

PROPIEDADES ELASTO-ELECTRODINÁMICAS EN AISLANTES TOPOLÓGICOS

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA



UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN CIENCIAS-FÍSICA (CÓDIGO: 9195)

SANTIAGO DE CALI

2024

PROPIEDADES ELASTO-ELECTRODINÁMICAS EN AISLANTES TOPOLÓGICOS

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA

Tesis Doctoral

Director

JUAN CARLOS GRANADA

Ph.D., Kharkov State University

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN CIENCIAS-FÍSICA (CÓDIGO: 9195)

SANTIAGO DE CALI

2024

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN CIENCIAS-FÍSICA (CÓDIGO: 9195)
SANTIAGO DE CALI

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA

PROPIEDADES ELASTO-ELECTRODINÁMICAS EN AISLANTES TOPOLÓGICOS

TEMAS:

- 1. Piezoelectricidad**
 - 2. Aislantes topológicos**
 - 3. Ondas Bleustein-Gulyaev**
-

RESUMEN

En el presente trabajo se investigan los efectos elasto-electrodinámicos que surgen en sistemas que tienen una topológica no trivial y al mismo tiempo exhiben propiedades piezoeléctricas. En el marco de la electrodinámica del axion y con ayuda del formalismo de la teoría de la elasticidad se propone una acción para describir la respuesta elasto-electrodinámica de un aislante topológico piezoeléctrico. Demostramos que las polarizaciones asociadas a las deformaciones del material y a los estados superficiales que caracterizan el aislante topológico reestructuran las ecuaciones de Maxwell-Lorentz y las relaciones constitutivas. Esto se manifiesta en un acoplamiento entre los campos elásticos y electrodinámicos que involucran efectos magnetoeléctricos. Se muestra a detalle como las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de los modos superficiales de Bleustein-Gulyaev (B-G) se reestructuran al considerar las propiedades topológicas en cristales piezoeléctricos que pertenecen a la clase C_{6v} . Se observa que las propiedades topológicas introducen una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina α sobre el factor de acople electromecánico del material. Por otro parte, se demuestra que las ecuaciones características que describen los modos guiados piezoeléctricos electro elásticos antisimétricos y simétricos que aparecen en una placa piezoeléctrica C_{6v} de aislante topológico, también experimentan la misma corrección. Se encuentra que, para un orden dado del modo guiado, el cambio de frecuencia que induce la corrección topológica se incrementa con el vector de onda, mientras que, para un valor dado del vector de onda, el cambio de frecuencia correspondiente aumenta con el orden del modo guiado. Adicionalmente, realizamos una extensión de todo este formalismo para estudiar el comportamiento de las ondas B-G en un cristal piezoeléctrico semi-infinito de aislante topológico en contacto con líquidos viscosos. Encontramos que la corrección que introducen las propiedades topológicas en la velocidad de fase y la atenuación de estas ondas crece con la frecuencia y decrece con la viscosidad del líquido.

ABSTRACT

In the present work, we investigate elasto-electrodynamic effects arising in systems that have a non-trivial topology together with piezoelectric properties. Within the framework of axion electrodynamics and with the help of the formalism of elasticity theory, we propose an action that describes the elasto-electrodynamic response of a piezoelectric topological insulator. We demonstrate that the polarizations associated with the material deformations and the surface states that characterize the topological insulator restructure the Maxwell-Lorentz equations and the constitutive relations. This is manifested in a coupling between the elastic and electrodynamic fields involving magnetoelectric effects. It is shown in detail how the equations of motion describing the behavior of the Bleustein-Gulyaev (B-G) surface modes are restructured when considering the topological properties in piezoelectric crystals belonging to the C_{6v} class. It is observed that the topological properties introduce in the electromechanical coupling factor of the material a second-order correction on the fine structure constant α . Moreover, it is shown that the characteristic equations describing the antisymmetric and symmetric electroelastic piezoelectric guided modes appearing in a C_{6v} piezoelectric plate of topological insulator also experience the same correction. It is found that, for a given order of the guided mode, the frequency shift induced by the topological correction increases with the wave vector, while, for a given value of the wave vector, the corresponding frequency shift increases with the order of the guided mode. Additionally, we extend this formalism to study the behavior of B-G waves in a semi-infinite piezoelectric crystal of topological insulator in contact with viscous liquids. We find that the correction introduced by the topological properties in the phase velocity and the attenuation of these waves grows with the frequency and decreases with the viscosity of the liquid.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	10
2. ELECTRODINÁMICA EN AISLANTES TOPOLÓGICOS PIEZOELÉCTRICOS	14
2.1 Cristales Piezoeléctricos	14
2.2 Tensor de Permitividad Dieléctrica	16
2.3 Tensor de Módulos de Elasticidad	17
2.4 Tensor Piezoeléctrico	18
2.5 Aislantes Topológicos	19
2.6 Electrodinámica del Axion.....	21
2.7 Cristales Piezoeléctricos con Propiedades Topológicas.....	23
2.8 Ley de Gauss Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos.....	24
2.9 Ley de Ampere Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos.....	26
2.10 Ecuación de Euler Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos	28
2.11 Relaciones Constitutivas para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos.....	30
3. AISLANTE TOPOLÓGICO PIEZOELÉCTRICO DE LA CLASE C_{6v}	32
3.1 Simetría Hexagonal (Grupo C_{6v}).....	32
3.2 Permitividad Dieléctrica en Cristales C_{6v}	33
3.3 Tensor de Módulos de Elasticidad en Cristales C_{6v}	35
3.4 Tensor Piezoeléctrico en Cristales C_{6v}	36
3.5 Propiedades Generales de las Ondas Elásticas en Cristales Piezoeléctricos con Propiedades Topológicas	36
3.5.1 Relaciones Constitutivas para un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	36
3.5.2 Ecuaciones de Movimiento para un Cristal Piezoeléctrico Topológico Perteneciente a la Clase C_{6v}	38
3.5.3 Ondas de Rayleigh y Ondas de Bleustein–Gulyaev en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	39

4. ONDAS DE BLEUSTEIN-GULYAEV EN AISLANTES TOPOLÓGICOS PIEZOELÉCTRICOS .	42
4.1 Aislantes Topológicos de ZnO/CdO	42
4.2 Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Aislante Topológico	43
4.3 Estructura de los Campos en un Aislante Topológico Piezoeléctrico y en un Aislante Topológico	46
4.4 Relaciones Constitutivas en la Interface entre un Aislante Topológico Piezoeléctrico y un Aislante Topológico	47
4.5 Relación de Dispersión para las Ondas Bleustein-Gulyaev en un Aislante Topológico Piezoeléctrico	48
5. MODOS DE PROPAGACIÓN EN UNA PLACA PIEZOELÉCTRICA FINITA DE AISLANTE TOPOLÓGICO	52
5.1 Configuración y Campos en una Placa de Aislante Topológico Piezoeléctrico	52
5.2 Condiciones de Frontera en las Superficies de la Placa	55
5.3 Modos Guiados Antisimétricos en la Placa.....	57
5.4 Modos Guiados Simétricos en la Placa.....	60
6. AISLANTE TOPOLÓGICO PIEZOELÉCTRICO EN CONTACTO CON UN LÍQUIDO VISCOSO	63
6.1 Líquidos Viscosos	63
6.2 Configuración y Ecuaciones de Movimiento del Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Líquido Viscoso	63
6.3 Distribución de los Campos en el Aislante Topológico Piezoeléctrico y en el Líquido Viscoso	65
6.4 Condiciones de Frontera y Relación de Dispersión en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Líquido Viscoso	66
6.5 Velocidad de Fase y Atenuación de las Ondas Bleustein-Gulyaev en la Superficie de un Aislante Topológico Piezoeléctrico en Contacto con un Líquido Viscoso	69
CONCLUSIONES.....	75
APENDICE A	77

A.1 Ley de Gauss Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos	77
A.2 Ley de Ampere Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos	81
A.3 Ecuación de Euler Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos.....	85
APENDICE B	90
B.1 Relaciones Constitutivas en un Cristal piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	90
B.1.1 Componentes del Desplazamiento Eléctrico en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	90
B.1.2 Componentes de la Intensidad Magnética en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	91
B.1.3 Componentes del Tensor de Esfuerzos en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}	92
B.2 Ecuaciones de movimiento en un cristal piezoeléctrico topológico de la clase C_{6v}	94
B.2.1 Ley de Gauss en un Cristal Piezoeléctrico Topológico C_{6v}	94
B.2.2 Ley de Ampere en un Cristal Piezoeléctrico Topológico C_{6v}	94
B.2.3 Dinámica de las Deformaciones en un Cristal Piezoeléctrico Topológico C_{6v}	95
APENDICE C.....	97
C.1 Campos en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Aislante Topológico	97
C.2 Condiciones de Frontera en la Interface entre el Aislante Topológico Piezoeléctrico y el Vacío	100
C.3 Relación de Dispersión.....	103
APENDICE D	106
D.1 Campos en el Sistema Vacío/ Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Vacío	106
D.2 Condiciones de Frontera en el Sistema Vacío/ Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Vacío .	109
D.2.1 Condiciones de frontera entre las regiones ($y \leq h$) y $-h \leq y \leq h$	110
D.2.2 Condiciones de frontera entre las regiones ($y \geq h$) y $-h \leq y \leq h$	111
D.2.3 Ecuaciones Trascendentales para Describir los Modos Antisimétricos y Simétricos	113
APENDICE E.....	117
E.1 Estructura de los campos en el Cristal de Aislante Topológico Piezoeléctrico la región 1 y < 0	117
E.2 Estructura de los Campos en el Líquido de la región 2 y > 0	122

E.3 Condiciones de Frontera en la Interface entre un Aislante Topológico Piezoeléctrico y un Líquido Viscoso	124
E.4 Ecuación Trascendental para las Ondas Bleustein-Gulyaev en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/Líquido Viscoso	126
REFERENCIAS	130

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha observado un creciente interés en el diseño de dispositivos electrónicos que puedan transformar estímulos mecánicos en señales eléctricas para la realización de diversas tareas. Esto ha llevado a que constantemente se propongan nuevos materiales con propiedades totalmente diferentes a las de los materiales que se encuentran en estado natural, lo que ha permitido el desarrollo de tecnologías de interfaz innovadoras.

Existen tres mecanismos que responden a estímulos mecánicos y permiten detectar cambios de presión. Uno es el efecto piezorresistivo, que posibilita generar cambios en la resistencia del material al modular la estructura de bandas con la aplicación de un esfuerzo mecánico. Los dispositivos piezorresistivos trabajan de forma pasiva y pueden ser integrados en circuitos electrónicos, pero tienen una sensibilidad relativamente baja. El segundo mecanismo es el efecto piezoeléctrico, el cual permite producir una polarización cuando el material se deforma en direcciones específicas. Los dispositivos fabricados en este caso tienen alta sensibilidad y precisión ya que trabajan de forma activa al emitir señales de voltaje, pero es más difícil introducirlos en circuitos electrónicos. El último mecanismo es conocido como efecto piezotrónico, ya que combina las ventajas de los dos efectos mencionados anteriormente y hace uso del acople entre la piezoelectricidad y la electrónica (Xiaonan, et al., 2015). El principio fundamental de la piezotrónica fue descrito por primera vez en el 2007 por Zhong Lin Wang después de estudiar los efectos que produce el acople de las propiedades piezoeléctricas y semiconductoras del ZnO para la fabricación de diodos y transistores piezoeléctricos de efecto de campo (Wan, 2012; Wan, 2007; Xudong, et al., 2006; He, et al., 2007). La esencia de la piezotrónica radica en el efecto de ajuste que tiene la polarización piezoeléctrica sobre el comportamiento de los semiconductores (Ying, et al., 2015). La piezoelectricidad es un fenómeno que ocurre en determinados cristales que carecen de simetría central como el ZnO . Cuando el material es sometido a un esfuerzo mecánico se induce una polarización de iones en el cristal que crea un potencial piezoeléctrico. Este potencial tiene un fuerte efecto sobre el transporte de los portadores en la interfaz de la estructura. De esta manera, la piezotrónica se encarga del estudio y el desarrollo de dispositivos que utilizan el potencial piezoeléctrico para modular dicho transporte.

En la actualidad, la wurtzita ZnO es uno de los mejores candidatos para la fabricación de dispositivos piezotrónicos debido a que se puede sintetizar relativamente fácil y presenta morfologías que cumplen con los diseños de dispositivos deseados. Sin embargo, el ZnO no es el único material que goza de estas propiedades. Existen varios semiconductores $II - VI$ y $III - V$ que entran en esta categoría tales como GaN , InN y CdS . El potencial piezoeléctrico que se produce en el cristal cuando es deformado tiene múltiples aplicaciones. Recientemente se han propuesto diseños para el desarrollo de memorias sensoriales piezotrónicas (SMD) basadas en microcables de GaN que permiten detectar y memorizar las impresiones de información táctil (Qilin, et al., 2020), sensores para aplicaciones médicas (Chelli, et al., 2021), sensores de deformación piezotrónico con sensibilidad ultra alta basados en microhilos de $InGaN/GaN$ (Liang, et al., 2020), dispositivos de potencia controlados por tensión inspirados en el reflejo humano (Zhang, et al., 2020) y transistores de espín piezotrónicos de alto rendimiento que utilizan nanocintas de MoS_2 (Yan, et al., 2020). Además del éxito en sus aplicaciones en piezotrónica y electrónica convencional, los materiales wurtzita ZnO , GaN , InN y CdS han despertado un interés adicional asociado a la presencia de una fuerte interacción

1. Introducción

espín-órbita en ellos. Estos efectos conllevan a que los sistemas mencionados muestren, no solo un acople de las propiedades elásticas y electrodinámicas (efecto piezotrónico), sino también propiedades no triviales, denominadas fases topológicas (Jiabin & Chao-Xing, 2020). Dichas fases topológicas superan el paradigma tradicional de la física de transiciones de fase y están asociadas a diversos mecanismos de rompimiento de la simetría de inversión temporal, lo que ha obligado a introducir los métodos de la topología para la adecuada descripción de sus propiedades físicas (Luo, 2019; Vanderbilt, 2018; Bernevig & Hughes, 2013).

Actualmente, los aislantes topológicos (TI) (Bernevig & Hughes, 2013; Hasan & Kane, 2010; Fu & Kane, 2007; Shen, 2013; Luo, 2019) se han convertido en candidatos prometedores para fabricar dispositivos de alto rendimiento. Estos materiales se caracterizan por tener un fuerte acoplamiento spin-orbita, lo que conlleva a que presenten un comportamiento aislante en su interior, pero al mismo tiempo exhiban estados conductores en su superficie. El transporte de electrones en estos estados superficiales es inmune a la retrodispersión debido a que están protegidos contra la simetría de inversión temporal. Los diseños de dispositivos que utilizan TI's tienen una gran ventaja en comparación con algunos semiconductores tradicionales. Por ejemplo, los transistores de efecto de campo (FET) basados en TI tienen una relación de corriente ON/OFF ultra alta $\sim 10^8$, que es inalcanzable para los FET convencionales de silicio (Zhu, et al., 2013). Las primeras investigaciones experimentales que se realizaron sobre pozos cuánticos *HgTe/CdTe* (Bernevig, et al., 2006) demostraron que el campo de polarización que existe en estos sistemas es clave para producir una inversión de bandas y mejorar simultáneamente el acople espín-órbita del material. Los métodos que se utilizaron para generar la transición a la fase topológica consistían en sintonizar el campo de polarización a través de un incremento en el ancho del pozo cuántico. La desventaja de este método es que una vez se crece el pozo cuántico, el campo de polarización no se puede cambiar. De esta manera, diseñar dispositivos con materiales TI ajustables sigue siendo un desafío (Grandjean, et al., 1999; Leroux, et al., 1998).

El acople de las propiedades elásticas y electrodinámicas permite utilizar la polarización inducida para generar, transportar, separar y/o recombinar portadores de carga en fotoceldas, fotodetectores y LED cuyo funcionamiento se puede modificar considerablemente induciendo deformaciones mediante perturbaciones externas (Hu, et al., 2010; Yang, et al., 2010; Yang, et al., 2011). Se ha demostrado que la deformación mecánica lleva a inducir estados topológicos en diversas clases de heteroestructuras con materiales semiconductores (Rui-Chun, et al., 2020). Así, en pozos cuánticos de *GaN/InN/GaN* la presencia simultánea de propiedades piezoeléctricas y semiconductoras lleva a que la aplicación de una deformación externa induzca un campo de polarización perpendicular a la superficie del pozo, lo que incrementa considerablemente la interacción espín órbita y lleva a la aparición de estados superficiales topológicos (Miao, et al., 2012). Algo similar ocurre en el telururo de mercurio deformado (*HgTe*), donde el acople electroelástico asociado a las propiedades piezoeléctricas lleva a la aparición de un efecto Hall cuántico asociado a los estados superficiales topológicos (C., et al., 2011). Así mismo, una deformación por tracción en películas de arseniuro de galio genera una gran brecha en el aislante topológico (Mingwen, et al., 2015). El efecto piezotrónico puede cambiar la fase topológica del material piezoeléctrico, lo que permite modular efectivamente el transporte electrónico y abre diversas posibilidades de aplicación en salud y testeo mecánico, tanto en el diseño de sensores altamente sensibles y con tiempo de monitoreo rápido (Jenkins & Yang, 2017), como en el diseño de dispositivos con alto desempeño, como es el caso del transistor piezotrónico basado en aislantes topológicos reportado en (Hu, et al., 2018). Destacan así mismo los nano dispositivos piezotrónicos lógicos de alto rendimiento (Hu & Zhang, 2020) basados en aislantes topológicos con propiedades

1. Introducción

piezoeléctricas (Dan, et al., 2018; Guo, et al., 2019), los arreglos LED basados en discos semiflotantes de *InGaN/GaN* (Ting, et al., 2020) y los transistores de efecto campo basados en hetero junturas de *GaN* (Han, et al., 2020).

Una caracterización alternativa de un aislante topológico se deriva de su respuesta inusual a los campos electromagnéticos aplicados (Sekine & Nomura, 2021). Los efectos que se producen cuando el aislante topológico interactúa con ondas electromagnéticas están determinados por el acople $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ (donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son los campos eléctrico y magnético respectivamente, y θ se conoce como término topológico) (Bernevig & Hughes, 2013; Hasan & Kane, 2010; Litvinov, 2020). En teoría de campos, los fenómenos asociados con este acople se describen mediante la electrodinámica del axi6n (Wilczek, 1987), ya que este término tiene la misma forma que la acción que describe el acoplamiento entre la partícula elemental hipotética, axi6n y un fot6n. El axi6n se propuso hace unos cuarenta a6os para resolver el problema CP fuerte en cromodinámica cuántica (Peccei & Quinn, 1977; Weinberg, 1978; Wilczek, 1987). Gracias a estudios posteriores, el axi6n ahora se considera esencial para explicar los resultados experimentales en f6sica de part6culas y astrof6sica (Board, et al., 2008).

El acoplamiento $\theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ lleva a la modificaci6n de las leyes usuales de la propagaci6n de las ondas electromagnéticas en materiales polarizables y magnetizables. Adem6s, modifica el sistema de ecuaciones de Maxwell-Lorentz y las relaciones constitutivas para la polarizaci6n y la magnetizaci6n (Bernevig & Hughes, 2013; Hasan & Kane, 2010). El efecto magnetoeléctrico topol6gico descrito por el llamado t6rmino θ es una respuesta característica de los aislantes topol6gicos tridimensionales a los campos eléctricos y magnéticos externos (Sekine & Nomura, 2021). El coeficiente del efecto magnetoeléctrico θ toma un valor cuantificado π para aislantes topol6gicos y toma un valor 0 para aislantes convencionales. Sin embargo, existen otros sistemas en los cuales el parámetro topol6gico θ puede depender de las coordenadas espacio-temporales, como es el caso de los semimetales de Weyl (Zyuzin & Burkov, 2012).

En particular, cuando la luz incide con polarizaci6n lineal sobre una superficie donde cambia el parámetro topol6gico θ , el plano de polarizaci6n de la onda reflejada experimenta una rotaci6n no trivial de Kerr y el de la onda transmitida experimenta una rotaci6n no trivial de Faraday (Maciejko, et al., 2010; Lan, et al., 2011). Se encontr6 que los ángulos de rotaci6n no trivial Kerr/Faraday de la luz reflejada/transmitida en este caso, presentan no solo una dependencia lineal con la diferencia de los t6rminos topol6gicos de los medios sino tambi6n con la relaci6n entre el ángulo incidente y el ángulo de Brewster (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2019; Granada Echeverri & Rojas Vallecilla, 2017).

Por otro lado, la presencia del parámetro topol6gico lleva a considerables cambios en el car6cter de las fuerzas de interacci6n de Casimir (Wenjie, et al., 2013; Zheng, et al., 2016; Lu, 2018), introduciendo la posibilidad de modular el car6cter atractivo o repulsivo de la fuerza de interacci6n entre aislantes topol6gicos anisotr6picos (Huila Portillo, 2019). As6 mismo, se ha demostrado que el t6rmino del axi6n tambi6n introduce cambios en el espectro de las interacciones colectivas que surgen en las superficies que separan aislantes con diferentes propiedades topol6gicas (Karch, 2009; Karch, 2011; Lai, et al., 2014; Granada Echeverri & Rojas Vallecilla, 2014).

Por su parte, en los materiales piezoeléctricos existe un acoplamiento entre excitaciones elásticas y excitaciones eléctricas. Para deformaciones uniformes en el cristal, las polarizaciones inducidas varían proporcionalmente con la tensi6n aplicada a trav6s de un parámetro conocido como coeficiente piezoeléctrico. Por el contrario, es posible deformar el

1. Introducción

material cuando se aplica un potencial eléctrico al cristal (Tiersten, 1969). La capacidad del material para transformar energía mecánica en energía eléctrica se mide a través del factor de acoplamiento electromecánico, en el que las propiedades dieléctricas del material se combinan con las propiedades elásticas y el coeficiente piezoeléctrico (Uchino, 2017). Entre los modos electro elásticos acoplados, son de especial importancia los modos Bleustein Gulyaev (B-G), los cuales se localizan en la superficie de un material piezoeléctrico. Las ondas B-G son ondas acústicas superficiales de cizalla (shear horizontal surface acoustic waves o SH-SAW) (Gulyaev, 1998), en las que la dirección del movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación y paralela a la superficie del piezoeléctrico (Bleustein, 1968; Gulyaev, 1969). En ausencia de un efecto piezoeléctrico, las ondas B-G se transforman en ondas transversales masivas. Los modos de propagación B-G son un componente clave en las aplicaciones de detección de líquidos porque no irradian energía al líquido adyacente y son sensibles a cambios en las propiedades mecánicas, eléctricas y del líquido (El Baroudi & Le Pommellec, 2021; Guo, et al., 2012), así como en la fabricación de instrumentos de sensores de permitividad dieléctrica (Elhady & Abdel-Rahman, 2022).

En este trabajo se estudia el papel que juega la presencia de una topología no trivial en la respuesta elasto-electrodinámica de los aislantes topológicos cuando se consideran las propiedades piezoeléctricas del cristal. Se propone una acción para encontrar las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas de las coordenadas generalizadas de origen electrodinámico y elástico. Para la obtención rigurosa de las relaciones constitutivas se utilizará el formalismo de la electrodinámica del axion junto con el formalismo de la teoría de la elasticidad adaptados en su forma más general para construir los diferentes términos de la acción efectiva que permita describir las propiedades electrodinámicas de un medio anisotrópico polarizable, deformable y que posee propiedades piezoeléctricas. En particular, se estudian los cambios que sufren las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas en cristales que pertenecen a la clase C_{6v} . Luego, las ecuaciones maestras deducidas de las ecuaciones de movimiento para los campos electromagnéticos y elásticos nos permiten estudiar las propiedades de los modos de Bleustein Gulyaev en la superficie de un cristal piezoeléctrico topológico de clase C_{6v} en contacto con el vacío. Posteriormente, se analizan los cambios que sufren los modos de propagación de las ondas elasto-electrodinámicas en una placa de aislante topológico piezoeléctrico C_{6v} . Finalmente se estudia la propagación de las ondas B-G en aislantes topológicos piezoeléctricos en contacto con líquidos viscosos. Las soluciones analíticas y numéricas que se obtienen a partir del formalismo que se plantea, darán información sobre las leyes de dispersión, las atenuaciones y las velocidades de fase de los modos superficiales que surgen en todas las configuraciones que se estudian en este trabajo.

2. ELECTRODINÁMICA EN AISLANTES TOPOLÓGICOS PIEZOELÉCTRICOS

En este capítulo estudiaremos las propiedades electrodinámicas relevantes de los cristales piezoeléctricos. Posteriormente, realizaremos una descripción de las características que poseen los aislantes topológicos. Finalmente, se considera un aislante topológico con propiedades piezoeléctricas y se propone una acción para encontrar las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas de las coordenadas generalizadas de origen electrodinámico y elástico, prestando especial atención a la reestructuración inducida por las propiedades topológicas.

2.1 Cristales Piezoeléctricos

Ciertos materiales producen cargas eléctricas en sus superficies como consecuencia de la aplicación de un esfuerzo mecánico. Las cargas inducidas son proporcionales a la tensión mecánica. Este fenómeno se conoce como efecto piezoeléctrico directo y fue descubierto en el cuarzo por Pierre Curie y Jacques Curie en 1880. Así mismo, en los materiales que presentan este fenómeno tiene lugar la aparición de una deformación geométrica inducida por la aplicación de un campo eléctrico. Este fenómeno se conoce como efecto piezoeléctrico inverso y fue descubierto por Gabriel Lippman en 1881 ([Uchino, 2017](#)).

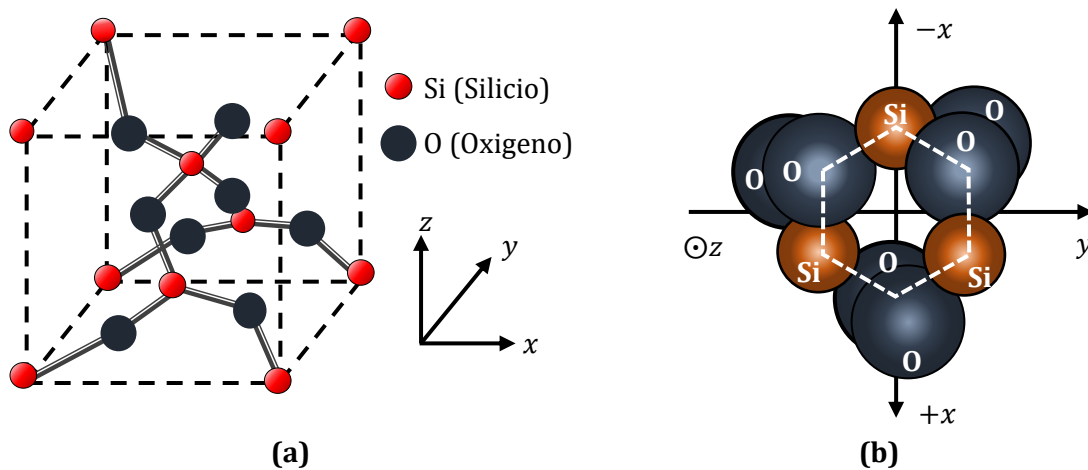


Figura 2. 1: (a) Estructura del α -Cuarzo. (b) Simetría hexagonal. Adaptado de ([Uchino, 2017](#))

En la figura 2.1(a) se muestra la estructura del α -Cuarzo. La unidad de sílice (SiO_2) sólida como tal es un tetraedro, en el cual un átomo de silicio está rodeado por 4 átomos de oxígeno. Los tetraedros se unen entre sí compartiendo átomos de oxígeno. Estos tetraedros se pueden enlazar entre sí de diversas maneras para dar origen a diferentes estructuras cristalinas. Cristalográficamente el cuarzo se describe mediante una celda hexagonal (ver figura 2.2(b)).

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

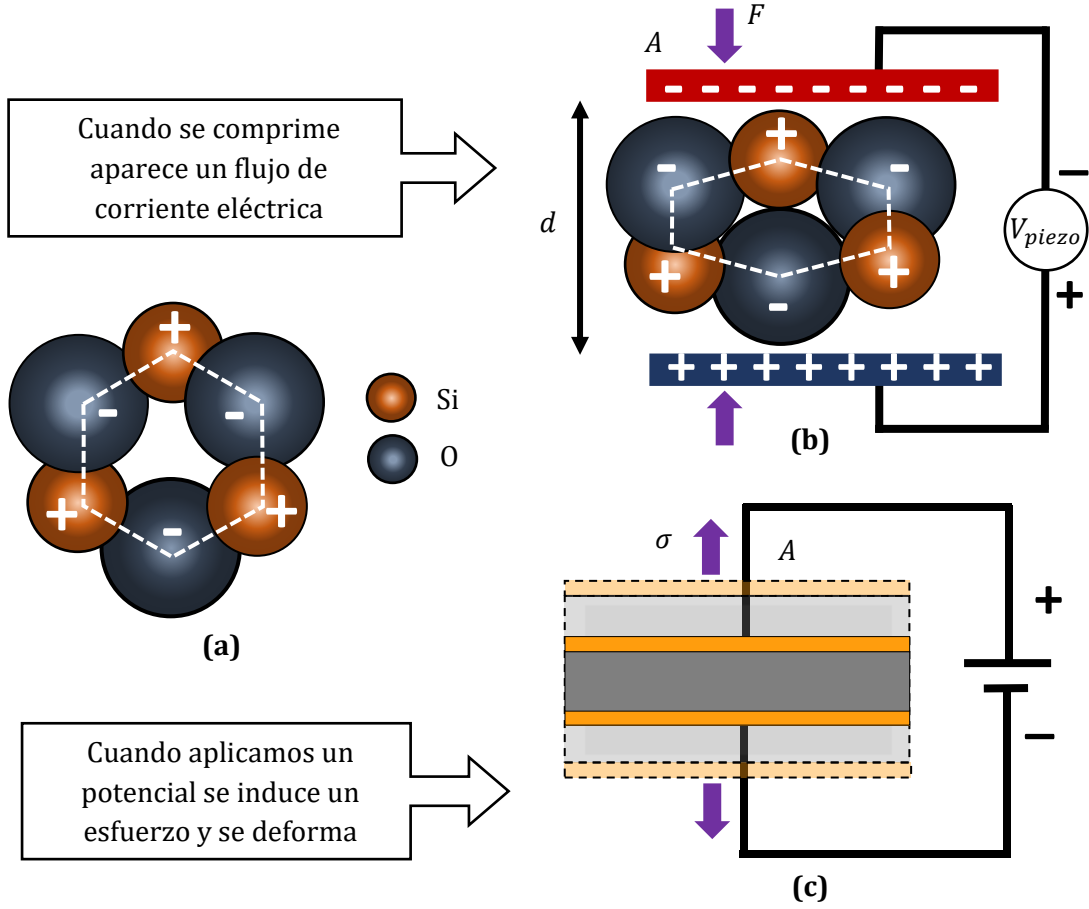


Figura 2. 2: (a) Cargas en el hexágono. (b) Efecto piezoeléctrico directo. (c) Efecto piezoeléctrico inverso. Adaptado de (Uchino, 2017)

En esta estructura, el silicio tiende a perder electrones y el oxígeno tiende a ganarlos. De esta manera, los átomos de silicio forman un centro de carga positivo mientras que los átomos de oxígeno forman un centro de carga negativo, tal como se muestra en la figura 2.2(a). La deformación del cristal provoca un desplazamiento de los centros de carga, lo que ocasiona la polarización eléctrica del material (ver figura 2.2(b)). Esta polarización hace parte de la componente normal D del desplazamiento eléctrico, la cual se reestructura de la siguiente forma (Landau & Lifshitz, 2003 VIII)

$$D = \epsilon_r E - 4\pi\beta u', \quad (2.1)$$

donde ϵ_r es la permitividad dieléctrica relativa del material; el coeficiente β se denomina coeficiente piezoeléctrico y tiene unidades $[dyn/statC]$. Adicionalmente, E es el campo eléctrico (cuyas unidades en este caso son $[statC/cm^2]$) y u' es la deformación relativa que experimenta el cristal (Uchino, 2017; Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Tiersten, 1969). Es de anotar que el primer término en el desplazamiento eléctrico (2.1), está asociado con las propiedades dieléctricas del material, mientras que el segundo término describe la polarización asociada a la deformación del material como consecuencia del esfuerzo aplicado.

Note que hemos considerado $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Por otro lado, cuando aplicamos un potencial eléctrico sobre el material, este se polariza y se deforma tal como se muestra en la figura 2.2(c). Debido a las propiedades elásticas, el material sufre una deformación u' que acompaña la polarización inducida por el potencial eléctrico. De esta manera, el campo eléctrico aplicado induce un esfuerzo mecánico en el material. En consecuencia, la ley de Hooke se reestructura de la siguiente manera

$$\sigma = \lambda u' + \beta E, \quad (2.2)$$

donde λ es el módulo de elasticidad y se expresa en unidades $[dyn/cm^2]$ (Uchino, 2017; Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Tiersten, 1969). Estos efectos se presentan en los cristales pertenecientes a toda una clase de series cristalográficas. De las 32 clases cristalográficas, 20 presentan propiedades piezoeléctricas. En la Tabla 2.1 se muestran las clases cristalográficas que soportan los efectos piezoeléctricos y se presentan en notación de Schönflies (Landau & Lifshitz, 2003 VIII).

Tabla 2.1: Clases cristalográficas que presentan efecto piezoeléctrico en notación de Schönflies (Landau & Lifshitz, 2003 VIII).	
Sistema Triclínico	C_1
Sistema Monoclínico	C_s, C_2
Sistema Rómbico	C_{2v}, D_2
Sistema Tetragonal	$C_4, C_{4v}, D_4, D_{2d}, S_4$
Sistema Romboédrico	C_3, C_{3v}, D_3
Sistema Hexagonal	$C_6, C_{6v}, D_6, C_{3h}, D_{3h}$
Sistema Cúbico	T, T_d

En el presente trabajo se investigan las propiedades del sistema hexagonal C_{6v} . Ello implica que las relaciones constitutivas (2.1) y (2.2) deben ser extendidas para considerar las propiedades anisotrópicas del material.

2.2 Tensor de Permitividad Dieléctrica

Como se vio en la sección anterior, existe una dependencia lineal entre los vectores de desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ y campo eléctrico $\mathbf{E}$. En materiales isotrópicos, esta dependencia lineal se reduce a una proporcionalidad entre ambos vectores, ya que tienen la misma dirección. En unidades CGS, la constante de proporcionalidad entre ambos vectores es la permitividad dieléctrica relativa $\epsilon_r = \epsilon_m/\epsilon_0$ (donde ϵ_m es la permitividad dieléctrica del medio y ϵ_0 la permitividad dieléctrica del vacío).

En materiales anisotrópicos, la relación entre $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ es más compleja. En esta clase de sistemas, las componentes D_i y E_i del desplazamiento y el campo eléctricos, respectivamente, no necesariamente tienen la misma dirección (Landau & Lifshitz, 2003 VIII). Puesto que $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ son vectores o tensores de primer rango, existen dos direcciones involucradas en la medida

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

de la permitividad dieléctrica, lo que la convierte en un tensor de segundo rango que se escribe de la forma ε_{ik} (Newnham , 2005). El tensor de permitividad dieléctrica ε_{ik} tiene la siguiente relación de simetría

$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$	(2.3)
--	-------

Las componentes en la diagonal del tensor ε_{ik} son siempre positivas y mayores que la unidad, tal como sucede con la permitividad dieléctrica en un material isotrópico. Dependiendo del cristal, las magnitudes de las componentes no diagonales suelen ser más pequeñas que las componentes diagonales y sus valores no necesariamente son positivos (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Newnham , 2005). En el capítulo 3 se demuestra cómo influye la simetría de un cristal hexagonal de la clase C_{6v} en las componentes del tensor de permitividad dieléctrica.

2.3 Tensor de Módulos de Elasticidad

Las deformaciones de un cuerpo se describen mediante los desplazamientos que sufren los puntos del cristal. Estos desplazamientos se definen por medio del vector de deformaciones (o desplazamiento) $\mathbf{u}$, mientras que el esfuerzo que ocasiona dichos desplazamientos está determinado por el vector de esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$. En materiales isotrópicos, el vector de deformaciones siempre tiene la misma dirección del vector de esfuerzos. De acuerdo con la ley de Hooke, existe una dependencia lineal entre las deformaciones y los esfuerzos, y la constante de proporcionalidad entre ambas cantidades se define como módulo de elasticidad λ . Esta aproximación lineal describe apropiadamente la respuesta que tienen los cuerpos elásticos cuando están bajo la acción de esfuerzos mecánicos pequeños (Newnham , 2005). Sin embargo, no describe los fenómenos que aparecen a niveles altos de esfuerzo (tales como la plasticidad), los cuales requieren aproximaciones de orden superior (Landau & Lifshitz, 2003 VII).

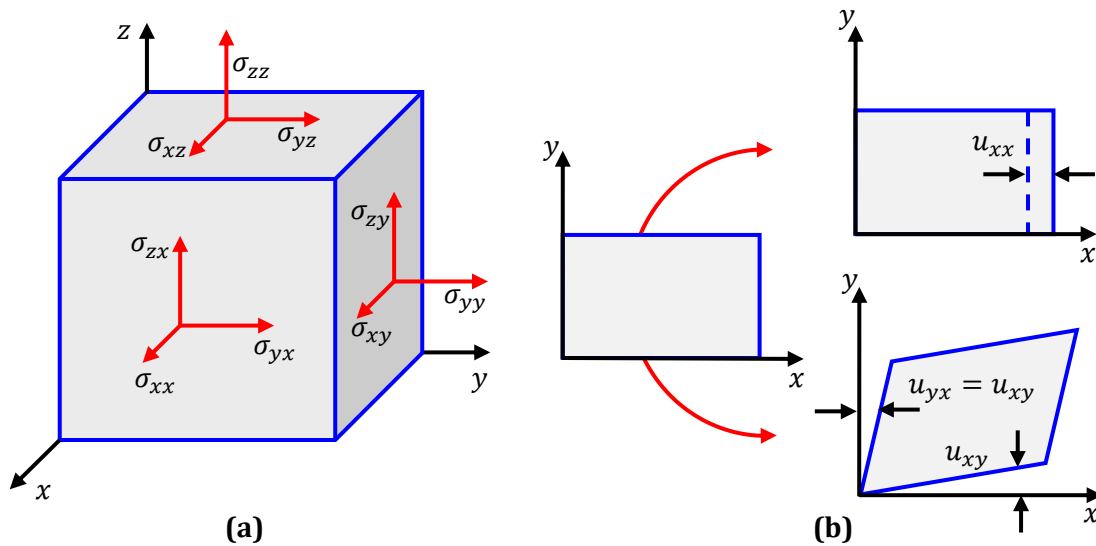


Figura 2. 3: (a) Distribución de los esfuerzos. (b) Distribución de las deformaciones. Adaptado de (Newnham , 2005)

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Por otro lado, en los materiales anisotrópicos, la descripción de las deformaciones que sufre el cristal y la distribución de los esfuerzos a los que es sometido es más complicada. Para especificar los esfuerzos se requieren dos direcciones; la dirección de la fuerza que se aplica y la normal a la cara en la cual se aplica dicha fuerza (ver figura 2.3(a)). De forma similar, las deformaciones se especifican con dos componentes, las cuales dan la dirección de los desplazamientos de las caras del cuerpo cuando es deformado (ver figura 2.3(b)) (Newnham , 2005). Esto quiere decir que las deformaciones y los esfuerzos se describen mediante los tensores de segundo rango u_{lm} y σ_{ik} , respectivamente. Estos tensores satisfacen las siguientes relaciones de simetría (Landau & Lifshitz, 2003 VII; Newnham , 2005),

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad u_{lm} = u_{ml}, \quad u_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right). \quad (2.4)$$

Todo lo anterior convierte al módulo de elasticidad λ en un tensor de cuarto rango. El tensor de módulos de elasticidad λ_{iklm} cumple las siguientes relaciones de simetría

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \quad (2.5)$$

En general, el tensor de módulos de elasticidad tiene un total de 81 componentes. Este número se reduce a 36 cuando se consideran las relaciones de simetría (2.4) y (2.5). Adicionalmente, el número de componentes no nulas del tensor de módulos de elasticidad varía según la simetría del cristal (Newnham , 2005). Reiteramos que en el presente trabajo nos concentraremos en los cristales con simetría C_{6v} .

