



Análisis de textos escolares de matemáticas para octavo grado: Una mirada desde las configuraciones epistémicas a las medidas de dispersión

Daniela Nieto Escudero

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Facultad de educación, ciencia y tecnología

Licenciatura en matemáticas

Santiago de Cali, 2023



Análisis de textos escolares de matemáticas para octavo grado: Una mirada desde las configuraciones epistémicas a las medidas de dispersión

Estudiante:

Daniela Nieto Escudero

Director:

José Miguel Leon Banguero

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Facultad de educación, ciencia y tecnología

Licenciatura en matemáticas

Santiago de Cali, 2023

Agradecimientos

Gracias a mi papá José Omar Nieto.

Gracias a mi mamá María del Carmen Escudero.

Gracias a mis compañeros por aguantarme la intensidad.

*Gracias al tutor de trabajo de grado José Miguel Leon y al profesor
Diego Diaz por incentivar en los estudiantes las investigaciones en educación
estadística en la Universidad del Valle.*

Gracias a la virgen María por darme paz y serenidad.

*Gracias a todos por estar presentes y ser aquellos que me dieron fuerza
para seguir.*

FINALMENTE, GRACIAS A MÍ.

LES DESEO A TODOS QUE LA FORTALEZCA BRINDADA SE

LES DEVUELVA X1000.

Tabla de Contenido

Resumen	9
Capítulo I: Aspectos generales	9
1.1. Introducción	9
1.2. Planteamiento del problema.....	10
1.2.1. Objetivo general.....	14
1.3. Antecedentes	15
1.3.1. Los libros de texto escolares y las medidas de dispersión	15
1.3.2. La enseñanza de las medidas de dispersión en estudiantes de secundaria	16
1.4. Justificación	18
Capítulo II: Marcos referenciales.....	22
2.1. MARCO MATEMÁTICO.....	22
2.1.1. Fundamentos Estadísticos	22
2.1.2. Estadísticos de variabilidad	22
2.1.2.1. Rango	22
2.1.2.2. Desviación media absoluta.....	22
2.1.2.3. Varianza	23
2.1.2.4. Desviación estándar muestral.....	24
2.1.2.5. Dispersión relativa - Coeficiente de variación	25
2.1.2.6. Percentiles, cuartiles y deciles.....	25
2.1.2. Representaciones gráficas y tabulares	26
2.1.2.1. Método tabular	26
2.1.2.2. Gráfico de caja y bigotes.....	28
2.2. MARCO TEÓRICO.....	30
2.2.1. Introducción	30

2.2.2. Enfoque onto semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática	30
2.2.3. Configuraciones epistémicas.....	33
2.3. MARCO REFERENCIAL.....	35
2.3.1. Rejilla de los elementos lingüísticos	36
2.3.2. Rejilla de Conceptos.....	38
2.3.3. Rejilla de Procedimientos	39
2.3.4. Rejilla de propiedades	41
2.3.5. Rejilla de argumentos.....	44
2.3.6. Rejilla de situaciones-problema	45
2.4. MARCO CURRICULAR.....	46
2.4.1. Las medidas de dispersión en el currículo	47
2.5. MARCO METODOLÓGICO.....	48
2.5.1. Instrumentos de recolección de información	51
2.5.2. Paradigma de la investigación: Sociocultural y Cognitivo	53
2.5.3. Investigación guiada a través de libros de textos escolares	54
3. Esquema del desarrollo del trabajo de grado	57
Capítulo IV: Resultados.....	58
4.1. Resultados elementos lingüísticos	58
4.2. Resultados conceptos	65
4.3. Resultados procedimientos	69
4.4. Resultados propiedades.....	74
4.5. Resultados argumentos	79
4.6. Resultados situaciones-problema.....	83
Capítulo V: Análisis de los resultados.....	89
5.1. Rejilla elementos lingüísticos	89

5.2.	Rejilla conceptos.....	90
5.3.	Rejilla procedimientos	91
5.4.	Rejilla propiedades	92
5.5.	Rejilla argumentos	94
5.6.	Rejilla situaciones	95
5.6.1.	Contextos en las situaciones problemas	96
5.6.2.	Procesos generales de la actividad matemática en las situaciones problema	97
5.6.3.	Clasificación de tareas en las situaciones problemas	98
6.	Conclusiones.....	99
7.	Bibliografía de los libros a analizar	103
7.1.	Referencias bibliográficas.....	103

Índice de figuras

Figura 1	26
Figura 2	30
Figura 3 Facetas y componentes del conocimiento del profesor.....	32
Figura 4 Componentes y relaciones en una configuración epistémica.....	35
Figura 5 Enfoque de investigación cualitativo	49
Figura 6	60
Figura 7	60
Figura 8	61
Figura 9	61
Figura 10	62
Figura 11	63
Figura 12	63
Figura 13	63
Figura 14	64
Figura 15	66
Figura 16	67
Figura 17	68
Figura 18	68
Figura 19	71
Figura 20	72
Figura 21	72
Figura 22	73
Figura 23	76
Figura 24	76
Figura 25	77
Figura 26	77
Figura 27	77
Figura 28	78
Figura 29	79
Figura 30	80
Figura 31	81
Figura 32	82
Figura 33	84

Figura 34	85
Figura 35	86
Figura 36	87
Figura 37	88

Índice de tablas

Tabla 1 Símbolos usados en las ecuaciones del texto	23
Tabla 2 Elementos de la tabla de frecuencias	28
Tabla 3 Ejemplo: Salario del primer empleo	29
Tabla 4 Cuartiles del ejemplo sobre el gráfico de caja	30
Tabla 5 Elementos lingüísticos que aparecen en los libros de texto analizados	37
Tabla 6 Conceptos que aparecen en los libros de texto analizados	38
Tabla 7 Procedimientos que se exponen en los libros de texto analizados	40
Tabla 8 Codificación de las propiedades	42
Tabla 9 Propiedades que aparecen en los libros de texto analizados	43
Tabla 10 Frecuencia de los argumentos por libros de texto analizados	44
Tabla 11 Situaciones – problema por medida de dispersión.	45
Tabla 12 Malla curricular MEN para datos estadísticos 8°	48
Tabla 14 Contenido curricular de los libros a analizar	55
Tabla 15 Resultados rejilla elementos lingüísticos	59
Tabla 16 Resultados rejilla conceptos	66
Tabla 17 Resultados rejilla procedimientos	70
Tabla 18 Resultados rejilla propiedades	74
Tabla 19 Resultados rejilla argumentos	79
Tabla 20 Resultados rejilla situaciones	84
Tabla 21 Contexto de las situaciones problema	96
Tabla 22 Procesos generales de la actividad matemática en las situaciones	98
Tabla 23 Tipos de tareas en las situaciones	98

Resumen

Este trabajo presenta los tópicos para hacer un análisis de texto en matemáticas desde el enfoque onto semiótico teniendo en cuenta las configuraciones epistémicas. Siendo así, analiza las medidas de dispersión desde un enfoque epistémico en libros de texto en matemáticas a partir de unas rejillas elaboradas por los doctores Jesús del Pino Ruiz y Antonio Estepa, las cuales permiten evidenciar las dificultades que provocan los libros de texto en matemáticas a los estudiantes, por lo cual se plantea un marco teórico enfocado en las situaciones problema y la importancia de sus contextos.

Palabras clave: Configuraciones epistémicas, epistemología de las matemáticas, análisis de libros de texto de matemáticas, medidas de dispersión, educación estadística.

Abstract

This work presents the topics to carry out a text analysis in mathematics from the onto-semiotic approach taking into account epistemic configurations. Thus, it analyzes the measures of dispersion from an epistemic approach in mathematics textbooks based on grids developed by PhDs Jesús del Pino Ruiz and Antonio Estepa, which allow us to demonstrate the difficulties that mathematics textbooks cause to students, for which proposes a theoretical framework focused on problem situations and the importance of their contexts.

Keywords:

Epistemic configurations, epistemology of mathematics, analysis of mathematic textbooks, dispersion measures, statistic education.

Introducción

En la presente investigación se exalta las medidas de dispersión en los libros de texto de matemáticas, cuya importancia esta presente en la variabilidad y manejo de datos en el diario vivir, encasillarse o quedarse con el conocimiento de las medidas de tendencia central debería ser un tabú por el poco nivel de interpretación que existe hasta allí sobre los valores atípicos o aquellos datos alejados de la media.

Por lo tanto, el problema por abordar son las medidas de dispersión y su epistemología en dos libros de texto uno de la editorial Santillana y otro del MEN, cuyo enfoque es el onto

semiótico particularmente la parte epistémica, donde están presentes los objetos epistémicos y sus configuraciones. Para llevar a cabo el trabajo de grado con este enfoque se hace uso de unos instrumentos, los cuales son unas rejillas donde participan todos los objetos epistemológicos de las medidas de dispersión (Pino & Estepa, 2017; Pino, 2019) las cuales me brindan organización y toda la información requerida. Con este instrumento finalmente, se recogen los resultados de forma óptima y se llevan a cabo los análisis.

Para este fin, las investigaciones involucradas son acerca de la enseñanza, el aprendizaje y la epistemología de las medidas de dispersión, de las cuales son principales las siguientes dos investigaciones Pino (2017) y Rodríguez-Alveal, Diaz-Levicoy & Vásquez (2021) cuyos resultados se basan de una metodología cualitativa, con un enfoque onto semiótico ligado a lo epistémico y con un interés en los libros de texto en matemáticas de acuerdo a la unidad de las medidas de dispersión, siendo estas especificaciones coherentes al trabajo de grado que se propone. Las investigaciones mencionadas están dadas en contextos diferentes una desde el currículo español y la otra desde el currículo chileno, cuyos aportes se relacionan con las situaciones problemas en las medidas de dispersión donde se menciona la falta de contexto, el poco nivel interpretativo que exige las situaciones y las representaciones estadísticas. No solo eso, también están de acuerdo que este tipo de investigaciones apenas se está tomando en cuenta con las medidas de dispersión y que debe desarrollarse.

Finalmente, la intención del trabajo de grado es brindar ideas por medio de la indagación bibliográfica, los resultados y los libros analizados para que se aborde eficientemente las medidas de dispersión, principalmente en los los años preestablecidos por el MEN en Colombia que son octavo y noveno. Ya que, si se presenta su introducción en decimo y once se estaría suprimiendo el proceso interpretativo de estas medidas y además se estaría retrasando la preparación de los estudiantes para la llegada a la universidad.

Capítulo I: Aspectos generales

1.1. Planteamiento del problema

La educación estadística busca generar pensamiento estadístico en medio de la omnipresencia de la variabilidad (Franklin *et al.*, 2005, p. 6). Para el ciudadano es de vital importancia el aprendizaje de la estadística para argumentar y apropiarse de los datos que

reciben, por ejemplo, en el momento que el médico le da a una persona la expectativa de vida o la curva de supervivencia, de allí se hace cargo la variabilidad (Batanero, 2016). Por lo tanto, generar el pensamiento estadístico implica una base de conocimiento de contexto y conocimiento estadístico, variación como componente central, una búsqueda de causas y el razonamiento con modelos estadísticos y de probabilidad (Pfannkuch & Wild, 2004).

Por consiguiente, nos abrimos a los diversos errores, dificultades y sesgos que presentan los estudiantes en el momento de abordar la estadística y en específico las medidas de dispersión. Como primera consigna, la estadística es presentada en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) desde los primeros años de escolaridad por lo que se espera una complementariedad de conceptos cuando comienzan un grado escolar superior. A pesar de lo anterior, Begué, Batanero, Gea, Beltrán-Pellicer (2018) menciona que existe una desconexión entre el contenido que describen los documentos curriculares y el conocimiento que los estudiantes muestran sobre dichos contenidos matemáticos. Como consecuencia de esta desconexión, Loosen et al (1985) y Batanero et al (2015) afirman que los estudiantes aprenden a realizar cálculos estadísticos sin llegar a comprender los procesos ni conceptos que implican dichos cálculos.

Los materiales curriculares como lo son los libros de texto deben representar adecuadamente las ideas estadísticas (Bargagliotti, 2012) según grado de escolaridad y las necesidades de la sociedad. En este sentido, los textos escolares de una Nación tienen como interés expresar el contenido que ofrece el currículo. Por lo cual Colombia en toda la educación básica y media toma en cuenta la educación estadística y la probabilidad relacionándola al pensamiento aleatorio y sistemas de datos enunciado en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998).

Batanero et al (1994) y Sánchez, Borim y Coutinho (2011) afirman que, aunque la dispersión es un tema fundamental dentro de la estadística, las investigaciones en Educación Estadística sobre estas son escasas. Esto pasa también en países de Latinoamérica como Chile, Diaz-Levicoy, Rodríguez y Vásquez (2021) dicen que el objeto estadístico de variabilidad ha sido escasamente estudiado, más aún en el nivel básico y medio de escolaridad. Por lo cual se infiere que el estudio de las medidas de dispersión o variabilidad en la educación estadística es una fuente de investigación joven.

Batanero (2016) afirma que las dificultades y obstáculos al momento de trabajar en la educación estadística tienen común denominador la falta de contexto real, aun siendo parte indispensable para la estadística la búsqueda de patrones con significado. Tal cual ocurre con las medidas de dispersión, Cobb y Moore (1997); Estepa y del Pino (2013); Sánchez y Orta (2013). En ese sentido, Batanero et al (2015) afirma que los datos no son sólo números de valor abstracto, sino que son números con la necesidad de interpretación en contexto. Ejemplos de esto serían los trabajos realizados por Loosen et al. (1985) y Garfield y Ben-Zvi (2008) en el cual encuentran que los estudiantes conocen y saben calcular la desviación típica o estándar pero no entienden su significado. En conclusión, podemos afirmar que es indispensable centrar la mirada al contexto y al significado o apropiación que aporta el contenido sobre objetos matemáticos en los textos escolares.

Hart (1983) señala que *“el concepto fundamental de desviación estándar es de las primeras áreas de dificultad que un estudiante de estadística encuentra”* (p.16). En concordancia con lo anterior, Estepa & Ortega (2005) encuentran en libros de texto universitarios 19 formas diferentes de expresar la varianza y 20 maneras diferentes de expresar la desviación típica, estableciendo una dificultad importante para la enseñanza. Años después, Pino y Estepa (2017) comprueban que la variedad de significados para un concepto estadístico también ocurre en libros de texto de secundaria, haciendo ver que los libros de textos escolares pueden sobrecargar de información innecesariamente a los estudiantes, siendo necesario una filtración de las fórmulas y definiciones por parte del profesor.

Por consiguiente, para dar significado a los objetos matemáticos en un contexto se necesita el uso de diversas representaciones gráficas, debido a que hoy en día estamos rodeados de información estadística que a menudo se presenta a través de gráficos estadísticos, siendo la construcción e interpretación de gráficos estadísticos una parte importante de la alfabetización estadística (Watson, 2006; Ridgway, Nicholson & McCusker, 2008). Por lo tanto, es acertado como Wallman (1993) define la alfabetización estadística como la habilidad que tiene una persona para comprender e inferir de manera crítica los resultados estadísticos que están presentes en la vida cotidiana.

En particular, las tablas y los gráficos estadísticos son formas de representar los datos recolectados en un ambiente con contexto cuyo producto es un análisis estadístico. Estas formas de representación necesitan de un proceso dinámico que se llama transnumeración en el cual se cambian representaciones con la intención de engendrar comprensión de un sistema (Wild y Pfannkuch, 1999). Por lo tanto, para comprender las representaciones estadísticas se deben entrelazar modelos encontrando múltiples conexiones de los datos para comenzar a ser críticos.

Este trabajo se centra en los gráficos estadísticos de las medidas de dispersión, cuya comprensión es importante como se aclara con anterioridad para una cultura estadística básica (Gal, 2002). Siendo Cazorla (2002) el que señala a las gráficas estadísticas como un instrumento para recoger, organizar y presentar información de los estudios estadísticos. Siendo así, que en la etapa escolar se vuelve necesario para visualizar modelaciones y cálculos en los cuales se presentan datos con variabilidad (MEN, 1998).

A pesar de lo anterior, los gráficos estadísticos son complejos, a menudo se quieren presentar como una forma fácil de recoger y entender información, pero muchos estudios han demostrado que la interpretación puede ser a base de mucho esfuerzo y propensa a errores (Freedman & Shah, 2002). Esa sencillez con la que se intenta enseñar puede que incida en la percepción de los estudiantes acerca de los gráficos de datos, los cuales perciben las gráficas estadísticas como simples “colecciones de puntos” (Cobb, 1999).

La información representada en el libro de texto escolar es parte fundamental para la educación matemática, por una parte para el profesor es fuente activa del contenido curricular, representando el conocimiento teórico y las pautas para un conocimiento práctico, por lo que se puede decir que ‘los libros de texto son currículo’ (Matos, 2021), por otra parte para el estudiante es fuente de consulta que permite revisar, reelaborar y profundizar conocimientos (Zubiría, s.f.), por lo tanto en esta investigación se espera visibilizar el reflejo del currículo colombiano y las dificultades de los estudiantes al abordar libros de texto matemáticos escolares con el contenido de medidas de dispersión o variabilidad a partir de bibliografía.

En los libros de texto para el contenido de medidas de dispersión, hay representaciones gráficas como diagramas de caja y bigotes, histogramas, campana de Gauss

y otros, en los cuales se transnumera datos para llegar a interpretarlos y comprenderlos. Por la complejidad de la lectura de gráficas y las dificultades que puede generar un texto escolar en la comprensión de los estudiantes, existen procesos a tomar en cuenta, como: la interpretación de lo externo, el título, las etiquetas que remiten al tema del gráfico y variables representadas, además la identificación interna para determinar los rangos de variación de las variables y las escalas representadas, por último, la correspondencia entre los elementos identificados anteriormente y el contexto, logrando gracias a esto obtener conclusiones sobre las variables y la realidad representada (Bertín, 1957, citado por Jiménez, Arteaga & Batanero 2020).

A pesar de lo anterior, Mateus (2014) detecta que hay poco conocimiento estadístico relacionado con la interpretación y análisis de gráficos estadísticos, encontrando que son escasos los estudios sobre las representaciones en los libros de texto en Colombia. En ese orden de ideas, consideramos que resulta importante brindar al estudiante textos escolares con representaciones de datos que tengan información necesaria para poder interpretar y leer gráficos estadísticos.

La indagación bibliográfica ha permitido identificar distintas dificultades en torno a las medidas de dispersión, lo cual ha propiciado que el aprendizaje de este concepto estadístico sea orientado a la mecanización de fórmulas. Específicamente, se han encontrado errores en la construcción y utilización de los libros de texto en la enseñanza de las medidas de dispersión. En este sentido, en busca de comprender y caracterizar estas dificultades y errores se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Los textos escolares de matemáticas realizados por el MEN en su serie Vamos a Aprender y la editorial Santillana con sus libros edición ACTIVAMENTE matemáticas para el grado 8º brindan los componentes necesarios para una comprensión y significación de las medidas de dispersión?

1.1.1. Objetivo general

- Analizar las medidas de dispersión de la unidad estadística y probabilidad de dos libros escolares en matemáticas dirigidos a grado octavo.

1.1.2. Objetivos específicos

- Identificar elementos curriculares propuestos por el MEN que guarden relación con las medidas de dispersión
- Realizar una indagación bibliográfica que guarde relación con las medidas de dispersión en los libros de texto de matemáticas en secundaria.
- Replicar instrumentos que permitan identificar elementos centrales de los libros de texto en relación con las medidas de dispersión
- Aportar ideas que permitan reconocer oportunidades de mejora para el diseño de unidades de estadística en el contenido de medidas de dispersión.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Los libros de texto escolares y las medidas de dispersión

Mateus (2014) busca estudiar los gráficos estadísticos presentes en algunos libros de matemáticas escolares dirigidos a educación básica y media publicados en el periodo de 1960 al 2010, en Bogotá-Colombia. La investigación se basa en la historia colombiana tomando como referentes la introducción al libro de texto posterior al manual y la normatividad con respecto a la inclusión de la estadística en lo escolar. Es un estudio cualitativo que, mediante una recolección y organización de 2033 libros, y un tamizaje a partir de la importancia a la construcción de graficas estadísticas, se logra el análisis de 5 libros de textos escolares a partir de las cinco fases de Hoyos (1999) que promueven la construcción de los estados de arte. Según los resultados es de relevancia en los textos el contexto del aula de clase, formar bases para la construcción de gráficos y promover la alfabetización, siendo un error para resaltar la representación del histograma como diagrama de barras. En conclusión, la investigación da frutos al evidenciar el estado del arte en la construcción de gráficos estadísticos, siendo indicadores la inclusión de contenidos estadísticos al plan escolar en Colombia y la promoción cultural del texto escolar en 1959.

Pino (2017) en su tesis doctoral analiza el concepto de dispersión desde la perspectiva del lenguaje y su evolución histórica. Esta investigación, toma en consideración el enfoque ontosemiótico para reconocer elementos fundamentales en la comprensión de estudiantes. Para llevar a cabo esta investigación, analiza 12 libros de texto de 3° y 4° de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) en España. En esta investigación se reporta que en los libros

de texto les dan cierta jerarquía a las medidas de dispersión dándole mayor importancia a la desviación típica, siendo un error ya que todas las medidas de dispersión son igualmente útiles y se necesita de un equilibrio de todas ellas en su enseñanza. De igual modo, en esta investigación se reporta que los libros de texto analizados tienen diferentes formulaciones para las medidas de dispersión, lo cual repercute directamente en el aprendizaje de este concepto en estudiantes.

Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy & Vásquez (2021) en su trabajo analizan actividades sobre variabilidad en libros de texto de educación secundaria proporcionados por el Ministerio de educación chileno. Esta investigación, se fundamenta en la variabilidad estadística y en las propuestas elaboradas sobre libros de texto de educación estadística a nivel internacional. Los autores elaboran entorno al análisis de contenido una mirada cualitativa de ocho libros de 1° a 4° de ESO en Chile. En esta investigación, se reporta que en los libros de texto existe una falta de uso de datos reales, de herramientas computacionales y de una organización que logre evitar restringir la enseñanza de la estadística a solo procedimientos de aplicación de fórmulas, generando falencias en el recurso y promoviendo la complementariedad de recursos en la enseñanza del profesor.

1.2.2. La enseñanza de las medidas de dispersión en estudiantes de secundaria

Cobb & Moore (1997) encausan sus esfuerzos a interpretar lo que es el pensamiento estadístico con y sin el componente matemático. El estudio presenta una visión general de la estadística, las matemáticas y la enseñanza. En su proceso ofrecen respuestas a las preguntas ¿En qué se diferencia el pensamiento estadístico del pensamiento matemático?, ¿Cuál es el papel de las matemáticas en estadística?, otorgando unas secuencias de ejemplos que proporcionan un panorama general de la practica estadística. Se informa que el análisis matemático puede ser mano derecha incluso del análisis de datos por lo que se espera fortalecer las capacidades matemáticas del estudiante sin la intención de sacrificar el desarrollo de la inferencia, aunque puede ser una consecuencia.

