces P_6 es un punto de silla tipo *phantom* para $-0.640388 \lesssim m < 0$, mientras que si $m' > -1$ entonces es un atractor. Por otra parte, cuando $0 < m \lesssim 0.390388$, P_6 es un punto de silla *phantom* para cualquier valor de m' .

Con $\alpha = 3$ y $\beta = 1$ (**Figura 3**), se tiene que si $m' < -1$ toda la región *phantom* de P_6 , es decir $-0.707107 \lesssim m < -0.5$ y $m \gtrsim 0.707107$, es transitoria (punto de silla), y si $m' > -1$ dicha región es un atractor (punto estable). Igualmente es posible ver que para los valores mencionados de los parámetros holográficos, P_6 puede describir un universo con dominancia de cualquier sector para $-0.707107 \lesssim m \lesssim 0.707107$.

Observemos que en ausencia de ρ_Λ (**Figura 1**), el punto P_6 no tiene la posibilidad de describir escenarios *phantom* con $-7.6 < m < -1.07$, y su carácter y estabilidad dependen únicamente de m' y m .

Volvamos al punto P_3 (tipo de Sitter) incluyendo ρ_Λ , y analicemos su comportamiento para, por ejemplo $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. El segundo y tercer autovalor de $\mathcal{J}$ en este punto - ecs. (50) a (53) - son negativos si $-\frac{1}{2} < m < 0$. Se ve que en

el marco del principio holográfico, un modelo $f(R)$ puede evolucionar desde la región *phantom* transitoria de P_6 ($-\frac{1}{\sqrt{2}} < m < -\frac{1}{2}$, $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$) con $m' < -1$ y $-\infty < w_{\text{eff}_{P_6}} < -1$ hacia el atractor tipo de Sitter P_3 con $r = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} < m < 0$ lo cual no es posible con energía oscura proveniente únicamente de $f(R)$.

Por otra parte, para el punto de materia P_5 es posible ver que si $m \rightarrow 0$ entonces $w_{\text{eff}_{P_5}} \rightarrow 0$, pero $\Omega_{m_{P_5}} \rightarrow \frac{2-2\alpha+3\beta}{2}$, de modo que en el marco holográfico la fracción de materia correspondiente a P_5 depende de los parámetros α y β . En el límite $m \rightarrow 0$, los autovalores en P_5 (sin ρ_Λ) son:

$$3(1+m') \ , \ -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m}}. \quad (60)$$

En este caso, el segundo y tercer autovalor divergen cuando $m \rightarrow 0^-$, uno de ellos siendo positivo y el otro negativo. La divergencia positiva impide que el sistema permanezca suficiente tiempo en la época de dominancia de materia de modo que no permitiría la formación de estructuras tal como las vemos en el universo actual, excepto para un rango muy estrecho de condiciones iniciales. Como se mencionó anteriormente, una era aproximada de materia puede lograrse si $m < 0$ (siempre que no se cumpla $m \rightarrow 0$, aunque estando m relativamente cerca de cero), pero los autovalores toman un valor grande y es difícil encontrar condiciones iniciales para permanecer cerca a P_5 por mucho tiempo. Debido a esto, los modelos $f(R)$ (por fuera del marco holográfico) con $m < 0$ no son aceptables.

Por las anteriores razones, la inclusión de energía de vacío holográfica le brinda la posibilidad a los modelos $f(R)$ de cruzar el punto de materia P_5 con $m \rightarrow 0^\pm$ lo cual no sucede cuando el sector de energía oscura proviene únicamente de $f(R)$ [29]. Para P_5 con $m \rightarrow 0$, diferentes épocas de dominancia de materia pueden lograrse:

$$\begin{aligned} \Omega_{m_{P_5}} &= 1 \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{3}{2}\beta \quad , \\ \Omega_{m_{P_5}} &= 0.9 \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{10} \quad , \\ \Omega_{m_{P_5}} &= 0.8 \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{5} \quad , \\ \Omega_{m_{P_5}} &= 0.7 \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{10} \quad . \end{aligned} \quad (61)$$

Aplicando los anteriores resultados al modelo $f(R)$ de *Hu-Sawicki* [62], para el cual

$$f_{HS} = R - M_s^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{M_s^2}\right)^n}{c_2 \left(\frac{R}{M_s^2}\right)^n + 1} , \quad (62)$$

donde $n > 0$, c_1 y c_2 son parámetros adimensionales, y M_s es una escala de masa dada por $M_s \equiv \frac{\kappa^2 \bar{\rho}_0}{3}$ siendo $\bar{\rho}_0$ la densidad de materia promedio en el universo actual. Si $X \equiv \frac{R}{M_s^2}$, los parámetros r y m toman la forma:

$$r = \frac{c_1 n X^n - X(1 + c_2 X^n)^2}{(1 + c_2 X^n)[X + (c_2 X - c_1)X^n]} \quad (63)$$

$$y \quad m = \frac{c_1 n X^n (1 - n + c_2 (1 + n) X^n)}{(1 + c_2 X^n)[X(1 + c_2 X^n)^2 - c_1 n X^n]} . \quad (64)$$

Ejemplo 1: si $c_1 = 4$, $c_2 = 7$ y $n = 5$, una parte de la trayectoria en el plano m vs r (incluyendo ρ_Λ), está dada en la **Figura 4**. Se observa que si $r \rightarrow -1^-$ entonces $m \rightarrow 0^+$ y $m' \rightarrow 0$, de modo que si $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\beta = -10^{-2}$, los autovalores en P_5 son 3, $-\infty$ y -0.627 , con $\Omega_{m_{P_5}} \approx 0.74$ y $w_{\text{eff}_{P_5}} \rightarrow 0$, que corresponde a un punto de silla asociado a una época de dominancia de materia que puede durar suficiente y favorecer la formación de estructuras. Con los mismos valores de α y β , si $r \rightarrow -1.6^+$ entonces $m \rightarrow 0.6^-$, $\Omega_{m_{P_6}} = 0$ y $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1$. Los autovalores asociados son 0, -2.73 y -2.78 los cuales corresponden a un punto tipo de Sitter marginalmente estable. Esta característica no es posible solo con $f(R)$ donde un escenario de Sitter puede encontrarse únicamente si $r = -2$ para P_3 , y $m = 1$ ó $m \rightarrow \pm\infty$ para P_6 .

Ejemplo 2: Si $c_1 = 3$, $c_2 = 15$ y $n = 2$, la trayectoria parcial en el plano m vs r del modelo (incluyendo energía holográfica) se observa en la **Figura 5**. Para este caso tenemos que si $r \rightarrow -1^+$ entonces $m \rightarrow 0^-$ y $m' < -1$, de modo que si $\alpha = 1.57$ y $\beta = 1$, el primer autovalor de $\mathcal{J}$ en P_5 es negativo, y los otros dos son $-\infty$ y 0.285 respectivamente, con $\Omega_{m_{P_5}} \approx 0.93$ y $w_{\text{eff}_{P_5}} \rightarrow 0$, correspondiente a un punto de silla de época de dominancia de materia que puede ser lo suficientemente extensa. Con los mismos valores de los parámetros holográficos, cuando $r \rightarrow -0.73^-$ se tiene que $m \rightarrow -0.27^-$, entonces $\Omega_{m_{P_6}} = 0$ y $w_{\text{eff}_{P_6}} \approx -1.1$. Los autovalores en este punto son aproximadamente $-\infty$, -3.76 y -9.27 , lo cual está

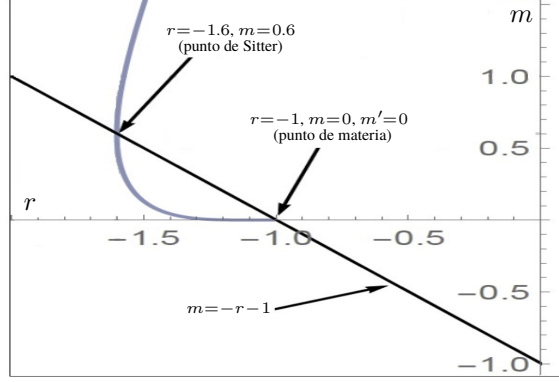


Figura 4: m vs r para $f(R)$ de *Hu-Sawicki* con $c_1 = 4$, $c_2 = 7$ y $n = 5$ incluyendo ρ_Λ con $\alpha = 1/4$ y $\beta = -10^{-2}$. Se puede apreciar cómo la inclusión de la densidad holográfica propuesta le permite al modelo describir escenarios cosmológicos con puntos críticos tipo de Sitter para múltiples valores del parámetro r lo cual no sucede con $f(R)$ únicamente pues en dicho caso el punto de Sitter siempre corresponde a $r = -2$ y sus condiciones de estabilidad son más restringidas.

ligado a un punto estable ligeramente *phantom*. Este comportamiento no es posible con energía oscura proveniente solo de gravedad modificada $f(R)$ ya que en ese caso cuando $m \rightarrow 0^-$ las trayectorias a P_5 no son viables, y para la *ecuación de estado* se tiene que el valor $w_{\text{eff}_{P_6}} = -1.1$ (como límite del universo acelerado actual) no se logra. Los anteriores resultados están publicados en [121].

3.3. $f(R)$ y energía de vacío holográfica con $F \approx 1$

Como caso particular se puede considerar en (42) que $F \approx 1$ debido a la proximidad que debe tener el modelo con ΛCDM , obteniendo así para la energía del vacío una expresión similar a la densidad de energía holográfica propuesta en [119]:

$$\rho_\Lambda \approx \frac{3}{\kappa^2}(\alpha H^2 + \beta \dot{H}) \quad . \quad (65)$$

Por otra parte, diversos modelos viables de gravedad modificada tipo $f(R)$ como fuente de energía oscura pueden ser escritos de forma similar al modelo ΛCDM de la forma:

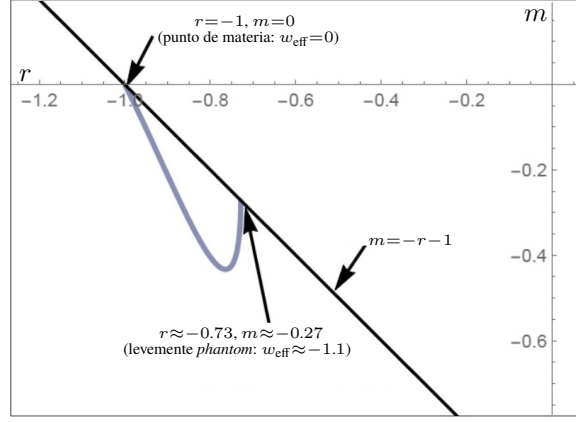


Figura 5: m vs r para $f(R)$ de *Hu-Sawicki* con $c_1 = 3$, $c_2 = 15$ y $n = 2$ incluyendo ρ_Λ con $\alpha = 1.57$ y $\beta = 1$. Se observa que la inclusión de energía holográfica de la forma propuesta le brinda condiciones propicias al punto de materia aun cuando $m \rightarrow 0^-$, evolucionando posteriormente hacia escenarios cosmológicos acelerados.

$$f(R) = R - 2\Lambda y(R, b) \quad (66)$$

como lo proponen *Basilakos et. al* en [122], donde Λ y b son constantes que dependen de los parámetros del modelo $f(R)$. Para el caso del modelo de *Hu-Sawicki*, $y(R, b)$, Λ y b son:

$$y(R, b) = 1 - \frac{1}{1 + (R/(b\Lambda))^n} \quad , \quad \Lambda = \frac{M_s^2 c_1}{2c_2} \quad , \quad b = \frac{2c_2^{1-1/n}}{c_1} \quad , \quad (67)$$

donde $n > 0$, y se tiene que si $b \rightarrow 0$ entonces $y(R, b) \rightarrow 1$, con lo cual $f(R) \rightarrow \Lambda\text{CDM}$. En [122] se plantea entonces la posibilidad de que el parámetro de Hubble (H) asociado a un modelo con energía oscura geométrica proveniente de $f(R)$ sea expresado como una expansión analítica alrededor de $H^2(N)$ para ΛCDM , así:

$$H^2(N) = H_\Lambda^2(N) + \sum_{i=1}^g b^i \delta H_i^2(N) \quad , \quad (68)$$

donde N es la variable de e-folding, g es el grado hasta el cual se desea realizar la expansión en serie, b es un parámetro del modelo al que llamaremos parámetro “correctivo” el cual al tender a cero hace que $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$,

$$\frac{H_{\Lambda}^2(N)}{H_0^2} = \Omega_{m_0} e^{-3N} + \Omega_{r_0} e^{-4N} + (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0}) \quad (69)$$

es la tasa de expansión para el modelo de concordancia, y $\delta H_i^2(N)$ son funciones a calcular después de incorporar (68) en la ecuación de campo (13). El subíndice “0” indica cantidades evaluadas en la actualidad, y los subíndices m y r en este caso representan cantidades asociadas al sector de materia y radiación respectivamente, los cuales no deben confundirse con los parámetros m y r utilizados para el análisis del *sistema dinámico*. Vale la pena observar que para el modelo de *Hu & Sawicki* con $n > 0$, si $b \rightarrow 0$ (ec. (67)) entonces $H^2(N) \rightarrow H_{\Lambda}^2(N)$. La cantidad de términos que se toman en la expansión depende de que tan cerca se requiera estar de la solución numérica para $H^2(N)$ obtenida de la ecuación de campo mencionada con un valor específico de b . Usualmente tomando hasta términos de orden dos en b , es suficiente para obtener una concordancia con la solución numérica mejor que el 0.001 % a cualquier *redshift* para valores de $0.001 \leq b \leq 0.5$.

En este trabajo se plantea entonces una expansión similar de la tasa de Hubble alrededor de Λ CDM para un modelo cosmológico que contenga gravedad modificada tipo $f(R)$ y densidad de energía holográfica de la forma (65), así:

$$H^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + b G_1^2(N) + \mathcal{A} G_2^2(N) + \mathcal{B} G_3^2(N) \quad , \quad (70)$$

la cual es una expansión tipo Taylor a orden uno para $H^2(N)$ alrededor de $b = 0$, $\mathcal{A} = 0$ y $\mathcal{B} = 0$, por lo cual, cuando $b \rightarrow 0$, $\mathcal{A} \rightarrow 0$ y $\mathcal{B} \rightarrow 0$, la expresión propuesta para $H^2(N)$ tiende a ser la tasa de expansión correspondiente a Λ CDM con Λ dado en la ec. (67). En esta expresión, b es el parámetro “correctivo” proveniente de $f(R)$, mientras que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son parámetros “correctivos” asociados a ρ_{Λ} que deben determinarse. Vale la pena aclarar que se califican de “correctivos” ya que su magnitud determina la diferencia entre $H^2(N)$ y $H_{\Lambda}^2(N)$.

La expresión (68) se sugiere por dos razones: 1) Generalmente no es posible hallar una solución analítica para la tasa de Hubble directamente a partir de la ec. (13), la cual entonces se resuelve usualmente de forma numérica. Sin embargo, en diversos cálculos que se realizan con códigos computacionales se requiere una expresión analítica de este parámetro. 2) El modelo de concordancia (Λ CDM) se ajusta con bastante fidelidad a las observaciones actuales, por lo cual es deseable que cualquier modelo cosmológico viable pueda reproducir una tasa de expansión

muy cercana a la del modelo cosmológico estándar. Por estas razones se propone una expansión analítica de $H^2(N)$ alrededor de Λ CDM la cual debe permanecer muy cerca de la solución numérica de la ecuación de campo del modelo propuesto para cualquier *redshift*.

Retomando la expresión (70) se tiene que el parámetro b adquiere la forma mostrada en (67) para el modelo de *Hu-Sawicki*, mientras que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se definen a partir de $\alpha \equiv \alpha_1 + \mathcal{A}$ y $\beta \equiv \beta_1 + \mathcal{B}$, siendo α y β los parámetros holográficos presentes en (65), α_1 y β_1 son constantes que se hallarán a partir de la ecuación de campo (13), y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ actúan como “correcciones pequeñas” sobre estas constantes α_1 y β_1 . Observemos que aunque es lógico asumir que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ de modo que cuando $\mathcal{A} \rightarrow 0$ y $\mathcal{B} \rightarrow 0$ la densidad holográfica tiende a desaparecer, permitiendo así que $\tilde{f}(R)$ se comporte como una constante cuando $b \rightarrow 0$, se quiso proponer la forma general $\alpha \equiv \alpha_1 + \mathcal{A}$ y $\beta \equiv \beta_1 + \mathcal{B}$ para los parámetros holográficos, de modo que sea directamente la ecuación de campo la que determine el valor de α_1 y β_1 cuando $\mathcal{A} \rightarrow 0$ y $\mathcal{B} \rightarrow 0$.

Para hallar (70) introducimos en la ec. (13) la densidad de energía dada por $\rho \equiv \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$, donde en este caso la densidad de materia (oscura fría y bariónica) y radiación en el universo están dadas respectivamente por $\kappa^2 \rho_m = 3H_0^2 \Omega_{m_0} e^{-3N}$ y $\kappa^2 \rho_r = 3H_0^2 \Omega_{r_0} e^{-4N}$, siendo Ω_{m_0} y Ω_{r_0} la fracción de cada una de ellas en el universo actual, H_0 es el valor presente de la tasa de Hubble, y la densidad holográfica ρ_Λ toma la forma (65). Adicionalmente, teniendo en cuenta que la derivada con respecto al tiempo cósmico se puede expresar como $\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dN}$, pasando todos los términos de la ecuación a la derecha y dividiendo entre tres resulta:

$$0 = -f'(R)H^2(N) + H_0^2(\Omega_{m_0}e^{-3N} + \Omega_{r_0}e^{-4N}) + (\alpha H^2 + \beta \dot{H}) + \frac{1}{6}(f'(R)R - f(R)) - f''(R)H^2(N)\frac{dR}{dN} . \quad (71)$$

Después de esto, reemplazando en (71) la forma de $H^2(N)$ propuesta en (70), con $n = 1$ para el modelo de *Hu-Sawicki*, seguidamente expandiendo en serie el lado derecho de la ecuación resultante alrededor de $b = 0$, $\mathcal{A} = 0$ y $\mathcal{B} = 0$ hasta orden uno en estos parámetros, y finalmente igualando a cero el término independiente de la expansión en serie, al igual que los coeficientes de b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de dicha expansión (**Apéndice I**) con el fin de que se satisfaga la ecuación (71) sin importar el valor de b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se obtiene:

$$c = -\frac{6(\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1)}{\Omega_{m_0}} \quad , \quad \alpha_1 = 0 \quad y \quad \beta_1 = 0 \quad , \quad (72)$$

donde $c \equiv c_1/c_2$, siendo c_1 y c_2 los parámetros del modelo de *Hu-Sawicki*, y para $G_1(N)$, $G_2(N)$ y $G_3(N)$ resulta:

$$G_1(N) = [36H_0^2 e^{2N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1)^2 (-6e^N \Omega_{m_0}^2 + 3e^{4N} \Omega_{m_0} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) + 12e^{7N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1)^2 + 4e^{3N} \Omega_{r_0} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - 7\Omega_{m_0} \Omega_{r_0})]^{1/2} / [3\sqrt{2}(4e^{3N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - \Omega_{m_0})^3] \quad , \quad (73)$$

$$G_2(N) = \sqrt{H_0^2 (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0}) + H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m_0}}{e^{3N}} + \frac{\Omega_{r_0}}{e^{4N}} \right)} \quad , \quad (74)$$

$$G_3(N) = \frac{\sqrt{-2 \left(\frac{3H_0^2 \Omega_{m_0}}{e^{3N}} + \frac{4H_0^2 \Omega_{r_0}}{e^{4N}} \right)}}{2} \quad . \quad (75)$$

Con las expresiones anteriores para los $G_i(N)$ que permiten satisfacer la ecuación de campo (71) independientemente del valor de b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se tiene explícitamente una forma analítica para el parámetro de Hubble la cual se puede comparar con la solución numérica obtenida de la ecuación (71). La diferencia porcentual de $H(N)$ a partir de (70) con respecto a la solución numérica mencionada para algunos valores de los parámetros b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se puede observar en las **figuras 6, 7, 8 y 9**. Tengamos en cuenta que para $n = 1$, de (67) se obtiene $c_1 = 2/b$, con lo cual a partir de la forma de c (recordando que $c = c_1/c_2$) dada en (72) se determina el parámetro c_2 , quedando así definidos todos los parámetros del modelo $f(R)$ al establecer un valor para b en la aproximación propuesta. Igualmente, es fácil observar que con (72), al fijar $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, el valor de los parámetros holográficos α y β queda determinado.

Es posible apreciar que cuando los parámetros correctivos $b = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 10^{-4}$ (**Figura 9**), la diferencia entre la solución numérica de $H(N)$ calculada a partir de la componente temporal de las ecuaciones de campo (71) y la expresión analítica propuesta en (70) es de menos del 0.002 % para cualquier $-2 \leq N \leq 0$. Grosso modo se puede determinar de la gráfica mencionada que en el intervalo $-1 \lesssim$

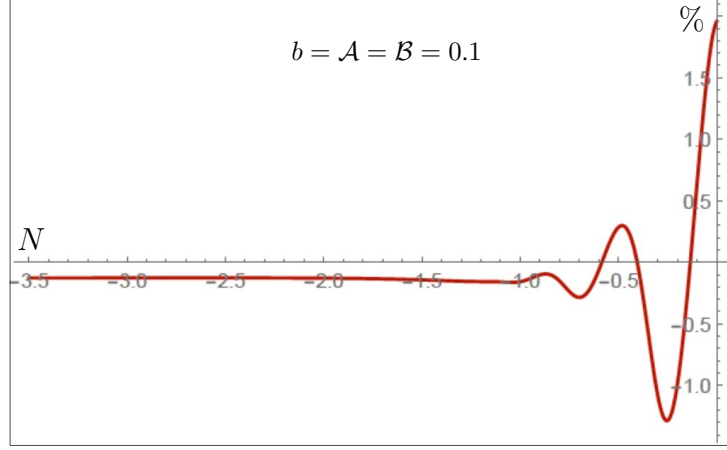


Figura 6: Diferencia porcentual vs. N de la aproximación analítica de $H(N)$ dada por (70) con $b = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0.1$ respecto a su solución numérica para el modelo caracterizado por $f(R)$ de *Hu-Sawicki* (62) con $n = 1$, y ρ_Λ de la forma (65). $N = 0$ corresponde al tiempo presente y cuando $|N|$ aumenta se va hacia el pasado.

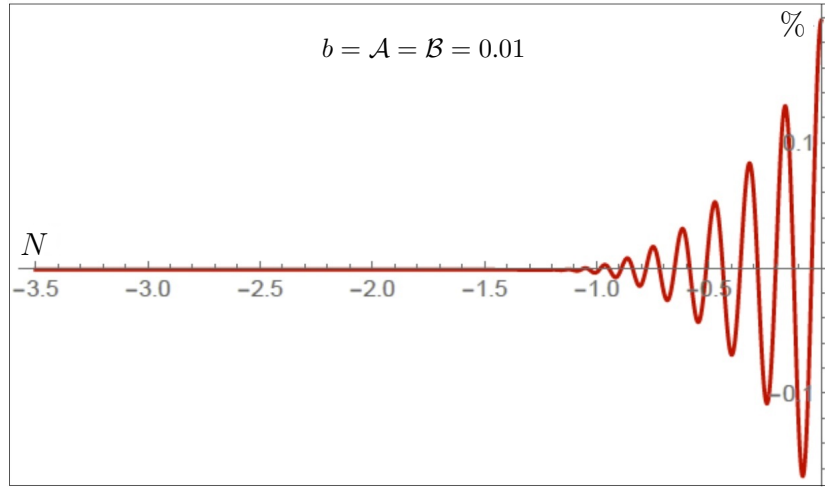


Figura 7: Diferencia porcentual vs. N de la aproximación analítica de $H(N)$ dada por (70) con $b = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0.01$ respecto a su solución numérica para el modelo caracterizado por $f(R)$ de *Hu-Sawicki* (62) con $n = 1$, y ρ_Λ de la forma (65).

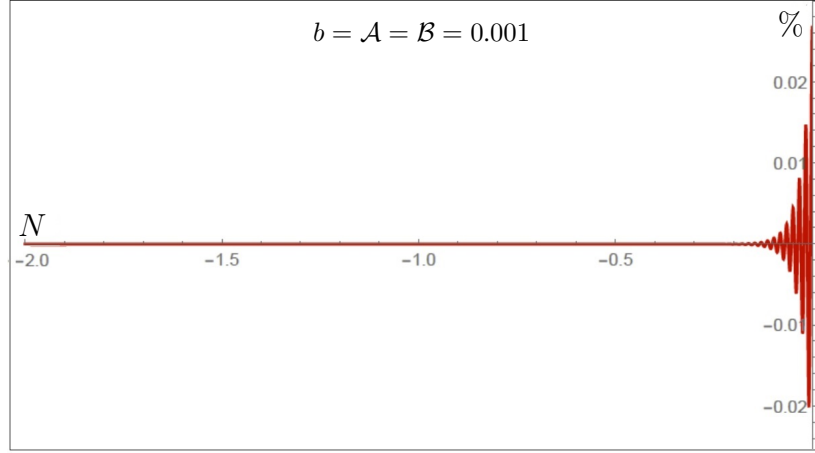


Figura 8: Diferencia porcentual vs. N de la aproximación analítica de $H(N)$ dada por (70) con $b = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0.001$ respecto a su solución numérica para el modelo caracterizado por $f(R)$ de *Hu-Sawicki* (62) con $n = 1$, y ρ_Λ de la forma (65).

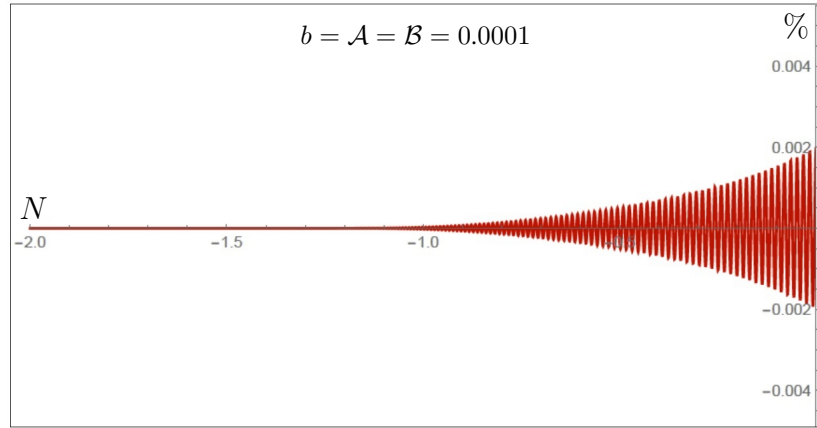


Figura 9: Diferencia porcentual vs. N de la aproximación analítica de $H(N)$ dada por (70) con $b = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 10^{-4}$ respecto a su solución numérica para el modelo caracterizado por $f(R)$ de *Hu-Sawicki* (62) con $n = 1$, y ρ_Λ de la forma (65).

$N \leq 0$ la diferencia porcentual **media** entre ambas soluciones es $\sim \mathcal{O}(10^{-4} \%)$. Igualmente se puede visualizar que para $N \lesssim -1$ la diferencia entre ambas soluciones tiende a cero, por lo cual se estima que la diferencia porcentual media en el rango de *redshift* $0 < z < 30$ es de $\sim \mathcal{O}(10^{-5} \%)$, lo que indica que se requeriría $\mathcal{O}(b, \mathcal{A}, \mathcal{B}) < 10^{-4}$ para lograr una diferencia porcentual media entre ambas soluciones de menos de $10^{-5} \%$ de modo que la solución numérica de la tasa de expansión sea bien aproximada por (70) [124]. Con esto, la aproximación (70) podría utilizarse para hallar expresiones analíticas de diversos parámetros asociados al modelo propuesto que son requeridas para implementar en el código *EFCLASS* [124, 123], entre ellos la densidad y la *ecuación de estado* efectivas para el sector de EOG, las cuales deben identificarse a partir de las ecuaciones (14) y (16) y no de las ecs. (13) y (15). Esto se debe a que el código mencionado está diseñado con ecuaciones que contienen ρ y p en su forma habitual, en lugar de $\tilde{\rho} \equiv \rho/f(R)$ y $\tilde{p} \equiv p/f(R)$ ¹. La diferencia promedio indicada ($< 10^{-5} \%$) para $H(N)$ en el intervalo de *redshift* mencionado, no produce cambios significativos en los resultados del código, ni tampoco perceptibles al compararlos con las observaciones actuales². A partir de la expansión en serie hallada se podrá analizar en próximos estudios el comportamiento de diferentes parámetros cosmológicos al igual que la evolución de perturbaciones y espectros asociados, y efectuar un ajuste de parámetros del modelo con el código mencionado.

