



Una ecología de las obras matemáticas propuestas en la introducción del concepto de número entero

Julián Andrés Martínez Bolaños

0935791

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, MARZO DE 2014

Una ecología de las obras matemáticas propuestas en la introducción del
concepto de número entero

Julián Andrés Martínez Bolaños
0935791

Trabajo de grado presentado como requisito para acceder al título de
LICENCIADO EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS
Tutor

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, MARZO DE 2014



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. Marque con una X la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	Una ecología de las obras matemáticas propuestas en la introducción del concepto de número entero.							
Se trata de:	Proyecto	☐	Informe Final	☒				
Director:	Wildebrando Miranda Vargas							
1er Evaluador:	Alexander Parra							
2do Evaluador:	Maritza Pedreros							
Fecha y Hora:	Año:	2014	Mes:	Marzo	Día:	5	Hora:	5:00 pm
Estudiantes								
Nombres y Apellidos completos			Código		Programa Académico			
Julián Andrés Martínez Bolaños			0935791		3469			

EVALUACIÓN			
Aprobado	☒	Meritorio	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de (máximo un mes) ante:			
Director del Trabajo	☐	1er Evaluador	☐
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:			
Año:	Mes:	Día:	Hora:
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).			

FIRMAS:		
Wildebrando Miranda Vargas	Alexander Parra	Maritza Pedreros
<i>Wildebrando Miranda Vargas</i>	<i>Alexander Parra</i>	<i>Maritza Pedreros</i>
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN
DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera:

4. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente describala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: una Ecología de las Obras Matemáticas
Propuestas en la Introducción del concepto de
número Entero.

Autores:

Nombre: Julian Andres Martinez Bohio Firma: [Signature]
C.C. 16 944575

Nombre: Firma: _____
C.C. _____

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha: 12 Marzo 2014

13. desea una versión digital del formulario una vez esté diligenciado utilizar los programas 'pdfcreator' o 'Dopdf', los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así poder guardarlo

Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Occidental
División de Asesorías

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia quiero dar gracias a DIOS por darme la oportunidad de ingresar a la universidad después de tantos intentos y darme la fortaleza para poder culminar este proceso de formación.

También agradezco a las personas que me apoyaron en el transcurso de mi carrera, a mis padres, a mi hermano, mis amigos y mis profesores.

A la profesora Ligia Torres, al profesor Octavio Pabon, al profesor Alexander Parra, a la profesora María Cristina Velasco, a la profesora Maritza Pedreros, a la señora María Isabel Gil y por ultimo al profesor Wildebrando Miranda, director de este trabajo el cual me orientó con paciencia y dedicación, muchas gracias a todos por todo el apoyo brindado durante esta gran etapa de mi vida.

JULIAN ANDRES MARTINEZ

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	10
INTRODUCCIÓN	11
1. CAPITULO 1	14
1.1 antecedentes	15
1.2 formulación del problema	18
1.3 objetivos	20
1.4 justificación	21
CAPITULO 2	24
2. MARCO TEORICO	25
2.1 una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)	25
2.2.1 Concepto de Obra Matemática (OM)	27
2.2 Los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias: ¿Aporte o limitación?	29
2.5 construcción de Una Obra Matemática de Referencia (OMr)	33
CAPITULO 3	43
3. METODOLOGÍA	44
3.1 Características de la institución	45
CAPITULO 4	49
4. Análisis del plan de área	50
4.1 Análisis de los textos escolares	54
4.2 Análisis de la praxis (tareas, técnicas)	57
4.2.1 Análisis de la obra matemática (tecnologías, teorías)	65
4.3 Contraste de la OMr con la OMp	73
CAPITULO 5	77
5. Conclusiones	78
5.1 BIBLIOGRAFIA	81
5.2 ANEXOS	84

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Coherencia horizontal MEN (2006).	31
Tabla 2. Coherencia vertical MEN (2006).	32
Tabla 3. Estructura de la unidad 6 del texto guía Delta 6.....	55
Tabla 4. Estructura de las unidades 1 y 2 del texto guía Zona Activa 7.....	56
Tabla 5. Contextualización de los textos escolares analizados.....	58
Tabla 6. Técnica de solución para agrupación de las tareas.....	69
Tabla 7. Contraste entre los contenidos del plan de área y el texto escolar Delta 6.....	72
Tabla 8 Contraste entre los contenidos del plan de área y el texto escolar Zona Activa 7...73	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estructura de la obra matemática.....	28
Figura 2. Texto escolar zona activa 7.....	44
Figura 3. Texto escolar delta 6.....	44
Figura 4.Foto colegio Comfandi el prado parte exterior.....	46
Figura 5.Foto colegio Comfandi el prado parte interna.....	46
Figura 6. Mapa conceptual del plan de área de matemáticas del colegio Comfandi el prado.....	46
Figura 7. Texto escolar Delta 6.....	60

RESUMEN

En este trabajo de grado, que se circunscribe en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y que se plantea como un trabajo de tipo exploratorio, se intenta dar cuenta de la ecología que se da en el nivel de la Obra Matemática Propuesta (OMp) con relación a la enseñanza de los números enteros en una institución escolar de la ciudad de Cali.

A partir del estudio de algunos fenómenos didácticos como el autismo temático, la atomización del proceso de enseñanza, la reducción del estudio de Z a un entorno aritmético, dicho análisis pondrá de relieve las restricciones que desde el nivel de la OMp son impuestas al tratamiento escolar de dicho objeto matemático y que delimitaría en gran medida su puesta en marcha en el aula como objeto de aprendizaje. Para ello, se construye una OMr (Obra Matemática de Referencia) con ayuda de algunos estudios teóricos al respecto y que permitirán realizar el análisis en términos de contraste entre OMr y OMp.

En este sentido, este trabajo tomará como referentes empíricos, documentos curriculares de carácter oficial, el plan de área de matemáticas de la institución y los textos escolares que se usan para abordar la enseñanza de Z en la escuela.

Palabras clave: TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), OM (Obra Matemática), Números enteros, Ecología.

INTRODUCCIÓN

Las condiciones de existencia que limitan o posibilitan la enseñanza de un concepto a nivel escolar es una de las preocupaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

En este trabajo se asume dicha perspectiva teórica y se enfoca hacia una reflexión sobre la enseñanza de los números enteros. Es por eso que este trabajo tiene como objetivo realizar una ecología en cuanto a la introducción de Z en una institución escolar teniendo en cuenta la importancia que ejercen las obras matemáticas propuestas desde el currículo, así mismo se plantea hacer un contraste de estas obras matemáticas a la luz del currículo con las obras matemáticas propuestas desde el plan de área de dicha institución. Para que el lector se familiarice con el término ecología desde el principio, plantearemos la caracterización esbozada por Barquero (2009) sobre lo que dicha perspectiva ecológica connota:

En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. (p. 6).

Se entenderá de esta manera por qué la perspectiva ecológica resulta pertinente en este trabajo, ya que dicha perspectiva rompe con la manera tradicional de hacer investigación, permitiendo que de entrada se pongan en cuestionamiento los modelos dominantes sobre la forma de interpretar los fenómenos didácticos.

Ahora bien, para hacer este trabajo y hacer explícita la ecología en la institución escolar es fundamental tener en cuenta las obras matemáticas que se proponen para ser enseñadas, ya que de ellas se constituyen tareas, cuestiones, técnicas, etc., que son una base para introducir el concepto de $\mathbb{Z}$ en la escuela.

Por ello, para realizar dicho trabajo se plantea en el primer capítulo algunas de las causas que dieron origen al porqué se dificulta tanto introducir el concepto de número entero en la escuela, junto con algunos antecedentes de tipo local e internacional que han abordado distintas perspectivas para la enseñanza de $\mathbb{Z}$, también se presentan los objetivos generales y específicos, en los cuales se basa este trabajo y por último la justificación, en donde se plantea la importancia de este tipo de trabajos, por la manera en que permitirán dilucidar las reales condiciones de existencia de los objetos matemáticos a nivel escolar.

En el segundo capítulo, se abordan algunos elementos teóricos de la TAD, en donde se identifican dos fenómenos presentes en la enseñanza de las matemáticas llamados autismo escolar y atomización del proceso de enseñanza. Gascón, (1998). Asimismo el concepto de obra matemática que brinda pautas en nuestro análisis en donde se relaciona lo que deben permitir las tareas propuestas en los textos escolares para la construcción de $\mathbb{Z}$. Igualmente se propone la construcción de una OMr que desde nuestra perspectiva aportará a la idea de por qué el entorno aritmético resulta problemático en la introducción de los números enteros.

En el tercer capítulo, se presenta la propuesta metodológica, que, grosso modo, tiene en cuenta tres fases: La primera de ellas, encaminada hacia la necesidad de refinar el marco teórico y de hacer explícitos los referentes empíricos (Libros de texto, Documentos curriculares, documentos oficiales de la institución). La segunda fase, dirigida hacia la construcción de la OMr y la tercera fase dirigida hacia la realización de los análisis de las OMp en términos de contraste con las OMr.

Por último en este capítulo, se presenta la contextualización de la institución escolar.

En el cuarto capítulo, se presenta el análisis del plan de área de la institución y el análisis de los textos escolares.

Finalizando en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y la bibliografía utilizada.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

OBJETIVO GENERAL.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

JUSTIFICACIÓN.

1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

Son varios los trabajos referenciados en la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de Z en la escuela. Sin embargo, pocos de ellos se han realizado desde la perspectiva de la TAD. La mayoría de las investigaciones realizada en torno a Z toma como modelo epistemológico de referencia el campo aritmético, es decir, se asume acríticamente o por lo menos no se pone en cuestión que los Z pertenecen al campo numérico. Sin embargo, desde la TAD resulta muy pertinente el cambio conceptual que se deriva en las investigaciones cuando se cuestionan los modelos epistemológicos de referencia. Es así, como la parte del álgebra resulta un campo fundamental de donde será posible estudiar otras cuestiones, y como resultado de este enfoque los Z se abordan desde una perspectiva algebraica. (Cid & Bolea, 2007).

En este sentido, los trabajos que referenciamos como antecedentes, la mayoría de ellos desde otras perspectivas teóricas, son ilustrativos más que todo por el enfoque metodológico que adoptan, o también por el énfasis puesto en el análisis de los modelos concretos que de entrada son cuestionados desde la TAD.

A nivel local, referenciamos algunos de esos trabajos realizados en el Instituto de Educación y Pedagogía (IEP), estos son:

- Un análisis de las obras matemáticas propuestas en la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Ordoñez Leidy, ChavarroMayerline 2012)
- Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica (OrtegaNathaly, Orozco Vanessa 2012)
- Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares (Fory Valencia Oscar 2010).

El trabajo de Ordoñez y Chavarro (2012) es de carácter exploratorio, se sitúa desde la perspectiva de la TAD, y el interés que representó para este trabajo es el de

abordar la enseñanza de los números enteros de manera integrada teniendo en cuenta los sistemas numéricos. Principalmente se planteó la necesidad de determinar cuáles son las potencialidades y limitaciones de una obra matemática propuesta en la institución colegio Hebreo “Jorge Isaacs”, teniendo en cuenta lo que la obra matemática plantea para la construcción de número entero. También, se hizo una revisión al currículo propuesto en la institución mencionada anteriormente a través de la descripción y análisis del plan de área de matemáticas y textos escolares de matemáticas, teniendo en cuenta los lineamientos curriculares y los estándares de competencias. En este trabajo no se cuestiona el modelo epistemológico de referencia para $\mathbb{Z}$, que es una característica muy importante dentro de los análisis de la TAD y por lo que nuestro trabajo intenta avanzar en esa vía.

El trabajo realizado por Ortega y Orozco (2012), se inscribe en la línea de formación de Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Área de Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía (I.E.P) de la Universidad del Valle. Esta investigación aborda una compleja problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje de los números de enteros en la escuela; para lo cual se tomó como punto de partida algunas investigaciones realizadas por autores como, Bruno, (1997), Cid, (2003), y González, et al., (1999) las cuales reportan errores, dificultades y obstáculos en la construcción de este concepto desde la perspectiva histórica y didáctica. Además para abordar tal problemática se propuso una secuencia didáctica que permitiera introducir el concepto de número entero a partir de números relativos en contextos significativos para los estudiantes de grado 7° de la Educación Básica.

Se esperaba que este trabajo aportara al proceso de formación en la práctica investigativa de profesores de matemáticas y fuese el inicio de una propuesta viable, para que se tenga en cuenta en próximas investigaciones relativas a este concepto u objeto matemático.

- El trabajo realizado por Fory (2010), está inscrito en la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, apunta a la identificación de obstáculos didácticos presentes en los textos escolares de matemáticas del grado séptimo en la enseñanza de la operación de adición en el conjunto de los números enteros.

La metodología que se utilizó para el desarrollo de este trabajo se fundamentó en la selección de dos textos escolares de matemáticas de grado séptimo y posterior análisis del contenido teórico para establecer el estatus, que se le da a los números enteros, así como el análisis de las actividades propuestas; buscando identificar si ellas generan o no obstáculos didácticos en el aprendizaje de la operación de adición en el contexto numérico de los enteros.

A nivel internacional, la principal fuente de reflexión en la vía de nuestro trabajo, lo aportan los documentos de Cid & Bolea (2001). El cual propone retomar una propuesta de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico (Cid & Bolea, 2001) a través de la construcción de una Obra Matemática de referencia que tiene en cuenta algunas cuestiones generatrices de dónde puede llegar a emerger $\mathbb{Z}$. Las autoras parten de algunas cuestiones que desde el punto de vista de la epistemología clásica de los números enteros no pueden abordarse científicamente si no se pone evidencia el carácter problemático de dichas formulaciones. Es así como antes que proponer una obra matemática de referencia para abordar la enseñanza de $\mathbb{Z}$ en la escuela se plantea la idea de examinar en detalle la ecología de dicha enseñanza llegando a la conclusión inicial de que el entorno aritmético en el cual esta habita, imposibilita la emergencia de cuestiones fundamentales para el tratamiento de $\mathbb{Z}$, como es el caso del trabajo con los signos, y del desprendimiento de las relaciones binarias que dominan la aritmética a relaciones unarias que permean en gran parte el trabajo algebraico.

Por esta razón, en este trabajo, se examina dicha postura intentando a nivel del currículo propuesto examinar la pertinencia del trabajo con $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico.

