Vol. XIX, Nº 1, Junio (2011)
Matemáticas: 79–88

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria
©Escuela Regional de Matemáticas
Universidad del Valle - Colombia

Algebricidad de los ejemplos de Lawson

Andrés Julián Castrillón Vásquez
Universidad del Valle

Héber Mesa Palomino
Universidad del Valle

Recibido Ago. 11, 2010 Aceptado Mar. 23, 2011

Abstract

In this paper we discuss the algebricity of the minimal surface $\xi_{2,2} \subset S^3$. This surface is one of the examples constructed by Lawson [1] to show the existence of minimal compact and orientable surfaces of any positive genre in S^3. He conjectured it is not are algebraic surface, *i. e.*, there is no homogeneous polynomial $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ such that $f^{-1}(0) \cap S^3 = \xi_{2,2}$ and $|\nabla f(x)| \neq 0$, for all $x \in \xi_{2,2}$. Here we proof that there is no homogeneous polynomial of degree five with these characteristics.

Keywords: Minimal manifolds, algebraic surfaces, hypersurfaces.

MSC(2000): 49Q05, 53A10

Resumen

En este artículo se discute la algebricidad de la superficie mínima $\xi_{2,2} \subset S^3$. Esta superficie es uno de los ejemplos que Lawson [1] construye para mostrar la existencia de superficies mínimas compactas orientables de cualquier genero positivo en S^3. Él conjeturó que esta superficie no es algebraica; esto es, no existe un polinomio homogéneo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) \cap S^3 = \xi_{2,2}$ y $|\nabla f(x)| \neq 0$ para todo $x \in \xi_{2,2}$. Aquí mostramos que no existe un polinomio de grado cinco con estas características.

Palabras y frases claves: Variedades mínimas, superficies algebraicas, hipersuperficies.

1 Introducción

Sea $M \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$ una superficie compacta, orientable y sin frontera. Denotaremos por $\nu : M \to S^3$ la aplicación de Gauss sobre M, es decir, ν es un campo vectorial diferenciable sobre M tal que $\langle \nu(x), \nu(x) \rangle = 1$, $\langle \nu(x), x \rangle = 0$ y $\langle \nu(x), v \rangle = 0$ y todo $v \in T_xM$. Para todo $x \in M$, este campo descompone ortogonalmente el espacio ambiente como $\mathbb{R}^4 = T_xM \oplus gen\{\nu(x)\} \oplus gen\{x\}$.

Para $x \in M$ y $v \in T_xM$, se define el operador de forma como la aplicación $A_x : T_xM \to T_xM$ donde $A_x(v) = -d\nu_x(v)$. Se sabe que A_x es una aplicación lineal autoadjunta, esto es, $\langle A_x(v), w \rangle = \langle v, A_x(w) \rangle$ para todo $v, w \in T_xM$. Esto garantiza la existencia de $v_1, v_2 \in T_xM$ y $\kappa_1(x), \kappa_2(x) \in \mathbb{R}$ tales que $A_x(v_1) = \kappa_1(x)v_1$ y $A_x(v_2) = \kappa_2(x)v_2$; $\kappa_1(x)$ y $\kappa_2(x)$ son llamados curvaturas principales de M en x. Definimos la curvatura media de M en x como el promedio de las curvaturas principales y la denotamos por $H(x)$, así $H(x) = \frac{1}{2}(\kappa_1(x) + \kappa_2(x))$. Una superficie es mínima si su curvatura media en todo punto es cero. De otro lado, diremos que M es una superficie algebraica de grado n si existe un polinomio homogéneo irreducible $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de grado n tal que $f^{-1}(0) \cap S^3 = M$ y $|\nabla f(x)| \neq 0$ para todo $x \in M$. Para las superficies algebraicas podemos definir

la aplicación de Gauss como $\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Además, si existe tal polinomio que determine la variedad, se define $\mathrm{Expr}(f) = |\nabla f|^2 \triangle f - \frac{1}{2}\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f\rangle$ como la expresión del polinomio . Una variedad es mínima sí y solo sí para todo x que pertenece a ella, se tiene que $\mathrm{Expr}(f)(x) = 0$. La demostración de este resultado se puede consultar en [5, 6].

Algunos ejemplos conocidos de superficies mínimas y algebraicas en S^3 son: los ecuadores, que se definen como $S^2(v) = \{x \in S^3 : \langle x, v\rangle = 0\}$ donde $v \in S^3$ y el toro de Clifford $\mathcal{T} = \{x \in S^3 : x_1x_3 - x_2x_4 = 0\}$.