Bakker & Gravemeijer (2004) exploran el razonamiento informal sobre la distribución en un ambiente de aprendizaje tecnológico. Esta investigación de diseño considera los conjuntos de datos y el desarrollo del concepto de distribución a partir de

Minitools (Cobb, 1999). El diseño se implementó por medio de entrevistas exploratorias y pruebas de campo en el transcurso de 12 a 15 lecciones de 4 clases de séptimo grado en los Países Bajos. Se resalta que el uso de herramientas informáticas y la creación de gráficos estimulan a los estudiantes a razonar sobre aspectos de las distribuciones, generando aporte de ideas e interacción durante la clase. Por otro lado, se aconseja a los profesores que las medidas como la mediana y los cuartiles se posponga hasta que este desarrollada la noción intuitiva de distribución, además alientan el uso de definiciones estadísticas menos rigurosas a medida que los estudiantes desarrollan su razonamiento para luego hacer una transición a definiciones más específicas.

Sánchez, Borim da Silva & Coutinho (2011) razonan sobre la comprensión de la variación por parte de los profesores y los estudiantes de escuela media (5° a 9°) y superior (10° y 11°). La investigación se enfoca en el análisis de investigaciones externas para abstraer vertientes de investigación sobre la variación. Siendo así, lo que realizan es recoger bibliografía sobre el entendimiento de la variación de datos en contexto de estudiantes y profesores para finalmente dar recomendaciones. Los resultados de la investigación indican la posibilidad de desarrollar nociones intuitivas de la variación o dispersión en grados anteriores a 10°, para no encasillar las medidas de dispersión a la educación superior y universitaria. El estudio logró demostrar que los entornos de aprendizaje de razonamiento estadístico son un marco adecuado para la formación de profesores y estudiantes, volviéndose una necesidad urgente el estudio del conocimiento profesional de los maestros y las prácticas de los maestros mientras enseñan la variación.

Orta & Sánchez (2013) exploran el razonamiento de los estudiantes acerca de la noción de dispersión cuando analizan datos en situaciones de incertidumbre. La investigación es de carácter exploratorio en el cual se informa sobre las respuestas de dos problemas de un cuestionario administrado a 65 estudiantes de 9° grado antes y después de actividades de enseñanza. La investigación muestra la dificultad de los estudiantes para interpretar la dispersión, ya que logran identificar el conjunto de datos con mayor dispersión gracias a sus conocimientos transversales de lo extenso o lo disperso, pero no interpretan los datos para toma de decisiones, por lo tanto, en estudiantes con una edad de 14 años se prevé que no haya una espontaneidad de interpretación de la dispersión en contexto. Para finalizar, el análisis

de la dispersión en los estudiantes evidenció la falta de articulación con la media ya que muy pocos lo utilizaron.

Begué, Batanero, Gea & Beltrán-Pellicer (2018) en su investigación analizan la comprensión de la representatividad y la variabilidad muestral en estudiantes de secundaria. Se enfoca en un muestreo con tres tipos de distribución: la distribución teórica de probabilidad, la distribución de datos en una muestra y la distribución muestral del estadístico. Para la realización de la investigación se hace un estudio exploratorio de información de una muestra de 536 estudiantes de tres cursos: segundo y cuarto de ESO, y segundo de bachillerato. Se infiere que los estudiantes tienen una percepción al valor, pero no a la variabilidad y esta situación con la edad no mejora, siendo concluyente que hay una desconexión entre los contenidos de los documentos curriculares y el conocimiento que demuestra el estudiante.

1.3. Justificación

Este trabajo es propuesto por mi realidad fehaciente en mi educación básica y media ante la estadística, y mi deseo de que futuros estudiantes obtengan herramientas útiles en bachillerato, logrando un análisis efectivo para cualquier tipo de información presentada por medio de las diferentes representaciones de los datos estadísticos. Por lo tanto, esta investigación compete a profesores en formación, profesores e investigadores en educación matemática o cualquier persona que esté interesado en la educación estadística, los cuales deseen en sus estudiantes apropiación de los sistemas de datos, no por el contrario, una educación con poca comprensión estadística y mucha mecanización. Por consiguiente, un propósito de este trabajo de grado es promover la importancia de la educación estadística en el nivel bachillerato.

La alfabetización estadística, brinda habilidades básicas e importantes para organizar datos, construir y mostrar información por medio de representaciones de datos estadísticos. De igual modo, este tipo de alfabetización aporta vocabulario con conceptos, símbolos, graficas, etc., que permiten la comprensión de información proveniente del diario de entidades públicas y privadas. Así mismo, uno de los objetivos de la educación es la formación de ciudadanos analíticos y críticos de su entorno, dando así sentido a la información estadística por medio de interpretaciones, representaciones y resúmenes, en el

cual se razona explicando los procesos sociales e interpretando los resultados. En resumen, la alfabetización y el razonamiento estadístico conjugan cada vez más al ciudadano con el azar permitiendo cambiar la percepción del comportamiento de ciertos fenómenos y confiriendo comprensión de los datos que se encuentra diariamente. En este trabajo se busca identificar y promover actividades que permitan desarrollar la alfabetización estadística en estudiantes.

En la vida diaria del ciudadano promedio se hace uso de las medidas de dispersión o variabilidad en situaciones cuyo acto es enfrentarse a un análisis de datos de alguna muestra, un ejemplo son los deportistas-ciclistas y sus cronometrajes, son conscientes de que un mismo recorrido realizado dos a más veces, el tiempo variará según las circunstancias del suceso, puede que caiga una lluvia torrencial y que por eso aumente el tiempo del recorrido o que por el contrario haya vientos fuertes a su favor y le ayuden a terminar más rápido, teniendo aquellas cronos fuera del promedio habitual, un deportista o cualquier persona verán que la variabilidad y la dispersión de datos es una situación a analizar. No solo en deportes, en las notas, en la economía, en las ciencias sociales y en general en todo dato constante o fuera de lo usual. Así que, la educación de las medidas de dispersión en la escolaridad se debe abogar para que sean un saber menos empírico del ciudadano común y más consciente, evitando generar ambigüedades sobre la variabilidad y la dispersión en la sociedad.

Así como el contexto, el uso de recursos didácticos es parte importante en el desarrollo de clase. Un recurso importante ya mencionado es el libro de texto escolar, ya que incorpora la experiencia de profesores y el currículo nacional, por esta característica el recurso brinda apoyo al profesor en su desarrollo de clase y al estudiante en su proceso de comprensión. Por lo tanto, se tiene la motivación de analizar textos escolares surgiendo del interés de evaluar y mejorar los recursos que usan los profesores de matemáticas en el aula, al plantearme las preguntas ¿los libros de texto son una guía óptima para el profesor?, ¿Brindan información verídica?, ¿manejan un lenguaje claro y asertivo en definiciones y actividades?

Con lo anterior, un foco del análisis sería indagar en el uso del lenguaje que hace el libro de texto al ser parte importante de la comprensión del contenido curricular en el estudiante y contribuyente al vocabulario matemático del profesor. Hipotéticamente un libro

de texto escolar que tenga inconsistencias o sea confuso, generará conflictos en el aprendizaje de los estudiantes y dificultará la comunicación de saberes del profesor al estudiante, por lo que un libro de texto bien elaborado, es decir, conciso, organizado, multirregistro, es un alivio para el estudiante, el profesor y por ende el sistema de educación Nacional. En concordancia con lo anterior, en el trabajo de grado es de vital importancia evidenciar los registros de representación como registros gráficos y tabulares que usan los libros escolares para analizarlos, dado que, por medio de la representación de gráficas estadísticas se permite la significación de los datos, la aprehensión de conceptos y la respuesta al para que, de los procesos estadísticos, llegando a la interpretación de los datos y posteriori una mirada crítica a lo que nos rodea.

Se sabe que el profesor en matemáticas tiene una formación didáctica, pedagógica y matemática para elaborar planeaciones que implementen el currículo Nacional escolar, entonces siendo los profesores planeadores de clase tienen las facultades para integrar un texto escolar en el desarrollo de esta, con la intención de ser un proveedor de contenido, de ejercicios y de vocabulario. No obstante, en la cotidianidad del que hacer del profesor ocurren situaciones adversas por confiar en el libro escolar, el motivo, simplemente es la consciencia de que el libro de texto cumple unos estándares por ser elaborado por profesionales y expertos en matemáticas y/o educación, por su función de ser una guía en el desarrollo de conceptos, procesos, etc. En conclusión, la no realización de libros óptimos se convierte en la mala praxis del profesor, situación que se puede aminorar con la evaluación de textos escolares según la rama de las matemáticas.

Particularmente, en el proyecto Nacional colombiano de los libros Vamos a aprender matemáticas, existe una intencionalidad de formar a los estudiantes, desde lo integral donde se proporciona herramientas de reflexión y análisis de la sociedad a partir de tres vertientes transversales: la educación ambiental, la educación para la sexualidad y la ciudadanía, y por último, estilos de vida saludable. Los anteriores aspectos mencionados funcionan para generar en los estudiantes integridad y respeto por el medio ambiente y ellos mismos, no es fuera de lugar, pero ¿Qué tanto aporta a lo que hoy en día la sociedad solicita? ¿dónde queda el aspecto tecnológico y económico que hoy rige al mundo?, por lo visto el texto no lo plantea

y surge la inquietud de que en pleno siglo XXI no haya un vislumbamiento en un proyecto del 2016 hacia la globalización.

Por lo que, con el uso de rejillas de Estepa y Del Pino (2015,2019) y la creación de rejillas a partir del análisis sobre el tratamiento de las medidas de dispersión en los libros de texto escolares del MEN y editorial Santillana, específicamente Vamos a aprender matemáticas 8° del 2016, y CREATIVAMENTE matemáticas 8° del 2018, se intenta proporcionar un procesamiento de información clasificado, estudiado y analizado para abordar de forma óptima (recomendaciones) las medidas de dispersión en los textos de matemática escolar.

Capítulo II: Marcos referenciales

2.1. MARCO MATEMÁTICO

Se definen los conceptos, propiedades y tipos de representación que se utilizan en la enseñanza de las medidas de dispersión, plasmados en lo curricular y en los libros de texto. Por otro lado, se hacen anotaciones importantes a cada medida de dispersión sobre su función en la caracterización de la dispersión de datos.

2.1.1. Fundamentos Estadísticos

2.1.2. Estadísticos de variabilidad

2.1.2.1. Rango

El rango de un conjunto de datos es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo. Este estadístico da la primera y más rápida información acerca de lo variable que es un conjunto de datos.

$$\text{Rango} = \text{Máx} - \text{Mín}$$

El rango es una medida de dispersión muy fácil de obtener, sin embargo, es poco utilizada debido a que es muy influenciado por la presencia de valores extremos de poca frecuencia lo que conduce a apreciaciones erróneas, ya que por lo general se piensa que cuanto mayor es el rango mayor es la dispersión de los datos. Para tomar en cuenta todos los datos, se propusieron las medidas de dispersión conocidas como varianza y desviación estándar.

2.1.2.2. Desviación media absoluta

Es un indicador de dispersión que corresponde a la distancia promedio de los datos a la media aritmética.

$$\text{Desviación Media} = DM = \sum \frac{|x_i - \bar{X}|}{N}$$

La desviación media es una medida de la dispersión bastante objetiva: cuanto mayor sea su valor, mayor es la dispersión de los datos; sin embargo, no proporciona una relación matemática precisa entre su magnitud y la posición de un dato dentro de la distribución. Por otra parte, al tomar los valores absolutos mide la desviación de una observación sin mostrar si está por encima o por debajo de la media aritmética.

2.1.2.3. Varianza

La varianza de una población de tamaño N es el promedio de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media aritmética. Al ser parámetro de la población se usa una letra griega para designarla:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

Los símbolos correspondientes a la ecuación de la varianza se describen en la siguiente tabla 1:

Tabla 1

Símbolos usados en las ecuaciones del texto

Símbolo	Significado
σ^2	Es la varianza de datos
$\sum$	Indica una sumatoria
x_i	Variable o dato
μ	Media poblacional de datos
N	Numero de datos en una población

Para datos no agrupados

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Para datos agrupados

$$s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Si se reemplaza $x_i - \bar{x} = x$, en s^2 se tiene: $s^2 = \frac{\sum x^2}{N}$ y $s^2 = \frac{\sum f x^2}{N}$

Otra fórmula que permite un cálculo más sencillo de la varianza es:

Para datos no agrupados

$$s^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \bar{x}^2$$

Para datos agrupados

$$s^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - \bar{x}^2$$

2.1.2.4. Desviación estándar muestral

Para expresar la variabilidad en las mismas unidades de los datos, se calcula la desviación estándar muestral:

La desviación típica o estándar es la raíz de la varianza.

Desviación típica o estándar = $\sqrt{\text{varianza}}$

Desviación estándar = $\sqrt{s^2} = s$

De donde para datos no agrupados:

Desviación estándar = $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N}}$; haciendo $x_i - \bar{X} = x$

Se tiene $s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}}$

Utilizando las fórmulas mostradas en la varianza,

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2}$$

Para frecuencias agrupadas se tienen las siguientes fórmulas:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x_i - \bar{X})^2}{N}}; \text{ haciendo } x_i - \bar{X} = x \quad \text{resulta} \quad s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N}}$$

$$\text{modificadas } s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2}$$

En estadística inferencial es relevante distinguir los símbolos para una muestra y para una población. La desviación estándar para una muestra tiene una fórmula cuyo denominador es $(n - 1)$ siendo n el tamaño de la muestra. Se debe

observar que al total de la población se le denota con N mayúscula; en tanto que al total de datos de la muestra se le denota con n minúscula.

2.1.2.5. Dispersión relativa - Coeficiente de variación

Para efectuar comparaciones entre series de observaciones, en estadística se utiliza la dispersión relativa que es adimensional.

$$\text{Dispersión relativa} = \frac{\text{dispersión absoluta}}{\text{media}}$$

Si la dispersión absoluta es la desviación estándar s , la dispersión relativa recibe el nombre de coeficiente de variación (CV), la cual sirve para comparar la variabilidad de diferentes grupos. Se define como la desviación sobre el valor absoluto de la media (siempre que esta sea diferente de cero): $CV = \frac{s}{\bar{x}}$. Como la desviación y la media tienen las mismas unidades que los datos, estas se cancelan y, por lo tanto, está libre de unidades. Esta medida es especialmente útil para valorar la dispersión de dos conjuntos de datos cuando estos difieren mucho en el promedio.

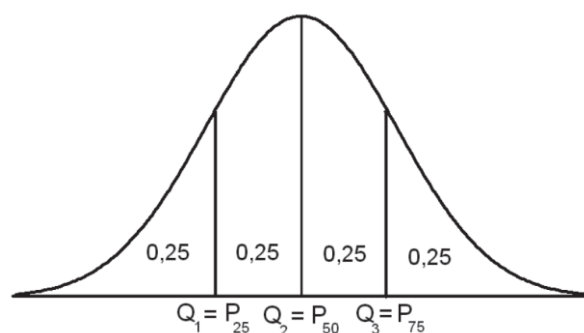
Por otro lado, el coeficiente de variación permite expresar la desviación estándar como un porcentaje de la media aritmética, así pues:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%$$

2.1.2.6. Percentiles, cuartiles y deciles

Para conocer los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los términos de la distribución se suelen utilizar los cuartiles. Tres percentiles utilizados con frecuencia son P_{25} , P_{50} y P_{75} porque dividen el conjunto de datos en cuatro partes cada una con un porcentaje aproximado de 25%. Por esta razón, se les denomina cuartiles. El primer cuartil Q_1 es el percentil 25, el segundo cuartil Q_2 es el percentil 50 y el tercer cuartil Q_3 es el percentil 75

$$Q_1 = P_{25}, Q_2 = P_{50}, Q_3 = P_{75}$$

Figura 1

Nota: Figura Cuartiles. Tomada de Análisis exploratorio de datos (p. 127), por González, L. (2018), Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá D.C., Colombia.

Los deciles. Si en lugar de dividir la distribución en 4 partes iguales se divide en 10 partes iguales, se tienen 9 puntos de división, correspondiendo a cada punto un valor que es un decil; así, el primer decil corresponde al valor por debajo del cual está el 10% de las observaciones; para el segundo decil, el 20%, y así sucesivamente.

2.1.2. Representaciones gráficas y tabulares

2.1.2.1. Método tabular

Según afirma Conceptos básicos de estadística y tipos de variables (s.f.), para elaborar tablas con información estadística se necesitan unas definiciones básicas previas:

Población: Es un grupo que comparte una característica de determinado interés. Es el universo de objetos o sujetos que serán estudiados; además puede ser finita o infinita.

Individuo: cada elemento o ser de la población de estudio.

Muestra: Es un subconjunto representativo de la población. En el caso de poblaciones infinitas o finitas con una gran cantidad de individuos, en lugar de realizar un estudio sobre la población (puede ser imposible o inviable), se toma una muestra con la premisa de que los elementos tomados estén en la misma proporción que en el conjunto de partida.

Carácter: Es el elemento objeto de estudio, por ejemplo: la altura, el sexo, número de hijos, color de cabello, etc. Cada una de las posibilidades de los caracteres se llama modalidad, en el caso de ser numérica se llamará valor.

Cuando se hace un estudio estadístico a cada uno de los caracteres se les denomina variable estadística, normalmente se las suele notar por una letra mayúscula. Estas variables se pueden clasificar en:

Cualitativas: si la modalidad objeto de estudio no es cuantificable, es decir, no se puede medir numéricamente. Ejemplos de caracteres cualitativos pueden ser color de pelo, aficiones, profesión, etc.

Cuantitativas: si la modalidad objeto de estudio es cuantificable, es decir, se pueden medir numéricamente.

Entre las variables cuantitativas se distinguen:

- Discretas: Variable que es el resultado de conteos y solo asume valores enteros.
- Continuas: Variable que es producto de la medición y contiene cifras decimales.

Organización tabular de las medidas de dispersión

Se usan las tablas de distribución de frecuencias, las cuales permiten:

- Organizar y describir los datos de forma racional y directa
- Obtener información necesaria para hacer representaciones graficas
- Resumir la información para facilitar los cálculos de los estadísticos muestrales

En donde se identifican las columnas de: intervalos, marca de clase, frecuencia absoluta y frecuencia acumulada. A continuación, se define y se muestra en la tabla 2 los símbolos que los representan:

Tabla 2
Elementos de la tabla de frecuencias

Elemento	significado
Escala de intervalo (x)	Tipo de escala de medida en la que, además de poder decirse que un sujeto u objeto posee más o menos cantidad de variable que otro, también es posible determinar la magnitud de la diferencia existente entre los elementos medidos; en otras palabras, se puede conocer la cantidad de variable en la que difieren dos sujetos u objetos.
Marcas de clase (x_i)	La marca de clase o punto medio del intervalo es un valor representativo en cada intervalo de clase, se obtiene sumando los límites superior e inferior y dividiendo entre 2 $x_i = \frac{(L_s + L_i)}{2}$
Frecuencia absoluta (f_i)	La frecuencia absoluta de una variable estadística (x_i), es el número de veces que aparece en el estudio este valor. A mayor tamaño de la muestra, aumentará el tamaño de la frecuencia absoluta; es decir, la suma total de todas las frecuencias absolutas debe dar el total de la muestra estudiada.
Frecuencia relativa (F_i)	La frecuencia relativa es la proporción de elementos que pertenecen a una categoría o valor de una variable y se obtiene dividiendo su frecuencia absoluta entre el número total de elementos. $F_i = \frac{\text{frecuencia absoluta}}{\text{total de datos}}$ Al final la suma de todas las frecuencias relativas debe ser igual a 1.

2.1.2.2. Gráfico de caja y bigotes

Una representación práctica de los cuartiles es un gráfico de caja, el cual revela el rango de variación de los datos, el sesgo o la simetría de la distribución, y la presencia de datos inusualmente grandes o pequeños. El gráfico se construye a partir de los valores máximo y mínimo de los datos (siempre y cuando no sean inusuales), y los cuartiles Q_1 , Q_2 y Q_3 .

Descripción:

El gráfico de caja se construye sobre un eje horizontal que muestra el rango de variación de los datos. Se traza una línea horizontal desde el valor mínimo al máximo

(siempre y cuando no sean inusuales), y sobre esta, una caja cuyos extremos corresponden a Q_1 y Q_3 . Por último, se ubica el segundo cuartil y una marca para la media. Los valores atípicos se marcan con asterisco. El máximo y mínimo del gráfico son respectivamente el valor más grande y el más pequeño, descontando los inusuales (Ver Figura X).

Ejemplo:

En la tabla se organizaron de menor a mayor los salarios del primer empleo de 50 egresados de contaduría de diferentes universidades del país durante el 2010.

Tabla 3

Ejemplo: Salario del primer empleo

1	11	21	31	41
1.426.000	1.795.000	2.008.000	2.095.000	2.267.000
2	12	22	32	42
1.491.000	1.801.000	2.009.000	2.110.000	2.347.000
3	13	23	33	43
1.727.000	1.810.000	2.011.000	2.112.000	2.424.000
4	14	24	34	44
1.729.000	1.811.000	2.014.000	2.122.000	2.436.000
5	15	25	35	45
1.735.000	1.862.000	2.020.000	2.125.000	2.518.000
6	16	26	36	46
1.750.000	1.966.000	2.025.000	2.130.000	2.523.000
7	17	27	37	47
1.756.000	1.972.000	2.030.000	2.180.000	2.531.000
8	18	28	38	48
1.750.000	1.982.000	2.054.000	2.200.000	2.573.000
9	19	29	39	49
1.756.000	1.986.000	2.061.000	2.211.000	2.683.000
10	20	30	40	50
1.781.000	1.991.000	2.086.000	2.238.000	2.745.000

Nota: Tabla de datos Salario del primer empleo de 50 egresados de contaduría. Tomada de Análisis exploratorio de datos (p. 126), por González, L. (2018), Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá D.C., Colombia.

Para la construcción del diagrama de caja y bigotes se es necesario calcular los cuartiles, por lo que se acomodan en la siguiente tabla para clarificar el ejemplo.

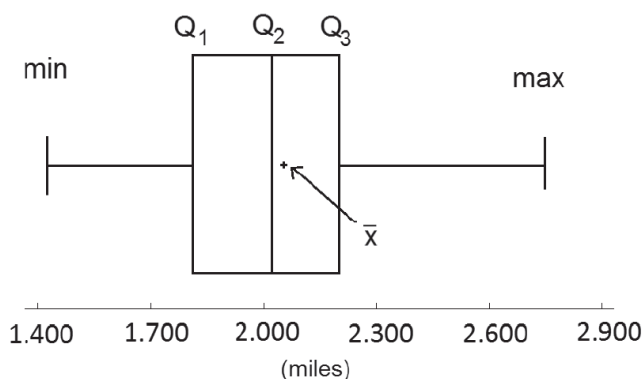
Tabla 4
Cuartiles del ejemplo sobre el gráfico de caja

Posición	Cuartil
$0,25(50+1)=12,75$	$Q1=1.801.000+0,75(1.810.000-1.801.000)=1.807.750$
$0,5(50+1)=25,5$	$Q2=2.020.000+0,50(2.025.000-2.020.000)=2.022.500$
$0,75(50+1)=38,25$	$Q3=2.200.000+0,25(2.211.000-2.200.000)=2.202.750$

Nota: Tabla de los cuartiles de los salarios. Tomada de Análisis exploratorio de datos (p. 129), por González, L. (2018), Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá D.C., Colombia.