1.2 Formulación del Problema

A través de algunas investigaciones como la realizada por diferentes autores (Bruno, 1997; Parra, 1998; Bruno, 2001; Cid 2003; González et al., 1990) Se manifiesta que existen diversas dificultades en la enseñanza de los números enteros, tales como: Introducir los números enteros en un entorno aritmético, enseñarlos basándose en *modelos concretos*¹ (haciendo referencia a situaciones de la vida real), aplicar operaciones como la adición y la sustracción de números enteros(debido a que los estudiantes al sumar números enteros, identifican los números con cantidades, lo cual relaciona la adición con la acción de añadir y la sustracción la identifican con la acción de quitar o disminuir; este hecho según González (1990) obstaculiza la generalización de las operaciones y el orden de $\mathbb{Z}$), la falta de conocimiento del desarrollo histórico de los números negativos por parte de los docentes; es decir, el desconocimiento de los fenómenos históricos por los que tuvieron que pasar los números enteros negativos a lo largo de su desarrollo para poder llegar a su formalización, lo cual es una dificultad a la hora de enseñar dicho concepto en la escuela, dado que si un docente no tiene claro como fue el proceso de construcción de $\mathbb{Z}$ hasta llegar a su formalización, es muy difícil que pueda argumentar de manera sólida las propiedades a sus estudiantes que caracterizan su construcción. Estas son algunas de las dificultades que han surgido en el transcurso de la enseñanza de los números enteros en el entorno escolar y como se ha mencionado anteriormente han permanecido a través del tiempo en el seno de las instituciones. A esto súmese la organización curricular de la matemática escolar: antes de los grados donde se introduce $\mathbb{Z}$ (usualmente grados 6 y 7) los niños difícilmente son puestos en situaciones de aula en las que se vean en la necesidad de utilizar, de manera intuitiva, nociones básicas relacionadas con los números enteros, o mejor aún, con las nociones básicas de lo positivo

¹Son muchos los modelos concretos que se utilizan o se proponen en la enseñanza de los números enteros (deudas y haberes, temperaturas, fichas de dos colores, móviles que recorren un camino, etc.). Básicamente pueden clasificarse en dos tipos: modelos de neutralización en los que dos números enteros opuestos representan fuerzas que se neutralizan y modelos de desplazamiento en los que los números enteros representan desplazamientos a lo largo de un camino, en uno u otro sentido.

y lo negativo. Esta situación se presenta a pesar de que ellos, en su vida cotidiana, se ven enfrentados a situaciones que implican una primera aproximación a este conjunto numérico; por ejemplo cuando juegan (pierden, ganan, quedan debiendo); en sus casas (sus padres tienen deudas, hacen préstamos, pagan acreencias); en las noticias (información estadística sobre la economía del país, la tasa de interés, etc.). Pero ¿Por qué no se encuentran los modelos concretos familiares a los niños y a la vez que puedan favorecer a la construcción de la estructura de $\mathbb{Z}$?

Esta es una de las preguntas que se plantea la TAD cuando pone en cuestionamiento el modelo epistemológico de referencia para introducir a $\mathbb{Z}$ en la escuela. Plantean que la mayoría de los modelos concretos que se proponen en la escuela, además de basarse en entornos aritméticos, ponen de fondo una estructura de $\mathbb{Z}$ como espacio vectorial y afín, en lugar de su estructura algebraica como anillo totalmente ordenado.

La introducción de $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico quizás resulte una manera más conveniente para su tratamiento a nivel escolar, pero la misma investigación ha sugerido que no es posible determinar esto de una vez por todas hasta que no se tenga una buena base empírica para validar dicha hipótesis. Por lo tanto, lo que queda por ahora es examinar la ecología que circula en las instituciones escolares para intentar validar lo que la investigación ha dicho hasta el momento y mirar los alcances de un tratamiento de $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico.

Es en este sentido y según lo expuesto anteriormente, que este trabajo intenta explicitar cómo son las obras matemáticas propuestas en una institución escolar con respecto a la enseñanza de $\mathbb{Z}$. De esta manera, se plantea el siguiente interrogante:

¿Cuál es la ecología que se presenta en las obras matemáticas propuestas en una institución escolar con respecto a la introducción del concepto de número entero?

Planteamos la hipótesis de que la ecología que se presentará en la institución estudiada hará evidente algunos fenómenos didácticos relativamente universales, tales como: la

atomización del proceso de enseñanza, el autismo temático y la reducción del significado de Z a modelos concretos referenciados en la literatura consultada.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

- Identificar la ecología de las obras matemáticas propuestas en una institución escolar, con relación a la introducción del concepto de número entero, desde la TAD.

1.3.2 Objetivos específicos

- Construir una Obra matemática de referencia (OMr) que modela el conocimiento a ser enseñado sobre los números enteros.
- Describir y analizar la OM propuesta en los referentes curriculares.
- Describir y analizar la OM propuesta en el plan curricular de área y los textos escolares en una institución escolar.
- Contrastar la OMr con la OMp.

1.4 JUSTIFICACION

Son muchas las razones que permiten entender la relevancia de este trabajo. Entre ellas se encuentran las que se relacionan con el propio saber matemático que circula en las instituciones escolares el cual desde la TAD debe ser un punto central en los análisis didácticos y que se centran en una reflexión sobre los modelos concretos para introducir Z, pasando por aquellas razones que hacen replantear la noción de currículo como obra abierta y de esta manera encontrar formas de superar algunos fenómenos presentes en nuestras instituciones tales como la creciente atomización de las matemáticas escolares haciendo que se pierdan las razones de ser de lo que se estudia en la escuela, hasta las razones más personales que nacen de la preocupación por las dificultades de los estudiantes cuando se ven enfrentados a conceptos de gran abstracción como lo es el del sistema de los números enteros que no solo implica construir unas ideas intuitivas sino ir consolidando un verdadero proceso de estudio del objeto en cuestión.

En consecuencia, podemos sintetizar las razones que justifican la realización de este trabajo como sigue:

1. Es necesario explicitar las condiciones o fenómenos que pueden llegar a impedir o potencializar la emergencia de Z en la escuela. El explicitar estas condiciones permitiría que desde la TAD se aborden cuestiones que ponen de manifiesto los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos en contenidos aptos para ser estudiados más afondo y determinar que impide o potencializa a Z. Por ejemplo, fenómenos como *“La atomización del proceso de enseñanza y el autismo temático”* son una de las causas que pueden impedir el proceso de enseñanza de la institución escolar, debido a que la atomización del proceso de enseñanza ha convertido dicha enseñanza tan solo en un mecanismo de estudio en el cual los estudiantes se limitan a recibir cierta cantidad de conceptos o temas desarticuladamente sin que se realice una reflexión ante las actividades matemáticas propuestas y los objetos matemáticos que se utilizan en la escuela. (Gascón, 1998), y el autismo temático porque se ha

evidenciado la poca importancia y relación entre lo que se enseña y la razón de ser de lo que se enseña.

2. Porque el conjunto Z ha sido fuente de numerosas reflexiones pero muy pocas de ellas se dedican sistemáticamente a analizar la ecología de los procesos de conocimiento y contexto necesarios para una integración de los componentes del saber en cuanto a los sistemas numéricos. La complejidad de Z ha llevado a muchos investigadores a realizar múltiples reflexiones de cómo introducir el concepto de Z en la escuela, que métodos serían los más adecuados, el uso de los modelos concretos, los obstáculos y concepciones en la enseñanza y aprendizaje, etc., pero son pocas las que analizan realmente la ecología en función de un modelo epistemológico propio y que potencian o impiden los procesos de conocimiento y de qué manera se pueden articular los sistemas numéricos para ser enseñados en la escuela.
3. Es importante analizar el sentido que tienen las OM que se pueden realizar desde el currículo propuesto, debido a que cuando se plantean estas obras matemáticas, no se cuestiona si los elementos que conforman la obra propuesta son los más indicados para el proceso de enseñanza de Z y no se toman en consideración los complejos procesos de transposición didáctica, así pues el análisis de las “*obras matemáticas*” propuestas por el currículo son de gran importancia, debido a que por medio de estas se brindan unas pautas para la enseñanza de las matemáticas en el seno de una institución, las cuales permitirían hacer un análisis del trabajo que se realiza de manera integrada en la escuela, encontrando las razones de ser y el sentido de lo que se enseña.
4. Existe una preocupación personal sobre la necesidad de comprender por qué los estudiantes no avanzan en su proceso de comprensión de Z a pesar de que éste es introducido desde el inicio de la secundaria (o antes en algunos casos), y aun así, durante su transcurso en la secundaria los estudiantes finalizan su ciclo escolar cómo si dicha reflexión hubiese nacido y muerto en la misma aula.

5. Se desea que este trabajo aporte una fuente de reflexión sobre las problemáticas que se están analizando desde la perspectiva de la TAD, no porque sea una perspectiva teórica reciente en el campo de la didáctica de las matemáticas, sino porque consideramos que si los fenómenos que se estudian en dicha teoría (autismo temático, desaparición paulatina de la disciplina matemática, enfermedad didáctica, etc.) no se abordan científicamente, será muy difícil la transformación social de nuestras escuelas por las que todo enfoque debería procurar brindar sus más preciados aportes.

Capítulo 2

REFERENTES TEÓRICOS

2. REFERENTES TEÓRICOS

En esta sección se presentan los elementos teóricos en los que se fundamenta el análisis de este trabajo, los cuales, hacen referencia a lo que se plantea en el proceso de enseñanza de Z en una institución escolar. A continuación se mencionan uno a uno como síntesis y su orden de aparición dentro de esta sección.

- Desde la TAD
- Perspectiva curricular. Que incluirá un análisis de los referentes curriculares actualmente emanados desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN).
- Desde las matemáticas (Que incluye algunos elementos reflexivos para la construcción de una Obra Matemática de Referencia)

En éste orden se mencionaran los referentes, que son centrales para nuestro análisis de las diferentes OM propuestas desde el currículo en una institución escolar.

2.1 Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico

En esta parte del trabajo es necesario abordar algunos elementos teóricos que desde la TAD ayudarán a examinar críticamente los datos empíricos que arrojará el análisis de la ecología en la OMp.

Desde la TAD se menciona varios fenómenos en la enseñanza de las matemáticas que aparecen inexplicados desde un punto de vista clásico²(la desalgebrización del currículo en la secundaria, la irresponsabilidad matemática de los alumnos, la

²Tal denominación del término “clásico” proviene de (Gascón, 1998) quien realiza un intento de hacer una narración de la tradición en didáctica de las matemáticas situada en 3 momentos que a nuestro juicio podemos sintetizar como: Mágica, clásica y Didáctica fundamental (Brousseau, 1986). No se trata de momentos lineales sino más bien de momentos complejos que presentan ciertas características. Remitimos al lector al texto fuente.

aritmetización del álgebra escolar, la algebrización del cálculo diferencial escolar, la atomización del proceso de enseñanza, la alienación didáctica, la enfermedad didáctica, entre otros), de los cuales nos centraremos en dos de ellos, por un lado la denominada “la atomización del proceso de enseñanza” el cual hace referencia que en la escuela se presenta una tendencia a la segmentación de los contenidos de enseñanza sin conexión alguna, de ahí que las conceptualizaciones que realizan los estudiantes carezcan de utilidad y significado, convirtiéndose en un conjunto desestructurado de actividades independientes entre sí, donde se tratan los problemas matemáticos como “anécdotas” aisladas y en el que el trabajo sistemático y disciplinado y los objetivos a mediano y largo plazo tienden a desaparecer. (Gascón, 1999).

El otro fenómeno a mencionar es el “autismo temático” el cual está relacionado con el anterior y que se puede abreviar como una especie de encierro en los temas, lo cual tiene como consecuencia más inmediata el olvido de las razones de aprender determinado objeto matemático; de esta manera los estudiantes no tienen acceso a la importancia de establecer conexiones entre lo que se aprende y el porqué de lo que se aprende (Gascón, 1998).

Algunos autores plantean que durante la escolaridad se realiza un trabajo fuerte con las operaciones en los diferentes sistemas numéricos y los estudiantes dan cuenta de estas maneras de operar en cada uno de ellos (los sistemas numéricos), sin embargo no existe una visión unitaria que contribuya a establecer las correctas relaciones que existen entre los sistemas numéricos y es aquí en donde el proceso tiene una ruptura dado que las propiedades intrínsecas de cada sistema numérico las desconoce, así den cuenta por separado de su parte operatoria. (Bruno, 2001). Desde el punto de vista de los dos fenómenos anteriormente mencionados, una visión unitaria de los sistemas numéricos permitiría encontrar las razones de ser en la enseñanza de $\mathbb{Z}$ en la escuela y evitaría paulatinamente la atomización del proceso de enseñanza.

La idea de visión unitaria de los conjuntos numéricos es importante en este trabajo puesto que pone de relieve la importancia de asumir seriamente los fenómenos que son nuestra fuente de reflexión tales como el autismo temático y la atomización. El asumir los

diferentes sistemas numéricos como simples obras matemáticas, es una de las causas de la atomización y autismo temático. La visión unitaria permite unificar los diferentes sistemas numéricos de manera que no se construya un conocimiento de los números como núcleos aislados.

Lo que se aprende acerca de los números, tanto en los primeros años como cuando se cursa la educación secundaria obligatoria, forma parte de un único conocimiento numérico, que debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo (Bruno, 2001).

Según lo mencionado anteriormente la TAD en este trabajo es la base para intervenir en la enseñanza de Z en la escuela y así poder enfrentar este tipo de fenómenos como la atomización y el autismo temático, que hacen que el aprendizaje se realice de manera desconectada, a partir de las diferentes causas que propician la ejecución de las diferentes OM.

2.1.1 Concepto de obra matemática (OM)

Desde la TAD, se hace referencia a un elemento llamado OM que si bien no está definido como tal, se propone un modelo que describe su estructura y sus características.

“...Se postula que una obra matemática, como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas...” (Gascón, 1998, p. 11).

A continuación en la figura 1 se muestra un esquema en donde se pone en evidencia los diferentes elementos que componen una obra matemática.

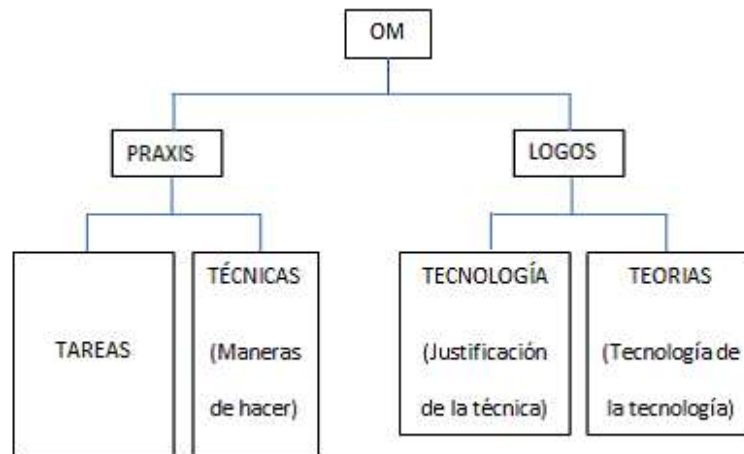


Figura1: Estructura de la obra matemática

Las Técnicas se definen como “una manera de hacer”, esta debe ser comprensible y justificada, de manera que al aplicarla tenga validez y su discurso argumente aquellas cuestiones que dan origen a los tipos de problemas. (Gascón, 1998). Si existe una técnica se supone que también existe un discurso interpretativo y justificado de esa técnica, de aplicación y validez, este discurso aplicado sobre la técnica se define como una tecnología.