2.4 Tensor Piezoeléctrico

Cuando un cristal piezoeléctrico es deformado debido a la acción de un esfuerzo mecánico, se induce una polarización que crea un potencial piezoeléctrico. Si las deformaciones son uniformes, esta polarización depende linealmente ellas. Sin embargo, la polarización es un vector con componentes $P_l^{(p)}$ (p hace referencia a las propiedades piezoeléctricas) y las deformaciones del cristal se describen mediante un tensor de segundo rango con componentes u_{ik} . Luego, la relación que existe entre estas componentes se escribe de la siguiente manera

$$P_l^{(p)} = \beta_{l,ik} u_{ik}. \quad (2.6)$$

donde $\beta_{l,ik}$ es un tensor de tercer rango conocido como tensor piezoeléctrico (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Newnham , 2005). Por otra parte, cuando se aplica un campo eléctrico, se induce un esfuerzo que deforma el material. En este caso, las componentes E_l del campo eléctrico y las componentes σ_{ik} del esfuerzo están acopladas a través de la siguiente expresión

$$\sigma_{ik} = \beta_{l,ik} E_l. \quad (2.7)$$

El tensor de esfuerzos σ_{ik} en (2.6) y (2.7) es simétrico, lo que conlleva a que el tensor $\beta_{l,ik}$ también sea simétrico en i, k ,

$$\beta_{l,ik} = \beta_{l,ki}. \quad (2.8)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

De esta manera, el tensor piezoeléctrico solo tiene 18 componentes independientes, aunque el número de componentes no nulas varía dependiendo de la simetría del cristal. Aquellos cuerpos que poseen isotropía o un centro de simetría no son piezoeléctricos (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Newnham, 2005).

2.5 Aislantes Topológicos

Los aislantes topológicos (TI) (Hasan & Kane, 2010; Qi & Zhang, 2011; Fu & Kane, 2007) son nuevos estados cuánticos de la materia que se comportan como un aislante en el interior, pero al mismo tiempo presentan estados de conducción superficiales (Luo, 2019; Shen, 2013). Estos estados superficiales son el resultado del fuerte acoplamiento espín-orbita que presenta el material y se encuentran topológicamente protegidos frente a retrodispersión y disipación. En el 2006, Andrei Bernevig, Taylor Hughes y Zhang Shou-Cheng propusieron un mecanismo de inversión de bandas para encontrar materiales con estas características (Bernevig, et al., 2006). En este mecanismo, el ordenamiento normal de la banda de conducción se invierte con la banda de valencia debido al fuerte acoplamiento spin-orbita que presenta el material. Además, predijeron que el crecimiento de pozos de $HgTe$ (telurio de mercurio) en medio de capas de $CdTe$ (teluro de cadmio) eran candidatos para ser aislantes topológicos.

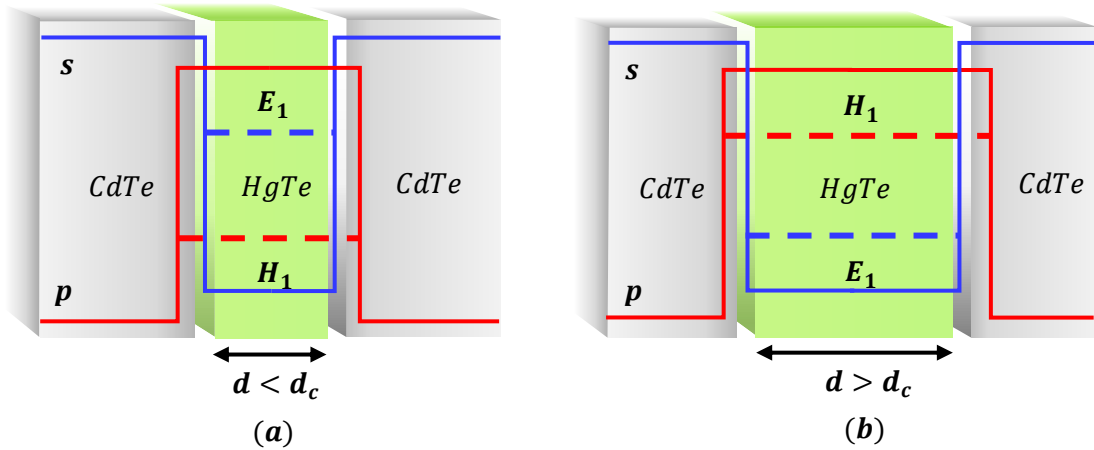


Figura 2. 4: (a) Se esquematiza el efecto dominante que posee el $CdTe$, cuando la capa de $HgTe$ tiene un espesor por debajo del valor crítico ($d < d_c$). En (b) se muestra la inversión de bandas que presenta el sistema cuando el espesor de la capa $HgTe$ supera el valor crítico ($d > d_c$). Adaptado (Qi & Zhang, 2011).

En semiconductores comunes, la banda de conducción es formada por electrones en orbitales s y la banda de valencia es formada por electrones en orbitales p . Sin embargo, en elementos pesados como Hg y Te , la banda con orbitales p se encuentra por encima de la banda con orbitales s debido al fuerte acoplamiento espín-orbita. Por otro lado, el $CdTe$ tiene una red similar a la del $HgTe$ pero con acoplamiento espín-orbita más débil. Cuando se crecen pozos de $HgTe$ en medio de capas de $CdTe$, es posible controlar la estructura de bandas del sistema al variar el espesor de las capas. Si la capa de $HgTe$ tiene un espesor d por debajo de un determinado valor crítico d_c , la estructura de bandas predominante es la del $CdTe$ (Qi & Zhang, 2011).

2. Electrocinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

En la figura 2.4(a) se muestra como la banda $E1$, (la cual corresponde a la banda con orbitales s) se encuentra por encima de la banda $H1$ (la cual corresponde a la banda con orbitales p), dando lugar al ordenamiento normal del $CdTe$. En la figura 2.3(b) se muestra un sistema en cual el espesor de la capa de $HgTe$ se encuentra por encima del valor crítico, dando lugar a la inversión de la estructura de bandas del sistema (en este caso la banda $H1$ se encuentra por encima de la banda $E1$) debido al fuerte acoplamiento espín-órbita del $HgTe$. El espesor crítico d_c para el cual se presenta la inversión de bandas en este caso es de $\sim 6,3nm$ (Qi & Zhang, 2011).

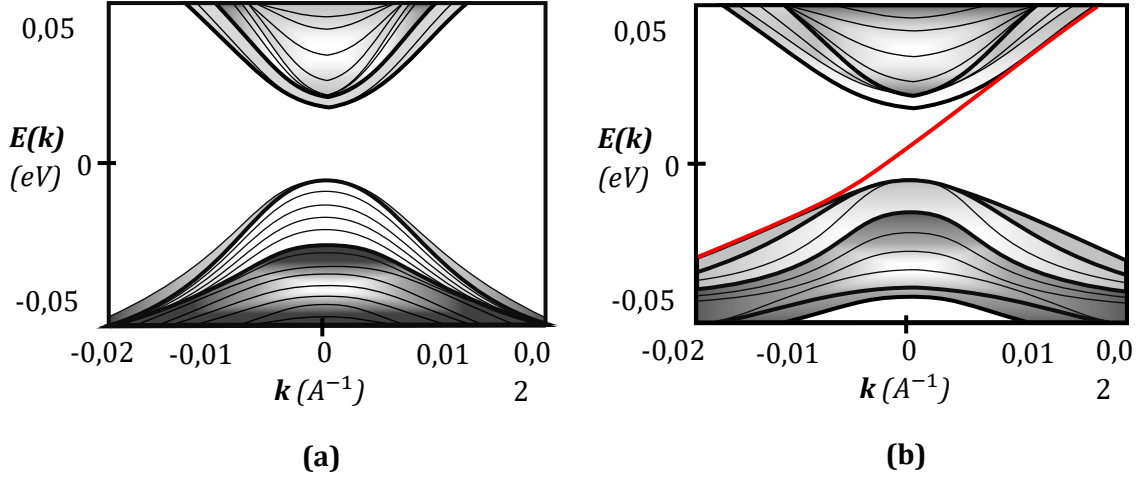


Figura 2. 5: (a) Se muestra el espectro de energía que presenta el sistema $HgTe/CdTe$ cuando $d < d_c$. (b) El pozo de potencial presenta un gap de energía, pero dentro de este aparecen estados de superficie que se representan por una línea roja. Adaptado (Qi & Zhang, 2011)

El comportamiento que presenta $HgTe$ puede ser descrito por un modelamiento de dos bandas para $E1$ y $H1$. La solución explícita del modelo da lugar a una solución sin estados de superficie en el régimen $d < d_c$ y a una solución con estados superficiales cuando $d > d_c$, tal y como se muestra en las figuras 2.5(a) y 2.5(b) respectivamente. Poco tiempo después de la predicción teórica, un equipo de la Universidad de Wurzburg liderado por Laurens Molenkamp observó la inversión de bandas en pozos cuánticos de $HgTe$ que fueron crecidos por medio de epitaxia de haz molecular (Konig, et al., 2007). Posteriormente, este fenómeno fue predicho y observado experimentalmente en varios sistemas 3-dimensionales (Hsieh, et al., 2008) tales como $Bi_{1-x}Sb_x$, Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 y Sb_2Te_3 (Fu & Kane, 2007; Hsieh, et al., 2009; Zhang, et al., 2009).

Por otro lado, en teoría de campos, la respuesta de un aislante topológico 3-dimensional a campos externos está descrita por el lagrangiano del Axion $\Delta L_{axion} \sim \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B}$ el campo magnético y θ es un factor de acople conocido como parámetro topológico (Wilczek, 1987; Luo, 2019). La estructura de este lagrangiano da lugar a la posibilidad de inducir una polarización magnética en el material a través de un campo eléctrico o de inducir una polarización eléctrica a través de un campo magnético. Este efecto es conocido como efecto magneto eléctrico topológico y θ adopta el significado de polarización magneto eléctrica (Vazifeh & Franz, 2010; Shen, 2013). En las siguientes

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

secciones se examinarán los efectos que produce la introducción del término del Axion dentro de la acción del campo electromagnético.

2.6 Electrodinámica del Axion

El comportamiento de los campos electromagnéticos en un medio es descrito por las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, las cuales consisten en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que acoplan los campos eléctricos y magnéticos con las densidades de carga y corriente (Lechner, 2018; Landáu & Lifschitz, 2003 II). Estas ecuaciones, se pueden obtener mediante el tensor de campo electromagnético, $F_{\alpha\beta}$, el cual describe el campo electromagnético en el espacio-tiempo de Minkowski. En este contexto, las coordenadas de un evento se describen mediante el 4-vector $x^\alpha = (ct, \mathbf{r})$, donde ct es la componente temporal (c es la velocidad de la luz en el vacío) y $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es un vector tridimensional. Del mismo modo, las propiedades del campo electromagnético se caracterizan por un 4-vector $A_\alpha = (\varphi, -\mathbf{A})$, denominado 4-potencial, donde φ es el potencial escalar y $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ es un vector tridimensional conocido como potencial vectorial. Luego, el tensor de campo electromagnético se define de la siguiente forma

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

donde $\partial/\partial x^\alpha$ es el 4-gradiente. El tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico de rango dos, es decir que $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. De la ecuación (2.9) se obtiene el tensor electromagnético en términos de las componentes de los campos:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

donde $E_i = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)$ son las componentes del campo eléctrico y $B_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$ son las componentes del campo magnético. Adicionalmente, de la ecuación (2.9) se obtiene la siguiente relación, conocida como identidad Bianchi:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.11)$$

De (2.11) encontramos el primer par de ecuaciones de Maxwell en forma vectorial (ley de Gauss para el campo magnético y ley de Faraday, respectivamente),

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

El segundo par de ecuaciones de Maxwell se obtiene al variar los potenciales en la acción del campo electromagnético. A partir de las intensidades de campo eléctrico y magnético podemos formar ciertas cantidades que permanecen invariantes cuando pasamos de un sistema de referencia inercial a otro. En términos del tensor de campo electromagnético estos invariantes se escriben como

$$\text{invariante} = F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.14)$$

$$\text{invariante} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}, \quad (2.15)$$

donde $F^{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}F_{\mu\sigma}g_{\sigma\beta}$ siendo $g_{\alpha\mu} = (1, -1, -1, -1)$ el tensor métrico (Landáu & Lifschitz, 2003 II). Teniendo en cuenta los invariantes (2.14) y (2.15), se puede expresar la acción del campo electromagnético, S_c , de la siguiente manera (Litvinov, 2020)

$$S_c = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \kappa\theta(\mathbf{r}, t)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}) d\Omega, \quad d\Omega = cdt dx dy dz. \quad (2.16)$$

El término $\theta(\mathbf{r}, t)$ se conoce como campo de axion y κ es una constante de acople que está determinada por el cociente $\alpha/2\pi$, donde α es la constante de estructura fina, la cual es aproximadamente igual a $1/137$. Por otro lado, la acción que describe la interacción de las cargas con el campo electromagnético es

$$S_{cc} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} A_{\alpha}j^{\alpha} d\Omega, \quad (2.17)$$

donde $j^{\alpha} = (c\rho, \mathbf{j})$ es el 4-vector de corriente, siendo ρ la densidad de cargas y $\mathbf{j}$ el vector de corriente. Adicionalmente, la acción que describe las características polarizables y magnetizables del medio se define como

$$S_p = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} F_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta} d\Omega, \quad (2.18)$$

donde $P^{\alpha\beta}$ es el tensor de magnetización y polarización, el cual está dado por

$$P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ P_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde P_i son las componentes del vector de polarización y M_i son las componentes del tensor de magnetización. Luego, sumando (2.16), (2.17) y (2.18) se obtiene la acción total del campo electromagnético para medios polarizables y magnetizables dada por la ecuación (2.20).

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

$$S_t = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \kappa \theta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}) - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} A_{\alpha} j^{\alpha} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} F_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta} d\Omega. \quad (2.20)$$

Observemos que el invariante $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}$ que aparece en la ecuación (2.20) invierte el signo tanto bajo la inversión espacial $r \rightarrow -r$ como respecto a la inversión temporal $t \rightarrow -t$. Este término es un pseudoescalar que viola la invarianza de Lorentz y que se puede expresar como una 4-divergencia ([Landáu & Lifschitz, 2003 II](#)),

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = 4 \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(e^{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} A_{\delta} \right), \quad (2.21)$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de Levi-Civita en 4 dimensiones. Cuando el término θ es constante, la integral sobre el segundo invariante en (2.20) desaparece. Por otro lado, si θ es una función pseudoescalar de las coordenadas o del tiempo $(\mathbf{r}, t)$, el cambio de signo que sufre el invariante es absorbido por la función $\theta(\mathbf{r}, t)$ y de esta manera se reestablece la simetría de la acción S_T . En particular, en aislantes topológicos el término θ toma valores enteros de π y se anula en materiales convencionales. Los efectos asociados a θ ocurren cerca de la superficie o de las paredes de dominio del material y como se recalcó anteriormente, la presencia de dicho término lleva a la aparición de efectos magnetoelectricos topológicos observables, tales como los efectos de Kerr y Faraday.

2.7 Cristales Piezoeléctricos con Propiedades Topológicas

Consideremos un aislante topológico no magnetizable caracterizado por una densidad de masa ρ_m , un tensor de permitividad dieléctrica ε_{ik} , un tensor de módulo de elasticidad λ_{iklm} , un tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$ y un parámetro topológico θ . Se toman como coordenadas generalizadas el potencial escalar φ , las componentes A_k del potencial vectorial y las componentes u_i de la deformación elástica. Para frecuencias de ondas elásticas bajas, los campos electromagnéticos se comportan como campos cuasi estacionarios ([Tiersten, 1969](#)). En ausencia de cargas libres y corrientes de conducción la acción S del sistema descrito tiene la forma ([Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024](#)),

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega \\ & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$ es la constante de estructura fina y $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$ es el tensor de deformación. Las primeras tres integrales en la ecuación (2.22) definen la acción del campo electromagnético en un medio polarizable en la aproximación cuasi estacionaria. La cuarta integral contiene los efectos magnetoelectricos que se obtienen como resultado de los estados

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

superficiales que aparecen en el aislante topológico. Las últimas tres integrales introducen las propiedades electro elásticas del material, las cuales están definidas por la energía cinética elástica $\frac{1}{2}\rho_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2$, por la energía potencial elástica $\frac{1}{2}\lambda_{iklm}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ y por un término que acopla el campo eléctrico y las deformaciones del cristal a través del tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$.

En las siguientes secciones, estudiaremos los cambios que sufren las ecuaciones de Maxwell-Lorentz y las relaciones constitutivas cuando se consideran las propiedades piezoeléctricas en un aislante topológico; para ello calcularemos las ecuaciones de movimiento que resultan de la ecuación (2.22), al variar dicho funcional con respecto al potencial escalar φ , las componentes A_k del potencial vectorial y las componentes u_i de la deformación elástica.

2.8 Ley de Gauss Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

En primer lugar, variemos la acción (2.22) con respecto al potencial escalar φ con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento satisfechas por dicha coordenada generalizada. Sea $\delta\varphi$ la variación del potencial escalar y δS_φ el cambio que sufre la acción debido a $\delta\varphi$. Al realizar el cambio $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ en la acción se obtiene,

$$\Rightarrow \delta S_\varphi \equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]. \quad (2.23)$$

En lo que sigue, vamos a calcular $S[\varphi + \delta\varphi]$ de tal forma que podamos obtener δS_φ . Haciendo $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ en (2.22) y despreciando los términos de orden superior $[\delta(\delta\varphi)]^2$ se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S[\varphi + \delta\varphi] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left\{ (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi + c\rho(\delta\varphi) - A_i J_i) d\Omega \\ & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(r) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \\ & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_l} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Los detalles de los cálculos se encuentran en el [Apéndice A.1](#).

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Separando los términos de la acción que dependen de φ y $\delta\varphi$ en (2.24) (es decir, $S[\varphi]$ y $S[\delta\varphi] = \delta S_\varphi$ respectivamente) se obtiene,

$$\begin{aligned} S[\varphi + \delta\varphi] = S[\varphi] &+ \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} P_i d\Omega \\ &- \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho \delta\varphi d\Omega + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega \\ &+ \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_l} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Luego, de acuerdo con (2.23), la variación δS_φ en la ecuación (2.25) es

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi = \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} d\Omega &- \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} P_i d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho \delta\varphi d\Omega \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_l} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Integrando por partes y usando el teorema de Gauss se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} P_i - \rho \delta\varphi + \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(\mathbf{x}) \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right. \\ \left. + \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x_l} \right] d\Sigma \\ - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - P_i + \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \beta_{l,ik} u_{ik} \right] (\delta\varphi) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde Σ es la hipersuperficie que contiene el cuatro volumen Ω . La integral sobre Σ se anula (Landáu & Lifschitz, 2003 II), y encontramos

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\rho}{c} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] \right. \\ \left. - \frac{1}{c} \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} \right\} \delta\varphi d\Omega. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ahora, para que δS_φ en (2.28) se anule, el termino dentro de la integral debe ser igual a cero,

$$-\frac{\rho}{c} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{1}{c} \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} = 0. \quad (2.29)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Reorganizando (2.29) se obtiene

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l}. \quad (2.30)$$

La aproximación cuasi estacionaria permite considerar que $\partial A_i / \partial t = 0$, por lo que la ecuación (2.30) se reduce a

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l}. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) es la ley de Gauss modificada para aislantes topológicos con propiedades piezoeléctricas. En la [sección 2.11](#) usaremos esta expresión para obtener algunas de las relaciones constitutivas para un cristal anisotrópico.

2.9 Ley de Ampere Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

En esta sección se muestra a detalle el cálculo de las ecuaciones de movimiento que se obtienen al variar la acción (2.22) con respecto a las coordenadas A_i del potencial vectorial. Para esto, definimos δA_i como la variación del potencial vectorial y δS_A como el cambio que sufre la acción debido a δA_i . Al realizar el cambio $A_i \rightarrow A_i + \delta A_i$ en la acción se obtiene,

$$\Rightarrow \delta S_A \equiv S[A_i + \delta A_i] - S[A_i]. \quad (2.32)$$

Ahora, vamos a calcular $S[A_i + \delta A_i]$ de tal forma que podamos obtener δS_A . Haciendo el cambio $A_i \rightarrow A_i + \delta A_i$ en (2.22) y despreciando los términos de orden superior $[\partial(\delta A_i)]^2$ se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S[A + \delta A] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 + 2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) (\varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k)) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{2}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \right) P_i d\Omega \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i - \delta A_i J_i) d\Omega \\ & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k) \right] d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega \\ & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Los detalles de los cálculos correspondientes a (2.33) se encuentran en el apéndice A-2. Separando los términos de la acción que dependen de A_i y δA_i en (2.33) (es decir, $S[A_i]$ y $S[\delta A_i] = \delta S_A$ respectivamente) se obtiene,

$$S[A + \delta A] = S[A]$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) (\varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k)) - 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \right] d\Omega \\ & -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} P_i d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\ & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Luego, de acuerdo con (2.32), la variación δS_A en (2.34) es

$$\begin{aligned} \delta S_A = & -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) (\varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k)) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \right] d\Omega \\ & -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} P_i d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\ & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{c} \frac{\partial (\delta A_i)}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j (\delta A_k) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A continuación, usamos la identidad vectorial $\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores arbitrarios) en la ecuación (2.35) (ver [Apéndice A.2](#)) lo que lleva a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta S_A = & -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left[\delta A_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta A_i \right] d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \delta A_i \frac{\partial P_i}{\partial t} d\Omega \\ & + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\ & - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \left\{ \delta A_i \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \delta A_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Note que en la ecuación (2.36) se integró por partes y se despreciaron los términos superficiales (ver [Apéndice A.2](#)).

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

Ahora bien, para que δS_A se anule, el termino sub integral en (2.36) también se debe anular,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - 4\pi \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J_i + \frac{\alpha}{\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] \\ - \frac{\alpha}{\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Reorganizando (2.37) se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - 4\pi \frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\alpha}{\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] \\ = \frac{4\pi}{c} J_i + \frac{\alpha}{\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Luego, al considerar nulas las derivadas temporales de los potenciales escalar y vectorial, la ecuación (2.38) adopta la siguiente forma

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t = \frac{4\pi}{c} J_i + \frac{\alpha}{\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.39)$$

La ecuación (2.39) es la ley de Ampere modificada para aislantes topológicos con propiedades piezoeléctricas. En la [sección 2.11](#) usaremos esta expresión para obtener algunas de las relaciones constitutivas para un cristal anisotrópico.

2.10 Ecuación de Euler Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

Siguiendo un método similar al que se usó en las secciones (2.8) y (2.9), podemos encontrar las ecuaciones de movimiento que se obtienen al variar la acción (2.22) con respecto a las coordenadas u_i del vector de deformaciones. Si δu_i es el diferencial de las coordenadas del vector de deformaciones y δS_u el cambio que sufre la acción debido a δu_i , entonces al realizar el cambio $u_i \rightarrow u_i + \delta u_i$ en la acción se obtiene,

$$\Rightarrow \delta S_u \equiv S[u_i + \delta u_i] - S[u_i]. \quad (2.40)$$

Haciendo $u_i \rightarrow u_i + \delta u_i$ en (2.22) y despreciando los términos de orden superior $[\partial(\delta u_i)]^2$ se llega a la siguiente expresión (ver [Apéndice A.3](#)),

$$\begin{aligned} S[u_i + \delta u_i] = -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \\ - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega \end{aligned} \quad (2.41)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial t} \right) d\Omega \\
& - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial (\delta u_l)}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
\end{aligned}$$

Separando los términos de la acción que dependen de u_i y δu_i en (2.41) se obtiene,

$$\begin{aligned}
S[u_i + \delta u_i] &= S[u_i] + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial t} d\Omega \\
& - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial (\delta u_l)}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Luego, de acuerdo con (2.40), la variación δS_u en (2.42) es

$$\begin{aligned}
\delta S_u &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial t} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial (\delta u_l)}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
& + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Al integrar por partes y despreciar los términos superficiales (ver [Apéndice A.3](#)), la ecuación (2.43) se reduce a

$$\delta S_u = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[-\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) - \beta_{l,ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} \right] \delta u_i d\Omega. \tag{2.44}$$

Para que δS_u se anule, el termino sub integral en (2.44) también se debe anular,

$$-\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} - \beta_{l,ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \tag{2.45}$$

Reorganizando (2.45) se obtiene

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} - \beta_{l,ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{2.46}$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

La ecuación (2.46) describe la dinámica de las deformaciones en un aislante topológico piezoeléctrico.

2.11 Relaciones Constitutivas para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

A partir de las ecuaciones (2.31), (2.39) y (2.46) podemos determinar las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos piezoeléctricos. De la ley de Gauss modificada (2.31) obtenemos la siguiente expresión

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \beta_{i,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} = 4\pi\rho. \quad (2.47)$$

En la ecuación (2.47) se observa que las propiedades topológicas del material se manifiestan en un nuevo aporte a la densidad cargas, el cual está determinado por el término $(\alpha/\pi) \partial[\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] / \partial x_i$. Por otro lado, el término $\beta_{i,ik} \partial u_{ik} / \partial x_l$ representa las densidades de carga asociadas a las polarizaciones que se producen cuando el cristal se somete a una deformación (efecto piezoeléctrico directo). Reorganizando la ecuación (2.47), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + 4\pi P_i - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - 4\pi \beta_{i,pq} u_{pq} \right] = 4\pi\rho. \quad (2.48)$$

Si definimos D_i como la i -ésima componente del desplazamiento eléctrico para aislantes topológicos piezoeléctricos, la expresión (2.48) se transforma en

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 4\pi\rho, \quad (2.49)$$

donde D_i esta dado por

$$D_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + 4\pi P_i - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - 4\pi \beta_{i,pq} u_{pq}. \quad (2.50)$$

Por otro lado, recordemos que las componentes del vector de polarización se definen como

$$P_i = -\chi_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad (2.51)$$

donde χ_{ik} es el tensor de susceptibilidad dieléctrica. Luego, reemplazando en (2.51) en (2.50) se obtiene (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024),

$$D_i = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - 4\pi \beta_{i,pq} u_{pq}, \quad (2.52)$$

donde $\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$ es el tensor de permitividad dieléctrica. En ausencia de las propiedades topológicas la ecuación (2.52) se reduce al desplazamiento eléctrico para materiales piezoeléctricos convencionales (ecuación (2.1)) (Landau & Lifshitz, 2003 VIII). De forma similar, al reorganizar la ley de Ampere modificada (2.39) se obtiene,

2. Electrodinámica en aislantes topológicos piezoeléctricos

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kst}\partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi}\varepsilon_{ijk}\partial_j\theta(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}J_i. \quad (2.53)$$

En la ecuación (2.53) observamos que la presencia del término topológico introduce un aporte a la densidad de corriente, el cual está dado por el término $(\alpha/\pi)\varepsilon_{ijk}\partial_j[\theta(\mathbf{r})\partial\varphi/\partial x_k]$. Sin embargo, las propiedades piezoeléctricas del material no producen cambios en la ecuación. Al reordenar la ecuación (2.53) se tiene

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j\left[\varepsilon_{kst}\partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right] = \frac{4\pi}{c}J_i. \quad (2.54)$$

Al definir H_k como la k -ésima componente de la intensidad magnética para aislantes topológicos piezoeléctricos, la expresión (2.54) adopta la siguiente forma ([Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024](#)),

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j H_k = \frac{4\pi}{c}J_i, \quad (2.55)$$

donde H_k es

$$H_k = \varepsilon_{kst}\partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi}\theta(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \quad (2.56)$$

En ausencia de las propiedades topológicas la ecuación (2.56) se reduce a la intensidad magnética para dieléctricos convencionales ([Landau & Lifshitz, 2003 VIII](#)). Por otra parte, de la ecuación (2.46), se obtiene

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.57)$$

donde

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm} - \beta_{l,ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}. \quad (2.58)$$

La ecuación (2.58) es la Ley de Hooke para materiales piezoeléctricos ([Lechner, 2018; Tiersten, 1969](#)). El término $\lambda_{iklm}u_{lm}$ en (2.58) está asociado con las propiedades piezoeléctricas del material, mientras que el término $\beta_{l,ik}\partial\varphi/\partial x_l$ está relacionado con los esfuerzos que se producen en el material frente a la presencia de un campo eléctrico (efecto piezoeléctrico inverso). Observe que las propiedades topológicas del material no producen cambios en la ley de Hooke.

3. AISLANTE TOPOLÓGICO PIEZOELÉCTRICO DE LA CLASE C_{6v}

En el [capítulo 2](#) se propuso una acción para un aislante topológico considerando sus propiedades elásticas y electrodinámicas. Se demostró que las polarizaciones asociadas a los estados superficiales del aislante topológico y las deformaciones del cristal reestructuran las relaciones constitutivas y producen un acoplamiento entre los campos elástico y electrodinámico que implica efectos magnetoeléctricos. Se encontró que la respuesta del material a los esfuerzos aplicados no fue alterada por las polarizaciones asociadas con los estados superficiales del aislante topológico. Por otra parte, el acoplamiento magnetoeléctrico debido al término axión reestructura el desplazamiento eléctrico de los materiales piezoeléctricos. A continuación, haremos un breve repaso de algunas de las propiedades de simetría que tienen las estructuras cristalinas con simetría hexagonal. Luego, extenderemos los resultados obtenidos en el capítulo anterior para considerar las propiedades anisotrópicas de un cristal piezoeléctrico topológico que pertenece a la clase C_{6v} .

3.1 Simetría Hexagonal (Grupo C_{6v})

Los cristales son materiales sólidos que se componen de átomos, moléculas o iones, los cuales están dispuestos en una estructura ordenada, formando una red cristalina que se extiende y se repite periódicamente en el espacio. Debido a su naturaleza periódica, las estructuras cristalinas permanecen invariantes bajo ciertas transformaciones, movimientos o intercambios. Las operaciones de simetría son el conjunto de transformaciones que al ser aplicadas sobre un conjunto de puntos del cristal hacen que la estructura permanezca invariante. Las operaciones fundamentales de simetría en estructuras cristalinas son: reflexiones frente a planos especulares, rotaciones alrededor de un eje determinado, operaciones de traslación y operaciones de inversión ([Ibach & Lüth, 2009](#); [Kittel, 2004](#); [Newnham, 2005](#)).

La operación de reflexión plana actúa de tal manera que cada punto del cristal se refleja en el otro lado del plano. El plano de reflexión o plano de simetría generalmente se denota por σ . Al aplicar una operación de reflexión dos veces (es decir σ^2), obtenemos la identidad, lo que significa que no se realiza ninguna operación de simetría. Un cristal puede tener varios planos de simetría. La línea recta vertical donde se cortan dos o más planos de simetría se conoce como eje de simetría del cristal. Si el plano contiene al eje de simetría del cristal, se denomina vertical y se designa por σ_v (ver figura 3.1(a)). De otra manera, si el plano es perpendicular al eje de simetría, se denomina horizontal y se designa por σ_h ([Landau & Lifshitz, 2003 III](#)).

Por otro lado, un cristal presenta simetría rotacional de orden n cuando permanece invariante frente a rotaciones en ángulos de $2\pi/n$ (donde n es un entero). Esto convierte al eje de rotación en un eje de simetría de orden n (ver figura 3.1(b)). Al aplicar una operación de rotación n veces (es decir $n \times 2\pi/n$), el cristal regresa a su posición inicial (obtenemos la identidad, lo que significa que no se realiza ninguna operación de simetría). Se denota C_n (en notación de Schönflies) al grupo de rotaciones alrededor de un eje de orden n (n también denota el número de planos de simetría del cristal) ([Landau & Lifshitz, 2003 III](#)).

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

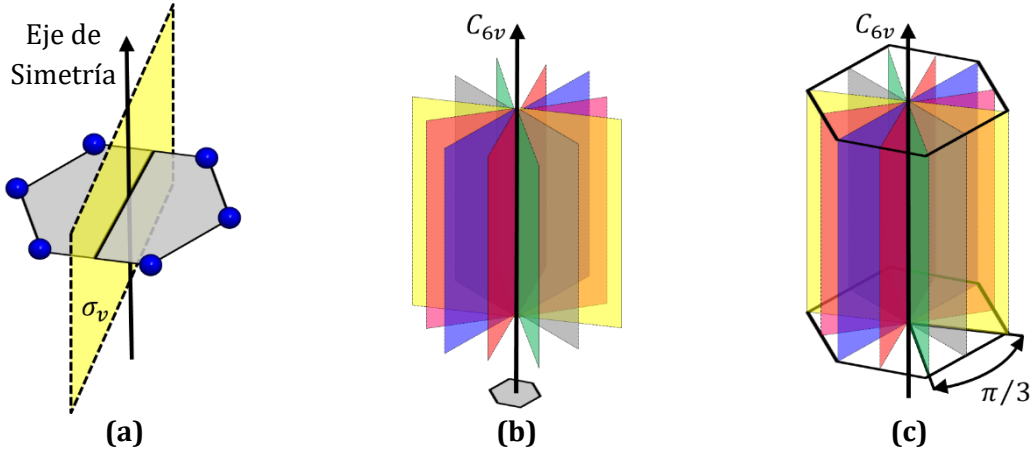


Figura 3. 1: (a) Se presenta un plano de simetría σ_v que contiene el eje de simetría del cristal. (b) Eje de simetría de orden $n = 6$ para un cristal de simetría hexagonal del grupo C_{6v} . (c) Se muestra como los seis planos especulares forman una figura hexagonal. Tres de estos planos pasan por los vértices del hexágono y forman un ángulo de $\pi/3$. El cristal presenta invarianza rotacional para ángulos de $\pi/3$. Adaptado de (Landau & Lifshitz, 2003 III)

Cuando se combina una rotación del grupo C_n y un plano de reflexión σ_v que pasa por el eje de simetría de orden n , el grupo se denota como C_{nv} . Los cristales con simetría hexagonal pertenecen al grupo C_{6v} . Esto quiere decir que tienen $n = 6$ planos σ_v , los cuales se cortan en un eje vertical de sexto orden, y son invariantes frente a rotaciones a ángulos de $\pi/3$ (ver figura 3.1(c)). Las propiedades físicas de los cristales pueden variar dependiendo de las orientaciones en el cristal; dicha dependencia se conoce como anisotropía. Las magnitudes tensoriales reflejan la anisotropía de los cristales. Así, las componentes de los tensores ε_{ik} , λ_{iklm} y $\beta_{i,pq}$ involucrados en las relaciones constitutivas (2.52), (2.56) y (2.58) dependen de la simetría del cristal (Landau & Lifshitz, 2003 III).

3.2 Permitividad Dieléctrica en Cristales C_{6v}

Como ya se ha mencionado, la permitividad dieléctrica en materiales anisotrópicos se describe mediante el tensor de segundo rango ε_{ik} . Las componentes de este tensor varían de acuerdo con las propiedades de simetría del cristal (Newnham, 2005; Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Chuanxin, 2020). En esta sección, se obtienen las componentes del tensor de permitividad dieléctrica para un cristal con simetría hexagonal.

En la figura 3.7(a) se muestran los vectores de la celda primitiva en un sistema hexagonal. El vector unitario $\mathbf{a}_3$ es perpendicular a los vectores unitarios $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, y los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ forman un ángulo $2\pi/3$ entre ellos. Para obtener las componentes de ε_{ik} establecemos un sistema de coordenadas (x, y, z) sobre el sistema de coordenadas hexagonal $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, de tal manera que el eje z está a lo largo de la orientación del vector $\mathbf{a}_3$ y el eje x está a lo largo del vector $\mathbf{a}_1$. Luego, realizamos las operaciones de simetría de reflexión y rotación sobre el nuevo sistema para ver cómo se reestructura el tensor ε_{ik} (Newnham, 2005; Chuanxin, 2020).

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

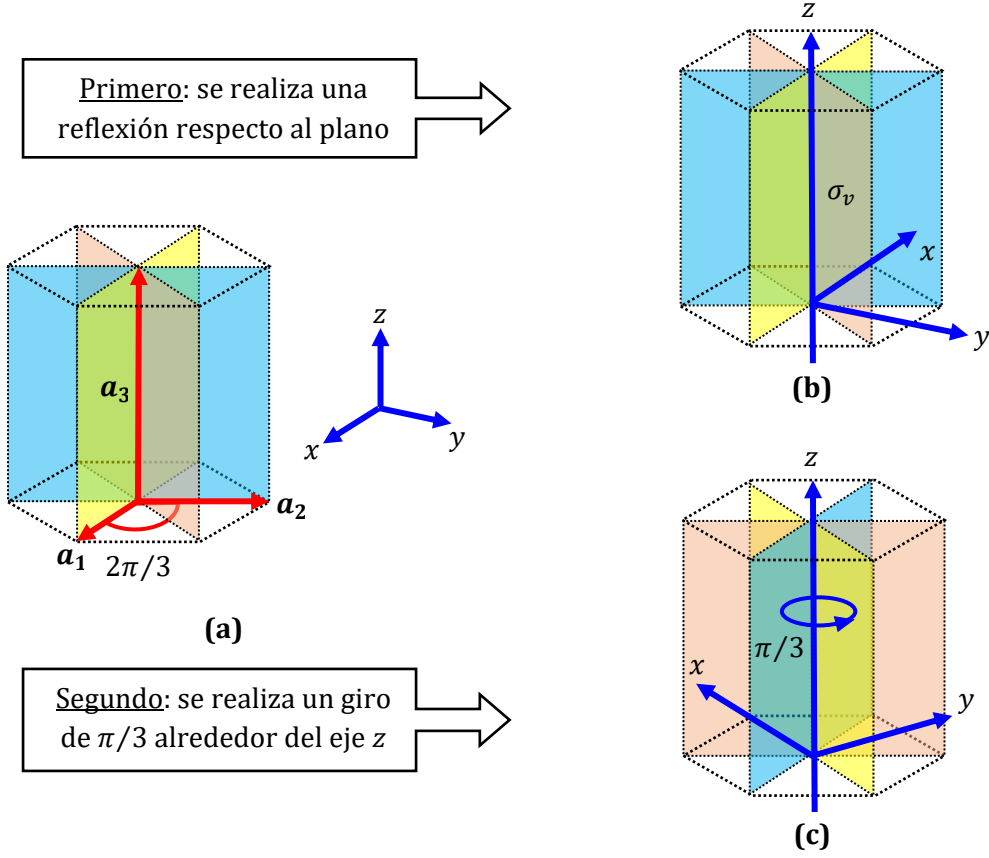


Figura 3. 2: (a) Celda de simetría hexagonal en un prisma de simetría hexagonal con $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_3$, donde $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son perpendiculares a $\mathbf{a}_3$, mientras que $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ forman un ángulo $2\pi/3$. (b) Se muestra el cristal al ser sometido a una operación de reflexión frente a un plano especular σ_v que es perpendicular al eje x . (c) Después de realizar la operación de reflexión se rota el cristal en un ángulo de $\pi/3$ alrededor del eje z . Adaptado de (Newnham, 2005; Chuanxin, 2020).