Ya teniendo los cuartiles, en la siguiente figura se presenta el grafico de caja de los salarios. Observe que la ubicación de la caja en el grafico revela la simetría de la distribución de los pagos. Esto se ve forzado porque la media y la mediana son muy parecidos.

Figura 2



Nota: Grafico de caja y bigotes de los salarios. Tomada de Análisis exploratorio de datos (p. 130), por González, L. (2018), Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá D.C., Colombia.

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. Introducción

En este capítulo se detallan los tópicos del marco teórico, los cuales están guiados bajo dos enfoques. El primero, el enfoque onto semiótico a partir de las configuraciones epistémicas. Y el segundo, la semiología de los conceptos a partir del lenguaje matemático que integra la estadística.

2.2.2. Enfoque onto semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Juan Diaz Godino y otros investigadores han aportado aproximadamente desde 1994 al desarrollo del Enfoque onto semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), siendo hasta ahora parte importante de la línea de investigación de didáctica en la educación matemática. El EOS etimológicamente significa con *onto* a la idea de objeto y *semiótico* con la idea de significado, cuyo modelo de cognición matemática es elaborado con la idea de ser útil para comparar y articular teorías didácticas con la teoría de la instrucción matemática significativa, viéndola como uno y no por separado (Godino, Batanero & Font, 2007), siendo así que el EOS se consolida como un sistema teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas.

El objeto matemático al ser una entidad cultural o institucional se complementa dialécticamente con el problema cognitivo con el propósito de ser y existir para el sujeto. Por lo anterior, el EOS tiene como primer objetivo explicitar y analizar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las practicas matemáticas. Siendo así, que el EOS aborda un problema cognitivo cualquiera con la intención de caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo siendo simultanea una relación dialéctica entre lo personal y lo institucional, llamada ontología de la matemática explicita, o sea, tipos de objetos y procesos matemáticos que permiten describir en términos operativos el significado de objeto matemático tanto desde un punto de vista personal como institucional.

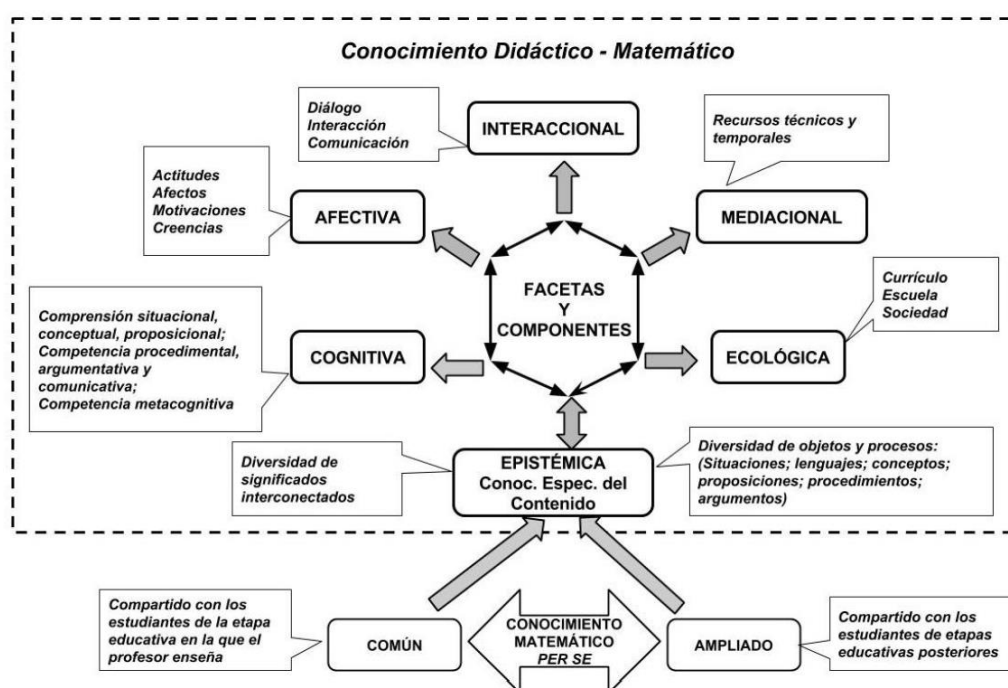
El EOS ante el problema cognitivo y epistemológico usa herramientas teóricas que permiten reformular estos dos tipos de problemas que son relativos al conocimiento institucional y socio cultural, elaborándose herramientas teóricas para analizar las dimensiones epistemológicas y cognitivas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por ende, el enfoque onto semiótico debe abordar las cuestiones centrales para el diseño instruccional matemático con la creación de herramientas más flexibles para analizar los procesos.

Las herramientas que componen este sistema teórico que describimos como un sistema modular e incluyente también de la educación matemática, representan la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los procesos de estudios matemáticos y por tanto la complejidad del análisis didáctico matemático. Por una parte, se debe tener en cuenta que los procesos de aprendizaje tienen lugar en el tiempo y en él se distingue una estructura con unas fases como el análisis preliminar de los problemas de

diseño, implementación y evaluación, aparte de esto, se reconocen unas dimensiones de los conocimientos implicados, la dimensión matemática, la dimensión didáctica y la meta didáctico matemático, por último también se tienen en cuentas unas facetas, la faceta epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional, y ecológica. Estos elementos se pueden analizar distinguiendo entre niveles de análisis como el descriptivo, el práctico, el identificador, y el reflexivo, todo acerca de los objetos matemáticos y la conexión entre estos en un ambiente didáctico.

Figura 3

Facetas y componentes del conocimiento del profesor



Nota: Fuente: Tomado de Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. (p.289), por Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), Málaga: SEIEM

La faceta que le incumbe a la investigación es la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático que tiene que ver con los conocimientos institucionales, o sea, el contenido, que está a per se de la forma como el profesor percibe la matemática, ya que el profesor moviliza la diversidad de significados de los objetos matemáticos y sus relaciones que están participes en el contexto escolar. Por consiguiente, para describir los significados

se necesita conciencia a cerca de las configuraciones onto semióticas que las hay epistémicas y cognitivas.

En las configuraciones cognitivas interviene el conocimiento del estudiante por lo que en este trabajo de grado no es de interés, siendo si el caso de las configuraciones epistémicas ya que busca por medio de la gestión del profesor responder a la siguiente pregunta:

“¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos?” (Godino et al, 2017, p.100), siendo el caso del presenta trabajo, contenidos de textos escolares de calidad editorial pública y privada.

2.2.3. Configuraciones epistémicas

Las configuraciones epistémicas (CE) en el EOS son aquellas cuyo análisis informa la anatomía de un texto matemático, el fragmento de un libro o el libro completo ya sea profesional o escolar. Se construyen a partir, de un punto focal que viene ser el objeto matemático el cual incentiva la creación de las CE, las cuales son diferentes entre sí, pero igualmente presentan articulaciones entre ellas, permitiendo que se puedan relacionar, por esta misma característica, si hay un cambio en una CE va a repercutir sobre las demás haciendo que se deba reformular detalles de la estructura epistémica. Lo anterior, permite atender con el mayor grado de generalidad el objeto en cuestión a presentar por parte del texto.

Según Godino y Font (2006) los objetos que articulan una configuración epistémica son: lenguaje, situaciones problema, conceptos, procedimientos (técnicas), proposiciones (que incluyen propiedades, teoremas, entre otros) y argumentaciones, que pueden estar orientados según el texto. Brevemente, a partir de los trabajos de Godino, Batanero y Font (2007) y Godino y Font (2006), explicaré el rol de cada objeto para el sujeto en la aprehensión de un objeto matemático nuevo.

Lenguaje matemático: se puede manifestar verbalmente, gráficamente, simbólicamente, etc. Con el situ de particularmente permitir la asimilación (o no) de las reglas del llamado por Godino “juego de lenguaje”, siendo así, que es fundamental para estudiantes por la posibilidad de reconocer significados de objetos generales, acercándose a un estudio complejo como lo es la semiótica por medio de la práctica.

Situaciones problema: se manifiesta por aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc. Al estudiante le es beneficioso ya que parte de una situación concreta a un aspecto general matemático, permitiendo comprender el concepto matemático al darle sentido en una situación realista. Por otro lado, se vuelve beneficioso para el profesor en el caso de responder la duda de “eso para que sirve” de un estudiante sobre un objeto o proceso matemático.

Conceptos: se manifiesta en generalizaciones y procesos de abstracción gracias al enlace con otro u otros objetos que se mencionan para las CE como lo son las situaciones problemas. Se categorizan por conceptos previos y emergentes, siendo posible la no existencia de conceptos previos de la misma naturaleza, es decir que si un concepto emergente es conjuntista no quiere decir que provino de un concepto conjuntista. Entonces, desde la perspectiva de los estudiantes la construcción de conceptos usualmente se concibe en la modelización de procesos que permite relacionarlos y organizarlos en aplicaciones de ejercicios y en la resolución de problemas.

Procedimientos: A partir de generalizaciones y procesos de abstracción se vislumbran técnicas y procedimientos que, por ejemplo, pueden ser de carácter lógico-deductivo, de construcción y de técnicas demostrativas abstraídas de teoremas. En tal caso, para el estudiante son importantes al volverse aplicativos a los contextos matemáticos y realistas, siendo destacada la intención (correcta o no) hacia el dominio de procedimientos y hacia el seguimiento de procesos dándoles una razón de ser.

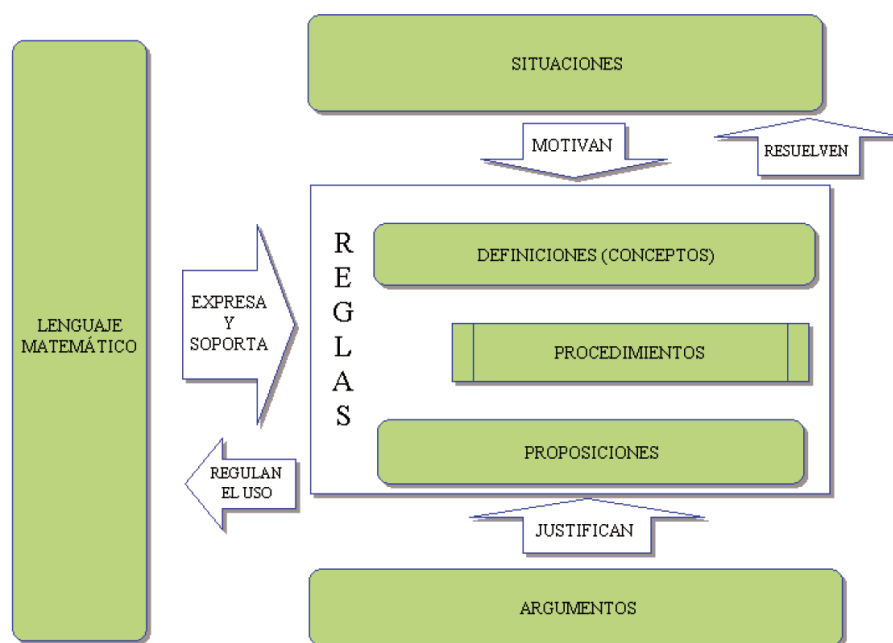
Proposiciones: se manifiesta por propiedades, teoremas, lemas, reglas etc., que muchas veces se matizan a partir de generalizaciones y procesos de abstracción. Siendo así, en el estudiante son valiosas las proposiciones porque permite caracterizar el objeto matemático, aplicarlos en problemas matemáticos y además validar las proposiciones por medio de las demostraciones deductivas, eso sí, según su edad escolar.

Argumentaciones: se expresan por medio de justificaciones, argumentos deductivos, argumentos inductivos, a partir de gráficas, etc. Siendo lo anterior, validaciones y explicaciones de proposiciones y procedimientos, en los cuales el estudiante capta el flujo demostrativo de la matemática.

Los anteriores objetos y su articulación que se plasma en la figura 4, influyen sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores.

Figura 4

Componentes y relaciones en una configuración epistémica



Nota: Fuente: Tomado de La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores (p.69), por Godino y Font (2006), Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

2.3. MARCO REFERENCIAL

En la investigación de Pino & Estepa (2019) y de Pino & Estepa (2017) tienen como objetivo analizar cómo se presenta la enseñanza de las medidas de dispersión en la unidad didáctica de estadística de libros de texto escolares. En la unión de los dos estudios, se emplea el enfoque onto semiótico y en particular se analizan los seis objetos matemáticos primarios: lengua, conceptos, procedimientos, argumentos, proposiciones y situaciones-problema. Ahora, a partir de los seis objetos matemáticos primarios, se hace uso de una metodología empleada en las dos investigaciones, llamada Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS), la cual sirve para reconocer objetos matemáticos presentados en textos. Para llevar lo anterior a cabo, se analizaron 12 libros de texto de 3º y 4º de ESO de editoriales públicas y privadas como Anaya, Santillana, Oxford y SM que están bajo la

premisa de cumplir el currículo del Marco Europeo de Cualificaciones para el Aprendizaje Permanente del 2007.

Los resultados del análisis de contenido de los libros mencionados se plasmaron en rejillas de análisis. Estas rejillas presentan los elementos lingüísticos más comunes, una síntesis de los resultados del estudio de los conceptos de las diferentes medidas de dispersión, la codificación de las propiedades y como tal las propiedades en los libros de texto analizados, la frecuencia de argumentos, las definiciones que realizan los textos y, por último, las situaciones problema por medida de dispersión que se presentan. En las siguientes tablas 5,6,7 y 8 se puede visualizar las rejillas, con una descripción de su intención y los resultados que se obtuvieron con su uso:

2.3.1. Rejilla de los elementos lingüísticos

Organiza los elementos lingüísticos más comunes, categorizados en elementos lingüísticos textuales (LT) que representan las descripciones verbales, y los elementos lingüísticos notacionales (LN) que representan los símbolos y expresiones algebraicas. Por otro lado, se dejan los elementos lingüísticos gráficos (LG) como gráficos e imágenes para aclarar conceptos o propiedades, siendo excluido de la rejilla con los siguientes elementos lingüísticos como: las medidas de centralización y los bigotes del gráfico de la caja. El motivo, porque hubo un enfoque en las reglas curriculares, por ende, se descartaron aquellos elementos que no estaban en el currículo y que aparecían en solo algunos textos. Además, aquellos elementos lingüísticos como los gráficos se descartaron por extender el trabajo investigativo ya que hacen parte de las características propias de cada texto. Lo descrito anteriormente, se plasma en la tabla 5:

Tabla 5*Elementos lingüísticos que aparecen en los libros de texto analizados*

Elemento lingüístico	3º ESO				4º ESO Opt. A				4º ESO Opt. B			
	A	S	O	SM	A	S	O	SM	A	S	O	SM
LT1. Ser regular, tener poca dispersion												
LT2. Desviaciones respecto a la media												
LT3. Datos agrupados (en el sentido de dispersión y no agrupación tabular o gráfica)												
LT4. Varianza y desviación típica												
LT5. Dispersión relativa, las medidas no coinciden												
LT6. Valores atípicos												
LT7. Rango												
LT8. Desviación media												
LN1. σ												
LN2. σ_x												
LN3. S												
LN4. σ^2												
LN5. s^2												
LN6. CV												
LN7. R												
LN8. Rango = Máx - Mín												
LN9. $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$												
LN 10. $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$												
LN11. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$												
LN 12. Fórmula. C. V. = $\frac{s}{x}$												
LN 13. $DM = \frac{\sum x_i - \bar{x} }{n}$												

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 6), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

A continuación, se mencionan los resultados que arrojó esta primera rejilla. Primero que todo, se observó que no hay complementación de las representaciones sobre los elementos ya que se usa texto, formula o elemento gráfico, además se evidencia el uso de

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 7 y 8), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

Para llevar a cabo el análisis, las definiciones de las medidas de dispersión se tomaron como equivalentes entre los libros de texto, destacando diferencias que pudieran tener y que enriquecieran el análisis, además de esto, con los resultados obtenidos se hizo una relación con los indicadores curriculares. Siendo los resultados obtenidos los siguientes: el rango no aparece en todos los libros de texto estudiados, la varianza aparece en todos los textos, pero específicamente en uno, aunque aparece la varianza no aparece la desviación típica y por consiguiente tampoco el coeficiente de variación, por lo que se concluye que esto dificulta el cumplimiento del currículo en la comparación de distribuciones de datos para grado 3º y 4º de ESO.

2.3.3. Rejilla de Procedimientos

Se parte de los conceptos ya analizados para proseguir con las acciones o procedimientos que logran describir los indicadores de dispersión de los datos con respecto a la media, en tal caso, se toman aquellos procedimientos que permiten practicar conceptos y resolver situaciones problema. En particular, se incluyeron algunos procedimientos introductorios a las medidas de dispersión, ya que permiten representar y visualizar la dispersión de los datos como es el caso de los procedimientos PR2 Y PR3, partiendo de las medidas de tendencia central. De tal modo, que haya una comprensión asociativa de los conceptos y los procedimientos subsiguientes. Los procedimientos tomados en cuenta en la rejilla están en la tabla 7.

Tabla 7*Procedimientos que se exponen en los libros de texto analizados*

Procedimiento	3º ESO				4º ESO Opt. A				4º ESO Opt. B			
	A	S	O	SM	A	S	O	SM	A	S	O	SM
PR1. Cálculo de rango												
PR2. Cálculo de desviación respecto a la media												
PR3. Cálculo de desviación media absoluta												
PR4. Cálculo de varianza												
PR5. Cálculo de desviación típica												
PR6. Comparación de distribuciones mediante coeficiente de variación												
PR7. Cálculo de coeficiente de variación												
PR8. Cálculo de recorrido intercuartílico												
PR9. Construcción de diagrama de caja												

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 8), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

Los resultados que obtuvieron a partir de la rejilla de procedimientos fueron diversos, primero, en concordancia con lo que dicta el currículo, se evidenciaron que hay ciertos procedimientos que son específicos de 4º de ESO y por lo tanto no aparecen en los libros de 3º de ESO como es el caso de PR8 Y PR9, e igualmente ocurre con los preceptivos de 3º de ESO como PR1 y PR5. Por otro lado, aparece un problema consistente con los procedimientos del rango, ya que, o no aparecen o no explican el uso del concepto. Y finalmente, se vislumbra un desligue del PR9 y PR8 en los libros de texto analizados, situación indeseada ya que entre ellos se apoyan para la comprensión de los conceptos a los

que están asociados que son el diagrama de caja y el recorrido intercuartílico, situación que se muestra en los casos cuando no aparece PR8 y si PR9, dificultando la explicación de PR9 al ser dos procesos desconocidos presentados en uno, hay textos que sopesan la dificultad producida, con ejercicios para comprender el proceso en PR9.

2.3.4. Rejilla de propiedades

En este caso, se trabaja las proposiciones de los textos analizados, los cuales son enunciados que hacen referencia a objetos matemáticos y sus relaciones con otros objetos por lo que tienden a definir propiedades. Estas propiedades las clasifican en tres grupos: propiedades numéricas (PN), propiedades algebraicas (PA) y propiedades estadísticas (PE) que en si son relativas a características de los números, formulas y significados con respecto a medidas de dispersión. En las siguientes tablas 8 y 9 se presentan las propiedades de los textos analizados, la primera tabla propone las propiedades de forma extensiva con su debida codificación, y la segunda tabla usa la codificación para mostrar la recurrencia de las propiedades en los 12 libros de texto analizados.

Tabla 8
Codificación de las propiedades

Código	Propiedad
PN1	La varianza y la desviación típica son definidas positivas
PN2	La varianza se mide en unidades cuadradas de los datos y la desviación típica en la misma unidad que los datos
PN3	La desviación media es definida positiva
PN4	El coeficiente de variación es definido positivo
PN5	El coeficiente de variación es adimensional
PN6	El rango tiene las mismas unidades que los datos
PA1	El valor de la varianza y la desviación típica dependen de cómo se agrupan los datos
PA2	La varianza es invariante ante cambio de origen
PA3	La varianza y la desviación típica tienen propiedades algebraicas y aritméticas más cómodas que la desviación media
PA4	El rango es la medida de dispersión más fácil de calcular
PE1	La suma de las desviaciones respecto a la media es 0
PE2	La varianza y la desviación típica son nulas si y solo si todas las medidas son iguales
PE3	Un mayor/menor valor de la varianza y la desviación típica significa mayor/menor dispersión. El valor cero significa ausencia de dispersión.
PE4	En el cálculo de varianza y desviación típica intervienen todos los valores de la variable
PE5	La modificación de algunos datos y añadir o eliminar algunos datos producen cambios la varianza y desviación típica
PE6	Los rangos miden la dispersión sin referencia a promedios. La desviación típica y la varianza miden la dispersión de las observaciones alrededor de la media
PE7	Si no se recomienda la media como medida de tendencia central, tampoco se deben recomendar desviación típica y varianza como medidas de dispersión. Esto es especialmente cierto en distribuciones asimétricas, en las que es preferible utilizar mediana y rango intercuartílico

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 10), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

Tabla 9*Propiedades que aparecen en los libros de texto analizados*

Propiedad	3º ESO				4º ESO Opt. A				4º ESO Opt. B			
	A	S	O	SM	A	S	O	SM	A	S	O	SM
PN1. Varianza y desviación típica positivas												
PN2. Varianza unidades cuadradas y desviación típica unidades igual a datos												
PN3. Desviación media positiva												
PN4. Coeficiente de variación positivo												
PN5. Coeficiente de variación adimensional												
PN6. Rango y datos mismas unidades												
PA1. Varianza y desviación típica dependen de agrupación de datos												
PA2. Varianza invariante ante cambio de origen												
PA3. La varianza y la desviación típica tienen propiedades más cómodas que la desviación media												
PA4. El rango es la medida más fácil de calcular												
PE1. La suma de las desviaciones respecto a la media es 0												
PE2. Si los datos son iguales la varianza y desviación típica son 0												
PE3. A mayor/menor varianza y desviación típica mayor/menor												
PE4. Todos los valores se usan para el cálculo de la varianza y												
PE5. Modificar datos cambia la varianza y desviación típica												
PE6. El rango mide la variación sin referencias a promedios, la												
PE7. Se debe utilizar o la media y la desviación típica o la mediana y el rango intercuartílico pero no mezclarlas												

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 10), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

Los resultados que arroja la tabla 9 van desde los generales, siendo estos que: hay propiedades presentes en todos los libros como la PE3 Y PE4, situación que no sucede con las demás propiedades, la razón de esto es que PE1 Y PE2 no es frecuente en los textos escolares por verse como obvia las propiedades que traten sobre medidas nulas, siendo lo anterior un detonante para las propiedades subyacentes sobre la desviación absoluta y la varianza por no tener un medio para justificarse en PE1. Por otro lado, hay ciertas propiedades recurrentes como PA1 y la no negatividad de la desviación típica que no es muy explicada a fondo pero que se indica con la raíz cuadrada positiva.