Es pertinente aclarar que la solución numérica para la tasa de expansión a partir de la ecuación (71) fue calculada con el software *Mathematica* versión 10.0.0.0 haciendo uso de la función “NDSolve”, dando condiciones iniciales a alto *redshift* estimadas a partir de $H(N)$ del modelo estándar, y utilizando el método de Hermite de orden tres. Para cualquier solución numérica en el presente trabajo se utilizará el mismo software y método numérico, y las condiciones iniciales se determinarán desde el modelo Λ CDM.

Por otra parte, para hallar el *sistema dinámico* del modelo “ $f(R) + \rho_\Lambda + \text{CDM}$ ”, siendo $f(R)$ el modelo de *Hu-Sawicki* y ρ_Λ la densidad holográfica dada en (65), y sus respectivos puntos críticos, se tiene que la ecuación de campo (13) toma la forma:

$$1 = -\frac{\dot{F}}{FH} - \frac{f}{6FH^2} + \frac{R}{6H^2} + \frac{1}{FH^2} \left(\alpha H^2 + \beta \dot{H} \right) + \frac{\kappa^2 \rho}{3FH^2} + \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2} - \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2}, \quad (76)$$

¹Comunicación personal del Dr. Wilmar A. Cardona.

²Comunicación personal del Dr. Wilmar A. Cardona.

La ec. (76) se puede expresar como

$$1 = x + y + z + h + \Omega_m \quad , \quad (77)$$

donde

$$\begin{aligned} x &\equiv -\frac{\dot{F}}{FH} \quad , \quad y \equiv -\frac{f}{6FH^2} \quad , \quad z \equiv \frac{R}{6H^2} \quad , \\ h &\equiv v + \frac{\beta}{F} \frac{\dot{H}}{H^2} + \left(\frac{1}{F} - 1 \right) \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \quad \text{y} \quad \Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \quad , \end{aligned} \quad (78)$$

siendo $v \equiv \alpha/F$, entendiendo que en (77) se ha considerado únicamente el contenido de materia (CDM y bariónica) en el universo. Con la anterior forma de definir las variables dinámicas x, y, z y h , recordando que $\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dN}$, y con los parámetros m y r definidos en (33), se tiene que el *sistema dinámico* está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= -1 - z - 3y + x^2 - xz \quad , \\ \frac{dy}{dN} &= \frac{xz}{m} - y(2z - x - 4) \quad , \\ \frac{dz}{dN} &= -\frac{xz}{m} - 2z(z - 2) \quad , \\ \frac{dh}{dN} &= -vx - \frac{\beta}{\alpha} vxz + 2\frac{\beta}{\alpha} vx + \frac{\beta}{\alpha} v \frac{dz}{dN} + \Omega_m \left(-v\frac{x}{\alpha} + \frac{v}{\alpha} - 2v\frac{z}{\alpha} + 2z - 1 \right) \quad , \end{aligned} \quad (79)$$

el cual ha sido obtenido de forma similar a la descrita en el **Apéndice 5**. Asumiendo $n = 1$ para el modelo (62) e igualando a cero cada una de las expresiones del sistema (79), se obtienen los puntos (x_c, y_c, z_c, h_c) que corresponden a los valores de las variables dinámicas en los cuales cada una de ellas es invariante respecto a la expansión del universo. Dichos puntos críticos son:

$$P_1 : \left(-4, \ 5, \ 0, \ \frac{4(v\alpha - 2v\beta)}{5v - \alpha} \right) , \quad w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} , \quad \Omega_m = -\frac{4(v\alpha - 2v\beta)}{5v - \alpha} ;$$

$$P_2 : \left(-1, \ 0, \ 0, \ \frac{4v - 2\alpha + v\alpha - 2v\beta}{2v - \alpha} \right) , \quad w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} ,$$

$$\Omega_m = 2 - \frac{4v - 2\alpha + v\alpha - 2v\beta}{2v - \alpha} ;$$

$$P_3 : \left(1, \ 0, \ 0, \ \frac{v(\alpha - 2\beta)}{\alpha} \right) , \quad w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} , \quad \Omega_m = -\frac{v(\alpha - 2\beta)}{\alpha} ;$$

$$P_5 : (0, \ -1, \ 2, \ 0) , \quad w_{\text{eff}} = -1 , \quad \Omega_m = 0 ;$$

$$P_6 : \left(\frac{3m}{1+m}, \ -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \ \frac{1+4m}{2(1+m)}, \right.$$

(80)

$$\left. \begin{aligned} & [(-2+3m+8m^2)\alpha + v(4+2m^2(-8+\alpha)+2\alpha \\ & + m(-6+4\alpha-3\beta)-3\beta)] / [2(1+m)^2(2v-\alpha)] \end{aligned} \right) ,$$

$$w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1+4m}{1+m} \right) , \quad \Omega_m = \frac{v(-2(1+m)\alpha+3\beta)}{2(1+m)(2v-\alpha)} ;$$

$$P_7 : \left(-\frac{2(m-1)}{1+2m}, \ \frac{1-4m}{m+2m^2}, \ \frac{4m^2+3m-1}{m(1+2m)}, \right.$$

$$\left. -\frac{2v(m-1)(2m^2\alpha-\beta+m(\alpha+\beta))}{(1+2m)((4m^2+7m-2)v-(6m^2+5m-2)\alpha)} \right) ,$$

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2(4m^2+3m-1)}{m(1+2m)} \right) ,$$

$$\Omega_m = \frac{2v(m-1)(2m^2\alpha+m(\alpha+\beta)-\beta)}{(2m+1)((4m^2+7m-2)v-(6m^2+5m-2)\alpha)} .$$

Si ahora asumimos que las variables a despejar del *sistema dinámico* igualado a

cero son x, y, z, h , y v , se obtienen dos puntos críticos adicionales:

$$\begin{aligned}
P_4 : & \quad (x = 0, \quad y = -1, \quad z = 2, \quad v = \alpha) \quad , \quad w_{\text{eff}} = -1 \quad , \quad \Omega_m = -h \quad ; \\
P_8 : & \quad \left(x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad h = \frac{7}{10}(\alpha - 2\beta), \quad v = \frac{7\alpha}{10} \right) \quad , \quad w_{\text{eff}} = \frac{1}{3} \quad , \\
& \quad \Omega_m = -\frac{7}{10}(\alpha - 2\beta) \quad .
\end{aligned} \tag{81}$$

donde w_{eff} toma la forma dada en la ecuación (26), y Ω_m se ha obtenido de (77) para cada punto crítico. Notemos que en la forma general que adoptan los puntos críticos no es necesario establecer valores específicos para los parámetros del modelo.

Como puede observarse, los puntos P_4 y P_5 son tipo de Sitter, mientras que para los puntos P_6 y P_7 su *ecuación de estado* depende del valor del parámetro m , y su contenido de materia depende de los parámetros v, m, α y β . Los demás puntos son tipo radiación y no se tendrán en cuenta en el presente análisis.

Los parámetros r y m para el modelo de *Hu-Sawicki* dados en las ecuaciones (63) y (64), expresados en función de R con $n = 1$, recordando que en la aproximación propuesta para la tasa de Hubble se tiene que $c \equiv c_1/c_2$ está dado por (72), y que el modelo $f(R)$ en consideración se puede visualizar de (66) y (67), toman la forma:

$$r = \frac{R \left(1 - \frac{2}{b \left(1 + \frac{R}{3bH_0^2(1-\Omega_{m_0}-\Omega_{r_0})} \right)^2} \right)}{R - 6H_0^2(1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0}) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R}{3bH_0^2(1-\Omega_{m_0}-\Omega_{r_0})}} \right)} \quad , \tag{82}$$

$$m = \frac{4R}{3b^2H_0^2(1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0}) \left(1 + \frac{R}{3bH_0^2(1-\Omega_{m_0}-\Omega_{r_0})} \right)^3 \left(1 - \frac{2}{b \left(1 + \frac{R}{3bH_0^2(1-\Omega_{m_0}-\Omega_{r_0})} \right)^2} \right)} \quad . \tag{83}$$

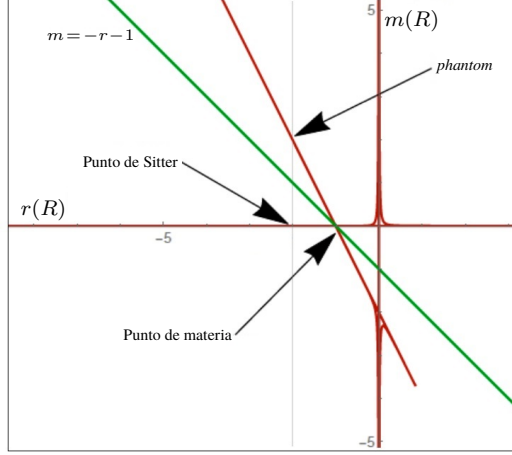


Figura 10: $m(R)$ vs. $r(R)$ con $b = 0.001$, donde la línea roja corresponde a la trayectoria del modelo $f(R)$ de *Hu-Sawicki* bajo la aproximación (70), y la línea verde es la recta $m = -r - 1$. Al incluir ρ_Λ se alcanzan diversos escenarios cosmológicos en los puntos críticos que no son viables en ausencia de esta densidad de vacío, por ejemplo se enriquecen las características del punto tipo *phantom* señalado. Es útil notar que la trayectoria (línea roja) solo depende de $f(R)$ mientras que los parámetros de densidad de materia, la *ecuación de estado* efectiva y la estabilidad de los puntos críticos sí dependen de todos los sectores incluidos en el modelo como son $f(R)$, ρ_Λ y materia.

Ya que las *variables dinámicas* x , y y z definidas en (78) toman la misma forma que en (27), se tiene que:

$$r \equiv -\frac{RF}{f} = \frac{z}{y} \quad , \quad (84)$$

con lo cual se puede establecer el valor de r en cada uno de los puntos críticos hallados para el sistema (79).

En la **Figura 10** se muestra parcialmente la trayectoria del modelo $f(R)$ de *Hu-Sawicki* considerando la aproximación (70) con (72). A pesar de que $b = 0.001$ no permite una precisión suficiente para utilizar (70) en *EFCLASS*, un análisis general de la evolución cosmológica y la estabilidad de los puntos críticos a partir del diagrama m vs. r no requiere tal precisión y puede efectuarse con el valor dado para el parámetro b . Se observa como la línea roja cruza puntos críticos tipo materia, de Sitter y *phantom*, para los cuales su estabilidad depende de los autovalores

del Jacobiano asociado al *sistema dinámico*, que está dado por:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{pmatrix}, \quad (85)$$

donde las componentes J_{ik} del mismo, que toman una forma similar a la mostrada en la ec. (36), fueron halladas con **Mathematica** y se encuentran en el **Apéndice 2**.

Los autovalores de esta matriz en los puntos críticos son $EV1$, $EV2$, $EV3 = ReEV3 + i ImEV3$ y $EV4 = ReEV4 + i ImEV4$, donde $ReEV3$, $ReEV4$, $ImEV3$, $ImEV4$ son las partes real e imaginaria del tercer y cuarto autovalor respectivamente. Las expresiones para $EV1$, $EV2$, $ReEV3$ y $ReEV4$, halladas a través de **Mathematica**, se encuentran en el **Apéndice 3**. Debido a que $EV3$ y $EV4$ son complejos, su parte real será la que determinará la estabilidad de los “puntos de corte” que corresponden al lugar donde la trayectoria del modelo se cruza con los puntos críticos en el diagrama m vs. r .

Como puede observarse, los autovalores de $\mathcal{J}$ en los puntos críticos dependen del valor de m , m' , α y v , por lo cual estos parámetros serán definitivos para determinar si los “puntos de corte” son atractores, repulsores o puntos de silla. A partir de lo anterior se puede analizar, por ejemplo, el punto de dominancia de materia P_6 y el punto de Sitter P_5 indicados en la **Figura 10**, por los cuales pasa la trayectoria del modelo. El punto P_6 es de dominancia de materia si $w_{\text{eff}} \rightarrow 0$ y $\Omega_m \rightarrow 1$ lo cual se cumple si $m \rightarrow 0$ y $v \rightarrow \frac{2\alpha}{4+2\alpha-3\beta}$. Si la energía holográfica se toma como una corrección pequeña al modelo de gravedad modificada del orden de $\mathcal{A} = \mathcal{B} \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ (lo que corresponde a $\alpha = \beta \sim \mathcal{O}(10^{-3})$) entonces $v \sim \mathcal{O}(10^{-4})$. Por otra parte, como ya se mencionó, P_5 es un punto de Sitter exacto con $w_{\text{eff}} = -1$, $\Omega_m = 0$ y $r = -2$.

Es importante recordar que la trayectoria en mención (en el diagrama m vs. r) depende del valor del parámetro b , tal como puede verse de (82) y (83). Teniendo en cuenta la definición de v dada en (78) y utilizando la forma de P_6 dada en (80), se tiene que el primer autovalor del sistema en dicho punto está dado por:

$$EV1_{P_6} = \frac{3m \left(\frac{2}{F} - 1 \right)}{1 + m} . \quad (86)$$

Al “punto de corte” de la trayectoria con el punto de dominancia de materia P_6 en la **Figura 10**, le corresponde un valor de $m \approx 0.0009969$, $m' \approx 0$ y $F \approx 0.9995$. Con $\alpha = 0.001$, $b = 0.001$, $H_0 \approx 70$, $\Omega_{m_0} \approx 0.3$ y $\Omega_{r_0} \approx 0.00005$ se tiene que $EV1_{P_6} \approx 0.002991$. Por otra parte, con los valores dados para los diferentes parámetros en P_6 , se tiene que $EV2_{P_6} = 3$, $ReEV3_{P_6} \approx -0.749$ y $ReEV4_{P_6} \approx -0.749$. Como dos de sus autovalores son positivos y la parte real de los otros dos es negativa, se observa que el “punto de corte” de la trayectoria con el punto crítico P_6 corresponde a un marco transitorio de dominancia de materia lo cual brinda posibilidad al modelo de evolucionar hacia otros escenarios cosmológicos.

Por su parte, al punto P_5 (el cual coincide con la línea $r = -2$ en el plano m vs. r) en el lugar de corte con la trayectoria del modelo, teniendo $b = 0.001$, $A = \alpha = 0.0001$, $B = \beta = 0.0001$, y los mismos valores de H_0 , Ω_{m_0} y Ω_{r_0} mencionados arriba, le corresponden $m \approx 0.0009873$ y $F \approx 0.9995$, de donde, teniendo en cuenta la definición del parámetro v ya dada, se tiene que $EV1_{P_5} \approx 0.001482$, $EV2_{P_5} \approx -3$ y $ReEV3_{P_5} = ReEV4_{P_5} = -\frac{3}{2}$, con lo cual P_5 corresponde a un punto transitorio que le permite al modelo describir un universo que pasa por una época de dominancia de energía oscura temporal.

3.4. Modelo $f(R)$

Para modelar el sector de energía oscura del universo a partir de una sola fuente, se propone el siguiente modelo de gravedad modificada:

$$f(R) = R - M^2 c_1 e^{-\left(c_3 + \left(\frac{R}{M^2}\right)^{-\alpha}\right)^p} , \quad (87)$$

donde c_1 , c_3 , α y p son parámetros del modelo, M^2 es la escala de masa del mismo, y llamaremos a la corrección al término de Einstein-Hilbert $\tilde{f}(R) \equiv \tilde{f} \equiv M^2 c_1 e^{-\left(c_3 + \left(\frac{R}{M^2}\right)^{-\alpha}\right)^p}$. Es pertinente aclarar que en este caso el parámetro α es distinto al utilizado en las secciones anteriores como parámetro holográfico, y el

parámetro p no debe confundirse con la presión.

De $\tilde{f}(R)$ puede observarse que para que (87) tenga la posibilidad de describir un universo cuya componente de energía oscura ejerza una presión negativa dando lugar a una expansión acelerada de tiempo tardío, se requiere $c_1 > 0$. Por otra parte, con $\alpha > 0$ y $p > 0$, se tiene $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$ (siendo $2\Lambda = M^2 c_1 e^{-c_3}$) cuando $R \rightarrow \infty$, y $\tilde{f}(R) \rightarrow 0$ para $R \rightarrow 0$. El primer límite muestra que el modelo se comporta como Λ CDM en el régimen de alta curvatura lo que en la evolución cosmológica correspondería a una época de alto *redshift*, mientras que el segundo límite evidencia que la corrección $\tilde{f}(R)$ se desvanece cuando se tiende hacia un espacio-tiempo plano, lo cual claramente indica que dicha corrección es de naturaleza puramente geométrica. Vale la pena anotar que aunque el término correctivo es de carácter dinámico, se comporta como una constante cosmológica efectiva en tres escenarios distintos: $R \rightarrow \infty$, $\alpha \ll 1$ o $p \ll 1$, los dos últimos siempre que R no tienda a infinito o a cero. De acuerdo a esto, por ejemplo si $\alpha \ll 1$, tendríamos un modelo de dos pasos, es decir, con dos valores diferentes de constante cosmológica efectiva durante distintas etapas de la evolución del cosmos. A pesar de esto, mientras que R no tienda a cero o a infinito, la variación en el valor de la curvatura escalar conduciría a pequeños cambios en el término correctivo $\tilde{f}(R)$ que tendrían influencia en la evolución de las perturbaciones primordiales. Adicionalmente, se puede observar que el modelo propuesto se reduce al segundo modelo planteado en [88] si $c_3 = 0$ y $p = 1$, y también puede notarse que si $p = 1$ independientemente del valor de c_3 , este último parámetro sería absorbido por c_1 al ajustar el modelo para ser muy cercano a Λ CDM a bajo *redshift* con un contenido estimado de energía oscura actual de $\Omega_{DE_0} \approx 0.7$.

A menudo los modelos $f(R)$ con un gran número de parámetros libres tienden a ser desfavorecidos por la crítica ya que dicha característica aparenta ser una estrategia forzada para encajar el modelo a la realidad. Sin embargo, debe haber una cantidad suficiente de grados de libertad en la parametrización del modelo que le brinden versatilidad para explicar diversos fenómenos que pueden observarse a bajo *redshift* [62]. Igualmente, una cantidad moderada de parámetros libres le pueden dar al modelo una “marca” propia que, aún comportándose muy cerca de Λ CDM, le permita diferenciarse de este, principalmente en los indicadores de evolución de perturbaciones y crecimiento de estructuras.

Condiciones básicas de viabilidad:

Los modelos de gravedad modificada deben cumplir diversos requisitos que les permitan describir un universo con una evolución a gran escala que se ajuste a las observaciones, pero también deben pasar rigurosas pruebas de Sistema Solar y evitar patologías indeseables como regímenes de antigravedad, taquiones e inestabilidades ante perturbaciones locales en regiones que tengan fuentes de energía/momentum. Como puede verse de (6) y (21), tener $f'(R) = F < 0$ daría lugar a una constante de acople gravitacional efectiva negativa, lo que se interpreta físicamente como la aparición de rangos de valores de R para los cuales la interacción gravitacional es repulsiva, lo cual se evitaría si $F > 0$. Adicionalmente, a pesar de su problema de *ajuste fino*, la capacidad de Λ CDM para ajustarse a las observaciones sugiere que cualquier modelo alternativo deba imitar de cerca su comportamiento, lo que implica $\tilde{f}'(R) \approx 0$ y esto a su vez $F > 0$. Por otra parte, de la ec. (20) se observa que con $R > 0$ si $F > 0$ y $F'(R) < 0$ se obtiene $m_F^2 < 0$, lo que constituye la aparición de taquiones. De acuerdo a esto, para eludir dicho defecto en el modelo se requiere $0 < F' < \frac{F(R_m)}{R_m}$, recordando que R_m es el valor de curvatura que minimiza V_{eff} que a su vez está dado en (19). El lado derecho de la desigualdad generalmente se logra con facilidad para modelos que pemamecen cerca de Λ CDM pues para estos $F' \ll 1$. La condición $0 < F' \ll 1$ también surge con el fin evitar que la evolución de alguna perurbación a la curvatura escalar dentro de una distribución de materia espacialmente finita crezca incontroladamente dando lugar a una fuerte inestabilidad [49, 24]. De lo anterior, y teniendo en cuenta que $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{f}(R) = \text{constante}$, lo que a su vez supone $\lim_{R \rightarrow \infty} F = 1$, se concluye que F debe ser una función positiva y creciente asintóticamente hacia uno. Para el modelo propuesto tenemos que $f'(R) = 1 - \tilde{f}'(R)$, donde

$$\tilde{f}'(R) = 1 - f'(R) = c_1 \alpha p e^{-(c_3 + y^{-\alpha})^p} y^{-(1+\alpha)} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1} , \quad (88)$$

con $y \equiv \frac{R}{M^2}$.

De (88) se puede ver que para lograr $0 < f'(R) < 1$ se requiere a su vez que $1 > \tilde{f}'(R) > 0$, lo que corresponde a

$$0 < c_1 \alpha p e^{-(c_3 + y^{-\alpha})^p} y^{-(1+\alpha)} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1} < 1 , \quad (89)$$

de donde se aprecia que para $y > 0$, el lado izquierdo de la desigualdad se cumple cuando $c_3 > -y^{-\alpha}$, relación que siempre se satisface si $c_3 > 0$ teniendo $R > 0$.

Sin embargo, debido a la forma funcional que tiene el término del medio en la desigualdad (89), el lado derecho de la misma no posee una solución analítica general, ante lo cual recurriremos a incorporar algunos requerimientos sobre la teoría. Ya se ha mencionado que el modelo de concordancia es altamente consistente con las observaciones [22, 21, 20, 95] lo que sugiere considerar condiciones que le permitan a (87) tener una cercanía importante con Λ CDM. Una de estas, como ya se mencionó es $0 < \alpha \ll 1$, a partir de la cual, como se mostrará mas adelante, se puede efectuar una expansión del modelo propuesto alrededor de $\alpha = 0$ lo que conducirá a

$$c_1 = \frac{6H_0^2(1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0})e^{(1+c_3)^p}}{M^2} . \quad (90)$$

Esta forma de c_1 permite que (87) reproduzca el valor observado de Ω_{DE_0} cuando $\alpha \ll 1$. Por otra parte, se sabe que los extremos de $\tilde{f}'$ se encuentran en las soluciones de $\tilde{f}'' = 0$. Si $c_3 > 0$, una estrategia para satisfacer el lado derecho de (89) es restringir los parámetros de modo que $\tilde{f}' < 1$ en sus máximos, es decir, en los extremos donde $\tilde{f}''' < 0$. Para analizar lo anterior, tenemos que

$$\tilde{f}'' = \frac{c_1 \alpha p A e^{-A} (\alpha p (A - 1) - c_3 (1 + \alpha) y^\alpha - 1)}{M^2 (y + c_3 y^{1+\alpha})^2} \quad \text{con } A \equiv (c_3 + y^{-\alpha})^p . \quad (91)$$

De (91) se observa que, analizando los términos dominantes en cada caso, $\tilde{f}'' = 0$ tiene una solución en $R \rightarrow \infty$, otra en $R \rightarrow 0$, y una tercera solución para curvaturas “intermedias” que surge cuando

$$\alpha p (A - 1) - c_3 (1 + \alpha) y^\alpha - 1 = 0 , \quad (92)$$

ecuación que tampoco tiene una solución analítica general pero que podremos examinar cualitativamente. Se puede observar de (88) que considerando el régimen de curvatura positiva con todos los parámetros del modelo positivos, $\tilde{f}'$ siempre es positiva, lo cual implica que, mirando el comportamiento de los términos dominantes en (88), se tiene $\tilde{f}' \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$, los cuales son valores

límite de curvatura que corresponderían a mínimos de $\tilde{f}'$. Si observamos

$$\tilde{f}''' = c_1 \alpha p M^{-4} (y + c_3 y^{\alpha+1})^{-3} A e^{-A} \left[2 - 3\alpha p (A - 1) + \alpha^2 p^2 (1 - 3A + A^2) - c_3 (1 + \alpha) y^\alpha (3\alpha p (A - 1) + \alpha - 4) + c_3^2 (\alpha^2 + 3\alpha + 2) y^{2\alpha} \right], \quad (93)$$

es posible ver cualitativamente que para la región de curvaturas “intermedias”, con $\alpha, p, c_1, c_3 > 0$ independientemente de su valor, se tiene $\tilde{f}''' < 0$, lo que implica que en dicha región $\tilde{f}'$ presenta un máximo en $y = y_{max}$. Utilizando (90) y escogiendo como escala de masa del modelo la densidad media de materia del universo actual, $M^2 = \kappa^2 \rho_0 = 3H_0^2 \Omega_{m_0}$, se puede observar el comportamiento de $\tilde{f}'$ en la **Figura 11**. Tal como se aprecia, existen los mínimos mencionados cuando $R \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$ y un máximo para un valor intermedio de curvatura y_{max} . Debido a la ausencia de una solución analítica para (92), no es posible hallar una expresión general para R (o y) correspondiente al máximo de $\tilde{f}'$ y por ende, tampoco para el valor de dicho máximo para restringirlo a ser menor que uno. Después de un análisis gráfico exhaustivo para múltiples rangos de valores de los parámetros del modelo, se pudo concluir que no es posible tener una combinación de valores de los mismos que den lugar a $\tilde{f}' \leq 1 \ \forall \ R > 0$ con c_1 dado por (90), lo cual es una característica general de los modelos $f(R)$ con correcciones (al término de EH) exponenciales con potencia negativa que posean los límites $f(R) \rightarrow R - cte.$ cuando $R \rightarrow \infty$ y $f(R) \rightarrow 0$ para $R \rightarrow 0$, y a su vez permanezcan cerca de Λ CDM a lo largo de la historia cósmica.

A pesar de lo anterior, a partir del análisis de puntos críticos de $\tilde{f}'$ y su estudio cualitativo, se pudo caracterizar su comportamiento así:

1) Disminuir el valor de αp hasta un valor específico $(\alpha p)_{crit}$, reduce a su vez el valor del máximo $\tilde{f}'(y_{max})$ y también disminuye el valor de y_{max} . Mientras que la reducción de y_{max} se produce continuamente al disminuir el producto αp incluso por debajo de $(\alpha p)_{crit}$, el valor de su máximo $\tilde{f}'(y_{max})$ solo se reduce hasta alcanzar $(\alpha p)_{crit}$, a partir del cual seguir disminuyendo este producto aumenta el valor de $\tilde{f}'(y_{max})$.

2) Reducir el valor de c_3 hasta un valor específico $(c_3)_{crit}$, tiene un efecto similar, esto es, disminuye el valor tanto de $\tilde{f}'(y_{max})$ como de y_{max} . Si c_3 se sigue disminuyendo por debajo de $(c_3)_{crit}$, el valor de $\tilde{f}'(y_{max})$ se incrementa, pero y_{max} continúa decreciendo.