Estas operaciones las realizamos con ayuda de la siguiente transformación lineal,

$$c_o = O c O^t, \quad (3.1)$$

donde c es una propiedad física del cristal, O es una matriz (y O^t su matriz transpuesta) que representa una operación de simetría y c_o es la propiedad física del cristal después de la operación de simetría. Para que el cristal permanezca invariante bajo estas operaciones de simetría, el coeficiente c_o debe permanecer sin cambios, es decir que c_o debe ser igual c . En los cristales del grupo C_{6v} estas matrices O son

$$O_{ref} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{rot} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

En las ecuaciones (3.2), la matriz de reflexión O_{ref} se define para un plano especular σ_v perpendicular al eje x , tal como se muestra en la figura 3.2(b). La matriz O_{rot} es una matriz de rotación alrededor del eje z . Esta rotación se realiza en contra de las manecillas del reloj y en un ángulo $\pi/3$, tal como se muestra en la figura 3.2(c). A continuación, realizamos una operación de reflexión reemplazando O_{ref} en (3.1) con $c = \varepsilon$,

$$\varepsilon_{ref} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & -\varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Puesto que el tensor ε_{ik} no debe sufrir cambios después de la reflexión, se debe cumplir que $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = 0$. Así,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Luego, usamos la matriz O_{rot} para realizar una rotación en un ángulo $\pi/3$ alrededor del eje z sobre la nueva matriz ε que aparece en (3.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rot} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} + 3\varepsilon_{yy}}{4} & \frac{-\sqrt{3}\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{-\sqrt{3}\varepsilon_{xx} + \sqrt{3}\varepsilon_{yy}}{2} & \frac{3\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{4} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{zy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como ya se mencionó, el tensor ε_{ik} no debe sufrir cambios después de la rotación. Para que esto suceda, se debe cumplir que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ y $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$. Así, el tensor de permitividad dieléctrica ε_{ik} para un cristal de la clase C_{6v} tiene la siguiente forma (Landau & Lifshitz, 2003 VIII),

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

3.3 Tensor de Módulos de Elasticidad en Cristales C_{6v}

Anteriormente, vimos que el tensor de módulos de elasticidad λ_{iklm} cumple las siguientes relaciones de simetría $\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}$. Para cristales del sistema hexagonal, las componentes no nulas del tensor de módulos de elasticidad son

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xxxx} & \lambda_{xxyy} & \lambda_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{xxyy} & \lambda_{xxxx} & \lambda_{xxzz} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{xxzz} & \lambda_{xxzz} & \lambda_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{xzzx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{xzzx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy}) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{xxxx} &= \lambda_{yyyy}, & \lambda_{xxyy} &, & \lambda_{xxyy}, & \\ \lambda_{xxzz} &= \lambda_{yyzz}, & \lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} &= -2\lambda_{xyxy}, & \lambda_{xzzx} &= \lambda_{yzyz}, & \lambda_{zzzz}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La demostración de (3.7) se puede realizar mediante transformaciones matriciales similares a las que se usaron en la sección 3.2 (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Landau & Lifshitz, 2003 VII; Newnham, 2005).

3.4 Tensor Piezoeléctrico en Cristales C_{6v}

Como vimos en el capítulo anterior, la polarización es un vector y las deformaciones se escriben como un tensor de segundo rango, entonces la propiedad física que acopla estas variables está dada como un tensor de tercer rango que se conoce como tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$ (el cual es simétrico en i, k). Para cristales de la clase C_{6v} , las componentes no nulas del tensor de piezoeléctrico son

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{x,xz} & 0 & 0 & 0 & \beta_{x,zx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{y,yz} & 0 & \beta_{y,zy} & 0 \\ \beta_{z,xx} & 0 & 0 & 0 & \beta_{z,yy} & 0 & 0 & 0 & \beta_{z,zz} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde

$$\beta_{z,zz}, \quad \beta_{x,xz} = \beta_{x,zx} = \beta_{y,yz} = \beta_{y,zy}, \quad \beta_{z,xx} = \beta_{z,yy}. \quad (3.10)$$

La demostración de (3.9) también se puede realizar mediante transformaciones matriciales similares a las que se usaron en la sección 3.1 (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Newnham, 2005).

3.5 Propiedades Generales de las Ondas Elásticas en Cristales Piezoeléctricos con Propiedades Topológicas

3.5.1 Relaciones Constitutivas para un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

En el capítulo 2 se observaron los cambios que presentan las ecuaciones de Maxwell-Lorentz en cristales piezoeléctricos topológicos. Se demostró que la presencia simultánea de las propiedades piezoeléctricas y topológicas en el material se manifiestan en la introducción de nuevas fuentes de carga y de corriente, por lo que las relaciones constitutivas toman la forma

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

$$D_i = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - 4\pi \beta_{i,pq} u_{pq}, \quad (2.52)$$

$$H_k = \varepsilon_{kst} \partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad (2.56)$$

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} - \beta_{l,ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}. \quad (2.58)$$

A continuación, se muestra la forma que adoptan las ecuaciones constitutivas (2.52), (2.56) y (2.58) en un cristal que pertenece al sistema hexagonal C_{6v} . Para ello, se considera que el cristal se extiende indefinidamente en la dirección z ; por lo tanto, hay homogeneidad en esa dirección, es decir, las magnitudes físicas no dependen explícitamente de z , por lo que las derivadas con respecto a z son nulas. Adicionalmente, las componentes no nulas del tensor de permitividad dieléctrica, del tensor de módulos de elasticidad y del tensor piezoeléctrico en un cristal C_{6v} están determinadas por las expresiones (3.6), (3.8) y (3.10), respectivamente. Bajo estas consideraciones, las relaciones constitutivas (2.52), (2.56) y (2.58) en un cristal C_{6v} se escriben de la siguiente manera (ver [Apéndice B.1](#)):

-Componentes del vector desplazamiento eléctrico D_i (ver [Apéndice B.1.1](#))

$$D_x = -\varepsilon_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} - 4\pi \beta_{x,xz} \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$D_y = -\varepsilon_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} - 4\pi \beta_{y,yz} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad (3.12)$$

$$D_z = -\frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - 4\pi \left(\beta_{z,xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_{z,yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad (3.13)$$

-Componentes del vector de intensidad magnética H_k (ver [Apéndice B.1.2](#))

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.14)$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (3.15)$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad (3.16)$$

-Componentes del tensor de esfuerzos σ_{ik} (ver [Apéndice B.1.3](#))

$$\sigma_{xx} = \lambda_{xxxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{xxyy} \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \lambda_{yxyx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (3.18)$$

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \lambda_{zxxz} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_{x,xz} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda_{yyxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{yyyy} \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \lambda_{zyzy} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_{y,yz} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zzxx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (3.22)$$

Observe que las propiedades topológicas del material se exhiben en las tres componentes del desplazamiento eléctrico y en las componentes (x, y) de la intensidad magnética. En todas estas, aparece el termino $\alpha\theta(\mathbf{r})/\pi$ que acopla el potencial vectorial con el desplazamiento eléctrico en las ecuaciones (3.11)-(3.13) y el potencial escalar con la intensidad magnética en las ecuaciones (3.14)-(3.15). Por su parte, las propiedades piezoeléctricas del cristal se manifiestan solamente en las componentes del desplazamiento eléctrico y las componentes σ_{xz} y σ_{yz} del tensor de esfuerzos (ecuaciones 3.19 y 3.21).

3.5.2 Ecuaciones de Movimiento para un Cristal Piezoeléctrico Topológico Perteneciente a la Clase C_{6v}

En ausencia de fuentes de carga ρ y corrientes de conducción J_i , las ecuaciones de movimiento (2.49), (2.53) y (2.57) se reducen a

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j H_k = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (3.25)$$

Tras, reemplazar las ecuaciones (3.11)-(3.22) en (3.23)-(3.25) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de movimiento (ver [Apéndice B.2](#)):

-De la ley de Gauss (3.23) se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ + 4\pi \left(\beta_{x,xz} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{y,yz} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

-De la ley de Ampere (3.24) se obtiene

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

$$-\nabla^2 A_x = 0, \quad (3.27)$$

$$-\nabla^2 A_y = 0, \quad (3.28)$$

$$-\nabla^2 A_z - \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.29)$$

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Note que el término topológico $\theta(\mathbf{r})$ solo se manifiesta en la ecuación diferencial (3.29) para la componente z del potencial escalar.

-De la ecuación (3.25) se tiene

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \lambda_{xxxx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda_{xxyy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \lambda_{yxxy} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right), \quad (3.30)$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \lambda_{yxxy} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + \lambda_{yyxx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \lambda_{yyyy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}, \quad (3.31)$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \lambda_{zzxx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \lambda_{zyzy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \beta_{x,xz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta_{y,zy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (3.32)$$

Aunque aparentemente los efectos topológicos no aparecen de manera explícita en estas relaciones, cabe anotar que en la ecuación (3.32) dichos efectos se manifiestan de manera implícita a través de la presencia del potencial escalar φ , el cual, en virtud de (3.26), si es afectado por las propiedades topológicas.

3.5.3 Ondas de Rayleigh y Ondas de Bleustein-Gulyaev en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

Las deformaciones perpendiculares al eje de simetría (componentes u_x y u_y) se encuentran acopladas a través de las ecuaciones (3.30) y (3.31). Este sistema de ecuaciones permite describir el comportamiento de las ondas acústicas superficiales en sólidos elásticos ([Landau & Lifshitz, 2003 VII](#)).

$$\left(\lambda_{xxxx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{xxyy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_x + (\lambda_{xyxy} + \lambda_{xxyy}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.30)$$

$$\left(\lambda_{yxxy} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{yyyy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_y + (\lambda_{yyxx} + \lambda_{yxyx}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.31)$$

Las ondas acústicas superficiales (surface acoustic waves o SAW) fueron predichas por primera vez por John William Strutt (Lord Rayleigh) en el año 1885. En su trabajo, investigó el comportamiento de las ondas sobre la superficie plana de un sólido elástico, isotrópico, homogéneo e infinito, calculó analíticamente su velocidad y dedujo el movimiento de las partículas en el material cuando la onda se propaga ([Rayleigh, 1885](#)).

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

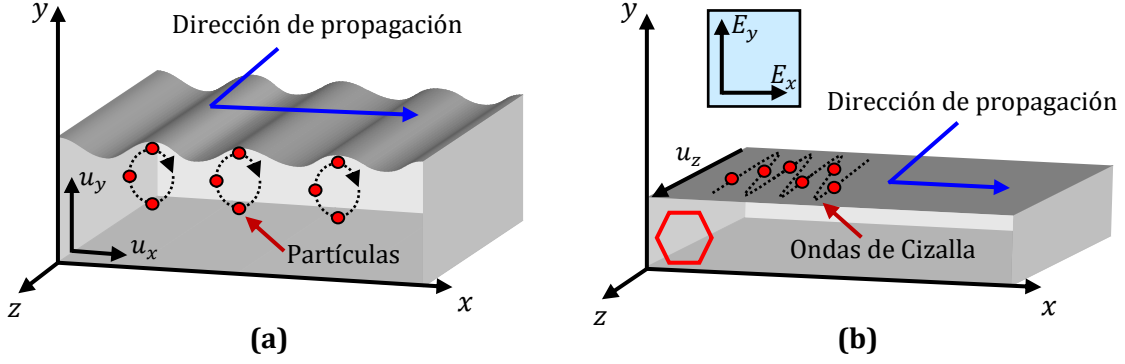


Figura 3.3: **(a)** Propagación de una onda acústica superficial de Rayleigh en un sólido elástico. **(b)** Propagación de una onda superficial de Bleustein Gulyaev en un piezoeléctrico.

La figura 3.3(a) muestra un esquema simple de la propagación de las ondas de Rayleigh. El plano (x, y) es el plano sagital de la onda y su dirección de propagación es paralela al eje x . Cuando la onda se propaga produce desplazamientos mecánicos (u_x y u_y) en el plano sagital. De esta manera, las ondas de Rayleigh son una combinación entre una onda de corte vertical (shear vertical o SV) y una onda longitudinal.

Por otro lado, las deformaciones paralelas al eje de simetría (componente u_z), el potencial escalar φ y la componente A_z del potencial vectorial están acopladas a través de las ecuaciones (3.26), (3.29), y (3.32). Si no se consideran las propiedades topológicas del material ($\theta \rightarrow 0$), entonces la ecuación (3.29) se desacopla de (3.26). El nuevo par de ecuaciones que se obtiene describe el comportamiento de los modos superficiales de Bleustein-Gulyaev (B-G) en piezoeléctricos convencionales (Bleustein, 1968; Gulyaev, 1969).

$$-4\pi \left(\beta_{x,xz} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{y,yz} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_z - \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.26)$$

$$\nabla^2 A_z + \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0, \quad (3.29)$$

$$\left(\lambda_{zxxz} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{zyyz} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \beta_{x,zx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta_{y,zy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.32)$$

Los modos (B-G) son ondas acústicas superficiales de cizalla (shear horizontal surface acoustic waves o SH-SAW) que se acoplan con un campo eléctrico. Debido a esto, solo pueden propagarse en la superficie de materiales piezoeléctricos homogéneos. En la figura 3.3(b) se muestra un esquema sencillo de la propagación de las ondas Bleustein Gulyaev en un material piezoeléctrico habitual. Una vez más, el plano sagital de la onda se forma por el vector de propagación (el cual es paralelo al eje x) y la normal a la superficie. En este caso, cuando la onda se propaga produce una deformación u_z que es paralela al eje de simetría del cristal y es

3. Aislante topológico piezoeléctrico de la clase C_{6v}

perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por su parte, el campo eléctrico yace sobre el plano sagital y sus componentes (E_x y E_y) se acoplan con las deformaciones u_z .

Las ecuaciones (3.26), (3.29), y (3.32) describen los modos de Bleustein Gulyaev modificados por las propiedades topológicas del material. En los capítulos siguientes, haremos uso de estos resultados para estudiar las ondas B-G en aislantes topológicos piezoeléctricos y se investigará a detalle su comportamiento cuando se consideran diferentes condiciones de contorno.

4. ONDAS DE BLEUSTEIN-GULYAEV EN AISLANTES TOPOLÓGICOS PIEZOELÉCTRICOS

En el [capítulo 2](#), se propuso una acción para estudiar las propiedades elasto-electrodinámicas de un aislante topológico piezoeléctrico no magnetizable. Luego, se obtuvieron las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas del material variando dicha acción con respecto a los campos elástico y electrodinámico. En el [capítulo 3](#) extendimos estos resultados para considerar las propiedades anisotrópicas de un cristal piezoeléctrico topológico de la clase C_{6v} . Se encontró que las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de las ondas B-G se reestructuran al considerar las propiedades topológicas del material. En este capítulo, estudiaremos la relación de dispersión y la velocidad de fase de las ondas B-G cuando colocamos un aislante topológico piezoeléctrico C_{6v} en contacto con otro aislante topológico y con vacío.

4.1 Aislantes Topológicos de ZnO/CdO

La wurtzita ZnO es el material líder para aplicaciones de dispositivos piezotrónicos. Este semiconductor piezoeléctrico permite sintonizar y controlar el transporte de portadores en nanoestructuras a través del piezopotencial que se induce cuando se aplica un esfuerzo mecánico en el cristal. Además, es un semiconductor relativamente fácil de sintetizar (en comparación con otros materiales de su clase) con propiedades y morfologías que cumplen con los estándares para el diseño de diferentes dispositivos.

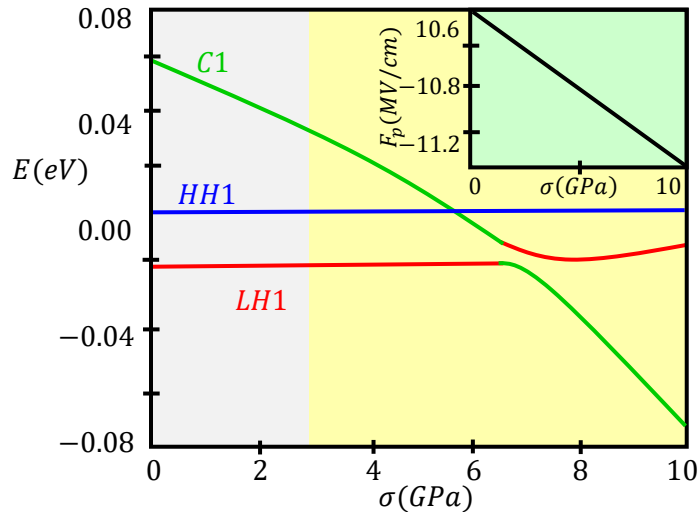


Figura 4. 1: Comportamiento de las bandas de energía en un pozo de ZnO/CdO con respecto al esfuerzo σ . En el inserto superior derecho se muestra el campo de polarización en función del esfuerzo aplicado. La línea verde es la banda conducción $C1$, la línea azul es la banda $HH1$ (heavy hole) y la línea roja es la banda $LH1$ (light hole). Adaptado de (Hu & Zhang, 2020).

Actualmente, se han propuesto dispositivos piezotrónicos (dispositivos electrónicos que funcionan con efecto piezoeléctrico) basados en pozos cuánticos de aislantes topológicos de ZnO/CdO , en los cuales es posible controlar los estados de conducción para llevar a cabo la transición de semiconductor convencional a aislante topológico (Hu & Zhang, 2020). En la figura 5.1 se muestran diferentes bandas de energía en un pozo de ZnO/CdO en función del esfuerzo aplicado σ : la línea verde corresponde a las energías E de la primera banda de conducción $C1$, mientras que a la banda $HH1$ (heavy hole) le corresponde la línea azul y la banda $LH1$ (light hole) se representa por la línea roja. Obsérvese que se presentan dos cruces de $C1$ con las bandas $HH1$ y $LH1$ cuando el esfuerzo es igual a de $5,5GPa$ y $6,5GPa$, respectivamente. Estos cruces de bandas (o inversión de bandas) se dan por el incremento de la intensidad del campo de polarización F_p dentro del pozo debido al campo piezoeléctrico inducido por el esfuerzo aplicado (ver el inserto superior derecho en la figura 5.1). Al incrementar el esfuerzo a $10GPa$, la intensidad del campo crece monótonamente de $10,6MV/cm$ a $11,3MV/cm$. Este campo de polarización reduce la brecha que existe entre la banda $C1$ con $HH1$ y $LH1$. Por encima de los $6,6GPa$, la banda $HH1$ se transforma en la banda de energía más alta y $C1$ se transforma en la banda de energía más baja. Esta inversión de bandas en el pozo indica que existe una transición de fase topológica desde un aislante topológico trivial a un aislamiento topológico no trivial (Hu & Zhang, 2020). Cabe esperar que a esta transición estén asociadas propiedades físicas novedosas, en especial, en las características ópticas y elásticas del material. Por esta razón, en este capítulo estudiaremos los modos de propagación de Bleustein-Gulyaev en la superficie de un aislante topológico piezoeléctrico e ilustraremos nuestros resultados en los materiales ZnO/CdO y GaN/InN (Dan, et al., 2018).

4.2 Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Aislante Topológico

Los resultados que se obtuvieron en los capítulos 2 y 3 se pueden utilizar para estudiar el acople de las ondas elásticas con los campos electromagnéticos en sistemas que presentan simultáneamente propiedades topológicas y piezoeléctricas. Para este propósito, consideremos un cristal piezoeléctrico no magnetizable de la clase C_{6v} y densidad de masa ρ_m , el cual posee propiedades topológicas y está caracterizado por un parámetro topológico $\theta^{(1)}$. El cristal se extiende indefinidamente en la dirección z , ocupa la región $y < 0$ y limita con el plano xz , siendo z el eje de simetría del cristal; ello implica que el sistema es homogéneo en esta dirección. La región $y > 0$ es ocupada por un aislante topológico no magnetizable de parámetro topológico $\theta^{(2)}$ (la geometría del sistema se ilustra en la Figura 4.2). De acuerdo con lo anterior, el término topológico varía en el eje y de la siguiente manera

$$\theta(y) = \theta^{(1)}H(-y) + \theta^{(2)}H(y), \quad (4.1)$$

donde $H(y)$ es la función paso de Heaviside y $\theta^{(i)}$ es el término topológico en cada uno de los medios. Adicionalmente, las componentes no nulas del tensor de permitividad dieléctrica ϵ_{ik} , el tensor de módulos de elasticidad λ_{iklm} y el tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$ en el cristal C_{6v} que ocupa la región $y < 0$ son

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon^{(1)}, \quad \lambda_{xzzx} = \lambda_{yzyz} = \lambda^{(1)}, \quad \beta_{x,xz} = \beta_{y,yz} = \beta^{(1)}. \quad (4.2)$$

Los parámetros (4.2) se definieron bajo las condiciones de simetría (3.6), (3.8) y (3.10). Por su parte, el aislante topológico que ocupa la región $y > 0$ tiene una permitividad dieléctrica $\epsilon^{(2)}$.

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

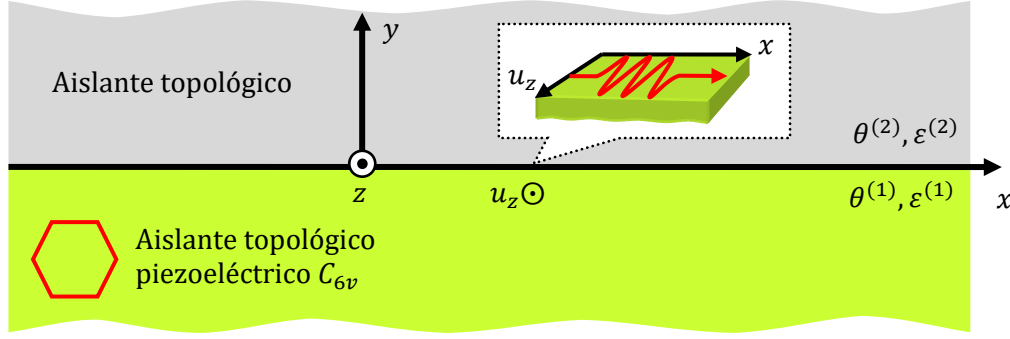


Figura 4. 2: Representación esquemática de un cristal de aislante topológico piezoeléctrico semi infinito de parámetro topológico $\theta^{(1)}$ en contacto con un aislante topológico de parámetro topológico $\theta^{(2)}$. El cristal piezoeléctrico pertenece a la clase C_{6v} y su eje de simetría es paralelo al eje z . La dirección de propagación de la onda es paralela al eje x . En el inserto se observa que la superficie de contacto descansa sobre el plano xz y la componente u_z del vector de deformaciones es perpendicular a la dirección de propagación de las ondas, esto da lugar a una onda superficial de corte.

Por otro lado, las deformaciones que sufre el cristal son tales que

$$u_i^{(1)} = u_z^{(1)} \delta_{iz}, \quad (4.3)$$

donde $u_z^{(1)}$ es la componente z del vector de deformaciones en el cristal y δ_{iz} es la función delta de Kronecker. La condición (4.3) reduce considerablemente las componentes del tensor de deformaciones u_{lm} de la siguiente manera,

$$u_{xx}^{(1)} = u_{yy}^{(1)} = u_{xy}^{(1)} = u_{zz}^{(1)} = 0, \quad (4.4)$$

$$u_{zx}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.5)$$

$$u_{zy}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y}, \quad (4.6)$$

donde $u_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)$ tal como se mostró en la sección 2.3. La homogeneidad que existe a largo del eje z implica que las magnitudes físicas no dependen explícitamente de z , es decir que las derivadas con respecto a z son nulas, por lo que $\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial z} = 0$ ($i = x, y, z$) en las ecuaciones (4.4)-(4.6).

Ahora, las deformaciones que sufre el cristal (las cuales están determinadas por las componentes no nulas del tensor de deformaciones) también están asociadas a ciertos esfuerzos mecánicos a los que es sometido. Las direcciones en las que actúan estos esfuerzos están definidas por el tensor de esfuerzos $\sigma_{ik}^{(1)}$, cuyas componentes se definen a partir de las ecuaciones (3.17)-(3.22). Para obtener las componentes de este tensor, reemplazamos las

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

ecuaciones (4.4)-(4.6) en las ecuaciones (3.17)-(3.22). Con todo esto, las componentes del tensor de esfuerzos $\sigma_{ik}^{(1)}$ en el cristal de la región $y < 0$ se escriben de la siguiente manera

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{yx}^{(1)} = 0, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{zx}^{(1)} = \lambda_{zxxz} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \beta_{x,xz} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} = \lambda^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \beta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{zy}^{(1)} = \lambda_{zyzy} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \beta_{y,yz} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} = \lambda^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \beta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}, \quad (4.9)$$

donde $\varphi^{(1)}$ es el potencial escalar en la región $y < 0$, y los parámetros $\lambda^{(1)}$ y $\beta^{(1)}$ están definidos por (4.2) (las expresiones (4.7)-(4.9) hacen parte del grupo de relaciones constitutivas que usaremos en secciones posteriores). Para estudiar los efectos de acople entre la componente $u_z^{(1)}$ del vector de deformaciones y el potencial escalar $\varphi^{(1)}$ debemos usar la ley de Gauss modificada para aislantes topológicos piezoeléctricos (3.26) y la ecuación (3.32) que describe la dinámica de la componente z de las deformaciones en el cristal. Al reescribir ambas ecuaciones se obtiene

$$\nabla^2 \psi^{(1)} - \frac{\alpha}{\varepsilon^{(1)} \pi} \frac{\partial \theta(y < 0)}{\partial y} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad (4.10)$$

$$\rho_m \ddot{u}_z^{(1)} = \lambda^{(1)} \nabla^2 u_z^{(1)} - \beta^{(1)} \nabla^2 \varphi^{(1)}, \quad (4.11)$$

donde $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$ es el potencial re-normalizado por las propiedades piezoeléctricas del material, $\theta(y < 0)$ es el parámetro topológico en la región $y < 0$, $A_z^{(1)}$ es la componente z del potencial vectorial en el cristal, $\ddot{u}_z^{(1)} = \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial t^2}$ y $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$. Puesto que, la función $\theta(y)$ está dada por la expresión (4.1), entonces la ecuación (4.10) se simplifica

$$\nabla^2 \psi^{(1)} = 0, \quad (4.12)$$

donde $\frac{\partial}{\partial y} \theta(y < 0) = \frac{\partial}{\partial y} \theta^{(1)} = 0$. De forma análoga, la componente $A_z^{(1)}$ para el potencial vectorial en el cristal, la cual está determinada por la ecuación diferencial (3.29), se reduce a

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0, \quad (4.13)$$

donde $\frac{\partial}{\partial y} \theta(y < 0) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(y < 0) = \frac{\partial}{\partial y} \theta^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \theta^{(1)} = 0$, debido a (4.1). Al combinar las ecuaciones (4.11) y (4.12) se obtiene una nueva ecuación que permite describir las deformaciones $u_z^{(1)}$ en presencia de las propiedades piezoeléctricas, la cual se escribe como

$$\rho_m \ddot{u}_z^{(1)} = \bar{\lambda}^{(1)} \nabla^2 u_z^{(1)}. \quad (4.14)$$

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

El parámetro $\bar{\lambda}^{(1)}$ en (4.14) es el módulo de elasticidad endurecido por las propiedades piezoeléctricas del material y es igual a $\lambda^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}}$. Las ecuaciones diferenciales (4.12), (4.13) y (4.14) definen apropiadamente el comportamiento de $\varphi^{(1)}$, $A_z^{(1)}$ y $u_z^{(1)}$ en la región $y < 0$ del sistema que se presenta en la figura 4.1. Por otra parte, recordemos que la región $y > 0$ es ocupada por un aislante topológico no magnetizable de permitividad dieléctrica $\varepsilon^{(2)}$. Este material no posee propiedades piezoeléctricas y como una primera aproximación se considera que tampoco tiene propiedades elásticas. En consecuencia, las ecuaciones de movimiento que se consideran son

$$-\varepsilon^{(2)}\nabla^2\varphi^{(2)} + \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\theta(y > 0)\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta(y > 0)\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y}\right)\right] = 0 \quad (4.159)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} + \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{\partial\theta(y > 0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial\theta(y > 0)}{\partial y}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}\right] = 0 \quad (4.16)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$, $\varphi^{(2)}$ es el potencial escalar y $A_z^{(2)}$ es la componente z potencial vectorial en la región $y > 0$. Observe que las expresiones (4.15) y (4.16) se pueden obtener de (3.26) y (3.29). En virtud de (4.1) las ecuaciones (4.15) y (4.16) se convierten en

$$\nabla^2\varphi^{(2)} = 0, \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0. \quad (4.18)$$

Por último, como el aislante topológico en $y > 0$ no tiene propiedades elásticas, entonces los esfuerzos mecánicos en este material son nulos, es decir que $\sigma_{ik}^{(2)} = 0$. De esta manera, decimos que el aislante topológico piezoeléctrico es libre de esfuerzos por encima de la superficie.

4.3 Estructura de los Campos en un Aislante Topológico Piezoeléctrico y en un Aislante Topológico

Debido a la homogeneidad del sistema en la dirección x , las ecuaciones diferenciales involucradas en las ecuaciones (4.12)-(4.14), (4.17) y (4.18) tienen soluciones en forma de ondas libres $e^{i(kx-\omega t)}$, donde ω es la frecuencia y k es el vector de onda. Por lo tanto, los campos en el aislante topológico piezoeléctrico se pueden escribir como (ver [Apéndice C.1](#))

$$\varphi^{(1)} = \left[Be^{ky} - \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}Ae^{ky}\right]e^{i(kx-\omega t)}, \quad (4.19)$$

$$A_z^{(1)} = De^{ky}e^{i(kx-\omega t)}, \quad (4.20)$$

$$u_z^{(1)} = Ae^{ky}e^{i(kx-\omega t)}. \quad (4.21)$$

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

Los parámetros B , D y A son las amplitudes de los campos en la región $y < 0$. La magnitud κ determina la distribución de los campos elásticos en la dirección paralela al eje y . Al reemplazar, la ecuación (4.19) en (4.14) encontramos que κ y k satisfacen la siguiente relación

$$\kappa^2 = k^2 - \frac{\omega^2 \rho_m}{\bar{\lambda}^{(1)}}. \quad (4.22)$$

Por otra parte, los campos en el aislante topológico son (ver [Apéndice C.1](#))

$$\varphi^{(2)} = C e^{-ky} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.23)$$

$$A_z^{(2)} = E e^{-ky} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.24)$$

donde C y E son las amplitudes de los campos en la región $y > 0$. Observe que las soluciones (4.19)-(4.21) se anulan cuando $y \rightarrow -\infty$, mientras que las soluciones (4.23) y (4.24) se anulan cuando $y \rightarrow +\infty$. Con esto se asegura la convergencia de los campos en la interface que separa los dos materiales.

4.4 Relaciones Constitutivas en la Interface entre un Aislante Topológico Piezoeléctrico y un Aislante Topológico

Para estudiar el comportamiento que tienen los campos en el sistema mostrado en la figura 4.2, debemos considerar su continuidad en la interface que separa el aislante topológico piezoeléctrico del aislante topológico. Para esto, es necesario escribir las relaciones constitutivas en cada uno de los medios. Como ya se mencionó en la sección 4.2, las ecuaciones constitutivas que vinculan las tensiones $\sigma_{ik}^{(1)}$ con $u_z^{(1)}$ y $\varphi^{(1)}$ en la región $y < 0$ están dadas por las expresiones (4.7)-(4.9), mientras que el desplazamiento eléctrico $D_i^{(1)}$ y la intensidad magnética $H_k^{(1)}$ relacionan $u_z^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ y $A_z^{(1)}$ tal como se muestra a continuación

$$D_x^{(1)} = -\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} - 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y}, \quad (4.25)$$

$$D_y^{(1)} = -\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} - 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$H_x^{(1)} = \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.27)$$

$$H_y^{(1)} = -\frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}. \quad (4.28)$$

Las ecuaciones (4.25)-(4.28) se obtienen de (3.11)-(3.16) con ayuda de las consideraciones (4.1) y (4.2).

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

Por otro lado, las relaciones constitutivas que asocian el desplazamiento eléctrico $D_i^{(2)}$ y la intensidad magnética $H_k^{(2)}$ con $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ en la región $y > 0$ son

$$D_x^{(2)} = -\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y}, \quad (4.29)$$

$$D_y^{(2)} = -\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.30)$$

$$H_x^{(2)} = \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.31)$$

$$H_y^{(2)} = -\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y}. \quad (4.32)$$

Estas ecuaciones son las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos (Hasan & Kane, 2010; Luo, 2019) y se pueden obtener como un caso particular de (3.11)-(3.16) cuando no se consideran las propiedades elásticas y piezoeléctricas del material.

4.5 Relación de Dispersión para las Ondas Bleustein-Gulyaev en un Aislante Topológico Piezoeléctrico

A continuación, analizaremos el comportamiento que tienen los potenciales en la interface que separa el aislante topológico piezoeléctrico del aislante topológico. Para ello, tendremos en consideración las siguientes condiciones de continuidad en la superficie $y = 0$ (Landau & Lifshitz, 2003 VIII; Lechner, 2018):

$$\begin{aligned} D_y^{(2)} \Big|_{y=0} &= D_y^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad H_x^{(2)} \Big|_{y=0} = H_x^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad \sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)} \Big|_{y=0}, \\ A_z^{(2)} \Big|_{y=0} &= A_z^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad \varphi^{(2)} \Big|_{y=0} = \varphi^{(1)} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para evaluar las relaciones de continuidad (4.33) debemos combinar las soluciones (4.19)-(4.21), (4.23) y (4.24) con las relaciones constitutivas (4.26), (4.27), (4.30), (4.31) y (4.9). De esta manera se obtiene (ver Apéndice C.2)

- Para la componente y del desplazamiento eléctrico $D_y^{(2)} \Big|_{y=0} = D_y^{(1)} \Big|_{y=0}$

$$\varepsilon^{(1)} k B + \varepsilon^{(2)} k C - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} i k D + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i k E = 0. \quad (4.34)$$

- Para la componente x de la intensidad magnética $H_x^{(2)} \Big|_{y=0} = H_x^{(1)} \Big|_{y=0}$

$$\frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} i \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} k A - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} i k B + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i k C + k D + k E = 0. \quad (4.35)$$

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

- Para la componente zy de los esfuerzos $\sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)} \Big|_{y=0}$

$$\bar{\lambda}^{(1)} \kappa A - \beta^{(1)} k B = 0. \quad (4.36)$$

(donde se consideró que el aislante topológico piezoeléctrico de la región $y < 0$ es libre de esfuerzos por encima de la superficie, lo que implica que $\sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=h} = 0$).

- Para la componente z del potencial vectorial $A_z^{(2)} \Big|_{y=0} = A_z^{(1)} \Big|_{y=0}$

$$D - E = 0. \quad (4.37)$$

- Para el potencial escalar $\varphi^{(2)} \Big|_{y=0} = \varphi^{(1)} \Big|_{y=0}$

$$\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} A - B + C = 0. \quad (4.38)$$

Las ecuaciones (4.34)-(4.38) conducen al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas 3×3 para las amplitudes A , C y D (ver [Apéndice C.3](#)):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)}} & \varepsilon^{(2)} k & \delta^{(12)} ik \\ \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} & 1 & 0 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} \right) ik & 0 & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0, \quad (4.39)$$

donde $\delta^{(12)} = \frac{\alpha}{\pi} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)})$ contiene la diferencia de los parámetros topológicos de los medios. Para que el sistema (4.39) tenga solución no trivial el determinante de la matriz se debe anular

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2k \end{vmatrix} - \varepsilon^{(2)} k \begin{vmatrix} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} & 0 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} \right) ik & -2k \end{vmatrix} \\ & + \delta^{(12)} ik \begin{vmatrix} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} & 1 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)} \kappa}{\beta^{(1)} k} \right) ik & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

De este modo, entre las magnitudes κ y k tiene lugar la siguiente relación (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024) (ver Apéndice C.3),

$$\kappa = \Lambda_\delta k, \quad \Lambda_\delta = \frac{4\pi\beta^{(1)2}}{\bar{\lambda}^{(1)}\varepsilon^{(1)}} \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2}{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2}, \quad (4.41)$$

donde Λ_δ es el factor de acople electromecánico en el aislante topológico piezoeléctrico, el cual determina la capacidad que tiene el material de transformar energía mecánica en energía eléctrica (Tiersten, 1969; Uchino, 2017). Observe que el término topológico introduce una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina α que está dada por el termino $(\delta^{(12)})^2 = \left[\frac{\alpha}{\pi}(\theta^{(2)} - \theta^{(1)})\right]^2$. Esta corrección también se manifiesta en la relación de dispersión de las ondas. Al reemplazar (4.41) en (4.22) se obtiene (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024),

$$\omega = k \sqrt{\frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\rho_m} (1 - \Lambda_\delta^2)}. \quad (4.42)$$

La ecuación (4.42) es la relación de dispersión de las ondas superficiales de Bleustein-Gulyaev (B-G) en un piezoeléctrico con propiedades topológicas no triviales. La ecuación (4.42), implica que la velocidad de fase de las ondas B-G en el aislante topológico piezoeléctrico es (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024)

$$v_g = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\rho_m} (1 - \Lambda_\delta^2)}. \quad (4.43)$$

Estos resultados muestran que la presencia del término topológico en el factor de acople electromecánico Λ_δ también introduce correcciones $(\delta^{(12)})^2$ en la relación de dispersión (4.42) y la velocidad de fase (4.43) de las ondas B-G. Tenga en cuenta que, si se desprecian las propiedades topológicas de los materiales en ambas regiones y adicionalmente hacemos $\varepsilon^{(2)} = 1$, entonces las ecuaciones (4.41)-(4.43) se reducen a las ecuaciones que se obtuvieron en (Bleustein, 1968; Gulyaev, 1969) para materiales piezoeléctricos convencionales.

La Figura 4.3 muestra las relaciones de dispersión de las ondas de Bleustein-Gulyaev en los aislantes topológicos piezoeléctricos de *GaN/InN* (línea punteada roja) y el *ZnO/CdO* (línea solida azul). Las propiedades de estos materiales se consolidan en la Tabla 4.1.

Tabla 4. 1: Propiedades materiales del <i>ZnO</i> y el <i>GaN</i> (Madelung, 2004; Crisler, et al., 1968; O. Ambacher, et al., 1999)				
Material	$\varepsilon^{(1)}$	$\rho_m(g/cm^3)$	$\lambda^{(1)}(dyn/cm^2)$	$\beta^{(1)}(dyn/statC)$
<i>ZnO</i>	8.6	5.61	443×10^9	10.5×10^4
<i>GaN</i>	9.5	6.1	1.01×10^{12}	9×10^4

4. Ondas de Bleustein-Gulyaev en aislante topológicos piezoeléctricos

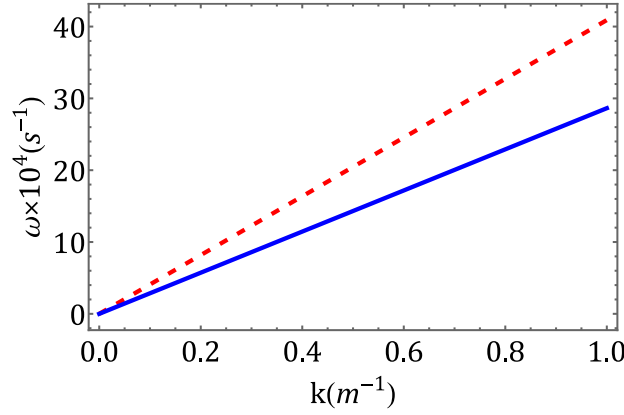


Figura 4. 3: Relaciones de dispersión para los modos Bleustein-Gulyaev en la superficie de un aislante topológico piezoeléctrico con parámetro $\theta^{(1)} = \pi$ en contacto con el vacío ($\theta^{(2)} = 0, \varepsilon^{(2)} = 1$). Línea punteada roja: *GaN*. Línea sólida azul: *ZnO* (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024).

En la Figura 4.3 se puede observar que la frecuencia crece más rápidamente en *GaN* que en *ZnO*. Esto se debe a que, según los parámetros de la Tabla 4.1 y la relación (4.43), la velocidad de fase en *GaN* es un orden de magnitud mayor que en *ZnO*.