2 Los ejemplos de Lawson

En 1970, Lawson [1] construyó una gran familia de superficies mínimas, compactas y sin frontera en S^3. Estos ejemplos mostraron que toda superficie compacta (excepto el espacio proyectivo) se puede considerar inmersa en S^3 de manera mínima. Más aún, toda superficie compacta y orientable se pueden encajar en S^3. Lawson dividió esta gran familia de superficies en varias subfamilias. En esta sección describiremos una de estas familias y abordaremos el problema de la algebricidad de estas superficies.

Consideremos en S^3 las circunferencias $C_1 = \{x \in S^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ y $C_2 = \{x \in S^3 \mid x_3 = x_4 = 0\}$. Para cada par de enteros no negativos m y k tomemos puntos $P_1, P_2 \in C_1$ y $Q_1, Q_2 \in C_2$ tales que la distancia en S^3 entre P_1 y P_2 sea $\frac{\pi}{m+1}$ y la distancia en S^3 entre Q_1 y Q_2 sea $\frac{\pi}{k+1}$. Construyamos el polígono $P_1Q_1P_2Q_2$ de tal forma que sus lados sean segmentos de geodésica y dos vértices sean unidos a través del segmento de geodésica más corto entre ellos. Denotaremos a este polígono geodésico $\Gamma_{m,k}$. Sea $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$ la superficie en S^3 solución al problema de Plateau [1] asociada a esta curva cerrada, entonces $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$ es mínima y $\partial(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}) = \Gamma_{m,k}$. Denotaremos mediante γ_1 a la geodésica que pasa por P_1 y Q_1, γ_2 a la que pasa por Q_1 y P_2 y análogamente denotamos γ_3 y γ_4.

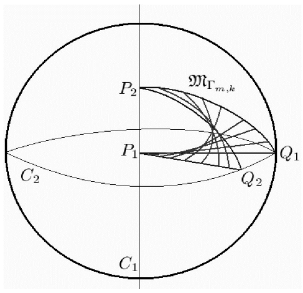


Figura 1: Región fundamental

[1] La superficie con área mínima y frontera $\Gamma_{m,k}$.

Nótese que toda geodésica en S^3, vista como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, está contenida en un subespacio vectorial bidimensional. Es fácil verificar las contenencias $\gamma_1 \subset gen\{P_1, Q_1\}$, $\gamma_2 \subset gen\{P_2, Q_1\}$, $\gamma_3 \subset gen\{P_2, Q_2\}$ y $\gamma_4 \subset gen\{P_1, Q_2\}$. A cada geodésica γ_i asociaremos una isometría $r_{\gamma_i} : S^3 \to S^3$ que consiste en una reflexión sobre el plano donde la geodésica γ_i se encuentra. La primera simetría es $r_{\gamma_1}(x) = 2(\langle x, P_1\rangle P_1 + \langle x, Q_1\rangle Q_1) - x$. Las demás se calculan de manera análoga.

Denotaremos $G_{\Gamma_{m,k}}$ el grupo generado por las simetrías asociadas a cada geodésica, esto es $G_{\Gamma_{m,k}} = \langle r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2}, r_{\gamma_3}, r_{\gamma_4}\rangle$. En [1, 2] se ha demostrado que éste es un grupo de orden $2(m+1)(k+1)$. Si consideramos $\xi_{m,k} = \cup_{g\in G_{\Gamma_{m,k}}} g(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}})$, claramente se tiene que $\xi_{m,k} \subset S^3$. Lawson [1] ha demostrado que ésta es una superficie mínima, orientable, compacta, sin frontera y de género mk.

Observación 1. *Para $r \in G_{\Gamma_{m,k}}$, se tiene que r es una composición finita de reflexiones geodésicas r_{γ_i}, y dado que cada r_{γ_i} es una isometría, entones r es una isometría. De otro lado se tiene que $r(\xi_{m,k}) = r(\cup_{h\in G_{\Gamma_{m,k}}} h(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}})) = \cup_{h\in G_{\Gamma_{m,k}}}(r\circ h)(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}) = \xi_{m,k}$, pues cuando h recorre todos los elementos de $G_{\Gamma_{m,k}}$, $r\circ h$ también lo hace. En conclusión, para cada $r \in G_{\Gamma_{m,k}}$, la función $r : \xi_{m,k} \to \xi_{m,k}$ es una isometría.*