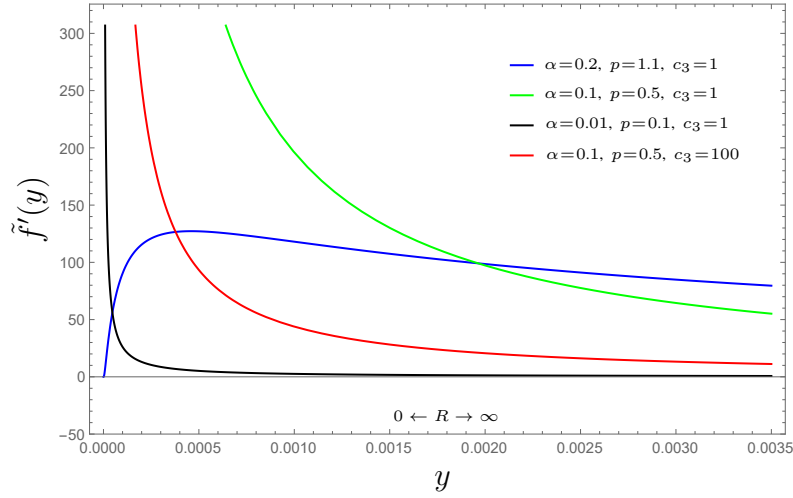


Figura 11: $\tilde{f}'(y)$ para diversos valores de α , p y c_3 . Se aprecian en cada caso dos mínimos donde $\tilde{f}'(y) \rightarrow 0$ para $y \rightarrow \infty$ y $y \rightarrow 0$, y un máximo para un valor intermedio de y denotado y_{max} .

3) Para un valor fijo de αp , aumentar el valor de c_3 hace que $\tilde{f}'(y)$ se acerque a cero más “rápidamente” al aumentar y .

4) Para lograr que $\tilde{f}'(y)$ disminuya su valor considerablemente al aumentar y , logrando que $\tilde{f}'(y) < 1$ desde valores de y cada vez mas pequeños ($y \rightarrow 0$) abarcando así el dominio $R \in (0, \infty)$, favorece reducir el producto αp de modo que $\alpha p \ll 1$. Igualmente, para lograr esto es propicio aumentar c_3 .

Vale la pena aclarar que únicamente en el desarrollo anterior, se tiene que $f'(y)$ corresponde a df/dR escrito en función de la variable y definida con la ec. (88), lo que no debe confundirse con df/dy ; lo mismo sucede para $\tilde{f}'(y)$. Por otra parte, para lograr $f''(R) = -\tilde{f}''(R) > 0$ se requiere que (91) sea negativa, lo cual con $p > 0$ se consigue si

$$\alpha p(A - 1) - c_3(1 + \alpha)y^\alpha - 1 < 0 \quad , \quad (94)$$

lo que se cumple si el primer término de la desigualdad es negativo, es decir $\alpha p(A - 1) < 0$. Esta condición conduce a $c_3 < 1 - y^{-\alpha}$ la cual no se satisface para $y < 1$ con $c_3 > 0$. Otra alternativa para satisfacer (94) es permitir que el primer término a la izquierda de la desigualdad sea positivo, es decir $\alpha p(A - 1) > 0$, pero que a su vez la desigualdad completa sea negativa, lo cual se logra si

1) $c_3 > 1 - y^{-\alpha}$ lo que se satisface si $c_3 > 1 \ \forall \ \alpha > 0$, o si $c_3 \gtrsim 0$ tal que $\alpha \ll 1$ y R no tienda a infinito ,

y

2) $c_3(1 + \alpha)y^\alpha + 1 > \alpha p[(c_3 + y^{-\alpha})^p - 1]$ con $c_3 > 0$, o cuando $c_3 \geq 0$ con $\alpha \ll 1$, $p \lesssim p_{max}$, $p_{max} \sim \mathcal{O}(1)$ y R no tienda a cero.

A partir de esto, teniendo en cuenta la intersección de las condiciones 1) y 2), se observa que una alternativa para lograr $f''(R) > 0$ con $f(R)$ muy cercano a Λ CDM, es tener $c_3 \gtrsim 0$ con $\alpha \ll 1$, $p \lesssim p_{max}$, $p_{max} \sim \mathcal{O}(1)$, y R no tienda a cero ni tampoco a infinito. Para lograr $f''(R) > 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ se requiere únicamente $c_3 > 1$, mientras que para $R \rightarrow 0$ no se logra $f''(R) > 0$, esto debido a que en ese límite de curvatura se tiene que $\tilde{f}'(R)$ siempre tiene un mínimo lo cual hace que al crecer R el valor de $f'(R) = 1 - \tilde{f}'(R)$ disminuya y por ende $f''(R)$ sea negativa. La imposibilidad de cumplir $f''(R) > 0$ cuando $R \rightarrow 0$ es, al igual que para $f'(R)$ como ya se mencionó, una característica de los modelos de energía oscura geométrica cuya corrección al lagrangiano de EH sea de tipo exponencial y tengan como límites $f(R) \rightarrow R - \text{cte.}$ para $R \rightarrow \infty$ y $f(R) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$.

Vale la pena resaltar que con las condiciones establecidas para alcanzar la positividad de $f'(R)$ y $f''(R)$, y con aquellas mencionadas para conseguir la cercanía del modelo con Λ CDM, también se logra

$$f''(R_s) \ll f'(R_s) \ell^2 \quad , \quad \tilde{f}(R_s) \ll R_s \ll 1 \quad , \quad f'(R_s) \sim \mathcal{O}(1) \quad (95)$$

en las soluciones de Sitter del modelo, es decir, en los ceros de la ec. (17) en ausencia de fuentes en los cuales $dH/dt = 0$. En (95) ℓ es la escala característica del sistema “s” estudiado, la cual correspondería en este caso al tamaño del universo observable cuando este se acerque asintóticamente al régimen de Sitter en el futuro, y estaría dada aproximadamente por $\ell \sim H_0^{-1}$, mientras que R_s sería su respectiva curvatura escalar, es decir, la solución a la traza de las ecuaciones de campo sin fuentes. Las condiciones (95) garantizan que el modelo tenga un *límite Newtoniano* [58, 59] adecuado en escenarios con las características mencionadas. Como se verá mas adelante, la primera de las condiciones (95) aplicada a estructuras locales como el Sistema Solar, dará lugar a la restricción $m \ll 1$, la cual a su vez está asociada a $m_F^2 \gg 1$ y sería la condición requerida para que la teoría

pase las pruebas de Sistema Solar, siendo m y m_F^2 dadas por (33) y (20) respectivamente.

Sistema dinámico:

Tal como se mencionó, un análisis interesante de la viabilidad del modelo se puede realizar a través de la evolución de fluctuaciones de energía oscura, lo cual se visualiza en el estudio del *sistema dinámico* asociado. Después de identificar las *variables dinámicas* que son aquellas cuya suma representa el parámetro de densidad del sector de EOG, se puede estudiar la evolución de perturbaciones a cada una de las mismas en las distintas etapas de evolución del universo a través del sistema (37) evaluado en los puntos críticos (ceros) del conjunto de ecuaciones (30), (31), (32). A partir de allí, se pueden esquematizar las diferentes trayectorias cosmológicas en el diagrama m vs. r (con m y r definidos en (33)), es decir, los diferentes caminos evolutivos del universo descritos por el modelo $f(R)$ propuesto, y a su vez caracterizar las diferentes etapas de dominancia de un componente de energía específico.

Como puede verse en la **Tabla 1**, el punto crítico P_5 corresponde a una época de dominancia de materia cuando $m \ll 1$. De acuerdo a la discusión realizada sobre de las ecs. (39) y (40) se tiene que para que el modelo tenga un punto crítico transitorio en la etapa de dominancia de materia se requiere $m \rightarrow 0^+$ y a su vez $dm/dr > -1$ cuando $r \rightarrow -1^-$. Miremos inicialmente para qué condiciones $r \rightarrow -1$. Para esto, escribamos el parámetro r en función de $y = \frac{R}{M^2}$ de esta forma:

$$r = -\frac{1 - \frac{6H_0^2 \alpha p e^{[(1+c_3)^p - A]} y^{-(1+\alpha)} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1} (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0})}{M^2}}{1 - \frac{6H_0^2 e^{[(1+c_3)^p - A]} (1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0})}{M^2 y}}, \quad (96)$$

donde A está dado en (91). A partir de esta ecuación verse que $r = -1$ si el segundo sumando tanto en el numerador como el denominador son iguales, lo que se logra si

$$p\alpha y^{-(1+\alpha)} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow (c_3 + y^{-\alpha})^p = \frac{(c_3 y^\alpha + 1)}{\alpha p}, \quad (97)$$

ecuación que, acogiendo la restricción $\alpha p \ll 1$ con $p \lesssim p_{max}$ y $p_{max} \sim \mathcal{O}(1)$, la cual permite que $0 < f'(R) < 1$ y $0 < f''(R)$ para $R \in (0, \infty)$ y a su vez

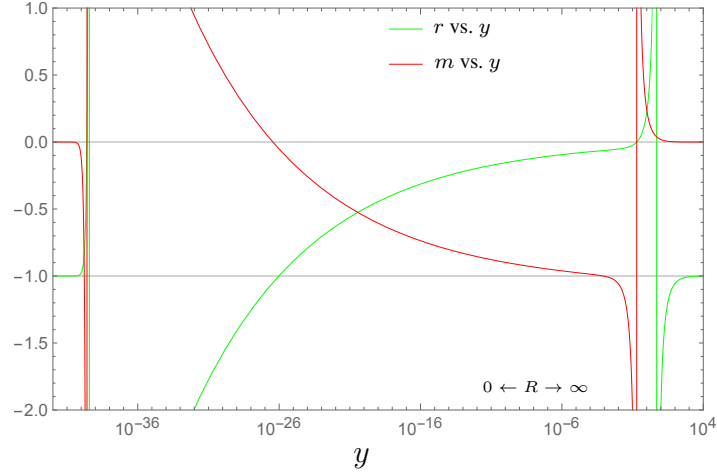


Figura 12: r vs. y y m vs. y para $\alpha = 0.1$, $p = 0.5$ y $c_3 = 0.5$ con $M^2 = 3H_0^2\Omega_{m_0}$ y c_1 dado en (90). Se observa que $r \rightarrow -1^+$ para $R \rightarrow 0$, y $r \rightarrow -1^-$ para $y \gg 1$, en este caso $y \approx 10^4$. También se puede ver que $m \rightarrow 0^+$ para $y \gg 1$.

hace al modelo muy cercano a Λ CDM, tiene solución para $R \rightarrow 0$, el cual no es un escenario realista de dominancia de materia. Otra opción que permite $r \rightarrow -1$ es cuando el segundo sumando tanto en el numerador como denominador de (96) son mucho menores que uno, lo que se logra para $y \gg 1$ ($R \gg M^2$) la cual sí es una tendencia realista para la curvatura escalar en la época de dominancia de materia. Por su parte, el parámetro m toma la forma:

$$m = -\frac{c_1\alpha p A(\alpha p(A-1) - c_3(1+\alpha)y^\alpha - 1)}{(1 + c_3y^\alpha)(e^A y(1 + c_3y^\alpha) - c_1\alpha p A)} . \quad (98)$$

En la **Figura 12**, aunque el producto αp no es tan pequeño (lo cual se hizo a propósito para una mejor visualización gráfica) con el fin de lograr una cercanía con el modelo estándar para un amplio rango de valores de curvatura, sí se aprecia el comportamiento mencionado para r . Igualmente se observa que, a pesar de que m no es tan cercano a cero para todo y , sí se hace muy pequeño para los valores de y en los que $r \rightarrow -1^-$ dando lugar de esta manera a un punto crítico de dominancia de materia.

Por otra parte, como no es posible encontrar una forma explícita de la función $m(r)$ para el modelo propuesto, el comportamiento de dm/dr en el punto de ma-

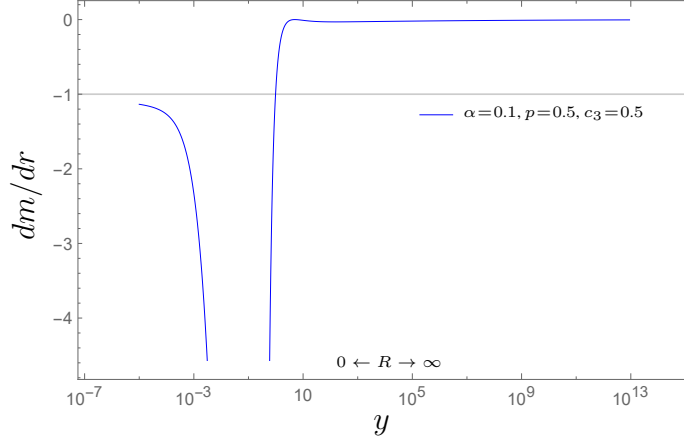


Figura 13: $\frac{dm}{dr}$ vs. y para $\alpha = 0.1$, $p = 0.5$ y $c_3 = 0.5$ con $M^2 = \kappa^2 \rho_{m_0}$. Para $\alpha p \ll 1$ se logra fácilmente la relación $dm/dr > -1$ en un punto de materia dado alrededor de $y \sim \mathcal{O}(10^4)$.

teria se analiza a través de $\frac{dm}{dr} \equiv m' = \frac{dm/dy}{dr/dy}$ como se mencionó anteriormente. A partir de la expresión hallada no es posible encontrar una solución analítica para $m' > -1$, condición necesaria para que el punto de materia sea transitorio, por lo tanto recurrimos a un diagnóstico gráfico detallado con el fin de encontrar condiciones que permitan cumplir la restricción dada por esta desigualdad.

Después de un análisis minucioso del comportamiento de dm/dr para múltiples rangos de valores de los parámetros del modelo, se obtuvo que $\alpha p \ll 1$ garantiza el cumplimiento de $m' > -1$ para $R > R_1$ ($y_1 = R_1/M^2 \sim \mathcal{O}(10^0)$) donde $R_1 \sim M^2$ corresponde a un valor de curvatura alrededor del cual se presenta una asíntota vertical para dm/dr , permitiendo de esta manera que bajo la condición mencionada sobre αp se logre $m' > -1$ cuando $r \rightarrow -1^-$ y $m \rightarrow 0^+$. Aumentar el valor de cualquiera de los parámetros del modelo hace que dicha asíntota se presente para valores de $R > R_1$ y eventualmente la aparición de una segunda asíntota vertical en R_2 ($R_2 > R_1$) alrededor de la cual se presentan rangos de curvatura donde no se cumple $dm/dr > -1$, lo cual es desfavorable. Tengamos en cuenta que para las conclusiones obtenidas sobre el comportamiento de m' no se ha exigido que $p \lesssim p_{max}$ con $p_{max} \sim \mathcal{O}(1)$ lo cual sí se requiere para lograr la positividad de $f''(R)$.

Analicemos ahora bajo qué condiciones el punto P_3 tipo de Sitter (**Tabla 1**)

es estable para el modelo (87). Tal como se vió en la discusión posterior a la tabla mencionada, el punto en cuestión se ubica en $r = -2$, y es estable cuando $0 < m \leq 1$. El parámetro r dado en (96) puede verse como

$$r = -\frac{1 - \alpha p B y^{-\alpha} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1}}{1 - B} \quad \text{con} \quad B \equiv c_1 e^{-A} y^{-1} \quad , \quad (99)$$

donde A toma la forma dada en (91), por lo tanto, en $r = -2$ la ec. (99) resulta

$$B + \frac{1}{C - 2} = 0 \quad \text{con} \quad C \equiv \alpha p y^{-\alpha} (c_3 + y^{-\alpha})^{p-1} \quad , \quad (100)$$

ecuación que no tiene solución analítica (para y o alguno de los parámetros del modelo) por métodos tradicionales. Efectuando un análisis gráfico detallado de la solución de $B + (C - 2)^{-1} = 0$ con c_1 dado en (90), tenemos que surgen tres “ceros” de la ecuación en mención, correspondientes al punto de Sitter $r = -2$, uno de ellos se presenta en $R = R_1$ donde $R_1 \ll \kappa^2 \rho_{m_0}$ ($R_1 \rightarrow 0$ si $\alpha \ll 1$), lo que se asocia a un escenario muy cercano a Minkowski; otra solución se da para una curvatura $R = R_3$ donde $R_3 > \kappa^2 \rho_{m_0}$, y una última solución se presenta en $R = R_2$ donde $R_1 < R_2 < R_3$. Modificar los valores de los parámetros aumenta o reduce el valor de las soluciones pero no cambia su cantidad ni características generales ya descritas. Vale la pena mencionar que las curvaturas asociadas a escenarios de Sitter halladas en este análisis, son las mismas correspondientes a la solución de (17) en el vacío.

Como sabemos, el punto de Sitter en $r = -2$ es estable si $0 < m \leq 1$ (de lo contrario es transitorio excepto para $m = 0$ donde no está definido su carácter), constituyendo de esta manera un “atractor” en el cual confluyen todas las trayectorias solución al *sistema dinámico* (30), (31) y (32). De (98) con c_1 dado por (90), puede verse que cuando $R \rightarrow \infty$ (o incluso para $y \gg 1$ si no se cumple $\alpha \ll 1$), tanto el numerador como el denominador de la expresión son positivos y tienden a ∞ , pero los términos dominantes de la misma estarían en el denominador por lo que, si para $r = -2$ (o similarmente para $B + (C - 2)^{-1} = 0$ como se observa en la **Figura 14**) la curvatura $R = R_3$ cumple con $R_3 \rightarrow \infty$ (o $R_3 \gg \kappa^2 \rho_{m_0}$ si no se cumple $\alpha \ll 1$), entonces se logra que $m \rightarrow 0^+$ teniendo de esta manera un punto estable. De la expresión para m también se puede observar que para el punto de Sitter con $R = R_1 \rightarrow 0$ (o incluso con $R = R_1 \ll \kappa^2 \rho_{m_0}$ mientras α no sea $\ll 1$), el numerador siempre es negativo mientras que el denominador (donde se

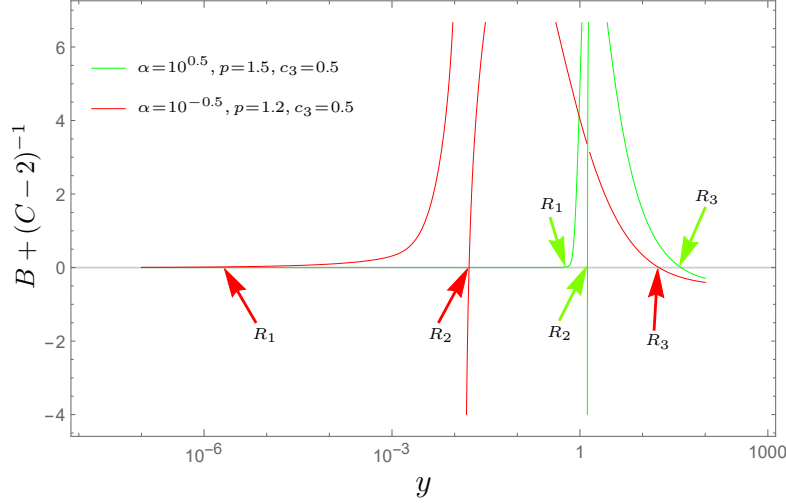


Figura 14: $B + (C - 2)^{-1}$ vs. y con $M^2 = 3H_0^2\Omega_{m_0} = \kappa^2\rho_{m_0}$, c_1 dado por (90), y A , B y C definidos en (91), (99) y (100) respectivamente. Los ceros (señalados por las flechas en la gráfica) de esta ecuación, corresponden a las tres soluciones de Sitter del modelo correspondientes a $r = -2$.

encuentra el término dominante e^A de la expresión en este caso) siempre es positivo. Dicho término dominante cumpliría en este caso con $e^A \rightarrow \infty$ por lo cual $m \rightarrow 0^-$ impidiendo así que el punto sea estable.

Como no es posible hallar una expresión analítica para y ni para alguno de los parámetros del modelo a partir de (100) que pueda ser utilizada en la expresión para m (98), acudimos a examinar gráficamente el comportamiento de m cuando $r = -2$.

Del análisis gráfico exhaustivo (**Figura 15**) se pudo concluir que:

1) Si $p > 1$, sin importar el valor de α , aumentar el valor de c_3 es “desfavorable” para los puntos de Sitter con curvaturas R_2 y R_3 pues a partir de un valor específico de c_3 dejarían de ser estables. En este caso se tiene que $m \rightarrow 0^+$ solo para $R \gg R_3$.

2) Si $p \leq 1$, el punto de Sitter con curvatura R_3 siempre es estable, mientras que la estabilidad del punto con curvatura intermedia R_2 dependería del valor de α y c_3 . Si α aumenta, el punto con $R = R_2$ deja de ser estable a partir de algún

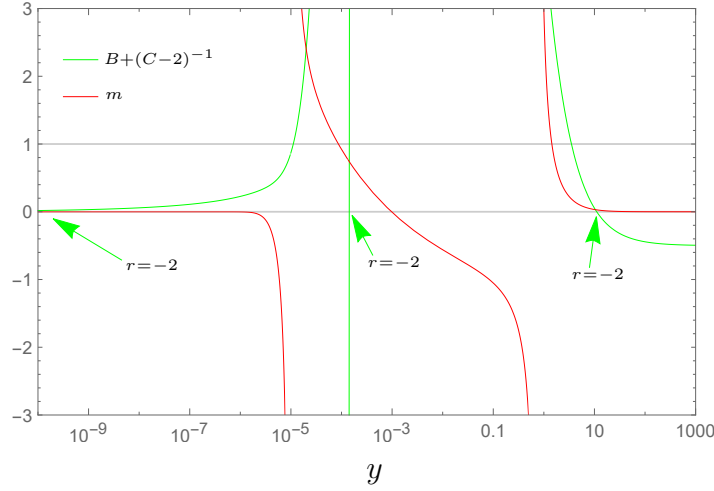


Figura 15: $B + (C - 2)^{-1}$ vs. y y m vs. y con $M^2 = 3H_0^2\Omega_{m_0} = \kappa^2\rho_{m_0}$, c_1 dado por (90), A , B y C definidos en (91), (99) y (100) respectivamente, y $\alpha = 10^{-0.1}$, $p = 0.3$ y $c_3 = 1$. Los puntos señalados por las flechas corresponden a las tres soluciones (curvaturas) de Sitter del modelo en las cuales $r = -2$ (o equivalentemente $B + (C - 2)^{-1} = 0$), y su respectivo valor de m (línea roja) determina la estabilidad del punto crítico en cada una de ellas.

valor de α , pero el punto con curvatura R_3 sigue siendo estable. Si c_3 aumenta, a partir de cierto valor el punto con $R = R_2$ pierde la estabilidad aunque aquel con curvatura R_3 sigue siendo estable.

3) El punto de Sitter con curvatura R_1 siempre es transitorio pues allí $m \rightarrow 0^-$.

4) Si el punto con curvatura R_2 no es estable con $m > 1$, reducir el valor de c_3 o de p le permite lograr la estabilidad a partir de un valor específico de alguno de estos parámetros, mientras que cambiar el valor de α en este caso no modifica el carácter de estabilidad del punto. Si el punto es inestable con $m < 0$, reducir el valor de p o α , ambos por debajo de uno, le permite alcanzar la estabilidad al punto a partir de cierto valor de cualquiera de estos dos parámetros, mientras que aumentar c_3 cuando el punto ya ha adquirido la estabilidad al reducir p o α , le quita la estabilidad (haciendo $m > 1$) a partir de un valor específico de c_3 .

5) La conclusión anterior implica que para $\alpha p \ll 1$ con $p < 1$, los puntos de Sitter con curvatura R_2 y R_3 son estables excepto si $c_3 \gg 1$.

Vale la pena resaltar que durante todo el tratamiento analítico y gráfico anterior (excepto para el estudio inicial de $f'(R)$ donde se consideraba que podría darse $c_3 > -1$ cuando $\alpha \ll 1$ salvo en los límites $R \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$), se ha asumido la positividad de todos los parámetros del modelo. Por otra parte, como puede observarse en varias de las gráficas mostradas, se han tenido en cuenta valores de α que no cumplen con $\alpha \ll 1$ lo cual aparentemente contrastaría con la condición a partir de la cual se calculó la forma de c_1 utilizada en los análisis anteriores. Sin embargo, aunque el usar valores de α que no cumplen con la condición mencionada se ha hecho con el propósito de visualizar con mayor facilidad diversos detalles de las funciones graficadas, igualmente se ha verificado que esto no influye significativamente en el comportamiento general de dichas funciones y las conclusiones obtenidas siguen siendo válidas incluso utilizando (90). Como dato adicional, pudo establecerse durante la caracterización del modelo realizada hasta ahora que aumentar el valor de α o p lo acerca considerablemente a Λ CDM para valores de curvatura distantes de $R = M^2$, pero cerca de $y = 1$ lo induce a regímenes de antigravedad lo cual es claramente indeseable.

En la **Figura 16** se observan algunas trayectorias cosmológicas del modelo propuesto en el diagrama m vs. r en las cuales se aprecia que para ciertas combinaciones de valores de los parámetros, este imita el comportamiento del modelo de concordancia, evolucionando desde una etapa transitoria de dominancia de materia con $R \gg M^2$ hacia una época estable de dominancia de energía oscura geométrica con curvatura constante.

Aproximación analítica de la tasa de expansión H :

Como se indicó anteriormente, la expresión para c_1 que se ha venido utilizando se obtuvo a partir de una aproximación analítica de la tasa de expansión del universo cuando (87) tiene proximidad con el modelo estándar. Dicha aproximación se efectuó como una serie de potencias alrededor de $\alpha = 0$, aunque también podría haberse hecho alrededor de $p = 0$, pero esta opción se deja para una investigación posterior. Cuando $\alpha \rightarrow 0$ podemos hacer uso de la expansión (68) la cual sigue la propuesta realizada en [122], donde el parámetro b correspondería en ese caso a α así:

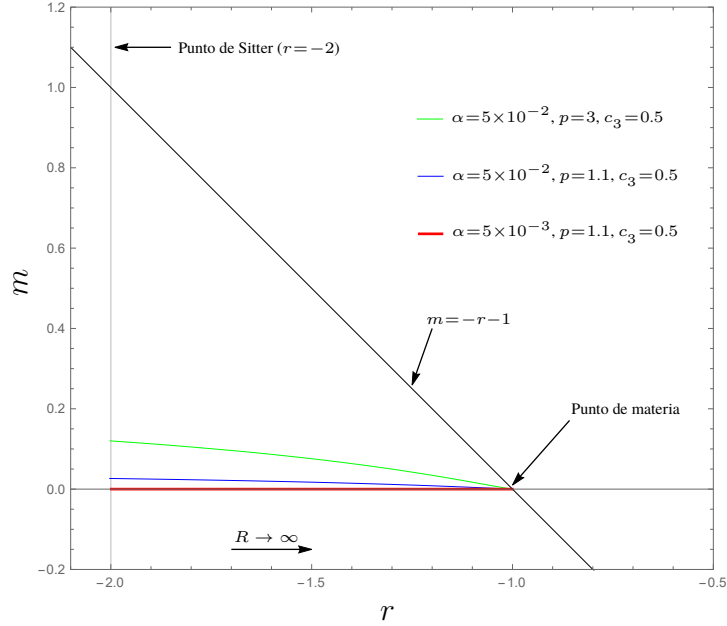


Figura 16: Diversas trayectorias en el diagrama m vs. r para el modelo (87) con distintas combinaciones de valores de los parámetros. Se observa la cercanía con Λ CDM ($m \rightarrow 0$) cuando p y α reducen su valor.

$$H^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + \sum_{i=1}^g \alpha^i \delta H_i^2(N) \quad . \quad (101)$$

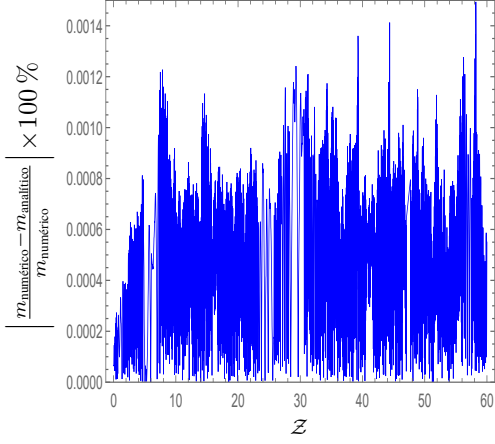
A partir de la expresión anterior se siguió un procedimiento similar al desarrollado desde la ec. (71), pero sin considerar energía de vacío holográfica y en lugar del modelo de *Hu-Sawicki* se tuvo (87) como modelo de gravedad con α como único parámetro de expansión en serie. La idea general es incorporar la expresión (101) en la ecuación de campo temporal (13) para teorías de gravedad modificada, pasando todos los términos a un solo lado de la expresión e igualando a cero. Seguidamente se la expande en serie alrededor de $\alpha = 0$ y cada uno de los coeficientes de las potencias de α en dicha expansión se iguala a cero para que la ecuación se satisfaga independientemente del valor de α . Del coeficiente de α a orden cero (término independiente) se obtuvo c_1 (90), el cual, reemplazándolo en el coeficiente del término a orden uno e igualando a cero permitió obtener $\delta H_1^2(N)$, y así sucesivamente hasta el orden que se desee tomar en (101). La expresión analítica aproximada a orden uno en α para la tasa de expansión asociada al modelo propuesto, lograda con ayuda de *Mathematica*, está dada en el **Apéndice 4**.