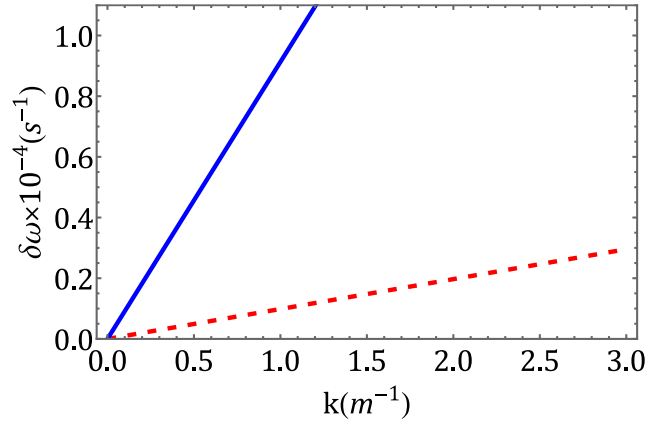


Figura 4. 4: Correcciones inducidas por el parámetro topológico sobre las relaciones de dispersión. Línea discontinua roja: *GaN*. Línea sólida azul: *ZnO* (Rojas Vallecilla & Granada Echeverri, 2024).

Por otro lado, la Figura 4.4 muestra que las correcciones inducidas por el parámetro topológico en las relaciones de dispersión crecen con el vector de onda. Además, se observa que la corrección topológica crece más rápidamente en *ZnO*. Este comportamiento está relacionado con el hecho de que la corrección considerada depende en gran medida de la magnitud inversa de la permitividad dieléctrica del material involucrado.

5. MODOS DE PROPAGACIÓN EN UNA PLACA PIEZOELÉCTRICA FINITA DE AISLANTE TOPOLÓGICO

En el capítulo anterior, se demostró que el factor de acople electromecánico de las ondas Bleustein-Gulyaev en un aislante topológico piezoeléctrico sufre una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina cuando se considera el parámetro topológico del cristal. Estos cambios se ven reflejados directamente en la relación de dispersión y la velocidad de fase de las ondas.

En este capítulo, estudiaremos algunos modos de propagación de onda en una placa piezoeléctrica C_{6v} que tiene una topología no trivial. Se demuestra que los modos guiados piezoeléctricos electro elásticos antisimétricos y simétricos en la placa experimentan una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina, la cual está asociada con las propiedades topológicas del material.

5.1 Configuración y Campos en una Placa de Aislante Topológico Piezoeléctrico

En la figura 5.1 se considera una placa de espesor $2h$ compuesta por un cristal de aislante topológico piezoeléctrico de densidad de masa $\rho_m^{(2)}$, parámetro topológico $\theta^{(2)}$, no magnetizable y que además pertenece a la clase C_{6v} . La disposición del sistema es tal, que la placa ocupa la región $-h \leq y \leq h$ y el eje de simetría del cristal es paralelo al eje z . Adicionalmente, dentro de la placa las componentes no nulas de los tensores ε_{ik} , λ_{iklm} y $\beta_{l,ik}$ están dadas de la siguiente manera

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon^{(2)}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = \lambda^{(2)}, \quad \beta_{x,xz} = \beta_{y,yz} = \beta^{(2)}, \quad (5.1)$$

donde $\varepsilon^{(2)}$ es la permitividad dieléctrica relativa, $\lambda^{(2)}$ el módulo de elasticidad y $\beta^{(2)}$ el coeficiente piezoeléctrico (estos parámetros se definieron a partir de las condiciones de simetría (3.6), (3.8) y (3.10)). A su vez, las regiones $y < -h$ e $y > h$ están ocupadas por vacío, es decir que tienen permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética relativas iguales a uno ($\varepsilon^{(1)} = \mu^{(1)} = 1$).

Por otra parte, las dos interfaces que separan la placa y el vacío están definidas por dos superficies planas que son paralelas al plano xz , y cuya normal es paralela al eje y . En las direcciones x y z hay homogeneidad; esto implica que las componentes x y z de los vectores de onda en los dos medios se conservan. Sin embargo, puesto que el eje de simetría del cristal se encuentra en la dirección z , se tiene que $\partial_z = ik_z = 0$. Adicionalmente, las deformaciones en la placa son tales que $u_i^{(2)} = u_z^{(2)} \delta_{iz}$ (donde $u_z^{(2)}$ es la componente z del vector de deformaciones en la región $-h \leq y \leq h$ y δ_{iz} es la función delta de Kronecker), lo que implica que las componentes del tensor de deformaciones $u_{lm}^{(2)}$ y del tensor de esfuerzos $\sigma_{ik}^{(2)}$ están dadas por las ecuaciones (4.4)-(4.6) y (4.7)-(4.9), respectivamente.

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

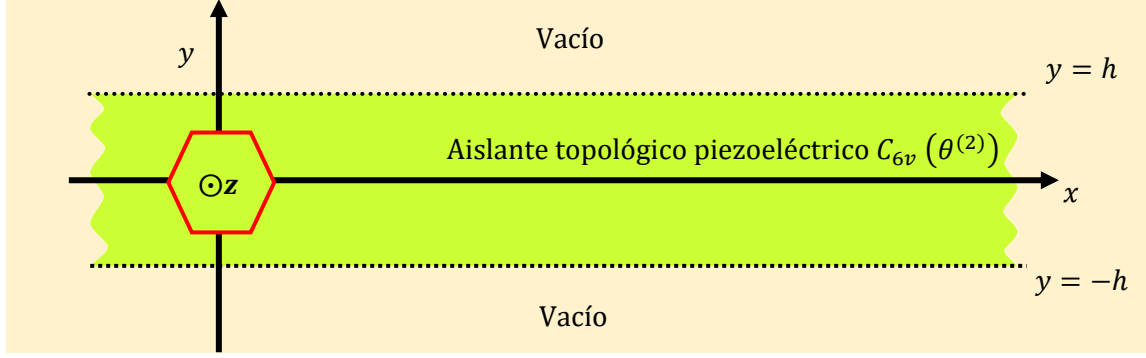


Figura 5. 1: Representación esquemática de una placa finita de aislante topológico piezoeléctrico de espesor $2h$ y parámetro topológico $\theta^{(2)}$. La placa pertenece a la clase C_{6v} , su eje de simetría es paralelo al eje z y está rodeada por vacío.

El acople entre el potencial escalar, la componente z del potencial vectorial y la componente z de las deformaciones está dado por las ecuaciones (3.26), (3.29) y (3.32), respectivamente. Puesto que el parámetro topológico $\theta^{(2)}$ es constante en la placa (región $-h \leq y \leq h$), entonces las ecuaciones (3.26) y (3.29) se pueden escribir como

$$\nabla^2 \psi^{(2)} = 0, \quad (5.2)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0, \quad (5.3)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, $\psi^{(2)} = \varphi^{(2)} + \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} u_z^{(2)}$ es el potencial escalar reestructurado por las propiedades piezoeléctricas del cristal (siendo $\varphi^{(2)}$ el potencial escalar en la región $-h \leq y \leq h$), $A_z^{(2)}$ es la componente z del potencial vectorial y $\frac{\partial}{\partial x} \theta^{(2)} = \frac{\partial}{\partial y} \theta^{(2)} = 0$. Al combinar (3.32), (5.1) y (5.2) se obtiene

$$\rho_m^{(2)} \ddot{u}_z^{(2)} = \bar{\lambda}^{(2)} \nabla^2 u_z^{(2)}, \quad (5.4)$$

donde $\ddot{u}_z^{(2)} = \frac{\partial^2 u_z^{(2)}}{\partial t^2}$ y $\bar{\lambda}^{(2)} = \lambda^{(2)} + \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\varepsilon^{(2)}}$ es la constante elástica reforzada piezoeléctricamente. El potencial escalar y la componente z del potencial vectorial en las regiones 1 ($y < -h$) y 3 ($y > h$) se pueden obtener directamente de las ecuaciones (3.26) y (3.29) al despreciar las propiedades elásticas, piezoeléctricas y topológicas del material. Las ecuaciones que se obtienen para cada una de las regiones son

-Para la región 1 ($y < -h$):

$$\nabla^2 \varphi^{(1)} = 0, \quad (5.5)$$

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0, \quad (5.6)$$

donde $\varphi^{(1)}$ es el potencial escalar en $y < -h$ y $A_z^{(1)}$ es la componente z del potencial vectorial en $y < -h$.

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

-Para la región 3 ($y > h$):

$$\nabla^2 \varphi^{(3)} = 0, \quad (5.7)$$

$$\nabla^2 A_z^{(3)} = 0, \quad (5.8)$$

donde $\varphi^{(3)}$ es el potencial escalar en $y > h$ y $A_z^{(3)}$ es la componente z del potencial vectorial en $y > h$. Estas ecuaciones son las mismas que se obtienen con ayuda de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz convencionales ([Landáu & Lifschitz, 2003 II](#)). Puesto que el sistema es homogéneo en la dirección x , las ecuaciones diferenciales (5.2)-(5.8) tienen soluciones en forma de ondas libres $e^{i(kx-\omega t)}$ con frecuencia ω y vector de onda k . Por el contrario, la dependencia de φ , A_z y u_z con y es diferente en cada una de las regiones. En el [Apéndice D.1](#) se resuelven las ecuaciones (5.2)-(5.8) y se demuestra que sus soluciones están dadas de la siguiente forma

- Para la región 2 ($-h \leq y \leq h$)

$$u_z^{(2)} = [u_0^{(2)} e^{i\kappa' y} + u_1^{(2)} e^{-i\kappa' y}] e^{i(kx-\omega t)}, \quad (5.9)$$

$$\begin{pmatrix} \psi^{(2)} \\ A_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(2)} & \varphi_1^{(2)} \\ A_0^{(2)} & A_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}. \quad (5.10)$$

donde $u_j^{(2)}$, $\varphi_j^{(2)}$ y $A_j^{(2)}$ (con $j = 0, 1$) son las amplitudes de la deformación $u_z^{(2)}$, del potencial escalar $\psi^{(2)}$ y del potencial vectorial $A_z^{(2)}$, respectivamente.

- Para la región 1 ($y < -h$)

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(1)} \\ A_0^{(1)} \end{pmatrix} e^{k(y+h)} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (5.11)$$

donde $\varphi_0^{(1)}$ es la amplitud del potencial escalar $\varphi^{(1)}$ y $A_0^{(1)}$ es la amplitud del potencial vectorial $A_z^{(1)}$.

- Para la región 3 ($y > h$)

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ A_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(3)} \\ A_0^{(3)} \end{pmatrix} e^{-k(y-h)} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (5.12)$$

donde $\varphi_0^{(3)}$ y $A_0^{(3)}$ son las amplitudes del potencial escalar $\varphi^{(3)}$ y del potencial vectorial $A_z^{(3)}$, respectivamente. Adicionalmente, los términos κ' y k que aparecen en las ecuaciones (5.9)-(5.12) satisfacen la siguiente relación

$$\kappa'^2 = \frac{\omega^2 \rho_m^{(2)}}{\bar{\lambda}^{(2)}} - k^2. \quad (5.13)$$

5.2 Condiciones de Frontera en las Superficies de la Placa

Para estudiar la propagación de las ondas en una placa de aislante topológico piezoeléctrico rodeada por vacío, se debe analizar el comportamiento que tienen los campos en las interfaces que separan la placa del vacío. Con este fin, se hacen coincidir las fases de las ondas (5.9)-(5.12) en $y = \pm h$. En cada una de las superficies tienen lugar las siguientes condiciones de continuidad:

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}|_{y=\pm h} &= \varphi^{(i)}|_{y=\pm h}, & A_z^{(j)}|_{y=\pm h} &= A_z^{(i)}|_{y=\pm h}, \\ D_y^{(j)}|_{y=\pm h} &= D_y^{(i)}|_{y=\pm h}, & H_x^{(j)}|_{y=\pm h} &= H_x^{(i)}|_{y=\pm h}, & \sigma_{zy}^{(j)}|_{y=\pm h} &= \sigma_{zy}^{(i)}|_{y=\pm h}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde los superíndices i y j siguen la relación $j = i + 1$ con $i = 1, 2$. Así, al reemplazar (5.10) y (5.11) en las condiciones de continuidad (5.14) para φ y A_z en $y = -h$ se obtiene

$$\begin{aligned} \text{-para } \varphi^{(2)}|_{y=-h} &= \varphi^{(1)}|_{y=-h} \\ \varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+] &= \varphi_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \text{-para } A_z^{(2)}|_{y=-h} &= A_z^{(1)}|_{y=-h} \\ A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+ &= A_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm i|\kappa|h}$ (ver apéndice D.2.1). Las componentes $D_y^{(2)}$, $H_x^{(2)}$ y $\sigma_{zy}^{(2)}$ en la región 2 ($-h \leq y \leq h$) están dadas por las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.21), respectivamente. Por su parte, las componentes $D_y^{(1)}$, $H_x^{(1)}$ en la en la región 1 ($y < -h$) y $D_y^{(3)}$, $H_x^{(3)}$ en la región 3 ($y > h$) están definidas por

$$D_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (5.17)$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}. \quad (5.18)$$

Las ecuaciones (5.17) y (5.18) hacen parte de las relaciones constitutivas que se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz convencionales (Landáu & Lifschitz, 2003 II; Landau & Lifshitz, 2003 VIII). Estas también se pueden obtener directamente de (3.12), (3.14) y (3.21) al despreciar las propiedades elásticas, piezoeléctricas y topológicas del material. Así, al evaluar las condiciones de continuidad (5.14) para D_y , H_x y σ_{zy} en $y = -h$ se obtiene

$$\begin{aligned} \text{-para } D_y^{(2)}|_{y=-h} &= D_y^{(1)}|_{y=-h} \\ -\varepsilon^{(2)} [\varphi_0^{(2)} f^- - \varphi_1^{(2)} f^+] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i [A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+] + \varphi_0^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

-para $H_x^{(2)} \Big|_{y=-h} = H_x^{(1)} \Big|_{y=-h}$

$$A_0^{(2)} f^- - A_1^{(2)} f^+ - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+ \right] \right\} - A_0^{(1)} = 0. \quad (5.20)$$

Aparte de esto, la placa es libre de esfuerzos debajo de la superficie que se localiza en $y = -h$. De este modo, la condición de continuidad (5.14) para σ_{zy} nos lleva a la siguiente expresión

$$i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} g^- - u_1^{(2)} g^+ \right] - \varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ = 0. \quad (5.21)$$

El cálculo detallado de las ecuaciones (5.19)-(5.21) se halla en el apéndice D.2.1. Por otro lado, al evaluar las condiciones de continuidad (5.14) en la interface en $y = +h$ se obtiene (ver apéndice D.2.2)

-para $\varphi^{(3)} \Big|_{y=+h} = \varphi^{(2)} \Big|_{y=+h}$

$$\varphi_0^{(3)} = \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^- \right], \quad (5.22)$$

-para $A_z^{(3)} \Big|_{y=+h} = A_z^{(2)} \Big|_{y=+h}$

$$A_0^{(3)} = A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^-, \quad (5.23)$$

-para $D_y^{(3)} \Big|_{y=+h} = D_y^{(2)} \Big|_{y=+h}$

$$\varphi_0^{(3)} + \varepsilon^{(2)} \left[\varphi_0^{(2)} f^+ - \varphi_1^{(2)} f^- \right] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left[A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^- \right] = 0, \quad (5.24)$$

-para $H_x^{(3)} \Big|_{y=-h} = H_x^{(2)} \Big|_{y=-h}$

$$-A_0^{(3)} - \left[A_0^{(2)} f^+ - A_1^{(2)} f^- \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^- \right] \right\} = 0, \quad (5.25)$$

- para $\sigma_{zy}^{(3)} \Big|_{y=+h} = \sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=+h}$

$$i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} g^+ - u_1^{(2)} g^- \right] - \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- = 0. \quad (5.26)$$

En la ecuación (5.26) hemos considerado $\sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=+h} = 0$, debido a que la placa es libre de esfuerzos por encima de la superficie que se encuentra en $y = +h$. Las ecuaciones (5.15), (5.16), (5.19)-(5.21) y (5.22)-(5.26) forman un sistema de ecuaciones algebraico homogéneo

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

10×10 que nos permitirá estudiar de cerca los efectos que produce el acople de las variables elasto electrodinámicas u_z , φ y A_z sobre los modos de propagación que tienen las ondas en la placa de aislante topológico piezoeléctrico que se muestra en la figura 5.1.

5.3 Modos Guiados Antisimétricos en la Placa

Al combinar las expresiones (5.15), (5.16) y (5.19)-(5.21), las cuales se encontraron al evaluar las relaciones de continuidad en $y = -h$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones reducido (ver [Apéndice D.2.3](#)):

$$i\delta \left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-) - i\delta \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) = \left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \right] [(f^+ + f^-) + (f^+ - f^-)], \quad (5.27)$$

$$\left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] [(f^+ + f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ - f^-)] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) = i\delta \left[A_0^{(2)} - A_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-), \quad (5.28)$$

$$i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) - \left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-) = 0, \quad (5.29)$$

donde $\delta = \alpha \theta^{(2)} / \pi$ contiene el parámetro topológico de la placa. De igual forma, al combinar las expresiones (5.22)-(5.26) para las relaciones de continuidad en $y = h$, se obtiene un segundo sistema de ecuaciones (ver [Apéndice D.2.3](#)), el cual está dado como sigue

$$i\delta \left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-) - i\delta \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) = \left[A_0^{(2)} - A_1^{(2)} \right] [(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)], \quad (5.30)$$

$$\left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] [(f^+ - f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ + f^-)] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) = i\delta \left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-), \quad (5.31)$$

$$i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) - \left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-) = 0. \quad (5.32)$$

A continuación, despejamos el termino $\left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \right]$ de la ecuación (5.25) para reemplazarlo en (5.29) y el resultado lo dividimos entre (5.27),

$$\frac{f^+ - f^-}{f^+ + f^-} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{\frac{f^+ + f^-}{f^+ - f^-} + 1} = \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \frac{\beta^{(2)}}{i\bar{\lambda}^{(2)}} \frac{k}{\kappa'} \left[\frac{g^+ - g^-}{g^+ + g^-} + \frac{\delta^2 \frac{g^+ - g^-}{g^+ + g^-}}{\frac{f^+ + f^-}{f^+ - f^-} + \frac{f^+ - f^-}{f^+ + f^-}} \right]. \quad (5.33)$$

Haciendo $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm i\kappa' h}$ la ecuación (5.31) se transforma en

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

$$\frac{\kappa'}{k} \left[\varepsilon^{(2)} + \left(1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh(kh)} \right) \tanh(kh) \right] = \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}} \tan(\kappa'h) \left(1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh(kh)} \right). \quad (5.34)$$

La expresión (5.32) es la condición de existencia de soluciones no triviales del sistema de ecuaciones (5.25), (5.27) y (5.29), es decir que $\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \neq 0$, $u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \neq 0$ y $A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \neq 0$. Esto implica que el sistema de ecuaciones (5.26), (5.28) y (5.30) tiene soluciones triviales, es decir que $\varphi_0^{(2)} = -\varphi_1^{(2)}$, $u_0^{(2)} = -u_1^{(2)}$ y $A_0^{(2)} = A_1^{(2)}$. Por lo tanto, la expresión (5.32) describe los **modos de propagación antisimétricos** con respecto a los potenciales y las deformaciones, mientras que, con respecto a las componentes del potencial vectorial, dichos modos son simétricos. Se puede observar como las propiedades topológicas del cristal introducen una corrección $\delta^2/[1 + \tanh(kh)]$ en los modos de propagación antisimétricos. Cuando $\delta = 0$, la expresión (5.32) se reduce a la ecuación que se obtuvo en (Bleustein, 1969) para los modos de propagación antisimétricos en una placa piezoeléctrica convencional, la cual está dada por

$$\frac{\kappa'}{k} [\varepsilon^{(2)} + \tanh(kh)] = \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}} \tan(\kappa'h). \quad (5.35)$$

A continuación, introducimos la siguiente notación:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\sqrt{\bar{\lambda}^{(2)}\pi^2/4\rho_m^{(2)}h^2}}, \quad \frac{k}{k_0} = \frac{k}{\pi/2h}. \quad (5.36)$$

Luego, combinando las ecuaciones (5.13), (5.32) y (5.34) se obtiene,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \left[\varepsilon^{(2)} + \left(1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{k_0}\right)} \right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{k_0}\right) \right] \\ &= \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}} \frac{k}{k_0} \tan\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2}\right) \left(1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{k_0}\right)} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

En nuestro estudio consideramos una placa piezoeléctrica de ZnO/CdO con propiedades topológicas que está rodeada de vacío. Las propiedades del material de la placa en unidades CGS están dadas en la [Tabla 4.1](#). En la Figura (5.2) se muestran los modos guiados antisimétricos que se obtienen de las soluciones en (5.35). En el límite cuando $k/k_0 \rightarrow 0$, la ecuación (5.35) se reduce a

$$\tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right] = \frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\frac{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}}{4\pi\beta^{(2)^2}}. \quad (5.38)$$

La ecuación (5.36) gobierna las soluciones de unos modos de corte especial denominados modos por cizallamiento de espesor (thickness-shear modes), en los cuales la vibración es paralela al plano de la película del material piezoeléctrico. En ellas se observa que los efectos

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

topológicos no producen cambios; solo prevalecen los efectos producidos por el acoplamiento piezoeléctrico a través de las constantes $\beta^{(2)}$ y $\bar{\lambda}^{(2)}$.

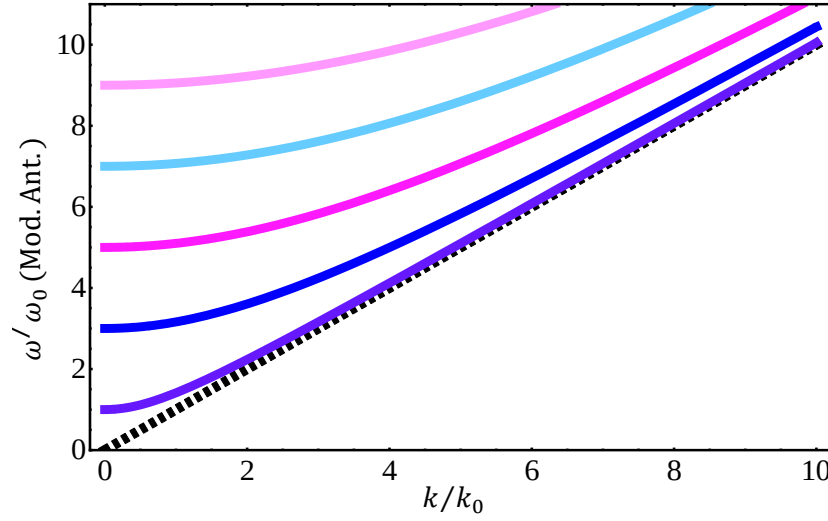


Figura 5. 2: Modos guiados antisimétricos para las ondas que se propagan en una placa piezoeléctrica de ZnO/CdO con propiedades topológicas. Las propiedades del material de la placa en unidades CGS corresponden a las dadas en la Tabla 4.1. El parámetro topológico de la placa es tal que $\delta = \alpha$.

Cuando $\omega/\omega_0 \rightarrow k/k_0$ encontramos que el punto en el que la rama antisimétrica más baja cruza la línea $\omega/\omega_0 = k/k_0$ y comienza a tener la característica de onda superficial, está dado por la raíz de la siguiente ecuación (Bleustein, 1969):

$$\frac{4\pi\beta^{(2)2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}}\left(\frac{\pi k}{2k_0}\right) = \tanh\left(\frac{\pi k}{2k_0}\right) + \varepsilon^{(2)}\left(1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh\left(\frac{\pi k}{2k_0}\right)}\right)^{-1}. \quad (5.39)$$

Las propiedades topológicas del cristal introducen en la ecuación (5.37) correcciones proporcionales a δ^2 . Cuando $k/k_0 > \omega/\omega_0$ y $k/k_0 \rightarrow \infty$, entonces la relación de dispersión involucrada en (5.35) se reduce a la relación de dispersión de las ondas superficiales de Bleustein-Gulyaev en aislantes topológicos piezoeléctricos,

$$\left(\frac{\pi \omega}{2\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{\pi k}{2k_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{4\pi\beta^{(2)2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\delta^2}{1 + \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}\delta^2}\right)^2\right]. \quad (5.40)$$

De la ecuación (5.40) se deduce que la velocidad de grupo v_g de las ondas Bleustein-Gulyaev, también sufre una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina,

$$v_g^2 = \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\rho_m^{(2)}} \left[1 - \left(\frac{4\pi\beta^{(2)2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\delta^2}{1 + \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}\delta^2}\right)^2\right]. \quad (5.41)$$

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

Los resultados (5.40) y (5.41) son equivalentes a los que se obtuvieron en la [sección 4.5](#). La Figura 5.3 muestra las correcciones que introduce el término topológico en los modos guiados antisimétricos. Se observa que, para un orden dado del modo guiado por onda, el cambio de frecuencia inducido por el parámetro topológico aumenta con el vector de onda. Además, para un valor dado del vector de onda, el cambio de frecuencia correspondiente aumenta con el orden del modo guiado por onda. Cuando $k/k_0 \rightarrow 0$ desaparece la corrección topológica, tal como se obtuvo en las ecuaciones (5.36).

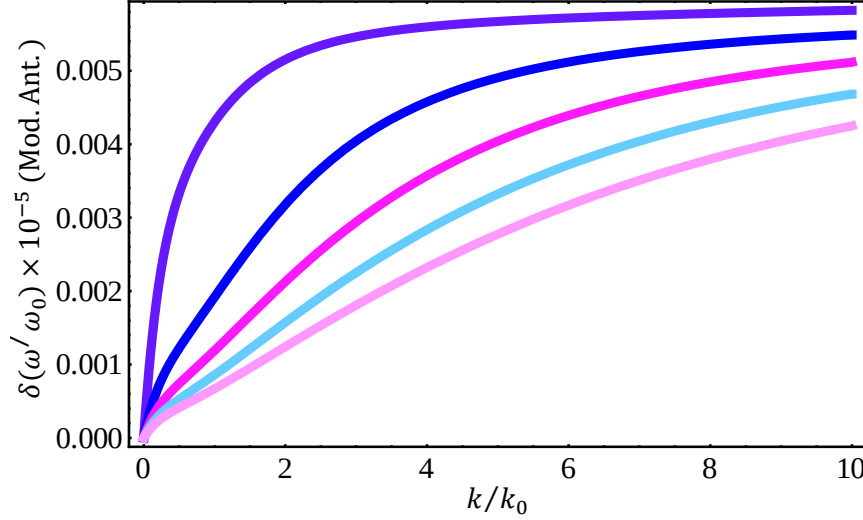


Figura 5. 3: Correcciones que introduce el parámetro topológico en los modos guiados antisimétricos para las ondas que se propagan en una placa de ZnO/CdO con propiedades topológicas. Las propiedades del material corresponden a las reportadas en la Tabla 4.1. El parámetro topológico de la placa es tal que $\delta = \alpha$.

5.4 Modos Guiados Simétricos en la Placa

En este caso, despejamos $[A_0^{(2)} - A_1^{(2)}]$ de (5.28) y reemplazamos en (5.26). Luego, se divide la expresión resultante entre (5.30). Así obtenemos,

$$\frac{f^+ + f^-}{f^+ - f^-} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{\frac{f^+ - f^-}{f^+ + f^-} + 1} = \frac{4\pi\beta^{(2)} \beta^{(2)} k g^+ + g^-}{\varepsilon^{(2)} i\bar{\lambda}^{(2)} \kappa' g^+ - g^-} \left[1 + \frac{\delta^2}{1 + \frac{f^+ + f^-}{f^+ - f^-}} \right]. \quad (5.42)$$

Con $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm i\kappa h}$, la ecuación (5.40) se transforman en (ver [Apéndice D.2.3](#))

$$\begin{aligned} \frac{\kappa'}{k} \left[1 + \varepsilon^{(2)} \tanh(kh) + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}(kh)} \right] \tan(\kappa' h) \\ = - \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)} \varepsilon^{(2)}} \tanh(kh) \left[1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}(kh)} \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

La expresión (5.41) es la condición de existencia de soluciones no triviales del sistema de ecuaciones (5.26), (5.28) y (5.30), es decir que $\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \neq 0$, $u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \neq 0$ y $A_0^{(2)} - A_1^{(2)} \neq 0$. Esto implica que el sistema de ecuaciones (5.25), (5.27) y (5.29) tiene soluciones triviales, es decir que $\varphi_0^{(2)} = \varphi_1^{(2)}$, $u_0^{(2)} = u_1^{(2)}$ y $A_0^{(2)} = -A_1^{(2)}$. Por lo tanto, la expresión (5.41) describe los **modos de propagación simétricos** con respecto a los potenciales y las deformaciones, mientras que, con respecto a las componentes del potencial vectorial, dichos modos son antisimétricos. Se puede observar como las propiedades topológicas del cristal, introducen una corrección $\delta^2/[1 + \tanh^{-1}(kh)]$. Cuando $\delta = 0$, la expresión (5.41) se reduce a la ecuación que se obtuvo en (Bleustein, 1969) para los modos de propagación simétricos en una placa piezoeléctrica convencional, la cual se escribe como sigue

$$\frac{\kappa'}{k} [1 + \varepsilon^{(2)} \tanh(kh)] \tan(\kappa'h) = -\frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}} \tanh(kh). \quad (5.44)$$

Combinando las ecuaciones (5.13) y (5.34) en (5.41) se obtiene

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2} \left[1 + \varepsilon^{(2)} \tanh\left(\frac{\pi k}{2 k_0}\right) + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}\left(\frac{\pi k}{2 k_0}\right)} \right] \tan\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2}\right) \\ &= -\frac{4\pi\beta^{(2)^2} k}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)} k_0} \tanh\left(\frac{\pi k}{2 k_0}\right) \left[1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}\left(\frac{\pi k}{2 k_0}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

En la Figura (5.4) se muestran los modos guiados simétricos que se obtienen de las soluciones que resultan de la ecuación (5.43).

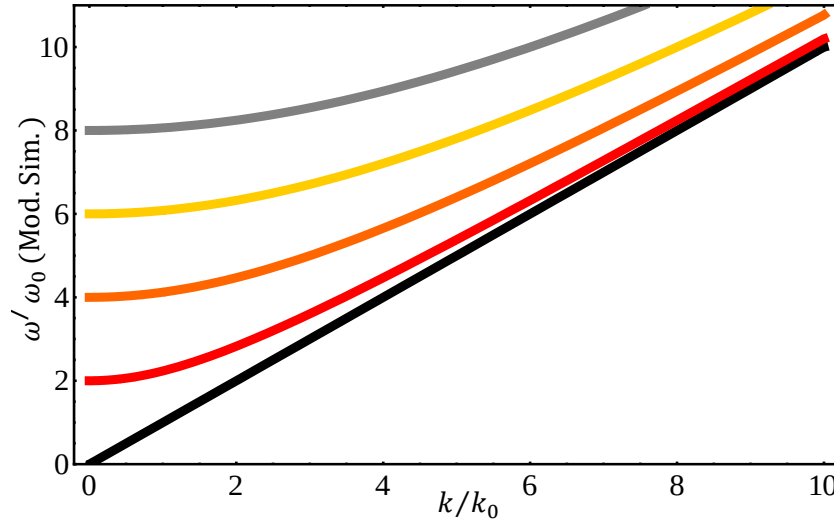


Figura 5. 4: Modos guiados simétricos para las ondas que se propagan en una placa piezoeléctrica de ZnO/CdO con propiedades topológicas. Las propiedades del material de la placa en unidades CGS corresponden a las dadas en la Tabla 4.1. El parámetro topológico de la placa es tal que $\delta = \alpha$.

5. Modos de propagación en una placa piezoeléctrica finita de aislante topológico

Note que en el límite cuando $k/k_0 \rightarrow 0$, los efectos topológicos no producen cambios en las frecuencias de los modos de cizallamiento de espesor. Por otro lado, en el límite cuando $k/k_0 \rightarrow \infty$ la ecuación (5.43) se reduce a la relación de dispersión de las ondas superficiales de Bleustein Gulyaev en aislantes topológicos piezoeléctricos que se obtuvo en la ecuación (5.38).

La Figura 5.3 muestra las correcciones que introduce el término topológico en los modos guiados simétricos. De nuevo, tal como se observó en los modos guiados antisimétricos de la figura 5.3, encontramos que la frecuencia crece al aumentar el vector de onda para cualquier modo guiado, el cambio de frecuencia inducido por el parámetro topológico también aumenta con el vector de onda. Además, para un valor dado del vector de onda, el cambio de frecuencia correspondiente aumenta con el orden del modo guiado por onda. Cuando $k/k_0 \rightarrow 0$ desaparece la corrección topológica.

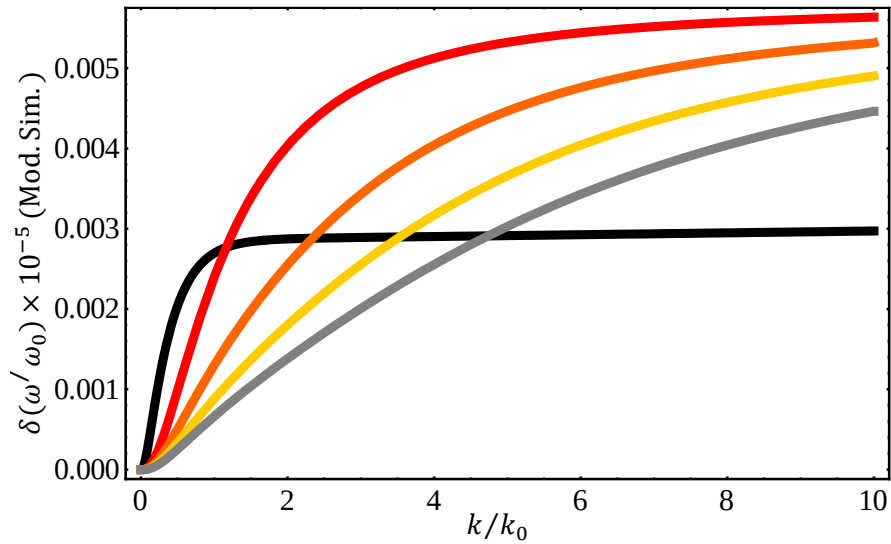


Figura 5. 5: Se muestran las correcciones que introduce el parámetro topológico en los modos guiados simétricos para las ondas que se propagan en una placa piezoeléctrica de ZnO/CdO con propiedades topológicas. Las propiedades del material de la placa se encuentran en la table 4.1. El parámetro topológico de la placa es tal que $\delta = \alpha$.

6. AISLANTE TOPOLÓGICO PIEZOELÉCTRICO EN CONTACTO CON UN LÍQUIDO VISCOSO

En el capítulo anterior, se estudiaron los modos de propagación de onda en una placa piezoeléctrica de la clase C_{6v} que presentaba propiedades topológicas no triviales. Se mostró, que el término topológico introduce correcciones de segundo orden en la constante de estructura fina en las relaciones de dispersión para los modos guiados simétricos y antisimétricos. En esta sección estudiaremos la propagación de las ondas Bleustein-Gulyaev en aislantes topológicos piezoeléctricos que están en contacto con líquidos viscosos.

6.1 Líquidos Viscosos

En los fluidos ideales, la transferencia de impulso (o de cantidad de movimiento) es un proceso completamente reversible, el cual se debe al transporte mecánico de las partículas y a las fuerzas de presión que actúan sobre dicho fluido. Por otro lado, en los fluidos reales existe adicionalmente una transferencia de impulso irreversible de los puntos en donde la velocidad es grande a otros donde la velocidad es pequeña. Esta irreversibilidad está asociada con la viscosidad (o fricción interna) y la conducción térmica en el fluido. El conjunto de ecuaciones que describen la conservación de la masa y la cantidad de movimiento en un fluido incompresible de densidad ρ_l y viscosidad μ_l está dado por (Landau & Lifshitz, 2003 VI)

$$\rho_l \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \mu_l \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_l \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido y P es la presión. Las ecuaciones (6.1) se conocen como ecuaciones de Navier-Stokes y describen el movimiento de un fluido viscoso. Al lado izquierdo de la igualdad en (6.1) se encuentra el término transitorio $\partial \mathbf{v} / \partial t$, el cual evalúa la variación local de la velocidad con respecto al tiempo. El término convectivo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ describe la aceleración del fluido debido a la variación espacial de la velocidad. Por otra parte, el gradiente de presiones ∇P describe la distribución de las fuerzas superficiales que actúan sobre el fluido. El laplaciano de las velocidades $\mu_l \nabla^2 \mathbf{v}$ contiene los términos difusivos. Por último, el término $\rho_l \mathbf{g}$ contiene la aceleración debida al campo gravitatorio (Landau & Lifshitz, 2003 VI).

6.2 Configuración y Ecuaciones de Movimiento del Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Líquido Viscoso

Consideremos un cristal piezoeléctrico topológico no magnetizable de la clase C_{6v} y densidad de masa ρ_m , el cual tiene un parámetro topológico $\theta^{(1)}$. El cristal se extiende indefinidamente en la dirección $\mathbf{z}$, ocupa la región 1 ($y < 0$) y limita con el plano xz , siendo z el eje de simetría del cristal; por lo que el sistema es homogéneo en esta dirección. La región 2 ($y > 0$) es

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

ocupada por un líquido viscoso incompresible no conductor de densidad ρ_l y viscosidad μ_l . Por consideraciones de generalidad, el líquido viscoso tiene un parámetro topológico $\theta^{(2)}$. En la Figura 6.1 se ilustra la configuración del sistema. De acuerdo con las condiciones de simetría (3.6), (3.8) y (3.10), se consideran los siguientes parámetros del cristal

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon^{(1)}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = \lambda^{(1)}, \quad \beta_{x,xz} = \beta_{y,yz} = \beta^{(1)}, \quad (6.2)$$

donde $\varepsilon^{(1)}$ es la permitividad dieléctrica relativa, $\lambda^{(1)}$ el módulo de elasticidad y $\beta^{(1)}$ el coeficiente piezoeléctrico del material. Aparte de esto, solo se considera la componente $u_z^{(1)}$ de las deformaciones en el cristal de la región 1 ($y < 0$). De este modo, se reducen las componentes del tensor de deformaciones $u_{lm}^{(1)}$ y del tensor de esfuerzos $\sigma_{ik}^{(1)}$, las cuales se escriben como aparece en las ecuaciones (4.4)-(4.6) y (4.7)-(4.9), respectivamente.

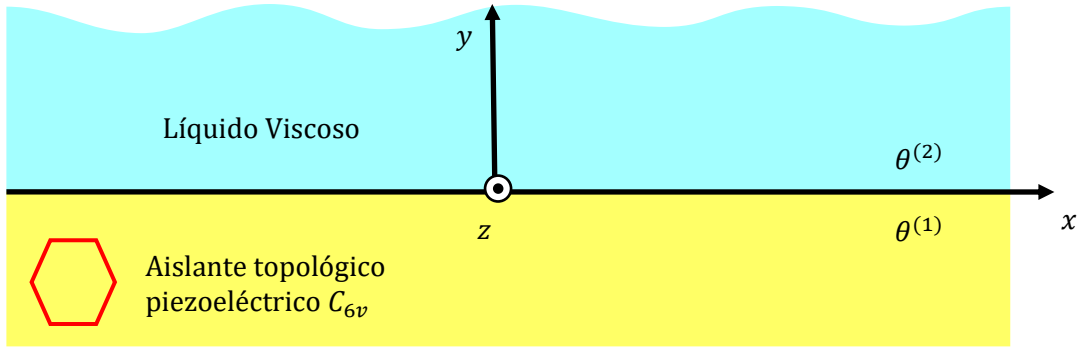


Figura 6. 1: Cristal de aislante topológico piezoeléctrico semi infinito de parámetro topológico $\theta^{(1)}$ en contacto con un líquido de densidad ρ_l y viscosidad μ_l . El cristal piezoeléctrico pertenece a la clase C_{6v} y su eje de simetría es paralelo al eje z . La dirección de propagación de la onda es paralela al eje x .