Sean las matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} \cos 2\beta & -\operatorname{sen} 2\beta \\ \operatorname{sen} 2\beta & \cos 2\beta \end{smallmatrix}\right)$ y denotemos $(X, Y) = \left(\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$ con X, Y matrices cuadradas. Para $\theta = \frac{\pi}{k+1}$ y $\beta = \frac{\pi}{m+1}$ se demostró en [2] y [6] que $r_{\gamma_1}(x) = (A, A)x$, $r_{\gamma_2}(x) = (A, AC)x$, $r_{\gamma_3}(x) = (AB, AC)x$ y $r_{\gamma_4}(x) = (AB, A)x$. Así, el grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$ se reescribe como:

$$\begin{aligned} G_{\Gamma_{m,k}} &= \langle (A, A), (B, I), (I, C)\rangle \\ &= \{(A^i B^{j_1}, A^i C^{j_2}) \mid 0 \le i \le 1, 0 \le j_1 \le k, 0 \le j_2 \le m\}. \end{aligned}$$

3 Algebricidad

Acerca de la algebricidad de los ejemplos de Lawson se tiene que $\xi_{1,1}$ es el toro de Clifford y, por tanto, es una superficie algebraica de grado dos. En [2] se presentan en detalle los teoremas siguientes:

Teorema 1. *Ninguna superficie $\xi_{m,k}$ con $m + k$ impar es algebraica.*

Si $\xi_{m,k} = f^{-1}(0)\cap S^3$ donde f es un polinomio homogéneo de grado n, entonces ésta superficie tiene simetría antipodal. Esto último se concluye dado que, si $x \in M$, entonces $f(-x) = (-1)^n f(x) = 0$, lo que implica que $-x \in M$. De otro lado en [2] se demuestra que si $m + k$ es impar entonces, la superficie $\xi_{m,k}$ no tiene simetría antipodal, y el resultado se sigue.

Teorema 2. *Si mk es par, $\xi_{m,k}$ no es una superficie algebraica de grado par.*

Este resultado es de gran importancia para la siguiente sección, pues limita la paridad del grado del polinomio homogéneo que podría modelar a $\xi_{2,2}$.

Teorema 3. *Si $\xi_{m,k}$ es una superficie algebraica de grado n, entonces se tiene que $n > \max\{m, k\}$.*

Este resultado implica, que el número de superficies $\xi_{m,k}$ algebraicas de un grado dado es finito. Por ejemplo, las únicas superficies de Lawson que podrían ser algebraicas de grado cuatro son: $\xi_{1,1}$, $\xi_{1,2}$, $\xi_{1,3}$, $\xi_{2,2}$, $\xi_{2,3}$ y $\xi_{3,3}$. Teniendo en cuenta que $\xi_{1,1}$ es el toro de Clifford y aplicando el Teorema 3.2, esta lista se reduce a $\xi_{1,3}$ y $\xi_{3,3}$.

Teorema 4. *Ninguna de las superficies de Lawson $\xi_{m,k}$ es algebraica de grado cuatro.*

4 La conjetura de Lawson

En [1], Lawson conjeturó que $\xi_{2,2}$ no es algebraica, esto es, no existe un polinomio homogéneo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) \cap S^3 = \xi_{2,2}$ donde $|\nabla f(x)| \neq 0$ para todo $x \in \xi_{2,2}$. En virtud de los teoremas de la sección anterior, si tal polinomio existe, su grado debe ser impar y mayor o igual a tres. En [4] se probó que no existen superficies mínimas algebraicas de grado tres en S^3. A continuación demostraremos que el grado de tal polinomio tampoco puede ser cinco.

En [2] se demuestra que si $\xi_{2,2}$ es algebraica de grado cinco, entonces el polinomio homogéneo que determina a ésta superficie es de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^3 - 3x_1x_2^2)p(x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_3^3 - 3x_3x_4^2)q(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

donde p y q son polinomios homogéneos de grado 2. Mostraremos que los polinomios p y q no existen.

Lema 1. *Sean $M \subset S^3$ una superficie, $x \in M$, $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función homogénea de clase C^1 y $\nu(x) \in T_xS^3$ un vector normal a T_xM. Si $g|_M = 0$, entonces, los vectores $\nabla g(x)$ y $\nu(x)$ son paralelos para todo $x \in M$. En particular se puede considerar ν como la aplicación de Gauss sobre M.*