2.3.5. Rejilla de argumentos

Presentan un análisis de los argumentos divididos en cinco tipos: Argumentos basados en Propiedades de Números y Operaciones (APNO), que son operaciones relacionadas con sus propiedades y números para lograr el uso adecuado de fórmulas; Argumentos con Ejemplos, Contraejemplos y Comprobaciones (AECC), como el caso en que con dos medias iguales se puede obtener diferente desviación típica como comprobación de que la media de forma aislada no describe totalmente los datos; Argumentos Apoyados en Ostensivos (AAO), que son los que se apoyan en gráficos, imágenes y tablas; Argumentos Verbales Deductivos (AVD) y Argumentos Algebraicos Deductivos (AAD), cuando se hace alguna deducción sobre las fórmulas, ya sea de forma textual o de forma algebraica. A partir de lo anterior, con la siguiente tabla 10 se cuantifica las veces que aparece cada tipo de argumento en los textos analizados:

Tabla 10

Frecuencia de los argumentos por libros de texto analizados

Argumentos	3º ESO				4º ESO Opt. A				4º ESO Opt. B			
	A	S	O	SM	A	S	O	SM	A	S	O	SM
APNO												
AECC												
AAO												
AVD												
AAD												

Nota. Fuente: Tomado de Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria (p. 12), por Pino, J. & Estepa, A. (2019), Avances de investigación en educación matemática.

Los resultados que arrojó la tablas fueron los siguientes:

- Es común el uso de AECC y AAO, o sea ejemplos y graficas para argumentar
- En libros con gran variedad de fórmulas están más presentes los AAD
- Las deducciones ya sean verbales o algebraicas realizadas en los libros son escasas

Por lo tanto, a luz de los resultados anteriores concluyeron que la falta de AAD genera una falta de significado de las fórmulas en los estudiantes.

2.3.6. Rejilla de situaciones-problema

En esta rejilla presentada en la tabla 11 se presentan las situaciones problema, aplicaciones y ejercicios que aparecen en los textos dirigido a la resolución para los estudiantes en cada una de las medidas de dispersión. Los cuales están relacionados directamente a la significación de conceptos.

Tabla 11

Situaciones – problema por medida de dispersión.

Medidas de dispersión	Tercero				Cuarto A				Cuarto B			
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12
Rango												
Desviación típica												
Varianza												
Coeficiente de variación												
Rango intercuartílico												
Diagrama de caja												
Interpretación conjunta de media y desviación típica												

Nota. Fuente: Tomado de Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO (p. 10), por Del Pino-Ruiz, J. y Estepa, A. (2017), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Entre los resultados se encontró la incidencia de representar la desviación típica pero no de ahondar en la interpretación de la desviación típica y la media ya que aparecen con menor frecuencia. Por otro lado, las situaciones-problema con respecto a la varianza se le resta importancia en los textos ya que tiene pocos ejercicios prácticos en comparación con la desviación típica, evidenciando que la varianza en algunos textos solo se toma como rol secundario para el cálculo de la desviación típica. Por último, se presenta una frecuencia alta de ejercicios sobre el coeficiente de variación frente a otras medidas en algunos textos de 4º de ESO como L9 y L10.

A partir de la recopilación de información de las dos investigaciones, se concluyó que, hay significados y objetos que no aparecen en los libros según lo dicta el currículo y una razón puede ser la no revisión oficial de libros de texto de la administración educativa, se coincide con Hart (1984) que la desviación típica es la medida de dispersión más importante ya que es infaltable en todos los libros de texto analizados, también no se incluyen elementos lingüísticos relativos a la comparación, propiedades, procedimientos y argumentos que ligan a unos con otros en los libros de texto de 3º de ESO, y por último la explicación dada por los libros para representar el diagrama de caja es deficiente ya que no se da a entender.

2.4. MARCO CURRICULAR

La fundamentación curricular de este trabajo está en base a las directrices del MEN, cuyos documentos para regular la educación en Colombia son:

- Lineamientos curriculares (LC) (1998)
- Estándares básicos de competencias Matemáticas (EBCM) (1998,2006)
- Derechos básicos de aprendizaje (DBA)

En los lineamientos curriculares en el año 1998 se aborda oficialmente el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos en Colombia como parte del modelo educativo Nacional, siendo su contenido publicado en los EBCM en el año 2006, finalmente estos dos documentos dan pie para dar cumplimiento a la ley 115 de 1994, que es la Ley general de educación.

“La renovación curricular propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica

y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones.” (MEN, 1998, p.3)

Como parte de los conocimientos básicos de los lineamientos curriculares está el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, cuyos fundamentos para estar allí van de que el ser humano necesita tratar la incertidumbre en las diversas ciencias y en su cotidianidad, por lo cual, propone que “el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas”, por lo que se prioriza la exploración y la investigación en los estudiantes y profesores.

Los LC propone las siguientes actividades para el buen desarrollo de la estadística escolar:

- Preguntas sobre fenómenos a través de la recolección y análisis de datos
- Decidir la pertinencia de la información necesaria
- Usar estrategias para recoger la información
- Tener formas de representar la información
- Adquirir formas de interpretar los datos estadísticos para obtener respuestas

A partir de lo anterior, se llegan a nuevas hipótesis y a exploraciones que permiten el desarrollo del conocimiento estocástico y al refuerzo a la vinculación de la matemática-estadística con otras áreas del currículo, por ejemplo, se pone en práctica los números, las medidas, las aproximaciones, y las estrategias de un proceso general importante en los LC que se llama la resolución y el planteamiento de problemas.

2.4.1. Las medidas de dispersión en el currículo

En particular las medidas de dispersión según los EBCM se conciben desde grado octavo hasta once, ya que en sexto a séptimo se tratan son las medidas de tendencia central. Acorde al interés del trabajo, los apartados que se abstraen son solamente los de octavo con respecto a todo lo relacionado con las medidas de dispersión y al interés de un desarrollo satisfactorio. En la siguiente tablas 13 se abstrae los estándares haciendo uso de la malla curricular sugerida por el MEN para octavo y noveno en su programa “Modelos Pedagógicos Flexibles: Secundaria Activa”, publicados en el año 2012.

Tabla 12
Malla curricular MEN para datos estadísticos 8°

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Concepto	Elementos conceptuales	Estándares básicos de competencia
Se destaca la importancia de obtener registros claros y visuales que presenten informaciones organizadas, que permitan analizar información sobre variables que se presenten dentro de una población a partir de tablas y gráficas en las que se identifiquen las variables independiente y dependiente.	Dato	Presentación, tratamiento y análisis de la información para datos agrupados: tablas de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales, simples y acumuladas	Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas.)
		Observación, construcción y análisis de representaciones gráficas: Polígonos de frecuencias y diagramas circulares. Representaciones de tallo y hojas. Obtención de Inferencias a partir de gráficas dadas.	Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.
		Comprensión de las medidas estadísticas de posición: cuartiles, deciles, percentiles. Construcción e interpretación de diagramas de cajas	Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explico sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.

Nota. la tabla es un fragmento de una malla curricular de matemáticas propuesta por el MEN, se toma el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, acotándose a solo los datos. Tomado de Modelos Pedagógicos Flexibles: Secundaria Activa grado 8° (p. 28), por Saavedra, M. (2012), MEN.

Con los elementos conceptuales y los estándares básicos organizados, se empieza a ver el enfoque que los profesores académicos les dan a las medidas de dispersión en la educación colombiana. Es claro que son estándares y que según el artículo 27 “El Estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra.”, lo anterior esta consignado en la constitución política de Colombia. Por lo cual, los fundamentos teóricos plasmados en los documentos, aunque son punto de partida importante para dar a conocer el enfoque de los profesores a nivel nacional, no es absoluto.

2.5. MARCO METODOLÓGICO

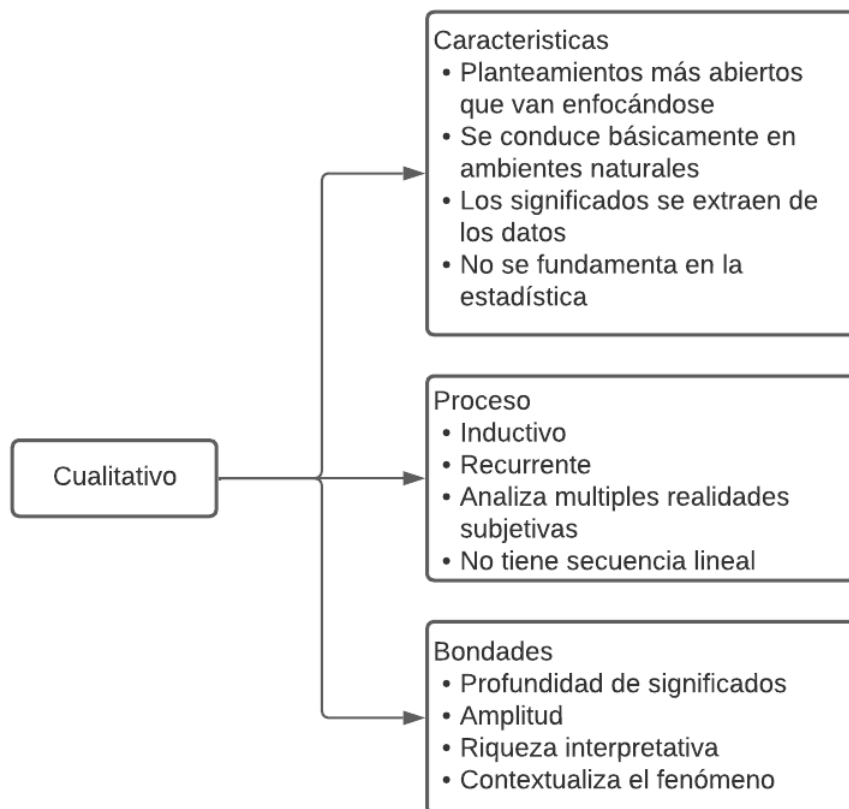
En los trabajos investigativos existen dos enfoques: cuantitativo o cualitativo, hay investigaciones que comparten los dos enfoques llamado mixto. En particular en este trabajo se utiliza el enfoque cualitativo el cual tiene estrategias comunes entre los enfoques y características específicas, las comunes de cualquier enfoque según Grinnell (1997) son:

1. Llevan a cabo la observación y evaluación de fenómenos.
2. Establecen suposiciones o ideas como consecuencia de la observación y evaluación realizadas.
3. Demuestran el grado en que las suposiciones o ideas tienen fundamento.
4. Revisan tales suposiciones o ideas sobre la base de las pruebas o del análisis
5. Proponen nuevas observaciones y evaluaciones para esclarecer, modificar y fundamentar las suposiciones e ideas o incluso para generar otras.

Y las características particulares del enfoque cualitativo se pueden visualizar en la siguiente figura 5:

Figura 5

Enfoque de investigación cualitativo



Nota. la figura es un fragmento de un marco conceptual sobre los enfoques investigativos, se toma solo el enfoque investigativo cualitativo donde son relevantes sus características, procesos y bondades. Tomado de Metodología de la Investigación 6ª Edición (p. 36), por Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014), Mcgraw Hil.

El enfoque cualitativo busca temas significativos para investigar como cualquier otro enfoque, pero por su caracterización se evidencia el intento de comprender a los sujetos, los hechos y los fenómenos. Por lo que, es indispensable para esta investigación la indagación entre los hechos y la interpretación, recogiendo datos y analizándolos intensivamente con la intención de generar preguntas de investigación o producir nuevas interrogantes interpretativas para entender la realidad a profundidad, en el caso una realidad educativa matemática estadística cuya expansión de información es inherente a la actualidad social.

En este trabajo, los datos cualitativos se identifican a partir de información en forma de texto, cuya indagación busca comprender los objetos estadísticos de las medidas de dispersión a partir de los objetos de las CE (Ver pag.26) como conceptos, definiciones, argumentos, situaciones problema, etc., los cuales serán las variaciones que se desean explicar. Es decir, las variables cualitativas a estudiar son los 6 objetos de la CE, los cuales se preestablecieron por la importancia que cobran en la indagación epistémica de un texto escolar, ya que, permite ver los objetos generales y las características específicas como los ejemplos, las gráficas, las explicaciones, los ejercicios, haciendo la recogida de datos organizada y rica en información.

El estudio de estas variables y sus interacciones se hace bajo la premisa de ampliar la información hacia el acceso al aprendizaje de las medidas de dispersión por medio del texto escolar, producto de la necesidad de profundizar los objetos estadísticos que juegan parte en la enseñanza, ya que, a veces se descuidan por no tomar en cuenta todas las variables que interactúan para desarrollar el saber matemático. Un ejemplo, es el concepto del rango y la visualización de la distribución de datos, explicar el rango sin uno o dos ejemplos gráficos o tabulares que visualicen la proposición ‘el mismo rango puede tener diferente distribución’, esta incentivando la pérdida de significado al concepto y por lo tanto una dificultad en el aprendizaje. Aunque, la falta de objetos epistémicos no es evidente a simple vista son una dificultad latente en el proceso de aprendizaje, que es evitable al brindar análisis de los recursos que se usan en el aula, en este caso el libro de texto.

2.5.1. Instrumentos de recolección de información

En este caso, para el enfoque cualitativo se usa como instrumento de recolección de datos las rejillas de análisis para encontrar información relevante en los libros de texto.

Los contenidos a valorar en el texto a partir de las rejillas van desde los siguientes tópicos y sub tópicos:

1. Lenguaje

1. Elementos lingüísticos textuales

- Ser regular, tener poca dispersión
- Desviaciones respecto a la media
- Datos agrupados (en el sentido de dispersión y no agrupación tabular o gráfica)
- Varianza y desviación típica
- Dispersión relativa, las medidas no coinciden
- Valores atípicos
- Rango
- Desviación media

2. Elementos lingüísticos notacionales

- Símbolos
- Formulas

3. Elementos lingüísticos gráficos

- Forma
- Estructura
- Expresiones

2. Situaciones

1. Rango
2. Desviación típica
3. Varianza
4. Coeficiente de variación
5. Rango intercuartílico
6. Diagrama de caja

7. Interpretación conjunta de media y desviación típica

3. Conceptos

1. Rango
2. Varianza
3. Desviación típica
4. Coeficiente de variación
5. Desviación media

4. Procedimientos

1. Cálculo de rango, desviación respecto a la media, desviación media absoluta, varianza, desviación típica, coeficiente de variación y recorrido intercuartílico.
2. Comparación de distribuciones mediante coeficiente de variación.
3. Construcción de diagrama de caja.

5. Propiedades

1. Propiedades numéricas:

- Varianza y desviación típica positivas
- Varianza unidades cuadradas y desviación típica unidades igual a datos
- Desviación media positiva
- Coeficiente de variación positivo
- Coeficiente de variación adimensional
- Rango y datos mismas unidades

2. Propiedades algebraicas:

- Varianza y desviación típica dependen de agrupación de datos
- Varianza invariante ante cambio de origen
- La varianza y la desviación típica tienen propiedades más cómodas que la desviación media
- El rango es la medida más fácil de calcular

3. Propiedades estadísticas:

- La suma de las desviaciones respecto a la media es 0
- Si los datos son iguales la varianza y desviación típica son 0

- A mayor/menor varianza y desviación típica mayor/menor dispersión. Valor 0 ausencia de dispersión
- Todos los valores se usan para el cálculo de la varianza y desviación típica
- Modificar datos cambia la varianza y desviación típica
- El rango mide la variación sin referencias a promedios, la varianza y desviación típica toman la media como referencia
- Se debe utilizar o la media y la desviación típica o la mediana y el rango intercuartílico, pero no mezclarlas

6. Argumentos

1. Argumentos basados en Propiedades de Números y Operaciones
2. Argumentos con Ejemplos, Contraejemplos y Comprobaciones
3. Argumentos Apoyados en Ostensivos
4. Argumentos Verbales Deductivos
5. Argumentos Algebraicos Deductivos

2.5.2. Paradigma de la investigación: Sociocultural y Cognitivo

Los ciudadanos que forman parte de la sociedad para comprender conceptos y habilidades necesitan experiencia y práctica. En particular en situaciones educativa-escolares, los objetos matemáticos necesitan en adición la significación, que genera la comprensión e interpretación de cada objeto matemático, a partir de la pertinencia del uso de contextos propicios y situaciones de la vida real. Es imperioso del profesor brindar las herramientas al estudiante para que use efectivamente los conocimientos fuera del aula de clase, una razón, es que la sociedad cada día concibe con mayor relevancia la estadística.

Por consiguiente, podemos darnos cuenta de que los datos estadísticos cubren las pantallas de celulares, televisores y computadores, medios tecnológicos usados frecuentemente por el ser humano, que incentivan el hecho de distinguir datos e interpretarlos, que se vuelvan conceptos científicos y no solo espontáneos (Hernandez, 1997), ¿Por qué?, el desconocimiento conlleva a la manipulación de información y a criterios erróneos a partir de ellos. Por lo que, como dice Denzin (2016) como ciudadano global, no busco interpretar el mundo, que era el mandato de la investigación cualitativa tradicional.

Hoy, se busca cambiar el mundo y a cambiarlo de manera que resista la injusticia mientras celebramos la libertad y la democracia plena, inclusiva y participativa (p. 9). Aunque, interpretar el mundo ya es un medio para transformarlo o reconfigurarlo (Rancière, 2007), la realidad esta para cambiarla a mejor y por tal motivo el crear y buscar los medios para una educación estadística de calidad traerá un mejor futuro.

Por lo que, el paradigma de investigación sociocultural y cognitivo da cierto carácter a la investigación con respecto a la importancia del contexto y la significación de significantes de los sujetos a partir de lo los libros de texto, ya que, “las distintas sociedades y grupos culturales siempre se han preocupado de como transmitir su identidad, sus valores y saberes culturales a las siguientes generaciones” (Hernández, 1997, p.136), siendo el libro indispensable en la educación, la concientización de los diseños de los libros de texto escolares sobre las medidas de dispersión por medio de un análisis exhaustivo genera una onda en la perspectiva de investigadores y editores de los libros de texto en la unidad de estadística y probabilidad.

2.5.3. Investigación guiada a través de libros de textos escolares

Para ilustrar la presencia de las medidas de dispersión en el contenido y las actividades en textos escolares de matemáticas en la unidad de estadística y probabilidad, se trabajó con los libros escolares públicos Vamos a aprender matemáticas (VA) del MEN en Colombia y los libros escolares privados ACTIVAMENTE matemáticas (ST) de la editorial Santillana. En total son 2 libros, cada editorial con uno de 8º, que es el grado correspondiente al penúltimo año de la educación media en Colombia.

En la unidad de estadística de los libros de texto escolares en matemáticas a analizar, se presentan los contenidos relacionados con las medidas de dispersión, visualizada la información en la siguiente tabla 12:

Tabla 13
Contenido curricular de los libros a analizar

Grado	Libro	Contenido curricular
8°	SM	Medidas de dispersion: rango, desviacion respecto a la media, desviacion media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación. Actividad (p.193)
	ST	Percentiles, deciles y cuartiles. Actividad (p.187). Caracterización de variables cuantitativas continuas para datos agrupados, tabla de distribución de frecuencias, gráficos estadísticos, media ponderada, varianza y desviación estándar. Actividad (p.195).
9°	SM	Medidas de posición no central: los cuantiles, los cuartiles. Actividad (p.109). Diagrama de caja y bigotes. Actividad (p.111). Medidas de dispersión: rango, varianza, desviación típica, coeficiente de variación. Actividad (p.113)
	ST	Métodos numéricos para la caracterización de variables: medidas de localización. Actividad (p.81). percentiles, cuartiles y deciles, diagrama de caja y bigotes. Actividad (p.85). Medidas de variabilidad: rango, varianza, desviación estándar. Actividad (p. 89)Análisis de un conjunto de datos y análisis de dos conjuntos de datos. Actividad (p.95).

Nota: Autoría propia

Con los contenidos y las páginas de actividades en la anterior tabla, se puede intuir con ello que tan frecuente es y qué tan importante es para los dos libros la puesta en juego de los conceptos en práctica ya sea en forma teórica o de campo, situación que se ahonda al abordar los tipos de actividades en el momento de proponer las situaciones-problema. Por lo tanto, se utiliza la clasificación de tareas de Salcedo (2015) y, Salcedo y Ramírez (2016), citado por Salcedo (2019):

Tareas de memorización: Se reproduce normas, definiciones, a priori de la comprensión de conceptos estadísticos. O sea que, para resolver estas actividades se necesita recordar el proceso, pero no comprenderlo o interpretarlo según sea el objeto estadístico. Mientras se sepa hacer se resuelve sin dificultad.

Tareas de procedimiento sin conexión: Se mecanizan cálculos donde el procedimiento es fomentado por una guía. Son actividades algorítmicas donde no hay

necesidad de comprender los instrumentos estadísticos mientras se llegue a los resultados por medio de los cálculos, mucho menos pensar en su relación estadística. Por lo que, el uso del lenguaje estadístico no provee comprensión de este.

Tareas de procedimiento con conexión: Hay relación de procedimientos con la comprensión de los conceptos estadísticos. Además, se tiene el criterio de usar el procedimiento más oportuno a la situación-problema que se plantea. Siendo aquellas situaciones planteadas en un contexto particular para resolverlos a partir de ideas estadísticas preestablecidas y conseguir resultados e interpretaciones con los datos estadísticos.

Tareas para hacer estadística: Se exige la comprensión en profundidad de conceptos, procedimientos y las relaciones que hay en estadística. No hay una directriz de cómo se resuelve, pero se da la información necesaria (contexto y datos) para que capte a partir de su comprensión la situación. Esta comprensión abarca el reconocimiento de conceptos estadísticos, las relaciones y el criterio del procedimiento a utilizar, para poder inferir y analizar los resultados que arrojan los datos.

En adición, se toman en cuenta los contextos PISA (OECD, 2019):

Contexto personal: Son aquellos contextos en los cuales se acerca la realidad de su diario vivir de forma individual.

Contexto social: Se interpreta como contextos en los cuales es participe la sociedad en diferentes ámbitos como lo es el deporte, la política, etc.

Contexto científico: Son contextos verídicos con información sacada de fuentes fidedignas, en el cual se dan datos reales propuestos en una problemática de cualquier ciencia.

Contexto laboral: Brinda situaciones problema elaboradas para desarrollar habilidades estadísticas en el campo laboral como las diferentes industrias, la tecnología, la sociología, etc.

Sin contexto: En este caso las situaciones problema no tienen contexto por lo tanto están ligadas a la ejercitación de procedimientos.

Con las anteriores clasificaciones, se espera abordar las situaciones-problema que están dirigidas a los estudiantes para su resolución, desde un punto de vista crítico y puntual, referente a las actividades que están en los dos libros de texto.

Por otro lado, las tablas y graficas estadísticas referentes a las medidas de dispersión tienen un rol importante en este trabajo, ya que se ahonda en las maneras de abordar los datos y construir representaciones gráficas, muchas veces implícitas en actividades propuestas. Los principales objetos de estudio son: las gráficas de caja y bigotes (box plot) y las tablas de distribución de frecuencias. El primero es una representación gráfica estadística un poco nueva a comparación de otras el cual describe características importantes de un conjunto de datos, tales como el centro, la dispersión, la simetría o asimetría y la identificación de observaciones atípicas, y el segundo, es un método para organizar datos y facilitar el cálculo en el caso de las medidas de dispersión.

Los criterios para abordar la estructura de las tablas y las representaciones gráficas estadísticas correspondientes a las medidas de dispersión es:

La caracterización de Bertín

Por la complejidad de la lectura de gráficas y las dificultades que puede generar los textos escolares, el análisis se basa primero que todo en los siguientes tres procesos:

Proceso 1: consiste en la interpretación de sus componentes (identificación externa), como el título y las etiquetas que remiten al tema del gráfico y variables representadas.