La tecnología de una tecnología es una teoría asociada a una técnica que en general también es un discurso matemático que requiere de una interpretación y justificación.

Asimismo es claro mencionar que existen obras matemáticas con determinadas características que se hacen explícitas en las instituciones, ellas son las obras matemáticas puntuales, locales y regionales que se enunciarán a continuación:

...Las obras matemáticas cuyas praxeologías son puntuales hacen referencia a una manera de hacer de terminada tarea usando un pequeño conjunto de técnicas para solucionarlas. Cuando los temas que estructuran la enseñanza se articulan en torno a un discurso tecnológico común, habla de una praxeología local. Y por último si las praxeologías locales se estructuran en base a una teoría conforman praxeología regionales... (Gascón, 2009, p. 92)

Es importante mencionar que las praxeología bien sean puntuales, locales o regionales, no son únicas en todas las instituciones, son relativas a ellas pues éstas hacen parte de un currículo determinado y se categorizaran según su estructura. (Gascón, 2009).

El concepto de OM representa uno de los conceptos más importantes para este trabajo ya que al tratar de explicitar la integración de los sistemas numéricos en el proceso de estudio de los números enteros en principio, tal explicitación actuará sobre las OMp (Obras Matemáticas Propuestas).

Así pues se tiene según Gascón (1998) que:

Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos elementos, el de las tecnologías y el de las teorías... (p.13).

2.2 Los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en matemáticas: ¿Aporte o limitación?

En la actualidad las matemáticas forman parte del proyecto educativo de nuestra sociedad, del conjunto de obras que todos debemos estudiar.

Entonces ha surgido la cuestión ¿qué matemáticas deben estudiarse hoy en día en nuestra sociedad? ¿En qué consisten esas matemáticas que todos debemos saber? Es así entonces necesario analizar el currículo obligatorio que se propone en el sistema educativo, es decir, mirar de qué se componen las obras matemáticas seleccionadas asociadas al acto de enseñar un tema en específico, en este caso el sistema de los números enteros $\mathbb{Z}$.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) manifiestan que la enseñanza de los diferentes sistemas numéricos, se realiza de una manera integrada para el caso del pensamiento numérico. En efecto el MEN (1998) plantea que:

“...Una de las situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hace referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes representaciones, a la de su poder descriptivo...”(p.26).

Es decir, en los lineamientos se plantea la necesidad de una integración gradual entre distintos conceptos, procesos y contextos. La actividad matemática se toma como un centro de reflexión para el profesor de matemáticas y por lo tanto se exige que dichas actividades puedan mirarse de manera integrada.

Por el lado de los Estándares (2006) la cuestión es similar, aunque presenta sus matices. En un principio, la complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas, exige en los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

Para efectos de este informe, se esboza una coherencia horizontal y vertical de los estándares de los grados 6° y 7° que es donde se introduce este concepto de manera formal en muchas de las instituciones escolares en Colombia.

Coherencia horizontal	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Sexto a séptimo	Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de igualdad, las de las distintas formas de desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras Bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Tabla 1: Coherencia horizontal. (MEN, 2006)

La tabla anterior muestra que el pensamiento numérico es el eje central que hace referencia a las operaciones con números, también que los demás pensamientos, se articulan con el pensamiento numérico. En este mismo sentido los estándares mencionados en el pensamiento geométrico se articulan con el pensamiento numérico en tanto se puede ver el uso de los números como segmentos orientados al aplicarlos en transformaciones geométricas o representaciones cartesianas. De igual manera los sistemas numéricos se vinculan de manera directa con el pensamiento aleatorio dado que este sistema permite ver los problemas en diferentes sistemas de representación y el variacional permite verlo desde conceptos más generales como el concepto de función, es decir, se trata de ver las funciones numéricas como dependencia entre magnitudes que contienen a Z en tanto manejo de cantidades positivas y negativas.

En general en la coherencia horizontal mostrar la conexión entre los diferentes pensamientos, teniendo en cuenta el estándar que hace referencia a los sistemas numéricos en general, ya que no se explicitan estándares para un sistema numérico en particular.

También se puede observar que entre los diferentes pensamientos existe una relación en cuanto a la solución de problemas de los diferentes conceptos a trabajar, pero de igual forma no especifica el trabajo con los números enteros entre sí, lo que por el

momento podría decir que existe la intención de trabajar los diferentes sistemas numéricos de manera integrada pero dejando al lector con una interpretación demasiado abierta sobre cómo debería hacerse dicha integración.

En cuanto a la coherencia vertical, se extrajo lo siguiente:

Coherencia vertical	Pensamiento Numérico	Pensamiento Variacional
De 1° a 3°	Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo.	Reconozco y describo equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos aunque el valor siga igual.
De 4° a 5°	Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.
De 6° a 7°	Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa, entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
De 8° a 9°	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
De 10° a 11°	Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómica y racionales y sus derivadas.

Tabla 2 Coherencia vertical. MEN (2006).

En lo anterior se expone que hay un nivel de complejidad en este concepto, que refiere a los números en general (sistemas numéricos), en los diferentes conjuntos de grados, y con bastante énfasis tanto en el pensamiento numérico como en el pensamiento variacional pasando de identificar, justificar, establecer conjeturas, por resolver problemas, establecer relaciones y diferencias en correspondencia con los números, sus relaciones y operaciones, sin hacer una distinción clara de los sistemas numéricos, que para el caso de este trabajo, se enfoca en los números enteros.

De esta manera, el planteamiento de la coherencia vertical del MEN (2006), orienta los currículos de modo que se establezcan las diferentes relaciones entre los conocimientos, procesos y contextos, sin embargo carece de las pautas puntuales de cómo hacerlo o por lo menos de una orientación de cuáles puedan ser aquellas posibles obras matemáticas en las cuáles hay que prestar mayor atención.

De acuerdo a la coherencia horizontal y vertical, es claro que se conserva la idea de trabajar de manera integrada en el aula de clases con los estudiantes, lo cual indica que esto

es un buen planteamiento que va en contra de los fenómenos como la atomización y el autismo temático en la enseñanza. Sin embargo la propuesta que se plantea no es clara para establecer las conexiones de las competencias de cada uno de los conocimientos, los procesos y los contextos, y no es posible determinar por el momento el modelo epistemológico de referencia para introducir Z en la escuela que exigirá un análisis más detallado en el desarrollo de este trabajo.

2.3 Construcción de una Obra Matemática de Referencia (OMr)

En este apartado se realizan algunas reflexiones de tipo epistemológico que intentan sustentar la idea de que Z debe llevarse al campo algebraico para que sus aspectos estructurales $(Z, *, \leq)$ puedan ser estudiados de manera justificada. Para ello se retoma la propuesta de Cid y Bolea (2007) para la construcción de una OMr que esclarece algunos de los elementos que deberían ser parte de la enseñanza de Z y los elementos que permiten construir a Z como anillo ordenado.

Dicha construcción parte de la idea de mirar a Z como una limitación de la operatividad en N , pero en este nuevo caso se miran las estructuras que permiten hacer posible dicha ampliación.

Las revisiones iniciales desde el punto de vista matemático, están basadas en el texto de Recalde & al. (1998) quienes sustentan en primera instancia que el teorema según el cual para dos números naturales m y n , con $m < n$, existe un número natural s , tal que $m + s = n$, permite incorporar la resta como operación entre naturales. El número s se denomina la diferencia entre n y m , y se representa como $n - m$. Tenemos entonces que $s = n - m$ si y solo si $n = m + s$. Al número n se le llama el minuendo y a m el sustraendo. Observemos que $n - 0 = n$.

La resta entre naturales solo es posible si el minuendo es mayor que el sustraendo. La generalización de la resta, a dos cualesquiera números naturales, obliga a extender el sistema numérico de los números naturales a los números enteros.

Vale la pena resaltar que, históricamente, esta extensión no fue inmediata; la razón es que da origen a los números negativos y desde la antigüedad clásica, el número estaba ligado al proceso de contar donde lo negativo no tenía cabida. Incluso hasta mediados del siglo pasado muchos famosos matemáticos se negaban a reconocerles la ciudadanía numérica, sin embargo, Recalde & al. (1998) menciona algunos aspectos como los que aparecen a continuación los cuales vencieron la resistencia a considerar los números negativos:

- Se podían extender las operaciones de suma y producto sin ningún sacrificio teórico.
- La existencia de fenómenos físicos, como el movimiento, que llevan al planteamiento de ecuaciones como $3 + x = 2$, $5x + 6 = 0$ y cuyas soluciones requieren de la existencia de los números negativos.
- La matematización de ciertos fenómenos como la altitud y la medida de la temperatura.
- El desarrollo de sistemas contables por parte de los comerciantes, que exigían un método de consignar las deudas, incluyendo la acumulación progresiva de las mismas.

En estos y otros casos se precisaba de la ampliación de las operaciones de suma y producto consideradas hasta ahora en el sistema de los números naturales.

“...así se ampliaba el campo formalmente numérico, construyéndose un nuevo conjunto Z a partir de N , de tal manera que se pudiera establecer un isomorfismo entre N y una parte de Z , que se suele llamar Z^+ ...”. (González, et al., 1990, p. 63).

Ahora bien este nuevo sistema numérico, daba solución a las ecuaciones que requerían de respuestas con soluciones negativas revocando las restricciones que se presentaban en N .

Es importante mencionar que la enseñanza actual, propone contextos, conocimientos y procesos que deben ser llevado a la escuela en tanto estos integrados permiten un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes, esto implica que muchos de los elementos históricos de $\mathbf{Z}$ sean saltados u omitidos, es por eso que la propuesta que se lleva al aula de clase debe tener en cuenta conceptualizaciones que con anterioridad fueron estudiados para encontrar las conexiones pertinentes que hacen de los números enteros un objeto de enseñanza importante en la escuela.

Para ello, dentro del currículo deben existir obras matemáticas que permitan hacer dichas construcciones de tipo epistemológico para encontrar la razón de ser de estos objetos y el porqué de la necesidad de un estudiar un nuevo sistema numérico con mayor apertura que $\mathbf{N}$ que salva las restricciones del anterior sistema numérico.

Por lo anterior, es necesario construir una OMr, que sirva para analizar las limitaciones y potencialidades de introducir a $\mathbf{Z}$ en un entorno algebraico, basándose en una perspectiva integrada según Bruno (1997). Básicamente en este apartado presentaremos algunos elementos que sirven para la construcción de dicha OM.

Ahora bien, es necesario tener en cuenta porque fue necesario dar cabida al negativo como número, por ello a continuación daremos una justificación al porqué de la necesidad de su uso.

Ecuaciones de la forma $x - a = b$, tienen dentro de $\mathbf{N}$ soluciones limitadas, ya que la solución solo es posible en el caso que $x > a$, es por eso que surge la necesidad de un sistema numérico que pueda dar solución a este tipo de ecuaciones sin ningún tipo de limitación, este sistema numérico es $\mathbf{Z}$.

Así pues al reconocer a $\mathbf{Z}$ como sistema numérico y dar posibles soluciones a las limitaciones que surgían en $\mathbf{N}$, como por ejemplo que $a > b$, entonces x pertenece a $\mathbf{N}$, o que $a < b$, entonces x carece de sentido, es posible ampliar las operaciones y propiedades y lograr mayor confiabilidad al momento de utilizarlas.

Ahora bien aunque existe una similitud entre $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{N}$ hay que ser claro con las diferencias y por eso es necesario mencionar algunas de las definiciones, propiedades, teoremas y demás que han sido la base para construir a $\mathbf{Z}$, el cual potencializo las operaciones aditivas con los $\mathbf{N}$.

...lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicativa de $\mathbf{N}$ permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia, los signos “+” y “-” que en aritmética son signos operativos binarios, en álgebra pasan a ser signos predicativos o signos operativos unarios... (Cid y Bolea, 2007, p. 7).

Comprender estas diferencias son claves para establecer el cálculo algebraico, pues la construcción que se realice permite encontrar las relaciones que existen entre cada uno de los sistemas numéricos y en éstas intervienen las letras como términos desconocidos cuyos cálculos nunca pierden los objetivos y permite reconocer las propiedades que interviene como medio para encontrar información sobre el sistema y se convierte en objeto de estudio en sí mismo (Cid y Bolea, 2007).

Antes de ser mencionadas las cuestiones netamente formales que componen la estructura de $\mathbf{Z}$ es importante nombrar algunas cuestiones que se deben llevar a la escuela y que de hacerlo permitirían hacer una construcción más apropiada de los enteros. Existen algunas preguntas que se deben plantear para abordar $\mathbf{Z}$ de una manera más completa y rigurosa llevar, esas preguntas se mencionan a continuación:

- ¿Qué diferencia hay entre los naturales y los enteros?
- ¿Qué operaciones se pueden realizar en $\mathbf{Z}$ que no se pueden realizar en los Naturales?
- ¿Cuáles son las limitaciones y potencialidades de $\mathbf{Z}$ si las hay, en relación a los Naturales?
- ¿Es posible construir expresiones algebraicas que hagan ver el carácter unario de los símbolos “+” y “-”?

- ¿Es posible avanzar en el álgebra sin utilizar los números negativos?
- ¿Existen similitudes entre la aritmética y el álgebra?

En lo que sigue, se dará un esbozo para que matemáticamente esta construcción sea posible y que permita hacer emerger algunas de las cuestiones que dan origen a la Obra Matemática de Referencia (OMr). Partiremos de la cuestión generatriz (Q_1) que planteamos así :¿Qué elementos tecnológicos permiten justificar la ampliación del sistema de los números naturales a los números enteros de tal manera que el nuevo sistema incorpore elementos ya construidos en el sistema N y a la vez muestre la necesidad de emergencia de nuevos elementos?

Naturalmente, sabemos que Q_1 no puede ser abordada completamente si no se discriminan las subcuestiones de Q_1 que permitirán mostrar un nivel de cuestiones más concretas que puedan explicar la emergencia de Z como estructura de anillo ordenado.

Las propiedades que se mencionan a continuación y que relacionan a Z con N , no se pueden describir en un plano solo aritmético.

Construcción

Definición 1. Sea $A = N \times N$. Definimos las siguientes operaciones en A .

$$(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)$$

$$(m, n) \times (p, q) = (mp + nq, mq + np)$$

La razón de ellas radica en que $(m, n) + (p, q)$ representa

$$(m - n) + (p - q) \text{ o sea } (m + p) - (n + q) \text{ y análogamente } (m, n) \times (p, q) \text{ sería}$$

$$(m - n)(p - q) = (mp + nq) - (mq + np)$$

Proposición 1. Las operaciones acabadas de definir son conmutativas en A.

$$(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q) = (p + m, q + n) = (p, q) + (m, n)$$

La conmutatividad en $\mathbf{N}$ hace valida la segunda igualdad.