Demostración. Sean $x \in M$ y $v \in T_xM$. Consideremos una curva α en M que pase por x con vector velocidad v, esto es, para algún $\epsilon > 0$ consideramos una función $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Notese que la función $g \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ es constante a cero, por tanto $(g \circ \alpha)'(0) = 0$. Así, $\langle \nabla g(x), v \rangle = 0$, lo que implica que $\nabla g(x) \in (T_xM)^{\perp}$. Dado que $\mathbb{R}^4 = T_xM \oplus gen\{\nu(x)\} \oplus gen\{x\}$, entonces se concluye que el vector $\nabla g(x) \in gen\{x\} \oplus gen\{\nu(x)\}$. De otro lado, los vectores $\nabla g(x)$ y x son ortogonales, pues la homogeneidad de g garantiza que $\langle \nabla g(x), x \rangle = \partial(g)g(x) = 0$ (siendo $\partial(g)$ el grado del polinomio g). Finalmente se concluye $\nabla g(x) \in gen\{\nu(x)\}$, esto es, $\nabla g(x)$ y $\nu(x)$ son paralelos. □

Proposición 1. *No existe un polinomio homogéneo irreducible f de grado cinco, tal que $\xi_{2,2} = f^{-1}(0) \cap S^3$ y $|\nabla f(x)| \neq 0$ para todo $x \in \xi_{2,2}$.*

Demostración. Actuemos por contradicción, y supongamos la existencia de tal polinomio. Tal como se mencionó anteriormente, el polinomio f se escribe como $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^3 - 3x_1x_2^2)p(x_1, x_2, x_3, x_4) + (x_3^3 - 3x_3x_4^2)q(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Los polinomios p y q son de la forma: $p(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3 + a_7x_1x_4 + a_8x_2x_3 + a_9x_2x_4 + a_{10}x_3x_4$ y $q(x) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_1x_4 + b_8x_2x_3 + b_9x_2x_4 + b_{10}x_3x_4$. Aquí, a_i, b_i son constantes reales para $i = 1, 2, \ldots, 10$. Sin perdida de generalidad, en la construcción de $\xi_{2,2}$, consideramos $P_1 = e_4 = (0, 0, 0, 1)$ y $Q_1 = e_2 = (0, 1, 0, 0)$, luego $e_2, e_4 \in \xi_{2,2}$. Un cálculo directo muestra que $|\nabla f(e_2)| = |a_2|$ y $|\nabla f(e_4)| = |b_4|$, por ende $a_2 \neq 0$ y $b_4 \neq 0$, dada la regularidad de la superficie.

Recordemos que $\xi_{2,2}$ se construye a partir del polígono geodésico $P_1Q_1P_2Q_2$. Denotamos $P_3 = r_{\gamma_1}(P2)$ y $Q_3 = r_{\gamma_1}(Q_2)$. Los puntos $-P_i, -Q_j \in \xi_{2,2}$ para $i, j = 1, 2, 3$, dada la suposición sobre la algebricidad de $\xi_{2,2}$. No es difícil probar que para i, j fijos, los arcos geodésicos P_iQ_j, $Q_j(-P_i)$, $(-P_i)(-Q_j)$ y $(-Q_j)P_i$ se encuentran contenidos en $\xi_{2,2}$. Luego, la circunferencia que pasa por los puntos P_i y Q_j esta contenida en $\xi_{2,2}$; así el polinomio f restringido a ésta, se anula. Dado que el polinomio f es homogéneo, si f se anula en una circunferencia C, entonces f se anula también en el plano que contiene a C. Para nuestro caso, f se anula en los planos $\Pi_{i,j} = gen\{P_i, Q_j\}$ con $i, j = 1, 2, 3$ [2]. Un cálculo directo muestra que:

$$\begin{aligned} P_1 &= e_4, & Q_1 &= e_2, \\ P_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4, & Q_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \\ P_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4, & Q_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{1,1} &= \{(0, x_2, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{1,2} &= \{(\sqrt{3}x_2, x_2, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{1,3} &= \{(-\sqrt{3}x_2, x_2, 0, x4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{2,1} &= \{(0, x_2, \sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{2,2} &= \{(\sqrt{3}x_2, x_2, \sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{2,3} &= \{(-\sqrt{3}x_2, x_2, \sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{3,1} &= \{(0, x_2, -\sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{3,2} &= \{(\sqrt{3}x_2, x_2, -\sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ \Pi_{3,3} &= \{(-\sqrt{3}x_2, x_2, -\sqrt{3}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

[2] Aún más, todo polinomio homogéneo que se anule en $\xi_{2,2}$, se anula en los planos $\Pi_{i,j}$.