Proceso 2: corresponde a la identificación interna, permite determinar los rangos de variación de las variables y las escalas representadas.

Proceso 3: la percepción de la correspondencia entre los elementos identificados en los dos procesos anteriores y el contexto, sirven para obtener conclusiones sobre las variables y la realidad representada (Bertín, 1957, citado por Jiménez, Arteaga & Batanero 2020).

3. Esquema del desarrollo del trabajo de grado

En general para desarrollar el análisis de las medidas de dispersión en los 2 libros de texto se necesitan 3 fases.

Fase 1. Explorar y organizar información

Para explorar la información, se necesita delimitar la unidad por ejercicios, ejemplos, definiciones, etc., siendo de tal manera el paso subsiguiente la abstracción de la información de los libros de texto para organizarlas de forma organizada en las rejillas preestablecidas con la finalidad de identificar la frecuencia de los datos en cada rejilla.

Fase 2. Secuencia de análisis de los 6 objetos epistémicos

Con la fase 1 al tener la información plasmada en las rejillas se prosigue con el análisis de la información recolectada por objeto epistémico según la delimitación de cada rejilla, cualquier información fuera de estas se analiza a partir del marco teórico y se tiene especial atención a las situaciones - problema en el cual se complementa con la ejecución de rejillas que puntualizan la información sobre actividades y contextos.

Fase 3. Recta final

A partir de las rejillas completas se organizan los resultados, frutos de la investigación. Se prosigue con el análisis de los resultados haciendo una compacidad con resultados de investigaciones previas mencionados en el marco teórico y referencial. Finalmente, se hacen las conclusiones globales y particulares a partir de los resultados.

Capítulo IV: Resultados**4.1. Resultados elementos lingüísticos**

Tabla 14
Resultados rejilla elementos lingüísticos

Elemento lingüístico	3º ESO	
	SM	ST
LT1. Ser regular, tener poca dispersion	x	x
LT2. Desviaciones respecto a la media	x	p
LT3. Datos agrupados (en el sentido de dispersión y no agrupación tabular o gráfica)		p
LT4. Varianza y desviación típica	x	x
LT5. Dispersión relativa, las medidas no coinciden	x	
LT6. Valores atípicos	x	
LT7. Rango	x	
LT8. Desviación media	x	p
LN1. σ		x
LN2. σ_x		
LN3. S	x	x
LN4. σ^2		x
LN5. s^2	x	x
LN6. CV	x	
LN7. R		
LN8. Rango = Máx - Min	x	
LN9. $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$	x	x
LN10. $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$	x	p
LN11. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$		x
LN 12. Fórmula. C. V. = $\frac{s}{\bar{x}}$	x	
LN 13. $DM = \frac{\sum x_i - \bar{x} }{n}$	x	p

Nota: los “p” son elementos lingüísticos que solo aparecen en el recurso digital.

A partir de los datos recogidos en la rejilla de los elementos lingüísticos se puede evidenciar lo siguiente:

LT1 y LT2 se complementan en las medidas de dispersión.

Los elementos lingüísticos textuales como: el ser regular y tener poca dispersión (LT1) y sobre las desviaciones respecto a la media (LT2) se manifiesta en la editorial SM del

MEN y la editorial Santillana (ST) en grado octavo mediante distintos referentes teóricos. En el primero, los elementos lingüísticos están implícitos en el Coeficiente de Variación, y en el segundo, están en lo que es la varianza y la desviación típica.

Figura 6

Al comparar los resultados de las dos empresas se tiene que $0,17 < 0,237$; por lo tanto, en la primera empresa los datos están más dispersos con respecto a la media. Por el contrario, en la segunda las edades de los empleados están en torno a la media.

Nota: Figura Elemento LT1 y LT2 (1). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.192), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

En la figura 6 relacionan la dispersión de los datos con los resultados del Coeficiente de Variación (CV) de dos empresas según la distribución de edades de los empleados. Mostrando el vínculo de la media y la dispersión de los datos.

Figura 7

Ejemplo 5

Los promedios de sombreros vendidos al mes en dos fábricas de artesanías A y B son 4 400 y 4 280, respectivamente.

Si la desviación típica tanto de A como de B es 620, entonces, la fábrica que presentó mayor variabilidad en sus ventas fue B, pues al calcular los coeficientes de variación respectivos se tiene:

Fábrica A	Fábrica B
$CV = \frac{620}{4400} = 0,1409$	$CV = \frac{620}{4280} = 0,1449$

Nota: Figura Elemento LT1 y LT2 (2). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.192), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

En la figura 7 se menciona lo que es la variabilidad y su aumento según el CV, generando una relación directa con el primer ejemplo al inferir que el aumento de variabilidad conlleva un aumento de dispersión. Por lo tanto, más que mostrar la regularidad se enfocan hacer explícito el aumento de dispersión por medio de la variabilidad.

Figura 8

Comparando con el mismo tipo de datos, ~~un varianza elevada significa que los datos están más dispersos. Mientras que un valor de la varianza bajo indica que los valores están por lo general más próximos a la media.~~

Un valor de la ~~varianza igual a cero~~ implica que todos los valores son iguales, y por lo tanto también ~~coinciden con la media aritmética.~~

Nota: Figura Elemento LT1 y LT2 (3). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>). (El subrayado es mío)

En la figura 8, se visualiza un fragmento de la editorial ST donde se hace presente LT1 y LT2 en el referente teórico de la Varianza y la desviación típica, el cual es desarrollado en un recurso complementario presente en el libro de texto por medio de un código QR. La página web es llamada Sangakoo, es una red social educativa enfocada en el área de matemáticas. Por medio de la página web se presenta en la figura 8 la relación del aumento de la varianza con un aumento de la dispersión de los datos y una varianza baja con los valores próximos a la media, mostrando cuando una varianza es cero es porque es igual a la media aritmética. Por lo tanto, la presencia de LT1 es indiscutible al concebir que los datos son regulares al tener una varianza baja y por tal, poca dispersión.

Figura 9

Comparando con el mismo tipo de datos, ~~una desviación típica elevada significa que los datos están dispersos, mientras que un valor bajo indica que los valores son próximos los unos de los otros, y por lo tanto de la media.~~

Nota: Figura Elemento LT1 y LT2 (4). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>). (El subrayado es mío)

Análogamente, en la figura 9, en relación con la desviación típica en la misma página Web del código QR, se identifica que existe la relación de la dispersión y la desviación típica, mostrando que entre más alta sea la desviación típica más dispersos están los datos y como se ha dicho con anterioridad, una baja dispersión es aquella que esta próxima a la media aritmética.

Por último, en el libro de ST hay una frase que dice: “Esta variabilidad se establece como la diferencia entre cada dato y la media” (p.193) trayendo a colación posiblemente a la

medida de la desviación media con frecuencia uno, que para el caso se relaciona a LT2 por su mención a la variabilidad y la distancia del dato a la media.

¿Qué tan importantes son los valores atípicos?

Figura 10

Evaluación del aprendizaje

✓ Se ha medido el tiempo de espera, en minutos, en una parada de bus, durante una semana a la misma hora del día. En la Tabla 6.47 se muestran los resultados.

Día	L	M	Mc	J	V	S	D
Tiempo	5	5	4	27	4	5	6

Tabla 6.47

a. Calcula la media y la mediana de los datos.

b. ¿Cuál de las dos medidas te parece más representativa, teniendo en cuenta el valor atípico del jueves?

Nota: Figura Elemento LT6. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.193), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

En la figura 10 se puede evidenciar el elemento lingüístico de los valores atípicos (LT6), que se hace presente en un ejercicio evaluativo en el libro *Vamos a aprender matemáticas 8º*, donde se menciona un valor atípico relacionado a los datos que se encuentran en la tabla, particularmente el dato del día jueves. Este elemento lingüístico tiene una situación en particular, y es que no hay un referente de lo que significa un valor atípico, sino que por medio de un ejercicio se muestra implícitamente que un valor atípico es aquel dato alejado del resto de los datos o se podría decir de la media. Aunque no es una definición acertada, es una significación que se podría lograr a partir del ejercicio y de su secuenciación, ya que primero piden hallar la media y después hacen centrar la atención en el valor atípico para hallarle una relación. Por lo que se podría decir que LT6 si está presente y no está exento de una referencia.

Desviación típica

En la rejilla se hace presente la desviación típica en LN1, LN3, LN10 y LN11, todos siendo elementos lingüísticos notacionales, que oportunamente están presentes en los libros

y hasta en el recurso auxiliar. Por consiguiente, en la figura 11 se presenta LN11 de la siguiente manera:

Figura 11

La desviación típica s es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Nota: Figura Elemento LN3 y LN10. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.192), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

Se evidencia que la desviación típica en SM no enuncia su fórmula, pero esta expresada en lenguaje natural que se puede transcribir al cálculo del LN10, también se puede ver que el fragmento expresa la desviación típica como LN3 como el cálculo de una muestra.

Figura 12

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza y se representa por la letra σ .

Nota: Figura Elemento LN1 y LN10 (1). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

Un resultado similar se identifica en la figura 11 ocurre en la figura 12, dado que ST para el cálculo de la desviación típica la expresa en lenguaje natural, solo tiene un inconveniente y es que no se especifica que la raíz cuadrada de la varianza es estrictamente positiva, es grato saber que en las propiedades que esta unos párrafos más adelante se especifica lo siguiente:

Figura 13

1. $\sigma \geq 0$ La desviación típica es un valor positivo, la igualdad sólo se da en el caso de que todas las muestras sean iguales.

Nota: Figura Elemento lingüístico LN1 y LN10 (2). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

Por lo que a partir de LN1 y LN10 dan una apreciación acertada para un cálculo correcto de la desviación típica a partir de la varianza. Se aclara que esta visión de la desviación estándar solo esta presente en el recurso complementario de ST y no en el libro.

Figura 14

De esta manera, las fórmulas para la varianza y la desviación estándar para una muestra son:

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Si el estudio se hace en una población, las fórmulas para la media ponderada (μ), la varianza (σ^2) y la desviación estándar (σ) son:

$$\mu = \frac{\sum x_i f_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Nota: Figura Elemento lingüístico LN1, LN3 y LN11. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.193), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos. (El subrayado es mío)

En el libro ST como se puede ver en la figura 14, para la desviación estándar (DE) hay un enfoque integral y diferenciador de los cálculos respecto a una muestra y una población. Como principal diferenciador están los símbolos que representan a la DE que son los elementos LN3 y LN1, el primero llamado “s” cuyo significado es la DE de una muestra y el segundo llamado “σ” que es la DE de una población. En la misma línea, hay símbolos característicos para cada cálculo como lo es la media muestral $\bar{x}$ y la media poblacional μ , que son inherentes a su cálculo, por otro lado, comparten el símbolo sigma $\sum$ que, aunque no es un símbolo propio de las medidas de dispersión es de uso indispensable en los cálculos de estas medidas por tomar la suma de todos los valores en el rango de la serie. Siendo así, se evidencia que el libro provee fórmulas aplicables según la naturaleza del estudio.

Por lo anterior, es identificable que en la rejilla en el caso del elemento lingüístico LN11 hay una inconsistencia por la confusión de símbolos usados en la fórmula, por ejemplo: se usa el símbolo LN1 pero en el cálculo no se utiliza la media poblacional sino la media muestral. Por lo tanto, la comparación da pie a una futura revisión de la rejilla de elementos lingüísticos tomando en cuenta los dos cálculos que presenta ST para la desviación estándar y no la presente que puede generar confusiones en los estudiantes.

A partir de los datos recogidos y los resultados, se puede identificar que hay una tendencia a no mostrar el cálculo de algunas medidas de dispersión como lo son el rango y la desviación media, dado que no aparece el cálculo o su notación. Generando ciertas inconsistencias y falta de orden a los siguientes cálculos. Por ejemplo, la varianza hace uso

de la desviación media, pero la no clarificación de lo que es la desviación media y su labor en las medidas de dispersión genera un vacío estructural del cálculo estadístico. Por otro lado, los valores atípicos son poco o nada tratados en los libros de texto analizados de grado octavo, se menciona solo una vez en SM y es en un ejercicio, en ningún momento se trata como un término a ser explicitado.

En ST pasa algo particular y es el uso de códigos QR, para integrar recursos de la WEB al texto escolar, situación que es de mérito por ser innovador, fuente de información y práctico, pero desmerito por llevar al texto escolar a estar obligatoriamente ligado a lo que es el internet, puesto que elementos lingüísticos clave no están en el texto escolar pero si en el recurso complementario, situación que no es común, y el recurso siempre se ha visto como un método para innovar o profundizar los conceptos y procedimientos que existen en el libro. Por otro lado, el ser imprescindible el recurso digital, hay que tener en cuenta el contexto de la educación en Colombia ya que según el informe de la UNESCO (2020) “En Colombia solo el 67% de los estudiantes de quince años tienen conexión a internet, 62% acceso a computadora y 29% a un software educativo” (p.6), siguiendo con esta línea de pensamiento el 64% del personal directivo en Colombia declara que la tecnología digital de la que disponen sus centros educativos es inadecuada o insuficiente (OECD, 2019). Por lo tanto, el libro no sería eficiente en más del 30% de la población estudiantil.

4.2. Resultados conceptos

Tabla 15
Resultados rejilla conceptos

	concepto	3° ESO	
		SM	ST
Rango	Diferencia máximo y mínimo	x	
Varianza	Promedio de distancias a la media al cuadrado	x	x
	Media de desviaciones al cuadrado		
Desviación típica	Raíz cuadrada positiva de la varianza	x	x
Coeficiente de variación	Cociente entre desviación típica y media para comparar grupos de datos heterogéneos	x	
Desviación media	Media de valores absolutos de diferencia de cada dato a media	x	

A partir de la rejilla de conceptos se pudo recopilar lo siguiente:

El rango que se conoce

Figura 15

En un conjunto de datos, el menor valor es el mínimo y el mayor es el máximo.

El **rango** es la diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos.

Nota: Figura Elemento LN3 y LN10. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.190), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

En la figura 15 de SM se puede vislumbrar que es usado dos subconceptos clave y una operación para el rango, que son:

- El menor valor, llamado mínimo.
- El mayor valor, llamado máximo.
- Diferenciación, signo de operación resta.

Lo anterior, son partes importantes que permiten la comprensión del cálculo de la medida, permitiendo identificar el menor valor de los datos y el mayor valor de los datos,

además de la comprensión tácita de sacar una medida por la diferencia de los datos. Por otro lado, existe poca aclaración hacia algunas concepciones de la medida como su significado al no plantear que es el recorrido de los datos, o que la medida del rango es igual tanto en un espacio muestral como en una población, parte que no se especifica en el texto escolar y tampoco se exige en la rejilla pero que es oportuno a la hora de comprender el concepto. Por último, en el libro de ST se puede apreciar que en grado octavo el concepto de rango tanto en el libro de texto como en su página web complementaria no lo hacen parte del contenido.

CV

El concepto del Coeficiente de Variación (CV) expuesto en la rejilla es “Cociente entre desviación típica y media para comparar datos heterogéneos”, en el libro de la editorial SM aparece el concepto en el siguiente apartado:

Figura 16

Cuando se tienen dos distribuciones con medias diferentes, las desviaciones típicas no permiten comparar el grado de dispersión de los datos. Para hacerlo, se utiliza el coeficiente de variación.

El **coeficiente de variación CV** es la razón entre la desviación típica de una distribución y su media aritmética.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Nota: Figura Concepto CV. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.192), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

Es de resaltar que el concepto de CV en el libro SM como se muestra en la figura 16 está acorde al que está en la rejilla, sujeto a la base de que comparar datos heterogéneos es semejante a comparar datos dispersos. También, en el primer párrafo de la figura 16 se evidencia que el texto muestra una relevancia a la conexión de la desviación típica y el CV, siendo la desviación típica no solo parte del cálculo con la media, sino un antecedente que transmitió la necesidad de comparar entre datos dispersos, resultando en el cálculo de la medida del CV. Finalmente, aunque hay una conceptualización acertada hay un desligue con los porcentajes de los CV, se creería que es pertinente incluirlo por su uso útil y común;

también porque hace parte del tratamiento del cálculo no se infiere fácilmente. Por cierto, en el libro de ST para grado octavo no está presente el concepto de CV.

La varianza y sus conceptualizaciones

La varianza tiene diversos cálculos y diversas conceptualizaciones, teniendo en cuenta la rejilla se toman particularmente dos: (1) promedio de distancias a la media al cuadrado, y (2) Media de desviaciones al cuadrado.

Figura 17

La **varianza** s^2 es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de cada dato.

Nota: Figura Concepto CV. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

En el libro de SM se evidencia a partir de la figura 17 una conceptualización muy similar a la (2) dada por la rejilla, que se diferencia solo en la parte que dice “(...) respecto a la media de cada dato”, fragmento que es importante como primer acercamiento a lo que es la varianza en las medidas de dispersión ya que, para interpretar la varianza, es necesario evaluar la diferencia de cada dato de la muestra con la media para ser conscientes de la desviación de los datos y, por tal motivo, el fragmento cuenta con una aclaración oportuna que permite una verbalización correcta del concepto.

Por otro lado, el concepto de varianza en el libro de la editorial ST es expresado de la siguiente manera:

Figura 18

La varianza de unos datos es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media de la misma.

Nota: Figura Concepto de Varianza. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

En este apartado se nota que ST por medio de la página web vinculada expresa un concepto de varianza semejante al de la rejilla, cuya diferencia está solo en la definición por medio del lenguaje natural y en cómo se puede interpretar.

A partir de los resultados se puede decir que, de los cinco conceptos se hallaron los cinco en el libro de SM, por el contrario, en el libro de ST se hacen presentes solamente la

desviación típica y la varianza. Evidenciando poco interés a la introducción de las medidas de dispersión en grado octavo, dado que si se revisa el contenido del libro de noveno de la editorial ST se puede visualizar medidas como rango, varianza, desviación típica, etc. Por lo tanto, se espera que se refuerce el tratamiento de los datos estadísticos en pro a la estadística escolar a partir de los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas en Colombia y a los Derechos Básicos de Aprendizaje.

En consecuencia, es necesario enfatizar que tanto en el texto como en la rejilla al concepto de rango no se le da un valor significativo, dado que no hay respuesta al ¿Qué es? y ¿Por qué es una medida de dispersión?, aun siendo una de las primeras conceptualizaciones de las medidas de dispersión, la cual en óptimos referentes permite la comprensión del espacio muestral y definir el rango como la variación máxima posible (o dispersión total) en un conjunto de datos, por lo que se puede inferir que si los estudiantes no dimensionan lo que es el recorrido de los datos como medida, les será más complicado comprender el resto de las medidas de dispersión o lamentablemente ignoraran el rango como medida sin diferenciar sus rasgos descriptivos o diferenciales.

Por otro lado, es de interés como en el libro de SM introduce el concepto de CV al definirlo bajo la relación entre la desviación típica y la media aritmética de los datos, situación que permite la comprensión integral del concepto y una conciencia de que cada medida de dispersión está bajo estándares para un uso en la interpretación de los datos.

4.3. Resultados procedimientos

Tabla 16
Resultados rejilla procedimientos

Procedimiento	3° ESO	
	SM	ST
PR1. Cálculo de rango		
PR2. Cálculo de desviación respecto a la media		p
PR3. Cálculo de desviación media absoluta	x	p
PR4. Cálculo de varianza	x	x
PR5. Cálculo de desviación típica	x	x
PR6. Comparación de distribuciones mediante coeficiente de variación	x	
PR7. Cálculo de coeficiente de variación	x	
PR8. Cálculo de recorrido intercuartílico		x
PR9. Construcción de diagrama de caja		

Con respecto a los procedimientos de las medidas de dispersión en los libros de texto estudiados se pudo recopilar los siguientes resultados:

Cálculo de desviación respecto a la media y desviación media absoluta

Se encontró un recurso audiovisual de YouTube anexo en la página de Sangakoo, cuyo vínculo está en el libro ST por medio del código QR. Este video es lo más cercano que ofrece el libro ST y sus recursos al cálculo de la desviación respecto a la media. Ya que el libro propone el cálculo de la desviación estándar pero nunca se detiene en la desviación respecto a la media, aunque se utilice implícitamente.

En el recurso audiovisual se explica y se hace el proceso de las medidas de dispersión en una tabla de frecuencias, entre ellas está PR2 y PR3.

Figura 19

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$D_i = x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} \cdot f_i$	
3	1	3	$3 - 5'5 = -2'5$	$2'5 \cdot 1 = 2'5$	$\bar{x} = \frac{77}{14} = 5'5$
4	3	12	$4 - 5'5 = -1'5$	$1'5 \cdot 3 = 4'5$	
5	4	20	$-0'5$	$0'5 \cdot 4 = 2$	$D_{\bar{x}} = \frac{18}{14} = 1'29$
6	2	12	$0'5$	1	
7	3	21	$1'5$	$4'5$	
9	1	9	$3'5$	$3'5$	
	14	77		18	
	N				

Nota: Figura PR2 y PR3 (1). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>). (El subrayado es mío)

Se puede evidenciar en la figura 19 que en la página web de Sangakoo, le dan importancia a la tabla de frecuencias para organizar los datos y cuadrar los cálculos de las medidas, en el caso de la Desviación media ($D_{\bar{x}}$) se empieza organizando las marcas de clase (x_i), la frecuencia relativa (f_i), para poder hallar la media ponderada ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n}$$

La cual es necesaria en el cálculo de la $D_{\bar{x}}$, posteriormente denotan PR2 como $D_i = x_i - \bar{x}$, se calcula con respecto a cada dato y se va registrando en la tabla de datos, la intención es que en la próxima columna a cada D_i se le multiplique su respectiva frecuencia y que la suma de todo ese rango de datos se divida entre el número total de datos para finalmente sacar la $D_{\bar{x}}$. El cálculo que proponen en el video es explicativo y ciertamente intuitivo hacia la fórmula que sería la siguiente:

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{n}$$

Por lo tanto, el video aclara y muestra de forma eficiente la formula, dado que el proceso y el cálculo no está yuxtapuesto y los símbolos están dotados de significado como es el caso del símbolo sigma “ Σ ”, entonces, cumplen el usar oportunamente la función de los objetos matemáticos, ligándose a la visualización de ellos.

En el libro de la editorial SM y la editorial ST al no ser tratado ni siquiera el proceso de la desviación con respecto a la media da la sensación de que el cálculo es solo visto como

una parte o un agregado de otras medidas de dispersión, pero no como una medida de dispersión que otorga el valor de una desviación.

Figura 20

A partir de la noción de desviación respecto a la media, se definen las siguientes medidas de dispersión: desviación media, varianza y desviación típica.

Nota: Figura PR2 y PR3 (2). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

Es similar al libro de SM, referenciado en la figura 20, se menciona que con solo la noción de desviación respecto a la media ya se puede definir otras medidas, pero no hay ningún proceso que fundamente como tal la desviación con respecto a la media.

Comparación de distribuciones mediante coeficiente de variación

El libro de SM para grado octavo se vislumbra lo que es la comparación de distribuciones por medio del CV.