Es importante advertir que el parámetro m que se ha venido utilizando para el análisis de puntos críticos y su estabilidad respecto a un modelo $f(R)$ específico, también puede ser considerado como un parámetro de desviación que permite diferenciar diversos modelos de EOG entre sí, con respecto a Λ CDM, o para contrastarlos con las observaciones. Diferencias pequeñas en el valor de m a bajo *redshift* tendrían impacto en el comportamiento de parámetros asociados a la evolución de fluctuaciones en el sector de materia como lo es por ejemplo la tasa de crecimiento de perturbaciones. De acuerdo a esto, utilizaremos a m como un parámetro de desviación para comparar la expresión analítica (A.8) con la solución numérica de la tasa de Hubble hallada a partir de la ec. (13) en un rango de *redshift* que permita dar certeza de la cercanía suficiente entre ambas.

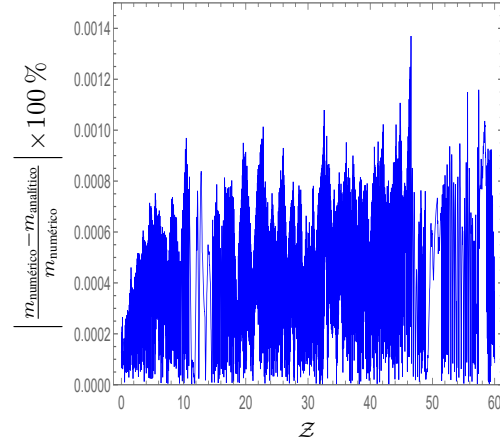
Como se observa en la **Figura 17**, para $\alpha \sim \mathcal{O}(10^{-5})$ y $p \sim \mathcal{O}(1)$, la diferencia porcentual máxima entre los valores de m calculados a partir de la solución numérica (hallada a través de *Mathematica*) y la aproximación analítica (A.8) es $\sim \mathcal{O}(10^{-4})\%$ en época profunda de dominancia de materia pero se reduce a bajo *redshift*. Igualmente se puede apreciar que al aumentar c_3 alrededor de cuatro órdenes de magnitud, el porcentaje promedio de diferencia entre ambas versiones de m disminuye en el intervalo $0 < z < 60$. Para el caso de la **Figura 18** se tiene que la diferencia promedio entre la solución numérica y la aproximación analítica de $H(z)$ es menor que $10^{-5}\%$ en el intervalo $0 < z < 30$ para los valores propuestos de α, p y c_3 , lo cual es suficiente para no afectar de manera consistente (comparando con el nivel de precisión de las observaciones actuales) los cálculos de diversos parámetros cosmológicos, evolución de indicadores asociados a perturbaciones y los espectros provenientes de las mismas, permitiendo así que la solución numérica de la ecuación (13) (o (14)) sea bien aproximada por (A.8) [124], la cual podría entonces ser utilizada en *EFCLASS*, siempre y cuando, tal como ya se explicó en la **Sección 3.3**, la densidad y presión asociadas al *fluido efectivo* de EOG sean identificadas a partir de (14) y (16) respectivamente.

Ajuste de c_3 con datos de Planck2018:

Habiéndonos asegurado que (A.8) es lo suficientemente cercana a la solución numérica para diversos rangos de valores de los parámetros del modelo requeridos para dar cumplimiento a las restricciones ya estudiadas, podemos utilizar la expresión analítica de $H(z)$ para estimar la evolución de diversos parámetros cosmológicos.

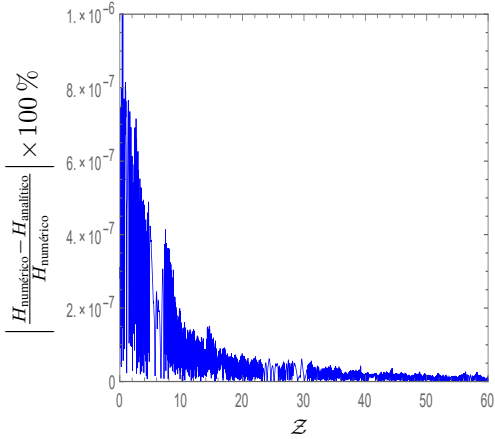


a) $\alpha = 5 \times 10^{-5}, p = 1.1, c_3 = 0.5$

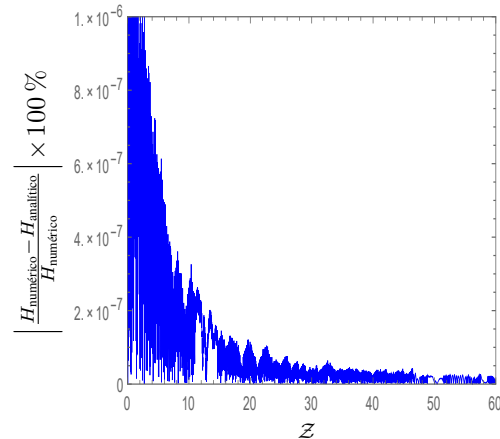


b) $\alpha = 5 \times 10^{-5}, p = 1.1, c_3 = 10^3$

Figura 17: Diferencia porcentual entre el parámetro de desviación m hallado a partir de la solución numérica de $H(z)$ y el calculado a partir de la aproximación analítica (A.8) vs. *redshift*. Se observa que aumentar el valor de c_3 (derecha) disminuye el porcentaje promedio de diferencia entre ambas versiones de m en el intervalo $0 < z < 60$.



(a) $\alpha = 5 \times 10^{-5}, p = 1.1, c_3 = 0.5$



(b) $\alpha = 5 \times 10^{-5}, p = 1.1, c_3 = 10^3$

Figura 18: Diferencia porcentual entre la solución numérica y la aproximación analítica (A.8) de $H(z)$ vs. *redshift*. La diferencia porcentual media entre las dos versiones de $H(z)$ en el intervalo $0 < z < 30$ es aproximadamente $1.4 \times 10^{-7} \%$ para el caso de la figura a) y $1.75 \times 10^{-7} \%$ para la b), lo que le permite a la aproximación analítica (101) ser apta para implementar en *EFCLASS*.

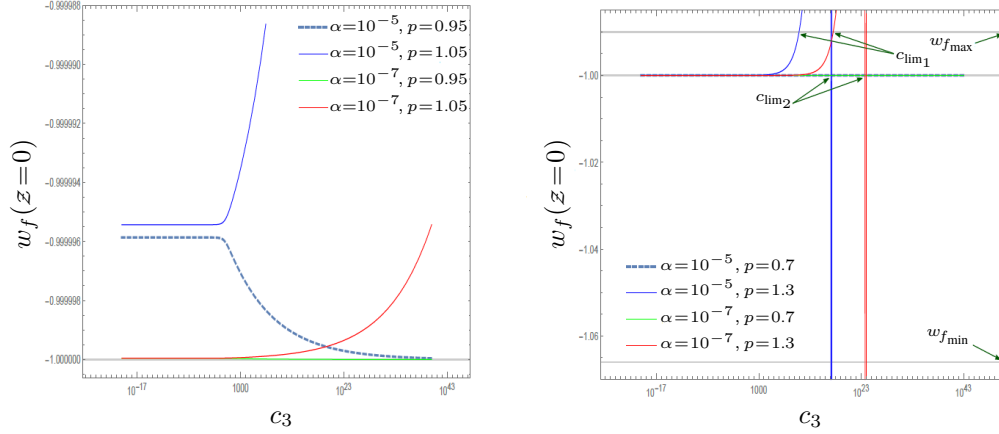


Figura 19: $w_f(z=0)$ vs. c_3 para diversos valores de α y p donde $w_{f_{\max}} = -0.99$ y $w_{f_{\min}} = -1.066$ corresponden respectivamente a los valores máximo y mínimo de la *ecuación de estado* de EOG en $z=0$ estimados en *Planck2018* [8]. Se observa que el modelo puede describir un régimen *phantom* en la actualidad cuando $c_3 \approx c_{\text{lim}2}$.

gicos. Antes de eso, haremos un ajuste “rústico” de alguno de los parámetros del modelo, utilizando el resultado plasmado en la ecuación (50) de [8] que establece $w_{f_0} = -1.028 \pm 0.038$. Teniendo en cuenta que la *ecuación de estado* del sector de EOG en el marco de *fluido efectivo* [124], el cual se detallará mas adelante, puede ser escrita como

$$w_f \equiv \frac{p_f}{\rho_f} = -1 - \frac{2H\dot{F} - 2\ddot{F} + 4\dot{H}(1-F)}{(RF - f) - 6H\dot{F} + 6H^2(1-F)} , \quad (102)$$

podemos fijar el valor de dos de los parámetros, por ejemplo p y α , y a partir de la restricción observacional dada en [8] sobre w_f en $z=0$, estimar un rango de valores aceptable para c_3 .

Como se observa en la **Figura 19**, para $\alpha \ll 1$ y $p \leq 1$, el modelo es muy cercano a Λ CDM para todo valor de c_3 . Si $\alpha \ll 1$ y $p > 1$, la restricción de *Planck2018* se cumple para $c_3 < c_{\text{lim}1}$, donde $c_{\text{lim}1} \gg 1$. Igualmente, para un rango muy estrecho de valores de c_3 centrados alrededor de $c_{\text{lim}2}$, donde $c_{\text{lim}2} > c_{\text{lim}1}$, se cumple con la restricción observacional de [8] sobre la EoS de $f(R)$ y a su vez el modelo puede generar un comportamiento *phantom* en $z=0$. De lo anterior se concluye que, con los valores asumidos para α y p , el parámetro c_3 está “débil-

mente” restringido por el valor de $w_f(z = 0)$ dado por *Planck TT,TE,EE+lowE+lensing+SNe+BAO* presentado en [8].

Evolución de parámetros cosmológicos:

Después de haber establecido la anterior restricción sobre c_3 , podemos ahora mirar el comportamiento de $w_f(z)$, $w_{\text{eff}}(z)$ y $\Omega_f(z)$ para el modelo (87) en las **figuras 20, 21 y 22**. En el marco de *fluido efectivo*, las ecuaciones de campo (13) y (15) se reescribirían como

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \frac{1}{2}(RF - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F) \quad , \quad (103)$$

y

$$(2\dot{H} + 3H^2) = - \left[\kappa^2 p + 2H\dot{F} + \frac{f - RF}{2} + \ddot{F} + (2\dot{H} + 3H^2)(F - 1) \right] \quad , \quad (104)$$

que corresponden a las ecs. (14) y (16) respectivamente. Estas expresiones tienen una forma similar a las ecuaciones de Friedmann tradicionales, teniendo al lado derecho de cada una las variables que en el modelo de fluido perfecto permiten establecer la *ecuación de estado* del mismo, estas son ρ_{eff} en la componente temporal (103) y la presión p_{eff} en la componente espacial (104) respectivamente. En este caso, ρ_{eff} y p_{eff} contienen los términos usuales ρ y p para los sectores de materia y radiación, pero adicionalmente incluyen términos puramente geométricos provenientes de la modificación a la gravedad. La suma de los términos de materia, radiación y los geométricos constituirían una densidad y presión asociadas a un *fluido efectivo* compuesto por estos tres sectores el cual cumple con la ecuación de conservación usual $\dot{\rho}_{\text{eff}} + 3H(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}}) = 0$. De acuerdo a esto, en (103) y (104) pueden indentificarse fácilmente la densidad y presión tanto del *fluido efectivo* en su totalidad como las del sector de energía oscura geométrica en particular, a partir de las cuales (26) puede ser reescrita como

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -1 + \frac{\kappa^2(\rho + p) - H\dot{F} + \ddot{F} + 2\dot{H}(F - 1)}{\kappa^2 \rho + \frac{1}{2}(RF - f) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F)} \quad , \quad (105)$$

y la *ecuación de estado* w_f para el sector proveniente de la modificación a la gravedad estaría dada por (102). La fracción de energía Ω_f asociada a la EOG tomaría la forma

$$\Omega_f \equiv \frac{\kappa^2 \rho_f}{3H^2} = \frac{\left(RF - f + 6H^2 \left(1 - F - \frac{\dot{F}}{H} \right) \right)}{6H^2} . \quad (106)$$

Las expresiones que acabamos de definir, junto con la aproximación analítica (A.8), permitirán hallar los espectros de temperatura, polarización y de materia asociados al modelo $f(R)$ propuesto a partir del código *EFCLASS* [124, 123], aunque en el presente trabajo solo se incluirá y analizará el espectro de materia.

Vale la pena aclarar que en las gráficas presentadas se han asumido, donde ha sido necesario, los valores $\kappa^2 = 1$, $H_0 = 70 \text{ km/s /Mpc}$, $\Omega_{m_0} = 0.3$, $\Omega_{r_0} = 5 \times 10^{-5}$, c_1 dado por (90) y $H(z)$ ha tomado la forma de la aproximación analítica (A.8).

Restricciones de Sistema Solar:

Hasta ahora se ha observado que bajo algunas restricciones sobre el modelo planteado, este puede describir la dinámica cosmológica con buena precisión y a su vez evitar las inestabilidades mencionadas y lograr un *límite Newtoniano* adecuado en escenarios de Sitter. Igualmente se ha podido observar que los tres parámetros libres α , p y c_3 le han dado alguna versatilidad, permitiéndole tener características propias que podrían validarse o descartarse en observaciones futuras, como por ejemplo en el comportamiento de $w_f(z)$. Sin embargo, los modelos de gravedad modificada en general se enfrentan a retos más exigentes como lo son las pruebas de Sistema Solar. Como se mencionó, en estructuras locales cuya curvatura es baja comparada con la que se asume tuvo el universo en alto *redshift*, pero que a su vez tienen una densidad media que es varios órdenes de magnitud mayor que la del *background* cosmológico actual, por ejemplo el Sistema Solar, la Relatividad General ha sido corroborada con suficiente precisión, de modo que cualquier modelo $f(R)$ debe imitar el comportamiento de la teoría de Einstein en estos sistemas. Tal como se indicó previamente, la primera de las condiciones (95) aplicada al Sistema Solar constituye una restricción definitiva requerida por el modelo para comportarse de manera similar a la RG dentro de la estructura local.

Démonos cuenta que la masa del escalarón m_F^2 definida en (20) puede ser escrita en términos del parámetro de desviación $m = RF'/F$ así:

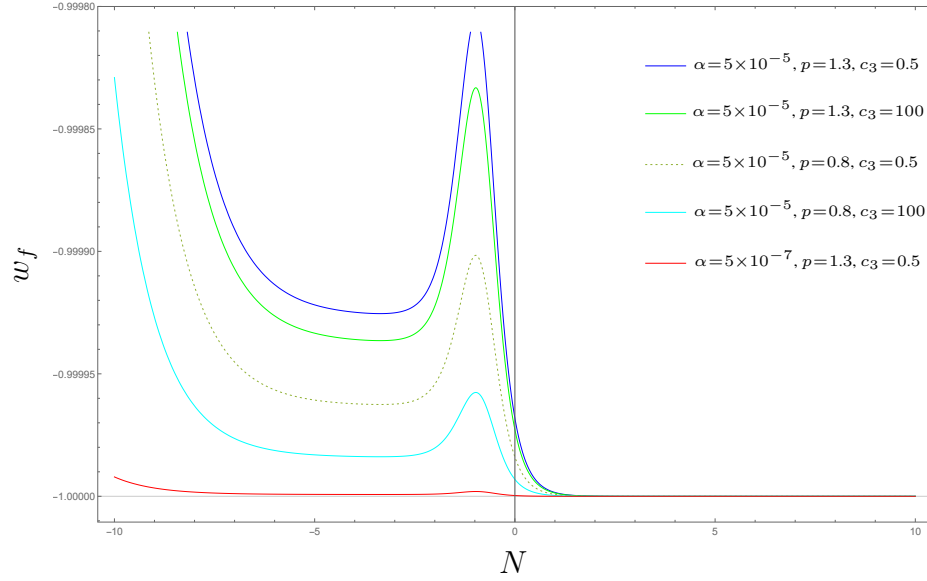


Figura 20: w_f vs. e -folding para diversos valores de α , p y c_3 . Se observa que todos los casos convergen a $w_f = -1$ en el futuro ($N > 0$). Disminuir α y/o p , y/o aumentar el valor de c_3 hace que $w_f \rightarrow -1$ (de Sitter) para $z > 0$ ($N < 0$).

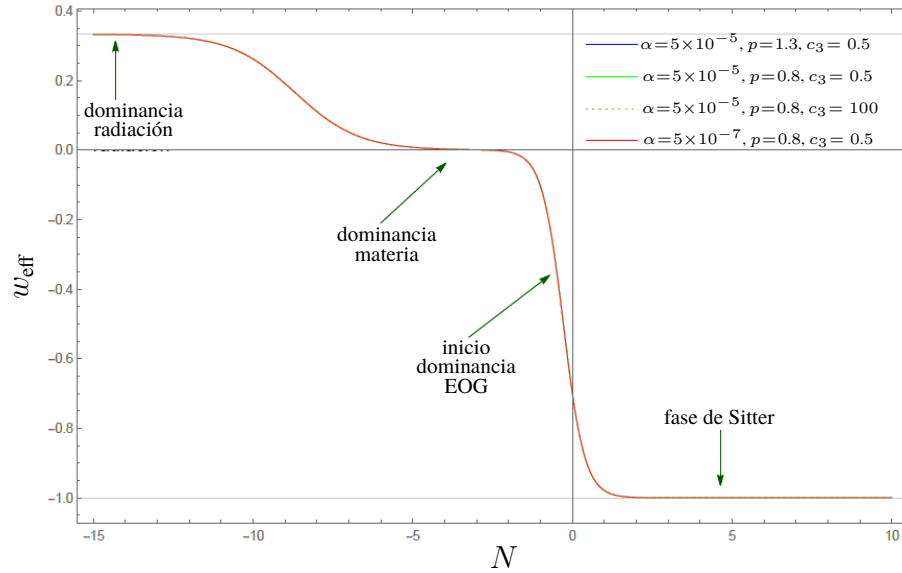


Figura 21: w_{eff} vs. e -folding para diversos valores de α , p y c_3 . Para $\alpha \ll 1$, el modelo (87) reproduce fielmente la historia cosmológica del universo. Se observa como las diferentes combinaciones de valores de parámetros generan una evolución similar de w_{eff} .

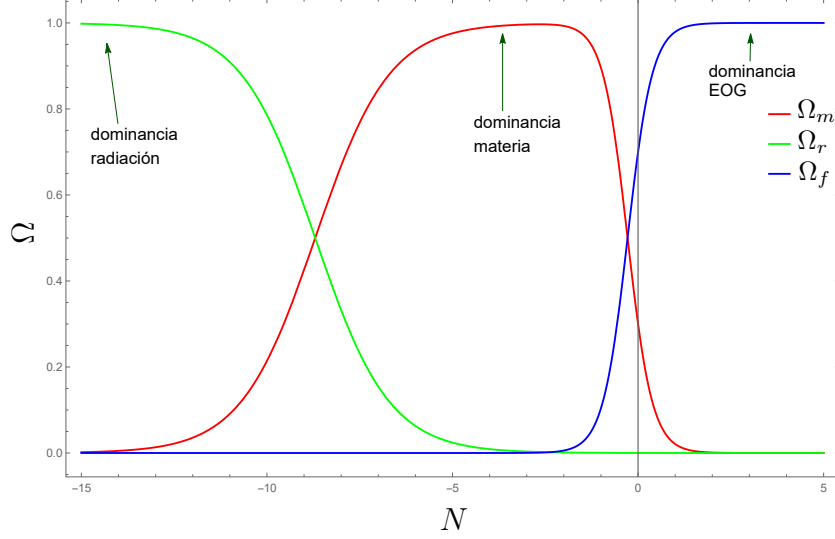


Figura 22: Ω vs. e -folding para los sectores de materia, radiación y EOG con $\alpha = 5 \times 10^{-5}$, $p = 0.7$ y $c_3 = 0.5$. Se observa que el modelo (87) describe un universo que evoluciona hacia una fase de Sitter estable.

$$m_F^2 = \frac{R}{3m}(1 - m) \quad , \quad (107)$$

la cual, si $m \ll 1$, es decir, si el modelo de gravedad adquiere una cercanía importante con la RG, se puede aproximar como

$$m_F^2 \approx \frac{R}{3m} = \frac{F}{3F'} \approx \frac{1}{3F'} \quad , \quad (108)$$

donde en la última relación a la derecha se ha tenido en cuenta que la proximidad con la RG implica $F \simeq 1$. Tengamos presente que en este contexto el valor de R utilizado para calcular m_F^2 corresponde a aquel que minimiza $V_{F_{\text{eff}}}(F)$ en presencia de materia, donde $V_{F_{\text{eff}}}(F)$ está definido en (19), y tal valor correspondería a una curvatura $R = R_m \approx R_s$ siendo R_s la curvatura media de la estructura local, la cual se asume aproximadamente constante. Adicionalmente, notemos que si $m \ll 1$, a partir de (107) o (108) se tiene que la masa asociada al *escalarón* cumple con $m_F^2 \gg 1$.

Observemos que de las dos primeras relaciones en (108) y teniendo en cuenta

la primera condición para lograr un adecuado *límite Newtoniano* en escenarios tipo de Sitter (95) pero aplicada a sistemas locales se obtiene

$$m_F^2 \ell^2 \approx \frac{F \ell^2}{3F'} \Rightarrow m_F^2 \ell^2 \gg 1 \Rightarrow R_s \ell^2 \gg m(R_s) , \quad (109)$$

la que constituiría la condición requerida sobre el modelo $f(R)$ para pasar pruebas de Sistema Solar. En el universo actual se tiene $R_0 \sim H_0^2 \approx 8\pi G \rho_0$ de donde $8\pi G \approx H_0^2/\rho_0$ o también $\rho_0 \approx H_0^2/(8\pi G)$. Similarmente, a partir de las ecuaciones de campo, cuando comportamiento de la gravedad es muy cercano a como lo describe la RG en el sistema local analizado se tiene que $R_s \approx 8\pi G \rho_s$. De lo anterior y teniendo presente (109) resulta [91, 88]:

$$R_s \approx \frac{H_0^2}{\rho_0} \rho_s \Rightarrow m(R_s) \ll \frac{\rho_s}{\rho_0} \left(\frac{\ell_s}{H_0^{-1}} \right)^2 . \quad (110)$$

Para el Sistema Solar se tiene que $\rho_s \sim 10^{-23} \text{g/cm}^3$ y $\ell_s \sim 10^{13} \text{cm}$, y para el universo $\rho_0 \sim 10^{-29} \text{g/cm}^3$ y $H_0 \sim 10^{-28} \text{cm}^{-1}$, a partir de lo cual $m(R_s) \ll 10^{-24}$ sería requisito necesario para que el modelo $f(R)$ imite de cerca a la teoría de gravedad de Einstein en el Sistema Solar. De la ec. (98) se observa que si R no tiende a cero, y teniendo presentes las condiciones que permiten $f' > 0$ y $f'' > 0$, el término dominante de la expresión, que corresponde a αp y se encuentra en el numerador, hace que $m \ll 1$ siempre que $\alpha \ll 1$ y $p \lesssim p_{max}$ con $p_{max} \sim \mathcal{O}(1)$.

Tal como se ha visto, el acople que $p \neq 1$ produce entre c_3 , α y R impide en la mayoría de los casos que las restricciones sobre el modelo puedan resolverse de forma analítica en su totalidad, teniendo que recurrir a análisis numéricos o gráficos; el estudio del comportamiento del parámetro m en regímenes de Sistema Solar no es la excepción. Haciendo uso de (90) se puede observar de la **Figura 23** que para lograr $m(R_s) \ll 10^{-24}$ se requiere que $\mathcal{O}(\alpha p) < 10^{-21}$ con $p \leq 1$ para cualquier valor de c_3 o que se cumpla $\frac{\alpha p}{c_3} \lesssim 10^{-22}$ siempre y cuando $p \lesssim 10^{-1}$. Lo anterior implica que si $p \sim \mathcal{O}(1)$, se necesita $\alpha < 10^{-21}$ sin importar el valor de c_3 . Se observa igualmente que para $\alpha \ll 1$, si $p < 1$ aunque no se cumpla $\mathcal{O}(\alpha p) < 10^{-21}$, se tiene que a partir de algún valor de $c_3 \gg 1$ se logra $m(R_s) < 10^{-24}$. Por ejemplo, con $\alpha = 5 \times 10^{-15}$ y $p = 10^{-2}$, si $c_3 \gtrsim 2 \times 10^5$ se obtiene $m(R_s) \lesssim 10^{-27}$. Es importante resaltar que en estudio anterior siempre se tuvo presente la condición $\alpha \ll 1$ lo cual permitió utilizar la relación (90). Se puede ver que p y c_3 entran a

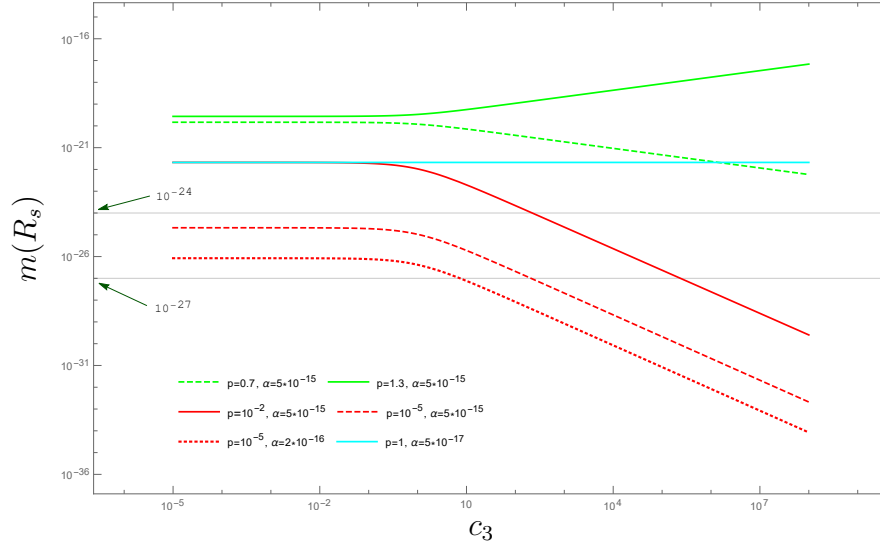


Figura 23: $m(R_s)$ vs. c_3 para diversos valores de p y α . Si $\alpha \ll 1$ y $p \lesssim 1$, el modelo (87) imita con gran fidelidad a la RG en el Sistema Solar a partir de un valor de $c_3 \gg 1$, teniendo en cuenta que esto se logra para $m(R_s) \lesssim 10^{-27}$. Los valores $p = 1$ y $c_3 = 0$ corresponden al segundo modelo propuesto en [88] el cual no tiene la característica que se acaba de mencionar.

jugar un papel importante en el cumplimiento de las restricciones de Sistema Solar lo que no sucede con correcciones exponenciales al lagrangiano de EH como aquella presente en el segundo modelo propuesto en [88] el cual correspondería al caso $p = 1$ y $c_3 = 0$.