La configuración del sistema conlleva a que las derivadas espaciales del término topológico en la región 1 ($y < 0$) se anulen, puesto que $\theta(y < 0) = \theta^{(1)}$ es un parámetro constante en toda esta región. Así, las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de las deformaciones $u_z^{(1)}$, del potencial escalar $\varphi^{(1)}$ y de la componente $A_z^{(1)}$ del potencial vectorial, en la región 1 ($y < 0$), están dadas por las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13).

$$\rho_m \ddot{u}_z^{(1)} = \lambda^{(1)} \nabla^2 u_z^{(1)} - \beta^{(1)} \nabla^2 \varphi^{(1)}, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \psi^{(1)} = 0, \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0, \quad (4.60)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ y $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$. Adicionalmente, la velocidad $v_z^{(1)}$ con la que se deforma el cristal, esta dada por

$$v_z^{(1)}(x, y; t) = \frac{\partial u_z^{(1)}(x, y; t)}{\partial t}. \quad (6.3)$$

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

Por otro lado, el cristal de aislante topológico piezoeléctrico induce el movimiento de las partículas del líquido de la región 2 ($y > 0$), el cual es no magnetizable y tiene una permitividad dieléctrica relativa $\varepsilon^{(2)}$. El potencial escalar $\varphi^{(2)}$ y la componente $A_z^{(2)}$ del potencial vectorial se obtienen directamente de las ecuaciones (4.17) y (4.18), teniendo en cuenta que las derivadas espaciales del término topológico en la región 2 ($y > 0$) son nulas, ya que $\theta(y > 0) = \theta^{(2)}$ es constante en toda esta región.

$$\nabla^2 \varphi^{(2)} = 0, \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0. \quad (4.18)$$

A su vez, las velocidades de las partículas líquidas se rigen por las ecuaciones de Navier-Stokes (6.1). En nuestro caso, el líquido no se encuentra en el interior de un campo gravitatorio, así que podemos desprestigiar la gravedad $\mathbf{g}$. Puesto que el líquido es incompresible, se tiene que $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$. Además, se desprecian los gradientes de presión ∇P debido a que solo se producen deformaciones de cizalla en el líquido. Por consiguiente, la componente $v_z^{(2)}$ de las velocidades en el líquido viene dada por la ecuación de Navier-Stokes reducida (6.4).

$$\frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial t} - \frac{\mu_l}{\rho_l} \nabla^2 v_z^{(2)} = 0. \quad (6.4)$$

De la ecuación (6.4) se deduce que

$$\sigma_{zx}^{(2)} = \mu_l \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial x}, \quad \sigma_{zy}^{(2)} = \mu_l \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial y}. \quad (6.5)$$

donde $\sigma_{zx}^{(2)}$ y $\sigma_{zy}^{(2)}$ son respectivamente, las componentes zx y zy de los esfuerzos en el líquido de la región 2 ($y > 0$).

6.3 Distribución de los Campos en el Aislante Topológico Piezoeléctrico y en el Líquido Viscoso

Para obtener los potenciales $\psi^{(1)}$, $A_z^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ y $v_z^{(1)}$ en el aislante topológico piezoeléctrico de la región 1 ($y < 0$) es necesario resolver las ecuaciones diferenciales (4.11)-(4.13) y (6.3). En el [Apéndice E.1](#) se demuestra que las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son

$$\begin{pmatrix} u_z^{(1)}(x, y; t) \\ v_z^{(1)}(x, y; t) \\ \varphi^{(1)}(x, y; t) \\ A_z^{(1)}(x, y; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 e^{m_2 k y} \\ -ikv \mathcal{C}_2 e^{m_2 k y} \\ \mathcal{C}_3 e^{ky} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{m_2 k y} \\ \mathcal{C}_5 e^{ky} \end{pmatrix} e^{ik(x-vt)}, \quad (6.6)$$

donde $\mathcal{C}_2$ es la amplitud de las deformaciones $u_z^{(1)}$, $\mathcal{C}_3$ es la amplitud del potencial escalar $\varphi^{(1)}$ reestructurado por las propiedades piezoeléctricas y $\mathcal{C}_5$ es la amplitud de la componente $A_z^{(1)}$

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

del potencial vectorial. Debido a la homogeneidad del sistema en la dirección x , las ecuaciones (6.6) tienen soluciones en forma de ondas libres $e^{ik(x-vt)}$, donde $v = \omega/k$ es la velocidad de las ondas (siendo ω la frecuencia y k el vector de onda). Observe que los campos en (6.6) se anulan cuando $y \rightarrow -\infty$. La constante m_2 contiene las propiedades dieléctricas, piezoeléctricas y elásticas del cristal, y está dada por

$$m_2^2 = \frac{4\pi\beta^{(1)2} - \varepsilon^{(1)}(\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)}\varepsilon^{(1)} + 4\pi\beta^{(1)2}}. \quad (6.7)$$

De forma similar, para obtener los potenciales $\varphi^{(2)}$, $A_z^{(2)}$ y $v_z^{(2)}$ en el líquido viscoso de la región 2 ($y > 0$) es necesario resolver las ecuaciones diferenciales (4.17), (4.18) y (6.4). En el [Apéndice E.2](#) se demuestra que las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son

$$\begin{pmatrix} v_z^{(2)}(x, y; t) \\ \varphi^{(2)}(x, y; t) \\ A_z^{(2)}(x, y; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-m_1 y} \\ C_4 e^{-ky} \\ C_6 e^{-ky} \end{pmatrix} e^{ik(x-vt)}, \quad (6.8)$$

donde C_1 es la amplitud de velocidad de la partícula líquida, C_4 es la amplitud del potencial escalar $\varphi^{(2)}$ y C_6 es la amplitud de la componente $A_z^{(2)}$ del potencial vectorial. La constante m_1 contiene las propiedades del líquido viscoso y está dada por

$$m_1^2 = k^2 - ikv \frac{\rho_l}{\mu_l}, \quad (6.9)$$

donde ρ_l y μ_l son la densidad y la viscosidad del líquido, respectivamente. Observe que la estructura de los campos en (6.8) es tal, que se anulan cuando $y \rightarrow +\infty$.

6.4 Condiciones de Frontera y Relación de Dispersión en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Líquido Viscoso

A continuación, analizamos el comportamiento que tienen los potenciales en la interface que separa el aislante topológico piezoeléctrico del líquido viscoso. Para ello, se consideran las siguientes relaciones de continuidad en $y = 0$ ([Landau & Lifshitz, 2003 VIII](#)):

$$\begin{aligned} D_y^{(2)}|_{y=0} &= D_y^{(1)}|_{y=0}, & H_x^{(2)}|_{y=0} &= H_x^{(1)}|_{y=0}, & \sigma_{zy}^{(2)}|_{y=0} &= \sigma_{zy}^{(1)}|_{y=0} \\ A_z^{(2)}|_{y=0} &= A_z^{(1)}|_{y=0}, & \varphi^{(2)}|_{y=0} &= \varphi^{(1)}|_{y=0}, & v_z^{(1)}|_{y=0} &= v_z^{(2)}|_{y=0}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde las componentes $D_y^{(1)}$, $H_x^{(1)}$ y $\sigma_{zy}^{(1)}$ en la región 1 ($y < 0$) están dadas por las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.9), respectivamente, mientras que las componentes $D_y^{(2)}$, $H_x^{(2)}$ y $\sigma_{zy}^{(2)}$ en la región 2 ($y > 0$) están dadas por las ecuaciones (4.30), (4.31) y (6.5), correspondientemente.

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

Luego, al evaluar las continuidades (6.10) con ayuda de las soluciones (6.6) y (6.8) se obtiene (ver [Apéndice E.3](#))

- Para el desplazamiento eléctrico $D_y^{(2)}|_{y=0} = D_y^{(1)}|_{y=0}$

$$\varepsilon^{(2)}k\mathcal{C}_4 + \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}ik\mathcal{C}_6 + k\varepsilon^{(1)}\mathcal{C}_3 - \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(1)}ik\mathcal{C}_5 = 0. \quad (6.11)$$

- Para la intensidad magnética $H_x^{(2)}|_{y=0} = H_x^{(1)}|_{y=0}$

$$-k\mathcal{C}_6 - \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}ik\mathcal{C}_4 - k\mathcal{C}_5 + \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(1)}ik\left(\mathcal{C}_3 - 4\pi\frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\mathcal{C}_2\right) = 0. \quad (6.12)$$

- Para los esfuerzos $\sigma_{zy}^{(2)}|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)}|_{y=0}$

$$\mu_l m_1 \mathcal{C}_1 = -m_2 \mathcal{C}_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) + \mathcal{C}_3 k \beta^{(1)}. \quad (6.13)$$

- Para el potencial vectorial $A_z^{(2)}|_{y=0} = A_z^{(1)}|_{y=0}$

$$\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_6. \quad (6.14)$$

- Para el potencial escalar $\varphi^{(2)}|_{y=0} = \varphi^{(1)}|_{y=0}$

$$\varepsilon^{(1)}\mathcal{C}_4 - \varepsilon^{(1)}\mathcal{C}_3 + 4\pi\beta^{(1)}\mathcal{C}_2 = 0. \quad (6.15)$$

- Para la componente v_z de las velocidades $v_z^{(2)}|_{y=0} = v_z^{(1)}|_{y=0}$

$$-ikv\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1. \quad (6.16)$$

De esta manera, al evaluar las condiciones de continuidad (6.10) con ayuda de las soluciones (6.6) y (6.8), obtenemos un sistema de ecuaciones algebraico homogéneo 6×6 .

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

Al combinar las ecuaciones (6.11)-(6.16) el sistema de ecuaciones se reduce a un sistema 3x3 (ver apéndice E.4)

$$\begin{bmatrix} m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - i\nu\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) & -k\beta^{(1)} & 0 \\ -4\pi k \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} & k(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) & ik\delta \\ 4\pi ik\delta \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} & -ik\delta & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{C}_5 \end{bmatrix} = 0, \quad (6.17)$$

donde $\delta = \frac{\alpha}{\pi}(\theta^{(2)} - \theta^{(1)})$ contiene la diferencia de los parámetros topológicos de los medios. Para que el sistema (6.17) tenga solución no trivial el determinante de la matriz se debe anular,

$$\begin{aligned} & m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - i\nu\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) \begin{vmatrix} k(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) & ik\delta \\ -\delta ik & -2k \end{vmatrix} \\ & - (-k\beta^{(1)}) \begin{vmatrix} -4\pi k \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} & ik\delta \\ 4\pi \delta ik \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} & -2k \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

De esta manera se tiene la siguiente condición (ver [Apéndice E.4](#)),

$$i\nu\mu_l m_1 = m_2 \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) - \Lambda_\delta, \quad (6.19)$$

donde

$$\Lambda_\delta = 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{2}}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{\delta^2}{2}}. \quad (6.20)$$

El término Λ_δ es el factor de acople electromecánico de un aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso. El término topológico introduce una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina. Cuando $\delta = 0$, entonces Λ_δ en (6.20) se transforma en el factor de acople electromecánico para un piezoeléctrico convencional en contacto con un líquido viscoso. Al reemplazar (6.7) y (6.9) en (6.19) se obtiene (ver apéndice E.4)

$$\begin{aligned} & \omega^4 (i\mu_l \rho_l \omega + \rho_m \xi)^2 + [4\xi \Lambda_\delta^2 \rho_m - 2(\xi^2 + \Lambda_\delta^2 + \omega^2 \mu_l^2)(i\omega \rho_l \mu_l + \rho_m \xi)] \omega^2 k^2 \\ & + [(\xi^2 + \Lambda_\delta^2 + \omega^2 \mu_l^2)^2 - 4\xi^2 \Lambda_\delta^2] k^4 = 0, \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde $\xi = \bar{\lambda}^{(1)} = 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} + \lambda^{(1)}$. La ecuación (6.21) permite estudiar la relación de dispersión de las ondas de Bleustein-Gulyaev que se propagan en un aislante topológico piezoeléctrico

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

que está en contacto con un líquido viscoso. Si despreciamos la densidad ρ_l y la viscosidad μ_l en el líquido, la ecuación (6.21) se reduce a

$$\omega^4 \rho_m^2 \xi^2 - 2\rho_m \xi (\xi^2 - \Lambda_\delta^2) \omega^2 k^2 + (\xi^2 - \Lambda_\delta^2)^2 k^4 = 0. \quad (6.22)$$

De la ecuación (6.22), se obtiene la relación de dispersión para las ondas superficiales de Bleustein-Gulyaev en un aislante topológico piezoeléctrico. Por otro parte, si se desprecian las propiedades topológicas del piezoeléctrico, entonces la ecuación (6.21) se modifica y se obtiene una ecuación que permite estudiar la relación de dispersión de las ondas de Bleustein-Gulyaev que se propagan en un piezoeléctrico convencional que está en contacto con un líquido viscoso (Guo & Sun, 2008).

6.5 Velocidad de Fase y Atenuación de las Ondas Bleustein-Gulyaev en la Superficie de un Aislante Topológico Piezoeléctrico en Contacto con un Líquido Viscoso

En esta sección estudiaremos la velocidad de fase y la atenuación de las ondas de Bleustein-Gulyaev en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO que está en contacto con un líquido viscoso. Las propiedades del piezoeléctrico en unidades CGS se muestran la [Tabla 4.1](#).

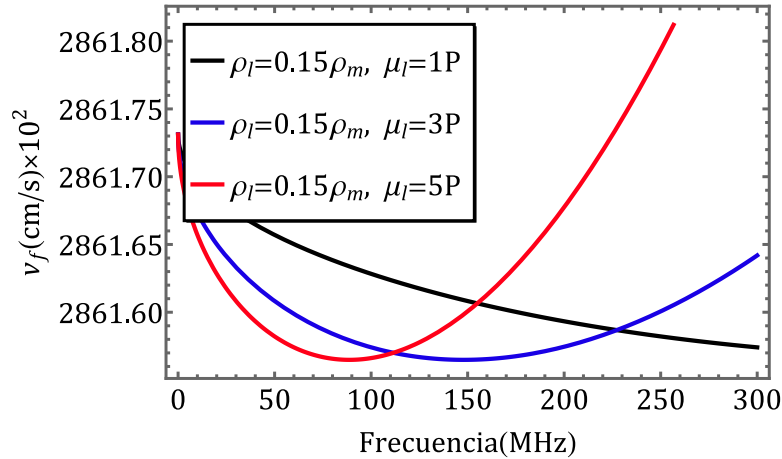


Figura 6. 2: Velocidad de fase $v_f = \omega/Rek$ en función de la frecuencia para las ondas Bleustein-Gulyaev que se propagan en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO . Se consideran tres casos, en los cuales el cristal se coloca en contacto con un líquido viscoso diferente. La línea de color negro representa la velocidad de fase para el cristal con un líquido de densidad $\rho_l = 0.15\rho_m$ y viscosidad $\mu_l = 1P$, la línea azul para un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 3P$ y la línea roja para un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 5P$. Los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$.

En la Figura 6.2 se muestra el comportamiento de la velocidad de fase v_f en función de la frecuencia para las ondas Bleustein-Gulyaev que se propagan en un cristal piezoeléctrico topológico ZnO/CdO que se coloca en contacto con un líquido viscoso. Estas curvas se obtuvieron a partir de los valores reales de la ecuación (6.21) y con ayuda de la relación $v_f = \omega/Rek$. En la figura se presentan tres velocidades de fase para tres casos diferentes, en los cuales el ZnO/CdO se pone en contacto con un líquido viscoso diferente para cada caso. Para

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

frecuencias en un intervalo de 0 y $\sim 80\text{MHz}$, las velocidades de fase son monótonamente decrecientes en los tres casos. Por debajo de los $\sim 80\text{MHz}$, se observa que las velocidades de fase se reducen cuando la viscosidad del líquido se incrementa. Dentro de este intervalo, las curvas para los tres casos se presentan de la siguiente manera:

- (1) La curva más alta (línea color negro) siempre corresponde a la velocidad de fase para las ondas en el cristal en contacto con un líquido de densidad $\rho_l = 0.15\rho_m$ y viscosidad $\mu_l = 1P$.
- (2) La curva más baja (línea de color rojo) siempre corresponde al caso en que el cristal se coloca en contacto con un líquido de $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 5P$.
- (3) La curva de color azul se encuentra en medio de las curvas de color negro y rojo. Esta, corresponde al caso en que el cristal se coloca en contacto con un líquido $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 3P$.

Sin embargo, por encima de los $\sim 125\text{MHz}$, la velocidad de fase más baja crece rápidamente con la frecuencia, hasta tal punto, que se coloca por encima de las curvas negra y azul. La curva azul, por su parte, también crece, superando la línea negra, pero por debajo de la línea roja. Se concluye que, para valores de frecuencia en el intervalo $[0, 80\text{ MHz}]$, la velocidad de fase de las ondas Bleustein-Gulyaev en esta configuración (ZnO/CdO -líquido viscoso) se reduce con el incremento de la viscosidad del líquido. Sin embargo, si superamos los $\sim 80\text{ MHz}$ las velocidades de fase crecen monótonamente. Para valores de frecuencia superiores a los $\sim 125\text{MHz}$, el incremento en la viscosidad del líquido puede ocasionar un crecimiento en la velocidad de fase de las ondas.

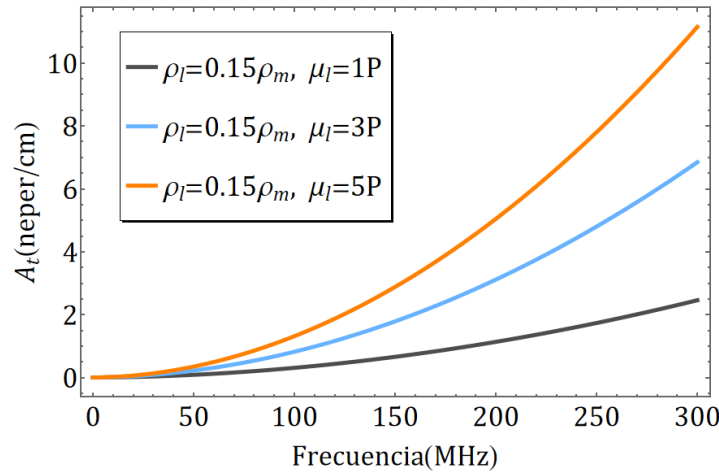


Figura 6. 3: Atenuación $A_t = Imk$ en función de la frecuencia para las ondas de Bleustein-Gulyaev que se propagan en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO . Se consideran tres casos, en los cuales el cristal se coloca en contacto con un líquido viscoso diferente. La línea de color gris representa la velocidad de fase para el cristal con un líquido de densidad $\rho_l = 0.15\rho_m$ y viscosidad $\mu_l = 1P$, la línea azul claro para un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 3P$ y la línea naranja para un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 5P$. Los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$.

En la figura 6.3 se muestra la influencia que tienen los cambios de frecuencia en la atenuación A_t de las ondas Bleustein-Gulyaev para la misma configuración (ZnO/CdO -líquido viscoso).

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

Estas curvas se obtuvieron a partir de los valores imaginarios de la ecuación (6.21) y con ayuda de la relación $A_t = Imk$. Se observa un crecimiento monótono de la atenuación con el incremento de la frecuencia. Adicionalmente, el incremento en la viscosidad del líquido aumenta la atenuación de la onda.

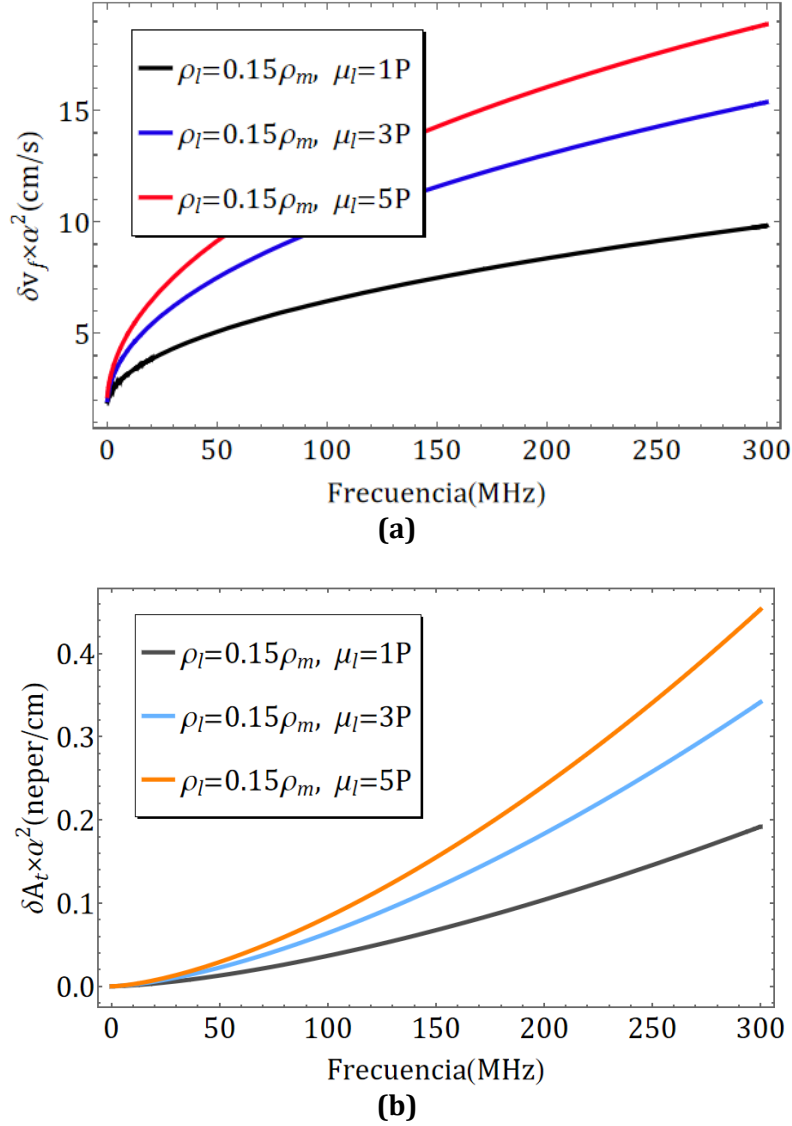


Figura 6. 4: (a) Correcciones inducidas por la presencia del parámetro topológico en la velocidad de fase δv_f en función de la frecuencia. (b) Correcciones inducidas por la presencia del parámetro topológico en la atenuación δA_t en función de la frecuencia.

Como se demostró en la [sección 6.4](#), las propiedades topológicas del cristal introducen correcciones en el factor de acople electromecánico Λ_δ , el cual se define por la ecuación (6.20). En las figuras 6.4(a) y 6.4(b) se muestran los cambios que produce la presencia del término topológico en la velocidad de fase y la atenuación de las ondas Bleustein-Gulyaev. Se observa que la corrección topológica crece con la frecuencia. Además, para una frecuencia determinada, la corrección topológica decrece cuando la viscosidad del líquido se reduce.

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

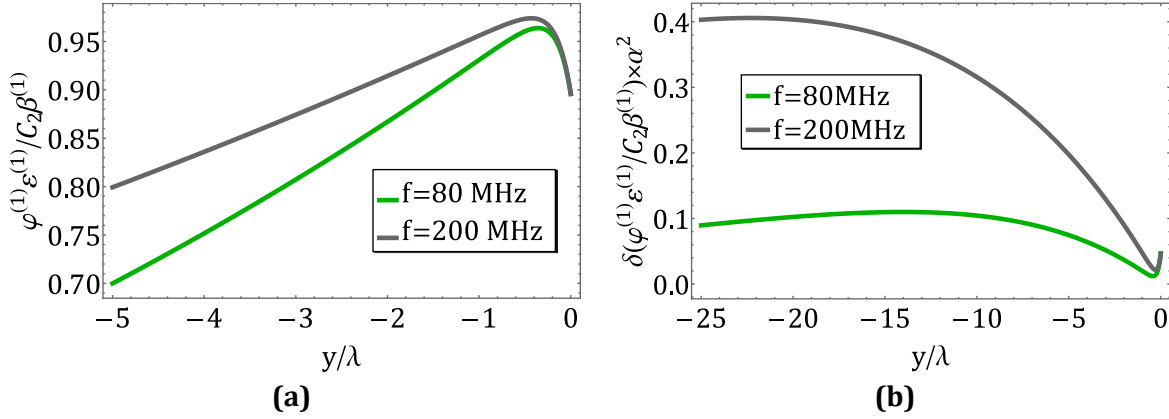


Figura 6. 5: **(a)**Distribución del potencial escalar relativo $\varphi^{(1)}\varepsilon^{(1)}/C_2\beta^{(1)}$ en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO (los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$) en contacto con un líquido de densidad $\rho_l = 0.15\rho_m$ y viscosidad $\mu_l = 5P$. **(b)** Corrección topológica en el potencial escalar relativo (línea verde $f = 80MHz$, línea gris $f = 200MHz$).

De forma similar, estudiamos los efectos que tiene el término topológico en el potencial escalar y las deformaciones dentro del cristal. Con ayuda de (6.6) y (6.17) obtenemos la distribución $\varphi^{(1)}(y)$ del potencial escalar en términos de C_2 ,

$$\varphi^{(1)}(y) = -\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}C_2 \left(e^{m_2ky} - \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha^2}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha^2} e^{ky} \right), \quad (6.23)$$

donde m_2 esta dado por la ecuación (6.7). En la figura 6.5(a) se muestra el comportamiento que tiene el potencial escalar relativo $|\varepsilon^{(1)}\varphi^{(1)}/4\pi C_2\beta^{(1)}|$ con respecto a y/λ (donde λ es la longitud de onda). Estas curvas se realizaron con ayuda de la ecuación (6.21) para un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO (los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$) en contacto con un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 5P$. Además, se usaron dos frecuencias: la línea verde corresponde a una onda cuya frecuencia es de $80MHz$ y la línea gris corresponde a una onda con una frecuencia de $200MHz$. El incremento en la frecuencia produce un aumento en la magnitud del potencial escalar relativo. Se puede observar que el potencial escalar penetra en el cristal una longitud equivalente a cinco veces la longitud de onda. Cuando nos acercamos a la superficie del material en la región $-1 < y/\lambda < 0$ la magnitud del potencial escalar relativo alcanza su máximo ~ 0.975 . En la superficie $y = 0$ el potencial escalar no se anula debido a las propiedades dieléctricas y topológicas del cristal. Este valor esta dado por

$$\frac{\varepsilon^{(1)}\varphi^{(1)}(0)}{4\pi C_2\beta^{(1)}} = 1 - \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha^2}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha^2}. \quad (6.24)$$

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

En la figura 6.5(b) se presenta la corrección que introduce el termino topológico en la magnitud del potencial escalar relativo $\delta|\varepsilon^{(1)}\varphi^{(1)}/4\pi C_2\beta^{(1)}|$. En $y = 0$ esta corrección se aproxima a cero, es independiente de la frecuencia y está dada por

$$\delta\left|\frac{\varepsilon^{(1)}\varphi^{(1)}(0)}{4\pi C_2\beta^{(1)}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^{(1)}\alpha^2}{(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)})\left(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha^2\right)}\right|. \quad (6.25)$$

Para $y/\lambda < -1$, el incremento en la frecuencia ocasiona un incremento de la corrección. En la figura 6.6(a) se muestra la deformación relativa $u_z^{(1)}(y)/C_2$ que se obtiene de las ecuaciones (6.6), (6.17) y (6.21). Las deformaciones decrecen de forma exponencial a medida que aumenta la profundidad en el cristal y logran penetrar una longitud equivalente a treinta veces la longitud de onda.

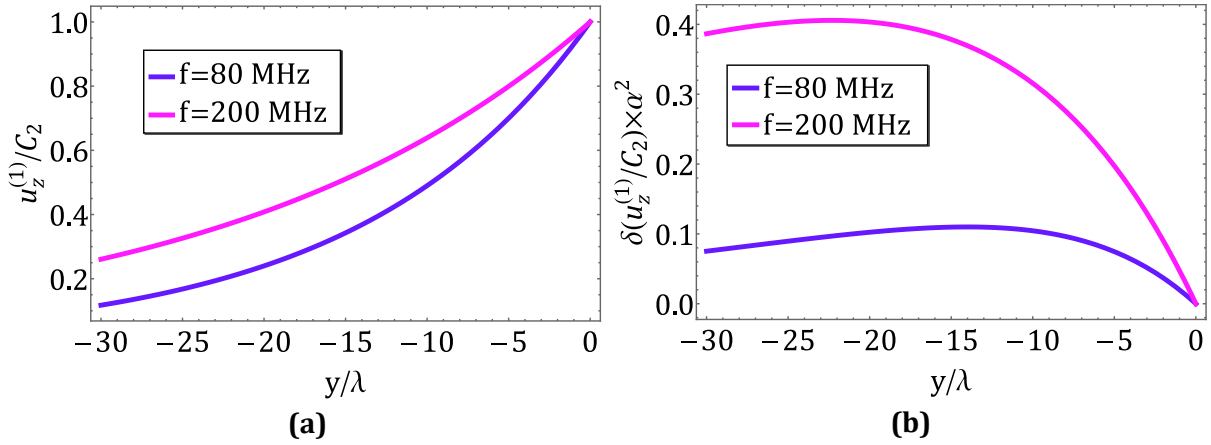


Figura 6. 6: **(a)** Distribución de la deformación relativa $u_z^{(1)}/C_2$ en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO en contacto con un líquido con $\rho_l = 0.15\rho_m$ y $\mu_l = 5P$. Los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$. **(b)** Corrección topológica en la deformación relativa (línea violeta $f = 80MHz$, línea fuxia $f = 200MHz$).

En la figura 6.6(b) se presenta la corrección que introduce el término topológico en la deformación relativa $\delta|u_z^{(1)}(y)/C_2|$. Para una frecuencia de $200MHz$, esta corrección se incrementa conforme nos adentramos en el cristal hasta alcanzar su máximo en $y/\lambda \sim -22$, a partir de ahí, comienza a decrecer. Al reducir la frecuencia hasta $80MHz$, la corrección alcanza su máximo en $y/\lambda \sim -14$ y luego comienza a decrecer. De esta manera, al reducir la frecuencia, la corrección topológica alcanza su máximo más cerca de la superficie del cristal. Así mismo, estudiamos el comportamiento que tiene la intensidad magnética dentro del aislante topológico piezoeléctrico. Con ayuda de (6.6) y (6.17) obtenemos la distribución $|B_x^{(1)}(y)|$ de la intensidad magnética en términos de C_2 ,

$$|B_x^{(1)}(y)| = \left| \frac{4\pi k C_2 \beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha^2} e^{ky} \right|. \quad (6.26)$$

6. Aislante topológico piezoeléctrico en contacto con un líquido viscoso

Observe que $|B_x^{(1)}(y)|$ en la ecuación (6.26) se presenta como una perturbación asociada a las propiedades topológicas del cristal. Al despreciar dichas propiedades la intensidad magnética $|B_x^{(1)}(y)|$ se anula.

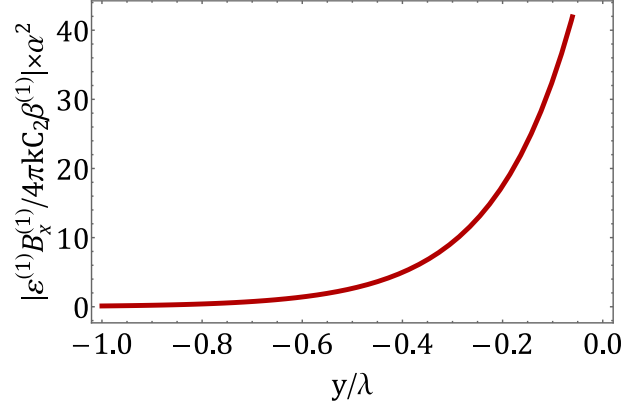


Figura 6. 7: Distribución de la intensidad magnética relativa $|\varepsilon^{(1)}B_x^{(1)}(y)/4\pi kC_2\beta^{(1)}|$ en un aislante topológico piezoeléctrico de ZnO/CdO . Los parámetros topológicos en el sistema son tales que $\delta = \pi$.

En la figura 6.7 se muestra el comportamiento que tiene la intensidad magnética relativa $|\varepsilon^{(1)}B_x^{(1)}(y)/4\pi kC_2\beta^{(1)}|$ con respecto a y/λ . La profundidad con la que penetra la intensidad magnética depende exclusivamente de las propiedades piezoeléctricas y topológicas del cristal. Se puede observar que, el campo magnético penetra en el cristal una profundidad comparable con la longitud de onda. En la superficie $y = 0$ la intensidad magnética está dada por

$$\left| \frac{\varepsilon^{(1)}B_x^{(1)}(0)}{4\pi kC_2\beta^{(1)}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha^2} \right|. \quad (6.27)$$

Observe que la intensidad magnética en (6.27) depende exclusivamente de la propiedades dieléctricas y topológicas del cristal. Cuando se desprecian las propiedades topológicas en el cristal de ZnO/CdO entonces la ecuación (6.27) se hace cero y el campo magnético se anula.

CONCLUSIONES

- En el marco de la electrodinámica del axion junto con el formalismo de la teoría de la elasticidad se propuso una acción que permite describir las propiedades electrodinámicas de un aislante topológico anisotrópico no magnetizable, polarizable, deformable y que posea propiedades piezoeléctricas.
- Con base en el formalismo desarrollado se obtuvieron las relaciones constitutivas para el desplazamiento eléctrico, la inducción magnética y el tensor de deformaciones en un aislante topológico con propiedades piezoeléctricas bajo la acción conjunta de un campo eléctrico, un campo magnético y un conjunto de esfuerzos.
- Se demostró que las polarizaciones asociadas a los estados superficiales del aislante topológico y las deformaciones del cristal reestructuran las relaciones constitutivas y producen un acoplamiento entre los campos elásticos y electrodinámicos que involucran efectos magnetoeléctricos.
- Se encontró que la respuesta del material a las tensiones aplicadas no fue alterada por las polarizaciones asociadas con los estados superficiales del aislante topológico. Por otro lado, el acoplamiento magnetoeléctrico debido al término que involucra los efectos topológicos reestructura el desplazamiento eléctrico y la intensidad magnética de los materiales piezoeléctricos.
- Al considerar propiedades anisotrópicas de un cristal piezoeléctrico topológico de la clase C_{6v} , se encontró que las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de las ondas Bleustein-Gulyaev (B-G) se reestructuran al tener en cuenta las propiedades topológicas del material, mientras que las ecuaciones del movimiento que describen el comportamiento de las ondas de Rayleigh permanecen inalteradas.
- Al examinar la propagación de las ondas B-G en la interface entre un aislante topológico piezoeléctrico de clase C_{6v} y un aislante topológico, se encontró que el término topológico introduce una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina α en el factor de acople electromecánico del material; esta corrección también se manifiesta en la relación de dispersión de las ondas y en su velocidad de fase. Las correcciones inducidas por el parámetro topológico en las relaciones de dispersión crecen con el vector de onda y dependen en gran medida de la magnitud inversa de la permitividad dieléctrica del material involucrado.
- Para el caso de los modos de propagación de onda en una placa piezoeléctrica C_{6v} que posee una topología no trivial, se demostró que los modos guiados piezoeléctricos electroelásticos antisimétricos y simétricos en la placa experimentan una corrección de segundo orden en la constante de estructura fina, la cual está asociada con las propiedades topológicas del material. Se encontró que los modos por cizallamiento de espesor (thickness-shear modes), no presentan cambios asociados al parámetro topológico del material. Para un orden dado del modo guiado por onda, se constató que el cambio de frecuencia inducido por el parámetro topológico aumenta con el vector de onda y para un

Conclusiones

- valor dado del vector de onda, el cambio de frecuencia correspondiente se incrementa con el orden del modo guiado por onda.
- En el caso de ondas de Bleustein- Gulyaev que se propagan en un cristal piezoeléctrico semi-infinito de aislante topológico en contacto con líquidos viscosos, se demostró que la ecuación característica que describe la relación de dispersión de las ondas B-G presenta correcciones de orden cuadrático en la constante de estructura fina asociadas a las propiedades topológicas el material. En relación con la velocidad de fase y la atenuación que presentan las ondas B-G se observó que la corrección que introducen las propiedades topológicas crece con la frecuencia y decrece con la viscosidad del líquido.

Como perspectivas de este trabajo podemos mencionar:

- Las ecuaciones de movimiento y relaciones constitutivas obtenidas en este trabajo se pueden utilizar para estudiar la respuesta electroelástica en configuraciones más complejas, como sistemas multicapa compuestos por aislantes topológicos piezoeléctricos y otros materiales.
- Extender el formalismo de la función de Green para sistemas que contienen aislantes topológicos con propiedades elásticas.
- Examinar los cambios que sufren los coeficientes de transmisión y reflexión en una interface de aislantes topológicos piezoeléctricos.
- Extender el formalismo que se presentó en este trabajo para estudiar los posibles efectos asociados al cambio de simetría en la red cristalina.
- Se ha observado que el piezomagnetismo surge en algunos materiales con propiedades topológicas ([Ikhlas, et al., 2022](#)). La acción discutida en el presente trabajo se puede extender a materiales que exhiben conjuntamente propiedades topológicas y piezomagnéticas. Las correspondientes ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas obtenidas de dicho formalismo podrían usarse para investigar los efectos producidos por la presencia de una topología no trivial sobre el comportamiento de las ondas magnetoelásticas que se propagan en la superficie del cristal.