Figura 21

Ejemplo 4

El coeficiente de variación de la distribución de edades de los empleados, cuya información aparece en la Tabla 6.39, es $CV = \frac{9,008}{38,04} = 0,237$.

Si en otra empresa, la desviación típica de la distribución de edades de los empleados es 7,86 y la media es 45, entonces, el coeficiente de variación en este caso, corresponde a $CV = \frac{7,89}{45} = 0,17$.

Al comparar los resultados de las dos empresas se tiene que $0,17 < 0,237$; por lo tanto, en la primera empresa los datos están más dispersos con respecto a la media. Por el contrario, en la segunda las edades de los empleados están en torno a la media.

Nota: Figura PR6 (1). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

En la figura 21, se presenta la comparación del resultado de dos CV sacados de la distribución de edades de los empleados en dos empresas, lo anterior, permite inferir que el valor que este más lejos de la media es aquel cuyos datos son más dispersos.

Figura 22**Ejemplo 5**

Los promedios de sombreros vendidos al mes en dos fábricas de artesanías A y B son 4 400 y 4 280, respectivamente.

Si la desviación típica tanto de A como de B es 620, entonces, la fábrica que presentó mayor variabilidad en sus ventas fue B, pues al calcular los coeficientes de variación respectivos se tiene:

Fábrica A	Fábrica B
$CV = \frac{620}{4400} = 0,1409$	$CV = \frac{620}{4280} = 0,1449$

Nota: Figura PR6 (2). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

Lo mismo ocurre en la figura 22, siendo este un segundo ejemplo donde aparece la comparación de los CV. En este caso, el contexto es la venta de sombreros y la comparación de la variabilidad está comprendida entre dos empresas, cada empresa tiene una misma desviación típica pero una media aritmética diferente, de tal forma, muestran que puede haber diferentes CV, aún teniendo datos en común como lo es la media aritmética.

En ese sentido, centramos la atención en dos elementos: Primero, al resultado que produce la razón de la desviación estándar entre la media aritmética ($\bar{x}$); y segundo, a la media aritmética que otorga los datos, dado que es la distancia entre el CV y la $\bar{x}$ lo que otorga la variabilidad de su dispersión.

De manera general, el 55,5% de los procedimientos registrados en la rejilla estuvieron presentes en el libro de SM, siendo presentados algunos en tablas de frecuencia como son la desviación media absoluta (PR3) y la varianza (PR4), otro como la desviación típica (PR5) fue incluido como la continuación del resultado de los datos presentados en la tabla de la varianza, o sea, como la correspondiente raíz cuadrada de la varianza.

Por otro lado, en el libro de ST esta puntualmente el procedimiento de la desviación estándar (PR5) y la varianza (PR4), cuya información esta plasmada en tablas y tiene un contexto definido con respecto a un ambiente industrial. Con respecto al resto de procedimientos, se encuentra el recorrido intercuartílico (PR8), siendo su representación una recta cuya unidad son sus tres respectivos cuartiles, sin embargo, los ejemplos que plasman

el procedimiento están regidos por los percentiles, siendo aquellos que dividen al conjunto de datos en cien partes iguales, en vez de cuatro partes iguales. Es contradictorio de que, aunque no hallan ejemplos o explicación del procedimiento de los cuartiles, existan ejercicios orientados a su resolución en la página 188 de este mismo recurso.

Como apreciaciones finales de estos resultados, se tiene en cuenta que el recurso de video da más oportunidades de comprender un proceso, dado que se puede repetir las veces que se desea, pero como se mencionó en los análisis de los elementos lingüísticos, el acceso a internet o a una herramienta tecnológica todavía es limitada y genera obstáculos a la hora de aprender ese proceso, por la no presencia en el libro.

En adición, se percibe que en los recursos para grado octavo el rango y la desviación con respecto a la media solo la definen y dan el cálculo pero sin proceso, o por ejemplo el CV lo dan pero sin porcentaje. Posteriormente, en grado noveno si se hacen énfasis en sus procesos y definiciones completas permitiendo identificar un nivel de razonamiento estadístico mayor, lo cual corresponde a lo esperado en el currículo de matemáticas propuesto por el MEN.

4.4. Resultados propiedades

Tabla 17
Resultados rejilla propiedades

Propiedad	3° ESO	
	SM	ST
PN1. Varianza y desviación típica positivas	X	P
PN2. Varianza unidades cuadradas y desviación típica unidades igual a datos		P
PN3. Desviación media positiva	X	
PN4. Coeficiente de variación positivo		
PN5. Coeficiente de variación adimensional		
PN6. Rango y datos mismas unidades		

PA1. Varianza y desviación típica dependen de agrupación de datos		P
PA2. Varianza invariante ante cambio de origen		
PA3. La varianza y la desviación típica tienen propiedades más cómodas que la desviación media		
PA4. El rango es la medida más fácil de calcular		
PE1. La suma de las desviaciones respecto a la media es 0		
PE2. Si los datos son iguales la varianza y desviación típica son 0		P
PE3. A mayor/menor varianza y desviación típica mayor/menor dispersión. Valor 0 ausencia de dispersión	X	P
PE4. Todos los valores se usan para el cálculo de la varianza y desviación típica	X	X
PE5. Modificar datos cambia la varianza y desviación típica	X	
PE6. El rango mide la variación sin referencias a promedios, la varianza y desviación típica toman la media como referencia	X	P
PE7. Se debe utilizar o la media y la desviación típica o la mediana y el rango intercuartílico pero no mezclarlas	X	P

Propiedades con respecto a las unidades en las medidas de dispersión

En los libros de texto como se puede evidenciar en la anterior rejilla hay poca incurrancia de propiedades que caractericen las medidas de dispersión. Como primer acercamiento, en las propiedades como PN2, PN5 y PN6, las unidades numéricas no se toman en cuenta para el proceso ni el resultado final de los cálculos. Esto se evidencia en los cálculos de la varianza con las unidades cuadradas, la desviación típica con las unidades simples y en

el coeficiente de variación el cual no tiene unidad. Puede que en el cálculo de la varianza se divise el elemento lingüístico notacional s^2 pero eso no hace referencia a la propiedad de que sus unidades son cuadradas. Un posible acercamiento a esta propiedad está en la página web complementaria de ST donde muestran lo siguiente:

Figura 23

3. Si todos los datos se multiplican por una constante, la varianza queda multiplicada por el cuadrado de la constante.

Nota: Figura PN2. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

Este apartado hace parte de las propiedades de la varianza, en el cual se aproximan las unidades cuadradas con el resultado de la varianza. Puede que la unidad no la expliciten, pero con la observación de la constante como factor cuya potencia es cuadrada se intuye la propiedad. Cohesionando el apartado 23, muestro el apartado 24 que es respectivo a la desviación típica.

Figura 24

3. Si todos los datos se multiplican por una constante, la desviación típica queda multiplicada por dicha constante.

Nota: Figura PN2 (1). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

La propiedad PN2 que se muestra en el recurso complementario para la varianza y la desviación típica es acertada dado que en el primero muestran la relación de las unidades cuadradas y en el siguiente el uso de factores en una unidad. La correspondencia de constante y unidad es coherente en esta situación por la no estandarización de las unidades en las medidas de dispersión.

Medidas de dispersión positivas

La propiedad del valor absoluto siempre está presente en toda medida y en las medidas de dispersión igualmente, ya que se mide la dispersión de acuerdo con la media y esta siempre es positiva. En la rejilla esta situación se registra en PN1, PN3 y PN4 donde el lenguaje natural, el signo, las desigualdades y el valor absoluto toman relevancia en el texto escolar al ser la forma de expresar esta propiedad.

En el libro ST se hace participe la propiedad PN1 en forma de desigualdad, primero detallan la varianza (figura 25) y después la desviación estándar (figura 26).

Figura 25

$\sigma^2 \geq$ La varianza es un valor positivo, como ya se ha comentado anteriormente, la igualdad sólo se da en el caso de que todas las muestras sean iguales.

Nota: Figura PN1 (1). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

Figura 26

$\sigma \geq 0$ La desviación típica es un valor positivo, la igualdad sólo se da en el caso de que todas las muestras sean iguales.

Nota: Figura PN1 (2). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (Fragmento de <https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>).

Tanto en la varianza como en la desviación estándar se presenta que estas medidas van de mayor o igual a cero, enfatizando que son igual a cero cuando todas las medidas son iguales.

En el libro SM no mencionan ni infieren por un momento PN1 y PN4 como medidas positivas, solo se evidencia la PN3 por medio del valor absoluto.

Figura 27

Edad en años	f_i	x_i	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
[18, 24)	5	21	17,04	85,2
[24, 30)	4	27	11,04	44,16
[30, 36)	11	33	5,04	55,44
[36, 42)	12	39	0,96	11,52
[42, 48)	10	45	6,96	69,6
[48, 54)	8	51	12,96	103,68

Tabla 6.40

Con base en estos resultados, se calcula la desviación media:

$$D_{\bar{x}} = \frac{85,2 + 44,16 + 55,44 + 11,52 + 69,6 + 103,68}{50} = 7,392$$

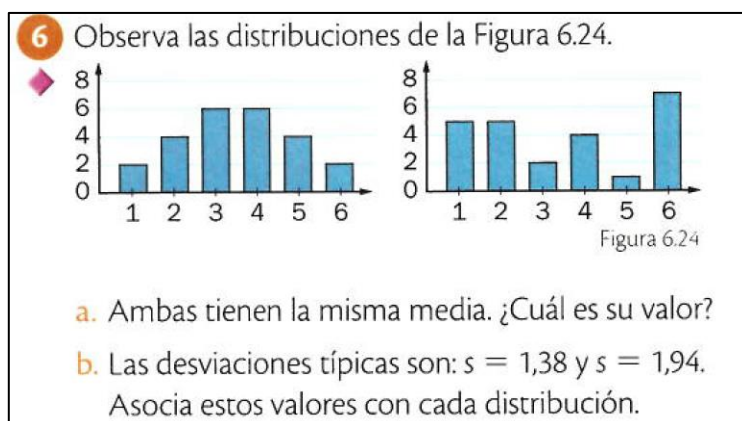
Nota: Figura PN3. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

La PN3 menciona que la desviación media es una medida positiva, en este caso se hace presente en la tabla de frecuencias, dado que muestra el valor absoluto de la desviación con respecto a la media y por consiguiente la desviación media como una medida en la cual se hace necesario el valor absoluto, cuyo significado recurre a una medida estrictamente positiva.

En los libros de ST y SM para PE4 y PE5, no existe una forma explícita de transmitir estas dos propiedades puesto que los datos los dan, se organizan en tablas de frecuencias y se utilizan para hacer cálculos, intuitivamente se puede decir que se utilizan todos los datos y que si se cambia alguno, el resultado va a dar diferente, pero queda en manos de la interpretación personal.

En un ejercicio que brinda el libro de SM cuyo propósito es incentivar la comunicación se muestra un diagrama de barras, con una frecuencia y unas cualidades.

Figura 28



Nota: Figura PE4 y PE5. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.193), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

Se visualiza una actividad sin contexto, pero el problema enfoca su intención a la comparación de distribuciones por medio de una representación gráfica. Esta perspectiva genera la concientización de las propiedades PE4 y PE5, puesto que dan punto de comparación la igualdad de la media para los dos gráficos, el uso de todos los datos que están en la gráfica para hallar la medida y la posible diferencia que hay entre sus desviaciones estándar o típicas según la distribución de los datos.

4.5. Resultados argumentos

Tabla 18

Resultados rejilla argumentos

Argumentos	3º ESO	
	SM	ST
APNO		
AECC	X	X
AAO	X	X
AVD	X	
AAD		

En los libros analizados los argumentos con mayor incidencia son los Argumentos con Ejemplos, Contraejemplos y Comprobaciones (AECC) y Argumentos Apoyados en Ostensivos (AAO), por ejemplo, en SM:

Figura 29

Ejemplo 1

La Tabla 6.40 es útil para hallar la desviación media de los datos presentados en la Tabla 6.39.

Edad en años	f_i	x_i	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
[18, 24)	5	21	17,04	85,2
[24, 30)	4	27	11,04	44,16
[30, 36)	11	33	5,04	55,44
[36, 42)	12	39	0,96	11,52
[42, 48)	10	45	6,96	69,6
[48, 54)	8	51	12,96	103,68

Tabla 6.40

Con base en estos resultados, se calcula la desviación media:

$$D_{\bar{x}} = \frac{85,2 + 44,16 + 55,44 + 11,52 + 69,6 + 103,68}{50} = 7,392$$

Por lo tanto, $D_{\bar{x}} = 7,392$, y esto quiere decir que los datos están lejos del valor central o media.

Nota: Figura AECC y AAO (1). Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

En la anterior figura 29 se utiliza el AECC para evidenciar el proceso matemático de la $D_{\bar{x}}$, siendo un ejemplo manifestado a partir de unos datos que se proporcionaron con anterioridad en el libro, cuyo contexto esta dado por una tabla que registra las edades de 50

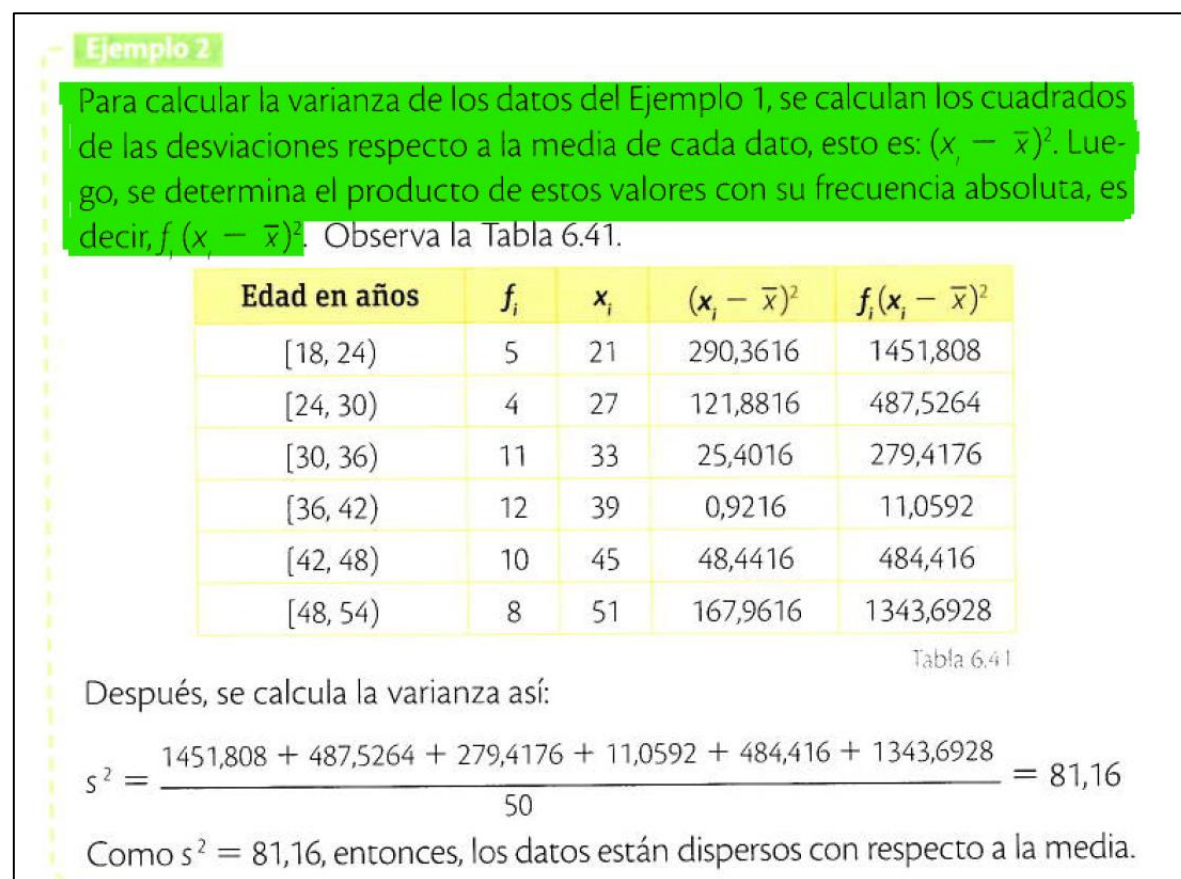
empleados organizada en dos columnas, la primera son los intervalos y la segunda, frecuencia absoluta, la cual nos induce con qué tipo de datos se van a trabajar, datos agrupados. En consecuencia, también se utiliza el AAO que esta dado por una tabla de frecuencias donde se organiza cada cálculo de los datos para llegar a la resolución de la formula general.

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{n}$$

Siendo así, la tabla proporciona a la fórmula lo que necesite como: la frecuencia absoluta, la marca de clase, el valor absoluto de la desviación con respecto a la media. Por lo que la tabla de frecuencias es un argumento imprescindible para organizar, visualizar y comprender cada cálculo que conlleva a la resolución de la fórmula.

En la varianza el libro SM argumenta de forma similar, como se puede ver en lo siguiente.

Figura 30

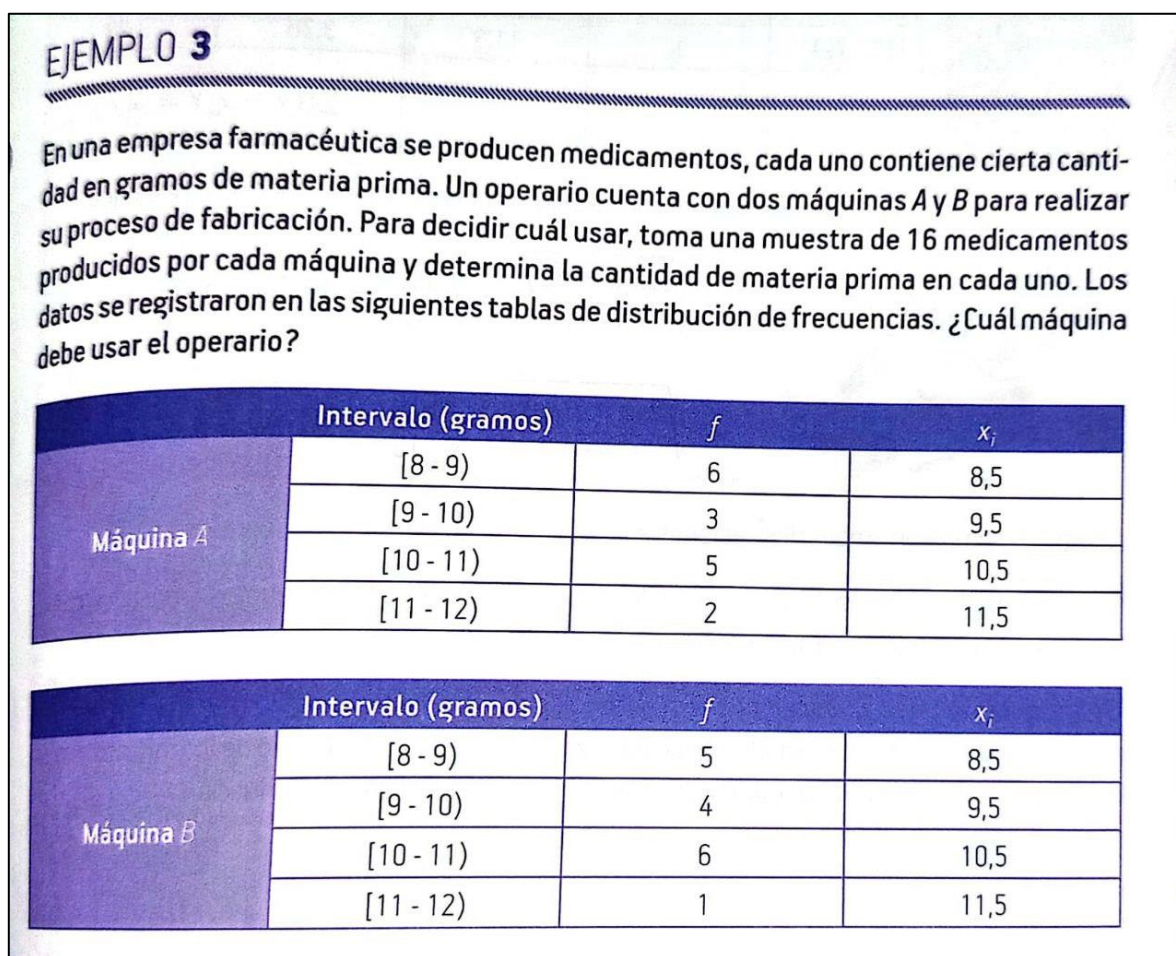


Nota: Figura AECC, AVD y AAO. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.191), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A. (El subrayado es mío)

Mostramos un ejemplo (AECC) que tiene el mismo contexto de la figura 29, el cual se complementa con una tabla de frecuencias (AAO), pero diferente al estar presente el Argumento Verbal Deductivo (AVD) resaltado con verde en la figura 30. En esta figura se explicita verbalmente el proceso del cálculo y lo que está plasmado en la tabla de frecuencias, por lo tanto, es un apoyo a la comprensión del AAO.

Aparte del libro SM, el libro ST consta de argumentos similares basados en ejemplos y tablas de frecuencia.

Figura 31



Nota: Figura AECC y AAO (2). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.193), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos.

En este caso se evidencia un AECC, dado por un ejemplo en un contexto industrial y el individuo es un operario en una empresa farmacéutica que tiene por cargo la optimización de recursos. A raíz de esto, se busca calcular cual maquina entre A y B se debe utilizar en el

procesamiento de materia prima para evitar desperdicio o gastos de más en la producción, se usarán 16 medicamentos que se producen en la maquina como muestra y su contenido se organiza en la tabla de frecuencias por medio del gramaje que se procesa.

El ejemplo va encaminado a resolverse por medio de la medida de dispersión de la Desviación estándar, sobre la cual se puede analizar la variabilidad, comparar cual maquina en su producción está más cerca a la media y, por último, su visualización en gramos y no gramos al cuadrado como lo presenta la varianza.

Figura 32

Máquina	Intervalo (gramos)	f	x_i	$(x_i - \bar{x}_A)^2$	$f_i(x_i - \bar{x}_A)^2$
Máquina A	[8 - 9)	6	8,5	1,41	8,46
	[9 - 10)	3	9,5	0,03	0,10
	[10 - 11)	5	10,5	0,66	3,3
	[11 - 12)	2	11,5	3,28	6,5
				$\Sigma f_i(x_i - \bar{x}_A)^2 = 18,36$	

	Intervalo (gramos)	f	x_i	$(x_i - \bar{x}_B)^2$	$f_i(x_i - \bar{x}_B)^2$
Máquina B	[8 - 9)	5	8,5	1,41	7,05
	[9 - 10)	4	9,5	0,03	0,14
	[10 - 11)	6	10,5	0,66	3,96
	[11 - 12)	1	11,5	3,28	3,28
				$\Sigma f_i(x_i - \bar{x}_B)^2 = 14,43$	

Nota: Figura AECC y AAO (2.1). Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.194), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos.