Aunque el análisis realizado se encaminó a establecer condiciones sobre α , p y c_3 para que el modelo en estudio pasara las pruebas de Sistema Solar, vale la pena anotar que también pudo haberse incluido en el estudio la escala de masa M^2 de modo que ciertas restricciones sobre su magnitud condujeran al cumplimiento de los requerimientos de Sistema Solar. Sin embargo, se optó por fijar su valor a la forma establecida previamente, $M^2 = \kappa^2 \rho_0$, dejando libres únicamente los parámetros del modelo ya mencionados y buscando restricciones sobre ellos.

Evolución de perturbaciones en el formalismo de fluido efectivo:

Hasta ahora se han establecido diversas restricciones sobre el modelo (87) que le

permiten cumplir con distintas condiciones básicas de viabilidad, explicar adecuadamente la evolución cosmológica y pasar pruebas de Sistema Solar. Sin embargo, a este nivel generalmente las teorías $f(R)$ factibles describen el universo de forma similar al modelo de concordancia siendo de esta manera difíciles de distinguir de Λ CDM. Las restricciones mencionadas se han determinado asumiendo que el universo es isotrópico y homogéneo a gran escala (lo cual es soportado por las observaciones), pero cuando se estudia la evolución de inhomogeneidades originadas en el universo temprano, los modelos de EOG pueden presentar diferencias perceptibles con respecto al modelo cosmológico estándar. Cuando estas inhomogeneidades manifestadas en la geometría del espacio-tiempo y en las fuentes de energía-momentum son “pequeñas” comparadas con sus respectivas cantidades sin perturbar, pueden analizarse perturbativamente, es decir, como correcciones a primer orden sobre las cantidades y ecuaciones que caracterizan la dinámica de la geometría y las fuentes. El análisis de la evolución de estas perturbaciones comprende la solución de sistemas ecuaciones diferenciales acopladas que son bastante difíciles de resolver. Sin embargo, la isotropía y homogeneidad del cosmos a gran escala simplifican enormemente el camino para acercarse a dicha solución. Sin entrar en detalles (los cuales pueden ser encontrados en [133, 134, 135, 136]), el procedimiento para obtener la evolución de las perturbaciones primordiales que darían lugar a las estructuras que observamos actualmente en el universo puede esbozarse a través de las siguientes consideraciones:

1) Se plantean correcciones pequeñas a primer orden (perturbativas) sobre cantidades/campos presentes en las ecuaciones de campo de Einstein, tanto en su parte geométrica como en las fuentes. Estas perturbaciones se establecen originalmente sobre la métrica, $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, y cantidades que caracterizan al tensor energía-momentum tales como $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$, $p = \bar{p} + \delta p$ y $\mathcal{U}_\mu = \bar{\mathcal{U}}_\mu + \delta\mathcal{U}_\mu$, donde la barra horizontal sobre cualquier término representa dicha cantidad sin perturbar, la cual depende únicamente del tiempo, mientras que la respectiva perturbación depende tanto del tiempo como de la posición.

2) Dichas perturbaciones a su vez producen correcciones a primer orden (se descartan órdenes superiores en el análisis perturbativo) sobre otras cantidades presentes en las ecuaciones de campo, como lo son el tensor de curvatura $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$, la curvatura escalar $R = \bar{R} + \delta R$ y el tensor energía-momentum $T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$.

3) La isotropía del espacio a gran escala permite que las cantidades resultan-

tes en las ecuaciones, las cuales son inicialmente de carácter tensorial, puedan ser descompuestas en elementos (modos) de tipo escalar, vectorial y tensorial, para los cuales las ecuaciones que los rigen, provenientes de las ecuaciones de Einstein perturbadas (a orden uno), estarían desacopladas, es decir, las ecuaciones para cada tipo de modo (escalar, vectorial o tensorial) se satisfacen independientemente de acuerdo al *teorema de descomposición*. El desarrollo de las ecuaciones para cada uno estos modos permite establecer que son los escalares aquellos que influyen principalmente en el proceso de formación de estructuras en el cosmos. Adicionalmente, cabe anotar que la invarianza rotacional y traslacional del tensor energía-momentum no perturbado permite que este adopte la forma de fluido perfecto dada en (11).

4) Las expresiones halladas de esta manera constituyen un conjunto aún no completo de ecuaciones diferenciales por dos razones: a) Todavía existe libertad para realizar un cambio en el sistema de coordenadas el cual no debe generar modificaciones en los resultados físicos de las ecuaciones de campo perturbadas. Esta libertad (*gauge*) se elimina al escoger un sistema de coordenadas específico, lo cual equivale a fijar el *gauge*. b) En este punto aún no se ha establecido la forma en la que evolucionan los diferentes sectores (especies) que aportan energía/momentum al universo y que determinarían la evolución de las perturbaciones sobre las fuentes presentes en el tensor energía-momentum y que a su vez influirían en la evolución de las perturbaciones en la geometría (métrica, curvatura) a través de las ecuaciones de campo perturbadas. Esto se resuelve al implementar ecuaciones que permitan describir dicha evolución, para lo cual generalmente se hace uso de las llamadas *ecuaciones de Boltzmann* para cada especie (materia oscura fría, bariones, fotones, neutrinos, etc.), teniendo en cuenta que en el esquema de *fluído efectivo* se deberán incluir términos adicionales asociados a las partes del tensor energía-momentum provenientes de modificación a la gravedad.

5) La homogeneidad del espacio brinda la posibilidad de simplificar aún mas las relaciones encontradas, permitiendo expresar las perturbaciones en el espacio de Fourier, y con esto reescribir las ecuaciones de Einstein perturbadas como un conjunto de ecuaciones diferenciales más sencillas ($\partial/\partial x^i \rightarrow i k_i$ donde k_i son las componentes del vector de onda $\mathbf{k}$), las cuales a su vez están desacopladas, es decir, a nivel perturbativo pueden resolverse independientemente para cada modo $\mathbf{k}$. Vale la pena anotar que en el espacio de Fourier la dependencia espacial de las perturbaciones pasa a ser una dependencia de $\mathbf{k}$.

El esquema que se acaba de describir es posible desarrollarlo en un marco de *fluído efectivo*, en el cual la ecuación (3), donde $T_{\mu\nu}$ incluiría todas las especies que son fuente de energía/momentum tradicionalmente, puede reformularse como

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(f)} \right) , \quad (111)$$

en donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein mientras que $T_{\mu\nu}^{(f)}$ se asociaría a un tensor efectivo de energía-momentum para el sector de energía oscura geométrica dado por

$$\kappa^2 T_{\mu\nu}^{(f)} \equiv (1 - F)G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (f - RF) g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu) F , \quad (112)$$

el cual cumple con la condición de conservación $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(f)} = 0$. En la ec. (111) podemos interpretar $T_{\mu\nu}^{\text{eff}} \equiv T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(f)}$ como el tensor energía-momentum para un *fluído efectivo* compuesto por las fuentes usuales (materia oscura fría, bariones, fotones, neutrinos, etc) y energía oscura geométrica. Observemos que esta versión efectiva de las ecuaciones de campo es diferente a la planteada a través de las ecuaciones (21), (22), (23) y (24).

En este punto es útil introducir el concepto de *horizonte comóvil* y *tiempo conforme* [133]. La distancia física que puede haber recorrido la luz desde $t = 0$ hasta un instante t , en ausencia de interacciones, está dada por $D(t) = a(t)\eta(t)$, donde

$$\eta(t) \equiv \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \quad (113)$$

es llamado el *horizonte comóvil*, siendo c la velocidad de propagación de la luz en el vacío. Ninguna información puede haber viajado más allá de D (o de η en las coordenadas comóviles) en el espacio físico desde el comienzo del tiempo hasta el instante t , y es justo por esto que se lo denomina *horizonte*. De acuerdo a lo anterior, si dos regiones en el universo están separadas una *distancia comóvil* mayor que η en un momento determinado, estas no se encuentran conectadas causalmente. Como puede verse, $\eta(t)$ es una cantidad que crece monótonamente con el tiempo, de modo que, considerando unidades de medida donde $c = 1$, η se puede interpretar como una variable temporal a la que se le llama *tiempo conforme*. En términos de esta variable de tiempo, con la métrica (9) y $K = 0$, las componentes temporal y espacial de (111) toman la forma

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3} a^2 (\bar{\rho} + \bar{\rho}_f) \quad (114)$$

y

$$\mathcal{H}^* = -\frac{\kappa^2}{6} a^2 ((\bar{\rho} + 3\bar{p}) + (\bar{\rho}_f + 3\bar{p}_f)) \quad , \quad (115)$$

donde cada asterisco sobre un término significa derivación de este con respecto al tiempo conforme η , la tasa de Hubble conforme se define como $\mathcal{H} \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, y se pueden identificar una densidad y una presión para el *fluído efectivo* (sin perturbar) dadas por $\bar{\rho}_{\text{eff}} \equiv \bar{\rho} + \bar{\rho}_f$ y $\bar{p}_{\text{eff}} \equiv \bar{p} + \bar{p}_f$ respectivamente. De (113) con $c = 1$ se tiene que $d\eta = \frac{dt}{a}$, de donde $\frac{d}{d\eta} = a \frac{d}{dt}$ y $\mathcal{H} = a H$. En las ecuaciones (114) y (115) se tiene que [124]

$$\kappa^2 \bar{\rho}_f = -\frac{f}{2} + 3 \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} - 3 \frac{\mathcal{H} F^*}{a^2} + 3 \frac{F \mathcal{H}^*}{a^2} \quad (116)$$

y

$$\kappa^2 \bar{p}_f = \frac{f}{2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} - 2 \frac{F \mathcal{H}^2}{a^2} + \frac{\mathcal{H} F^*}{a^2} - 2 \frac{\mathcal{H}^*}{a^2} - \frac{F \mathcal{H}^*}{a^2} + \frac{F^{**}}{a^2} \quad , \quad (117)$$

a partir de las cuales se puede obtener la *ecuación de estado* $w_f \equiv \frac{\bar{p}_f}{\bar{\rho}_f}$ para el sector de energía oscura geométrica (sin perturbar) en el formalismo de *fluído efectivo* que hemos descrito.

A partir de lo anterior, y siguiendo el esquema general descrito para obtener la evolución de las perturbaciones generadas en el universo primitivo, podemos considerar que, analizando el comportamiento de los modos escalares y fijando el sistema de coordenadas a través del *gauge Newtoniano conforme*, la métrica perturbada adquiere la forma

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[- (1 + 2\Psi(\mathbf{x}, \eta)) d\eta^2 + (1 - 2\Phi(\mathbf{x}, \eta)) d\mathbf{x}^2 \right] \quad , \quad (118)$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector posición tridimensional, y Ψ y Φ son potenciales gravitacionales asociados a las perturbaciones escalares de la métrica. Similarmente, las componentes del tensor energía-momentum perturbado con índices mixtos se expresan como [124]

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho) \quad , \quad (119)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})\mathcal{U}_i \quad , \quad (120)$$

$$T_j^i = (\bar{p} + \delta p)\delta_j^i + \Sigma_j^i \quad , \quad (121)$$

donde $\Sigma_j^i \equiv T_j^i - \delta_j^i T_k^k/3$ se interpreta como un *tensor de estrés anisotrópico*, y desde (119) $\bar{\rho}$ y $\bar{p}$ (sin el subíndice “eff”) corresponderán a la densidad y presión **efectivas** (sin perturbar) definidas justo después de la ec. (115), siendo $\delta\rho$ y δp sus respectivas perturbaciones. De lo anterior, las *ecuaciones de movimiento* obtenidas a partir de las diferentes componentes de la ecuación (111) perturbada con índices mixtos en el marco del *fluido efectivo*, que está dada por

$$\begin{aligned} \bar{G}_\mu^\nu + \delta G_\mu^\nu &= \kappa^2 \left(\left(\bar{T}_\mu^\nu + \bar{T}_\mu^{\nu(f)} \right) + \left(\delta T_\mu^\nu + \delta T_\mu^{\nu(f)} \right) \right) \\ &\equiv \kappa^2 \left(\bar{T}_{\mu \text{eff}}^\nu + \delta T_\mu^\nu \right) \equiv \kappa^2 T_\mu^\nu \quad , \end{aligned} \quad (122)$$

y de su traza, siguiendo el formalismo presentado en [124, 135], en el espacio de Fourier son

$$k^2 \Phi + 3 \frac{\overset{*}{a}}{a} \left(\overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{a}}{a} \overset{*}{\Psi} \right) = \frac{\kappa^2}{2} a^2 \delta T_0^0 \quad , \quad (123)$$

$$k^2 \left(\overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{a}}{a} \overset{*}{\Psi} \right) = \frac{\kappa^2}{2} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \theta \quad , \quad (124)$$

$$\overset{**}{\Phi} + \frac{\overset{*}{a}}{a} \left(\overset{*}{\Psi} + 2\overset{*}{\Phi} \right) + \left(2 \frac{\overset{**}{a}}{a} - \frac{\overset{*2}{a}}{a^2} \right) \overset{*}{\Psi} + \frac{k^2}{3} (\Phi - \Psi) = \frac{\kappa^2}{6} a^2 \delta T_i^i \quad , \quad (125)$$

$$k^2 (\Phi - \Psi) = \frac{3\kappa^2}{2} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \sigma \quad , \quad (126)$$

donde $k = \|\mathbf{k}\|$ es el número de onda correspondiente al vector $\mathbf{k}$, y se ha definido la velocidad $\theta \equiv ik^j \mathcal{U}_j$ y el *estrés anisotrópico* de la forma

$$(\bar{\rho} + \bar{p})\sigma \equiv - \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \Sigma^{ij} , \quad (127)$$

donde $\hat{k}_i$ es el vector unitario en la dirección i del vector de onda $\mathbf{k}$. Es pertinente resaltar que en un universo donde se considera solo materia ($p = 0$) el marco de la RG (ej.: Λ CDM desde la época de dominancia de materia), la ecuación (126) implica que $\Phi = \Psi$. Sin embargo, si se considera la presencia de un *fluído efectivo* que contiene EOG (proveniente de la modificación a la gravedad), se tiene que a la derecha de (126) aparecen términos geométricos en $(\bar{\rho} + \bar{p})\sigma$ que impiden la igualdad mencionada entre los potenciales Φ y Ψ .

Adicionalmente a las ecs. (123) - (126) se requieren ecuaciones que den cuenta de la evolución de las perturbaciones sobre el tensor T_μ^ν , las cuales se pueden establecer a partir de la condición de conservación de energía-momentum dada por $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ donde “ $;$ ” en el subíndice representa derivación covariante respecto al índice ν . De esta condición se obtiene [124]

$$\delta^* = -(1 + w)(\theta - 3\Phi^*) - 3\frac{a^*}{a}(c_s^2 - w)\delta \quad (128)$$

y

$$\theta^* = -\frac{a^*}{a}(1 - 3w)\theta - \frac{w^*}{1 + w}\theta + \frac{c_s^2}{1 + w}k^2\delta - k^2\sigma + k^2\Psi , \quad (129)$$

donde $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}$, la *ecuación de estado* es $w \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$, y la velocidad del sonido para el fluído está dada por $c_s^2 \equiv \frac{\delta p}{\delta\rho}$.

De lo anterior se observa que en el marco de *fluído efectivo* que hemos descrito, el tensor energía-momentum se puede caracterizar por una densidad, presión, velocidad y estrés anisotrópico, siendo posible establecer estas cantidades (efectivas) para el sector de energía oscura geométrica a partir de (112).

Eliminando θ de (128) y (129), se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para δ [137]:

$$\delta^{**} + (\dots)^*\delta + (\dots)\delta = -k^2 \left((1 + w)\Psi + c_s^2\delta - \frac{2}{3}\Pi \right) + \dots \quad (130)$$

donde $\Pi \equiv \frac{3}{2}(1 + w)\sigma$ es el parámetro de estrés anisotrópico definido en [124],

y los puntos ... representan expresiones complicadas que pueden simplificarse en la aproximación *sub-horizonte*. Para entender lo que esta aproximación significa, es importante recordar el concepto de *horizonte comóvil*. Como ya lo dijimos, dos regiones del universo separadas en un instante t por una distancia comóvil mayor que el *horizonte comóvil*, no están conectadas causalmente. Por otra parte, en la descomposición de las perturbaciones escalares en el espacio de Fourier, aquella asociada al modo $\mathbf{k}$ tiene una longitud de onda $\lambda_k = 1/k$ la cual corresponde la *escala de la perturbación*, aunque a menudo λ_k y k se utilizan indistintamente para denotar la escala. De acuerdo a esto, $k \gg 0$ corresponde a una escala pequeña y viceversa. Si λ_k es mayor que el *horizonte comóvil*, se tendrá que $k\eta < 1$ y se dirá que dicho modo $\mathbf{k}$ está por fuera del horizonte y se lo llamará modo *super-horizonte*. Como ya lo habíamos mencionado, el *horizonte comóvil* η dado en (113) es una función creciente con el tiempo, por lo cual es de esperarse que un modo $\mathbf{k}$ que se encuentra por fuera del horizonte en algún momento, en el futuro su escala λ_k llegue a ser menor que el *horizonte comóvil*, diciéndose que en dicho instante el modo pasa a estar dentro del horizonte y se lo llamará *sub-horizonte*, cumpliéndose la relación $k\eta > 1$. En el momento cuando un modo específico $\mathbf{k}$ entra en el horizonte se cumple la relación $k\eta = 1$, a lo cual se le llama *cruce del horizonte*.

La evolución de las perturbaciones tiene características distintas en los regímenes *sub-horizonte* y *super-horizonte*. Específicamente cuando $k^2 \gg a^2 H^2$ se obtiene $k\eta \gg 1$, es decir, el modo $\mathbf{k}$ se encuentra muy dentro del horizonte y se pueden hacer simplificaciones importantes en las ecuaciones que rigen dicha evolución. Este procedimiento se llama aproximación *sub-horizonte*, en la cual se tiene que los términos con derivadas temporales son despreciables comparados con aquellos proporcionales a k^2 . De acuerdo a esto, por ejemplo, la perturbación en el escalar de Ricci puede aproximarse como [124]:

$$\begin{aligned} \delta R &= -\frac{12(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}^*)}{a^2}\Psi - \frac{4k^2}{a^2}\Phi + \frac{2k^2}{a^2}\Psi - \frac{18\mathcal{H}^*}{a^2}\Phi - \frac{6\mathcal{H}^*}{a^2}\Psi - \frac{6\Phi^{**}}{a^2} \\ &\simeq -\frac{4k^2}{a^2}\Phi + \frac{2k^2}{a^2}\Psi \quad , \end{aligned} \quad (131)$$

y con esto, a partir de las *ecuaciones de movimiento* se obtiene para el sector de materia ($w = 0$, $\Pi = 0$) [124]:

$$\Psi = -\frac{\kappa^2}{2} \frac{a^2}{k^2} \frac{G_{\text{eff}}}{G} \bar{\rho}_m \delta_m \quad , \quad (132)$$

$$\Phi = -\frac{\kappa^2 a^2}{2} Q_{\text{eff}} \bar{\rho}_m \delta_m \quad , \quad (133)$$

donde G es la constante de acople gravitacional Newtoniana, $\delta_m \equiv \delta\rho_m/\bar{\rho}_m$, y G_{eff} y Q_{eff} están dados por [27]

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G}{F} \left[\frac{1 + \frac{4k^2 F'}{a^2 F}}{1 + \frac{3k^2 F'}{a^2 F}} \right] \quad (134)$$

y

$$Q_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{F} \left[\frac{1 + \frac{2k^2 F'}{a^2 F}}{1 + \frac{3k^2 F'}{a^2 F}} \right] \quad , \quad (135)$$

recordando que $F = df/dR$ y $F' = d^2 f/dR^2$. Igualmente, la aproximación *sub-horizonte* es útil al momento de calcular $\delta_f \equiv \delta\rho_f/\bar{\rho}_f$ (el cual hace parte de δT_μ^ν) para la cual $\delta\rho_f$ y $\bar{\rho}_f$ se determinarían a partir de (116) teniendo en cuenta que $\rho_f = \bar{\rho}_f + \delta\rho_f$, donde la perturbación $\delta\rho_f$ contiene únicamente términos lineales en Ψ y Φ , y proviene de δR (dado en (131)) a través de $f(R)$, $F(R)$ y $\mathcal{H}$ que a su vez puede expresarse en función de $R = \bar{R} + \delta R$ gracias las simetrías del cosmos a gran escala. Bajo esta misma aproximación, a partir de (123) y (133) se obtiene

$$\frac{k^2}{a^2} \Phi = \frac{\kappa^2}{2} (\bar{\rho}_m \delta_m + \bar{\rho}_f \delta_f) = \frac{\kappa^2}{2} Q_{\text{eff}} \bar{\rho}_m \delta_m \quad , \quad (136)$$

que a partir de la segunda igualdad también se puede expresar como

$$\bar{\rho}_m \delta_m = \frac{1}{Q_{\text{eff}} - 1} \bar{\rho}_f \delta_f \quad , \quad (137)$$

permitiendo así establecer una relación entre la evolución de δ_m y δ_f .

Similarmente, en la aproximación *sub-horizonte* se tiene que, para el sector de materia para el cual $\Pi = 0$ [134] y $w = 0$, y teniendo en cuenta (134), la ec. (130) en función del tiempo cósmico toma la forma [27, 91, 129]:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}} \bar{\rho}_m \delta_m = 0 \quad , \quad (138)$$

recordando que cada punto sobre una cantidad representa derivación con respecto

al tiempo cósmico, $H = \dot{a}/a$, y G_{eff} corresponde al acople gravitacional efectivo definido en (134) que a su vez puede ser reescrito como

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{F} \left[\frac{1 + \frac{4k^2 m}{a^2 R}}{1 + \frac{3k^2 m}{a^2 R}} \right] , \quad (139)$$

donde m es el parámetro definido en (33). Introduciendo la *tasa de crecimiento* de perturbaciones de materia dada por

$$f(a) \equiv \frac{d(\ln \delta_m)}{dN} , \quad (140)$$

recordando que $N = \ln a$, se tiene que la ecuación (138) puede ser reformulada como

$$\frac{df(a)}{dN} + f(a)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d(\ln \Omega_m(a))}{dN} \right) f(a) = \frac{3}{2} \frac{G_{\text{eff}}}{G} \Omega_m(a) . \quad (141)$$

También es posible caracterizar la evolución de las perturbaciones lineales a partir de una representación diferente de la *tasa de crecimiento* $f(a)$, dada por

$$f(a) = \Omega_m(a)^{\gamma(a)} , \quad (142)$$

donde $\gamma(a)$ es el *índice de crecimiento* de perturbaciones de materia, el cual, en función del *redshift* z está dado por

$$\gamma(z) \equiv \frac{\ln f(z)}{\ln \Omega_m(z)} . \quad (143)$$

Para el modelo (87), haciendo uso de (A.8), y teniendo en cuenta los valores de los $\Omega_i(z = 0)$ que se han venido utilizando, es posible obtener una solución numérica para (141) en función de z , asumiendo como condición inicial el valor de la *tasa de crecimiento* del modelo Λ CDM en época de dominancia de materia ($f_{\Lambda\text{CDM}}(z \gtrsim 10) \approx 1$), y con la solución obtenida hallar a su vez la evolución de $\gamma(z)$.

Es importante resaltar algunos aspectos importantes relacionados con la evolución de las perturbaciones lineales descrita por (138) o (141). Primero, a partir

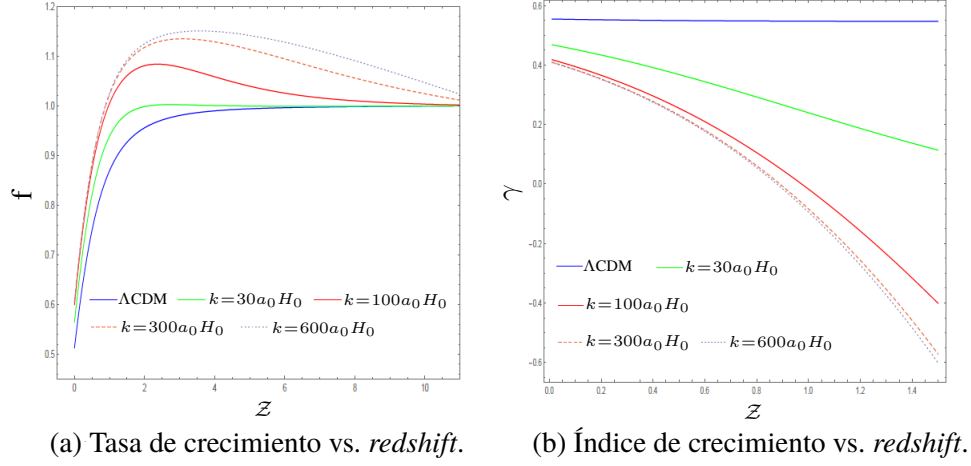


Figura 24: Tasa e índice de crecimiento de perturbaciones lineales de materia para el modelo (87) con $c_3 = 1$, $p = 0.9$, $\alpha = 10^{-2}$, $\mu^2 = 3H_0^2\Omega_{m0}$, $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{r0} = 0.00005$, $H_0 = 70$ km/s/Mpc y $a_0 = 1$ para diversas escalas k , en la aproximación sub-horizonte, utilizando la expresión analítica (A.8) para la tasa de Hubble, calculados con *Mathematica*. Es posible observar la diferencia con Λ CDM en todos los modos k . Igualmente se aprecia que al disminuir la escala (aumentando k) tanto la *tasa* como el *índice de crecimiento* tienden a ser invariantes de escala a bajo *redshift*.