APENDICE A

A.1 Ley de Gauss Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

En la [sección 2.7](#) se consideró un aislante topológico piezoeléctrico no magnetizable caracterizado por una densidad de masa ρ_m , un tensor de permitividad dieléctrica ε_{ik} , un tensor de módulo de elasticidad λ_{iklm} , un tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$ y un parámetro topológico θ . La acción $S[\varphi, A_k, u_i]$ de este sistema se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 S = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega \\
 & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega,
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

donde φ es el potencial escalar, A_k son las componentes del potencial vectorial y u_i las componentes del vector de deformación. El parámetro α es la constante de estructura fina y $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$ es el tensor de deformación. Para obtener la Ley de Gauss modificada para aislantes topológicos piezoeléctricos dada por la ecuación (2.31), debemos variar la acción (2.22) con respecto al potencial escalar φ ([Landáu & Lifschitz, 2003 II](#)). Si definimos $\delta\varphi$ como el diferencial del potencial escalar y δS_{φ} como el cambio que sufre la acción debido a $\delta\varphi$, entonces al realizar el cambio $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ en (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned}
 S[\varphi + \delta\varphi] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left\{ (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left[\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]^2 \right\} d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} [c\rho(\varphi + \delta\varphi) - A_i J_i] d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right] \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega \\
 & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_l} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

Apéndice A

El segundo miembro en la primera integral de la expresión (A-1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]^2 &= \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right]^2 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

Al despreciar los términos de orden superior $\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right)^2 \cong 0$ (Landáu & Lifschitz, 2003 II), la ecuación (A-2) se reduce a

$$\left[\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right]^2 \cong \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i}. \quad (\text{A-3})$$

Reemplazando (A-3) en (A-1) se obtiene

$$\begin{aligned} S[\varphi + \delta\varphi] &= -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left\{ (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right\} d\Omega \\ &- \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi + c\rho\delta\varphi - A_i J_i) d\Omega \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_l} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

A continuación, reorganizamos la ecuación (A-4) de tal forma que los términos que contienen $\delta\varphi$ queden al final de la ecuación

$$\begin{aligned} S[\varphi + \delta\varphi] &= -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega \\ &- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} d\Omega \\ &- \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[-2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} c\rho\delta\varphi d\Omega \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_l} d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Apéndice A

Observe que, las primeras siete integrales en la ecuación (A-5) corresponden a la acción original $S[\varphi, A_k, u_i]$ que se presenta en (2.22). Así, la expresión (A-5) es equivalente a

$$S[\varphi + \delta\varphi] = S[\varphi] + \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} P_i d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho \delta\varphi d\Omega$$

$$+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_l} d\Omega. \quad (\text{A-6})$$

Puesto que $S[\varphi + \delta\varphi] = S[\varphi] + \delta S_{\varphi}$ en virtud de (2.23), entonces la variación δS_{φ} que se obtiene de (A-6) es

$$\delta S_{\varphi} = \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} d\Omega}_{(1a)} - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} P_i d\Omega}_{(2a)} - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho \delta\varphi d\Omega$$

$$+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \underbrace{\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega}_{(3a)} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \underbrace{\beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_l} d\Omega}_{(4a)}. \quad (\text{A-7})$$

A continuación, integramos por partes. Para ello, reescribimos los términos (1a) – (4a) que aparecen en (A-7) de la siguiente manera:

$$(1a) \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) (\delta\varphi) \right] - \delta\varphi \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right),$$

$$(2a) \quad \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\varphi P_i) - \delta\varphi \frac{\partial P_i}{\partial x_i},$$

$$(3a) \quad \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_i} (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \delta\varphi (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)] - \delta\varphi \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k],$$

$$(4a) \quad \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (\beta_{l,ik} u_{ik} \delta\varphi) - \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} \delta\varphi.$$

Reemplazando (A-8) en (A-7) y reorganizando la nueva expresión encontramos

$$\delta S_{\varphi} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta\varphi \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta\varphi P_i) + \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \delta\varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_l} (\beta_{l,ik} u_{ik} \delta\varphi) \right\} d\Omega \quad (\text{A-9})$$

$$+ \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ -\rho - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} \right\} \delta\varphi d\Omega.$$

Apéndice A

Usando el teorema de Gauss (Landáu & Lifschitz, 2003 II) en los términos de la primera integral de (A-9) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi = & \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta \varphi - \delta \varphi P_i + \frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(\mathbf{r}) \delta \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \beta_{l,ik} u_{ik} \delta \varphi \right\} d\Sigma \\ & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ -\rho - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} \right\} \delta \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

donde Σ es la hipersuperficie que contiene el cuatro volumen Ω . Los límites de integración en (A-10) están en el infinito, donde los campos son cero. De esta manera, la integral sobre Σ se anula. Luego, la ecuación (A-10) se reduce a

$$\begin{aligned} \delta S_\varphi = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\rho}{c} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{1}{c} \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} \right\} \delta \varphi d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

Para que δS_φ en (A-11) se anule, el termino dentro de la integral debe ser igual a cero (Landáu & Lifschitz, 2003 II),

$$-\frac{\rho}{c} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{1}{c} \beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} = 0. \quad (\text{A-12})$$

Reorganizando (A-12) se obtiene la ley de Gauss modificada para aislantes topológicos con propiedades piezoeléctricas,

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + 4\pi\beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l}. \quad (\text{A-13})$$

Al despreciar los efectos de retardo, $\partial A_i / \partial t = 0$, la Ley de Gauss (A-13) se reduce a

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + 4\pi\beta_{l,ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l}. \quad (\text{A-14})$$

A.2 Ley de Ampere Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

Para obtener la Ley de Ampere modificada para aislantes topológicos piezoeléctricos dada por la ecuación (2.39), debemos variar la acción (2.22) con respecto a las componentes A_i del potencial vectorial (Landáu & Lifschitz, 2003 II). Si definimos δA_i como el diferencial del potencial vectorial y δS_A como el cambio que sufre la acción debido a δA_i , entonces al realizar el cambio $A_i \rightarrow A_i + \delta A_i$ en (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned}
 S[A + \delta A] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left\{ \underbrace{[\varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k]^2}_{(1b)} - \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right]^2}_{(2b)} \right\} d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right] P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} [c\rho\varphi - (A + \delta A)_i J_i] d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right] \varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k}_{(3b)} d\Omega + \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-15}$$

A continuación, vamos a examinar los términos (1b) – (3b) de la ecuación (A-15)

$$\begin{aligned}
 (1b) \quad & [\varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k]^2 = (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 + 2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k) + (\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k)^2, \\
 (2b) \quad & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right]^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} + \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \right]^2, \\
 (3b) \quad & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right] \varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \\
 & + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k.
 \end{aligned} \tag{A-16}$$

Al despreciar los términos de orden superior $(\partial(\delta A_i))^2$ en las ecuaciones (A-16) se obtiene

$$\begin{aligned}
 (1b) \quad & [\varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k]^2 \cong (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 + 2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k), \\
 (2b) \quad & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right]^2 \cong \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t}, \\
 (3b) \quad & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial (A + \delta A)_i}{\partial t} \right] \varepsilon_{ijk} \partial_j (A + \delta A)_k \\
 & \cong \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k.
 \end{aligned} \tag{A-17}$$

Al reemplazar, (A-17) en (A-15) encontramos que

$$\begin{aligned}
 S[A + \delta A] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 + 2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 & \left. - \frac{2}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \right] d\Omega - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega \\
 & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i - \delta A_i J_i) d\Omega + \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k \right] d\Omega + \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-18}$$

A continuación, reorganizamos la ecuación (A-18) de tal forma que los términos que contienen δA_i queden al final de la ecuación

$$\begin{aligned}
 S[A + \delta A] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega \\
 & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} u_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega \\
 & - \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k) - \frac{2}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \right] d\Omega \\
 & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} P_i d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k \right] d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-19}$$

Apéndice A

Las primeras siete integrales en (A-19) corresponden a la acción original $S[\varphi, A_k, u_i]$ que se presenta en (2.22). Así, la ecuación (A-19) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 S[A + \delta A] = S[A] &- \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[2(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k) - \frac{2}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \right] d\Omega \\
 &- \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} P_i d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\
 &+ \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k \right] d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-20}$$

Ahora, de la ecuación (2.32) se tiene que $S[A_i + \delta A_i] = S[A_i] + \delta S_A$, entonces la variación δS_A que se obtiene de (A-20) es

$$\begin{aligned}
 \delta S_A = & - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left[\underbrace{(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)(\varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k)}_{(1c)} - \underbrace{\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t}}_{(2c)} \right] d\Omega \\
 & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial \delta A_i}{\partial t} P_i}_{(3c)} d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta A_i J_i d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left[\underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k}_{(4c)} + \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j \delta A_k}_{(5c)} \right] d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-21}$$

A continuación, vamos a examinar los términos (1c) – (5c) que aparecen en la ecuación (A-21). Para los términos (1c) y (5c) usaremos la identidad

$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$	(A-22)
--	--------

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores arbitrarios. Al aplicar (A-22) en los términos (1c) y (5c) de la ecuación (A-21) se obtiene

$$\begin{aligned}
 (1c) \quad (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \delta \mathbf{A}) &= \delta \mathbf{A} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] - \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A}] \\
 &= \delta A_i (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t) - \partial_i (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jst} \partial_s A_t \delta A_k), \\
 (5c) \quad \theta(\mathbf{r}) \left(\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) &= \\
 &= \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \nabla \times \left[\theta(\mathbf{r}) \left(\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \right\} - \nabla \cdot \left\{ \left[\theta(\mathbf{r}) \left(\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \times \delta \mathbf{A} \right\} \\
 &= \delta A_i \left[\varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \right] - \partial_i \left[\varepsilon_{ijk} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) \delta A_k \right].
 \end{aligned} \tag{A-23}$$

Apéndice A

Por otro lado, los términos (2c), (3c) y (4c) se pueden reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
 (2c) \quad & \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta A_i \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta A_i, \\
 (3c) \quad & \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} P_i = \frac{\partial}{\partial t} (\delta A_i P_i) - \delta A_i \frac{\partial P_i}{\partial t}, \\
 (4c) \quad & \frac{1}{c} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \delta A_i}{\partial t} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\delta A_i \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \delta A_i \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k]
 \end{aligned} \tag{A-24}$$

Reemplazando (A-23)-(A-24) en (A-21) y reorganizando la nueva expresión encontramos que

$$\begin{aligned}
 \delta S_A = & -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \partial_i (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jst} \partial_s A_t \delta A_k) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta A_i \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\delta A_i P_i) \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} [\delta A_i \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + \frac{\alpha}{4\pi^2} \partial_i \left[\varepsilon_{ijk} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) \delta A_k \right] \right\} d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{1}{c} J_i \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{\alpha}{4\pi^2} \left[\varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \right] \right\} \delta A_i d\Omega,
 \end{aligned} \tag{A-25}$$

Al utilizar el teorema de Gauss ([Landáu & Lifschitz, 2003 II](#)) en los términos de la primera integral de (A-25) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \delta S_A = & -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \partial_i (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jst} \partial_s A_t \delta A_k) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \delta A_i \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\delta A_i P_i) \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} [\delta A_i \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \partial_i \left[\varepsilon_{ijk} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) \delta A_k \right] \right\} d\Sigma \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{1}{c} J_i \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{\alpha}{4\pi^2} \left[\varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \right] \right\} \delta A_i d\Omega,
 \end{aligned} \tag{A-26}$$

donde Σ es la hipersuperficie que contiene el cuatro volumen Ω . Los límites de integración en (A-26) están en el infinito, donde los campos son cero. De esta manera, la integral sobre Σ se anula. Luego, la ecuación (A-26) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \delta S_A = & -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kst} \partial_s A_t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{1}{c} J_i \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} [\theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k] - \frac{\alpha}{4\pi^2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right) \right\} \delta A_i d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-27}$$

Para que δS_A en (A-27) se anule, el termino dentro de la integral debe ser igual a cero (Landáu & Lifschitz, 2003 II),

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kst}\partial_s A_t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}J_i + \frac{\alpha}{\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\theta(\mathbf{r})\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k] \\ - \frac{\alpha}{\pi}\varepsilon_{ijk}\partial_j\theta(\mathbf{r})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

Al reorganizar la ecuación (A-28) se obtiene la ley de Ampere modificada para aislantes topológicos con propiedades piezoeléctricas,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kst}\partial_s A_t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\alpha}{\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\theta(\mathbf{r})\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k] \\ = \frac{4\pi}{c}J_i + \frac{\alpha}{\pi}\varepsilon_{ijk}\partial_j\theta(\mathbf{r})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

Si despreciamos todas las dependencias del tiempo,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial A_k}{\partial t} = 0, \quad (\text{A-30})$$

entonces, la ley de Ampere (A-29) se transforma en

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kst}\partial_s A_t = \frac{4\pi}{c}J_i + \frac{\alpha}{\pi}\varepsilon_{ijk}\partial_j\theta(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \quad (\text{A-31})$$

A.3 Ecuación de Euler Modificada para Aislantes Topológicos Piezoeléctricos

Para obtener la ecuación de Euler (2.46), debemos variar la acción (2.22) con respecto a las componentes u_i del vector de deformaciones. Si definimos δu_i como el diferencial de las deformaciones y δS_u como el cambio que sufre la acción debido a δu_i , entonces al realizar el cambio $u_i \rightarrow u_i + \delta u_i$ en (2.22) se obtiene

$$\begin{aligned} S[u + \delta u] = & -\frac{1}{8\pi c}\int_{\Omega}\left[(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega - \frac{1}{c}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)P_i d\Omega \\ & - \frac{1}{c^2}\int_{\Omega}(c\rho\varphi - A_i J_i)d\Omega + \frac{\alpha}{4\pi^2 c}\int_{\Omega}\theta(\mathbf{r})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k d\Omega \\ & + \frac{1}{2c}\int_{\Omega}\rho_m \underbrace{\left[\frac{\partial(u + \delta u)_i}{\partial t}\right]^2}_{(1d)} d\Omega - \frac{1}{2c}\int_{\Omega}\lambda_{iklm} \underbrace{\frac{\partial(u + \delta u)_l}{\partial x_m} \frac{\partial(u + \delta u)_i}{\partial x_k}}_{(2d)} d\Omega \\ & + \frac{1}{2c}\int_{\Omega}\beta_{l,ik}\left[\frac{\partial(u + \delta u)_i}{\partial x_k} + \frac{\partial(u + \delta u)_k}{\partial x_i}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A-32})$$

Los términos (1d) y (2d) de la ecuación (A-32) se pueden reescribir como sigue

$$\begin{aligned}
 (1d) \quad & \left[\frac{\partial(u + \delta u)_i}{\partial t} \right]^2 = \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t}, \\
 (2d) \quad & \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \right) \\
 & = \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k}.
 \end{aligned} \tag{A-33}$$

Al despreciar los términos de orden superior $(\partial(\delta u_i))^2$ (Landáu & Lifschitz, 2003 II) en las ecuaciones (A-33) se obtiene

$$\begin{aligned}
 (1d) \quad & \left[\frac{\partial(u + \delta u)_i}{\partial t} \right]^2 \cong \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t}, \\
 (2d) \quad & \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \right) \cong \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m}.
 \end{aligned} \tag{A-34}$$

Reemplazando (A-34) en (A-32) encontramos que

$$\begin{aligned}
 S[u + \delta u] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} \right) d\Omega \\
 & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-35}$$

Apéndice A

A continuación, reorganizamos la ecuación (A-35) de tal forma que los términos que contienen δu_i queden al final de la ecuación

$$\begin{aligned}
 S[u + \delta u] = & -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} \left[(\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \\
 & - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) P_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (c\rho\varphi - A_i J_i) d\Omega \\
 & + \frac{\alpha}{4\pi^2 c} \int_{\Omega} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 d\Omega \\
 & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Omega + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega \\
 & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial \delta u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-36}$$

Las primeras siete integrales en (A-36) corresponden a la acción original $S[\varphi, A_k, u_i]$ que se presenta en (2.22). Así, la ecuación (A-36) se reduce a

$$\begin{aligned}
 S[u + \delta u] = & S[u] + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial \delta u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-37}$$

Ahora, de la ecuación (2.40) se tiene que $S[u_i + \delta u_i] = S[u_i] + \delta S_u$, entonces la variación δS_u que se obtiene de (A-37) está dada por

$$\begin{aligned}
 \delta S_u = & \frac{1}{c} \int_{\Omega} \underbrace{\rho_m \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t}}_{(1e)} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \underbrace{\lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right)}_{(2e)} d\Omega \\
 & + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \underbrace{\beta_{l,ik} \left(\frac{\partial \delta u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{(3e)} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{A-38}$$

Reescribamos los términos (1e) – (3e) que aparecen en (A-38) de la siguiente forma

$$(1e) \quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \delta u_i \tag{A-39}$$

$$\begin{aligned}
 (2e) \quad \lambda_{iklm} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \right) &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \lambda_{iklm} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_m} \\
 &= \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \lambda_{abcd} \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \frac{\partial \delta u_c}{\partial x_d} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \lambda_{lmik} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \\
 &= (\lambda_{iklm} + \lambda_{lmik}) \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = 2\lambda_{iklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \\
 &= 2\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - 2\lambda_{iklm} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \quad (A-40) \\
 &= 2\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{iklm} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{iklm} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) \\
 &= 2\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{iklm} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{ikab} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right) \\
 &= 2\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{iklm} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{ikml} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \\
 &= 2\lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \delta u_i,
 \end{aligned}$$

donde $\lambda_{iklm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}$, de acuerdo con la ecuación (2.5).

$$\begin{aligned}
 (3e) \quad \beta_{l,ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) &= \beta_{l,ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \beta_{l,ik} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) - \beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\beta_{l,ik} \delta u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) - \beta_{l,ik} \delta u_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\beta_{l,ik} \delta u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) - \left[\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) + \beta_{l,ik} \delta u_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] \quad (A-41) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_c} \left(\beta_{l,cd} \delta u_d \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) - \left[\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) + \beta_{l,ab} \delta u_b \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\beta_{l,ik} + \beta_{l,ki}) \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right] - (\beta_{l,ik} + \beta_{l,ki}) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \delta u_i \\
 &= 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) - 2\beta_{l,ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \delta u_i,
 \end{aligned}$$

donde $\beta_{l,ik} = \beta_{l,ki}$, de acuerdo con la ecuación (2.8). Reemplazando (A-39)-(A-41) en (A-38) y reorganizando la nueva expresión encontramos que

$$\begin{aligned}
 \delta S_u &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i \right) - \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] d\Omega \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[-\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) - \beta_{l,ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] \delta u_i d\Omega. \quad (A-42)
 \end{aligned}$$

Apéndice A

Usando el teorema de Gauss (Landáu & Lifschitz, 2003 II) en los términos de la primera integral de (A-42) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_u = & \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \left[\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i \right) - \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\delta u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\beta_{l,ik} \delta u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] d\Sigma \\ & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[-\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) - \beta_{l,ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] \delta u_i d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A- 43})$$

donde Σ es la hipersuperficie que contiene el cuatro volumen Ω . Los límites de integración en (A-43) están en el infinito, donde los campos son cero. De esta manera, la integral sobre Σ se anula. Luego, la ecuación (A-43) se reduce a

$$\delta S_u = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left[-\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} - \beta_{l,ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) \right] \delta u_i d\Omega, \quad (\text{A- 44})$$

donde $u_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)$, de acuerdo con (2.4). Para que δS_u en (A-44) se anule, el termino dentro de la integral debe ser igual a cero,

$$-\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} - \beta_{l,ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \quad (\text{A- 45})$$

Reorganizando (A-45) se obtiene

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm} \frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} - \beta_{l,ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_l}. \quad (\text{A- 46})$$

La ecuación (A-46) determina el acople entre las deformaciones y el potencial escalar en el aislante topológico piezoeléctrico.

APENDICE B

B.1 Relaciones Constitutivas en un Cristal piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

B.1.1 Componentes del Desplazamiento Eléctrico en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

La componente i -ésima del vector de desplazamiento eléctrico en un aislante topológico está dada por la ecuación (2.52)

$$D_i = -\varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k - 4\pi \beta_{i,pq} u_{pq}, \quad (2.52)$$

donde $u_{pq} = u_{qp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right)$ y los subíndices i, j, k, p, q varían con x, y, z . Así, las componentes D_x , D_y y D_z que se obtienen de (2.52) se escriben como

$$D_x = - \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - 4\pi (\beta_{x,xx} u_{xx} + 2\beta_{x,xy} u_{xy} + 2\beta_{x,xz} u_{xz} + \beta_{x,yy} u_{yy} + 2\beta_{x,yz} u_{yz} + \beta_{x,zz} u_{zz}), \quad (B-1)$$

$$D_y = - \left(\varepsilon_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(-\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - 4\pi (\beta_{y,xx} u_{xx} + 2\beta_{y,xy} u_{xy} + 2\beta_{y,xz} u_{xz} + \beta_{y,yy} u_{yy} + 2\beta_{y,yz} u_{yz} + \beta_{y,zz} u_{zz}), \quad (B-2)$$

$$D_z = - \left(\varepsilon_{zx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varepsilon_{zy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varepsilon_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - 4\pi (\beta_{z,xx} u_{xx} + 2\beta_{z,xy} u_{xy} + 2\beta_{z,xz} u_{xz} + \beta_{z,yy} u_{yy} + 2\beta_{z,yz} u_{yz} + \beta_{z,zz} u_{zz}), \quad (B-3)$$

donde $\beta_{l,ik} = \beta_{l,ki}$. Por otro lado, en un cristal piezoeléctrico de la clase C_{6v} las componentes no nulas del tensor de módulos de elasticidad λ_{iklm} , el tensor piezoeléctrico $\beta_{l,ik}$ y el tensor de permitividad dieléctrica ε_{ik} están dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{zz}, \quad (3.6)$$

$$\lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xyxy}, \quad \lambda_{xxyy}, \quad \lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} = -2\lambda_{xyxy}, \quad \lambda_{xzzx} = \lambda_{yzyz}, \quad \lambda_{zzzz} \quad (3.8)$$

$$\beta_{z,zz}, \quad \beta_{x,xz} = \beta_{x,zx} = \beta_{y,yz} = \beta_{y,zy}, \quad \beta_{z,xx} = \beta_{z,yy}, \quad (3.10)$$

Así, las componentes (B-1)-(B-3) se reducen a

$$D_x = -\varepsilon_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - 8\pi \beta_{x,xz} u_{xz}, \quad (\text{B- 4})$$

$$D_y = -\varepsilon_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - 8\pi \beta_{y,yz} u_{yz}, \quad (\text{B- 5})$$

$$D_z = -\varepsilon_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - 4\pi (\beta_{z,xx} u_{xx} + \beta_{z,yy} u_{yy} + \beta_{z,zz} u_{zz}). \quad (\text{B- 6})$$

Adicionalmente, se considera que el cristal se extiende indefinidamente en la dirección $\mathbf{z}$ por lo tanto hay homogeneidad en esa dirección, es decir que las magnitudes físicas no dependen explícitamente de z (las derivas con respecto a z son nulas). Lo anterior, conlleva a que las componentes del tensor de deformaciones se reduzcan a $u_{qz} = u_{zq} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x_q}$. Luego, las ecuaciones (B-4)-(B-6) se transforman en

$$D_x = -\varepsilon_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} - 4\pi \beta_{x,xz} \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (\text{B- 7})$$

$$D_y = -\varepsilon_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} - 4\pi \beta_{y,yz} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad (\text{B- 8})$$

$$D_z = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - 4\pi \left(\beta_{z,xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \beta_{z,yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (\text{B- 9})$$

B.1.2 Componentes de la Intensidad Magnética en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

La componente k -ésima del vector de intensidad magnética en un aislante topológico está determinada por la expresión (2.56)

$$H_k = \varepsilon_{kst} \partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.56)$$

donde los subíndices k, s, t varían con x, y, z . Luego, las componentes H_x, H_y y H_z se escriben como sigue

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{B- 10})$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{B- 11})$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{B- 12})$$

Apéndice B

Recordemos que, debido a la homogeneidad en z se tiene que $(\partial/\partial z) \rightarrow 0$. Con esta consideración, las expresiones (B-10)-(B-12) se reducen a

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{B- 13})$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{B- 14})$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (\text{B- 15})$$

B.1.3 Componentes del Tensor de Esfuerzos en un Cristal Piezoeléctrico Topológico de la Clase C_{6v}

Como se vio en la [sección 2.11](#), las componentes del tensor de esfuerzos σ_{ik} están dadas por la ecuación (2.58)

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} - \beta_{l,ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}, \quad (2.58)$$

donde los subíndices i, j, k, l, m varían con x, y, z . Luego, las componentes del tensor σ_{ik} (se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \lambda_{xxxx} u_{xx} + \lambda_{xxxy} u_{xy} + \lambda_{xxxz} u_{xz} + \lambda_{xxyx} u_{yx} + \lambda_{xxyy} u_{yy} + \lambda_{xxyz} u_{yz} \\ & + \lambda_{xxzx} u_{zx} + \lambda_{xxzy} u_{zy} + \lambda_{xxzz} u_{zz} - \beta_{x,xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta_{y,xx} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta_{z,xx} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B- 16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = & \lambda_{xyxx} u_{xx} + \lambda_{xyxy} u_{xy} + \lambda_{xyxz} u_{xz} + \lambda_{xyyx} u_{yx} + \lambda_{xyyy} u_{yy} + \lambda_{xyyz} u_{yz} \\ & + \lambda_{xyzx} u_{zx} + \lambda_{xyzy} u_{zy} + \lambda_{xyzz} u_{zz} - \beta_{x,xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta_{y,xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta_{z,xy} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B- 17})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = & \lambda_{zxxx} u_{xx} + \lambda_{zxxy} u_{xy} + \lambda_{zxxz} u_{xz} + \lambda_{zxxy} u_{yx} + \lambda_{zxzy} u_{yy} + \lambda_{zxzy} u_{yz} \\ & + \lambda_{zxzx} u_{zx} + \lambda_{zxzy} u_{zy} + \lambda_{zxzz} u_{zz} - \beta_{x,xz} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta_{y,xz} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta_{z,xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B- 18})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \lambda_{yyxx} u_{xx} + \lambda_{yyxy} u_{xy} + \lambda_{yyxz} u_{xz} + \lambda_{yyyx} u_{yx} + \lambda_{yyyy} u_{yy} + \lambda_{yyyz} u_{yz} \\ & + \lambda_{yyzx} u_{zx} + \lambda_{yyzy} u_{zy} + \lambda_{yyzz} u_{zz} - \beta_{x,yy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta_{y,yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta_{z,yy} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B- 19})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = & \lambda_{yzxx} u_{xx} + \lambda_{yzxy} u_{xy} + \lambda_{yzxz} u_{xz} + \lambda_{zyyx} u_{yx} + \lambda_{zyyy} u_{yy} + \lambda_{zyyz} u_{yz} \\ & + \lambda_{yzzx} u_{zx} + \lambda_{yzyy} u_{zy} + \lambda_{yzzz} u_{zz} - \beta_{x,yz} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta_{y,yz} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta_{z,yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B- 20})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zzxx} u_{xx} + \lambda_{zzxy} u_{xy} + \lambda_{zzxz} u_{xz} + \lambda_{zzyx} u_{yx} + \lambda_{zzyy} u_{yy} + \lambda_{zzyz} u_{yz} \quad (\text{B- 21})$$

Apéndice B

$$+\lambda_{zzzx}u_{zx} + \lambda_{zzzy}u_{zy} + \lambda_{zzzz}u_{zz} - \beta_{x,zz}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta_{y,zz}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \beta_{z,zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Recordemos que las componentes no nulas de los tensores λ_{iklm} y $\beta_{l,ik}$ están determinadas por las ecuaciones (3.8) y (3.10). Luego, las componentes (B-16) y (B-21) se reducen a

$$\sigma_{xx} = \lambda_{xxxx}u_{xx} + \lambda_{xxyy}u_{yy} + \lambda_{xxzz}u_{zz} - \beta_{z,xx}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (\text{B- 22})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \lambda_{xyxy}u_{xy} + \lambda_{xyyx}u_{yx}, \quad (\text{B- 23})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \lambda_{xzxz}u_{xz} + \lambda_{xzzx}u_{zx} - \beta_{x,xz}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (\text{B- 24})$$

$$\sigma_{yy} = \lambda_{yyxx}u_{xx} + \lambda_{yyyy}u_{yy} + \lambda_{yyzz}u_{zz} - \beta_{z,yy}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (\text{B- 25})$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \lambda_{yzyz}u_{yz} + \lambda_{yzzz}u_{zy} - \beta_{y,yz}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (\text{B- 26})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zzxx}u_{xx} + \lambda_{zzyy}u_{yy} + \lambda_{zzzz}u_{zz} - \beta_{z,zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (\text{B- 27})$$

Puesto que, $u_{qz} = u_{zq} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x_q}$ entonces las componentes (B-22)-(B-27) se reducen de nuevo a

$$\sigma_{xx} = \lambda_{xxxx}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{xxyy}\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (\text{B- 28})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \lambda_{xyxy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad (\text{B- 29})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \lambda_{xzxz}\frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_{x,xz}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (\text{B- 30})$$

$$\sigma_{yy} = \lambda_{yyxx}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{yyyy}\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (\text{B- 31})$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \lambda_{yzyz}\frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_{y,yz}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (\text{B- 32})$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zzxx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right). \quad (\text{B- 33})$$

B.2 Ecuaciones de movimiento en un cristal piezoeléctrico topológico de la clase C_{6v}

B.2.1 Ley de Gauss en un Cristal Piezoeléctrico Topológico C_{6v}

Como se vio en la [sección 3.5.2](#), la ley de Gauss modificada para un aislante topológico piezoeléctrico en ausencia de fuentes de carga ρ y corrientes de conducción J_i está dada (3.23).

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.23)$$

Al sustituir (B-7)-(B-9) en (3.23) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\varepsilon_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} - 4\pi \beta_{x,xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\varepsilon_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} - 4\pi \beta_{y,yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] = 0, \\ -\varepsilon_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - 4\pi \beta_{x,xz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ - \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] - 4\pi \beta_{y,yz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0. \\ \varepsilon_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - \frac{\alpha}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta(\mathbf{r}) \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ + 4\pi \left(\beta_{x,xz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \beta_{y,yz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (B-34)$$

donde $\partial D_z / \partial z = 0$ debido a la homogeneidad que existe en el eje z .

B.2.2 Ley de Ampere en un Cristal Piezoeléctrico Topológico C_{6v}

La ley de Ampere modificada para un aislante topológico piezoeléctrico en ausencia de corrientes de conducción J_i esta dada por la ecuación (3.24).

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j H_k = 0, \quad (3.24)$$

donde

$$H_k = \varepsilon_{kst} \partial_s A_t - \frac{\alpha}{\pi} \theta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (2.56)$$

La ecuación (3.24) se puede escribir como

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_i - \frac{\alpha}{\pi} [\nabla \times \theta(\mathbf{r}) \nabla \varphi]_i = 0. \quad (B-35)$$

Puesto que,

$$[\nabla \times (\nabla \times A)]_i = [\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A]_i, \quad (\text{B- 36})$$

$$[\nabla \times \theta(\mathbf{r})\nabla\varphi]_i = [\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi]_i + [\theta(\mathbf{r})(\nabla \times \nabla\varphi)]_i = [\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi]_i, \quad (\text{B- 37})$$

donde $\nabla \times \nabla\varphi = 0$, entonces (B-35) se convierte en

$$[\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A]_i - \frac{\alpha}{\pi} [\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi]_i = 0. \quad (\text{B- 38})$$

Si consideramos el gauge $\nabla \cdot A = 0$, entonces la ecuación (B-38) se reduce a

$$[\nabla^2 A]_i + \frac{\alpha}{\pi} [\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi]_i = 0. \quad (\text{B- 39})$$

Las componentes del segundo término al lado izquierdo de la igualdad en la ecuación (B-39) están dadas por

$$[\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial x} & \frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 \end{vmatrix},$$

$$[\nabla\theta(\mathbf{r}) \times \nabla\varphi]_z = \frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (\text{B- 40})$$

Observe que las derivadas con respecto a z son nulas debido a la condición de homogeneidad en el eje z . De este modo, las componentes en (B-39) son

$$\nabla^2 A_x = 0, \quad (\text{B- 41})$$

$$\nabla^2 A_y = 0, \quad (\text{B- 42})$$

$$\nabla^2 A_z + \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\theta(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right] = 0. \quad (\text{B- 43})$$

B.2.3 Dinámica de las Deformaciones en un Cristal Piezoelectrico Topológico C_{6v}

Partimos de la ecuación (3.25)

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (\text{3. 33})$$

Apéndice B

Al sustituir las componentes (B-28)-(B-33) del tensor de esfuerzos en la ecuación (3.25), se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones diferenciales:

- Para $i = x$

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{xxxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{xxyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_{xyxy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right], \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \lambda_{xxxx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda_{xxyy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \lambda_{xyxy} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right).\end{aligned}\tag{B- 44}$$

- Para $i = y$

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{xyxy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_{yyxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda_{yyyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right], \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \lambda_{xyxy} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + \lambda_{yyxx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \lambda_{yyyy} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}.\end{aligned}\tag{B- 45}$$

- Para $i = z$

$$\begin{aligned}\rho_m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}, \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{xzzx} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_{x,xz} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_{yzzy} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_{y,yz} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right], \\ \rho_m \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \lambda_{xzzx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \lambda_{zyzy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \beta_{x,xz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta_{y,yz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.\end{aligned}\tag{B- 46}$$

APENDICE C

C.1 Campos en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Aislante Topológico

En esta sección se obtienen las soluciones para las ecuaciones diferenciales involucradas en cada una de las regiones del sistema aislante topológico piezoeléctrico/ aislante topológico.

- Región 1 ($y < h$): Como se demostró en la [sección 4.1](#), las ecuaciones diferenciales (4.12), (4.13) y (4.14) definen apropiadamente el comportamiento de $\varphi^{(1)}$, $A_z^{(1)}$ y $u_z^{(1)}$ en la región 1 ($y < h$) para este sistema son

$$\nabla^2 \psi^{(1)} = 0, \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0, \quad (4.13)$$

$$\rho_m \ddot{u}_z^{(1)} = \bar{\lambda}^{(1)} \nabla^2 u_z^{(1)}, \quad (4.14)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$, $\ddot{u}_z^{(1)} = \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial t^2}$ y $\bar{\lambda}^{(1)} = \lambda^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}}$. Debido a la homogeneidad del sistema en la dirección x , la forma general de las soluciones de (4.12)-(4.14) está dada como sigue

$$F^{(1)}(x, y; t) = F^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}, \quad (C-1)$$

donde $F^{(1)}(y)$ es una función que describe el comportamiento de los campos en la dirección y , ω es la frecuencia y k_x es la componente x del vector de onda. De esta manera, para la ecuación (4.12) se propone una solución de la forma

$$\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(x, y; t) = \psi^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}. \quad (C-2)$$

Al reemplazar (C-2) en (4.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [\psi^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}] &= 0, \\ \left[-\psi^{(1)}(y) k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(1)}(y) \right] e^{ik_x x} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(1)}(y) - k_x^2 \psi^{(1)}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (C-3)$$

Apéndice C

La solución de la nueva ecuación diferencial (C-3) para $\psi^{(1)}(y)$ es

$$\psi^{(1)}(y) = B e^{ky}, \quad (C-4)$$

donde $k = k_x$ y B es la amplitud del potencial $\psi^{(1)}$ en la región 1 ($y < 0$). La estructura de la ecuación (C-4), se debe a que la función $\psi^{(1)}(y)$ debe anularse cuando $y \rightarrow -\infty$ pero alcanza su valor máximo cuando $y \rightarrow 0$. Al reemplazar la solución (C-4) en la ecuación (C-2) se obtiene la siguiente expresión:

$$\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(x, y; t) = B e^{ky} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (C-5)$$

donde $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$. De forma similar, para la ecuación (4.13) consideramos una solución de la forma

$$A_z^{(1)} = A_z^{(1)}(x, y; t) = A_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}. \quad (C-6)$$

Al reemplazar, la ecuación (C-6) en la ecuación diferencial (4.13)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [A_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}] &= 0, \\ \left[-A_z^{(1)}(y) k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z^{(1)}(y) \right] e^{ik_x x} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z^{(1)}(y) - k_x^2 A_z^{(1)}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (C-7)$$

La solución de la nueva ecuación diferencial (C-7) para $A_z^{(1)}(y)$ es

$$A_z^{(1)}(y) = D e^{ky}, \quad (C-8)$$

donde $k = k_x$ y D es la amplitud de la componente $A_z^{(1)}$ del potencial vectorial en la región 1 ($y < 0$). Al Reemplazar la solución (C-8) en la ecuación (C-6) se obtiene

$$A_z^{(1)} = A_z^{(1)}(x, y; t) = D e^{ky} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (C-9)$$

Esta solución es equivalente a la ecuación (4.20) que se muestra en la sección (4.2). Por otro lado, para el caso de la ecuación (4.14), se considera una solución de la forma

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(x, y; t) = u_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}. \quad (C-10)$$

Al reemplazar la ecuación (C-10) en (C-14)

$$\begin{aligned}
 \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}] &= \bar{\lambda}^{(1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [u_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}], \\
 -\frac{\omega^2 \rho_m}{\bar{\lambda}^{(1)}} u_z^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t} &= -u_z^{(1)}(y) (k_x^2) e^{ik_x x} e^{-i\omega t} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y) \right] e^{ik_x x} e^{-i\omega t}, \\
 -\frac{\omega^2 \rho_m}{\bar{\lambda}^{(1)}} u_z^{(1)}(y) &= -k_x^2 u_z^{(1)}(y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y), \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(1)}(y) - \left(k_x^2 - \frac{\omega^2 \rho_m}{\bar{\lambda}^{(1)}} \right) u_z^{(1)}(y) &= 0, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(1)}(y) - \kappa^2 u_z^{(1)}(y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{C-11}$$

donde

$$\kappa^2 = k_x^2 - \frac{\omega^2 \rho_m}{\bar{\lambda}^{(1)}}. \tag{C-12}$$

La magnitud κ en (C-12) determina la distribución de los campos elásticos en la dirección y . Al solucionar la ecuación diferencial (C.11) se obtiene

$$u_z^{(1)}(y) = A e^{\kappa y}, \tag{C-13}$$

donde A es la amplitud de la componente z de las deformaciones en el aislante topológico piezoeléctrico de la región 1 ($y < 0$). Al sustituir la solución (C-13) en (C-10) encontramos que

$$u_z^{(1)} = u_z^{(1)}(x, y, t) = A e^{\kappa y} e^{i(kx - \omega t)}. \tag{C-14}$$

Esta solución es equivalente a la ecuación (4.21) que se muestra en la sección (4.2). La ecuación (C-14) nos permite expresar el potencial $\psi^{(1)}$ en (C-5) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)} &= B e^{\kappa y} e^{i(kx - \omega t)}, \\
 \varphi^{(1)} &= B e^{\kappa y} e^{i(kx - \omega t)} - \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} A e^{\kappa y} e^{i(kx - \omega t)}, \\
 \varphi^{(1)} &= \left[B e^{\kappa y} - \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} A e^{\kappa y} \right] e^{i(kx - \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{C-15}$$

donde $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$. La ecuación (C.15) es equivalente a la solución (4.19) que se presentó en la sección (4.2)

- Región 2 ($y > h$): Como se demostró en la sección 4.1, las ecuaciones diferenciales (4.17) y (4.18) determinan el comportamiento de $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ en la región 2 ($y > h$) para el sistema que se presenta en la figura 4.1,

$$\nabla^2 \varphi^{(2)} = 0, \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0. \quad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) se resuelven con un método similar al que se usó en las ecuaciones (4.12) y (4.13). Así, los potenciales $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ tienen la siguiente forma:

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(2)}(x, y; t) = C e^{-ky} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (C-16)$$

$$A_z^{(2)} = A_z^{(2)}(x, y; t) = E e^{-ky} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (C-17)$$

donde $k = k_x$. Los parámetros C y E son las amplitudes de los potenciales $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ en la región $y > 0$. La estructura de las ecuaciones (C-16) y (C-17), se debe a que las funciones $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ deben anularse cuando $y \rightarrow +\infty$ pero alcanzan su valor máximo cuando $y \rightarrow 0$. Estas ecuaciones son equivalentes a las soluciones (4.23) y (4.24) que se muestran en la sección (4.1).