Para organizar los datos se usan tablas (AAO) que contienen los intervalos: la frecuencia, la marca de clase, la desviación con respecto a la media elevada al cuadrado y la multiplicación de la anterior con la frecuencia. Los cuales se utilizan para calcular la desviación estándar:

$$\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

En los resultados se evidencia una incidencia en el uso de dos argumentos particularmente, que son el AECC y EL AAO, en el AECC los ejemplos predominan los dos libros de texto en el cual hacen uso de un contexto y de datos agrupados para abarcar todos los cálculos de las medidas de dispersión a mostrar, por otro lado, en el recurso digital de ST existen otros ejemplos con contextos diversos y, con el uso de datos agrupados y no agrupados.

En contraste, el AAO complementa el AECC haciendo visibles los datos en las tablas de frecuencia, cuyo quehacer es el de organizar y permitir la interpretación de las medidas de dispersión. Siendo así, hay una intención clara hacia la relación de las tablas de frecuencia y las medidas de dispersión, dejando de lado otro tipo de manifestaciones como lo son los diagramas de barras, los histogramas, el diagrama de caja y bigotes, etc., importantes en cierta instancia como representaciones válidas de la dispersión de los datos. Como anotación hay dos situaciones problemas en los libros que usan el AAO con representaciones gráficas, pero este se abarca en su debido momento en la posterior rejilla, al darse en forma de problemas para resolver. Sin embargo, en el libro no hace uso de este argumento. Se supone que las toman como representaciones auxiliares porque de los diagramas de barras o histogramas se pueden abstraer los datos y poner en las tablas.

Finalmente, entre los cinco argumentos plasmados en la rejilla no hay evidencia del primero (APNO) y del último (AAD), al no reconocerse que se establezcan relaciones de las propiedades y los cálculos, y tampoco deducciones de las fórmulas.

4.6. Resultados situaciones-problema

Tabla 19
Resultados rejilla situaciones

Medidas de dispersión	3° ESO	
	SM	ST
Rango	x	
Desviación típica	x	x
Varianza	x	x
Coefficiente de variación	x	
Rango intercuartílico		x
Diagrama de caja		
Interpretación conjunta de media y desviación típica	x	x

En la última rejilla enmarcada en las situaciones problemas, se resaltan los siguientes resultados. Primero que todo, en los libros SM y ST existe la interpretación conjunta de media y desviación típica, particularmente, en SM están las preguntas que conllevan a su interpretación, pero su situación problema es deficiente, dado que no presenta un contexto.

Figura 33

3 Haz los ejercicios con base en la distribución que se muestra en la Tabla 6.44.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	1	10	14	5	2	1

Tabla 6.44

- Elabora la tabla de frecuencias absolutas y el diagrama de barras correspondiente.
- Calcula la media y la desviación típica.
- Halla el coeficiente de variación.
- ¿Consideras que la desviación típica es grande o pequeña respecto a la media?

Nota: Figura S7. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.193), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

Como se puede evidenciar la presentación del problema es con base a una distribución de datos que no están agrupados por intervalos siguiendo cuatro preguntas guía. Las preguntas de interés que conllevan la interpretación de la situación problema, son la pregunta b y la d que evoca la relación de la media con la desviación típica (o estándar), haciendo uso solo del cálculo y de una interpretación bajo solo el estándar de propiedad, el cual es la desviación estándar entre más grande, más lejana estará de la media.

Figura 34

En una empresa farmacéutica se producen medicamentos, cada uno contiene cierta cantidad en gramos de materia prima. Un operario cuenta con dos máquinas A y B para realizar su proceso de fabricación. Para decidir cuál usar, toma una muestra de 16 medicamentos producidos por cada máquina y determina la cantidad de materia prima en cada uno. Los datos se registraron en las siguientes tablas de distribución de frecuencias. ¿Cuál máquina debe usar el operario?

Nota: Figura S7.1. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.193), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos.

Por otro lado, en ST hay una interpretación más acertada (ver figura 34), ya que la situación-problema está acotada en una muestra, brinda contexto y una pregunta problema que permite buscar una solución acertada al porqué de sus causas o consecuencias (pág. 23 y 24). Esta situación problema contiene detalles y una estructura que permite la comprensión y la posible interpretación de porque se calcula la desviación típica y la función de compararla con la media aritmética, es ameno identificar que como ejemplo cumple con los requisitos de ser un argumento basado en una situación problema con contexto industrial.

En ST, aparte del ejemplo existen cuatro situaciones problemas presentados como: “¿Qué estamos aprendiendo?” y “Actividades para practicar”. De los problemas, hay dos que están representados bajo datos agrupados por intervalos como el de la figura 35.

Figura 35

APLICA ➔ **Resuelve** las siguientes situaciones haciendo uso de la media y la desviación estándar para datos agrupados.

a. Una empresa que presta el servicio de mantenimiento de aparatos electrónicos reporta que sus empleados dedican diferentes lapsos de tiempo en el mantenimiento de un televisor LED de 42 pulgadas. A continuación, se registran los tiempos en minutos.

Tiempos	N.º de empleados
[0 - 3,5)	36
[3,5 - 7)	15
[7 - 10,5)	26
[10,5 - 14)	18
[14 - 17,5)	5
[17,5 - 21)	2

1) Determina el promedio de tiempo que emplean los trabajadores en el mantenimiento del televisor.

2) Halla la varianza y la desviación estándar de la situación planteada.

3) Si el tiempo promedio adecuado para realizar el mantenimiento del televisor es de 15 minutos, ¿qué podrías concluir respecto de este grupo de empleados?

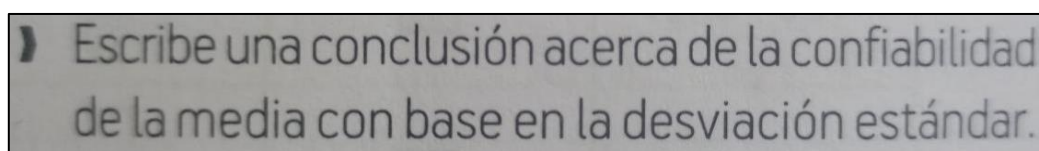
Nota: Figura S7.2. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.196), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos.

La situación problema brinda un contexto sobre el tiempo que duran los electricistas de una empresa arreglando televisores, siendo representados los datos en una tabla de frecuencias donde los intervalos están dados por el tiempo, dado en minutos, con una amplitud de 3 minutos y medio. A partir de la situación, el libro plantea tres preguntas

problema, la primera es hallar el promedio del tiempo en el cual se usa la media ponderada; la segunda es hallar la varianza y la desviación estándar, hasta el momento las preguntas problemas solo necesitan identificar, abstraer datos, organizar y calcular. Por último, la tercera pregunta donde hacen un supuesto que el promedio ideal para arreglar un televisor de dichas características es de 15 minutos, relaciona la primera pregunta con esta tercera y permite una interpretación del promedio sin llegar a la relación con la desviación típica.

Por otro lado, uno de los otros dos problemas presentados, representa los datos por medio de un histograma.

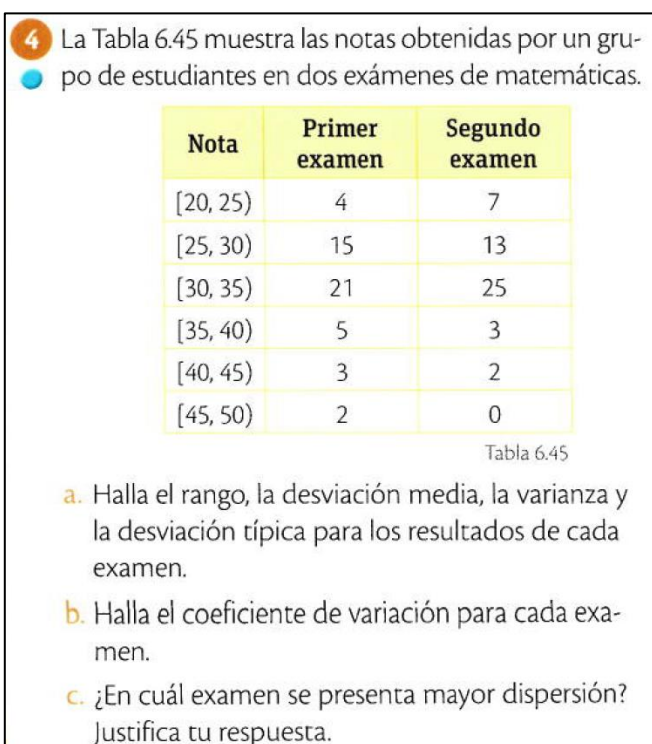
Figura 36



Nota: Figura S7.3. Tomada de *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1* (p.196), por Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018), Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos.

En la situación problema donde se representan los datos por medio de un histograma, hay un punto que enfatiza la relación de la media y la desviación estándar (ver figura 36) bajo una perspectiva que permite al estudiante generalizar una propiedad y concluir a partir de ésta. Se evidencia una oportunidad de comunicación escrita en lenguaje natural para la interpretación de objetos matemáticos y una secuencia en la cual la pregunta tres del problema de los televisores y la pregunta tres del histograma moviliza el razonamiento hacia la interpretación de la media y la desviación estándar.

Figura 37



Nota: Figura AECC, AVD y AAO. Tomada de *Vamos a aprender Matemáticas 8* (p.196), por Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016), MEN: Ediciones S.M. S.A.

En este problema los datos están dados en una tabla de frecuencia y el contexto es sobre dos exámenes de matemáticas de un grupo, siendo poco explícito, dado que solo informa que datos a usar, pero no que se intenta responder o interpretar. Tiene tres preguntas problemas, en el cual, el primer punto pide todas las medidas de dispersión y se prevé la realización de dos tablas de frecuencias para realizar la desviación media, la varianza y desviación estándar. El segundo punto, solicita hallar el coeficiente de variación de los dos exámenes y el último punto, propone responder cual examen presentó mayor dispersión, justificando la respuesta. Este último punto es importante para la interpretación de los datos y el uso de los cálculos, ya que ofrece al estudiante la selección de cálculos y conclusiones para justificar su respuesta.

En general, las situaciones que proporciona los libros de SM y ST se centran en presentar los datos de forma agrupada por intervalos y con tablas de frecuencia, es poco usual que usen representaciones diferentes como histogramas, diagramas de barras y diagrama de

tallos y hojas, pero es nulo el uso de diagrama de caja para representar las medidas de dispersión y los valores atípicos.

Con respecto a los contextos utilizados, se evidencia la relación discordante de los problemas con el contexto de los estudiantes, muchas de las situaciones problemas no tienen enunciado, presentando los datos en una tabla o en un diagrama de barras, que no brindan información bajo los estándares de una tabla o diagrama óptimo, el cual según Bertín (1967) debería tener etiquetas externas, identificaciones internas y un contexto relacionado. Por otro lado, están los que tienen contextos industriales y los que tienen una representación bien definida, pero sin un sentido claro hacia su interpretación, o sea que la secuencia solo lleva a la ejercitación de problemas, pero no a la resolución de estos. Con respecto a las situaciones del rango intercuartílico solo está presente en el libro ST de forma reiterada, constando de su parte de ejercitación de problemas y la parte de situaciones problemas, donde se halla e interpreta el significado de los cuartiles Q_1 , Q_2 y Q_3 en el problema.

Capítulo V: Análisis de los resultados

5.1. Rejilla elementos lingüísticos

Acorde a investigaciones previas (Pino, 2017; Pino y Estepa, 2019) y los resultados de los libros de texto presentados en el apartado anterior, se destacan aspectos comunes en la rejilla de Elementos lingüísticos durante el análisis de las medidas de dispersión en los libros de texto (Vamos a aprender matemáticas 8 de SM y Activamente 8 de ST):

1. Se identifica que el libro analizado no toma en consideración los valores atípicos en los enunciados relacionados con las medidas de dispersión.
2. El análisis de los elementos lingüísticos muestra que se hace un mayor énfasis a la desviación típica que a las otras medidas de dispersión.
3. Los resultados muestran que los libros de texto manejan distintas fórmulas para las medidas de dispersión, en particular la varianza y la desviación típica.

En adición, se encontró que en los libros de texto sus fórmulas son bien representadas y variadas, situación que es importante por un lado para clasificar las fórmulas de la población y la muestra, los datos agrupados y no agrupados (cambia la fórmula implícitamente por la frecuencia). No obstante, hay una incidencia a presentar distintos

cálculos que no le suman ni restan al conocimiento del estudiante, sino que confunden, es como dice Pino & Estrella (2012) “El pensamiento estadístico se desarrolla en etapas sin que se pueda saltar ninguna” (p.56), como por ejemplo trabajar la medida de dispersión de la desviación típica y suponer que por solo dar la fórmula de la desviación típica total para situaciones de distribuciones con la misma media o distribuciones de distinto tamaño, se puede resolver, y pues no es así, se subestima la complejidad de manejar distintas muestras o poblaciones y de manejar un cálculo que no se entienda el porqué, faltando un proceso de comprensión que debería tener ejemplos, procedimientos, etc.

En concordancia, la variedad de fórmulas hace notar que la rejilla es deficiente ante el uso adecuado de población y muestra en medidas como la varianza y desviación típica, considerando que el lenguaje y el signo es un símbolo de creación de conocimiento y también un dispositivo necesario para el pensamiento y la transmisión de ideas (Godino y Recio, 1998). En adición, Pastor (2019) menciona que: “cuando se presenta una fórmula es necesario describir la simbología empleada para facilitar la comprensión del procedimiento utilizado” (p.245), siendo el caso que, si no hay simbología adecuada que diferencie correctamente las partes de cada fórmula para una muestra o para una población, la abstracción y comprensión de la epistemología sobre las medidas de dispersión del libro de texto será limitada.

5.2. Rejilla conceptos

A partir de investigaciones internacionales cuyos resultados se basan en conceptualizaciones (Bakker & Gravemeijer, 2004; Liu & Delmas, 2005; Godino, Batanero & Font, 2007; Sánchez, Borim da Silva & Coutinho, 2011; Pino, 2017) y los resultados de los libros de texto (Vamos a aprender matemáticas 8 de SM y Activamente 8 de ST), se destacan ciertos aspectos comunes que dan paso a un análisis de la rejilla de Conceptos:

1. Repercute negativamente en el aprendizaje la variedad de fórmulas en la conceptualización de medidas de dispersión como la varianza y desviación típica.
2. Se hace necesario el orden de los conceptos y las fórmulas mientras se comprende la noción de distribución y van complementando su razonamiento.
3. Para comprender conceptos estadísticos como las medidas de dispersión es necesaria una coordinación de los conceptos previos con los actuales. Por ejemplo, la media aritmética y la desviación media.

Por consiguiente, los libros de texto analizados se evidencia la poca interacción de las medidas de dispersión con representaciones ostensivas como lo son el rango y la desviación respecto a la media, ya que se limitan a la fórmula, pero no existe definición, ni un apoyo ostensivo que es posible por medio del diagrama de barras. Siguiendo la noción de Duval (1995), las actividades conceptuales y semióticas no son aisladas puesto que la comprensión del concepto esta ligada al descubrimiento de las representaciones semióticas existentes del objeto matemático (p.1). Por lo tanto, los libros quedan cortos en la significación de las medidas de dispersión más básicas como lo son las anteriormente mencionadas.

Por otro lado, a diferencia de lo que dice Pino (2017) sobre la poca importancia que se le da al concepto de rango intercuartílico (p.24), en los libros se encontró una definición organizada de los cuartiles, que parte de la mediana, siendo esto, mencionado por Langford, E. (2006) como la forma precisa de definir el percentil, ya que su base es la definición de la mediana y a partir de esto se definen los valores de una mitad del conjunto de datos que está por encima y una mitad del conjunto de datos que esta debajo de esta medida de tendencia central, siendo esta una distribución empírica dada por el conjunto de datos (p.5). Entonces, se puede precisar que existe en los libros de texto formas de introducir el rango intercuartílico de una manera completa que pasa por la mediana, los percentiles, los cuartiles y su representación.

5.3. Rejilla procedimientos

El análisis se lleva a cabo a partir de unas investigaciones internacionales que han surgido hasta el momento con respecto a los procedimientos (Liu & Delmas, 2005; Pino & Estepa, 2019) y los resultados obtenidos por medio de esta investigación en los libros de texto (Vamos a aprender matemáticas 8 de SM y Activamente 8 de ST):

1. No hay definiciones asociadas al rango y tampoco sus procedimientos.
2. Se tiende a enfatizar la enseñanza de una formula por medio de cálculos y procedimientos.
3. Es un elemento que brinda significado siendo empleado en cohesión de conceptos y propiedades, con la necesidad de una connotación de muestra y por lo tanto un contexto.

Según Godino et al (2017), los procedimientos deben mostrar justificaciones y explicaciones (p.97), situación que se plasma con el cálculo y la comparación de los coeficientes de variación, ya que, proponen contextos, ejemplos, etc. Además, los procedimientos nutren el procedimiento por medio de una combinación de argumentaciones y situaciones problema. También, es notorio el proceso que le proporcionan a la desviación estándar en el libro de ST que parte de la media y la media ponderada para proseguir con su procedimiento. Esto es contrario a lo que dice Liu & Delmas (2005), en el cual la mayoría de las instrucciones sobre la desviación estándar tienden a enfatizar la enseñanza de una fórmula, la práctica con la realización de cálculos y la vinculación de la desviación estándar a la regla empírica de la distribución normal. (p.56). Vale la pena destacar que el libro no se queda en la ejercitación, en cambio le da al procedimiento un contexto que desarrolla logrando promover el concepto, aliviando un poco el problema que menciona Loosen et al. (1985) y Garfield y Ben-Zvi (2008) en el cual encuentran que los estudiantes conocen y saben calcular la desviación típica o estándar pero no entienden su significado.

Por otro lado, la existencia de procedimientos como el relacionado con el coeficiente de variación y el recorrido intercuartílico fue grato, dado que no se esperaba por la poca incidencia que hay en los libros de texto de grado octavo (Pino, 2017; Pino y Estepa 2019). Como primer punto, los procedimientos se presentaron con contextos industriales, conectando con procedimientos estadísticos de manera oportuna, como lo es el recorrido intercuartílico, la mediana, la aplicabilidad del coeficiente de variación y la desviación estándar. Interpretando estos resultados, Cooksey (2020) menciona como desventaja el uso de la desviación estándar o el recorrido intercuartílico si la media de la muestra (o la mediana) no se informa de manera conjunta, puesto que le resta significado (p.106). Por lo tanto, la conexión de procedimientos en la construcción de conceptos ayuda a interpretar los nuevos procedimientos desde las bases, evitando posiblemente la situación descrita por Loosen et al (1985) y Batanero et al (2015), en el cual afirman que los estudiantes aprenden a realizar cálculos estadísticos sin llegar a comprender los procesos ni conceptos que implican dichos cálculos.

5.4. Rejilla propiedades

El análisis de la rejilla de las propiedades se realiza tomando como referentes investigaciones internacionales (Hart, 1984; Pino, 2017; Pino y Estepa, 2019) cuyos resultados guardan concordancia con los resultados encontrados:

1. Los libros de texto muestran frecuentemente propiedades sobre la varianza y desviación estándar a partir de la media aritmética.
2. Las propiedades que indican: la suma de las desviaciones respecto a la media es 0 (PE1), y si los datos son iguales la varianza y la desviación típica son 0 (PE2), no son frecuentes.
3. El libro de texto da un buen uso de los gráficos estadísticos y los relaciona con las medidas de dispersión.
4. Se usa el valor absoluto, aunque no se haga énfasis proporciona a algunas medidas de dispersión la propiedad de ser positivas. Por ejemplo, la desviación media.

En concordancia con los resultados anteriores, el trato de las propiedades en los libros de texto para las medidas de dispersión, usualmente son más fieles a la interpretación matemática de las fórmulas y no a una teoría estadística explícita. Siendo así, Gutiérrez (2018) identifica ciertos conflictos potenciales en la solución de situaciones como las propiedades de la sumatoria de los registros, las propiedades de la varianza y el manejo del concepto de valor absoluto para que las desviaciones sean positivas (p.91), confirmando que los conceptos matemáticos son un foco principal, sin embargo, no hay presencia de las propiedades algebraicas, dado que solo se infiere el conocimiento matemático de los estudiantes a partir de su grado escolar, dejando en ciertos casos las propiedades estadísticas como una derivación de este conocimiento.

En adición, se identifican algunos elementos lingüísticos gráficos cuya función según Cooksey (2020) es la manera de mostrar y resumir tendencias en los datos; tal como se ha enunciado en el párrafo anterior, aclara las propiedades. Por ejemplo:

- La recta, aclara la propiedad sobre el uso de la mediana y el rango intercuartílico, y porque no mezclarlas con la media y la desviación típica (PE7).

- Las tablas de frecuencia, aclaran porque todos los valores se usan para el cálculo de la varianza y desviación típica (PE4), y porque modificar datos cambia la varianza y desviación típica (PE5).
- Los diagramas de barras e histogramas, aclaran el uso de la media y la desviación estándar (PE7).

A partir de los resultados anteriores, se puede afirmar que alguno de los gráficos como los diagramas de barras e histogramas se quedan en los libros de texto como la visualización de la tendencia de los datos y la búsqueda de la interpretación autónoma, pero no avanza a dar procedimiento y explicitación de la información de las medidas de dispersión. Según Cooksey (2020), un método gráfico popular para mostrar una distribución es el histograma, representando la distribución de los valores posibles para la variable que se muestra (p.8), gráfica presente en las situaciones problema, prestas a su solución, bajo la garantía de que el estudiante tenga en su saber algunos conceptos previos como lo son: los elementos del histograma, la tabla de frecuencias y los cálculos de las medidas de dispersión, que hacen posible el movimiento de los datos para las medidas de dispersión, la interpretación y el uso de las propiedades.

En general, se pudo ver que más del 50% de las propiedades enunciadas en la rejilla no están presentes en los libros de texto, siendo principalmente propiedades sobre las unidades de las medidas y propiedades que expresen algunas medidas como sencillas ya sea de calcular o de estructurar. Por otro lado, si se enuncian las propiedades que referencian la variabilidad por medio de las medidas de dispersión, y la relación que existe entre algunas medidas de dispersión con las medidas de tendencia central.

5.5. Rejilla argumentos

A partir de los resultados sobre la rejilla de argumentos, y resultados de otras investigaciones a priori de los argumentos (Pino, 2017; Pino & Estepa, 2019; Cooksey, 2020), se relacionan y se reiteran algunas afirmaciones:

1. La varianza tiene poca interpretación significativa como índice descriptivo; Por lo tanto, la desviación estándar se informa con mayor frecuencia.
2. Los ejemplos (AECC) y las gráficas (AAO) son los tipos de argumentos más utilizados en los libros.

3. Los argumentos algebraicos deductivos (AAD) son escasos.

Con respecto a los anteriores resultados, los AAD son escasos. También, es nula su presencia en los presentes libros de texto, como lo es también el argumento basado en números y operaciones, como se mencionó en el análisis de la rejilla de propiedades, el trato de las propiedades matemáticas es empírico y deductivo, o sea que la relación entre objetos y procesos se deja a conciencia del lector-estudiante y a la guía del profesor con el recurso del libro. Por el contrario, el argumento verbal deductivo (AVD) hace presencia y ayuda a comprender el procedimiento del cálculo de la varianza, como lo expresa Gutiérrez (2018) “los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí” (p.56) produciendo una comprensión a partir de la explicitud del cálculo.