Proposición 2. La relación acabada de definir es de equivalencia.

Teorema 1. La relación de equivalencia anterior es compatible con las operaciones (+) y ($\times$) definidas en A.

Los enunciados anteriores expresados de manera axiomática que hacen parte del *logos* indican la relación existente entre los naturales o enteros positivos ($\mathbf{Z}^+$), de ahí que son isomorfos pues las operaciones previamente definidas al realizarlas permiten encontrar la solución según el sistema numérico que se trabaje. A continuación se muestran las propiedades que permiten reducir las 4 operaciones de la aritmética a 2 en el campo algebraico y que permiten ir ampliando la construcción de $\mathbf{Z}$ a partir de su estructura algebraica y de orden:

Teorema 2.

Las operaciones (+) y ($\times$) (entre clases) definidas en $\mathbf{Z}$ gozan de las siguientes propiedades.

- I. Las dos son asociativas y conmutativas.
- II. $[(m, n)]$ es el módulo de “+”(cualquiera sea $m \in \mathbf{N}$)
- III. $[(1, 0)]$ es el módulo de la multiplicación.
- IV. $[(n, m)]$ es el inverso aditivo de $[(m, n)]$.
- V. Es distributiva con respecto a la (+).

Proposición 3.

Dado un entero $[(p, q)]$, existe un único natural n tal que $[(p, q)] = [(0, n)]$.

Finalmente, cuando $p < q$ existe un n no nulo único tal que

$$p + q = q \text{ y } [(p, q)] = [(p, p + n)] = [(0, n)].$$

Es así como $\mathbf{Z}^+$ al conjunto de los enteros positivos o $\mathbf{N}$ y por $\mathbf{Z}^{(-)}$ al conjunto de los enteros negativos o inverso de $\mathbf{Z}^+$

Estas condiciones establecen las soluciones que existen en $\mathbf{Z}$ dado que $\mathbf{Z}^+$ es un grupo. Es importante manifestar la existencia de ecuaciones de la forma $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$, que aunque es una ecuación lineal, la solución no pertenece a $\mathbf{Z}$, debido a que $(\mathbf{Z}, *)$ no es un grupo, y de la única forma que existe una solución para esta ecuación es cuando $\mathbf{b}$ es múltiplo de $\mathbf{a}$. así pues, es necesario la introducción de otros sistemas numéricos como los racionales $(\mathbf{Q}^*)$ que son un grupo y podría fortalecer la enseñanza unificada de los diferentes sistemas numéricos.

La definición que de $\mathbf{N}$ se da bajo la operación de la sustracción tiene la siguiente forma $p + q = n \leftrightarrow p = n + q$, si no existe el natural c tal que $p = n + q$ no existe la diferencia, es decir p no es mayor que q .

Para poder solucionar expresiones como la anterior es necesario recurrir a $\mathbf{Z}$. A continuación se explicitan algunas definiciones y propiedades que hacen parte de una OMr. Es importante primero establecer como es el orden en $\mathbf{Z}$:

Definamos $m < n$ como $(m - n) \in (\mathbf{N}^*)$ y $m \leq n$ como $(m - n) \in \mathbf{N}$.

Proposición 4. La relación $\leq$ acabada de definir es de orden total en $\mathbf{Z}$.

De esta forma los números enteros se definen de la siguiente manera.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^- \cup \{0\}. \text{ y que } \mathbf{Z}^+ \cap \mathbf{Z}^- = \{\emptyset\}.$$

Además en la estructura de orden se denota la falta de una cota inferior, ni superior, determinando las condiciones bajo las cuales Z es completamente ordenado.

La anterior construcción que permitirá tener una OMr , también nos permitirá acercarnos a las limitaciones y potencialidades de las OMP según él, objeto de estudio de este trabajo. Así mismo esta construcción permite ver las limitaciones de N permitiendo a su vez construir a Z (+, *).

A continuación mostraremos algunas cuestiones que deben tener en cuenta la OMr para poder dar una solución, ya que dentro de N no es posible llegar a lo que se necesita.

Un ejemplo similar al presentado por Cid y Bolea (2001) es presentado para explicar porque es necesario abordar a Z desde un entorno algebraico y no aritmético: la expresión $16 - 3 - 7 + 3$ en N se entendería como una sucesión de sumas y restas, además los signos “+” y “-” estarían indicando dichas operaciones. Sin embargo en el álgebra se interpreta como la suma de los términos +16, -3, -7 y +3 y los signos “+” y “-” son predicativos, así pues al utilizar las propiedades asociativa, conmutativa, la existencia del cero y de los números opuestos se permite fácilmente cualquier reorganización de ese cálculo. Por ejemplo la propiedad asociativa permite la utilización de paréntesis, mientras la propiedad conmutativa justifica el intercambio de los términos, en este caso -3 y -7, con lo que la expresión se transformaría en $16 - 7 - 3 + 3$, y utilizando la propiedad del opuesto aditivo resultaría la expresión $16 - 7 - 3 + 3 = 16 - 7 = 9$.

En cambio, interpretando el cálculo como sumas y restas de números naturales, la justificación resulta menos fluida y exige conocer las propiedades de la resta, que no son tan evidentes como las de la suma. Es decir en principio, puesto que no existe una propiedad asociativa entre sumas y restas habría que entender que en la expresión $16-3-7 + 3$ las operaciones se ejecutan de izquierda a derecha, $((16-3) -7) + 3$. Ahora, tendríamos que utilizar la propiedad que dice que $(a - b) - c = (a - c) - b$. Esto nos permitiría escribir $((16 -7) -3) + 3$. Por último, sería necesario asumir la propiedad que dice que $(a -b) + b = a$, y con esto podríamos justificar el cálculo $((16-3) -7)+ 3 = ((16-7) -3) + 3 = (9-3) + 3 = 9$.

Por ejemplo cuando se plantea un problema del siguiente tipo, ¿Qué numero entero al adicionarlo con cero da como resultado -18? Si se plantea la ecuación tendríamos:

$$x + 0 = -18$$

Es necesario utilizar del teorema 2 la propiedad (iv), la cual propone el inverso aditivo como solución de este problema, la cual también se le conoce como el opuesto aditivo.

Esta ecuación de tipo $x + a = b$ con $a \geq 0$ y con $b < 0$ puede ser confusa cuando se ha dejado atrás a N

En el siguiente ejemplo se pide que complete cada frase con la palabra positivo o negativo. ¿El producto de dos números negativos es? _____

Si tratamos de comprobar porqué $-a \times -b = ab$ solo podríamos tomar como referencia el cálculo algebraico en el cual se omiten los signos y se convierten en signos predicativos o signos operativos unarios.

Un alumno podría pensar que $(+70) - (-10) = +70$ porque si tengo 70 pesos y me perdonan una deuda de 10 pesos sigo teniendo 70 pesos. Es por eso que se debe tener la OMr porque con el uso de los modelos concretos no se podría justificar este tipo de problemas.

Si planteamos un problema donde sea necesario utilizar los modelos concretos para encontrar el producto entre dos números enteros podría presentarse dificultad en algunos casos, por ejemplo, consideremos lo siguiente: Un maestro se gana \$ 300 al día y deja de trabajar durante dos días ¿cuánto dinero perdería? El problema plantea que el obrero no trabaja 2 días se escribiría (-2) y en cada uno de ellos pierde \$ 300. (-300), entonces: se plantearía $(-2)(-300) = (600)$. Luego el obrero pierde \$ 600 (-600), así pues se llega a que menos por menos es menos.

Buscar siempre diferentes situaciones o modelos concretos para justificar las operaciones con números concretos no siempre podrá dar los mejores resultados. Por otro lado, la OMr esbozada refleja que mantenerse en un plano puramente algebraico no resuelve del todo las problemáticas esenciales de cómo construir verdaderas cuestiones matemáticas para hacer emerger la OM que desea estudiarse, pero sí hace posible cuestionarse el modelo epistemológico de referencia y permite ver las limitaciones y potencialidades de uno u otro acercamiento.

De esta manera, es coherente la propuesta de explorar el estudio de Z en un entorno algebraico, dado que cómo intentó mostrarse los modelos concretos que poseen una base aritmética difícilmente captan la esencia de la emergencia de Z en la escuela cuya naturaleza es primordialmente algebraica.

Capítulo 3
METODOLOGÍA
CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN ESCOLAR

3. METODOLOGIA

La TAD basa la mayoría de sus análisis en el contraste entre las OM que circulan en las diferentes instituciones, con relación a las OMr. Es así como, al realizar este trabajo tomamos como fuentes algunos trabajos relacionados con los análisis que aquí se desarrollaron. En la realización de cada uno de los elementos que conforman este trabajo se particularizaron los momentos de la ejecución distribuidos por fases, los cuales permitieron recoger la información que da cuenta de su desarrollo.

Las siguientes son las fases que se llevaron a cabo:

Fase I: En esta fase se amplió y refinó el marco teórico, al igual que se hizo una revisión de los textos escolares Delta 6 editorial norma y Zona activa 7 editorial voluntad, (Ver figuras 2 y 3) y los elementos del currículo propuesto de la institución escolar (Plan de área de matemáticas, Estándares de competencias y Lineamientos curriculares).



Figura2: texto escolar zona activa 7



Figura 3: texto escolar Delta 6

Fase II: En esta fase se construyó la OMr la cual sirvió como base para analizar las limitaciones o potencialidades al introducir a Z en un entorno algebraico en una institución, a la luz de Cid & Bolea (2007).

Fase III: En esta fase se realizó el análisis de la OMr y se contrasta con la OMp (Textos escolares, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Plan de Área de la institución “Comfandi El Prado”) con relación a lo que plantea Cid & Bolea (2007).

3.1 Características de la institución

Teniendo en cuenta la importancia que tienen los elementos que son de análisis en este trabajo, los cuales fueron mencionados anteriormente, nos parece relevante realizar una contextualización de la institución escolar donde se llevó a cabo dicho proceso, en este caso, el Colegio Comfandi el Prado. Para ello se presenta la siguiente información, donde se resume los aspectos más relevantes de dicha institución, así como algunos aspectos de su planta física y ubicación.

En el año de 1992 se fundó el colegio Comfandi el prado, el cual inició sus labores con bachillerato industrial y con cobertura de doble jornada. Esta institución está ubicada en la Carrera 23 # 26B – 46 en el barrio el prado en la ciudad de Cali. Su capacidad de estudiantes está alrededor de unos 1000 estudiantes y cuenta con 50 docentes que se distribuye en las dos jornadas mañana y tarde. Los recursos con los que cuenta el colegio son la red de bibliotecas Comfandi las cuales son cinco ubicadas en diferentes espacios, sala de lectura (acondicionados apropiadamente con los espacios, materiales y guías), aulas de clase para explicaciones teóricas y sustentaciones orales, tres salas de sistemas, internet inalámbrico, libros guías según el grado de escolaridad, centro de publicaciones y videobeam, espacios para recreación y deporte. Además cuenta con el apoyo del centro cultural Comfandi, el cual es un espacio que es generador de ideas e intercambios permanentes a través de manifestaciones culturales, educativas y empresariales, esta cuenta

con bibliotecas públicas para adultos y niños, espacios de lecturas, talleres artísticos, pedagógicos, literarios, lúdicos y foros, además cuenta con salas para personas en situación de discapacidad.

Teniendo en cuenta la información anterior es necesario mencionar la importancia que esta puede tener debido a que toda esta caracterización es parte fundamental del desarrollo formativo en el aula, ya que al contar con los diferentes espacios y recursos se puede contribuir en la formación de los estudiantes.

Si tomamos toda esta información para nuestro análisis podremos ver lo importante que es que el colegio Comfandi El Prado sea industrial, ya que esto indica que el énfasis en las matemáticas debe ser riguroso debido a lo importante que son estas en las aplicaciones de las diferentes áreas.

Siendo así la preparación de los estudiantes debe ser adecuada, teniendo en cuenta los materiales, las evaluaciones, talleres, tareas, que son parte de la formación industrial que brinda el colegio, por eso es necesario un análisis que dé cuenta de cómo se están preparando los estudiantes según lo planteado en el plan de área con los textos escolares utilizados por los docentes.



Figura 4: colegio Comfandi el prado parte exterior



Figura 5: Colegio Comfandi el Prado parte interior

3.2 Construcción de la propuesta pedagógica

En los colegios Comfandi se ha venido trabajando durante varios años en la definición de un enfoque pedagógico, ellos aclaran que sin embargo, no se puede decir que está inscrito en un modelo puro y que a partir de la revisión de las prácticas pedagógicas, se ha encontrado que su base conceptual se apoya en un modelo predominantemente constructivista, sin especificar qué tipo de constructivismo es en el que se está trabajando pero que se basan en un énfasis en el aprendizaje significativo.

La metodología de trabajo en el aula tiene como propósito fundamental, despertar el interés de los estudiantes por el conocimiento, fomentar el pensamiento crítico-investigativo, promover la interacción con los pares, a la vez que hacer énfasis en la solución de problemas

Así mismo para responder a las nuevas exigencias de la pedagogía implica hacer asesorías para fortalecer algunos proyectos, por ejemplo, inglés, pequeños científicos y TIC, entre otros. De igual manera los docentes y directivos participan en capacitaciones continuas, en proyectos, lengua materna, enseñanza de las matemáticas y administración educativa, programas ofrecidos por instituciones como la universidad ICESI, universidad del valle y Colciencias.

Así pues, los colegios de Comfandi parten teniendo los estándares del M.E.N y el trabajo se planea buscando el desarrollo de habilidades del pensamiento, la producción escrita y oral, la consulta de textos, el uso de medios audiovisuales y otros adelantos tecnológicos al servicio de los propósitos de la educación. Las planeaciones se realizan cada fin de periodo, el cual los docentes se reúnen para organizar las evaluaciones y los temas para cada periodo con el fin de estar coordinados en la enseñanza.

Analizando los anteriores datos sobre la estructuración del área de matemáticas se puede ver que existen ciertas restricciones que impiden el estudio de distintas nociones matemáticas en la escuela, a saber:

El área de matemáticas se dedica más tiempo a la construcción de los exámenes en las planeaciones, que a cuestionar si los temas propuestos para el periodo son los adecuados o si están bien articulados los temas.

Parece que la lucha contra los tiempos que se deben cumplir según la malla curricular tiene más peso que lograr enseñar los diferentes temas de manera rigurosa debido a las diferentes actividades que se plantean dentro de la institución.

Todas estas cuestiones hacen que se deje a un lado la verdadera esencia de aprender y que la disciplina matemática aparezca en los planes de estudio y en las políticas institucionales como dadas de una vez por todas, provocando no solo una visión transparente e incuestionable del conocimiento puesto en juego sino acrecentando paulatinamente una desarticulación cada vez más peligrosa de las cuestiones iniciales que le deberían dar sentido al estudio de los distintos conceptos matemáticos en la institución.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA.
ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES.