C.2 Condiciones de Frontera en la Interface entre el Aislante Topológico Piezoeléctrico y el Vacío

Como se demostró en la sección anterior, los campos $\varphi^{(1)}$, $A_z^{(1)}$ y $u_z^{(1)}$ en la región 1 ($y < h$) están dados por las ecuaciones (C-15), (C-9) y (C-14) respectivamente. Mientras que los campos $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ en la región 2 ($y > h$) están dados por las soluciones (C-16) y (C-17) correspondientemente. A continuación, estudiaremos las condiciones de frontera (4.33) para examinar el comportamiento que tienen los campos en la interface $y = 0$.

$$D_y^{(2)} \Big|_{y=0} = D_y^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad H_x^{(2)} \Big|_{y=0} = H_x^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad \sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad (4.33)$$

$$A_z^{(2)} \Big|_{y=0} = A_z^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad \varphi^{(2)} \Big|_{y=0} = \varphi^{(1)} \Big|_{y=0}.$$

Las relaciones constitutivas $D_y^{(1)}$, $H_x^{(1)}$ y $\sigma_{zy}^{(1)}$ en la región 1 ($y < h$) están determinadas por las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.9) respectivamente,

$$D_y^{(1)} = -\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} - 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$H_x^{(1)} = \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}. \quad (4.27)$$

$$\sigma_{zy}^{(1)} = \lambda^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \beta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}. \quad (4.62)$$

Por su parte, las relaciones constitutivas $D_y^{(2)}$, $H_x^{(2)}$ están dadas por (4.30) y (4.31).

$$D_y^{(2)} = -\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.30)$$

$$H_x^{(2)} = \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.31)$$

Al evaluar las condiciones de frontera (4.33) con ayuda de las soluciones (C-15), (C-9), (C-14), (C-16) y (C-17) se obtiene lo siguiente:

- Para la condición $D_y^{(2)}|_{y=0} = D_y^{(1)}|_{y=0}$

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x} \Big|_{y=0} \\ & = -\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x} \Big|_{y=0}, \\ & k\varepsilon^{(2)} C e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} E e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} \\ & = -\varepsilon^{(1)} \left(B k e^{k(0)} - A \kappa \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} e^{\kappa(0)} \right) e^{i(kx-\omega t)} \\ & \quad - 4\pi\beta^{(1)} A \kappa e^{\kappa(0)} e^{i(kx-\omega t)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} D e^{k(0)} e^{i(kx-\omega t)}, \\ & k\varepsilon^{(2)} C + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} E = -\varepsilon^{(1)} \left(B k - A \kappa \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) - 4\pi\beta^{(1)} A \kappa + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} D, \\ & k\varepsilon^{(2)} C + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} E = -\varepsilon^{(1)} B k + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} D, \\ & \Rightarrow \varepsilon^{(1)} k B + \varepsilon^{(2)} k C - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} i k D + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i k E = 0. \end{aligned} \quad (C-18)$$

- Para la condición $H_x^{(2)}|_{y=0} = H_x^{(1)}|_{y=0}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \Big|_{y=0}, \\ & -k E e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} \\ & = k D e^{k(0)} e^{i(kx-\omega t)} - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \left(B e^{k(0)} - A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} e^{\kappa(0)} \right) e^{i(kx-\omega t)}, \\ & -k E - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C = k D - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \left(B - A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - B ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C + kE + kD = 0. \quad (C-19)$$

- En la condición $\sigma_{zy}^{(2)}|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)}|_{y=0}$, se considera que el cristal es libre de esfuerzos por encima de la superficie (puesto que el material en $y > 0$ no tiene propiedades piezoeléctricas y como una primera aproximación también se considera que no tiene propiedades elásticas). Luego, la condición de frontera para a componente zy de los esfuerzos, se reduce $\sigma_{zy}^{(1)}|_{y=0} = 0$. Entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \beta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \\ \kappa \lambda^{(1)} A e^{\kappa(0)} e^{i(kx-\omega t)} - \beta^{(1)} \left(kB e^{\kappa(0)} - \kappa A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} e^{\kappa(0)} \right) e^{i(kx-\omega t)} &= 0, \\ \kappa \lambda^{(1)} A - \beta^{(1)} \left(kB - \kappa A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) &= 0, \\ \kappa \lambda^{(1)} A - kB + \kappa A \frac{4\pi\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} &= 0, \\ \left(\lambda^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \kappa A - \beta^{(1)} kB &= 0, \\ \Rightarrow \bar{\lambda}^{(1)} \kappa A - \beta^{(1)} kB &= 0. \end{aligned} \quad (C-20)$$

- Para la condición $A_z^{(2)}|_{y=0} = A_z^{(1)}|_{y=0}$:

$$\begin{aligned} E e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} &= D e^{\kappa(0)} e^{i(kx-\omega t)}, \\ \Rightarrow E &= D. \end{aligned} \quad (C-21)$$

- Para la condición $\varphi^{(2)}|_{y=0} = \varphi^{(1)}|_{y=0}$:

$$\begin{aligned} C e^{-k(0)} e^{i(kx-\omega t)} &= \left(B e^{\kappa(0)} - A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} e^{\kappa(0)} \right) e^{i(kx-\omega t)}, \\ C &= B - A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}, \\ \Rightarrow A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - B + C &= 0. \end{aligned} \quad (C-22)$$

C.3 Relación de Dispersión

En la sección anterior se evaluaron las condiciones de frontera (4.33) y obtuvimos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\varepsilon^{(1)}kB + \varepsilon^{(2)}kC - \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(1)}ikD + \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}ikE = 0, \quad (C-18)$$

$$A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - B ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C + kE + kD = 0, \quad (C-19)$$

$$\bar{\lambda}^{(1)}\kappa A - \beta^{(1)}kB = 0, \quad (C-20)$$

$$E = D, \quad (C-21)$$

$$A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - B - C = 0. \quad (C-22)$$

Las expresiones (C-18)-(C-22) forman un sistema de ecuaciones algebraico homogéneo 5x5 para las amplitudes A, B, C, D y E . De la ecuación (C-20) se obtiene

$$\Rightarrow B = \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} A. \quad (C-23)$$

Reemplazando (C-23) en (C-18), (C-19) y (C-22) se obtiene

$$\varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} A + \varepsilon^{(2)}kC - \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(1)}ikD + \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}ikE = 0, \quad (C-24)$$

$$A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} A ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C + kE + kD = 0, \quad (C-25)$$

$$\left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) A + C = 0 \Rightarrow C = - \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) A. \quad (C-26)$$

Al sustituir (C-21) en (C-24) y (C-25) se tiene que

$$\varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} A + \varepsilon^{(2)}kC + \delta^{(21)} ikD = 0, \quad (C-27)$$

$$A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} A ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} C + 2kD = 0, \quad (C-28)$$

donde $\delta^{(21)} = \frac{\alpha}{\pi} [\theta^{(2)} - \theta^{(1)}]$.

Al reemplazar (C-26) en (C-28) encontramos

$$\begin{aligned}
& A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} A i \kappa \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) A + 2kD = 0, \\
& \Rightarrow A \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} A i \kappa \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} - ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} A + ik \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} A \\
& \quad + 2kD = 0, \\
& -\frac{\alpha}{\pi} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik A + \frac{\alpha}{\pi} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} i \kappa A + 2kD = 0, \\
& -\delta^{(21)} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} ik A + \delta^{(21)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}}{\beta^{(1)}} i \kappa A + 2kD = 0, \\
& \Rightarrow \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik A - 2kD = 0.
\end{aligned} \tag{C-29}$$

Reagrupando las ecuaciones (C-27), (C-26) y (C-29) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraico 3x3

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} & \varepsilon^{(2)}k & \delta^{(12)} ik \\ \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} & 1 & 0 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik & 0 & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0. \tag{C-30}$$

Para que el sistema (C-30) tenga solución no trivial el determinante de la matriz se debe anular,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2k \end{vmatrix} - \varepsilon^{(2)}k \begin{vmatrix} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} & 0 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik & -2k \end{vmatrix} \\
& \quad + \delta^{(12)} ik \begin{vmatrix} \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} & 1 \\ \delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
& \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} (-2k) - \varepsilon^{(2)}k \left[\left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) (-2k) \right] \\
& \quad - \delta^{(12)} ik \left[\delta^{(21)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik \right] = 0, \\
& -\varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} + \varepsilon^{(2)}k \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) - \frac{1}{2} \delta^{(12)} i \left[\delta^{(12)} \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) ik \right] = 0, \\
& \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) \varepsilon^{(2)}k - \varepsilon^{(1)} \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} + \frac{1}{2} (\delta^{(12)})^2 \left(\frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}k} \right) k = 0,
\end{aligned}$$

Apéndice C

$$\begin{aligned}
 & \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\varepsilon^{(2)}k - \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}}\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}\frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2 \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}k - \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2 \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} = 0, \\
 & \left[\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2 \right] \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}k - \left[\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2 \right] \frac{\bar{\lambda}^{(1)}\kappa}{\beta^{(1)}} = 0, \\
 & \Rightarrow \kappa = \frac{4\pi\beta^{(1)^2}}{\bar{\lambda}^{(1)}\varepsilon^{(1)}} \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2}{\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{1}{2}(\delta^{(12)})^2} k. \tag{C- 31}
 \end{aligned}$$

La ecuación (C-31) es equivalente a la ecuación (4.41).

APENDICE D

D.1 Campos en el Sistema Vacío/ Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Vacío

En esta sección, se resuelven las ecuaciones diferenciales (5.2)-(5.8) y se demuestra que sus soluciones están dadas por las ecuaciones (5.9)-(5.12).

- Región 2 ($-h \leq y \leq h$): Como se mencionó en la sección 5.1, las ecuaciones diferenciales (5.2), (5.3) y (5.4) determinan $\varphi^{(2)}$, $A_z^{(2)}$ y $u_z^{(2)}$ en la región 2 ($-h \leq y \leq h$)

$$\nabla^2 \psi^{(2)} = 0, \quad (5.2)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0, \quad (5.3)$$

$$\rho_m^{(2)} \ddot{u}_z^{(2)} = \bar{\lambda}^{(2)} \nabla^2 u_z^{(2)}, \quad (5.4)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, $\bar{\lambda}^{(2)} = \lambda^{(2)} + \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\varepsilon^{(2)}}$ y $\psi^{(2)} = \varphi^{(2)} + \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} u_z^{(2)}$. Para $\psi^{(2)}$ en la ecuación (5.2) se tiene una solución de la forma

$$\psi^{(2)} = \psi^{(2)}(x, y; t) = \psi^{(2)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}, \quad (D-1)$$

donde $\psi^{(2)}(y)$ es una función que describe el comportamiento de $\psi^{(2)}$ en la dirección y , ω es la frecuencia y k_x es la componente x del vector de onda. Al sustituir (D-1) en (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ik_x x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(2)}(y) e^{ik_x x} &= 0, \\ \left[-\psi^{(2)}(y) k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(2)}(y) \right] e^{ik_x x} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{(2)}(y) - \psi^{(2)}(y) k_x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (D-2)$$

La solución de (D-2) está dada por

$$\psi^{(2)}(y) = \varphi_0^{(2)} e^{ky} + \varphi_1^{(2)} e^{-ky}, \quad (D-3)$$

donde $k = k_x$, $\varphi_0^{(2)}$ y $\varphi_1^{(2)}$ son amplitudes del potencial escalar dentro de la placa. Luego, al reemplazar (D-3) en (D-1) se obtiene,

$$\psi^{(2)} = \psi^{(2)}(x, y; t) = \left[\varphi_0^{(2)} e^{ky} + \varphi_1^{(2)} e^{-ky} \right] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (D-4)$$

Apéndice D

La ecuación (5.3) se resuelve con un método similar al que se usó para resolver la ecuación (5.2); su solución tiene la siguiente forma:

$$A_z^{(2)} = A_z^{(2)}(x, y; t) = \left[A_0^{(2)} e^{ky} + A_1^{(2)} e^{-ky} \right] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{D- 5})$$

donde $A_0^{(2)}$ y $A_1^{(2)}$ son amplitudes del potencial vectorial $A_z^{(2)}$ dentro de la placa. Así, las soluciones (D-4) y (D-5) se pueden escribir como se presenta en la ecuación (5.10)

$$\begin{pmatrix} \psi^{(2)} \\ A_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(2)} & \varphi_1^{(2)} \\ A_0^{(2)} & A_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5. 10)$$

Para el caso de la ecuación (5.4) buscamos una solución de la forma

$$u_z^{(2)} = u_z^{(2)}(x, y; t) = u_z^{(2)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t} \quad (\text{D- 6})$$

donde $u_z^{(2)}(y)$ es una función que describe el comportamiento de $u_z^{(2)}$ en la dirección y . Al reemplazar (D-6) en (5.4) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_m^{(2)}}{\bar{\lambda}^{(2)}} u_z^{(2)}(y) e^{ik_x x} \frac{\partial^2 e^{-i\omega t}}{\partial t^2} &= u_z^{(2)}(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ik_x x} \right) e^{-i\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t}, \\ -\frac{\omega^2 \rho_m^{(2)}}{\bar{\lambda}^{(2)}} u_z^{(2)}(y) &= -u_z^{(2)}(y) (k_x^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y) + \left(\frac{\omega^2 \rho_m^{(2)}}{\bar{\lambda}^{(2)}} - k_x^2 \right) u_z^{(2)}(y) &= 0. \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_z^{(2)}(y) + \kappa'^2 u_z^{(2)}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D- 7})$$

con

$$\kappa'^2 = \frac{\omega^2 \rho_m^{(2)}}{\bar{\lambda}^{(2)}} - k_x^2. \quad (\text{D- 8})$$

La magnitud κ' en (D-8) determina la distribución de los campos elásticos en la dirección y dentro de la placa. La solución de la ecuación diferencial (D-8) es

$$u_z^{(2)}(y) = u_0^{(2)} e^{ik_r y} + u_1^{(2)} e^{-ik_r y}, \quad (\text{D- 9})$$

donde $u_0^{(2)}$ y $u_1^{(2)}$ son las amplitudes de las deformaciones $u_z^{(2)}$ que aparecen en la placa. De esta forma, al reemplazar (D-9) en (D-6) se obtiene

$$u_z^{(2)} = u_z^{(2)}(x, y; t) = \left[u_0^{(2)} e^{ik_r y} + u_1^{(2)} e^{-ik_r y} \right] e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{D- 10})$$

Apéndice D

La ecuación (D-10) es equivalente a la solución (5-9) que se mostró en la sección 5.1.

- Región 1 ($y < -h$): al resolver las ecuaciones diferenciales (5.5) y (5.6) se obtienen los campos $\varphi^{(1)}$ y $A_z^{(1)}$ en la región 1 ($y < -h$)

$$\nabla^2 \varphi^{(1)} = 0, \quad (5.46)$$

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0. \quad (5.47)$$

Debido a la homogeneidad del sistema en la dirección x , la solución de (5.5) tiene la siguiente forma:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}(x, y; t) = \varphi^{(1)}(y) e^{ik_x x} e^{-i\omega t} \quad (D-11)$$

Al sustituir (D-11) en (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ik_x x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi^{(1)}(y) e^{ik_x x} &= 0, \\ \left[-\varphi^{(1)}(y) k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi^{(1)}(y) \right] e^{ik_x x} &= 0. \end{aligned} \quad (D-12)$$

$$\nabla_y^2 \varphi^{(1)}(y) - k_x^2 \varphi^{(1)}(y) = 0,$$

La solución de la ecuación diferencial (D-12)

$$\varphi^{(1)}(y) = \varphi_0^{(1)} e^{k(y+h)}, \quad (D-13)$$

donde $k = k_x$ y $\varphi_0^{(1)}$ es la amplitud del potencial escalar en la región $y < -h$. Observe que la función $\varphi^{(1)}(y)$ se anula cuando $y \rightarrow -\infty$ y alcanza su valor máximo cuando $y \rightarrow -h$. Al combinar (D-13) en (D-11) se obtiene,

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}(x, y; t) = \varphi_0^{(1)} e^{k(y+h)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (D-14)$$

Para resolver la ecuación diferencial (5.6) aplicamos un método similar al que se usó para resolver la ecuación (5.5). Así pues, la componente $A_z^{(1)}$ del potencial vectorial en la región 3 ($y < h$) es

$$A_z^{(1)} = A_z^{(1)}(x, y; t) = A_0^{(1)} e^{k(y+h)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (D-15)$$

Las ecuaciones (D-14) y (D-15) se pueden escribir como se presenta en la ecuación (5.11)

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(1)} \\ A_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(1)} \\ A_0^{(1)} \end{pmatrix} e^{k(y+h)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5.11)$$

- Región 3 ($y > h$): en este caso se tiene el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\nabla^2 \varphi^{(3)} = 0, \quad (5.7)$$

$$\nabla^2 A_z^{(3)} = 0. \quad (5.8)$$

Las ecuaciones (5.7) y (5.8) se resuelven empleando el mismo método que se usó para resolver las ecuaciones (5.5) y (5.6). Las soluciones que se obtienen son respectivamente,

$$\varphi^{(3)} = \varphi^{(3)}(x, y; t) = \varphi_0^{(3)} e^{-k(y-h)} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (D-16)$$

$$A_z^{(3)} = A_z^{(3)}(x, y; t) = A_0^{(3)} e^{-k(y-h)} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (D-17)$$

donde $\varphi_0^{(3)}$ es la amplitud potencial escalar en la región 3 ($y > h$) y $A_0^{(3)}$ es la amplitud del potencial vectorial en la región 1 ($y > h$). Estas soluciones se pueden escribir como sigue en la forma de (5.12)

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ A_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^{(3)} \\ A_0^{(3)} \end{pmatrix} e^{-k(y-h)} e^{i(kx-\omega t)}. \quad (5.12)$$

Note que, cuando $y \rightarrow +\infty$ las ecuaciones (D-16) y (D-17) se anulan y alcanzan su valor máximo cuando $y \rightarrow h$.

D.2 Condiciones de Frontera en el Sistema Vacío/ Aislante Topológico Piezoeléctrico/ Vacío

Para estudiar la propagación de las ondas en una placa de aislante topológico piezoeléctrico que está rodeada por vacío, se debe analizar el comportamiento que tienen los campos en las interfaces que separan la placa del vacío. En particular, examinaremos las siguientes condiciones de continuidad,

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}|_{y=\pm h} &= \varphi^{(i)}|_{y=\pm h}, & A_z^{(j)}|_{y=\pm h} &= A_z^{(i)}|_{y=\pm h}, \\ D_y^{(j)}|_{y=\pm h} &= D_y^{(i)}|_{y=\pm h}, & H_x^{(j)}|_{y=\pm h} &= H_x^{(i)}|_{y=\pm h}, & \sigma_{zy}^{(j)}|_{y=\pm h} &= \sigma_{zy}^{(i)}|_{y=\pm h}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Las componentes $D_y^{(2)}$, $H_x^{(2)}$ y $\sigma_{zy}^{(2)}$ en la región 2 ($-h \leq y \leq h$) están dadas por las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.21), respectivamente. Por su parte, las componentes $D_y^{(1)}$, $H_x^{(1)}$ en la región 1 ($y < -h$) y $D_y^{(3)}$, $H_x^{(3)}$ en la región 3 ($y > h$) están definidas por las (5.17) y (5.18) correspondientemente.

D.2.1 Condiciones de frontera entre las regiones ($y \leq h$) y ($-h \leq y \leq h$)

A continuación, evaluamos las condiciones de frontera (5.14) en $y = -h$ con ayuda de las soluciones(D-4)-(D-6) y (D-14)-(D-15).

-Para el potencial escalar ($\varphi^{(2)}|_{y=-h} = \varphi^{(1)}|_{y=-h}$):

$$\begin{aligned} & \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(-h)} + \varphi_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} e^{ikr(-h)} + u_1^{(2)} e^{-ikr(-h)} \right] \\ & \quad - \varphi_0^{(1)} e^{k(-h+h)} e^{i(kx-\omega t)} = 0, \\ & \left[\varphi_0^{(2)} e^{-kh} + \varphi_1^{(2)} e^{kh} \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} e^{-ikr h} + u_1^{(2)} e^{ikr h} \right] - \varphi_0^{(1)} = 0, \\ & \varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+ \right] = \varphi_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (D-18)$$

donde $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm ikr h}$.

-Para la componente z de potencial vectorial ($A_z^{(2)}|_{y=-h} = A_z^{(1)}|_{y=-h}$):

$$\begin{aligned} & \left[A_0^{(2)} e^{k(-h)} + A_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] - A_0^{(1)} e^{k(-h+h)} = 0, \\ & \left[A_0^{(2)} e^{-kh} + A_1^{(2)} e^{kh} \right] - A_0^{(1)} = 0, \\ & A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+ = A_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (D-19)$$

-Para la componente y del desplazamiento eléctrico ($D_y^{(2)}|_{y=-h} = D_y^{(1)}|_{y=-h}$):

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{(2)} k \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(-h)} - \varphi_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \left[A_0^{(2)} e^{k(-h)} + A_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] \\ & \quad + k \varphi_0^{(1)} e^{k(-h+h)} = 0, \\ & -\varepsilon^{(2)} k \left[\varphi_0^{(2)} e^{-kh} - \varphi_1^{(2)} e^{kh} \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \left[A_0^{(2)} e^{-kh} + A_1^{(2)} e^{kh} \right] + k \varphi_0^{(1)} = 0, \\ & -\varepsilon^{(2)} \left[\varphi_0^{(2)} f^- - \varphi_1^{(2)} f^+ \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left[A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+ \right] + \varphi_0^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (D-20)$$

-Para la componente x de la intensidad magnética ($H_x^{(2)}|_{y=-h} = H_x^{(1)}|_{y=-h}$):

$$\begin{aligned} & k \left[A_0^{(2)} e^{k(-h)} - A_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \left\{ ik \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(-h)} + \varphi_1^{(2)} e^{-k(-h)} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} ik \left[u_0^{(2)} e^{ikr(-h)} + u_1^{(2)} e^{-ikr(-h)} \right] \right\} - k A_0^{(1)} e^{k(-h+h)} = 0, \end{aligned}$$

$$\left[A_0^{(2)} e^{-kh} - A_1^{(2)} e^{kh} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}i\left\{\left[\varphi_0^{(2)}e^{-kh}+\varphi_1^{(2)}e^{kh}\right]-\frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\left[u_0^{(2)}e^{-i\kappa'h}+u_1^{(2)}e^{i\kappa'h}\right]\right\}-A_0^{(1)}=0, \\
 & \left[A_0^{(2)}f^- - A_1^{(2)}f^+\right] - \frac{\alpha}{\pi}\theta^{(2)}i\left\{\left[\varphi_0^{(2)}f^- + \varphi_1^{(2)}f^+\right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\left[u_0^{(2)}g^- + u_1^{(2)}g^+\right]\right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad -A_0^{(1)}=0.
 \end{aligned} \tag{D- 21}$$

-Para la condición $\sigma_{zy}^{(2)}\big|_{y=-h} = \sigma_{zy}^{(1)}\big|_{y=-h}$, se considera que la placa es libre de esfuerzos por debajo de $y = -h$. Con esto, la condición de frontera para a componente zy de los esfuerzos, se reduce a $\sigma_{zy}^{(2)}\big|_{y=-h} = 0$. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \bar{\lambda}^{(2)}i\kappa'\left[u_0^{(2)}e^{i\kappa'(-h)}-u_1^{(2)}e^{-i\kappa'(-h)}\right]-\beta^{(2)}k\left[\varphi_0^{(2)}e^{k(-h)}-\varphi_1^{(2)}e^{-k(-h)}\right]=0, \\
 & i\frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}}\frac{\kappa'}{k}\left[u_0^{(2)}e^{-i\kappa'h}-u_1^{(2)}e^{i\kappa'h}\right]-\left[\varphi_0^{(2)}e^{-kh}-\varphi_1^{(2)}e^{kh}\right]=0, \\
 & i\frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}}\frac{\kappa'}{k}\left[u_0^{(2)}g^- - u_1^{(2)}g^+\right]-\varphi_0^{(2)}f^- + \varphi_1^{(2)}f^+ = 0.
 \end{aligned} \tag{D- 22}$$

Las ecuaciones (D-18)-(D-22) son equivalentes a las relaciones de continuidad (5.15)-(5.16) y (5.20)-(5.21) que se presentan en la sección 5.2 para la interface $y = -h$.

D.2.2 Condiciones de frontera entre las regiones ($y \geq h$) y ($-h \leq y \leq h$)

Ahora, vamos a evaluar las condiciones de frontera (5.14) en $y = +h$ con ayuda de las soluciones (D-4)-(D-6) y (D-16)-(D-17).

-Para potencial escalar $(\varphi^{(3)}\big|_{y=+h} = \varphi^{(2)}\big|_{y=+h})$:

$$\begin{aligned}
 & \varphi_0^{(3)}e^{-k(h-h)} - \left\{\left[\varphi_0^{(2)}e^{k(h)}+\varphi_1^{(2)}e^{-k(h)}\right]-\frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\left[u_0^{(2)}e^{i\kappa'h}+u_1^{(2)}e^{-i\kappa'h}\right]\right\}=0, \\
 & \varphi_0^{(3)} - \left\{\left[\varphi_0^{(2)}e^{kh}+\varphi_1^{(2)}e^{-kh}\right]-\frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\left[u_0^{(2)}e^{i\kappa'h}+u_1^{(2)}e^{-i\kappa'h}\right]\right\}=0, \\
 & \varphi_0^{(3)} = \varphi_0^{(2)}f^+ + \varphi_1^{(2)}f^- - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\left[u_0^{(2)}g^+ + u_1^{(2)}g^-\right].
 \end{aligned} \tag{D- 23}$$

-Para la componente z de potencial vectorial $(A_z^{(3)}\big|_{y=+h} = A_z^{(2)}\big|_{y=+h})$:

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(3)}e^{-k(h-h)} - \left[A_0^{(2)}e^{k(h)}+A_1^{(2)}e^{-k(h)}\right]=0, \\
 & A_0^{(3)} - \left[A_0^{(2)}e^{kh}+A_1^{(2)}e^{-kh}\right]=0,
 \end{aligned}$$

Apéndice D

$$A_0^{(3)} = A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^- \quad (\text{D- 24})$$

-Para la componente y del desplazamiento eléctrico $\left(D_y^{(3)}\big|_{y=+h} = D_y^{(2)}\big|_{y=+h}\right)$:

$$\begin{aligned} k\varphi_0^{(3)} e^{-k(h-h)} + \varepsilon^{(2)} k \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(h)} - \varphi_1^{(2)} e^{-k(h)} \right] \\ - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i k \left[A_0^{(2)} e^{k(h)} + A_1^{(2)} e^{-k(h)} \right] = 0, \\ \varphi_0^{(3)} + \varepsilon^{(2)} \left[\varphi_0^{(2)} e^{kh} - \varphi_1^{(2)} e^{-kh} \right] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left[A_0^{(2)} e^{kh} + A_1^{(2)} e^{-kh} \right] = 0. \\ \varphi_0^{(3)} + \varepsilon^{(2)} \left[\varphi_0^{(2)} f^+ - \varphi_1^{(2)} f^- \right] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left[A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^- \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{D- 25})$$

-Para la componente x de la intensidad magnética $\left(H_x^{(3)}\big|_{y=+h} = H_x^{(2)}\big|_{y=+h}\right)$:

$$\begin{aligned} -kA_0^{(3)} e^{-k(h-h)} - k \left[A_0^{(2)} e^{k(h)} - A_1^{(2)} e^{-k(h)} \right] \\ + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \left\{ i k \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(h)} + \varphi_1^{(2)} e^{-k(h)} \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} i k \left[u_0^{(2)} e^{i\kappa'(h)} + u_1^{(2)} e^{-i\kappa'(h)} \right] \right\} = 0, \\ -A_0^{(3)} - \left[A_0^{(2)} e^{kh} - A_1^{(2)} e^{-kh} \right] \\ + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} e^{kh} + \varphi_1^{(2)} e^{-kh} \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} e^{i\kappa'h} + u_1^{(2)} e^{-i\kappa'h} \right] \right\} \\ = 0, \\ -A_0^{(3)} - \left[A_0^{(2)} f^+ - A_1^{(2)} f^- \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^- \right] \right\} \quad (\text{D- 26}) \\ = 0. \end{aligned}$$

- Para la condición $\sigma_{zy}^{(3)}\big|_{y=+h} = \sigma_{zy}^{(2)}\big|_{y=+h}$, se considera que la placa es libre de esfuerzos por encima de $y = +h$. Con esto, la condición de frontera para a componente zy de los esfuerzos, se reduce a $\sigma_{zy}^{(2)}\big|_{y=+h} = 0$. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^{(2)} i k \left[u_0^{(2)} e^{i\kappa'(h)} - u_1^{(2)} e^{-i\kappa'(h)} \right] - \beta^{(2)} k \left[\varphi_0^{(2)} e^{k(h)} - \varphi_1^{(2)} e^{-k(h)} \right] = 0, \\ i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa}{k} \left[u_0^{(2)} e^{i\kappa'h} - u_1^{(2)} e^{-i\kappa'h} \right] - \beta^{(2)} k \left[\varphi_0^{(2)} e^{kh} - \varphi_1^{(2)} e^{-kh} \right] = 0, \\ i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa}{k} \left[u_0^{(2)} g^+ - u_1^{(2)} g^- \right] - \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- = 0 \end{aligned} \quad (\text{D- 27})$$

Las ecuaciones (D-23)-(D-27) son equivalentes a las relaciones de continuidad (5.22)-(5.26) que se presentan en la sección 5.2 para la interface $y = +h$.

D.2.3 Ecuaciones Trascendentales para Describir los Modos Antisimétricos y Simétricos

Como ya se demostró en la [sección D.2.1](#), al evaluar las condiciones de frontera en $y = -h$ se obtiene el sistema de ecuaciones 5x5 dado por las relaciones (D-18)-(D-22)

$$\varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+] = \varphi_0^{(1)}, \quad (\text{D- 18})$$

$$A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+ = A_0^{(1)} \quad (\text{D- 19})$$

$$-\varepsilon^{(2)} [\varphi_0^{(2)} f^- - \varphi_1^{(2)} f^+] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i [A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+] + \varphi_0^{(1)} = 0, \quad (\text{D- 20})$$

$$\begin{aligned} [A_0^{(2)} f^- - A_1^{(2)} f^+] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ [\varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+] \right\} - A_0^{(1)} \\ = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 21})$$

$$i \frac{\bar{\lambda}}{\beta} \frac{\kappa'}{k} [u_0^{(2)} g^- - u_1^{(2)} g^+] - \varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ = 0. \quad (\text{D- 22})$$

Similarmemente, en la sección D.2.1 se obtuvo un segundo sistema de ecuaciones 5x5 al evaluar las condiciones de frontera en $y = h$, el cual está dado por las ecuaciones (D-23)-(D-27)

$$\varphi_0^{(3)} = \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- - \frac{4\pi\beta}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^-], \quad (\text{D- 23})$$

$$A_0^{(3)} = A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^-, \quad (\text{D- 24})$$

$$\varphi_0^{(3)} + \varepsilon^{(2)} [\varphi_0^{(2)} f^+ - \varphi_1^{(2)} f^-] - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i [A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^-] = 0, \quad (\text{D- 25})$$

$$\begin{aligned} -A_0^{(3)} - [A_0^{(2)} f^+ - A_1^{(2)} f^-] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} i \left\{ [\varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^-] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^-] \right\} \\ = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 26})$$

$$i \frac{\bar{\lambda}}{\beta} \frac{\kappa'}{k} [u_0^{(2)} g^+ - u_1^{(2)} g^-] - \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- = 0. \quad (\text{D- 27})$$

A continuación, reducimos el primer sistema ($y = -h$) sustituyendo $A_0^{(1)}$ de la ecuación (D-19) en (D-21) y $\varphi_0^{(1)}$ de la ecuación (D-18) en (D-20),

$$\begin{aligned} -\varepsilon^{(2)} [\varphi_0^{(2)} f^- - \varphi_1^{(2)} f^+] + i\delta [A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+] + \varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ \\ - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} [u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+] = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 28})$$

$$\begin{aligned} & \left[A_0^{(2)} f^- - A_1^{(2)} f^+ \right] - i\delta \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} f^- + \varphi_1^{(2)} f^+ \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^- + u_1^{(2)} g^+ \right] \right\} \\ & - \left[A_0^{(2)} f^- + A_1^{(2)} f^+ \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 29})$$

De igual manera reducimos el segundo sistema ($y = h$) sustituyendo $A_0^{(3)}$ de la ecuación (D-24) en (D-26) y $\varphi_0^{(3)}$ de la ecuación (D-23) en (D-25)

$$\begin{aligned} & \varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^- \right] + \varepsilon^{(2)} \left[\varphi_0^{(2)} f^+ - \varphi_1^{(2)} f^- \right] \\ & - i\delta \left[A_0^{(2)} f^+ + A_1^{(2)} f^- \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 30})$$

$$\begin{aligned} & -A_0^{(2)} f^+ - A_1^{(2)} f^- - \left[A_0^{(2)} f^+ - A_1^{(2)} f^- \right] \\ & + i\delta \left\{ \left[\varphi_0^{(2)} f^+ + \varphi_1^{(2)} f^- \right] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} g^+ + u_1^{(2)} g^- \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D- 31})$$

donde $\delta = \alpha \theta^{(2)}/\pi$. Ahora, al sumar (D-29) con (D-31); (D-28) con (D-30) y (D-22) con (D-27), se obtiene respectivamente,

$$\begin{aligned} & i\delta \left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-) - i\delta \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) \\ & = \left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \right] [(f^+ + f^-) + (f^+ - f^-)], \end{aligned} \quad (\text{D- 32})$$

$$\begin{aligned} & \left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] [(f^+ + f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ - f^-)] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) \\ & = i\delta \left[A_0^{(2)} - A_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-), \end{aligned} \quad (\text{D- 33})$$

$$i \frac{\bar{\lambda}^{(2)}}{\beta^{(2)}} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) - \left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-) = 0. \quad (\text{D- 34})$$

Adicionalmente, restamos (D-29) con (D-31); (D-28) con (D-30) y (D-22) con (D-27). Así, obtenemos respectivamente,

$$\begin{aligned} & i\delta \left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-) - i\delta \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ + g^-) \\ & = \left[A_0^{(2)} - A_1^{(2)} \right] [(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)], \end{aligned} \quad (\text{D- 35})$$

$$\begin{aligned} & \left[\varphi_0^{(2)} - \varphi_1^{(2)} \right] [(f^+ - f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ + f^-)] - \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \left[u_0^{(2)} - u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) \\ & = i\delta \left[A_0^{(2)} + A_1^{(2)} \right] (f^+ + f^-), \end{aligned} \quad (\text{D- 36})$$

$$i \frac{\bar{\lambda}}{\beta} \frac{\kappa'}{k} \left[u_0^{(2)} + u_1^{(2)} \right] (g^+ - g^-) - \left[\varphi_0^{(2)} + \varphi_1^{(2)} \right] (f^+ - f^-) = 0. \quad (\text{D-37})$$

A continuación, despejamos el término $[A_0^{(2)} + A_1^{(2)}]$ de la ecuación (D-32) para reemplazarlo en (D-36) y el resultado lo dividimos entre (D-34),

$$\begin{aligned} & \frac{(f^+ - f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ + f^-) + \frac{\delta^2(f^+ - f^-)(f^+ + f^-)}{(f^+ + f^-) + (f^+ - f^-)}}{(f^+ + f^-)} \\ &= \frac{4\pi\beta^{(2)} \beta^{(2)} k}{\varepsilon^{(2)} i\bar{\lambda}^{(2)} \kappa'} \frac{(g^+ - g^-) + \frac{\delta^2(g^+ - g^-)(f^+ + f^-)}{(f^+ + f^-) + (f^+ - f^-)}}{(g^+ + g^-)}, \\ & \rightarrow \frac{(f^+ - f^-)}{(f^+ + f^-)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)} + \frac{(f^+ - f^-)}{(f^+ + f^-)}}{\delta^2} \\ &= \frac{4\pi\beta^{(2)} \beta^{(2)} k}{\varepsilon^{(2)} i\bar{\lambda}^{(2)} \kappa'} \left[\frac{(g^+ - g^-)}{(g^+ + g^-)} + \frac{\delta^2(g^+ - g^-)(f^+ + f^-)}{[(f^+ + f^-) + (f^+ - f^-)](g^+ + g^-)} \right], \\ & \frac{(f^+ - f^-)}{(f^+ + f^-)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{\frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)} + 1} \\ &= \frac{4\pi\beta^{(2)} \beta^{(2)} k}{\varepsilon^{(2)} i\bar{\lambda}^{(2)} \kappa'} \left[\frac{(g^+ - g^-)}{(g^+ + g^-)} + \frac{\delta^2 \frac{(g^+ - g^-)}{(g^+ + g^-)}}{\frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)} + \frac{(f^+ - f^-)}{(f^+ + f^-)}} \right], \end{aligned} \quad (\text{D-38})$$

con $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm i\kappa' h}$ la ecuación (D-38) se transforma en

$$\rightarrow \frac{\kappa'}{k} \left[\varepsilon^{(2)} + \left(1 + \frac{(\delta^{(21)})^2}{1 + \tanh(kh)} \right) \tanh(kh) \right] = \frac{4\pi\beta^2}{\bar{\lambda}^{(2)} \varepsilon^{(2)}} \tan(\kappa' h) \left(1 + \frac{(\delta^{(21)})^2}{1 + \tanh(kh)} \right). \quad (\text{D-39})$$

La expresión (D-39) describe los **modos de propagación antisimétricos** en una placa compuesta por un material piezoeléctrico con propiedades topológicas. Este resultado es equivalente a la ecuación (5.32). De manera similar, despejamos $[A_0^{(2)} - A_1^{(2)}]$ de (D-35) y reemplazamos en (D-33). Luego, se divide la expresión resultante entre (D-37). Así obtenemos,

$$\begin{aligned} & \frac{(f^+ + f^-) + \varepsilon^{(2)}(f^+ - f^-) + \frac{\delta^2(f^+ + f^-)(f^+ - f^-)}{(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)}}{(f^+ - f^-)} \\ &= \frac{4\pi\beta^{(2)} \beta^{(2)} k}{\varepsilon^{(2)} i\bar{\lambda}^{(2)} \kappa'} \frac{(g^+ + g^-) + \frac{\delta^2(g^+ + g^-)(f^+ - f^-)}{(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)}}{(g^+ - g^-)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow \frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)} \\
 & = \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \frac{\beta^{(2)}}{i\bar{\lambda}^{(2)}} \frac{k}{\kappa'} \left[\frac{(g^+ + g^-)}{(g^+ - g^-)} + \frac{\delta^2(f^+ - f^-)}{(f^+ - f^-) + (f^+ + f^-)} \frac{(g^+ + g^-)}{(g^+ - g^-)} \right], \\
 & \frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)} + \varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{\frac{(f^+ - f^-)}{(f^+ + f^-)} + 1} = \frac{4\pi\beta^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \frac{\beta^{(2)}}{i\bar{\lambda}^{(2)}} \frac{k}{\kappa'} \frac{(g^+ + g^-)}{(g^+ - g^-)} \left[1 + \frac{\delta^2}{1 + \frac{(f^+ + f^-)}{(f^+ - f^-)}} \right]. \quad (\text{D- 40})
 \end{aligned}$$

Con $f^\pm = e^{\pm kh}$ y $g^\pm = e^{\pm i\kappa' h}$ la ecuación (D-40) se transforman en

$$\begin{aligned}
 & \frac{\kappa'}{k} \left[1 + \varepsilon^{(2)} \tanh(kh) + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}(kh)} \right] \tan(\kappa' h) \\
 & = - \frac{4\pi\beta^{(2)^2}}{\bar{\lambda}^{(2)}\varepsilon^{(2)}} \tanh(kh) \left[1 + \frac{\delta^2}{1 + \tanh^{-1}(kh)} \right]. \quad (\text{D- 41})
 \end{aligned}$$

La expresión (D-41) describe los **modos de propagación simétricos** en una placa compuesta por un material piezoeléctrico con propiedades topológicas. Este resultado es equivalente a la ecuación (5.41).

APENDICE E

E.1 Estructura de los campos en el Cristal de Aislante Topológico Piezoeléctrico la región 1 ($y < 0$)

El sistema de la Figura 6.1 presenta homogeneidad dirección x , esto lleva a que $u_z^{(1)}$ y $\varphi^{(1)}$ en la región 1 ($y < 0$) tengan la siguiente estructura

$$u_z^{(1)}(x, y, t) = U^{(1)}(y)e^{i(kx - \omega t)} = U^{(1)}(y)e^{ik(x - vt)}, \quad (\text{E- 1})$$

$$\varphi^{(1)}(x, y, t) = \Phi^{(1)}(y)e^{i(kx - \omega t)} = \Phi^{(1)}(y)e^{ik(x - vt)}, \quad (\text{E- 2})$$

donde $v = \omega/k$ es la velocidad de las ondas (siendo ω la frecuencia y k el vector de onda), mientras que $U^{(1)}(y)$ y $\Phi^{(1)}(y)$ describen las distribuciones de $u_z^{(1)}$ y $\varphi^{(1)}$ en y , respectivamente. Para encontrar estas funciones usamos las ecuaciones (4.12) y (4.11)

$$\rho_m \ddot{u}_z^{(1)} = \lambda^{(1)} \nabla^2 u_z^{(1)} - \beta^{(1)} \nabla^2 \varphi^{(1)}, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \psi^{(1)} = 0, \quad (4.12)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ y $\psi^{(1)} = \varphi^{(1)} + \frac{4\pi\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} u_z^{(1)}$. Además, debido a la configuración del sistema $\frac{\partial \theta(y < 0)}{\partial y}$ se puede anular puesto que $\theta(y < 0) = \theta^{(1)}$ es constante en toda la región 1 ($y < 0$). Luego, al reemplazar las ecuaciones (E-1) y (E-2) en (4.12) se obtiene

$$\begin{aligned} 4\pi\beta^{(1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (U^{(1)}(y)e^{ik(x-vt)}) + \varepsilon^{(1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Phi^{(1)}(y)e^{ik(x-vt)}) &= 0, \\ 4\pi\beta^{(1)} \left(-k^2 U^{(1)} + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^{(1)} \left(-k^2 \Phi^{(1)} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \Rightarrow 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} + \varepsilon^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial y^2} - 4\pi\beta^{(1)} k^2 U^{(1)} - \varepsilon^{(1)} k^2 \Phi^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E- 3})$$

Por otro lado, si se reemplaza (E-1) y (E-2) en (4.11) encontramos que

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U^{(1)}(y)e^{ik(x-vt)}) &= \\ = \lambda^{(1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (U^{(1)}(y)e^{ik(x-vt)}) - \beta^{(1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Phi^{(1)}(y)e^{ik(x-vt)}), \end{aligned}$$

Apéndice E

$$\rho_m k^2 v^2 U^{(1)} - \lambda^{(1)} k^2 U^{(1)} + \lambda^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} + \beta^{(1)} k^2 \Phi^{(1)} - \beta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{E- 4})$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} - \beta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial y^2} + k^2 (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)}) U^{(1)} + \beta^{(1)} k^2 \Phi^{(1)} = 0.$$

- Para obtener $U^{(1)}(y)$ se combinan (E-3) y (E-4) de tal forma que desaparezcan términos $\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial y^2}$ y $\Phi^{(1)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} + 4\pi \beta^{(1)^2} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} + \varepsilon^{(1)} k^2 (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)}) U^{(1)} - 4\pi \beta^{(1)^2} k^2 U^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} - k^2 \left[\frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2}} \right] U^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E- 5})$$

Para resolver la ecuación diferencial (E-5), usamos la siguiente ecuación característica

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{U^{(1)}}^2 - k^2 \left[\frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2}} \right] = 0. \quad (\text{E- 6})$$

El coeficiente $\mathcal{S}_{U^{(1)}}$ de la ecuación (E-6) se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{U^{(1)}} &= \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1) \left\{ -k^2 \left[\frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2} \right] \right\}}}{2(1)} \\ &= \pm k \left[\frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2}} \right]^{1/2}, \\ \Rightarrow \mathcal{S}_{U^{(1)}}^2 &= k^2 m_2^2, \end{aligned} \quad (\text{E- 7})$$

donde

$$m_2^2 = \frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} (\rho_m v^2 - \lambda^{(1)})}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2}}. \quad (\text{E- 8})$$

La ecuación (E-8) es la misma ecuación (6.7).