Por otro lado, en argumentos evidenciados con ostensivos y/o ejemplos se nota la cohesión de los datos con ejemplos, representaciones tabulares y verbalización de los procesos. Esto permite reconocer que se cumple con dos de los cuatro bloques necesarios para la construcción de un buen argumento mencionado por Garfield et al. (2008), y muestra la necesidad de evidenciar que los datos son precisos y confiables, no engañosos, y lo imprescindible que es una buena línea de razonamiento que conecte los datos con el argumento. (p.274). Demostrando en este caso, que una cadena de argumentos puede nutrir los procesos que determinan la interpretación de un conjunto de datos en un contexto.

En sí, los textos no utilizan datos actuales y reales, dado que en el caso de los libros estudiados usan contextos útiles industriales, pero con datos no reales, sino hipotéticos, que no aportan interpretaciones que construyan al ciudadano colombiano. Siendo así que, los argumentos estadísticos, aunque justifican las medidas de dispersión los estudiantes no abordan contextos significativos y dimensionan diferentes interpretaciones de las medidas de dispersión (LC, 1998, p. 45)

5.6. Rejilla situaciones

Se vincula la investigación de Pino (2017) que presenta unos resultados acordes a los expuestos:

1. Hay más situaciones problema sobre la desviación estándar que la varianza.

2. Se genera actividad matemática por medio del paso de una medida de tendencia central a una medida de dispersión, como lo son: la media aritmética y la desviación media, la mediana y el recorrido intercuartílico.
3. Existen situaciones problema donde se comparan distribuciones de las medidas de dispersión, ya sea de la misma unidad o diferentes. Un ejemplo, con la misma unidad sería el coeficiente de variación.
4. Se interpreta valores atípicos.
5. Se tiende a indicar al estudiante acciones como la de calcular datos, presentados en distintos formatos como en datos agrupados, no agrupados, diagramas, etc.

5.6.1. Contextos en las situaciones problemas

Los contextos de las situaciones que se recopilaron incluyen: los que se presentaron en ejemplos, los que estaban en la página web complementaria de ST y las situaciones problemas presentadas para desarrollar competencias. Siento estos contextos un análisis necesario para las situaciones problemas de las medidas de dispersión, ya que los estudiantes de educación media y superior necesitan situaciones que se ajusten al contexto, situación de vida y experiencias, que logren llegar a la lógica del estudiante (Batanero & Godino, 2001; Garfield, 2005; Ben-Zvi & Garfield, 2008; Cuétara, Salcedo & Hernández, 2016). Por tal motivo, se clasifican los contextos de las situaciones problemas que proponen los libros de texto, a partir de PISA (OECD, 2019):

Tabla 20
Contexto de las situaciones problema

Contexto	ST		SM		Total	
	F	%	F	%	F	%
Personal	8	27,6	4	30,8	12	28,6
Laboral	15	51,7	4	30,8	19	45,2
Sin contexto	6	20,7	5	38,5	11	26,2
Total	29	100	13	100	42	100

Nota: Autoria propia

En específico las pruebas PISA tiene 5 tipos de contexto. En las situaciones de los libros de texto analizados solo se encontraron tres tipos de contexto los cuales son: personal (29%), laboral (45%) y sin contexto (26%), sin la presencia del contexto científico y social.

El contexto científico y el contexto social no se hacen presentes porque los datos utilizados en los libros de texto no tienen fuentes verídicas, por ejemplo, estadísticas actuales dadas por las entidades del Estado. Siendo siempre casos hipotéticos los cuales están dirigidos como muestra el diagrama al contexto laboral (45%). Las situaciones problema presentadas en el contexto personal (29%), algunas pueden llegar a ser parte del contexto social, pero los individuos están involucrados en todas estas cosas de manera personal, en la categoría de contexto social el enfoque de los problemas está en la perspectiva de la comunidad (OECD, 2016, p. 16). Finalmente, de los 42 contextos evidenciados solo 11 son sin contexto, que tienden a la memorización y mecanización de procedimientos, los cuales piden a los estudiantes acciones como las de: utiliza los datos, completa la tabla, identifica y relaciona un conjunto de datos con el resultado, etc.

Llegando la cuestión, ¿una situación problema se puede llamar así sin contexto?, se sostiene que las situaciones problema promueven y contextualizan las actividades, mientras que el lenguaje como los símbolos y proposiciones representan otras entidades que sirven como herramientas para la acción (Godino, Batanero y Font, 2007; Gutiérrez, 2018). Entonces, sin contexto la actividad como tal se limita a poner en juego la proposición que se transmite y la acción que se libera, siendo este el procedimiento. Por lo tanto, para que sea situación problema se debe connotar de contexto para no solo ejercitar sino comprender.

5.6.2. Procesos generales de la actividad matemática en las situaciones problema

La presencia de situaciones que propician los procesos generales de la actividad matemática (EBCM, 1998) es utilizaba en ambos textos escolares como una forma de seccionar las situaciones problema. En ST no es la forma principal, pero en la parte de abajo siempre está la aclaración de que procesos manejan las situaciones propuestas.

Tabla 21*Procesos generales de la actividad matemática en las situaciones*

	SM		ST		Total	
Procesos generales en matemáticas	F	%	F	%	F	%
Ejercitación de problemas	5	50	2	16,7	7	31,8
Comunicación	1	10	0	0	1	4,5
Resolución de problemas	2	20	5	41,7	7	31,8
Razonamiento	1	10	3	25	4	18,2
Evaluación o seguimiento del aprendizaje	1	10	2	16,7	3	13,6
Total	10	100	12	100	22	100

Nota: Autoría propia

Como tal, se evidencia que no hay situaciones de comunicación en ST, y la ejercitación y resolución de problemas son los procesos matemáticos más frecuentes en ST (58,4%) y SM (70%). Por otro lado, hace falta el proceso de la modelación de problemas y falta en general fortalecer las situaciones que promuevan la comunicación y el razonamiento (22,7%).

5.6.3. Clasificación de tareas en las situaciones problemas

Las tareas que presentan los libros de texto se clasifican a partir de unas investigaciones (Salcedo, 2015; Salcedo y Ramírez, 2016; Salcedo, 2019) las cuales están referenciadas en el proyecto de investigación y que se retoman ahora.

Tabla 22*Tipos de tareas en las situaciones*

	ST		SM		Total	
Tipos de tareas	F	%	F	%	F	%
Tareas de memorización	4	9,3	0	0	4	6,1
Tareas de procedimiento sin conexión	21	48,8	15	65,2	36	54,5
Tareas de procedimiento con conexión	12	27,9	8	34,8	20	30,3
Tareas para hacer estadística	6	14,0	0	0	6	9,1
Total	43	100	23	100	66	100

Nota: Autoría propia

En total se encontraron 66 tareas de las que, las tareas de memorización y tareas de procedimiento sin conexión (60,6%) no necesitan una comprensión de conceptos y el porqué de los procedimientos estadísticos, están principalmente ligados a una mecanización y una ejercitación de los procedimientos. Siendo el 39,4% tareas dedicadas a producir interpretaciones, ideas personales, justificaciones, etc. Todo lo que ayude a una significación de las medidas de dispersión.

Lo que quedó faltando de por sí en las situaciones problemas es la construcción de gráficos estadísticos, hay centralización en interpretar y abstraer información de gráficos como los histogramas, diagrama de tallo y hojas, etc., también de construir implícitamente tablas de frecuencia, siendo siempre la intención de organizar los datos de la manera más optima para resolver las tareas, pero no de la forma para comprender los conceptos. Es como dice Friel, S. et al (2001), en la escuela los estudiantes hacen gráficos con el propósito de hacer gráficos, mientras que, fuera de las escuelas, las personas usan gráficos para lograr ciertos fines (p.143). Por lo tanto, las tablas de frecuencia no son suficientes para proporcionar significación a las medidas de dispersión, da significación es la transposición de datos a los gráficos pertinentes como histogramas, diagrama de caja y bigotes, o campana de Gauss, etc. y analizarlos a partir de su variabilidad.

En resumen, fueron más las situaciones problemas de ST que las de SM, un factor fueron los ejercicios del recurso web complementario. A favor esta que en ST se vió que el 14% de las tareas fueron para hacer estadística, en las cuales fomentan la escritura y la expresión de interpretaciones, la presencia de este tipo de problemas permite exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones (LC, 1998, p.45). Por otro lado, en SM no descuidan los cinco procesos generales de matemáticas, dándole a cada uno su lugar y sus respectivas situaciones problemas. Aun así, se evidenciaron deficiencias en ambos textos al no tener contextos sociales y científicos, y el tampoco fomentar la creación de gráficos para las medidas de dispersión que no fueran tablas de frecuencia.

6. Conclusiones

Gracias a todo el desarrollo investigativo en el trabajo de grado, se puede interpretar como primera instancia que no todos los estándares plasmados en los EBCM (1998) están

presentes en los libros de texto analizados. En particular, lo que dice el Ministerio de Educación Nacional cuando propone para el desarrollo del pensamiento aleatorio y sistemas de datos en grado octavo y noveno: resolver, formular, interpretar y contextualizar la información estadística que brindan los medios de comunicación, experimentos y entrevistas (EBCM, 1998). De tal modo, la ausencia de estándares desvincula de a poco el libro de texto de matemáticas con el currículo Nacional colombiano, conllevando, por ejemplo, con el estándar propuesto a interpretaciones deficientes con contextos no propios de la región.

“ampliar, profundizar, y por qué no, de trascender los textos escolares y los documentos oficiales a través de una amplia documentación bibliográfica, disponible hoy en día en múltiples formatos (impresos y digitales) que se pueden obtener a través del Ministerio de Educación Nacional, las Secretarías de Educación Departamental y Municipal, las bibliotecas y centros de documentación de las alcaldías y universidades, la consulta en Internet y el intercambio con otros colegas.” (EBCM, 1998, p.74)

En concordancia, lo anterior es acoplado en los libros de texto, ya que se vió una incidencia de integrar nuevas tecnologías como, por ejemplo, sitios WEB y videos de YouTube para el desarrollo de contenido, un proceso que es bueno por la ayuda audiovisual y por el incentivo a los estudiantes de investigar por cuenta propia, por el contrario, se vuelve un consecuente de la reducción en la información teórica que aporta el libro.

Las rejillas utilizadas con autoría de Pino (2017) y Pino & Estepa (2019) fueron útiles para el análisis de las medidas de dispersión en los libros de texto, permitieron abstraer la información de una forma organizada, coherente y funcional, para un análisis asertivo. En particular, se encontró que la clasificación de la rejilla de argumentos da lugar para analizar cualquier tipo de contenido matemático en los libros de texto, siendo un punto fuerte. Por otro lado, en la rejilla de elementos lingüísticos se encontraron algunos cálculos como la varianza y la desviación estándar cuya escritura se puede mejorar ya que existen discrepancias entre las variables que se usan para el cálculo de una muestra y el de una población. En general, se sugiere enriquecer las rejillas de las medidas de dispersión con la adición de las medidas de tendencia no centrales ya que son conceptos que se relacionan con

los valores atípicos y la variabilidad, representados en los diagramas de caja o en la campana de Gauss.

Actualmente, se puede inferir por la indagación bibliográfica que las investigaciones en la educación estadística aumentan considerablemente, y que se está pensando cada vez más en las medidas de dispersión y no solo en las medidas de tendencia central. Partiendo de investigaciones realizadas (Pino & Estepa, 2017; Pino & Estepa, 2019; Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy, & Vásquez, 2021), España (Estepa & Ortega, 2005; Batanero, López-Martín, González-Ruiz, & Díaz-Levicoy, 2015; Batanero, 2016; Begué, Batanero, Gea, & Beltrán-Pellicer, 2018) y otros países (Bakker & Gravemeijer, 2004; Delmas & Liu, 2005) concluimos se debe fomentar la investigación en las medidas de dispersión en relación con la enseñanza y aprendizaje de estos contenidos en aras de promover la alfabetización estadística.

En virtud de lo plasmado en las situaciones problemas por medio de los contextos propuestos por la OECD (2019) y la ausencia de algunos tipos de contexto en los libros de texto, un enfoque interesante para promover e importante para la contextualización, la alfabetización estadística y la solución de situaciones problemas es el de La noción de "Necesidad de saber" (Ograjensek & Gal, 2016; Gal, 2019), en el cual se argumenta que un desafío crítico en la educación estadística implica cuestiones de aceptación por parte de los estudiantes del propósito de toda la actividad de generar datos e interpretar un mensaje o datos estadísticos, y el valor de los buenos datos dentro de los contextos sociales más amplios que las estadísticas pretenden informar. En combinación, las dos condiciones también tienen como objetivo maximizar el sentido de relevancia de los estudiantes del contexto para sus vidas actuales o futuras, y mejorar su motivación e interés. (p.5). En síntesis, los datos sin contexto no producen interpretación útil para la vida de un estudiante, por lo cual, se persevera en que los libros de texto o secuencias de aprendizaje tengan en cuenta contextos personales, sociales, laborales y científicos cuya variedad le de significado a los contenidos.

El trabajo de grado logra replicar las rejillas que permitieron identificar elementos centrales de dos libros de texto cuyo contenido se enfoca en las medidas de dispersión. En un principio, se tenía considerado un análisis paralelo de libros de octavo y noveno, lastimosamente solo se pudo analizar una serie de libros y no dos. Siendo así, la investigación

permite una correspondencia para continuar con el uso de las rejillas para analizar otros libros de texto escolares u otro tipo de recursos como lo son las capsulas educativas de Colombia aprender, y en adición, se invita al uso de los resultados de esta investigación para buscar mejoras o diseños de unidades para la enseñanza de las medidas de dispersión. Se puede decir que, la enseñanza de los datos estadísticos en grado octavo y noveno son el pilar del desarrollo interpretativo de la variabilidad, y sin falta hay que incentivar las investigaciones que creen esas bases.

7. Bibliografía de los libros analizados

Joya Vega, A., Acero Gutierrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018). *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1*. Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos. ISBN: 9789587775266

Sanabria, Y., Fuentes, L., Roldan, D. y Malagón, J. (2016). *Vamos a aprender Matemáticas 8*. MEN: Ediciones S.M. S.A. ISBN: 9789587802283

7.1. Referencias bibliográficas

Bakker, A., and Gravemeijer, K.P.E. (2004). *Learning to reason about distribution*. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bargagliotti, A. E. (2012). *How well do the NSF Funded Elementary Mathematics Curricula align with the GAISE report recommendations?*. *Journal of Statistics Education*, 20(3).

Başkarada, S. & Koronios, A. (2018), *A philosophical discussion of qualitative, quantitative, and mixed methods research in social science*, *Qualitative Research Journal*, Vol. 18 No. 1, pp. 2-21. <https://doi.org/10.1108/QRJ-D-17-00042>

Batanero, C., Borovcnik, M. (2016). *Exploring and Modelling Association*. In: *Statistics and Probability in High School*. SensePublishers, Rotterdam. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8_4

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). *Errors and difficulties in understanding statistical concepts*. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

Batanero, C., López-Martín, M. D. M., González-Ruiz, I., & Díaz-Levicoy, D. (2015). *Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística*.

Begué, N., Batanero, C., Gea, M. M., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). *Comprensión de la representatividad y variabilidad muestral por estudiantes de Educación Secundaria*. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, 12, 8-22.

Behar, R. & Yépez, M. (2007). *Estadística, Un enfoque descriptivo*. Ed: Universidad del Valle. Tercera Edición Santiago de Cali, Colombia. ISBN 958-670-068-2

Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). *Mathematics, Statistics, and Teaching*. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801. doi:10.2307/2975286

Cobb, P. (1999). *Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis*. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 5–43. doi:10.1207/s15327833mtl0101_1

Cooksey, R. W. (2020). *Illustrating Statistical Procedures: Finding Meaning in Quantitative Data*. doi:10.1007/978-981-15-2537-7

Conceptos básicos de estadística y tipos de variables. (s.f). Clases de matemáticas online. Ekuatio. Recuperado de: https://ekuatío.com/apuntes-de-matematicas/estadistica-probabilidad/conceptos-basicos-de-estadistica-ejemplos/#Tipos_de_variables_estadisticas_Ejemplos

Congreso de la República de Colombia (1994). *Ley 115 del 8 de febrero de 1994*, por la cual se expide la Ley general de educación. Recuperado el 13 de jun. de 22 de <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=292>

Cuéstara Hernández, Y., Salcedo Estrada, I. M., & Hernández Díaz, M. (2016). La enseñanza de la estadística: antecedentes y actualidad en el contexto internacional y nacional. *Atenas*, 3(35), 125-140.

Curcio, F. R. (1987). *Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 382-393.

Denzin, N. K. (2016). *Critical Qualitative Inquiry*. *Qualitative Inquiry*, 23(1), 8–16. doi:10.1177/1077800416681864

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M. D. M. (2015). *Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena*. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), 715-739.

Delmas, R., & Liu, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 55-82.

Dörfler, W. (1991). *Forms and Means of Generalization in Mathematics. Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, 61–85. doi:10.1007/978-94-017-2195-0_4

Esquivel, E. C. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 21-31.

Estepa, A. y Ortega, J. (2005, septiembre). *Estudio del significado de las medidas de dispersión estadísticas*. Trabajo presentado en el IX Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud, Granada. España.

Estepa, A., & Pino, J. D. (2013). *Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística*. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 43-63.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores*. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), pp. 67-98

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. Alexandria, VA: American Statistical Association

Freedman, E. G., & Shah, P. (2002, April). *Toward a model of knowledge-based graph comprehension*. In: International conference on theory and application of diagrams (pp. 18-30). Springer, Berlin, Heidelberg.

Friel, S. C. (Marzo de 2001). *Dar sentido a los gráficos: factores críticos que influyen en la comprensión y las implicaciones educativas Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications*. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 32(2), 124-158. doi:10.2307 / 74967

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). *Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications*. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Gal, I. (2002). *Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities*. *International statistical review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., & Zieffler, A. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice* (No. Sirsi) i9781402083822). New York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). *Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDDM*. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). *Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90–113. doi:10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., & Redo, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. In *NOTE 358p.; For volumes 1-4, see SE 062 271-274; for the 1998 conference, see ED 416 082-085*. (p. 8)

González, L. (2018). *Análisis exploratorio de datos*. Ed: Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá D.C., Colombia. doi:10.2307/j.ctvc5pc9g, ISBN: 978-958-725-227-9

Grinnell, RM. (1997). *Social Work Research and Evaluation Quantitative and Qualitative Approaches*. Peacock: Illinois. <https://doi.org/10.1002/car.719>

Gutiérrez Cardona, F. A. (2018). *Prácticas matemáticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión en estudiantes de educación básica secundaria, desde un enfoque onto semiótico*.

Hart, A. E. (1983). *The Non-Standard Deviation*. *Teaching Statistics*, 5(1), 16-20.

Hart, A. E. (1984). *How Should We Teach the Standard Deviation?*. *Teaching Statistics*, 6(1), 24-25.

Hoyos, C. (1999). *Un modelo para investigación documental: guía teórico-práctica sobre construcción de estados del arte con importantes reflexiones sobre la investigación*. Señal Editora.

Jiménez-Castro, M., Arteaga, P., & Batanero, C. (2020). *Los gráficos estadísticos en los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34, 132-156.

Langford, E. (2006). *Quartiles in Elementary Statistics*. *Journal of Statistics Education*, 14(3), 3–. doi:10.1080/10691898.2006.11910589

Loosen, F., Lioen, M., & Lacante, M. (1985). *The Standard Deviation: Some Drawbacks of an Intuitive Approach*. *Teaching Statistics*, 7, 2-5.

Mateus, L. (2014). *Estudio de gráficos estadísticos usados en una muestra de libros de matemáticas para la educación básica y media en Bogotá*. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 274-280). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Matos, J. M [Aprender en Red]. (2021, 18 de octubre). *Libros de texto de matemáticas en la cultura escolar [Video]*. Youtube. <https://youtu.be/1rpiTWxqkMM>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998). *Lineamientos curriculares en Ministerio de educación*. Recuperado el 13 de jun. de 22 de <http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2003). *Estándares básicos de competencia de lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía: lo que los estudiantes deben*

saber y saber hacer. Recuperado el 13 de abr. de 22 de <http://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2015). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas*. Recuperado el 13 de jun. de 22 de <http://www.mineduacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html>

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

OECD, T. (2019). Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners, TALIS.

Orta, J. A., & Sánchez, E. (2013). *Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria*.

Pastor, B. F. R. (2019). Población y muestra. *Pueblo continente*, 30(1), 245-247.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). *Towards an understanding of statistical thinking*. In The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 17-46). Springer, Dordrecht.

Pino-Ruiz, J., Estepa, A. (2017). *Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO*. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Ruiz, J., Estepa, A. (2019). *Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria*. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (16), 86–102. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.232>

Portus, L. (1985-1986). *Curso práctico de estadística*. México: McGraw-Hill Book Company. ISBN: 9789684519008

Posligua, R. y Zambrano, L. (2020). El empleo del YouTube como herramienta de aprendizaje. *Rehuso*, 5(1), 11-20. <https://doi.org/10.33936/rehuso.v5i1.2249>

Rancière, J. (2007). *The Emancipated Spectator*, Verso, London.

Ridgway, J., Nicholson, J.R., & McCusker, S. (2008). *Reconceptualising 'statistics' and 'education'*. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (2008)

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez, C. (2021). *Análisis de las actividades sobre variabilidad estadística en los libros de texto de educación secundaria: Una mirada desde las propuestas internacionales*. Uniciencia, 35(1), 108-123.

Romero, S. & Ordoñez, X. (2014). *Estadística descriptiva e inferencial*. España: Centro de Estudios Financieros. ISBN: 9788445426838; 8445426834

Saavedra, M & Medina, D. (2012). *Modelos Pedagógicos Flexibles: Secundaria Activa grado 9º* (p. 28). MEN.

Saavedra, M (2012). *Modelos Pedagógicos Flexibles: Secundaria Activa grado 8º* (p. 28). MEN.

Salcedo, A. (2015). *Exigencia cognitiva de las actividades de estadística en textos escolares de Educación Primaria*. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2, 307-315.

Salcedo, A. (2019). *Las ideas fundamentales de la estadística en textos escolares de matemáticas*. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Salcedo, A. y Ramírez, T. (2016). *Análisis de las actividades de probabilidad propuestas en textos escolares de primaria*. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(1), 179-202.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* 6 Edición. Mcgraw Hil.

Sánchez, E., Silva, C. B. D., & Coutinho, C. (2011). *Teachers' understanding of variation. In Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 211-221). Springer, Dordrecht. doi:10.1007/978-94-007-1131-0_22

Unesco, C. (2020). La educación en tiempos de la pandemia de COVID-19. *Revista Latinoamericana de Educación Comparada: RELEC*, 11(18), 250-270.

Wallman, K. K. (1993). *Enhancing statistical literacy: Enriching our society*. Journal of the American Statistical Society, 88, 1–8.

Watson, J. M. (2006). *Issues for statistical literacy in the middle school*. In *ICOTS-7 Conference Proceedings. IASE, Salvador (CD-Rom)* (pp. 1-6).

Wild, C., Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry*. (con discussion). International Statistical Review 67, III. 223-265.

Zubiría, J. (s.f.) *Los retos a la educación en el siglo XXI*. Recuperado de <https://antoniorc72.files.wordpress.com/2013/06/lectura-en-el-siglo-xxi.pdf>