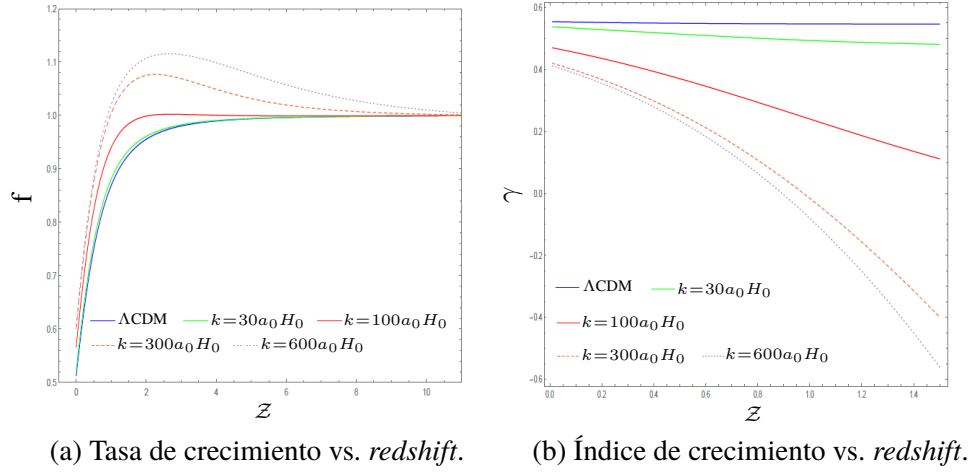


Figura 25: Tasa e índice de crecimiento de perturbaciones lineales de materia para el modelo (87) con $c_3 = 1$, $p = 0.8$, $\alpha = 10^{-3}$, $\mu^2 = 3H_0^2\Omega_{m0}$, $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{r0} = 0.00005$, $H_0 = 70$ km/s/Mpc y $a_0 = 1$ para diversas escalas k , en la aproximación sub-horizonte, utilizando la expresión analítica (A.8) para la tasa de Hubble, calculados con *Mathematica*. En las diferentes escalas se observa un comportamiento similar al de la **Figura 24**.

de (139) se observa que el acople Newtoniano efectivo G_{eff} es dependiente de la escala k , y cualquier cambio en su valor modifica la tasa de expansión, lo cual a su vez influye significativamente en el proceso de *nucleosíntesis del Big Bang* (BBN). Esto impone restricciones sobre los modelos $f(R)$ exigiéndoles que al momento de producirse la BBN, la evolución de las perturbaciones de materia sea muy cercana a la descrita por la RG, lo cual se traduce en $G_{\text{eff}} \approx G$, condición que impondría restricciones adicionales sobre el modelo $f(R)$. Para que este requerimiento se satisfaga, la ec. (139) demanda que durante dicha época el modelo debe cumplir con $F \approx 1$ y $\xi \equiv \frac{k^2 m}{a^2 R} \ll 1$ [90]. En segundo lugar, sabiendo que cualquier modelo $f(R)$ viable debe imitar a la RG en la época profunda de dominancia de materia ($z \gtrsim 10$), se tiene que a alto *redshift* el valor del parámetro de desviación para el modelo debe cumplir con $m(z \gtrsim 10) \ll 1$, periodo en el cual las perturbaciones evolucionarían como $\delta_m \propto t^{2/3}$ [27, 91, 90]. De acuerdo a lo anterior, es natural asumir que debido al carácter dinámico del acople gravitacional efectivo, en algún momento de la historia cósmica puede llegarse a tener una diferencia importante entre el valor de G_{eff} y G , época en la cual la evolución de las perturbaciones lineales de materia se comportaría de manera distinta a la descrita por la RG dando lugar a $\delta_m \propto t^{(\sqrt{33}-1)/6}$ cuando $\xi = \frac{k^2 m}{a^2 R} \gg 1$ [27, 91, 90]. El momento de cambio en la forma evolutiva de δ_m se caracteriza por un *redshift* de transición z_k dado por la condición

$$m(z_k) = \frac{a^2 R}{k^2} . \quad (144)$$

Para el caso mostrado en la **Figura 25**, a partir de la solución numérica de (144) considerando (A.8) para la tasa de expansión, se tiene que los *redshift* de transición en las diferentes escalas consideradas son respectivamente $z_{k30} \approx 1.58$, $z_{k100} \approx 0.97$, $z_{k300} \approx 2.96$ y $z_{k600} \approx 4.87$ donde el subíndice $k30$ corresponde al modo $k = 30a_0 H_0$ y similarmente para las demás escalas. De lo anterior y observando la figura, se advierte que para el caso $c_3 = 1$, $p = 0.8$ y $\alpha = 10^{-3}$, el modelo en estudio presenta una diferencia clara con ΛCDM a bajo *redshift* tanto en la *tasa* como en el *índice de crecimiento* de perturbaciones lineales de materia, todos los modos considerados ya han pasado del régimen de la RG al escalar-tensor en $z = 0$, e igualmente se puede observar que los modos más grandes (escalas más pequeñas) están cerca de lograr la invarianza de escala. Conclusiones similares se obtienen para la **Figura 24**. Los rangos de valores encontrados para los indicadores de evolución de perturbaciones estudiados a partir del modelo (87) a bajo *redshift* podrían validarse a través de resultados observaciones próximos.

Vale la pena aclarar que la aproximación analítica (A.8) utilizada en el desarrollo anterior tiene una diferencia porcentual media $\sim \mathcal{O}(10^{-4} \%)$ con respecto a la solución numérica para $H(z)$ (obtenida de la componente temporal de las ecuaciones de campo) en el intervalo $0 \leq z \leq 12$ para el caso de la **Figura 24**, mientras que dicha diferencia es de $\sim \mathcal{O}(10^{-6} \%)$ en el mismo intervalo de *redshift* para los valores de α , p y c_3 de la **Figura 25**, y se mantiene en ese orden de magnitud en $0 \leq z \leq 30$, lo que la hace viable para implementar en *EFCLASS* [124]. Aunque los valores de los parámetros del modelo (87) establecidos en la **Figura 24** no posibilitan que la aproximación analítica de la tasa de expansión sea utilizada con fiabilidad en el código mencionado, sí permiten observar la diferencia de $f(z)$ y $\gamma(z)$ entre Λ CDM y (87). En el análisis efectuado se han asumido los valores $\Omega_{m_0} = 0.3$, $\Omega_{r_0} = 0.00005$, $H_0 = 70$ km/s/Mpc, $a_0 = 1$, $\mu^2 = 3H_0^2\Omega_{m_0}$ y c_1 dado por (90).

Espectro de potencias de materia:

Otro indicador que permite visualizar la huella dejada por las perturbaciones escalares sobre el sector de materia y la distribución de estructuras en el universo a gran escala en la época actual es el *espectro de potencias de materia* $P(k)$, el cual básicamente caracteriza la diferencia entre la densidad local y la densidad promedio de materia (materia oscura fría y bariones) en el universo en función de la escala k . Notemos que la aproximación *sub-horizonte* que hemos utilizado se cumple fácilmente en la actualidad para un amplio rango de modos k pues como se mencionó, el *horizonte comóvil* crece monótonamente a medida que transcurre el tiempo permitiendo así que una gran cantidad de modos ya hayan cruzado el horizonte y cumplan con $k \gg aH$ (o equivalentemente $k\eta \gg 1$) que es la condición requerida para utilizar la aproximación mencionada. Debido a lo anterior, estos modos evolucionan de manera similar en tiempo tardío, es decir para $z < z_m$ donde z_m corresponde a un *redshift* de época profunda de dominancia de materia, siendo justo para $z < z_m$ cuando podemos observar la distribución de materia en el cosmos. Cabe preguntarse entonces cómo se relaciona la perturbación primordial (en el universo primitivo) de la curvatura $\delta R_p(\mathbf{k})$ con la evolución de Φ a tiempo tardío.

Por una parte, esta relación se puede establecer a partir de la llamada *función de transferencia* $\mathcal{T}(k)$ y el *factor de crecimiento* $D_+(a)$ de la forma [133]

$$\Phi(\mathbf{k}, a) = \frac{3}{5} \delta R_p(\mathbf{k}) \mathcal{T}(k) \frac{D_+(a)}{a} \quad \text{para } a > a_m, \quad (145)$$

donde a_m es el factor de escala correspondiente a z_m ,

$$\mathcal{T}(k) \equiv \frac{\Phi(\mathbf{k}, a_m)}{\Phi_{keg}(\mathbf{k}, a_m)}, \quad (146)$$

y

$$\frac{\Phi(\mathbf{k}, a)}{\Phi(\mathbf{k}, a_m)} \equiv \frac{D_+(a)}{a} \quad \text{para } a > a_m, \quad (147)$$

donde $\Phi_{keg}(\mathbf{k}, a_m)$ corresponde al potencial Φ evaluado en modos de escala grande ($\lambda_k \gg 0$) cuando $a = a_m$, para los cuales el potencial primordial $\Phi(\mathbf{k}, a \ll 1)$ se reduce solo en una pequeña cantidad al transcurrir el tiempo, y el *factor de crecimiento* está definido a través de la relación [133]

$$f(a) \equiv \frac{d(\ln D_+(a))}{d(\ln a)}, \quad (148)$$

donde $f(a)$ es la *tasa de crecimiento* definida en (140).

Por otra parte, de (136) se obtiene

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = \frac{2k^2 a}{3H_0^2 \Omega_{m_0}} \frac{1}{Q_{\text{eff}}} \Phi(\mathbf{k}, a) \quad \text{para } k \gg aH, \quad (149)$$

donde $\Omega_{m_0} = \frac{\kappa^2 \bar{\rho}_{m_0}}{3H_0^2}$. Ahora, de las ecuaciones (149) y (145) resulta

$$\delta_m(\mathbf{k}, a) = \frac{2}{5} \frac{k^2}{H_0^2 \Omega_{m_0}} \frac{1}{Q_{\text{eff}}} \delta R_p(\mathbf{k}) \mathcal{T}(k) D_+(a) \quad \text{para } a > a_m \text{ y } k \gg aH, \quad (150)$$

donde se ha asumido que $\delta R_p(\mathbf{k})$ es una perturbación adiabática [133]. En el contexto de la *inflación* se tiene que esta perturbación se describe a partir de una distribución Gaussiana con media igual a cero, con un espectro de potencias $P_{\delta R}(k) = (2\pi^2/k^3) \mathcal{A}_s(k/k_p)^{n_s-1}$ [133], en la cual $\pi = 3.141592\dots$, $\sqrt{\mathcal{A}_s}$ es la amplitud típica de las perturbaciones de la curvatura en la escala k_p la cual corresponde a una escala pivote que usualmente se escoge como aquella que mejor se ha restringido

por las observaciones ($k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ para el caso de [7]), y n_s es el *índice espectral escalar* [133]. A partir de esto, y de la relación entre las perturbaciones y su espectro de potencias asociado

$$\frac{P_L(k, a)}{\delta_m(\mathbf{k}, a)^2} = \frac{P_{\delta R}(k)}{\delta R_p(\mathbf{k})^2} \quad , \quad (151)$$

se tiene que el *espectro lineal de potencias* del sector de materia para perturbaciones escalares $P_L(k, a)$ está dado por

$$P_L(k, a) = \frac{8\pi^2}{25} \frac{\mathcal{A}_s}{H_0^4 \Omega_{m0}^2} \frac{1}{Q_{\text{eff}}^2} D_+(a)^2 \mathcal{T}^2(k) \frac{k^{n_s}}{k_p^{n_s-1}} \quad . \quad (152)$$

Para calcular este espectro asociado al modelo (87), se ha hecho uso del código *EFCLASS* [124], el cual es una variante del código *CLASS* [123]. Para el desarrollo de esta, los autores básicamente modificaron las ecuaciones de movimiento (123) - (126), y las ecs. (128) y (129), utilizando el formalismo de *fluído efectivo* incluyendo en las componentes del tensor energía-impulso, además de las fuentes usuales de energía-momentum, aquellas asociadas a la modificación de la gravedad $f(R)$ y efectuando las simplificaciones relacionadas con la aproximación *sub-horizonte*. Para el caso específico del modelo (87), a partir de la expresión analítica para la tasa de expansión (A.8) y de las ecuaciones (10), (106) y (102) se obtuvieron las expresiones a primer orden en el parámetro α para $\frac{df}{dR}$, $H_0^2 \frac{d^2 f}{dR^2}$, $\frac{1}{H_0} \frac{df/dR}{d\eta}$, w_f y $\frac{\kappa^2 \rho_f}{3}$, las cuales se tradujeron a C++ y se introdujeron en las respectivas líneas del código *EFCLASS* en su versión para gravedad modificada tipo $f(R)$. Es pertinente mencionar que en <https://github.com/wilmarcardonac/EFCLASS/tree/f-of-R> se encuentra la versión del código *EFCLASS* a la cual se le realizaron las modificaciones respectivas para calcular los espectros mostrados en el presente trabajo. La descripción de dichas modificaciones y las expresiones obtenidas para el modelo (87) e implementadas en el código se encuentran en el **Apéndice 6**.

En la **Figura 26** se observa el *espectro de potencias* para los modelos (87) y ΛCDM , calculados con el código *EFCLASS* [124, 123], haciendo uso de la expresión (A.8) en la aproximación *sub-horizonte*. Se observa que los espectros tienen una cercanía importante entre sí la cual desaparece a escalas grandes $\mathcal{O}(k) \lesssim 10^{-4} h/\text{Mpc}^3$, donde h en este caso es una cantidad adimensional dada por $h \equiv$

³ $h\text{Mpc}^{-1} \approx 3000 a_0 H_0$ [90] en unidades donde $c=1$.

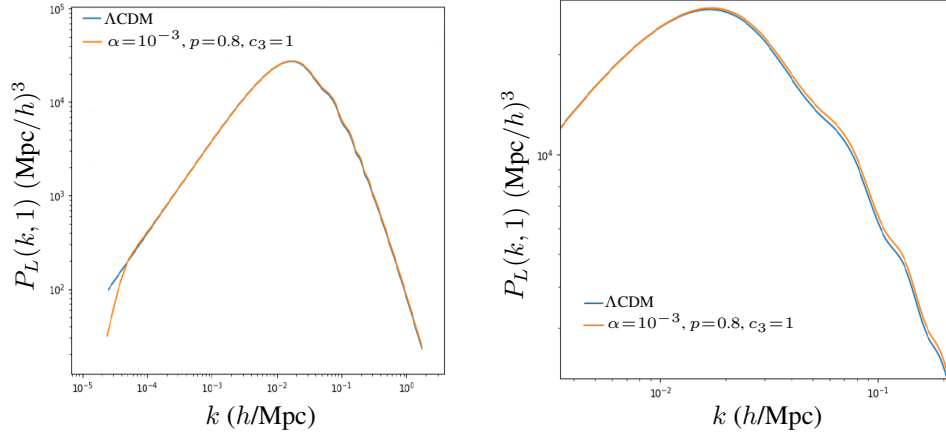


Figura 26: $P_L(k, 1)$ vs. k para el modelo (87) con $c_3 = 1$, $p = 0.8$ y $\alpha = 10^{-3}$ utilizando la aproximación analítica (A.8), comparado con Λ CDM a $z = 0$, hallados con *EFCLASS* [124, 123]. En la figura a la derecha se observa el espectro en el intervalo de *números de onda* $0.0035 h\text{Mpc}^{-1} \lesssim k \lesssim 0.2 h\text{Mpc}^{-1}$, y es posible apreciar una diferencia con el modelo estándar para $k \sim \mathcal{O}(10^{-1} h/\text{Mpc})$ la cual se debe a características propias del modelo (87), mientras que la discrepancia con Λ CDM observada en escalas $\mathcal{O}(k) \lesssim 10^{-4} h/\text{Mpc}$ se debería a que para dichas escalas la aproximación sub-horizonte deja de tener efectividad.

$H_0/100$. La diferencia considerable en estas escalas no implica necesariamente una discrepancia generada por el modelo sino que probablemente se debe a que el código fue desarrollado para funcionar adecuadamente en escalas *sub-horizonte*. Por otra parte, la diferencia con respecto al espectro del modelo de concordancia en el intervalo $0.02 h\text{Mpc}^{-1} \lesssim k \lesssim 0.2 h\text{Mpc}^{-1}$ sí es propia del modelo (87). Es importante resaltar que los valores de p y α de la figura no permiten cumplir con las pruebas de Sistema Solar, pero fueron utilizados para poder evidenciar gráficamente la diferencia con Λ CDM en estas escalas. Para valores de p y/o α que permitan cumplir con las pruebas mencionadas, se sigue presentando una diferencia entre los espectros de ambos modelos pero se requieren proyectos observacionales futuros muy precisos para validarla.

4. Discusión

Los resultados obtenidos muestran que es posible describir el universo con una dinámica similar a la del modelo Λ CDM teniendo gravedad modificada como fuente de energía oscura y una *densidad holográfica* como fuente de energía del vacío sin necesidad de recurrir a la energía del estado fundamental de la teoría cuántica de campos (*QFT*) cuyo problema de orden de magnitud y *ajuste fino* aún no ha sido resuelto. El modelo presentado en la **Sección 3.2** es un ejemplo de ello.

A pesar de que diversos modelos cosmológicos pueden explicar la expansión acelerada del universo actual, las teorías de gravedad modificada (con materia oscura fría) viables tienen una forma sencilla de reproducir el modelo de concordancia (tal como fue mostrado en [122]). Sin embargo, las observaciones muestran que es posible tener desviaciones respecto a este modelo, las cuales pueden ser de diversos orígenes. Aunque la RG ha tenido éxito para explicar la gravedad macroscópicamente a nivel de Sistema Solar, de la galaxia, y ha descrito adecuadamente algunos fenómenos hasta ciertas escalas extragalácticas, aún no se ha corroborado con precisión a distancias mayores y tampoco ha sido posible acoplarla a la mecánica cuántica para describir la interacción gravitacional microscópicamente. Esto abre camino a la posibilidad de modificar la RG de modo que las predicciones a escalas astrofísicas mayores a las probadas con precisión hasta hoy, sean diferentes a las de la teoría de Einstein, de tal forma que den lugar al comportamiento acelerado del universo actual, y eventualmente puedan ser incorporadas a la descripción de la gravedad a escala cuántica.

Por otra parte, el modelo ρ_Λ CDM donde ρ_Λ está dada por (65) y está inspirada en el *principio holográfico* el cual se sospecha es necesario para la formulación de una teoría cuántica de la gravedad, puede reproducir la *EoS* y el valor del parámetro de densidad de energía oscura del universo actual, y a su vez dar cuenta del valor del *redshift* de transición *desaceleración-aceleración* tal como se muestra en [119].

Cuando ambas fuentes de EO, es decir $f(R)$ y densidad de vacío holográfica de la forma (65) se incorporan al modelo cosmológico con materia oscura fría, se encuentra que pequeñas desviaciones con respecto a Λ CDM pueden ser explicadas cuando los parámetros correctivos b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cercanos a cero tal como se muestra en la **Sección 3.3**. La diferencia porcentual entre la expansión analítica (70) y la solución numérica para el *parámetro de Hubble*, teniendo para la grave-

dad modificada el modelo de *Hu-Sawicki* con $n = 1$, la densidad holográfica ρ_Λ ya mencionada, y parámetros correctivos $b = 0.001$, $\mathcal{A} = 0.0001$ y $\mathcal{B} = 0.0001$, está entre 0.005 % y 0.011 % para *redshifts* entre 0 y 3.17 aproximadamente, y es menos de 0.005 % para *redshifts* mayores. Esto indica que la aproximación planteada en (70) podría ser utilizada para realizar análisis que requieran una expresión analítica del *parámetro de Hubble*. Sin embargo, aún queda por demostrar que la aproximación analítica mencionada tiene un buen nivel de precisión al compararla con la solución numérica de la componente espacial de las ecuaciones de campo.

Es importante mencionar que las desviaciones que los parámetros b , $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ producen alrededor de Λ CDM tienen una influencia cuantificable sobre los parámetros asociados al crecimiento de estructuras, lo cual podrá determinarse posteriormente implementando el modelo a través (70) en el código *EFCLASS* [124, 123].

Además de las bondades ya mencionadas de la propuesta planteada, es importante destacar que con el sector de energía oscura teniendo como fuentes de la misma el modelo de gravedad modificada $f(R)$ de *Hu-Sawicki* con $n = 1$ en el marco holográfico con ρ_Λ tanto de la forma (42) como (65), se tiene un *sistema dinámico* asociado que incluye puntos críticos de dominancia de materia transitorios seguidos por puntos de expansión acelerada estables o transitorios, lo cual coincide con los resultados observacionales. Adicionalmente, los puntos críticos para estos modelos se ven enriquecidos al incorporar densidad de energía holográfica ya que por medio de esta los escenarios asociados a dichos puntos tienen un mayor rango de valores de w_{eff} y sus características de estabilidad son más diversas al comparlas con aquellas de modelos de EOG como única fuente de energía oscura. Por medio de esto, las trayectorias cosmológicas de los modelos en el diagrama m vs. r permiten escenarios cosmológicos adicionales de dominancia transitoria de materia, y de energía oscura ya sean estables o transitorios, de tipo *quintaesencia*, de Sitter o *phantom*, como se puede ver de (50) a (61), en (80) y en el **Apéndice 3**. En este caso, la estabilidad de los puntos críticos depende no solamente de los parámetros m y m' asociados a $f(R)$ sino también de los parámetros α y β presentes en el marco holográfico.

Es pertinente aclarar que el análisis de *sistema dinámico* se ha realizado en ausencia de radiación, ya que el propósito inicial es determinar si el modelo permite describir una evolución cósmica desde una etapa de dominancia de materia a una de energía oscura, pues son estas las dos últimas que presuntamente ha tenido el universo. A través del análisis del *sistema dinámico* y su estabilidad, se pretende

identificar modelos para los cuales las perturbaciones al sector de energía oscura no crezcan incontroladamente pero tampoco se anulen de manera abrupta en la época de dominancia de materia, permitiendo de esta manera que el modelo describa un universo que permanece algún tiempo en esta época, dando posibilidad a la formación de estructuras, para después evolucionar hacia escenarios de expansión acelerada como el actual. Si se incluye el sector de radiación en el análisis, usualmente aparecen nuevos puntos críticos, pero no se modifican las características de los ya hallados excluyendo radiación.

El modelo (87), analizado en la **Sección 3.4**, también permite describir la dinámica del universo desde la época de dominancia de radiación hasta la actualidad, y para algunos rangos de valores de sus parámetros puede imitar de cerca a Λ CDM y a su vez cumplir con los requerimientos básicos de viabilidad. Como pudo observarse, el valor de los parámetros α y p define la cercanía con el modelo estándar, y específicamente cuando α se hace muy pequeño es posible obtener una expresión analítica aproximada de la tasa de expansión muy cercana a la solución numérica de la componente temporal de las ecuaciones de campo. Esta expresión analítica es especialmente útil ya que, debido al alto grado de no linealidad de las ecuaciones, la solución numérica de las mismas en ocasiones no es posible obtenerla para un amplio rango de valores de *redshift* debido a inconvenientes en los métodos numéricos utilizados. A partir de la expresión analítica propuesta para la tasa de expansión se calcularon diversos indicadores relacionados con la evolución de las perturbaciones de materia en el régimen lineal en la aproximación *sub-horizonte*, y se observó que en este aspecto el modelo tiene diferencias con Λ CDM las cuales podrían medirse a través de proyectos observacionales futuros. Cabe reconocer que aún se debe corroborar que la aproximación analítica propuesta para la tasa de Hubble es suficientemente cercana a la solución numérica de la componente espacial de las ecuaciones de campo.

5. Perspectivas

Con lo obtenido hasta ahora se pretenden varias cosas a futuro: Por una parte, comparar la expresión (70) con la solución numérica de la componente espacial de las ecuaciones de campo y corroborar si tiene el mismo nivel de precisión que tuvo al compararla con la solución de la componente temporal. Posteriormente, se deberán calcular para el sector de energía oscura las cantidades requeridas para implementar el modelo en *EFCLASS* [124, 123] y así determinar el efecto que las correcciones a Λ CDM provenientes de $f(R)$ de *Hu-Sawicki* con $n = 1$ y ρ_Λ de la forma (65) tienen sobre la formación de estructuras. De la misma forma, la aproximación propuesta para $H(N)$ podrá ser utilizada en una investigación posterior para efectuar un ajuste de parámetros del modelo al comparar sus predicciones con observaciones de anisotropías y modos de polarización en la CMB, BAO, *lensing*, SNIa, H_0 y RSD, desarrollo que también puede efectuarse por medio de *EFCLASS*. Igualmente, se puede hacer un análisis similar al ya descrito, pero con la densidad holográfica de la forma (42).

Será importante escribir $H(N)$ a segundo orden en los parámetros correctivos b , A y B para intentar disminuir la diferencia que tiene esta aproximación analítica con respecto a la solución numérica de la ecuación (13) (o (14)) y posteriormente calcular el impacto de estos términos en los espectros que se pueden obtener a partir de dicha aproximación.

El procedimiento explicado podrá aplicarse a otros modelos cosmológicos con energía del vacío holográfica, ya sea con variaciones a la forma propuesta por *Granda y Oliveros* u otras propuestas como la de *Li et. al* [28] ó aquellas analizadas por *Rezaei et al.* en [126], incluyendo también gravedad modificada como fuente de energía oscura con otros modelos viables de $f(R)$ como el de *Starobinsky* y el mismo de *Hu-Sawicki* con valores de $n > 1$, entre otros.

Es también una tarea aún por desarrollar, intentar hallar una expansión analítica para $H(N)$ de tipo perturbativo (parámetros correctivos tendiendo a cero) alrededor de Λ CDM para un modelo ρ_Λ CDM -sin incluir $f(R)$ -, siendo ρ_Λ alguna densidad holográfica propuesta. A partir de esto se podrá estudiar la influencia que tienen los términos adicionales a la tasa de expansión de Λ CDM sobre los espectros de potencias.

Otro de los objetivos pendientes es reducir el número de parámetros libres en el

modelo (87) pues aunque este puede explicar de buena forma la evolución cosmológica, satisfaciendo a su vez las restricciones generales de viabilidad incluyendo aquellas de Sistema Solar y al mismo tiempo describir la evolución de las perturbaciones de materia, la cantidad de parámetros conlleva a degenerancias que son características poco favorables para cualquier modelo $f(R)$.

Debido a que la naturaleza del sector oscuro del universo aún no ha sido descifrada, la gravedad modificada $f(R)$ como fuente de energía oscura a escalas cosmológicas cuya existencia no ha sido descartada por las observaciones, sigue siendo una alternativa viable. Igualmente, desarrollos teóricos como la correspondencia AdS/CFT [141] y la mecánica cuántica de agujeros negros han permitido sospechar que diversos sistemas estudiados en n dimensiones pueden ser descritos en modelos de $n - 1$ dimensiones. El *principio holográfico* surgió como una de estas propuestas, aduciendo que sería necesario para plantear una teoría viable de gravedad cuántica. En ese orden de ideas, la energía de vacío proveniente de este principio es posible que exista en el universo sin que sea excluyente con otro tipo de fuentes de energía oscura.

Aún hay un camino largo por recorrer para determinar, primero la naturaleza de la energía oscura, y segundo, si esta proviene de una o varias fuentes. El estudio de la evolución de las perturbaciones primordiales en el universo puede dar pistas sobre la naturaleza y cantidad de estas fuentes.

Referencias

- [1] B. Jain and A. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **91** 141302 (2003).
- [2] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D.* **69** 103501 (2004).
- [3] U. Seljak et al., *Phys. Rev. D.* **71** 103515 (2005).
- [4] D. J. Eisenstein et al., *Astrophys. J.* **633** pg. 560 (2005).
- [5] C. Blake et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **365** pg. 255 (2006).
- [6] P. A. R. Ade et al. [Planck Collaboration], *arXiv: 1502.01589 [astro-ph.CO]* (2015).
- [7] Planck collaboration, *arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO]* (2019).

- [8] Planck collaboration, *arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]* (2019).
- [9] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517** pg. 565 (1999).
- [10] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116** pg. 1009 (1998).
- [11] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **117** pg. 707 (1999).
- [12] J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* **594** pg. 1 (2003).
- [13] R. A. Knop et al., *Astrophys. J.* **598** pg. 102 (2003).
- [14] B. P. Abbott et al. [Virgo, LIGO Scientific Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **119** 161101 (2017) [arXiv: 1710.05832 [gr-qc] (2017)].
- [15] B. P. Abbott et al., *Astrophys. J. Lett.* **848** L13 (2017).
- [16] B. P. Abbott et al., *Astrophys. J. Lett.* **848** L12 (2017).
- [17] C. M. Gutiérrez and N. Ramos-Chernenko, *Astrophys. J.* **929** 1 (2022).
- [18] L. Pogolian, M. Raveri, K. Koyama et al., *Nat. Astron.* (2022). [doi: 10.1038/s41550-022-01808-7]
- [19] O. Mena, J. Santiago and J. Weller, *Phys. Rev. Lett.* **96** pg. 041103 (2006).
- [20] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** pg. 1753 (2006) [arXiv: 0603057v3 [hep-th](2006)].
- [21] V. Sahni, *Lect. Notes Phys.* **653** 141 (2004).
- [22] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380** 235 (2003).
- [23] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** pg. 451 (2010) [arXiv: 0805.1726 [gr-qc](2008)].
- [24] V. Faraoni, *Phys. Rev. D.* **74** 104017 (2006).
- [25] V. Faraoni, *Class. Quantum Grav.* **26** 145014 (2009).
- [26] L. Pogolian and A. Silvestri, *Phys. Rev. D* **77** 023503 (2008).
- [27] S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **76** 023514 (2007).