De otro lado, teniendo en cuenta las simetrías r del grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$ y considerando las composiciones $g = f \circ r$, se observa que $g|_{\xi_{2,2}} = 0$. Aplicando el Lema 1 tenemos que $\nabla g(x)$ y $\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ son paralelos, es decir, $\nabla g(x)$ y $\nabla f(x)$ son colineales, para todo $x \in \xi_{2,2}$. Esto último implica que la matriz $H_{t,s}$ $(t, s = 1, 2, 3, 4)$, cuyas filas estan formadas por las componentes t, s de estos vectores, es singular. Es decir,

$$\det(H_{t,s}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_t} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_s} \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_t} & \frac{\partial g(x)}{\partial x_s} \end{pmatrix} = 0.$$

El determinante de cada matriz $H_{t,s}$ es un polinomio homogéneo que se anula en $\xi_{2,2}$, por tanto debe anularse en cada uno de los planos $\Pi_{i,j}$. A continuación, obtendremos ecuaciones sobre los coeficientes de los polinomios p y q. El razonamiento principal consiste en argumentar que los coeficientes del polinomio $\det(H_{t,s}(x))$ con $x \in \Pi_{i,j}$ son todos cero, en cada caso. Un cálculo directo muestra que cada uno de estos polinomios depende de las variables x_2, x_4 y son de la forma:

$$\det(H_{t,s})(x_2, x_4) = C_{6,2}x_2^6x_4^2 + C_{5,3}x_2^5x_4^3 + C_{4,4}x_2^4x_4^4 + C_{3,5}x_2^3x_4^5 + C_{2,6}x_2^2x_4^6.$$

Los coeficientes de este polinomio los hemos denotado C_{E_1,E_2} donde E_1, E_2 son los exponentes de x_2 y x_4 respectivamente.

Empecemos considerando $r = (A, A)$, $g = f \circ r$, el plano $\Pi_{2,1}$ y el polinomio $\det(H_{1,3})$. Entonces los coeficientes C_{E_1,E_2} de éste polinomio son todos cero. Un cálculo directo muestra que $C_{5,3} = -36\sqrt{3}a_2b_8 + 36\sqrt{3}b_2a_8$. De aquí se obtiene que $a_2b_8 - a_8b_2 = 0$, y esto, es equivalente a que $\det \left(\begin{smallmatrix} a_2 & a_8 \\ b_2 & b_8 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Así, los vectores (a_2, a_8) y (b_2, b_8) son linealmente dependientes, esto es, uno de los vectores es múltiplo escalar del otro. De aquí, existe $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $b_2 = k_1a_2$ y $b_8 = k_1a_8$. Ahora evaluemos $\det(H_{1,3})$ en los puntos del plano $\Pi_{1,2}$. Igualando a cero el coeficiente $C_{3,5}$ obtenemos la ecuación $-36\sqrt{3}a_4b_7 + 36\sqrt{3}b_4a_7 = 0$. Razonando de manera análoga, concluimos que existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $a_4 = k_2b_4$ y $a_7 = k_2b_7$.

Tomemos ahora $r = (B, I)$, y el polinomio $\det(H_{1,3})$ evaluado en el plano $\Pi_{1,1}$. De aquí se logra obtener $C_{3,5} = \frac{-27}{2}b_4(-a_9 + b_9k_2) = 0$, de donde $a_9 = k_2b_9$ (recordemos que $b_4 \neq 0$). Cambiando al plano $\Pi_{1,2}$, se obtiene ahora que $C_{4,4} = 36b_4\sqrt{3}(a_5 - b_5k_2) = 0$, y así $a_5 = b_5k_2$.

Si $r = (I, C)$ y evaluamos $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{1,1}$, entonces se determina que $C_{2,6} = \frac{27}{2}b_9a_2(k_1k_2 - 1) = 0$. Dado que $a_2 \neq 0$, de la última igualdad se derivan dos casos: $k_1k_2 - 1 = 0$, y $b_9 = 0$.

Caso 1 $(k_1k_2 - 1 = 0)$. Realizando la sustitución $k_2 = k_1^{-1}$ en las ecuaciones encontradas, se logran reescribir estás así: $b_4 = k_1a_4$, $b_9 = k_1a_9$, $b_7 = k_1a_7$ y $b_5 = k_1a_5$.

Si $r = (I, C)$, y evaluamos $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{1,1}$, entonces se concluye que $C_{4,4} = 3b_3 - 3a_3k_1 + b_{10}\sqrt{3} - k_1a_{10}\sqrt{3} = 0$, de donde despejando b_3 se obtiene

$b_3 = \frac{1}{3}(3a_3k_1 - b_{10}\sqrt{3} + k_1a_{10}\sqrt{3})$. Ahora considerando el plano $\Pi_{1,2}$, se determina que $C_{3,5} = -27a_4(-b_6 + a_6k_1) = 0$, lo que implica que $b_6 = a_6k_1$.