Luego, la función $U^{(1)}(y)$ es

$$U^{(1)}(y) = \mathcal{C}'_2 e^{-m_2 ky} + \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky}, \quad (\text{E- 9})$$

donde $\mathcal{C}'_2$ y $\mathcal{C}_2$ son las amplitudes de $U^{(1)}(y)$. Debido a la configuración del sistema, se requiere que los potenciales se anulen cuando se alejan de la interface, es decir que $U^{(1)} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$. Luego, la ecuación (E-9) se reduce a

$$U^{(1)}(y) = \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky}. \quad (\text{E- 10})$$

Al sustituir (E-10) en (E-1), se obtienen las deformaciones $u_z^{(1)}$ en el cristal

$$u_z^{(1)}(x, y; t) = \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky} e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E- 11})$$

donde m_2 esta dado por la ecuación (E-8).

- Para obtener $\Phi^{(1)}(y)$ reescribimos la ecuación (E-3) como sigue

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Phi^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} U^{(1)} \right) - k^2 \left(\Phi^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} U^{(1)} \right) = 0. \quad (\text{E- 12})$$

Al definir

$$\Psi^{(1)} = \Phi^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} U^{(1)}, \quad (\text{E- 13})$$

la ecuación (E-12) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial y^2} - k^2 \Psi^{(1)} = 0. \quad (\text{E- 14})$$

La ecuación característica que se obtiene de (E-14) es

$$\mathcal{S}_{\Psi^{(1)}}^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{S}_{\Psi^{(1)}} = \pm k, \quad (\text{E- 15})$$

luego, $\Psi^{(1)}(y)$ se escribe de la siguiente forma,

$$\Psi^{(1)}(y) = \mathcal{C}'_3 e^{-ky} + \mathcal{C}_3 e^{+ky}, \quad (\text{E- 16})$$

donde $\mathcal{C}'_3$ y $\mathcal{C}_3$ son las amplitudes de $\Psi^{(1)}(y)$. Adicionalmente, se requiere que el potencial $\Psi^{(1)}(y)$ se anule cuando se aleja de la interface, es decir $\Psi^{(1)} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$.

Apéndice E

Entonces, la ecuación (E-16) se reduce a

$$\Psi^{(1)}(y) = \mathcal{C}_3 e^{+ky}. \quad (\text{E-17})$$

Al reemplazar (E-17) en (E-13) se obtiene

$$\Phi^{(1)}(y) = \mathcal{C}_3 e^{+ky} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} U^{(1)}(y). \quad (\text{E-18})$$

Sustituyendo (E-10) en (E-18) encontramos que

$$\Phi^{(1)}(y) = \mathcal{C}_3 e^{+ky} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky}. \quad (\text{E-19})$$

De este modo, el potencial escalar (E-2) se convierte en

$$\varphi^{(1)}(x, y; t) = \left(\mathcal{C}_3 e^{+ky} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky} \right) e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E-20})$$

donde m_2 esta dado por (E-8).

- La velocidad de las partículas en el cristal está dada por la derivada de $u_z^{(1)}(x, y; t)$ con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z^{(1)}(x, y; t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_2 e^{+m_2 ky} e^{ik(x-vt)}, \\ \Rightarrow \frac{\partial u_z^{(1)}(x, y; t)}{\partial t} &= -ikv \mathcal{C}_2 e^{m_2 ky} e^{ik(x-vt)}, \end{aligned} \quad (\text{E-21})$$

donde $u_z^{(1)}(x, y; t)$ esta dada por la ecuación (E-11).

- Para obtener la componente $A_z^{(1)}$ del potencial vectorial debemos solucionar la ecuación (3.29)

$$\nabla^2 A_z^{(1)} = 0, \quad (3.29)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ y $\left[\frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta(\mathbf{r})}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0$ debido a que $\theta(\mathbf{r}) = \theta(y < 0) = \theta^{(1)}$. Ahora, consideramos una solución de la forma

$$\Rightarrow A_z^{(1)}(x, y; t) = \mathcal{A}^{(1)}(y) e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E-22})$$

donde $\mathcal{A}^{(1)}(y)$ es una función que especifica la dependencia de $A_z^{(1)}$ con y .

Apéndice E

Al sustituir (E-22) en (3.29) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(-k^2 \mathcal{A}^{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}^{(1)}}{\partial y^2} \right) e^{ik(x-vt)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{A}^{(1)}}{\partial y^2} - k^2 \mathcal{A}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E-23})$$

La ecuación característica que se obtiene de (E-23) es

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}^{(1)}}^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}^{(1)}} = \pm k. \quad (\text{E-24})$$

Luego, la solución de (E-23) es

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{(1)}(y) = \mathcal{C}'_5 e^{-ky} + \mathcal{C}_5 e^{+ky}, \quad (\text{E-25})$$

donde $\mathcal{C}'_5$ y $\mathcal{C}_5$ son las amplitudes de $\mathcal{A}^{(1)}(y)$. La ecuación (E-25) se reduce cuando consideramos que $A_z^{(1)}$ debe anularse cuando $y \rightarrow -\infty$,

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{(1)}(y) = \mathcal{C}_5 e^{+ky}. \quad (\text{E-26})$$

Reemplazando (E-26) en (E-22) se obtiene la componente $A_z^{(1)}$ del potencial vectorial como función de $(x, y; t)$,

$$\Rightarrow A_z^{(1)}(x, y; t) = \mathcal{C}_5 e^{+ky} e^{ik(x-vt)}. \quad (\text{E-27})$$

Por comodidad, escribimos los campos (E-11), (E-20), (E-21) y (E-27) de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} u_z^{(1)}(x, y; t) \\ v_z^{(1)}(x, y; t) \\ \varphi^{(1)}(x, y; t) \\ A_z^{(1)}(x, y; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 e^{m_2 ky} \\ -ikv\mathcal{C}_2 e^{m_2 ky} \\ \mathcal{C}_3 e^{ky} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{m_2 ky} \\ \mathcal{C}_5 e^{ky} \end{pmatrix} e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E-28})$$

donde m_2 esta dado por (E-8). Nota: la ecuación (E-28) es equivalente a la ecuación (6.5).

E.2 Estructura de los Campos en el Líquido de la región 2 ($y > 0$)

En esta sección se obtienen las soluciones para las ecuaciones diferenciales involucradas en la región 2 ($y > 0$) de la configuración que aparece en la Figura 6.1. En este caso, el potencial escalar $\varphi^{(2)}$ y la componente $A_z^{(2)}$ se obtienen de las ecuaciones diferenciales (4.17) y (4.18)

$$\nabla^2 \varphi^{(2)} = 0, \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 A_z^{(2)} = 0. \quad (4.18)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$. Como se ya se ha mencionado en secciones anteriores, las soluciones de (4.17) y (4.18) tienen forma de ondas libres $e^{ik(x-vt)}$ debido a la homogeneidad que existe en la dirección x . Así, $\varphi^{(2)}$ y $A_z^{(2)}$ están dados por las siguientes expresiones

$$\varphi^{(2)}(x, y; t) = \Phi^{(2)}(y) e^{ik(x-vt)}, \quad (E-29)$$

$$A_z^{(2)}(x, y; t) = \mathcal{A}^{(2)}(y) e^{ik(x-vt)}, \quad (E-30)$$

donde $\Phi^{(2)}(y)$ y $\mathcal{A}^{(2)}(y)$ son las dependencias de los potenciales con y en la región 2 ($y > 0$).

- Para encontrar $\Phi^{(2)}(y)$, debemos reemplazar (E-29) en (4.17). De aquí se obtiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi^{(2)}(y) - k^2 \Phi^{(2)}(y) = 0. \quad (E-31)$$

La ecuación (E-31) se resuelve de modo similar a como se resolvió (E-23). Luego,

$$\Phi^{(2)}(y) = \mathcal{C}'_4 e^{-ky} + \mathcal{C}_4 e^{+ky}, \quad (E-32)$$

donde $\mathcal{C}'_4$ y $\mathcal{C}_4$ son las amplitudes de $\Phi^{(2)}(y)$. Puesto que $\Phi^{(2)} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, la solución (E-32) se reduce a

$$\varphi^{(2)}(x, y; t) = \mathcal{C}_4 e^{-ky} e^{ik(x-vt)}. \quad (E-33)$$

- Para encontrar $A_z^{(2)}$ sustituimos (E-30) en (4.18). Esto lleva a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{A}^{(2)}(y) - k^2 \mathcal{A}^{(2)}(y) = 0. \quad (E-34)$$

La ecuación (E-34) se resuelve de modo similar a como se resolvió (E-23). De esta manera se tiene que

$$\mathcal{A}^{(2)}(y) = \mathcal{C}_6 e^{-ky} + \mathcal{C}'_6 e^{+ky}. \quad (E-35)$$

donde $\mathcal{C}'_6$ y $\mathcal{C}_6$ son las amplitudes de $\mathcal{A}^{(2)}(y)$.

Apéndice E

Como $\mathcal{A}^{(2)}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, la solución (E-30) se escribe como

$$A_z^{(2)}(x, y; t) = \mathcal{C}_6 e^{-ky} e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E-36})$$

- Para el movimiento del líquido se asume que la ecuación diferencial que determina la componente $v_z^{(2)}$ de la velocidad está dada por la ecuación (6.4)

$$\frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial t} - \frac{\mu_l}{\rho_l} \nabla^2 v_z^{(2)} = 0. \quad (6.28)$$

La solución de (6.4) tiene la forma

$$\Rightarrow v_z^{(2)}(x, y; t) = V_z^{(2)}(y) e^{ik(x-vt)}. \quad (\text{E-37})$$

donde $V_z^{(2)}(y)$ es la dependencia de la velocidad $v_z^{(2)}$ con y en la región 2 ($y > 0$). Al sustituir (E-37) en (6.4) encontramos que

$$\begin{aligned} -ikv V_z^{(2)}(y) e^{ik(x-vt)} - \frac{\mu_l}{\rho_l} \left(-k^2 V_z^{(2)}(y) + \frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial y^2} \right) e^{ik(x-vt)} &= 0, \\ -\frac{\rho_l}{\mu_l} ikv V_z^{(2)}(y) + k^2 V_z^{(2)}(y) - \frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V_z^{(2)}}{\partial y^2} + \left(ikv \frac{\rho_l}{\mu_l} - k^2 \right) V_z^{(2)}(y) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E-38})$$

La ecuación característica que se obtiene de (E-38) es,

$$\mathcal{S}_{V_z^{(2)}}^2 + \left(ikv \frac{\rho_l}{\mu_l} - k^2 \right) = 0. \quad (\text{E-39})$$

Al definir

$$m_1^2 = k^2 - ikv \frac{\rho_l}{\mu_l}, \quad (\text{E-40})$$

(la ecuación (E-40) es la misma ecuación (6.9)) entonces la solución de (E-38) es

$$\Rightarrow V_z^{(2)}(y) = \mathcal{C}'_1 e^{m_1 y} + \mathcal{C}_1 e^{-m_1 y}, \quad (\text{E-41})$$

donde $\mathcal{C}'_1$ y $\mathcal{C}_1$ son las amplitudes de $V_z^{(2)}(y)$.

Puesto que $V_z^{(2)} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, entonces la solución (E-37) se escribe como

$$\Rightarrow v_z^{(2)}(y) = C_1 e^{-m_1 y} e^{ik(x-vt)}. \quad (\text{E-42})$$

Por facilidad, escribimos los campos (E-33), (E-36) y (E-42) de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} v_z^{(2)}(x, y; t) \\ \varphi^{(2)}(x, y; t) \\ A_z^{(2)}(x, y; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-m_1 y} \\ C_4 e^{-ky} \\ C_6 e^{-ky} \end{pmatrix} e^{ik(x-vt)}, \quad (\text{E-43})$$

donde m_1 esta dado por (E-40). Nota: la ecuación (E-43) es equivalente a la ecuación (6.8).

E.3 Condiciones de Frontera en la Interface entre un Aislante Topológico Piezoeléctrico y un Liquido Viscoso

Como se demostró en las secciones E-1 y E-2, los campos en el aislante topológico piezoeléctrico y en el líquido están dados por (E-28) y (E-43), respectivamente. Para estudiar el comportamiento que tienen los campos en la interface en $y = 0$, debemos evaluar las siguientes condiciones de continuidad:

$$\begin{aligned} D_y^{(2)} \Big|_{y=0} &= D_y^{(1)} \Big|_{y=0}, & H_x^{(2)} \Big|_{y=0} &= H_x^{(1)} \Big|_{y=0}, & \sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=0} &= \sigma_{zy}^{(1)} \Big|_{y=0} \\ A_z^{(2)} \Big|_{y=0} &= A_z^{(1)} \Big|_{y=0}, & \varphi^{(2)} \Big|_{y=0} &= \varphi^{(1)} \Big|_{y=0}, & v_z^{(1)} \Big|_{y=0} &= v_z^{(2)} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde las componentes $D_y^{(1)}$, $H_x^{(1)}$ y $\sigma_{zy}^{(1)}$ en la región 1 ($y < 0$) están dadas por las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.9), respectivamente.

$$D_y^{(1)} = -\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} - 4\pi\beta^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$H_x^{(1)} = \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.27)$$

$$\sigma_{zy}^{(1)} = \lambda^{(1)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial y} - \beta^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}, \quad (4.63)$$

Por otro lado, las componentes $D_y^{(2)}$, $H_x^{(2)}$ y $\sigma_{zy}^{(2)}$ en la región 2 ($y > 0$) están dadas por las ecuaciones (4.30), (4.31) y (6.5), correspondientemente.

$$D_y^{(2)} = -\varepsilon^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.30)$$

$$H_x^{(2)} = \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial y} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x}, \quad (4.31)$$

$$\sigma_{zy}^{(2)} = \mu_l \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial y}. \quad (6.5)$$

Así, al evaluar las condiciones de continuidad (6.10) con ayuda de las soluciones (E-28) y (E-43) se obtiene

- Para la componente D_y del desplazamiento eléctrico

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{(1)} \left(k\mathcal{C}_3 e^{k(0)} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 m_2 k e^{m_2 k(0)} \right) e^{ik(x-vt)} + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \mathcal{C}_5 e^{+k(0)} e^{ik(x-vt)} \\ & - 4\pi \beta^{(1)} \mathcal{C}_2 m_2 k e^{m_2 k(0)} e^{ik(x-vt)} \\ & = \varepsilon^{(2)} k \mathcal{C}_4 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)} + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_6 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)}, \\ & -\varepsilon^{(1)} k \mathcal{C}_3 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \mathcal{C}_5 = \varepsilon^{(2)} k \mathcal{C}_4 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_6, \\ & \varepsilon^{(2)} k \mathcal{C}_4 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_6 + k \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_3 - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \mathcal{C}_5 = 0. \end{aligned} \quad (E-44)$$

- Para la componente H_x de la intensidad magnética

$$\begin{aligned} & \Rightarrow k \mathcal{C}_5 e^{k(0)} e^{ik(x-vt)} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \left(\mathcal{C}_3 e^{k(0)} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{m_2 k(0)} \right) e^{ik(x-vt)} \\ & = -k \mathcal{C}_6 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)} - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_4 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)}, \\ & -k \mathcal{C}_6 - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_4 - k \mathcal{C}_5 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \left(\mathcal{C}_3 - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (E-45)$$

- Para la componente σ_{zy} de los esfuerzos

$$\begin{aligned} & \Rightarrow -ikv \lambda^{(1)} m_2 k \mathcal{C}_2 e^{m_2 k(0)} e^{ik(x-vt)} \\ & - \beta^{(1)} \left(k \mathcal{C}_3 e^{k(0)} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} m_2 k \mathcal{C}_2 e^{m_2 k(0)} \right) e^{ik(x-vt)} \\ & = -m_1 \mu_l \mathcal{C}_1 e^{-m_1(0)} e^{ik(x-vt)}, \\ & \Rightarrow -ikv \lambda^{(1)} m_2 k \mathcal{C}_2 - \beta^{(1)} \left(k \mathcal{C}_3 - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} m_2 k \mathcal{C}_2 \right) = -m_1 \mu_l \mathcal{C}_1, \\ & \Rightarrow \mu_l m_1 \mathcal{C}_1 = -m_2 \mathcal{C}_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) + \mathcal{C}_3 k \beta^{(1)}. \end{aligned} \quad (E-46)$$

- Para la componente A_z del potencial vectorial

$$\mathcal{C}_5 e^{k(0)} e^{ik(x-vt)} = \mathcal{C}_6 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)},$$

$$\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_6. \quad (\text{E- 47})$$

- Para el potencial escalar φ

$$\left(\mathcal{C}_3 e^{k(0)} - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 e^{m_2 k(0)} \right) e^{ik(x-vt)} = \mathcal{C}_4 e^{-k(0)} e^{ik(x-vt)},$$

$$\varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_4 - \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_3 + 4\pi \beta^{(1)} \mathcal{C}_2 = 0. \quad (\text{E- 48})$$

- Para la componente v_z de las velocidades

$$-ikv \mathcal{C}_2 e^{m_2 k(0)} e^{ik(x-vt)} = \mathcal{C}_1 e^{-m_1(0)} e^{ik(x-vt)},$$

$$\Rightarrow -ikv \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1. \quad (\text{E- 49})$$

E.4 Ecuación Trascendental para las Ondas Bleustein-Gulyaev en el Sistema Aislante Topológico Piezoeléctrico/Líquido Viscoso

En la [sección E.3](#) se obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones algebraico 6x6

$$\Rightarrow \varepsilon^{(2)} k \mathcal{C}_4 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_6 + k \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_3 - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \mathcal{C}_5 = 0, \quad (\text{E- 44})$$

$$-k \mathcal{C}_6 - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_4 - k \mathcal{C}_5 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \left(\mathcal{C}_3 - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 \right) = 0, \quad (\text{E- 45})$$

$$\Rightarrow \mu_l m_1 \mathcal{C}_1 = -m_2 \mathcal{C}_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) + \mathcal{C}_3 k \beta^{(1)}, \quad (\text{E- 46})$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_6, \quad (\text{E- 47})$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_4 - \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_3 + 4\pi \beta^{(1)} \mathcal{C}_2 = 0, \quad (\text{E- 48})$$

$$\Rightarrow -ikv \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1. \quad (\text{E- 49})$$

Reemplazando (E-47) en (E-44) y (E-45)

$$\varepsilon^{(2)} k \mathcal{C}_4 + ik \mathcal{C}_5 \delta + k \varepsilon^{(1)} \mathcal{C}_3 = 0, \quad (\text{E- 50})$$

$$-2k \mathcal{C}_5 - \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(2)} ik \mathcal{C}_4 + \frac{\alpha}{\pi} \theta^{(1)} ik \left(\mathcal{C}_3 - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 \right) = 0, \quad (\text{E- 51})$$

donde $\delta = \frac{\alpha}{\pi} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)})$. Al sustituir (E-49) en (E-46) y reorganizando la expresión resultante se obtiene

$$m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - iv\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) \mathcal{C}_2 - k\beta^{(1)} \mathcal{C}_3 = 0. \quad (\text{E-52})$$

Por otro lado, de (E-48) se tiene

$$\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_3 - 4\pi \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2. \quad (\text{E-53})$$

Al reemplazar (E-53) en (E-50)-(E-51) se obtiene

$$-4\pi k \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} \mathcal{C}_2 + k(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) \mathcal{C}_3 + ik\delta \mathcal{C}_5 = 0, \quad (\text{E-54})$$

$$4\pi\delta ik \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \mathcal{C}_2 - \delta ik \mathcal{C}_3 - 2k\mathcal{C}_5 = 0. \quad (\text{E-55})$$

De esta manera, de (E-52), (E-54) y (E-55) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraico homogéneo reducido 3x3. En forma matricial este sistema se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - iv\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) & -k\beta^{(1)} & 0 \\ -4\pi k \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} & k(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) & ik\delta \\ 4\pi\delta ik \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} & -\delta ik & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{C}_5 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{E-56})$$

Para que el sistema (E-56) tenga solución no trivial el determinante de la matriz se debe anular,

$$\begin{aligned} & m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - iv\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) \begin{vmatrix} k(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) & ik\delta \\ -\delta ik & -2k \end{vmatrix} \\ & - (-k\beta^{(1)}) \begin{vmatrix} -4\pi k \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} & ik\delta \\ 4\pi\delta ik \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} & -2k \end{vmatrix} = 0, \\ \Rightarrow & -m_2 k \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} - iv\mu_l \frac{m_1}{m_2} \right) [2k^2(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) + \delta^2 k^2] \\ & + k\beta^{(1)} \left[8\pi k^2 \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} + 4\pi k^2 \frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \delta^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow iv\mu_l m_1 [2(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) + \delta^2] \\
 &\quad = m_2 \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) [2(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)}) + \delta^2] - 8\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{(2)} \\
 &\quad + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \delta^2, \\
 &\Rightarrow iv\mu_l m_1 = m_2 \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) - 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{2}}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{\delta^2}{2}}.
 \end{aligned} \tag{E- 57}$$

Si definimos η_δ como

$$\Lambda_\delta = 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \frac{\varepsilon^{(2)} + \frac{\delta^2}{2}}{\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} + \frac{\delta^2}{2}}, \tag{E- 58}$$

entonces (E-57) se transforma en

$$\Rightarrow iv\mu_l m_1 = m_2 \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) - \Lambda_\delta. \tag{E- 59}$$

A continuación, reemplazamos m_2 y m_1 , las cuales están dadas por las ecuaciones (E-8) y (E-40) respectivamente, en (E-59)

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow i \frac{\omega}{k} \mu_l \left(k^2 - ik \frac{\omega \rho_l}{k \mu_l} \right)^{1/2} \\
 &\quad = \left[\frac{4\pi \beta^{(1)^2} - \varepsilon^{(1)} \left(\rho_m \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 - \lambda^{(1)} \right)}{\lambda^{(1)} \varepsilon^{(1)} + 4\pi \beta^{(1)^2}} \right]^{1/2} \left(\lambda^{(1)} + 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} \right) - \Lambda_\delta,
 \end{aligned} \tag{E- 60}$$

donde $v = \omega/k$. Ahora, reorganizando (E-60) se tiene

$$\Rightarrow i\omega\mu_l \left(k^2 - i\omega \frac{\rho_l}{\mu_l} \right)^{1/2} = \left[\frac{\xi k^2 - \rho_m \omega^2}{\xi} \right]^{1/2} \xi - k\Lambda_\delta, \tag{E- 61}$$

donde hemos definido

$$\xi = 4\pi \frac{\beta^{(1)^2}}{\varepsilon^{(1)}} + \lambda^{(1)}. \tag{E- 62}$$

A continuación, reorganizamos la ecuación (E-61) de la siguiente forma

$$(-\omega^2 \mu_l^2 k^2 + i\omega^3 \mu_l \rho_l)^{1/2} = (\xi^2 k^2 - \rho_m \omega^2 \xi)^{1/2} - k\Lambda_\delta,$$

Apéndice E

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \mu_l^2 k^2 + i\omega^3 \mu_l \rho_l &= \xi^2 k^2 - \rho_m \omega^2 \xi - 2k\Lambda_\delta (\xi^2 k^2 - \rho_m \omega^2 \xi)^{1/2} + k^2 \Lambda_\delta^2, \\
 -k^2 (\omega^2 \mu_l^2 + \Lambda_\delta^2 + \xi^2) + \omega^2 (\rho_m \xi + i\omega \mu_l \rho_l) &= -2k\Lambda_\delta^2 (\xi^2 k^2 - \rho_m \omega^2 \xi)^{1/2}, \\
 \omega^4 (\rho_m \xi + i\omega \mu_l \rho_l)^2 - 2(\omega^2 \mu_l^2 + \Lambda_\delta^2 + \xi^2) (\rho_m \xi + i\omega \mu_l \rho_l) \omega^2 k^2 \\
 + k^4 (\omega^2 \mu_l^2 + \Lambda_\delta^2 + \xi^2)^2 &= 4k^2 \Lambda_\delta^2 (\xi^2 k^2 - \rho_m \omega^2 \xi), \\
 \omega^4 (i\mu_l \rho_l \omega + \rho_m \xi)^2 + [4\xi \Lambda_\delta^2 \rho_m - 2(\xi^2 + \Lambda_\delta^2 + \omega^2 \mu_l^2) (i\omega \rho_l \mu_l + \rho_m \xi)] \omega^2 k^2 \\
 + [(\xi^2 + \Lambda_\delta^2 + \omega^2 \mu_l^2)^2 - 4\xi^2 \Lambda_\delta^2] k^4 &= 0. \quad (\text{E- 63})
 \end{aligned}$$

La ecuación (E-63) es equivalente a la relación (6.21).

REFERENCIAS

- Bernevig, B. A. & Hughes, T. L., 2013. *Topological Insulators and Topological Superconductors*. Illustrated ed. Princeton: Princeton University Press.
- Bernevig, B. A., Hughes, T. & Zhang, S.-C., 2006. Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science*, Volumen 314, pp. 1757-1761.
- Bleustein, J. L., 1968. A New Surface Wave in Piezoelectric Materials. *Appl. Phys. Lett.*, 13(12), p. 412.
- Bleustein, J. L., 1969. Some Simple Modes of Wave Propagation in an Infinite Piezoelectric Plate. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 45(3), pp. 614-620.
- Board, E. y otros, 2008. *Axions*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.
- Brüne, C. y otros, 2011. Quantum Hall Effect from the Topological Surface States of Strained Bulk HgTe. *Phys. Rev. Lett.*, 106(126803).
- Chelli, Z. y otros, 2021. Elaboration of a piezoelectric force sensor for medical application. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 1204(012007).
- Chuanxin, L., 2020. Two Equivalent Reduction Methods of Dielectric Constant Tensor for. *scientific.net (Key Engineering Materials)*, Volumen 837, pp. 146-152.
- Crisler, D., C. J. & M. A., 1968. Dielectric, piezoelectric, and electromechanical coupling constants of zinc oxide. *Proceedings of the IEEE*, Volumen 56, pp. 225-226.
- Dan, M., Hu, G., Lijie, L. & Yan, Z., 2018. High Performance Piezotronic Logic Nanodevices Based on GaN/InN/GaN Topological Insulator. *Nano Energy*, Volumen 50, pp. 544-551.
- El Baroudi, A. & Le Pommellec, J., 2021. Bleustein-Gulyaev waves in a finite piezoelectric material. *Wave Motion*, Volumen 101, p. 102695.
- Elhady, A. & Abdel-Rahman, E., 2022. Measurement of the electric permittivity using Bleustein-Gulyaev wave sensor. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 32(034004).
- Fu, L. & Kane, C. L., 2007. Topological insulators with inversion symmetry. *Phys. Rev. B*, 76(045302).
- Granada Echeverri, J. C. & Rojas Vallecilla, D. F., 2017. Transfer Matrix Method in System with Topological Insulator. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 850(012024).

Referencias

- Granada Echeverri, J. C. & Rojas Vallecilla, D. F., 2014. Local Excitations in Thin Metal Films Bounded by Topological Insulator. *Physica B*, Volumen 455, pp. 82-84.
- Grandjean, N. y otros, 1999. Built-in Electric-Field Effects in Wurtzite AlGaIn/GaN Quantum Wells. *Journal of Applied Physics*, 86(3714).
- Gulyaev, Y. V., 1969. Electroacoustic surface waves in solids. *JETP Letter*, Volumen 9, pp. 37-38.
- Gulyaev, Y. V., 1998. Review of Shear Surface Acoustic. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 45(4), pp. 935 - 938.
- Guo, F. L. & Sun, R., 2008. Propagation of Bleustein–Gulyaev wave in 6 mm. *International Journal of Solids and Structures*, Volumen 45, pp. 3699-3710.
- Guo, F., Wang, G. & Rogerson, G., 2012. Inverse determination of liquid viscosity by means of the Bleustein–Gulyaev wave. *International Journal of Solids and Structures*, Volumen 49, p. 2115–2120.
- Guo, X. y otros, 2019. Quantum Information Memory Based on Reconfigurable Topological Insulators by Piezotronic Effect. *Nano Energy*, Volumen 60, pp. 36-42.
- Han, S.-W. y otros, 2020. GaN Based Negative Capacitance Heterojunction Field- Effect Transistor with <30 mV/dec Subthreshold Slope for Steep Switching Operation. *Results in Physics*, 16(102950).
- Hasan, M. Z. & Kane, C. L., 2010. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, Volumen 82, p. 3045.
- He, H. y otros, 2007. Piezoelectric Gated Diode of a Single ZnO Nanowire. *Advanced Materials*, Volumen 19, pp. 781-784.
- Hsieh, D. y otros, 2008. A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase. *Nature*, Volumen 452, p. pages970–974.
- Hsieh, D. y otros, 2009. Observation of Time-Reversal-Protected Single-Dirac-Cone Topological-Insulator States in Bi₂Te₃ and Sb₂Te₃. *Phys. Rev. Lett.*, 103(146401).
- Hu, G. & Zhang, Y., 2020. Quantum piezotronic devices based on ZnO/CdO quantum well. *Nano Energy*, 77(105154).
- Hu, G., Zhang, Y., Lijie, . L. & Wang, . Z. L., 2018. Piezotronic Transistor Based on Topological Insulator. *ASC nano*, 12(1), pp. 779-785.
- Huila Portillo, J. L., 2019. *Fuerza y Energia de Casimir en Aislantes Topologicos (Trabajo de Investigacion)*, Cali: Programa academico posgrado en ciencias fisica, Univesidad del Valle.

Referencias

- Hu, Y. y otros, 2010. Optimizing the Powder Output of a ZnO Photocell by Piezopotential. *ACS Nano*, 4(7), p. 4862.
- Ibach, H. & Lüth, H., 2009. *Solid-State Physics: An Introduction to Principles of Materials Science*. Fourth ed. Berlin: Springer.
- Ikhlas, M. y otros, 2022. Piezomagnetic switching of anomalous Hall effect in an antiferromagnet at room temperature. *Nature Physics*, Volumen 18, pp. 1086-1093.
- Jenkins, K. & Yang, R., 2017. Mechanical Transfer of ZnO nanowires for a Flexible and Conformal Piezotronic Strain sensor. *Semiconductor Science and Technology*, 32(7).
- Jiabin, Y. & Chao-Xing, L., 2020. Piezoelectricity and Topological Quantum Phase Transistor in Two-dimensional Spin-Orbit Coupled Crystals With Time-reversal Symmetry. *Nature Communications*, 11(2290).
- Karch, A., 2009. Electric-Magnetic Duality and Topological Insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 103(171601).
- Karch, A., 2011. Surface Plasmons and Topological Insulator. *Phys. Rev. B*, 83(245432).
- Kittel, C., 2004. *Introduction to Solid State Physics*. Eighth ed. New York: Wiley.
- König, M. y otros, 2007. Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells. *Science*, 318(5851), pp. 766-770.
- Lai, Y. P., Lin, I. T., Hu, K. H. & Liu, J. M., 2014. Plasmonics in Topological Insulators. *Nanomaterials and Nanotechnology*, 4(13).
- Landáu, L. D. & Lifshitz, Y. M., 2003 II. *The Classical Theory of Fields*. Second ed. New York: Pergamon.
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 2003 VI. *Fluid Mechanics*. Second ed. New York: Pergamon.
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 2003 VIII. *Electrodynamics of Continuous Media*. Second ed. New York: Pergamon.
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 2003 VII. *Theory of Elasticity*. Second ed. New York: Pergamon.
- Landau, L. D. & Lifshitz, Y. M., 2003 III. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Third ed. New York: Pergamon.
- Lan, Y., Wan, S. & Zhang, S.-C., 2011. Generalized quantization condition for topological insulators. *Phys. Rev. B*, 83(205109).
- Lechner, K., 2018. *Classical Electrodynamics. A Modern Perspective*. First ed. Berlin: Springer.
- Leroux, M. y otros, 1998. Quantum confined Stark effect due to built-in internal polarization fields in (Al,Ga)N/GaN quantum wells. *Phys. Rev. B*, Volumen 58, pp. 13371-13374.

Referencias

- Liang, . C. y otros, 2020. The Piezotronic Effect in InGaN/GaN Quantum-Well Based Microwire for Ultrasensitive Strain Sensor. *Nano Energy*, 72(104660).
- Litvinov, V., 2020. *Magnetism in Topological Insulators*. First ed. Berlin: Springer.
- Lu, B. S., 2018. Van der Waals Torque and Force Between Anisotropic Topological Insulator Slabs. *Phys. Rev. B*, 97(045427).
- Luo, H., 2019. *Advanced Topological Insulators*. First ed. New York: Wiley-Scrivener .
- Maciejko, J., Qi, X.-L., Drew, H. D. & Zhang, S.-C., 2010. Topological quantization in units of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett*, 105(166803).
- Madelung, O., 2004. *Semiconductors: Data Handbook*. Third ed. Berlin: Springer.
- Miao, M. S. y otros, 2012. Polarization- Driven Topological Insulator Transition in a GaN/InN/GaN Quantum Well. *Phys. Rev. Lett*, 109(186803).
- Mingwen , Z., Xin , C., Linyang , L. & Xiaoming , Z., 2015. Driving a GaAs Film to a Large-Gap Topological Insulator by Tensile Strain. *Scientific Reports*, 5(8441).
- Newnham , R. E., 2005. *Properties of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure*. Illustrated ed. New York: Oxford University Press.
- O. A. y otros, 1999. Two-dimensional electron gases induced by spontaneous and piezoelectric. *Journal of Applied Physics* , Volumen 85, p. 3222.
- Peccei , R. D. & Quinn, H. R., 1977. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. D*, Volumen 16, p. 1791.
- Qilin , H. y otros, 2020. Flexible GaN Microwire-based Piezotronic Sensory Memory Device. *Nano Energy*, 78(105312).
- Qi, X.-L. & Zhang, S.-C., 2011. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, Volumen 83, pp. 1057-1110.
- Rayleigh, L., 1885. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math.*, Volumen 17, pp. 4-11.
- Rojas Vallecilla, D. F. & Granada Echeverri, J. C., 2019. *Metodo de Matriz de Transferencia en Sistemas Estratificados con Aislantes Topologicos (Trabajo de Investigacion)*, Cali: Programa academico posgrado en ciencias fisica, Universidad del Valle.
- Rojas Vallecilla, D. F. & Granada Echeverri, J. C., 2024. Bleustein-Gulyaev waves in topological piezoelectric crystals. *Materials Research Express*, Volumen 11, 015702.
- Rui-Chun, . X., Ding-Fu , S., Zhi-Qiang , Z. & Hua , J., 2020. Two Dimensional Metals for Piezoelectriclike Devices Based on Berry- Curvature Dipole. *Phys. Rev. Applied*, 13(044014).

- Sekine, A. & Nomura, K., 2021. Axion electrodynamics in topological materials. *Journal of Applied Physics*, 129(141101).
- Shen, S.-Q., 2013. *Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matters*. First ed. Berlin: Springer.
- Tiersten, H., 1969. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates*. First ed. New York: Springer.
- Ting, . L. y otros, 2020. Piezo-phototronic Effect in INGaN/GaN Semifloating Micro-Disk LED Array. *Nano Energy*, 67(104218).
- Uchino, K., 2017. *Advanced Piezoelectric Materials: Science and Technology*. Second ed. s.l.:Woodhead Publishing.
- Vanderbilt, D., 2018. *Berry Phases in Electronic Structure Theory. Electric Polarization, Orbital Magnetization and Topological Insulators*. First ed. Cambridge: University Press.
- Vazifeh, M. M. & Franz, M., 2010. Quantization and 2π periodicity of the axion action in topological insulators. *Phys. Rev. B*, 82(233103).
- Wan, Z. L., 2007. Nanopiezotronics. *Advanced materials*, Volumen 19, pp. 889-892.
- Wan, Z. L., 2012. *Piezotronics and piezo-phototronics*. First ed. Berlin: Springer.
- Weinberg, S., 1978. A New Light Boson?. *Phys. Rev. Lett.*, Volumen 40, p. 223.
- Wenjie, N., Zheng, R., Yueheng, L. & Zhu, S., 2013. Casimir Force Between Topological Insulator Slabs. *Phys. Rev. B*, 88(085421).
- Wilczek, F., 1987. Two applications of axion electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, Volumen 58, p. 1799.
- Xiaonan , W. y otros, 2015. Development and progress in piezotronics. *Nano Energy*, Volumen 14, pp. 276-295.
- Xudong, . W. y otros, 2006. Piezoelectric Field Effect Transistor and Nanoforce Sensor Based on a Single ZnO nanowire. *Nano Letters*, 6(12), pp. 2768-2772.
- Yang, Q. y otros, 2010. Enhancing Sensitivity of a Single ZnO Micro/nanowire Photodetector by Piezo-photonic Effect.. *ACS NANO*, 4(10), p. 6285–6291.
- Yang, Q., Wang, W., Xu, S. & Wang, Z. L., 2011. Enhancing Light Emission of ZnO Microwire-Based Diodes by Piezo-Phototronic Effect. *NANO LETTERS*, Volumen 11, p. 4012–4017.
- Yan, X. y otros, 2020. Hight Performance Piezotronic Spin Transistor Using Molybdenum Disulfide Nanoribbon. *Nano Energy*, 75(104953).

Referencias

- Ying, L. y otros, 2015. Fundamentals theories of piezotronics and Piezo-phototronics. *Nano Energy*, Volumen 14, pp. 257-275.
- Zhang, S. y otros, 2020. Strain-controlled Powder Devices as Inspired by Human Reflex. *Nature Communications*, Volumen 11, p. 326.
- Zhang, H. y otros, 2009. Topological insulators in Bi₂Se₃, Bi₂Te₃ and Sb₂Te₃ with a single Dirac cone on the surface. *Nature Physics*, Volumen 5, p. 438–442.
- Zheng, R. y otros, 2016. Enhancing Casimir Repulsion Via Topological Insulator Multilayers. *Phys. Lett. A*, 380(2861).
- Zhu, H., A. Richter, C., Zhao, E. & Bonevich, J. E., 2013. Topological Insulator Bi₂Se₃ Nanowire High Performance Field-Effect Transistors. *Scientific Reports*, 3(1757).
- Zyuzin, A. A. & Burkov, A. A., 2012. Topological response in Weyl semimetals and the chiral anomaly. *Phys. Rev. B*, 86(115133).