- [28] B. Li and J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **75** 084010 (2007).
- [29] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **75** 083504 (2007) [arXiv: 061218 [gr-qc](2007)].
- [30] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **98** 131302 (2007).
- [31] L. Amendola, D. Polarski, and S. Tsujikawa, *Int. Jour. Mod. Phys. D* **10** 1555 (2007).
- [32] Y-S. Song, W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **75** 044004 (2007) [arXiv: 0610532 [astro-ph](2006)].
- [33] T. V. Ruzmaikina and A. A. Ruzmaikin, *Sov. Phys. JETP* **30**, 372 (1970); B. N. Breizman, V. Ts. Gurovich, and V. P. Sokolov, *Sov. Phys. JETP* **32**, 155 (1971).
- [34] A. A. Starobinski, *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980).
- [35] J. D. Barrow and A. C. Otewill, *J. Phys. A* **16** 2757 (1983).
- [36] J. D. Barrow and S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* **214** 4 (1988).
- [37] H. J. Schmidt, arXiv: 0109004 [gr-qc] (2001).
- [38] I. de Martino, M. De Laurentis, and S. Capozziello, arXiv: 1507.06123 [gr-qc] (2015).
- [39] S. Capozziello, V.F. Cardone, S. Carloni, and A. Troisi, *Phys. Lett. A* **326** 292 (2004).
- [40] S. Capozziello, V.F. Cardone, and A. Troisi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **0608** 001 (2006).
- [41] P. Zhang, *Phys. Rev. D* **73** 123504 (2006).
- [42] Y. Sobouti, *Astron. & Astroph.* **464** 921 (2007)
- [43] R. Saffari and Y. Sobouti, *Astron. & Astroph.* **472** 833 (2007)
- [44] V. Borka Jovanović, S. Capozziello, P. Jovanović, and D. Borka, arXiv: 1610.03336 [astro-ph.GA] (2016).

- [45] S. Capozziello, M. Faizal, M. Hameeda, B. Pourhassan, V. Salzano, and S. Upadhyay, arXiv: 1711.06630 [astro-ph.CO] (2017).
- [46] S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys D* **11** 483 (2002); S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi, arXiv: 0303041 [astro-ph] (2003).
- [47] S.M. Carroll, V. F. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **70** 043528 (2004).
- [48] T. Chiba, *Phys. Lett. B* **575** 1 (2003).
- [49] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, *Phys. Lett. B* **573** 1 (2003).
- [50] T. P. Sotiriou, *Phys. Lett. B* **645** 389 (2007).
- [51] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68** 123512 (2003) [arXiv: 0307288 [hep-th] (2003)].
- [52] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Gen. Rel. Grav.* **36** 1765 (2004) [arXiv: 0308176 [hep-th] (2003)].
- [53] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni, and A. Troisi, *Int. J. Mod. Phys D* **12** 1969 (2003).
- [54] A. W. Brookfield, C. van de Bruck, and L. M. H. Hall, *Phys. Rev. D* **74** 064028 (2006).
- [55] I. Navarro and K. Van Acoleyen, *JCAP* **02** 022 (2007) [arXiv: 0611127 [gr-qc] (2006)].
- [56] L. G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado, arXiv: 1212.2604 [gr-qc] (2012).
- [57] A. de la Cruz-Dombriz and A. Dobado, *Phys. Rev. D* **74** 087501 (2006).
- [58] S. A. Appleby and R. A. Battye, *Phys. Lett. B* **654** 7 (2007) [arXiv: 0705.3199 [astro-ph] (2007)].
- [59] R. Dick, *Gen. Rel. Grav.* **36** 1 (2004).
- [60] J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. Lett* **93** 17 (2004).
- [61] J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. D* **69** 044026 (2004).

- [62] W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76** 064004 (2007) [arXiv: 0705.1158 [astro-ph] (2007)].
- [63] M. Martinelli, A. Melchiorri, and L. Amendola, arXiv: 0906.2350 [astro-ph.CO] (2009).
- [64] S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv: 0608008 [hep-th] (2006).
- [65] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **74** 086005 (2006) [arXiv: 0611071 [hep-th] (2006)].
- [66] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **652** 343 (2007) [arXiv: 07061378 [hep-th] (2007)].
- [67] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **657** 238 (2007).
- [68] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **77** 026007 (2008).
- [69] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **659** 821 (2008).
- [70] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **78** 046006 (2008).
- [71] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77** 046009 (2008) [arXiv: 0712.4017 [hep-th] (2008)].
- [72] V. Miranda, S. E. Jorás, and I. Waga, *Phys. Rev. Lett.* **102** 221101 (2009).
- [73] L.G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado, *Phys. Rev. D* **83** 024039 (2011).
- [74] A. A. Starobinski, *JETP Lett.* **86** 157 (2007).
- [75] L.G. Jaime, L. Patiño, and M. Salgado, arXiv: 1206.1642 [gr-qc] (2012).
- [76] S. Deser and R.P. Woodard, *Phys. Rev. Lett.* **99** 111301 (2007).
- [77] M. Maggiore and M. Mancarella, *Phys. Rev. D* **90** 023005 (2014).
- [78] H. Nersisyan, Y. Akrami, L. Amendola, T. S. Koivisto, J. Rubio, arXiv: 1606.04349 [gr-qc] (2016).
- [79] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Journal of Physics Conference Series* **66** 012005 (2007) [arXiv: 0611071 [hep-th] (2006)].
- [80] S. Capozziello, V. F. Cardone, A. Troisi, *Phys. Rev. D* **71** 043503 (2005).

- [81] S. Nojiri, S. D. Odintsov, D. Sáez-Gomez, *Phys. Lett. B* **681** 74 (2009) [arXiv: 0908.1269 [hep-th] (2009)].
- [82] S. Carloni, R. Goswami, and P. K. S. Dunsby, *Class. Quant. Grav.* **29** 135012 (2012) [arXiv: 1005.1840 [gr-qc] (2010)].
- [83] P. K. S. Dunsby, E. Elizalde, R. Goswami, S. D. Odintsov, and D. Sáez-Gomez, *Phys. Rev. D* **82** 023519 (2010) [arXiv: 1005.2205 [gr-qc] (2010)].
- [84] K. Karami and M. S. Khaledian, *JHEP* **03** 086 (2011).
- [85] B. Majumder, arXiv: 1307.4448 [gr-qc] (2013).
- [86] T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **85** 084016 (2012).
- [87] L. N. Granda, arXiv: 1408.5644 [gr-qc] (2014).
- [88] L. N. Granda, *Eur. Phys. J. C* **80** 539 (2020).
- [89] L. N. Granda, *Symmetry* **12** 794 (2020).
- [90] L. N. Granda, *JHEP* **12** 205 (2021).
- [91] S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **77** 023507 (2008).
- [92] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **83** 086006 (2011).
- [93] E. V. Linder, *Phys. Rev. D* **80** 123528 (2009) .
- [94] K. Bamba, C. Q. Geng, and C. C. Lee, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **08** 021 (2010).
- [95] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri y S.D. Odintsov, *Astrophys. Space Sci.* **342** (2012) 155.
- [96] B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett* **116** (2016) 221101.
- [97] T. E. Collett et al., *Science* **360** (2018) 1342-1346.
- [98] L. Yang, C. C. Lee, L. W. Luo, and C. Q. Geng, *Phys. Rev. D* **82** 103515 (2010).

- [99] Y. Chen, C.-Q. Geng, C.-C. Lee, L.-W. Luo, and Z.-H. Zhu, *Phys. Rev. D* **91** 044019 (2015).
- [100] S. D. Odintsov, D. Sáez-Chillón, G.S. Sharov, arXiv: 1709.06800 [gr-qc] (2017).
- [101] E. Elizalde, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and R. Myrzakulov, arXiv: 1706.01879 [gr-qc] (2017).
- [102] S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, L. Sebastiani, arXiv: 1708.08346 [gr-qc] (2017).
- [103] K. Bamba and S. D. Odintsov, *JCAP* **04** 024 (2008).
- [104] G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia, S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **72** 063505 (2005) [arXiv: 0504057 [gr-qc] (2005)].
- [105] T. Clifton, J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **72** 103005 (2005) [arXiv: 0509059 [gr-qc] (2005)].
- [106] S. Baghran, M. Farhang, S. Rahvar, *Phys. Rev. D* **75** 044024 (2007) [arXiv: 0701013 [astro-ph] (2007)].
- [107] M. C. B. Abdalla, S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Class. Quant. Grav.* **22** L35 (2005).
- [108] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7** 2333-2346 (1973).
- [109] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D.* **9** 3292-3300 (1974).
- [110] S. W. Hawking, *Nature* **248** 30 (1974).
- [111] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975).
- [112] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** 161 (1973).
- [113] G. t'Hooft, arXiv: 9310026 [gr-qc] (1993).
- [114] L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36** 6377 (1995) [arXiv: 9409089 [hep-th] (1994)].
- [115] W. Fischler, L. Susskind, arXiv: 9806039 [hep-th] (1998).

- [116] P. Hořava, D. Minic, *Phys. Rev. Lett.* **85** 1610 (2000) [arXiv: 0001145 [hep-th] (2000)].
- [117] S. D. Thomas, *Phys. Rev. Lett* **89** 081301 (2002).
- [118] M. Li, *Phys. Lett. B* **603** 1 (2004).
- [119] L. N. Granda, A. Oliveros, *Phys. Lett. B* **669**, 275 (2008); L. N. Granda and A. Oliveros, *Phys. Lett. B* **671** 199 (2009).
- [120] R. G. Cai, *Phys. Lett. B* **657**, 228 (2007) [arXiv: 0707.4049 [hep-th] (2000)]
- [121] L. N. Granda, G. D. Rojas, *Mod. Phys. Lett. A* **35** 6 2050025 (2019).
- [122] S. Basilakos, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **87** 123529 (2013).
- [123] J. Lesgourgues, arXiv:1104.2932v2 [astro-ph.IM] (2011).
- [124] R. Arjona, W. Cardona, S. Nesseris, *Phys. Rev. D* **99** 043516 (2019).
- [125] D. Blas, J. Lesgourgues and T. Tram, *JCAP* **07** 034 (2011).
- [126] M. Rezaei, M. Malekjani, J. Solà, *Phys. Rev. D* **100** 023539 (2019).
- [127] R. Gannouji, B. Moraes and D. Polarski, *JCAP* **02** 34 (2009).
- [128] S. Tsujikawa, R. Gannouji, B. Moraes and D. Polarski, *Phys. Rev. D* **80** 084044 (2009).
- [129] D. Polarski, R. Gannouji, *Phys. Lett. B* **660** 439-443 (2008).
- [130] W.J. Percival et al., *Astrophys. J.* **657** 645 (2007).
- [131] SDSS collaboration, *Phys. Rev. D* **69** 103501 (2004).
- [132] SDSS collaboration, *Phys. Rev. D* **74** 123507 (2006).
- [133] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern Cosmology, 2nd. ed. (libro), Academic Press (ELSEVIER)*, ISBN 978-0-12-815948-4 (2021).
- [134] S. Weinberg, *Cosmology (libro), Oxford University Press*, ISBN 978-0-19-852682-7 (2008).

- [135] C. -P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455** 7-25 (1995).
- [136] H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78** 1-166 (1984).
- [137] W. Cardona, L. Hollenstein, and M. Kunz, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07** 032 (2014).
- [138] R. Bousso, *JHEP* **9907** 1-33 (1999).
- [139] A. Cohen, D. Kaplan, A. Nelson, *Constant. Phys. Rev. Lett.* **82** 4971-4974 (1999).
- [140] S. D. Hsu, *Phys. Lett. B* **594** 13-16 (2004).
- [141] J. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113-1133 (1999).

Apéndices

Apéndice 1

Después de manipular algebraicamente la ecuación (13), incluyendo en ella materia, radiación, gravedad modificada $f(R)$ a través del modelo de *Hu-Sawicki* con $n = 1$, densidad de energía holográfica ρ_Λ de la forma (65) y $H(N)$ dada por (70), y expandiéndola en serie alrededor de $b = 0$, $\mathcal{A} = 0$ y $\mathcal{B} = 0$, se obtiene:

$$0 = T_{ind}(N) + C_b(N) * b + C_{\mathcal{A}}(N) * \mathcal{A} + C_{\mathcal{B}}(N) * \mathcal{B} + T_{ad}(N, b^2, \mathcal{A}^2, \mathcal{B}^2, \dots) \quad , \quad (\text{A.1})$$

donde $T_{ind}(N)$ es un término que no depende de b , $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$, y está dado por:

$$T_{ind}(N) \equiv T_{ind_1} + e^{-3N} T_{ind_2} + e^{-4N} T_{ind_3} \quad , \quad (\text{A.2})$$

siendo

$$\begin{aligned} T_{ind_1} &\equiv H_0^2 \left(\alpha_1 - 1 + \left(\frac{c}{6} - \alpha_1 + 1 \right) \Omega_{m_0} + (1 - \alpha_1) \Omega_{r_0} \right) \quad , \\ T_{ind_2} &\equiv H_0^2 \Omega_{m_0} (\alpha_1 - (3/2)\beta_1) \quad , \\ T_{ind_3} &\equiv H_0^2 \Omega_{r_0} (\alpha_1 - 2\beta_1) \quad ; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$C_b(N)$, $C_{\mathcal{A}}(N)$, $C_{\mathcal{B}}(N)$ toman la forma:

$$\begin{aligned} C_b(N) &\equiv \frac{1}{18} \left(\frac{c^2 e^{3N} H_0^2 \Omega_{m_0}^2}{4e^{3N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - \Omega_{m_0}} \right. \\ &\quad - \frac{c^2 e^{2N} H_0^2 \Omega_{m_0}^2 (e^{4N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - e^N \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0})}{(\Omega_{m_0} - 4e^{3N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1))^2} \\ &\quad + \frac{6c^2 e^{2N} H_0^2 \Omega_{m_0}^3 (e^{4N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - e^N \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0})}{(4e^{3N} (\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} - 1) - \Omega_{m_0})^3} \\ &\quad \left. - 18G_1^2(N) + 18\alpha_1 G_1^2(N) + 18\beta_1 G_1(N) G_1'(N) \right) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$C_{\mathcal{A}}(N) \equiv \left(H_0^2 (1 + (e^{-3N} - 1)\Omega_{m_0} + (e^{-4N} - 1)\Omega_{r_0}) + (\alpha_1 - 1)G_2^2(N) \right) , \quad (\text{A.5})$$

$$C_{\mathcal{B}}(N) \equiv \left(- \frac{H_0^2 (3e^N \Omega_{m_0} + 4\Omega_{r_0})}{2e^{4N}} + (\alpha_1 - 1)G_3^2(N) + \beta_1 G_3(N)G_3'(N) \right) , \quad (\text{A.6})$$

donde $G_i'(N)$ significa derivada de $G_i(N)$ con respecto a la variable de *e-folding* N . Por su parte, $T_{ad}(N, b^2, \mathcal{A}^2, \mathcal{B}^2, \dots)$ contiene términos de orden mayor que uno en $b, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ y productos de estos los cuales no son tenidos en cuenta en la expansión analítica de $H(N)$ propuesta en (70).

Para resolver analíticamente la ecuación (A.1), primero se soluciona el sistema de ecuaciones algebraicas $T_{ind_1} = T_{ind_2} = T_{ind_3} = 0$, de donde se obtienen c, α_1 y β_1 . Con los valores obtenidos de estos parámetros, se procede a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $C_b(N) = C_{\mathcal{A}}(N) = C_{\mathcal{B}}(N) = 0$ teniendo $G_1(N), G_2(N)$ y $G_3(N)$ como las incógnitas a despejar. Con las expresiones para las $G_i(N)$ se logra finalmente de forma explícita la expansión analítica de $H^2(N)$ alrededor de Λ CDM a primer orden en los parámetros $b, \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dada en la ec. (70).

Apéndice 2

$$\begin{aligned}
J_{11} &= 2x - z \quad , \\
J_{12} &= -3 \quad , \\
J_{13} &= -x - 1 \quad , \\
J_{14} &= 0 \quad , \\
J_{21} &= y + \frac{z}{m} \quad , \\
J_{22} &= \frac{m'xz^2}{m^2y^2} - 2z + x + 4 \quad , \\
J_{23} &= -\frac{m'zx}{m^2y} + \frac{x}{m} - 2y \quad , \\
J_{24} &= 0 \quad , \\
J_{31} &= -\frac{z}{m} \quad , \\
J_{32} &= -\frac{m'xz^2}{m^2y^2} \quad , \\
J_{33} &= \frac{m'zx}{m^2y} - \frac{x}{m} - 2(z - 2) - 2z \quad , \\
J_{34} &= 0 \quad , \\
J_{41} &= -\frac{z\beta v}{m\alpha} - \frac{z\beta v}{\alpha} + \frac{2\beta v}{\alpha} + \frac{xv}{\alpha} - \frac{(1 - h - x - y - z)v}{\alpha} \\
&\quad + \frac{2zv}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} - v - 2z + 1 \quad , \\
J_{42} &= -\frac{m'vx\beta z^2}{m^2y^2\alpha} + \frac{2vz}{\alpha} - 2z - \frac{v}{\alpha} + \frac{vx}{\alpha} + 1 \quad , \\
J_{43} &= -\frac{x\beta v}{\alpha} + \frac{\left(\frac{m'zx}{m^2y} - \frac{x}{m} - 2(z - 2) - 2z\right)\beta v}{\alpha} + \frac{xv}{\alpha} + \frac{2zv}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} - 2z \quad , \\
&\quad + (-h - x - y - z + 1)\left(2 - \frac{2v}{\alpha}\right) + 1 \quad , \\
J_{44} &= \frac{xv}{\alpha} + \frac{2zv}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} - 2z + 1 \quad ,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

donde $m' \equiv \frac{dm}{dr}$.

Apéndice 3

$$EV1 = -\frac{v}{\alpha} + \frac{vx}{\alpha} + \frac{2vz}{\alpha} - 2z + 1 \quad ,$$

$$EV2 = \left(- \left(2\sqrt[3]{2}(m^3(-3x^2 + (4 - 8z)x + 6z)y^4 + m^4(-3x^2 + (12 - 9z)x - 7z^2 + 9y + 16z - 16)y^4 + 2mm'x^2z(y+z)y^2 - m^2x(m'z(z+4)(y+z) + xy(y-3m'z))y^2 - m'^2x^2z^2(y+z)^2)\alpha^2) \right) / \left((108m^6\alpha^3y^7 - 81m^6x\alpha^3y^7 - 54m^5x\alpha^3y^7 - 135m^6z\alpha^3y^7 - 162m^5z\alpha^3y^7 - 128m^6\alpha^3y^6 - 9m^5x^3\alpha^3y^6 - 9m^4x^3\alpha^3y^6 - 2m^3x^3\alpha^3y^6 - 20m^6z^3\alpha^3y^6 - 36m^6x^2\alpha^3y^6 + 12m^4x^2\alpha^3y^6 - 24m^6z^2\alpha^3y^6 - 144m^5z^2\alpha^3y^6 - 27m^6xz^2\alpha^3y^6 - 42m^5xz^2\alpha^3y^6 + 144m^6x\alpha^3y^6 + 48m^5x\alpha^3y^6 + 192m^6z\alpha^3y^6 + 72m^5z\alpha^3y^6 - 9m^6x^2z\alpha^3y^6 - 36m^5x^2z\alpha^3y^6 - 24m^4x^2z\alpha^3y^6 - 72m^6xz\alpha^3y^6 - 93m^5xz\alpha^3y^6 + 18m^4xz\alpha^3y^6 + 54m^4m'xz\alpha^3y^6 - 39m^4m'xz^3\alpha^3y^5 + 9m^4m'x^2z^2\alpha^3y^5 + 21m^3m'x^2z^2\alpha^3y^5 + 120m^4m'xz^2\alpha^3y^5 - 18m^3m'xz^2\alpha^3y^5 + 9m^4m'x^3z\alpha^3y^5 + 18m^3m'x^3z\alpha^3y^5 + 6m^2m'x^3z\alpha^3y^5 - 24m^3m'x^2z\alpha^3y^5 - 48m^4m'xz\alpha^3y^5 - 39m^4m'xz^4\alpha^3y^4 + 3m^2m'^2x^2z^3\alpha^3y^4 - 54m^4m'x^2z^3\alpha^3y^4 + 21m^3m'x^2z^3\alpha^3y^4 + 120m^4m'xz^3\alpha^3y^4 - 18m^3m'xz^3\alpha^3y^4 - 9m^2m'^2x^3z^2\alpha^3y^4 - 6mm'^2x^3z^2\alpha^3y^4 - 18m^4m'x^3z^2\alpha^3y^4 + 9m^3m'x^3z^2\alpha^3y^4 + 6m^2m'x^3z^2\alpha^3y^4 + 12m^2m'^2x^2z^2\alpha^3y^4 + 72m^4m'x^2z^2\alpha^3y^4 - 24m^3m'x^2z^2\alpha^3y^4 - 48m^4m'xz^2\alpha^3y^4 + 6m^2m'^2x^2z^4\alpha^3y^3 + 2m'^3x^3z^3\alpha^3y^3 - 9m^2m'^2x^3z^3\alpha^3y^3 - 12mm'^2x^3z^3\alpha^3y^3 + 24m^2m'^2x^2z^3\alpha^3y^3 + 3m^2m'^2x^2z^5\alpha^3y^2 + 6m'^3x^3z^4\alpha^3y^2 - 6mm'^2x^3z^4\alpha^3y^2 + 12m^2m'^2x^2z^4\alpha^3y^2 + 6m'^3x^3z^5\alpha^3y + 2m'^3x^3z^6\alpha^3 + ((4(m^3(-3x^2 + (4 - 8z)x + 6z)y^4 + m^4(-3x^2 + (12 - 9z)x - 7z^2 + 9y + 16z - 16)y^4 + 2mm'x^2z(y+z)y^2 - m^2x(m'z(z+4)(y+z) + xy(y-3m'z))y^2 - m'^2x^2z^2(y+z)^2)^3 + (m^6(3x + 5z - 4)(27y + 3x(z + 4) + 4(z^2 + 2z - 8))y^6 + 3m^5(3x^3 + 12zx^2 + (14z^2 + 31z + 18y - 16)x + 6z(9y + 8z - 4))y^6 + m^3x((2y^2 - 18m'zy - 9m'z^2)x^2 - 3m'z(y + z)(7z - 8)x + 18m'z^2(y + z))y^4 + 3m^4x(3(y^2 - m'zy + 2m'z^2)x^2 + ((8z - 4)y^2 - 3m'z^2y + 6m'z^2(3z - 4))x + z(m'(-18y^2 + (13z^2 - 40z + 16)y + z(13z^2 - 40z + 16)) - 6y^2))y^4 + 6mm'^2x^3z^2(y + z)^2y^2$$