4. ANALISIS DEL PLAN DE AREA.

Ahora bien, entrando en el análisis del plan de área de la institución, vamos a mostrar y a considerar algunos de los elementos que lo conforman los cuales son los necesarios para adquirir las competencias para desenvolverse en forma adecuada dentro la sociedad y en el camino hacia el aprendizaje.

El propósito del plan de área es que el estudiante aprenda a comunicarse, a explorar, a interpretar, a conjeturar y a predecir las cosas que suceden a su alrededor, considerando que el conocimiento matemático va más allá del uso de una notación numérica o de la aplicación de algoritmos.

Atendiendo a lo anterior, los contenidos del área ofrecen una propuesta basada en el desarrollo de habilidades para el aprendizaje y la resolución de problemas sustentada por los lineamientos, la misión y la filosofía de los colegios Comfandi, donde todo el esfuerzo se encamine hacia la formación del estudiante en cuanto a sus procesos académicos y personales.

Con la intención de tener una visión más amplia de la manera en que está organizado el plan de área de dicha institución, se propone el siguiente mapa conceptual el cual fue elaborado personalmente con el fin de utilizarlo como objeto de análisis para este trabajo.

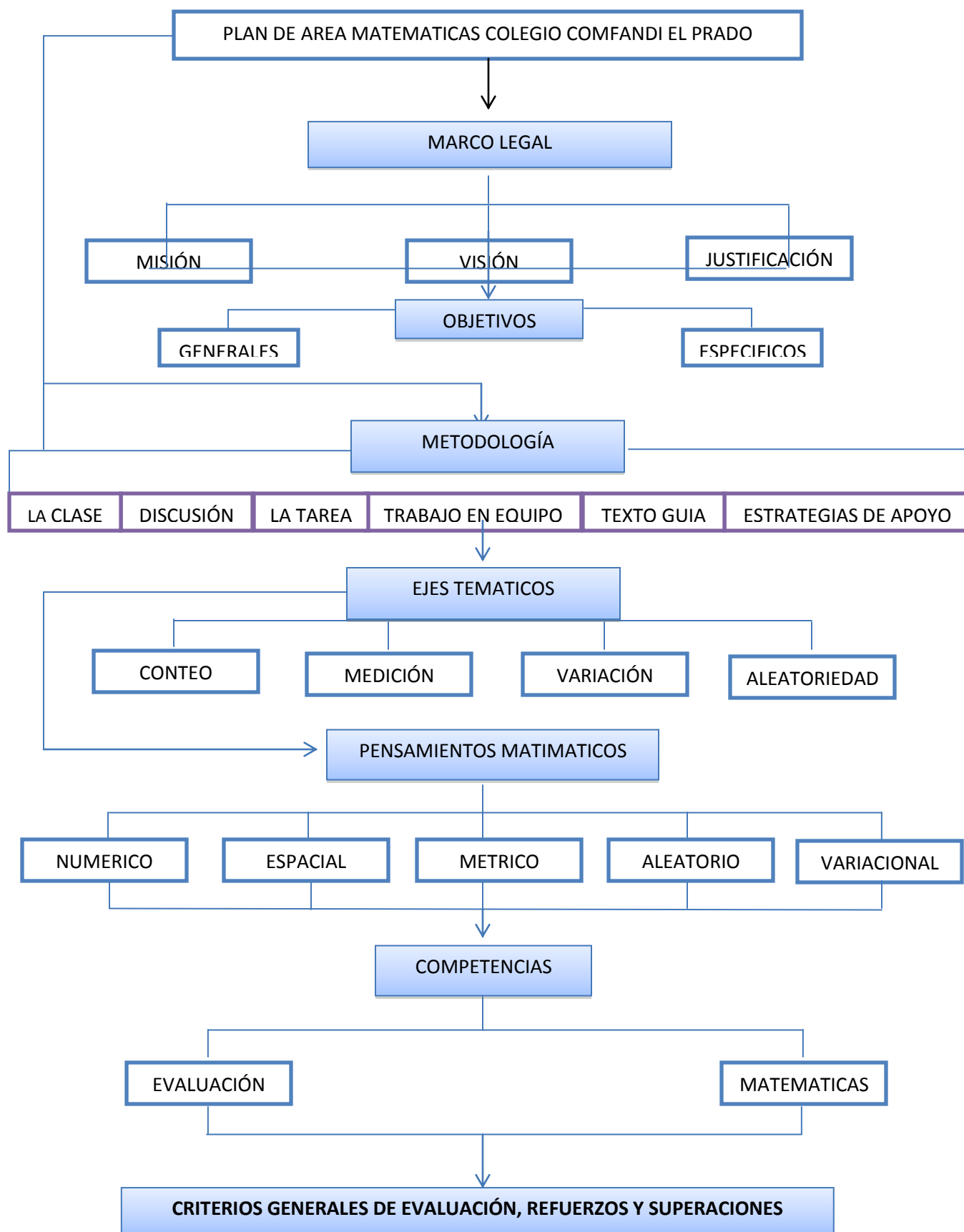


Figura 6: Mapa conceptual del plan de área del colegio Comfandi El Prado

El colegio Comfandi El Prado en su plan de área de matemáticas para el bachillerato plantea primero su visión, misión, justificación y sus respectivos objetivos específicos y generales, luego se centra en la metodología a emplear, donde se evidencia la manera en que se debe abordar una clase dentro de esta institución y las herramientas que se ofrecen para lograrlo (texto guía, tareas, estrategias de apoyo). Continuando el recorrido por el plan de área se encuentran los ejes temáticos (conteo, medición, variación, aleatoriedad) y los pensamientos matemáticos que son fundamentales para el desarrollo de una educación calificada y por último encontramos las competencias que dan sentido al diseño del currículo y los criterios generales para las evaluaciones donde se menciona todos los pasos a seguir hasta la última instancia para evaluar a los estudiantes con la intención de ayudar con el proceso de enseñanza. El plan de área del colegio Comfandi esta como anexo al final de este trabajo con el fin de poder ser utilizado para el análisis de las OM.

Dentro de los objetivos planteados en el plan de área del colegio Comfandi el prado se plantea el uso de los sistemas numéricos, aunque no hay una explicación que dé cuenta de porqué es necesario el uso de dichos sistemas por ejemplo los números enteros o porqué es necesario alcanzar los objetivos planteados, lo cual no deja claro el porqué es necesario o valido la enseñanza de los contenidos temáticos. Lo anterior hace que los contenidos temáticos carezcan de una razón para ser enseñados y esto deja en evidencia un posible “autismo temático”.

En el plan de área se plantea como inicio en la secundaria el uso de los números naturales, en el cual se desprenden definiciones y algunas propiedades, luego se introduce el concepto de número entero, sin hacer énfasis en su definición, sino que se presenta la definición de números relativos y signados la cual reemplaza la definición como tal al introducir a $\mathbb{Z}$, y con la definición de valor absoluto, la relación de orden, la recta numérica y las diferentes operaciones, se da paso a un nuevo sistema numérico, el sistema de los números racionales, pareciendo estos sistemas como independientes, quedando mucha teoría a un lado sin ser mencionada lo cual es la base para comprender a $\mathbb{Z}$ y a los diferentes sistemas. Lo anterior es evidencia de que es posible que haya una segmentación en los

temas que dando estos sin conexión alguna lo cual se denomina como atomización del proceso de enseñanza.

Al final del plan de área se plantea los estándares básicos de competencias en los diferentes pensamientos para la educación secundaria y se hace una especificación por grado de los estándares que se desarrollan, los contenidos y los logros y al final se presentan las competencias de evaluación y las competencias matemáticas.

Lo anterior deja ver que es posible un autismo temático de la institución escolar, pues se puede observar que no solo ha desaparecido la razón de ser de las cuestiones que se estudian en el nivel temático, sino también la razón de ser de las diversas áreas en las que se divide la matemática escolar. (Gascón, 2009).

Los temas o cuestiones matemáticas que se proponen desde el plan de área para ser estudiadas surgen solo en un nivel temático y además no se estructura propiamente como una OM local, lo que hace que los temas parezcan independientes entre sí.

La OM que plantea el plan de área de la institución escolar Comfandi el prado intenta articular, las diferentes propuestas u orientaciones de los Estándares de competencias en matemáticas, sin embargo se evidencia una especie de artilugios teóricos para argumentar la existencia de Z y se olvida de las cuestiones que se deben enseñar, generalizando lo que hay que hacer en el aula, pero no puntualizando el cómo se lleva a cabo la enseñanza y para qué se hace, nuevamente dejando indicios de un posible “autismo temático” en tanto se proponen contenidos aislados sin especificar la relación existente entre ellos.

El plan de área cae en obras matemáticas puntuales, dado que en él no se explicitan obras matemáticas locales las cuales son básicas para la articulación de las matemáticas y permitirían hacer una construcción legítima de Z en entornos algebraicos.

Por lo tanto se ve como en la propuesta de Bolea (2007) este plan de área presentaría serias limitaciones con una OM de este tipo, porque carece de cuestiones generatrices que deben responder a las razones de ser de lo que se enseña, las cuales serían una orientación clara y puntual para los docentes que deben adoptarlas en sus clases.

4.1 ANALISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES.

Existe una praxeología asociada a las tareas que permiten usar diferentes técnicas, tecnologías o teorías para solucionar las situaciones presentadas en una institución. Estas soluciones se relacionan con cuestiones matemáticas que potencializa la búsqueda de una respuesta válida o no, a determinada situación. (Gascón, 2001).

Sin embargo estas cuestiones deben ser transformadas y adaptadas a la situación para que se lleve a cabo un estudio adecuado de las tareas planteada.

Para el análisis de los textos escolares, se utilizaran los cuatro elementos estructurales de las OM: las tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías.

Ahora bien, en el análisis de los textos escolares seleccionados, presentaremos un esquema de preguntas, que se usan en determinada institución por medio de una obra matemática de referencia explicada en el marco teórico, y aplicada en este caso, al texto escolar “Delta 6 y Zona Activa 7”, en donde nos centraremos en el tipo de actividad que propone y en la praxeología que se puede desarrollar para validar los enunciados propuestos por el texto guía.

Partiremos por enunciar los aspectos relevantes que tiene el texto escolar como obra matemática en uso del colegio Comfandi el prado que será uno de los puntos de referencia de nuestro análisis.

Nos proponemos a continuación a enunciar los contenidos explícitos en los textos escolares, anteriormente mencionados que darán origen a nuestra hipótesis de trabajo. Esto nos permitirá realizar un análisis integrado de los dos textos, que posteriormente nos proporcionarán las pautas de análisis del cómo se enlazan los contenidos enunciados con las tareas (la praxis) y el tipo de conceptualización o definición (el logos) usado por el texto escolar, para identificar la técnica para la resolución de las tareas planteados desde las pautas que nos brinda la TAD teniendo en cuenta la obra matemática de referencia mencionada en el capítulo 2.

El saber matemático en el texto Delta 6 aparece distribuido en ocho unidades temáticas, cuyos contenidos se asocian a los diferentes tipos de pensamientos propuestos en los documentos curriculares. En el caso de la unidad temática u OM en el cual centraremos nuestra atención es la unidad 6 y se asocia al pensamiento numérico y variacional. En el caso del texto Zona Activa 7 las unidades temáticas a analizar son las unidades 1 y 2.

A continuación presentaremos una tabla para los diferentes textos escolares la cual fue elaborada personalmente con el fin de enmarcar la estructura de la unidad u OM a analizar.

Número y nombre de la unidad.	Tipo de pensamiento.	Temas.	Estándares.
Unidad 6 Acercamiento a los enteros	Numérico y Espacial	- Números signados - Números relativos - Números enteros - Valor absoluto y orden en $\mathbb{Z}$. - Adición y Sustracción en $\mathbb{Z}$. - Multiplicación de $\mathbb{Z}$.	- Propone situaciones en las que los números signados o relativos adquieren sentido - Plantea situaciones que modelan las operaciones con números enteros

Tabla 3. Estructura de la unidad 6 del texto de grado sexto.

Número y nombre de la unidad.	Tipo de pensamiento.	Temas.	Estándares.
Unidad 1 Números enteros.	Numérico	❖ Números relativos ❖ Números signados ❖ Números enteros ❖ Orden y valor absoluto en Z	Dar cuenta de cómo y porque se usan los números signados, relativos y enteros.
Unidad 2 Operaciones con números enteros.	Numérico	❖ Adición de números enteros y sus propiedades ❖ Sustracción de números enteros ❖ Multiplicación de números enteros y sus propiedades ❖ División de números enteros ❖ Ecuaciones ❖ Potenciación de números enteros y propiedades ❖ Radicación de números enteros y propiedades ❖ Polinomios aritméticos	Plantear y resolver problemas empleando propiedades de los números enteros y sus operaciones.

Tabla 4. Estructura de la unidad 1 y 2 del texto guía de grado séptimo

De esta manera en nuestro análisis de los textos escolares, teniendo como referente la TAD, nos centraremos en las tareas (ejemplos, actividades, ejercicios a resolver, resolución de problemas), para evaluar que tanto permiten las cuestiones para ser resueltas de una estructura que los determine.

Así mismo, consideramos importante explicitar que gran parte de las cuestiones matemáticas asociadas al saber hacer, inmersas en las instituciones, se encuentran previamente estructuradas en un nivel temático y nominalmente organizadas; pero para afirmar esto, es pertinente conocer la estructura que compone en nuestro caso los textos escolares. (Gascón, 2002).

4.2.1 Análisis de la praxis (tareas y técnicas).

Consideremos en detalle las características de la actividad matemática relacionada con los números enteros, tal y como ella se desarrolla en el interior de la unidad.

Caracterización de los textos escolares teniendo en cuenta la forma como introducen los números enteros.

A continuación se presenta una tabla que fue construida para describir particularmente los dos textos y que contiene los datos en donde se encuentra el objeto de estudio a analizar en cuanto a la secuencia que se da desde el inicio con el concepto de número entero y un mapa conceptual en donde se pone en evidencia esta secuencia en cuanto a cómo se introduce el concepto de Z en esta institución escolar basado en los textos escolares, que muestra las relaciones y características de los conceptos desarrollados.