Ahora, si $r = (B, I)$, y evaluamos en el plano $\Pi_{1,1}$, entonces se obtiene la ecuación $C_{6,2} = \frac{-27}{4}a_2(-b_1 + a_1k_1) = 0$, de donde $b_1 = a_1k_1$.

Consideremos $r = (A, A)$, y el plano $\Pi_{2,1}$. Calculando en coeficiente $C_{4,4}$ se obtiene que $C_{4,4} = 36a_2\sqrt{3}(-b_{10} + k_1a_{10}) = 0$. Esto último implica que $b_{10} = k_1a_{10}$.

En este punto de la demostración, un cálculo directo muestra que efectivamente $\det(H_{t,s}) = 0$ en cada uno de los planos $\Pi_{i,j}$. Por tanto las funciones de la forma $g = f \circ r$ no brindarán más ecuaciones sobre los coeficientes de p y q. Sin embargo, podemos seguir usando la misma técnica que hasta ahora, con el polinomio homogéneo $g = \text{Expr}(f) = |\nabla f|^2 \triangle f - \frac{1}{2}\langle \nabla |\nabla f|^2, \nabla f\rangle$. Recordemos que $\xi_{2,2}$ es una superficie mínima y por tanto $\text{Expr}(f)|_{\xi_{2,2}} = 0$. Procediendo de igual manera que en los casos anteriores; evaluamos $\det(H_{1,3})$ en el, plano $\Pi_{2,1}$. El polinomio que se obtiene es de la forma $\Sigma_{i+j=14}C_{i,j}x_2^i x_4^j$. Así, $C_{10,4} = -1944k_1a_2^4 = 0$, lo cual no es posible, pues $k_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$.

Caso 2 ($b_9 = 0$ y $k_1k_2 - 1 \neq 0$). Tomemos ahora $r = (A, A)$ y el polinomio $\det(H_{1,3})$ evaluado en el plano $\Pi_{1,1}$. De aquí se logra obtener $C_{4,4} = 36a_2\sqrt{3}(-b_{10} + k_1a_{10}) = 0$, de donde $b_{10} = k_1a_{10}$. Con $r = (B, I)$, tomamos el mismo determinante y el mismo plano, para obtener $C_{5,3} = \frac{9}{2}b_7a_2\sqrt{3}(1 - k_1k_2) = 0$. Por tanto, $b_7 = 0$. Si $r = (I, C)$, se logra obtener $C_{5,3} = \frac{9}{2}a_8b_4\sqrt{3}(1 - k_1k_2) = 0$ y por ende $a_8 = 0$. Tomemos ahora $r = (B, I)$ y determinemos $C_{4,4}$ para concluir $C_{4,4} = -\frac{27}{4}b_4(a_1 - a_2 - b_1k_2 + a_2k_1k_2) = 0$, lo que permite determinar que $a_1 = a_2 + b_1k_2 - a_2k_1k_2$.

Tomemos ahora $r = (A, A)$, y evaluemos $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{1,2}$. Calculando $C_{6,2}$ se obtiene $C_{6,2} = 144b_5a_2\sqrt{3}(k_1k_2 - 1) = 0$, de donde se concluye que $b_5 = 0$.

Sea $r = (B, I)$ y el polinomio $\det(H_{1,3})$ evaluado en el plano $\Pi_{1,1}$. Un cálculo directo muestra que $C_{6,2} = \frac{27}{4}a_2(-b_1 + a_2k_1)(k_1k_2 - 1) = 0$. Luego $b_1 = a_2k_1$. Consideremos $r = (I, C)$, para concluir $C_{4,4} = \frac{9}{4}a_2(3b_3 - 3b_4 + \sqrt{3}k_1a_{10}) = 0$. De esta última ecuación $b_3 = a_3k_1 + b_4(1 - k_1k_2)$. También en este polinomio, se determina $C_{2,6} = \frac{9}{4}b_4(-3a_3 + 3b_4k_2 - \sqrt{3}a_{10}) = 0$, y así $a_3 = b_4k_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_{10}$. Ahora tomemos $r = (A, A)$, para determinar que $C_{6,2} = 144\sqrt{3}a_{10}b_4(1 - k_1k_2) = 0$, lo que permite concluir que $a_{10} = 0$. Con $r = (B, C)$, se tiene la ecuación $C_{5,3} = -\frac{27}{4}a_2(-b_6 + a_6k_1) = 0$. Así, $b_6 = a_6k_1$ y $C_{3,5} = \frac{27}{4}a_6b_4(k_1k_2 - 1) = 0$, lo que muestra que $a_6 = 0$.