$$\begin{aligned}
& - 3m^2m'x^2z(y+z)(m'z(z+4)(y+z) \\
& + xy(2y-3m'z))y^2 - 2m'^3x^3z^3(y+z)^3)^2\alpha^6)^{1/2})^{1/3}) \\
& + 2(-mxy^2 + m^2(3x-7z+8)y^2 + m'xz(y+z))\alpha + 2^{2/3}\left(108m^6\alpha^3y^7 \right. \\
& - 81m^6x\alpha^3y^7 - 54m^5x\alpha^3y^7 - 135m^6z\alpha^3y^7 - 162m^5z\alpha^3y^7 - 128m^6\alpha^3y^6 \\
& - 9m^5x^3\alpha^3y^6 - 9m^4x^3\alpha^3y^6 - 2m^3x^3\alpha^3y^6 - 20m^6z^3\alpha^3y^6 - 36m^6x^2\alpha^3y^6 \\
& + 12m^4x^2\alpha^3y^6 - 24m^6z^2\alpha^3y^6 - 144m^5z^2\alpha^3y^6 - 27m^6xz^2\alpha^3y^6 - 42m^5xz^2\alpha^3y^6 \\
& + 144m^6x\alpha^3y^6 + 48m^5x\alpha^3y^6 + 192m^6z\alpha^3y^6 + 72m^5z\alpha^3y^6 - 9m^6x^2z\alpha^3y^6 \\
& - 36m^5x^2z\alpha^3y^6 - 24m^4x^2z\alpha^3y^6 - 72m^6xz\alpha^3y^6 - 93m^5xz\alpha^3y^6 + 18m^4xz\alpha^3y^6 \\
& + 54m^4m'xz\alpha^3y^6 - 39m^4m'xz^3\alpha^3y^5 + 9m^4m'x^2z^2\alpha^3y^5 + 21m^3m'x^2z^2\alpha^3y^5 \\
& + 120m^4m'xz^2\alpha^3y^5 - 18m^3m'xz^2\alpha^3y^5 + 9m^4m'x^3z\alpha^3y^5 + 18m^3m'x^3z\alpha^3y^5 \\
& + 6m^2m'x^3z\alpha^3y^5 - 24m^3m'x^2z\alpha^3y^5 - 48m^4m'xz\alpha^3y^5 - 39m^4m'xz^4\alpha^3y^4 \\
& + 3m^2m'^2x^2z^3\alpha^3y^4 - 54m^4m'x^2z^3\alpha^3y^4 + 21m^3m'x^2z^3\alpha^3y^4 + 120m^4m'xz^3\alpha^3y^4 \\
& - 18m^3m'xz^3\alpha^3y^4 - 9m^2m'^2x^3z^2\alpha^3y^4 - 6mm'^2x^3z^2\alpha^3y^4 - 18m^4m'x^3z^2\alpha^3y^4 \\
& + 9m^3m'x^3z^2\alpha^3y^4 + 6m^2m'x^3z^2\alpha^3y^4 + 12m^2m'^2x^2z^2\alpha^3y^4 + 72m^4m'x^2z^2\alpha^3y^4 \\
& - 24m^3m'x^2z^2\alpha^3y^4 - 48m^4m'xz^2\alpha^3y^4 + 6m^2m'^2x^2z^4\alpha^3y^3 + 2m'^3x^3z^3\alpha^3y^3 \\
& - 9m^2m'^2x^3z^3\alpha^3y^3 - 12mm'^2x^3z^3\alpha^3y^3 + 24m^2m'^2x^2z^3\alpha^3y^3 + 3m^2m'^2x^2z^5\alpha^3y^2 \\
& + 6m'^3x^3z^4\alpha^3y^2 - 6mm'^2x^3z^4\alpha^3y^2 + 12m^2m'^2x^2z^4\alpha^3y^2 + 6m'^3x^3z^5\alpha^3y \\
& + 2m'^3x^3z^6\alpha^3 + \left((4(m^3(-3x^2 + (4-8z)x + 6z)y^4 + m^4(-3x^2 + (12-9z)x \right. \\
& - 7z^2 + 9y + 16z - 16)y^4 + 2mm'x^2z(y+z)y^2 - m^2x(m'z(z+4)(y+z) \\
& + xy(y-3m'z))y^2 - m'^2x^2z^2(y+z)^2)^3 + (m^6(3x+5z-4)(27y+3x(z+4) \\
& + 4(z^2+2z-8))y^6 + 3m^5(3x^3+12zx^2+(14z^2+31z+18y-16)x+6z(9y+8z-4))y^6 \\
& + m^3x((2y^2-18m'zy-9m'z^2)x^2-3m'z(y+z)(7z-8)x+18m'z^2(y+z))y^4 \\
& + 3m^4x(3(y^2-m'zy+2m'z^2)x^2+((8z-4)y^2-3m'z^2y+6m'z^2(3z-4))x \\
& + z(m'(-18y^2+(13z^2-40z+16)y+z(13z^2-40z+16))-6y^2))y^4 \\
& + 6mm'^2x^3z^2(y+z)^2y^2-3m^2m'x^2z(y+z)(m'z(z+4)(y+z)+xy(2y-3m'z))y^2 \\
& \left. \left. - 2m'^3x^3z^3(y+z)^3)^2\alpha^6\right)^{1/3}\right) \Big) / (6m^2y^2\alpha) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{ReEV3} = \mathbf{ReEV4} = & \left(\left(2\sqrt[3]{2} \left(m^3 (-3x^2 + (4-8z)x + 6z) y^4 + m^4 (-3x^2 \right. \right. \right. \\
& + (12-9z)x - 7z^2 + 9y + 16z - 16y^4 + 2mx^2z(y+z)m'y^2 - m^2x(z(z+4)(y+z)m' \\
& + xy(y-3zm')y^2 - x^2z^2(y+z)^2(m')^2\alpha^2 \Big/ \left(\left(108m^6\alpha^3y^7 - 81m^6x\alpha^3y^7 \right. \right. \\
& - 54m^5x\alpha^3y^7 - 135m^6z\alpha^3y^7 - 162m^5z\alpha^3y^7 - 128m^6\alpha^3y^6 - 9m^5x^3\alpha^3y^6 \\
& - 9m^4x^3\alpha^3y^6 - 2m^3x^3\alpha^3y^6 - 20m^6z^3\alpha^3y^6 - 36m^6x^2\alpha^3y^6 + 12m^4x^2\alpha^3y^6 \\
& - 24m^6z^2\alpha^3y^6 - 144m^5z^2\alpha^3y^6 - 27m^6xz^2\alpha^3y^6 - 42m^5xz^2\alpha^3y^6 + 144m^6x\alpha^3y^6 \\
& + 48m^5x\alpha^3y^6 + 192m^6z\alpha^3y^6 + 72m^5z\alpha^3y^6 - 9m^6x^2z\alpha^3y^6 - 36m^5x^2z\alpha^3y^6 \\
& - 24m^4x^2z\alpha^3y^6 - 72m^6xz\alpha^3y^6 - 93m^5xz\alpha^3y^6 + 18m^4xz\alpha^3y^6 + 54m^4xz\alpha^3m'y^6 \\
& - 39m^4xz^3\alpha^3m'y^5 + 9m^4x^2z^2\alpha^3m'y^5 + 21m^3x^2z^2\alpha^3m'y^5 + 120m^4xz^2\alpha^3m'y^5 \\
& - 18m^3xz^2\alpha^3m'y^5 + 9m^4x^3z\alpha^3m'y^5 + 18m^3x^3z\alpha^3m'y^5 + 6m^2x^3z\alpha^3m'y^5 \\
& - 24m^3x^2z\alpha^3m'y^5 - 48m^4xz\alpha^3m'y^5 + 3m^2x^2z^3\alpha^3(m')^2y^4 - 9m^2x^3z^2\alpha^3(m')^2y^4 \\
& - 6mx^3z^2\alpha^3(m')^2y^4 + 12m^2x^2z^2\alpha^3(m')^2y^4 - 39m^4xz^4\alpha^3m'y^4 - 54m^4x^2z^3\alpha^3m'y^4 \\
& + 21m^3x^2z^3\alpha^3m'y^4 + 120m^4xz^3\alpha^3m'y^4 - 18m^3xz^3\alpha^3m'y^4 - 18m^4x^3z^2\alpha^3m'y^4 \\
& + 9m^3x^3z^2\alpha^3m'y^4 + 6m^2x^3z^2\alpha^3m'y^4 + 72m^4x^2z^2\alpha^3m'y^4 - 24m^3x^2z^2\alpha^3m'y^4 \\
& - 48m^4xz^2\alpha^3m'y^4 + 2x^3z^3\alpha^3(m')^3y^3 + 6m^2x^2z^4\alpha^3(m')^2y^3 - 9m^2x^3z^3\alpha^3(m')^2y^3 \\
& - 12mx^3z^3\alpha^3(m')^2y^3 + 24m^2x^2z^3\alpha^3(m')^2y^3 + 6x^3z^4\alpha^3(m')^3y^2 + 3m^2x^2z^5\alpha^3(m')^2y^2 \\
& - 6mx^3z^4\alpha^3(m')^2y^2 + 12m^2x^2z^4\alpha^3(m')^2y^2 + 6x^3z^5\alpha^3(m')^3y + 2x^3z^6\alpha^3(m')^3 \\
& + \left(\alpha^6 \left(4 \left(m^3 (-3x^2 + (4-8z)x + 6z) y^4 + m^4 (-3x^2 + (12-9z)x - 7z^2 \right. \right. \right. \\
& + 9y + 16z - 16y^4 + 2mx^2z(y+z)m'y^2 - m^2x(z(z+4)(y+z)m' + xy(y-3zm')) \Big) y^2 \\
& - x^2z^2(y+z)^2(m')^2\alpha^3 + (m^6(3x+5z-4) \left(27y + 3x(z+4) + 4(z^2+2z-8) \right) y^6 \\
& + 3m^5 \left(3x^3 + 12zx^2 + (14z^2 + 31z + 18y - 16)x + 6z(9y+8z-4) \right) y^6 \\
& + m^3x \left((2y^2 - 18zm'y - 9z^2m')x^2 - 3z(y+z)(7z-8)m'x + 18z^2(y+z)m' \right) y^4 \\
& + 3m^4x \left(3(y^2 - zm'y + 2z^2m')x^2 + ((8z-4)y^2 - 3z^2m'y + 6z^2(3z-4)m')x \right. \\
& \left. + z \left((-18y^2 + (13z^2 - 40z + 16)y + z(13z^2 - 40z + 16))m' - 6y^2 \right) y^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6mx^3z^2(y+z)^2(m')^2y^2-3m^2x^2z(y+z)m'\left(z(z+4)(y+z)m'+xy(2y-3zm')\right)y^2 \\
& -2x^3z^3(y+z)^3(m'^3)^2\Big)^{1/2}\Big)^{1/3}\Big)+4(-mxy^2+m^2(3x-7z+8)y^2+xz(y+z)m')\alpha \\
& -2^{2/3}\Big(108m^6\alpha^3y^7-81m^6x\alpha^3y^7-54m^5x\alpha^3y^7-135m^6z\alpha^3y^7-162m^5z\alpha^3y^7 \\
& -128m^6\alpha^3y^6-9m^5x^3\alpha^3y^6-9m^4x^3\alpha^3y^6-2m^3x^3\alpha^3y^6-20m^6z^3\alpha^3y^6-36m^6x^2\alpha^3y^6 \\
& +12m^4x^2\alpha^3y^6-24m^6z^2\alpha^3y^6-144m^5z^2\alpha^3y^6-27m^6xz^2\alpha^3y^6-42m^5xz^2\alpha^3y^6 \\
& +144m^6x\alpha^3y^6+48m^5x\alpha^3y^6+192m^6z\alpha^3y^6+72m^5z\alpha^3y^6-9m^6x^2z\alpha^3y^6-36m^5x^2z\alpha^3y^6 \\
& -24m^4x^2z\alpha^3y^6-72m^6xz\alpha^3y^6-93m^5xz\alpha^3y^6+18m^4xz\alpha^3y^6+54m^4xz\alpha^3m'y^6 \\
& -39m^4xz^3\alpha^3m'y^5+9m^4x^2z^2\alpha^3m'y^5+21m^3x^2z^2\alpha^3m'y^5+120m^4xz^2\alpha^3m'y^5 \\
& -18m^3xz^2\alpha^3m'y^5+9m^4x^3z\alpha^3m'y^5+18m^3x^3z\alpha^3m'y^5+6m^2x^3z\alpha^3m'y^5 \\
& -24m^3x^2z\alpha^3m'y^5-48m^4xz\alpha^3m'y^5+3m^2x^2z^3\alpha^3(m')^2y^4-9m^2x^3z^2\alpha^3(m')^2y^4 \\
& -6mx^3z^2\alpha^3(m')^2y^4+12m^2x^2z^2\alpha^3(m')^2y^4-39m^4xz^4\alpha^3m'y^4-54m^4x^2z^3\alpha^3m'y^4 \\
& +21m^3x^2z^3\alpha^3m'y^4+120m^4xz^3\alpha^3m'y^4-18m^3xz^3\alpha^3m'y^4-18m^4x^3z^2\alpha^3m'y^4 \\
& +9m^3x^3z^2\alpha^3m'y^4+6m^2x^3z^2\alpha^3m'y^4+72m^4x^2z^2\alpha^3m'y^4-24m^3x^2z^2\alpha^3m'y^4 \\
& -48m^4xz^2\alpha^3m'y^4+2x^3z^3\alpha^3(m')^3y^3+6m^2x^2z^4\alpha^3(m')^2y^3-9m^2x^3z^3\alpha^3(m')^2y^3 \\
& -12mx^3z^3\alpha^3(m')^2y^3+24m^2x^2z^3\alpha^3(m')^2y^3+6x^3z^4\alpha^3(m')^3y^2+3m^2x^2z^5\alpha^3(m')^2y^2 \\
& -6mx^3z^4\alpha^3(m')^2y^2+12m^2x^2z^4\alpha^3(m')^2y^2+6x^3z^5\alpha^3(m')^3y+2x^3z^6\alpha^3(m')^3 \\
& +\left(\alpha^6\left(4\left(m^3(-3x^2+(4-8z)x+6z)\right)y^4+m^4(-3x^2+(12-9z)x-7z^2\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+9y+16z-16y^4+2mx^2z(y+z)m'y^2-m^2x\left(z(z+4)(y+z)m'+xy(y-3zm')\right)\right)y^2\right.\right. \\
& \left.\left.-x^2z^2(y+z)^2(m')^2\right)^3+(m^6(3x+5z-4)\left(27y+3x(z+4)+4(z^2+2z-8)\right)y^6\right. \\
& \left.+3m^5\left(3x^3+12zx^2+(14z^2+31z+18y-16)x+6z(9y+8z-4)\right)y^6\right. \\
& \left.+m^3x\left((2y^2-18zm'y-9z^2m')x^2-3z(y+z)(7z-8)m'x+18z^2(y+z)m'\right)y^4\right. \\
& \left.+3m^4x\left(3(y^2-zm'y+2z^2m')x^2+((8z-4)y^2-3z^2m'y+6z^2(3z-4)m')x\right.\right. \\
& \left.\left.+z\left((-18y^2+(13z^2-40z+16)y+z(13z^2-40z+16))m'-6y^2\right)y^4\right.\right. \\
& \left.\left.+6mx^3z^2(y+z)^2(m')^2y^2-3m^2x^2z(y+z)m'(z(z+4)(y+z)m'\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+ xy (2y - 3zm') y^2 - 2x^3 z^3 (y + z)^3 (m'^3)^2 \Big)^{1/2} \Big)^{1/3} \Big) / (12m^2 y^2 \alpha) \quad .$$

Apéndice 4

Aproximación analítica de la tasa de Hubble para el modelo (87) a orden uno en α en función del *redshift*:

$$\begin{aligned} H^2(z) = & H_\Lambda^2(z) + \alpha \frac{c_1 M^2 p (1 + c_3)^{p-1} e^{-(1+c_3)p}}{6 \left((1+z) H'_\Lambda(z) - 2H_\Lambda(z) \right)^2} \\ & * \left[H_\Lambda(z)^2 (4Y - 2) + (1+z)^2 H'_\Lambda(z)^2 (Y - 2) \right. \\ & \left. - (1+z) H_\Lambda(z) \left((4Y - 6) H'_\Lambda(z) + (1+z) H''_\Lambda(z) \right) \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde

$$c_1 = \frac{6H_0^2 \Omega_{\Lambda_0} e^{(1+c_3)p}}{M^2} , \quad (\text{A.9})$$

$$Y(z) \equiv \ln \left(\frac{6H_\Lambda(z) (2H_\Lambda(z) - (1+z) H'_\Lambda(z))}{M^2} \right) ,$$

cada comilla ' en este caso representa derivación con respecto a z , y $H_\Lambda(z)$ es la tasa de expansión para el modelo Λ CDM en función del *redshift*:

$$H_\Lambda^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_{m_0} (1+z)^3 + \Omega_{r_0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda_0} \right) ,$$

siendo H_0 la tasa de expansión actual y $\Omega_{\Lambda_0} = 1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0}$ el parámetro de densidad de energía oscura de densidad constante en $z = 0$. Como puede verse al comparar (A.8) con (101), δH_1^2 corresponde al coeficiente de α en (A.8).

Apéndice 5

A partir de las *variables dinámicas* definidas en (27) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{1}{H} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{F}}{HF} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{\ddot{F}}{HF} - \frac{\dot{F}^2}{HF^2} - \frac{\dot{F}\dot{H}}{H^2F} \right) \\ &= -\frac{\ddot{F}}{H^2F} + \frac{\dot{F}^2}{(HF)^2} + \frac{\dot{F}}{HF} \frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{F}}{H^2F} + x^2 - x(z-2) . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En esta expresión encontramos algunos términos que pueden expresarse de forma disinta. Para esto, recordando que $\ddot{F} = \dot{R}^2 F'' + \ddot{R} F'$ y acudiendo a la relación (10), de (13) y (15) se obtiene respectivamente

$$3H^2F + \frac{f}{2} - 3 \left(2H^2 + \dot{H} \right) F + 3H\dot{F} = \kappa^2 \rho , \quad (\text{A.11})$$

$$\left(3H^2 + \dot{H} \right) F - \frac{f}{2} - 2H\dot{F} - \ddot{F} = \kappa^2 p , \quad (\text{A.12})$$

ecuaciones que al sumarse toman la forma

$$-2\dot{H}F + H\dot{F} - \ddot{F} = \kappa^2(\rho + p) . \quad (\text{A.13})$$

Por otra parte, requiriendo que la energía de vacío cumpla con la ley de conservación, la ecuación de continuidad conduce a

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0 \Rightarrow p_\Lambda = -\frac{1}{3H}\dot{\rho}_\Lambda - \rho_\Lambda . \quad (\text{A.14})$$

Para hallar $\dot{\rho}_\Lambda$ se utiliza la forma de ρ_Λ dada en (42), con lo cual

$$\dot{\rho}_\Lambda = \frac{3}{\kappa^2} \left(\dot{F} \left(\alpha H^2 + \beta \dot{H} \right) + F \left(2\alpha H\dot{H} + \beta \ddot{H} \right) \right) , \quad (\text{A.15})$$

que al reemplazarla en (A.14) da lugar a

$$p_\Lambda = -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\dot{F}}{H} (\alpha H^2 + \beta \dot{H}) + \frac{F}{H} (2\alpha H \dot{H} + \beta \ddot{H}) + 3F (\alpha H^2 + \beta \dot{H}) \right) . \quad (\text{A.16})$$

Ahora, reemplazando (A.16) y (42) en (A.13), seguidamente despejando $\ddot{F}$ y dividiendo todo por $H^2 F$ se obtiene

$$\frac{\ddot{F}}{H^2 F} = \frac{\dot{F}}{H F} - 2 \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\kappa^2 \rho_m}{H^2 F} + \frac{\dot{F}}{H F} \left(\alpha + \beta \frac{\dot{H}}{H^2} \right) + 2\alpha \frac{\dot{H}}{H^2} + \beta \frac{\ddot{H}}{H^3} , \quad (\text{A.17})$$

la cual, en términos de las *variables dinámicas* y el parámetro de densidad de materia definidos en (27) se expresa como

$$\frac{\ddot{F}}{H^2 F} = -x - 2(z - 2) - 3\Omega_m - x(\alpha + \beta(z - 2)) + 2\alpha(z - 2) + \beta \frac{\ddot{H}}{H^3} . \quad (\text{A.18})$$

Para calcular el último término de la ec. (A.18) observemos que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dF} \frac{dF}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dR}{dt} = 24H\dot{H} + 6\ddot{H} , \quad (\text{A.19})$$

en donde se ha tenido en cuenta la ec. (10). Igualando estas dos relaciones se puede despejar $\ddot{H}$, la cual, al dividirla entre H^3 se puede visualizar como

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{H}}{H^3} &= \frac{\dot{F}}{H F} \frac{R}{6H^2} \frac{F}{R} \frac{dR}{dF} - 4 \frac{\dot{H}}{H^2} = -xz \frac{1}{\left(\frac{R}{F} \frac{dF}{dR} \right)} - 4 \frac{\dot{H}}{H^2} \\ &= \frac{xz}{m} - 4(z - 2) , \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

en cuyo cálculo se han utilizado (27) y (33). Reemplazando este resultado en (A.18) resulta

$$\frac{\ddot{F}}{H^2 F} = -(1 + \alpha)x - 2(z - 2)(1 - \alpha + 2\beta) - \beta x(z - 2) - \frac{\beta}{m}xz - 3\Omega_m , \quad (\text{A.21})$$

obteniendo así una expresión equivalente para el primer término a la derecha del

igual en la segunda línea de (A.10). Reemplazando (A.21) y (49) en (A.10), después de alguna manipulación algebraica, se obtiene la ec. (46). Por otra parte, para la *variable dinámica* y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dN} &= -\frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{f}{6H^2 F} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{F\dot{R}}{6H^2 F} - \frac{f\dot{F}}{6H^2 F^2} - \frac{2f\dot{H}}{6H^3 F} \right) \\ &= -\frac{\dot{R}}{6H^3} + \frac{f}{6H^2 F} \frac{\dot{F}}{HF} + \frac{2f}{6H^2 F} \frac{\dot{H}}{H^2} , \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

la cual, recordando que $\dot{R} = (dR/dF)\dot{F}$, y utilizando (27), se puede expresar como

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\dot{F}}{6H^3} \left(\frac{dR}{dF} \frac{F}{R} \right) \frac{R}{F} + xy - 2y(z-2) = xy + \frac{xz}{m} - 2y(z-2) , \quad (\text{A.23})$$

que corresponde a la ec. (47). Para z tenemos que

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{6H^2} \right) = \frac{1}{H} \left(\frac{\dot{R}}{6H^2} - \frac{2R\dot{H}}{6H^3} \right) = -\frac{xz}{m} - \frac{2R}{6H^2} \frac{\dot{H}}{H^2} , \quad (\text{A.24})$$

en donde se ha utilizado la relación

$$\frac{\dot{R}}{6H^3} = \frac{\dot{F}}{HF} \frac{R}{6H^2} \frac{F}{R} \frac{dR}{dF} = -\frac{xz}{m} . \quad (\text{A.25})$$

A partir de (A.24) y recordando la forma de z dada en (27) se obtiene (48) .

Apéndice 6

Los cambios efectuados en el código *EFCLASS* para implementar el modelo (87) con la expresión analítica (A.8) fueron realizados en:

a) Archivo *background.h* de la carpeta INCLUDE, introduciendo desde la línea #78 las definiciones de los parámetros α , $\log_{10}\alpha$, p y c_3 del modelo (87) a través del comando *double*. Los parámetros α , p y c_3 fueron llamados *alphaGer1*, *pGer1* y *c3Ger1* respectivamente. Las líneas de código incluidas fueron:

```
double pGer1; /* PARAMETER IN GERMAN'S MODEL #1*/  
double c3Ger1; /* PARAMETER IN GERMAN'S MODEL #1*/  
double alphaGer1; /* PARAMETER IN GERMAN'S MODEL #1*/  
double log10alphaGer1; /*log10 PARAMETER FOR GERMAN'S MODEL #1*/
```

b) Archivo *input.c* de la carpeta SOURCE, agregando en la sección */* Step 1 */*, dentro del condicional *if (flag1 == _TRUE_)* que se encuentra en la línea de código #979, lo siguiente:

```
class_read_double("log10alphaGer1",pba->log10alphaGer1);  
class_read_double("c3Ger1",pba->c3Ger1);  
class_read_double("pGer1",pba->pGer1);
```

c) Archivo *input.c* de la carpeta SOURCE, incorporando desde la línea #3021 los valores predeterminados de α , $\log_{10}\alpha$, p y c_3 a través del fragmento de código *pba->*, dando valores iniciales $\alpha = p = c_3 = 0$ y $\log_{10}\alpha = -100$. Estos valores se modifican posteriormente a través del archivo de extensión *.ini* que se menciona abajo en el numeral i). Las líneas de código incluidas fueron:

```
pba->pGer1 = 0;  
pba->c3Ger1 = 0;  
pba->alphaGer1 = 0;  
pba->log10alphaGer1 = -1e2;
```

d) Archivo *background.c* de la carpeta SOURCE, añadiendo en la línea #430 de la sección */* Lambda */*, al interior del condicional *if (pba->has_fR ==*

`_TRUE_`) otro condicional dado por `if (pba->alphaGer1 !=0.)` , y agregando a su vez dentro de este las expresiones para w_f y $\kappa^2 \rho_f / 3$ a orden uno en α mostradas abajo en el presente apéndice, seguidas de las mismas definiciones para ρ_{tot} y p_{tot} dadas en los otros condicionales `if` de la sección `/* Lambda */` . Las líneas de código incluídas fueron:

```
if (pba->alphaGer1 != 0.)
{
    /* w(a) */
    /* 1st order in terms of alpha */
    pvecback[pba->index_bg_w_fR] = ... ;

    /* rho DE in terms of alpha */
    /* 1st order in terms of alpha */
    pvecback[pba->index_bg_rho_lambda] = ... ;

    rho_tot += pvecback[pba->index_bg_rho_lambda];

    p_tot += pvecback[pba->index_bg_w_fR]*pvecback[pba
                                                    ->index_bg_rho_lambda];
}
```

donde los puntos suspensivos corresponden respectivamente a las expresiones para w_f y $\kappa^2 \rho_f / 3$ que aparecen abajo en este apéndice.

e) Archivo `background.c` de la misma carpeta del numeral anterior, en la sección llamada `/** - compute derivative of H with respect to conformal time */` , dentro del condicional `if (pba->has_fR == _TRUE_)` que se encuentra en la línea #508, se incorporó otro condicional dado por `if (pba-> alphaGer1 !=0.)` , dentro del cual se introdujeron de forma similar a como se hizo en el numeral anterior, las expresiones para $\frac{df}{dR}$, $H_0^2 \frac{d^2 f}{dR^2}$ y $\frac{1}{H_0} \frac{F}{d\eta}$ a orden uno en α que se encuentran abajo en el presente apéndice.

f) Archivo `background.c` de la carpeta SOURCE, en la línea #993 se agregó el fragmento de código `&& (pba->log10alphaGer1 != -1e2) &&` .

g) La línea #995 del mismo archivo del numeral anterior, dentro de la función

`printf("... ")` se añadió `log10alphaGer1`.

h) La cláusula *else* de la línea #998 del mismo archivo del numeral anterior, incluyéndose dentro de esta un condicional dado por:

```
if (pba->log10alphaGer1 != -1e2)
{
  pba->alphaGer1=pow(10.,pba->log10alphaGer1);
  pba->pGer1=pow(pba->pGer1,1.);
  pba->c3Ger1=pow(pba->c3Ger1,1.);
  pba->has_fR = _TRUE_;
  printf("RUNNING GERMAN'S MODEL 1 WITH GERMAN'S PARAMETRISATION\n");
}
```

i) Archivo *Ger1.ini* : Los parámetros de inicialización y los valores específicos de α , p y c_3 del modelo (87) con los cuales se ejecutó el código, se establecieron cada vez que fue necesario en el archivo de extensión *.ini* mencionado, el cual se creó dentro del directorio donde se instaló *EFCLASS*.

Las expresiones a orden uno en el parámetro α para el modelo (87) obtenidas a partir de la aproximación analítica (A.8) escritas en C++ e implementadas en *EFCLASS* por medio de la descripción anterior son:

$\frac{df}{dR}$ a orden uno en α es:

$$1 - (2 * \text{pow}(a,3) * \text{pow}(1 + \text{pba} \rightarrow c3Ger1, -1 + \text{pba} \rightarrow pGer1) * (-1 + om0 + or0) * \text{pba} \rightarrow pGer1 * \text{pba} \rightarrow \alpha Ger1) / (-om0 + 4 * \text{pow}(a,3) * (-1 + om0 + or0))$$

$H_0^2 \frac{d^2 f}{dR^2}$ a orden uno en α es:

$$(-2 * \text{pow}(a,6) * \text{pow}(1 + \text{pba} \rightarrow c3Ger1, -1 + \text{pba} \rightarrow pGer1) * (-1 + om0 + or0) * \text{pba} \rightarrow pGer1 * \text{pba} \rightarrow \alpha Ger1) / (3 * \text{pow}(om0 - 4 * \text{pow}(a,3) * (-1 + om0 + or0), 2))$$

$\frac{1}{H_0} \frac{df/dR}{d\eta}$ a orden uno en α es:

$$(6*\text{pow}(a,4)*\text{pow}(1 + \text{pba->c3Ger1}, -1 + \text{pba->pGer1})*\text{om0}*(-1 + \text{om0} + \text{or0}) \\ * \text{sqrt}((1 + (-1 + \text{pow}(a,-3))*\text{om0} + (-1 + \text{pow}(a,-4))*\text{or0}))*\text{pba->pGer1} * \\ \text{pba->alphaGer1}) / \text{pow}(\text{om0} - 4*\text{pow}(a,3)*(-1 + \text{om0} + \text{or0}), 2)$$

La ecuación de estado efectiva w_f para $f(R)$ a orden uno en α es:

$$-1 - (\text{pow}(1 + \text{pba->c3Ger1}, -1 + \text{pba->pGer1})*(3*a*\text{pow}(\text{om0}, 3) + 8*\text{pow}(\text{om0}, 2) \\ * \text{or0} - 168*\text{pow}(a, 4)*\text{pow}(\text{om0}, 2)*(-1 + \text{om0} + \text{or0}) - 208*\text{pow}(a, 3)*\text{om0}* \text{or0}*(-1 \\ + \text{om0} + \text{or0}) + 192*\text{pow}(a, 7)*\text{om0}*\text{pow}(-1 + \text{om0} + \text{or0}, 2) + 128*\text{pow}(a, 6)*\text{or0}*\text{pow}(- \\ 1 + \text{om0} + \text{or0}, 2))*\text{pba->pGer1}*\text{pba->alphaGer1}) / (3.*a*\text{pow}(-\text{om0} + 4*\text{pow}(a, 3)*(- \\ 1 + \text{om0} + \text{or0}), 3))$$

$\frac{\kappa^2 \rho_f}{3}$ a orden uno en α es:

$$-\text{pow}(\text{pba->H0}, 2)*(-1 + \text{om0} + \text{or0}) + (3*\text{pow}(1 + \text{pba->c3Ger1}, -1 + \text{pba->pGer1}) \\ *\text{pow}(\text{pba->H0}, 2)*(-1 + \text{om0} + \text{or0})*\text{pba->pGer1}*\text{pba->alphaGer1} * \\ (-7*a*\text{pow}(\text{om0}, 2) - 8*\text{om0}* \text{or0} + 8*\text{pow}(a, 4)*\text{om0}*(-1 + \text{om0} + \text{or0}) + 8*\text{pow}(a, 3) \\ * \text{or0}*(-1 + \text{om0} + \text{or0}) + 8*\text{pow}(a, 7)*\text{pow}(-1 + \text{om0} + \text{or0}, 2) - a*\text{pow}(\text{om0} - \\ 4*\text{pow}(a, 3)*(-1 + \text{om0} + \text{or0}), 2)* \log((3*(4 + (-4 + \text{pow}(a, -3))*\text{om0} - 4*\text{or0}))/\text{om0}))) \\ /(a*\text{pow}(\text{om0} - 4*\text{pow}(a, 3)*(-1 + \text{om0} + \text{or0}), 2))$$

Vale la pena mencionar que en las anteriores líneas de código se utilizaron las siguientes convenciones para el modelo (87):

pba->pGer1: parámetro " p "; pba->c3Ger1: parámetro " c_3 "; pba->alphaGer1: parámetro " α "; pba->H0: valor actual de la tasa de Hubble; om0: valor actual del parámetro de densidad de materia; or0 : valor actual del parámetro de densidad de radiación; a: factor de escala.

Tal como se mencionó, los valores para los parámetros α , c_3 y p fueron introducidos a voluntad propia en el archivo de inicialización *Ger1.ini*, mientras que los demás parámetros que caracterizan al modelo estándar y aquellos requeridos para hallar los espectros fueron proporcionados internamente por *EFCLASS*.