	Delta 6 editorial norma	Zona activa 7 editorial voluntad
¿Cómo se introduce el concepto de número entero?	El texto inicia con una contextualización sobre las coordenadas geográficas indicando la diferencia entre las líneas imaginarias llamadas los meridianos y los paralelos, los cuales van acompañados de unas coordenadas que varían desde el punto 0^0 hasta los 90^0 en ambos polos. En este caso estas coordenadas son tomadas como referencia para calcular. Luego se plantea una actividad relacionada con la lectura con el fin de ellos aplicar la definición de números signados o relativos.	El texto inicia con una lectura que menciona que la historia del mundo fue dividida en dos grandes periodos que son antes y después de Cristo, el cual es enmarcado como un punto de referencia como por ejemplo el punto cero y los años anteriores a Cristo se escriben acompañados del signo (-) y después de Cristo con el signo (+) o sin signo. También se muestra una imagen en donde se muestra la línea del tiempo del cobre, antes y después de Cristo hasta estos tiempos y se propone una actividad con una imagen que muestra los hechos más relevantes en la historia el cual el estudiante según la imagen debe marcar las diferentes fechas.
Estructura de la presentación del tema de los números enteros	• Números signados • Números relativos • Números enteros • Valor absoluto y orden en $\mathbb{Z}$. • Adición y Sustracción en $\mathbb{Z}$. • Multiplicación de $\mathbb{Z}$.	• Números relativos • Números signados • Números enteros orden y valor absoluto • Adición de números enteros y propiedades • Sustracción de números enteros • Multiplicación de números enteros • División de números enteros • Ecuaciones • Potenciación de números enteros y propiedades • Radicación de números enteros y propiedades • Polinomios aritméticos

Tabla 5: Contextualización de los números enteros en los textos escolares analizados.

En la tabla anterior se muestra como se introduce el concepto de número entero en ambos textos escolares, siendo evidente que la manera como se introduce este concepto carece de elementos teóricos para sustentar la definición de Z , siendo esta introducción una técnica para dar solución a las actividades que se plantean con dicha introducción.

En el siguiente mapa conceptual se presenta la manera en la que es introducido Z en el aula, primero con la representación de Z en la recta dándolos a conocer como los números positivos y negativos, definiendo a Z^- como los que están ubicados a la izquierda del cero y a Z^+ como los que están a la derecha del cero, y su relación de orden dependiendo de su ubicación ya sea cerca o lejos del cero en ambos sentidos, por ejemplo si está al lado izquierdo y se encuentra más cerca del cero en este caso sería mayor y si está al lado derecho si está más lejos del cero es mayor, luego se presenta el concepto de número entero bajo la definición de valor absoluto, para poder entrar a las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación), las cuales están ligadas a esta definición según la OMp, para terminar con el planteamiento y solución de ecuaciones como último tema para pasar luego al conjunto de los racionales.

Este mapa es construido de manera personal, basado en la propuesta del texto escolar según los diferentes temas planeados para el periodo escolar.

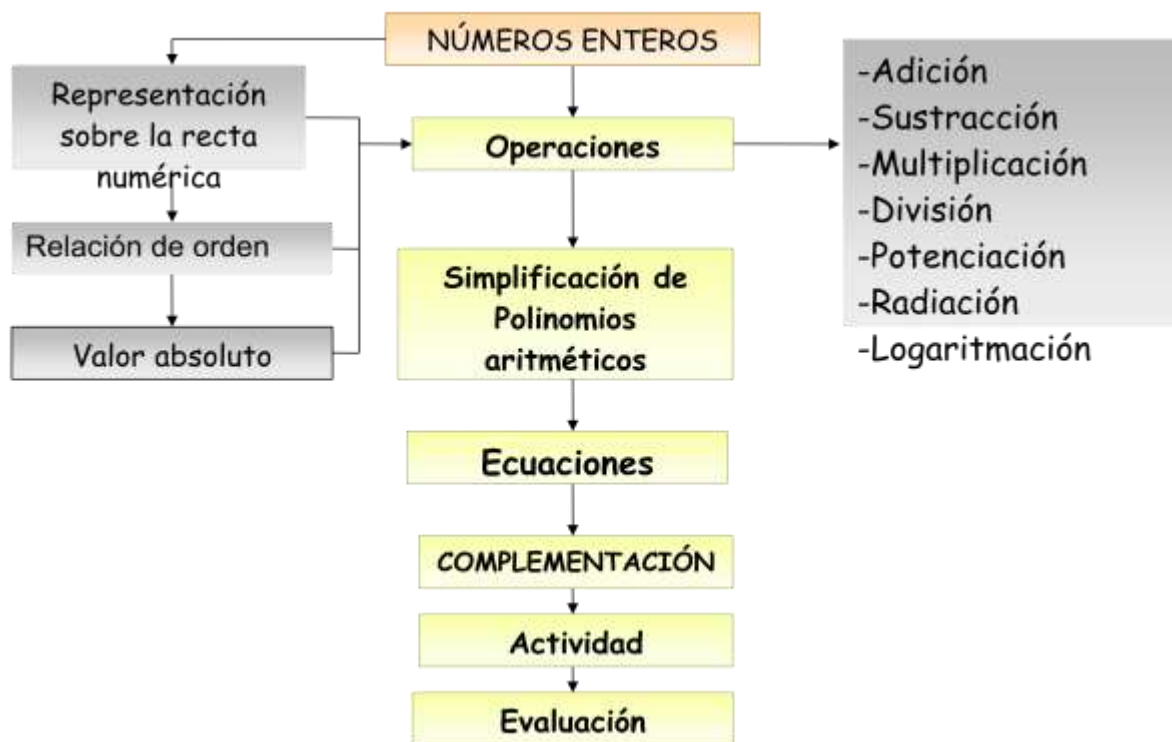


Figura 7. Mapa conceptual de la síntesis de los conceptos desarrollados en la unidad.

En el anterior mapa conceptual se muestra que el cálculo ecuacional es simplemente una aplicación de lo trabajado en la unidad, en lugar por ejemplo de tratar las ecuaciones como objetos que permiten justificar las razones de ser de las propiedades de Z . Es decir, la misma estructura muestra un predominio de lo numérico que difícilmente podrá dar cuenta de las justificaciones necesarias para que emerja Z . En este sentido, es notoria la ausencia de argumentos algebraicos para que la actividad matemática se ancle por lo menos en una obra matemática local.

Muestra de tareas.

A continuación se mencionan 14 tareas propuestas por los textos escolares, de las cuales se escogió una muestra la cual llamaremos T_n las que les daremos una posible solución y clasificamos según el criterio para desarrollar la técnica. Las siguientes tareas son clasificadas

según el criterio para desarrollar la técnica y se expresan en la tabla 6 al final de este segmento.

1. Asígnale un número signado a cada situación.
 - a. En un almacén hubo una entrada o compra de 5000 artículos.
 - b. Descuento del 40% en artículos navideños
 - c. Consignación de \$ 500.000
 - d. Devolución de 200 pantalones por imperfectos
 - e. Pedro abono0 \$ 400.000 al crédito
 - f. Ganancia de \$ 100.000
 - g. Pago por \$ 80.000
2. La siguiente tabla registra los movimientos de la cuenta de ahorros de francisco en una semana. Corrige el signo (+) o (-) de los números signados. Explica tu respuesta

Fecha	Descripción	Valor
20/10/09	Retiro	150.000,00
21/10/09	Consignación	1.000.000,00
21/10/09	Abono de interés	-3000,00
23/10/09	Retiro	-300.000,00
25/10/09	Cobro por tarjeta	7000,00
25/10/09	consignación	-500.000,00

3. Escribe cinco números enteros positivos y cinco números enteros negativos.
4. Ubica en la recta numérica los siguientes números: 15, -9, 0, 5, -5, 2.
5. Cesar se desplaza sobre una recta numérica. Escribe la posición final de los siguientes movimientos
 - a. Comienza en 5 y se mueve 8 unidades a la derecha
 - b. Comienza en 0 y se mueve 12 unidades ala derecha, luego 7 unidades a la izquierda, 4 unidades a la derecha y por último, 8 unidades ala izquierda.
 - a. Comienza en 2 y se mueve 3unidades a la izquierda, 6 unidades a la izquierda y 4 unidades a la izquierda.

6. Halle el opuesto de: 4, -11, -13, 19, -14 y 6.

7. Completa las siguientes igualdades.

a. $__ + 8 = 0$

b. $36 + __ = 0$

c. $__ + (-18) = 0$

d. $-17 + __ = 0$

e. $__ + -(-12) = 0$

f. $-(-26) + __ = 0$

8. Halla los valores absolutos indicados.

a. $|-9|$

b. $|+5|$

c. $|-3|$

d. $|+7|$

e. $|0|$

9. Representa gráficamente y realiza las siguientes adiciones.

a. $3 + -13$

b. $-7 + 4$

c. $-9 + 6$

d. $0 + -6$

e. $-8 + -7$

f. $-2 + -2$

g. $-11 + 15$

h. $-18 + 27$

10. Escribe los signos $>$, $<$ o $=$ en los espacios para obtener una expresión verdadera.

a. $25 __ 42$

b. $-36 __ -89$

c. $41 \text{ } ___ \text{ } -32$

d. $-99 \text{ } ___ \text{ } 0$

11. Escribe el número que falta en cada sustracción.

a. $___ - 78 = 100$

b. $205 - (-95) = ___$

c. $19 - ___ = 30$

d. $___ - (-34) = 50$

12. Completa la frase con la palabra positivo negativo

a. El producto de dos números positivos es _____

b. El producto de dos números negativos es _____

c. El producto de un numero positivo y un número negativo es _____

d. El producto de dos números con diferente signo es _____

e. El producto de dos números con signos iguales es _____

13. Desarrolla las siguientes operaciones y verifica con una calculadora el resultado.

a. $(-34 \times 3) \div 2$

b. $(-5 \times (-14)) \div -7$

c. $(45 \times (-8)) \div -36$

d. $(4 \times (-11)) \div -2$

14. Resuelve las ecuaciones y comprueba la solución

a. $75 + m = 25$

b. $X - (-40) = 50$

c. $Y + (-19) = -20$

d. $-4 - a = -12$

e. $2 + (-x) = 5$

A continuación se mencionan las técnicas empleadas en la solución de las tareas propuestas en los textos escolares, en ellas se hace una descripción breve de las herramientas conceptuales y algorítmicas que debe tener el estudiante para solucionar las tareas.

Para realizar esta parte vamos a proponer algunas categorías de análisis para la solución de las tareas propuestas en los textos escolares Delta 6 y Zona activa 7, donde lo que se pretende es categorizar las tareas planteadas según algunos aspectos en común que presentan y que de acuerdo a ello, se puede dar solución mediante determinado criterio, por ello se presenta a manera de aclaración a lo que hace referencia cada uno de ellos.

Los criterios presentados a continuación fueron tomados del trabajo de Ordoñez & Chavarro (2012) los cuales son un marco de referencia para el desarrollo de este trabajo.

Criterios para desarrollar la Técnica:

Para realizar esta parte vamos a proponer algunas categorías de análisis según lo encontrado en los textos y que responden a Técnicas en su mayoría independientes que permiten solucionar la mayor parte de las tareas propuestas:

1. **Posiciones relativas:** al plantear ésta como una estrategia de solución el estudiante debe tener en cuenta el valor relativo de los números, de esta manera reconoce la posición de ellos y la distancia que existe entre el número propuesto y el cero (0); de esta manera el estudiante ha de reconocer el valor relativo de los números, la posición que ocupa, la distancia de él al origen y ubicarlo según el contexto en el que la tarea se enuncie.
2. **Relación de orden.** En esta técnica el estudiante debe reconocer el valor relativo de los números y la posición de ellos, que es mínimo y máximo, menor y mayor, reconociendo la dirección del número y valor numérico o circunstancial que éste toma.
3. **Planteamiento de ecuación:** Esta técnica hace referencia a la propuesta que debe hacer el estudiante en la solución de un problema que se le presenta, donde lo que debe es hallar valores a aquello que no se conoce en el problema y para lo cual debe tener claras determinadas propiedades que le permiten la solución de dicha ecuación que ha planteado, como por ejemplo el inverso multiplicativo y el inverso aditivo
4. **Criterio algorítmico:** Esta técnica hace referencia a todos esos modos de hacer o de resolver determinada tarea, en los cuales se debe dar claridad en la solución de las

cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y las propiedades de cada una de ellas.

4.2.2 Análisis de las obras matemáticas.

Los textos escolares Delta 6 y Zona activa 7, introducen de manera contextualizada los números enteros, de esta forma permiten reconocer la necesidad intrínseca de estudiarlos de esta manera, dado que hacen parte de la vida cotidiana.

A continuación se hace un desarrollo de algunas formas de hacer y aplicar la técnica para la solución de las tareas propuestas por el texto escolar.

T₁: Asígnale un número signado a cada situación.

- a. En un almacén hubo una entrada o compra de 5000 artículos.
- b. Descuento del 40% en artículos navideños
- c. Consignación de \$ 500.000
- d. Devolución de 200 pantalones por imperfectos
- e. Pedro abonoó \$ 400.000 al crédito
- f. Ganancia de \$ 100.000
- g. Pago por \$ 80.000

Solución: los números signados se usan principalmente en las matemáticas financieras, cuando se requiere diferenciar entre cantidades contrarias, por ejemplo consignaciones, retiros, ingresos, egresos, etc. En este caso en el punto a el número sería +5000, en el punto b sería -40, en el punto c +500.000, en el punto d -200, en el punto e +400.000, en el punto f + 100.000 y por último en el punto g sería + 80.000

T₂: La siguiente tabla registra los movimientos de la cuenta de ahorros de francisco en una semana. Corrige el signo (+) o (-) de los números signados. Explica tu respuesta

Fecha	Descripción	Valor
20/10/09	Retiro	150.000,00
21/10/09	Consignación	1.000.000,00
21/10/09	Abono de interés	-3000,00
23/10/09	Retiro	-300.000,00
25/10/09	Cobro por tarjeta	7000,00
25/10/09	consignación	-500.000,00

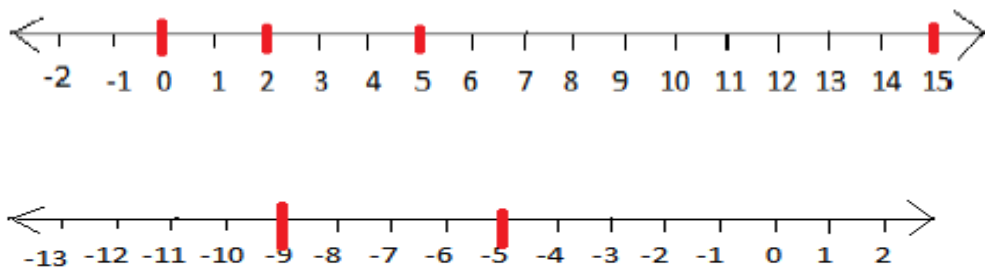
Solución: en este punto hay que tener en cuenta que antes de las cantidades que son depositadas, abonadas y consignadas se escribe el signo (+), y a las cantidades que indican retiro, descuentos y débitos, se antepone el signo (-). En este caso en la fecha 20/10/09 el número signado seria -150.000, en la fecha 21/10/09 el número signado seria + 1.000.000, en la fecha 21/10/09 el número signado seria + 300.00, en la fecha 23/10/09 está bien escrito el número, en la fecha 25/10/09 el número signado es -7000.00 y en la última fecha 25/10/09 el número signado es + 500.000,00.

T₃: Escribe cinco números enteros positivos y cinco números enteros negativos.