Nuevamente, al igual que en el caso 1, se puede verificar que evaluando en cualquiera de los planos $\Pi_{i,j}$ se tiene $\det(H_{t,s}) = 0$. Por tanto, teniendo en

cuenta la minimalidad de la superficie $\xi_{2,2}$ consideraremos de aquí en adelante g =Expr$f$. Continuando con el mismo análisis se realiza lo que sigue. Evaluamos el polinomio $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{2,1}$. El coeficiente $C_{4,10}$ se calcula como $C_{4,10} = (-663552)b_4^3(-8a_2 - 3b_4k_2 + 8a_2k_1k_2)$. Si suponemos $k_2 = 0$, entonces $b_4 = 0$ ó $a_2 = 0$, lo cual no puede suceder, por esta razón $k_2 \neq 0$. Despejando b_4 se tiene $b_4 = \frac{-8a_2(1-k_1k_2)}{3k_2}$. De forma similar, si suponemos $k_1 = 0$, entonces se tendrá que el coeficiente $C_{10,4} = 648a_2^3(-8b_4 - 3a_2k_1 + 8b_4k_1k_2) = 0$, que se reduce a $C_{10,4} = 648a_2^3(-8b_4) = 0$. De lo cual se concluye la misma contradicción anterior; por tanto $k_1 \neq 0$. Reemplazando b_4 en las ecuaciones $C_{10,4} = 0$, $C_{6,8} = 0$ y $C_{12,2}$=0 se obtiene

$$38k_1 - 64k_2 + 64k_1k_2^2 + 5k_1^2k_2 = 0. \tag{1}$$

$$5k_1k_2 - 16k_2^2 + 16k_1k_2^320 = 0. \tag{2}$$

$$-137k_1k_2 + 64k_1^2k_2^2 + 64 = 0. \tag{3}$$

Multiplicando por k_2 la ecuación (1) y restando 4 veces la ecuación (2) se obtiene $(k_1k_2 - 10)(5k_1k_2 - 8) = 0$. De aquí $k_1k_2 = 10$ ó $k_1k_2 = \frac{8}{5}$. Reemplazando en (3) cada uno de estos valores se observa que $64(10)^2 - 137(10) + 64 = 5094 \neq 0$ y $64(\frac{8}{5})^2 - 137(\frac{8}{5}) + 64 = \frac{216}{25} \neq 0$. Esto nos muestra que las soluciones que hacen simultáneamente cero los coeficientes $C_{6,8}$ y $C_{10,4}$, no hacen cero el coeficiente $C_{12,2}$, lo cual es contradictorio.

De los casos 1 y 2 podemos concluir que $\xi_{2,2}$ no es algebraica de grado cinco. □

5 Aporte al caso general

Después de haber obtenido los resultados anteriores, podemos hacer algunas limitaciones al polinomio f de grado impar. Explícitamente se demostrará lo siguiente.

Proposición 2. *Si $\xi_{2,2} = f^{-1}(0) \cap S^3$ es algebraica de grado $r = n + 3$ (impar), entonces f no puede ser de la forma:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) =& (x_1^3 - 3x_1x_2^2)(a_1x_1^n + a_2x_2^n + a_3x_3^n + a_4x_4^n) \\ &+ (x_3^3 - 3x_3x_4^2)(b_1x_1^n + b_2x_2^n + b_3x_3^n + b_4x_4^n). \end{aligned}$$

Demostración. Actuemos por contradicción y supongamos que $\xi_{2,2} = f^{-1}(0) \cap S^3$, con f de la forma enunciada. Sabemos que si $g = f \circ r$, con $r \in G_{\Gamma_{2,2}}$, entonces g es un polinomio que se anula en $\xi_{2,2}$. Al igual que en la prueba de la Proposición 1, usaremos el Lema 1, y el cálculo de los polinomios $\det(H_{t,s})$, siguiendo el mismo esquema.

Considerando $r = (B, I)$ y evaluando el polinomio $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{1,1}$ $C_{2n+2,2} = \frac{-9\sqrt{3}^n}{2^n}(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$. Así, existe $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $b_2 = k_1a_2$ y $b_1 = k_1a_1$. El polinomio $\det(H_{1,3})$ se reduce a

$$\det(H_{1,3}) = \tfrac{-9}{2^n}x_2^{n+2}x_4^{n+2}(a_4k_1 - b_4)(a_2 - 2^na_2 + \sqrt{3}^n a_1) = 0.$$

Este polinomio se anula para todo $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. Así se concluye $a_4k_1 - b_4 = 0$ ó $a_2 - 2^na_2 + \sqrt{3}a_1 = 0$.