Solución: para resolver estos enunciados se debe tener en cuenta que si partimos del cero hacia arriba nos ubicamos en los números enteros positivos, y que del cero hacia abajo nos estaremos ubicando en los números enteros negativos. Igual sucede cuando partimos del cero hacia la izquierda o derecha respectivamente. Así pues las respuestas pueden variar dependiendo del estudiante, la idea central es que el estudiante pueda identificar tanto el orden como la posición de los números enteros.

T₄: Ubica en la recta numérica los siguientes números: 15, -9, 0, 5, -5, 2.

Solución: Para representar los números mencionados es necesario conocer la recta numérica y tener claro que según la definición del texto los números positivos se encuentran a la derecha del cero y los números negativos se ubican a la izquierda del cero. Por lo tanto la respuesta sería:



T₅: Halle el opuesto de: 4, -11, -13, 19, -14 y 6.

Solución: para resolver este enunciado se debe tener en cuenta la definición que presenta el texto escolar que define a los números opuestos como números enteros positivos y negativos que están a la misma distancia de cero. En este caso los opuestos de los números serían: 4, -4 ; -11, 11 ; -13, 13 ; 19, -19 ; -14, 14 ; y de 6, -6.

T₆: Halla los valores absolutos indicados.

- a. $|-9|$
- b. $|+5|$
- c. $|-3|$
- d. $|+7|$
- e. $|0|$

Solución: Para dar solución a esta situación es necesario tener en cuenta que el valor absoluto de un número entero es la distancia entre el número N que pertenece a Z y cero (0), y que siempre el valor absoluto será una cantidad positiva porque indica básicamente una distancia. Por lo tanto las respuestas serían:

- a. $|-9| = 9$ b. $|+5| = 5$ c. $|-3| = 3$ d. $|+7| = 7$ e. $|0| = 0$ f. $|-8| = 8$

T₇: Escribe los signos $>$, $<$ o $=$ en los espacios para obtener una expresión verdadera.

- a. 25 ___ 42
b. -36 ___ -89
c. 41 ___ -32
d. -99 ___ 0

Solución: para resolver este tipo de problemas se debe tener en cuenta la definición que se da para comparar números enteros, la cual dice que al ubicar los números en una recta numérica es suficiente con observar la posición de cada uno de los números para ver que el número que este a la derecha del otro es el mayor. En el caso de los números dados entonces $25 < 42$, $-36 > -89$, $41 > -32$, $-99 < 0$.

T₈: Completa la frase con la palabra positivo negativo

- a. El producto de dos números positivos es _____
b. El producto de dos números negativos es _____
c. El producto de un numero positivo y un número negativo es _____
d. El producto de dos números con diferente signo es _____
e. El producto de dos números con signos iguales es _____

Solución: para solucionar problemas donde se requiere saber cuál es el signo que se obtiene de multiplicar diferentes números enteros, se necesita la definición del texto escolar que dice que para multiplicar dos números enteros del mismo signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es positivo. Para multiplicar dos

números enteros de diferente signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es negativo. En este caso la solución será:

- a. El producto de dos números positivos es _____ **Positivo**
- b. El producto de dos números negativos es _____ **Positivo**
- c. El producto de un número positivo y un número negativo es _____ **Negativo**
- d. El producto de dos números con diferente signo es _____ **Negativo**
- e. El producto de dos números con signos iguales es _____ **Positivo**

Tomando como muestra los enunciados planteados anteriormente y algunas de las soluciones que le dimos a estos enunciados, nos encontramos con algunas técnicas específicas con las cuales es posible solucionar los que se derivan de ellos y aún aquellos que no escribimos porque en su estructura son parecidos a los que les presentamos en éste texto.

Es así como hemos identificado que existen definiciones y conceptos claves para la solución de los ejercicios que plantea el texto escolar.

Es decir, existe una organización aritmética escolar que nos permite analizar y construir los elementos más relevantes de los números enteros teniendo en cuenta las técnicas identificadas de tipo algorítmico que permiten desarrollar cada ejercicio independientemente que tengan una variabilidad entre sí.

	Técnica	Tareas
1	Posiciones relativas	1, 4, 5
2	Relación de orden	3, 2, 5,7
3	Planteamiento de ecuación	6, 7, 8,
4	Criterio algorítmico	5, 6

Tabla 6: Técnica de solución para agrupación de las tareas.

Podemos observar en la tabla anterior que la técnica de criterio relación de orden se encuentra recargada de tareas en comparación a la técnica de criterio algorítmico, que podría propiciar en muchos casos una manera más adecuada de introducir Z en un entorno

algebraico dado que permite el trabajo con cantidades desconocidas y relaciona los signos que anteceden los enteros, en este sentido el texto escolar plantea muy pocas tareas que pongan de manifiesto el trabajo con esta técnica.

A lo largo de la presentación de los números enteros en los textos escogidos y en el plan de área notamos que presentan problemas de construcción que constituyen las razones de ser de los números enteros, el estudio de $\mathbb{Z}$ se ha convertido en solo unas cuantas técnicas de solución para los diferentes tipos de problemas que se proponen y los elementos del discurso tecnológico-teórico, se han atomizado en múltiples OM puntuales lo cual evidentemente y de acuerdo con nuestro modelo dificulta cualquier proceso de algebrización.

La construcción de la OMr tal como se realizó en el capítulo 2, nos muestra que es el proceso de algebrización el que posibilita la objetivación de las técnicas, debido a que al ser materializadas a través del simbolismo algebraico estas pueden llegar a ser en si mismas objetos de estudio, lo que nos permite identificar las relaciones entre ellas y sus limitaciones, su estructura de grupo, el tipo de soluciones que se pueden generar. Además este proceso ha ubicado las técnicas de la OMr en un nivel tecnológico.

Elementos tecnológico-teóricos

Ahora se mencionan las características de las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se encuentran inmersos en la construcción de número entero que plantea el texto escolar.

A continuación daremos una descripción concreta de los conceptos, definiciones, teoremas y características claves que están en los textos escolares (Delta 6 y Zona Activa⁷) y que permiten el uso de determinada técnica al momento de solucionar un problema matemático relacionado con los números enteros. Estos elementos los presentaremos de manera explícita para posterior a ello hacer una clasificación de cuales determinan una técnica usada y encontraremos los aspectos tecnológico-teóricos que hacen parte de la

construcción de los números enteros presentes en la obra matemática encontrada en el texto escolar, presente en nuestro análisis. Debido a que los elementos teóricos, tecnológicos que se dan en el texto escolar para la solución de las diferentes tareas carecen de un sustento teórico claro, hemos preferido llamarlos enunciados matemáticos.

Enunciados matemáticos (Em) propuestos por los textos escolares para el desarrollo de los números enteros.

Em1. La ubicación de un objeto con respecto a un punto de referencia determina la posición relativa del mismo. Para determinar posiciones relativas se establecen sentidos contrarios:

Arriba/abajo

Atrás/adelante

Antes/después

Sobre/bajo

Em2. Los números enteros ($\mathbb{Z}$) son los números enteros positivos, los enteros negativos y el cero.

Em3. Los puntos situados a la derecha del cero representan los enteros positivos y los situados a la izquierda, los enteros negativos.

Em4. El valor absoluto de un número entero a se define como la distancia entre a y 0. Se simboliza $|a|$ y es siempre una cantidad positiva.

Em5. Dado dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

Em6. Dado dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Em7. Al sumar dos números enteros del mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le añade el signo de los sumandos.

Em8. Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos y se añade al resultado el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Em9. Dos números enteros son opuestos si su suma es 0.

Em10. Para restar dos números enteros, se suma al primero el opuesto del segundo.

Em11. Para calcular el producto de dos números enteros:

- ✓ Se halla el producto de sus valores absolutos.
- ✓ Al resultado se añade el signo más (+) si ambos tienen el mismo signo, y el signo menos (-) si tienen distinto signo.

Em14. Para calcular el cociente de dos números enteros:

- ✓ Se halla el cociente de sus valores absolutos.
- ✓ Al resultado se le añade el signo (+) si ambos tienen el mismo signo, y el signo (-) si tienen distinto signo.

Em24. $a < b$: si a esta representada en la recta numérica, entonces a esta a la izquierda de b .

Em25. $a > b$: si a esta representada en la recta numérica, entonces a esta a la izquierda de b .

Haciendo una comparación entre los enunciados matemáticos (Em), planteados por los textos escolares y relacionándolos con la obra matemática de referencia, los textos escolares están faltos en su mayoría del logos dado que en sus enunciados forman parte de las maneras de hacer algorítmica u operatoria y no hay preguntas que puedan cuestionar al estudiante explorando las respuestas posibles del porque aprende esos contenidos matemáticos, provocando un aprendizaje bastante segmentado. Esto se puede explicar si se tiene en cuenta la propuesta de Cid & Bolea (2007) de introducir Z en un entorno algebraico. Los textos escolares analizados se enmarcan en un entorno puramente numérico, donde lo algebraico tiende a ser una mera ejemplificación de lo que se propone para ser abordado como eje problemático o como una manera de hacer emerger algún campo de problemas que pueda soportar con rigor un proceso de estudio medianamente prolongado, estructurado y soportado en las tecnologías que podrían organizar de manera más coherente una Obra Matemática de tipo local.

4.3 CONTRASTE ENTRE EL ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA Y LOS TEXTOS ESCOLARES.

Lo que en esta parte del trabajo se pretende es hacer un contraste, entre lo que se propone en el plan de área del colegio Comfandi El Prado y lo que se propone en los textos escolares analizado en este trabajo, de igual manera poder observar de forma más clara como se plasma en esta obra matemática la coherencia vertical y la coherencia horizontal en cuanto al tema del sistema numérico analizado.

Para ello se iniciará presentando un contraste en los contenidos propuestos por ambos, el plan de área concerniente a grado sexto y el texto escolar “Delta 6” para determinar la presencia o no, de la relación existente en el desarrollo de los números enteros, tanto en el grado 6° como en el grado 7°. Lo anterior se observa en las siguientes tablas:

Temas plan de área de matemáticas	Contenido texto escolar Delta 6
Números relativos Valor absoluto Nociones básicas Números signados relación de orden Números enteros Adición y sustracción	Números signados Números relativos Números enteros Valor absoluto y orden en Z Adición y Sustracción en Z. Multiplicación de Z.

Tabla7: Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área de 6° y el texto escolar "Delta 6".

Realizando un análisis paralelo entre el plan de área y el texto escolar de grado 6°, se puede observar que se relacionan directamente, dado que el plan de área propone la enseñanza de los sistemas numéricos en particular el de los números enteros y sus propiedades y el texto escolar también lo menciona, sin embargo el plan de área carece de elementos que justifiquen la razón por la cual se enseñan los contenidos que enuncian. por otro lado el texto escolar por su parte en las tareas que propone se observa el nivel operatorio y algorítmico que los establece.

A continuación se mencionan los contenidos propuestos en grado séptimo en el plan de área de matemáticas y el texto escolar “Zona Activa 7”.

Temas plan de área de matemáticas	Contenido texto escolar Zona Activa 7
Concepto del conjunto de los números enteros (números relativos). Representación en la recta numérica. Números opuestos. Valor Absoluto (distancia). Orden. Adición y propiedades. Sustracción y Propiedades. Multiplicación de números enteros. División de números enteros.	Números relativos Números signados Números enteros Orden y valor absoluto en $\mathbb{Z}$ Adición de números enteros y sus propiedades. Sustracción de números enteros. Multiplicación de números enteros y sus propiedades División de números enteros Ecuaciones Potenciación Radicación Polinomios aritméticos.

Tabla 8: Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área y el texto escolar “Zona Activa7”.

Haciendo el análisis de el plan de área con el texto escolar de grado séptimo, vemos que existe una relación directa entre los contenidos propuestos, en este caso la OM que en el plan de área se expone con relación a los textos escolares son puntuales en tanto brindan algunas de las pautas de manera muy general de la enseñanza de los enteros y la transición que se da de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Así mismo al comparar los contenidos a desarrollar con los lineamientos curriculares (1998), el plan de área y los estándares básicos de competencias de matemáticas (2006) se ha notado un paralelismo en los contenidos y un orden específico en cuanto a los que se desea enseñar en el aula.

Sin embargo, una vez más se presenta lo que hemos explicado llamado “atomización de la enseñanza” dado que no se ve de manera clara la conexión que se hace entre los contenidos de un nivel a otro.

Si bien es cierto que el plan de área menciona los estándares determinados por el documento del MEN (2006), también podemos decir que no existe una relación directa entre las formas de hacer en la propuesta de aula establecida; no posee de manera explícita cómo se lleva a cabo la integración de los sistemas numéricos, en este caso, la que se da de los naturales a los enteros.

Analizando en detalle cómo están estructurados los textos escolares, se puede concluir que no hay justificaciones claras para muchas de las tareas propuestas para ser abordadas debido a que la mayoría de ellas se resuelven de manera algorítmica olvidando la riqueza de las definiciones principales.

Así pues, hemos notado que se considera el tratamiento de $\mathbb{Z}$ bajo distintas interpretaciones o contextualizaciones que pueden tener ellos como sus operaciones. Además la presencia de los modelos concretos para la enseñanza de $\mathbb{Z}$ en el texto es evidente pues los problemas o tareas propuestas se basan todas en deudas y haberes o pérdidas y ganancias, personas que entran o salen o suben o bajan, temperaturas medidas por termómetro, altitudes por encima o bajo el nivel del mar, años antes o después de Cristo, recorridos con sentidos opuestos y posiciones o desplazamientos sobre la recta numérica entre otros. La representación a través de la recta numérica, también ha sido algo frecuente durante el análisis de los problemas pero no solo como tarea sino también como una técnica matemática.

La adición y sustracción de enteros se justifica como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición.

Los modelos concretos que se utilizan en los textos escolares para la enseñanza de $\mathbb{Z}$ no cumplen satisfactoriamente con la construcción de la noción, ni tampoco posee argumentos fuertes para justificar algunas operaciones como por ejemplo el producto de números enteros negativos, de manera que esta sea inteligible para los educandos y es clave recordar la afirmación de Eva Cid (2001) donde evidencia que “Los modelos

concretos permiten justificar bastante bien la estructura aditiva de los números enteros. Sin embargo, no resulta tan eficaz como medio de reconstrucción de dicha estructura en caso de olvido”. (p. 7)

Las técnicas que se utilizan para resolver los diferentes problemas o tareas propuestas, se demuestran bajo simples tecnologías, mas no poseen una teoría o discurso tecnológico que las justifique.

El discurso tecnológico empleado se basa en simples definiciones acerca de los números signados, números relativos, números opuestos y valor absoluto, no hay especificación del porque se denominan números signados o relativos, o porque son opuestos, como surgió el uso de la recta numérica, como es el orden que se establece en los números enteros, o las propiedades que dan cuenta de la operatividad aditiva y multiplicativa con los números enteros.