Caso 1 **($a_4k_1 - b_4 = 0$).** Claramente se tiene que $b_4 = a_4k_1$. Considerando $r = (B, I)$ y evaluando $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{3,1}$ se obtiene:

$$\det(H_{1,3}) = -18\sqrt{3}^n x_2^{n+2}x_4^{n+2}(a_3k_1 - b_3)(a_2 - 2^na_2 + \sqrt{3}^n a_1).$$

De donde se concluye que $a_3k_1 = b_3$. Reemplazando b_3 y b_4 en el polinomio f y factorizando, tenemos:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1x_1^n + a_2x_2^n + a_3x_3^n + a_4x_4^n)(x_1^3 - 3x_1x_2^2 + k_1(x_3^3 - 3x_3x_4^2)).$$

Esto último contradice que $\xi_{2,2}$ es algebraica, pues se supone f irreducible.

Caso 2 **($a_2 - 2^na_2 + \sqrt{3}a_1 = 0$).** De aquí, $a_1 = \frac{a_2(2^n-1)}{\sqrt{3}^n}$. Tomando $r = (I, C)$ y evaluando el polinomio $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{1,2}$ se logra determinar que $C_{2,2+2n} = 18\sqrt{3}^n(a_3b_4 - a_4b_3) = 0$. Por tanto existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $k_2b_3 = a_3$ y $k_2b_4 = a_4$. Así, $\det H_{1,3} = 18a_2x_2^{n+2}x_4^{n+2}(k_1k_2 - 1)(b_4 - 2^nb_4 + \sqrt{3}^n b_3) = 0$.

Recuérdese que $e_2 \in \xi_{2,2}$, luego $|\nabla f(e_2)| = |a_2| \neq 0$, y $k_2k_1 - 1 \neq 0$; pues en caso contrario $k_1 = k_2^{-1}$ y $k_2 = k_1^{-1}$, lo que implica que $a_i = k_2b_i$ para $i = 1, \cdots, 4$; esto último es contradictorio, pues f sería reducible. De aquí que $b_4 - 2^nb_4 + \sqrt{3}^n b_3 = 0$, así $b_3 = \frac{b_4(2^n-1)}{\sqrt{3}^n}$.

Considerando $g = \mathrm{Expr}f$ evaluando el polinomio $\det(H_{1,3})$ en el plano $\Pi_{2,1}$, se determina que:

$$\mathrm{Expr}f(x) = -72\sqrt{3}a_2b_4nx_2^{n+4}x_4^{n+1}(2^n - 4)(k_2k_1 - 1)(a_2x_2^n + 2^nb_4k_2x_4^n).$$

Recuérdese nuevamente que $e_4 \in \xi_{2,2}$, entonces $|\nabla f(e_4)| = |b_4| \neq 0$. De otro lado, f no puede ser de grado cinco por la proposición 1, luego se tiene que $n > 2$. Así, $2^n - 4 \neq 0$. En resumen, concluimos que $\mathrm{Expr}f(x) \neq 0$ para todo $x \in \xi_{2,2} \cap \Pi_{2,1}$, contradiciendo así el hecho de que la superficie es mínima, y por tanto la curvatura media es cero en todos sus puntos.

De los casos 1 y 2 se concluye que si $\xi_{2,2}$ es algebraica, entonces el polinomio f no puede ser de la forma indicada. □

6 Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por brindar el espacio para desarrollar este trabajo y, en particular, por posibilitar el uso del programa MuPaD para efectuar algunos de los cálculos presentados.

Referencias

[1] Lawson, B.: Complete minimal surfaces in S^3, The Annals of Mathematics, Vol. 92, No. 3, pp. 335-374,(1970).

[2] Mesa, H.: Supeficies mínimas algebraicas de grado cuatro en S^3, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad del Valle, (2005).

[3] Perdomo, O., Mesa, H.: Hipervaridades mínimas algebraicas en S^n, Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 47, No. 2, pp 67-75, (2006).

[4] Perdomo, O.: Non-existence of regular algebraic minimal surfaces of spheres of degree 3, Journal of Geometry, Vol. 84, No. 1-2, pp. 100-105, (2006).

[5] Perdomo, O.: Minimal hypersurfaces in R^n as regular values of a funtion, Revista integración, Vol. 22, No. 1-2, pp. 1-6, (2004).

[6] Castrillón, A.: La conjetura algebraica de Lawson, Tesis de Pregrado en Matemáticas, Universidad del Valle, (2008).

Dirección de los autores
Andrés Julián Castrillón Vásquez — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia
e-mail: `anjucava@gmail.com`
Héber Mesa Palomino — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia
e-mail: `heber.mesa@correounivalle.edu.co`