Lo anterior permite resaltar el carácter incompleto de la OM considerada en el texto lo que deja en evidencia que es una OM puntual en la que no se demanda por sus justificaciones acerca de sus técnicas y sus tareas y mucho menos acerca de sus posibles relaciones, de forma que estas se encuentran muy desconectadas entre sí.

En tanto que para llevar a cabo un proceso de algebrización de una OM necesitamos como mínimo un OM local, podemos suponer las dificultades que surgirán a lo largo del texto para llevar a cabo este proceso en el caso de introducir a $\mathbb{Z}$, entre las que sobresale la poca probabilidad de llevar a cabo un estudio completo de $\mathbb{Z}$ de una manera que responda a cuestiones inicialmente planteadas como problemáticas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se presentaron hechos que hacen suponer la necesidad de realizar más estudios basados en el contraste entre las OMr con las OMp, debido a que la forma en que se está introduciendo a Z no ha sido en general la más eficaz, ya que la investigación didáctica ha centrado su atención en la búsqueda de modelos concretos o nuevos usos de los modelos ya conocidos para hacer énfasis en el tratamiento de Z , es decir, se ha acrecentado el modelo epistemológico de referencia que otorga un papel importante en la introducción de Z desde dichos modelos haciendo énfasis en su estructura de espacio vectorial y afín.

Por consiguiente la elaboración de la OMr pone en evidencia la conveniencia en algunos casos de introducir a Z desde un entorno algebraico, aunque esto implicaría diseñar y experimentar la manera como se introduciría a Z en el aula y si la estructura algebraica a la que está sometida puede ser suficientemente potente para responder un sin número de cuestiones que por el momento sólo pueden suponerse, dada la amplitud de problemáticas a las que habría que responder. Aun así, persistiría la inquietud válida de si las estructuras (espacio vectorial y afín por un lado, y estructura de anillo ordenado por el otro) pueden conciliarse mediante cuestiones que puedan fortalecer y enriquecer los acercamientos realizados hasta el momento.

Es por eso que sería necesario que al momento de elaborar el plan de área, las instituciones escolares puedan plantear una OM que dé cuenta de los diferentes contenidos, mediante un proceso en el cual se desprendan las razones de ser por la cual se es necesario abordar los diferentes ejes temáticos y no considerar el conocimiento matemático como un corpus definitivo y terminado como ya se conoce.

Ahora bien cuando hablamos de los textos escolares en nuestro caso “Delta 6 y Zona Activa 7”, se puede decir que de la forma como abordan a Z con las diferentes tareas, no es tan evidente para el estudiante, pues estas ponen de ante mano las diferentes técnicas

la mayoría de tipo algorítmicas y relación de orden como suficiente para que el estudiante aprenda el concepto de Z , siendo así evidente que hace falta un logos que amplíe la OM propuesta, y es ahí cuando se plantea la necesidad de abordar a Z desde un punto de vista no solo aritmético, sino también algebraico.

Un aspecto igualmente significativo en los textos, y estrechamente vinculado con lo anterior, es el desglose de los contenidos matemáticos en “temas” sobre los que se concentra la atención, sin la posibilidad de establecer relaciones que apunten a identificar OM local o regional (autismo temático).

Así pues desde la TAD, el análisis muestra que existen limitaciones en cuanto a la OMp debido a que en gran medida ha perdido su razón de ser porque no se ve claro una manera de cómo desarrollar el concepto de Z , dejando en evidencia los fenómenos mencionados de atomización de la enseñanza y el autismo temático.

Asimismo teniendo en cuenta los contenidos curriculares obligatorios, vemos que estos solo se convierten en temas poco estructurados que se convierten en una secuencia de simples OM presuntamente no problemáticas.

Por otro lado, debido a que no existen diferentes modelos para abordar a Z desde un entorno puramente algebraico, se cree necesario como lo ha planteado Cid (2001) que no se deben descartar del todo los acercamientos tradicionales como la introducción de Z desde modelos concretos, dado que la investigación actual no ha arrojado nada concluyente todavía, pero el docente y el investigador deberían estar alertas a los efectos negativos que una saturación desdichos modelos pueden causar no sólo desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, sino desde la misma organización escolar que acepta sin cuestionamientos dichos acercamientos.

Finalmente, como aporte desde un punto de vista personal para este trabajo de grado, se puede decir que para estudiar y enseñar una OM, se debe saber primero para que fue creada la OM y a partir de eso pensar cuales serían las posibles técnicas, y elementos

teóricos y tecnológicos con los cuales se pueden resolver los diferentes problemas, pues nosotros somos los responsables de la enseñanza de nuestros estudiantes y limitarnos solo a un plan de área rígido, estático y sin cuestionamientos, o a unos textos que replican de manera acrítica modelos de enseñanza cargados no sólo de errores, sino de ideas ingenuas y desconectadas de la vida en sociedad, no aportaría a una construcción de las matemáticas con un carácter formativo y edificador, sino que por el contrario, solo lograría aumentar la crisis de fundamentos por las que muchos de nuestros sistemas educativos se enfrentan actualmente, con las presiones de un mundo lleno de retos nuevos y preguntas distintas de las que una vez decidimos hacer y responder.

5.1 BIBLIOGRAFIA

- Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: Aportaciones de una Investigación, Números. Revista Didáctica de las matemáticas. pp. 5 – 18.
- Bruno, A. (2001) La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado de los números negativos. La Gaceta. Tenerife- España.
- Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2, 33-115.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10.
- Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Departamento de matemáticas. Universidad de Zaragoza. España.
- Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático “García Galdeano”. Universidad de Zaragoza. Recuperado el 05 de abril, 2011, de:
<http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003preprint25.pdf>
- Cid, E. & Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Chaparro, O; Póveda, D & Fernández, (2006). Secuencia Didáctica: Jugando con los números enteros. Colegio Salesiano – Duitama, Cundinamarca. Asesora Ligia Amparo Torres R. Universidad del Valle – Instituto de Educación y pedagogía.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des Mathematiques*, Vol. 19, (2).

Chevallard, Y. Bosch M & Gascón, J. (1997): Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre matemáticas y aprendizaje. Ed. Horsori. Barcelona.

Fory, O. (2010). Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares. Tesis de pregrado Recurso electrónico. Cali, Valle, Colombia. Universidad del Valle.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. En: *Revista mexicana "Educación Matemática"*, 11/1, pp. 77-88.

Gascón, J. (2003): Efectos del “*autismo temático*” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Universidad de Zaragoza. España.

Gascón, J. & Bosch, M. (2009): Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.

González, J., et al. (1990). Números enteros. Colección. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Madrid- España.

- MEN, (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998). Santa Fe de Bogotá D.C.– Colombia. Ed. Magisterio.
- MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Santa Fe de Bogotá D.C. – Colombia. Ed. Magisterio.
- Ordoñez, L; Chavarro, M. (2012). Un análisis de las obras matemáticas propuestas en la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva de la TAD. Tesis de pregrado recurso electrónico. Cali, valle, Colombia. Universidad del valle.
- Ortega, N; Orozco, V. (2012). Una introducción al concepto de número entero enfatizado en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica. Tesis de pregrado recurso electrónico. Cali, Valle, Colombia. Universidad del valle.
- Parra, H. (1998) El Conocimiento didáctico relativo a la adicción en números enteros en futuros profesores de matemáticas. Proyecto de investigación oficio VAC – 332- 05 Universidad de Zulia – Venezuela pp. 1 - 10.
- Recalde, L., Hinestroza, D., Vargas, L & Moreno, O. (1998). Semilleros de matemáticas (pp. 93). Cali, Colombia.

5.2 ANEXOS

PLA DE AREA DE LA INSTITUCION ESCOLAR

1. PRESENTACIÓN

Por medio de la enseñanza de las matemáticas no solo se transmite conocimiento sino que se busca el desarrollo del pensamiento en forma integral, permitiendo al estudiante adquirir competencias para desenvolverse en forma adecuada dentro de la sociedad. Teniendo en cuenta el desarrollo por competencias, se espera la comprensión y el uso significativo de los conocimientos y la aplicación de estos a la solución de problemas.

Se busca entonces que el estudiante aprenda a comunicarse, a explorar, a interpretar, a conjeturar y a predecir las cosas que suceden a su alrededor, considerando que el conocimiento matemático va más allá del uso de una notación numérica o de la aplicación de algoritmos.

Atendiendo a lo anterior, los contenidos del área ofrecen una propuesta basada en el desarrollo de habilidades para el auto aprendizaje y la resolución de problemas sustentada por los lineamientos, la misión y la filosofía de los colegios Comfandi, donde todo el esfuerzo se encamine hacia la formación del estudiante en cuanto a sus procesos académicos y personales.

2. MARCO LEGAL

En los Lineamientos Generales de Procesos Curriculares del M.E.N. (1996) se establece que “El Plan de Estudios es una estrategia para desarrollar intencionalmente el currículo de la educación formal”.

Por otra parte plantea que “debe dar respuestas en cuanto al qué, al cómo, al para qué y al cuándo del quehacer educativo, con miras a satisfacer las necesidades y expectativas que la comunidad y cada estudiante tiene respecto a la institución educativa”.

Así las cosas, el Plan de estudios además de ser entendido como la distribución estructurada por grados de los contenidos a ser desarrollados en las diferentes áreas obligatorias y fundamentales, debe plantear el cómo (metodología), el cuándo (tiempo) y la finalidad (para qué) de los diversos contenidos propuestos.

En este orden de ideas, el Plan de estudio presentado por el área de Matemáticas además de tener en cuenta lo anteriormente expuesto, ha considerado, por una parte la ley 115 de 1994, el decreto reglamentario 1860 de 1994 la resolución 2343 de 1996, los lineamientos curriculares del M.E.N. 1996, el cambio en la prueba de estado del año 2000 cuando se pasó a evaluación por competencias, y los estándares curriculares del MEN de 2002, y por

otra, los objetivos propuestos en el marco de la Visión y Misión del Departamento de educación y cultura de Comfandi, en los cuales se expresa:

3. VISIÓN DEL DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN DE COMFANDI.

Somos un sistema educativo y cultural abierto a la renovación y aprendizaje permanente, promotor y generador de conocimiento pertinente que permite formar un ser humano con capacidades para aproximarse a la comprensión y solución de los problemas y desafíos de la especie humana

4. MISIÓN DEL DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN DE COMFANDI

Formar seres humanos con sensibilidad a los problemas del entorno , capaces de promover el ejercicio pleno de todas las libertades que hacen posible el desarrollo individual , familiar , social ,económico , político, cultural y ecológico, a través de una educación integrada y articulada autogestiva y comprometida con el conocimiento en todas sus dimensiones y manifestaciones.

5. JUSTIFICACIÓN

La finalidad fundamental de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de la facultad de razonamiento y de abstracción. La capacidad humana de razonar encuentra en las matemáticas un aliado privilegiado para desarrollarse, y ese desarrollo constituye el principal objetivo pedagógico de esta ciencia. Otra finalidad, no menos importante de las matemáticas, es su carácter instrumental.

El aprendizaje de las matemáticas proporciona al estudiante la oportunidad de descubrir las posibilidades de su propio entendimiento en la medida que se convierta en un constructor activo siendo visto como un sujeto que posee un nivel específico de desarrollo cognitivo, afianzando de esta manera su personalidad; ayuda, además, a construir un fondo cultural como base de su desarrollo educativo para acceder a otras ramas de las ciencias.

Es por esto que la enseñanza de las matemáticas debe configurarse en forma espiral, de manera que en cada nivel coexistan nuevos contenidos, tratados con mayor profundidad, con otros que afiancen, completen o repasen los de niveles anteriores, ampliando su campo de aplicación y enriqueciéndose con nuevas relaciones, pretendiendo facilitar con esta estructura el aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, la resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todos y cada uno de los procesos que conforman la enseñanza y el aprendizaje.

En los últimos años hemos presenciado un vertiginoso desarrollo tecnológico y por lo tanto se ve la necesidad de que los estudiantes sean competentes en el uso de las herramientas computacionales. Se requiere entonces incorporar algunas de estas herramientas para potenciar habilidades matemáticas, que con el uso del lápiz y el papel, en ciertos momentos se tornan complejas.

6. METODOLOGÍA.

“La educación se ha nutrido en los últimos años de diferentes enfoques de la psicología, Neurología y la pedagogía, por lo cual es difícil tener un modelo pedagógico puro”³ En este sentido, los docentes de matemáticas hacen las veces de movilizadores y dinamizadores del proceso enseñanza-aprendizaje utilizando diferentes estrategias y tendencias donde el conocimiento se hace más significativo al estudiante. Es por ello que el área emplea elementos del constructivismo y del conductismo para hacer una pedagogía más activa.

³ Agenda Escolar Colegios Comfandi 2006-2007

Para llevar lo anterior a la práctica se utilizan, entre otras, las siguientes estrategias:

- La clase.
- La tarea
- Los grupos o equipos de trabajo
- Texto guía y guías de trabajo
- Los proyectos
- Método de estudio

6.1 La clase.

La clase es el espacio de encuentro entre el profesor, el estudiante y el saber; en el cual se define la dinámica del curso.

“En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas escolares” (2).

+

La idea de que el aprendizaje es algo pasivo y el concebir la clase como un espacio donde el profesor explica unas verdades y los estudiantes copian en un cuaderno las explicaciones del profesor, a veces sin comprender lo que copian, son concepciones equivocadas y finalmente limitantes del aprendizaje, del estudiante y por lo tanto, del buen funcionamiento de la clase.

Basado en lo elementos anteriores el docente no sólo debe generar situaciones de enseñanza que faciliten al estudiante alcanzar la comprensión de los conocimientos objeto de aprendizaje; sino también, propiciar un clima de diálogo para que el estudiante pueda expresar sin temores sus dudas y reflexiones en torno a los conocimientos matemáticos que se trabajan en el curso.

El estudiante con su atención, tanto a las palabras del profesor como a las de sus compañeros, y con una actitud positiva de participación en las discusiones de aula propiciadas por el profesor enriquece el ambiente de clase. El estudiante crea un ambiente

propicio para el diálogo al preguntar cuando no entiende; al respetar la palabra del compañero; al llevar un registro secuencial de las clases en un cuaderno; al trabajar en equipo; y al participar en las discusiones individuales o de equipo que el profesor o compañeros ponen en juego en el aula entorno a los temas teóricos o entorno a los problemas y ejercicios de las tareas.

Este trabajo supone, en primer lugar, que el estudiante después de cada clase vuelve sobre los contenidos de ella para estudiarlos antes de la clase siguiente. El esfuerzo principal de la clase es hacia el comprender lo que se explica o discute. Pero comprender no es sinónimo de aprender. Es dar un primer paso, fundamental, en esa dirección. Entre uno y otro estado media el trabajo del estudiante que consolida, dicha comprensión, en forma de conocimientos personales estable.

Sólo de esta manera los nuevos temas que aborda el profesor en la clase siguiente encontrarán el piso para ser comprendidos y para que el estudiante aproveche bien la clase. Un papel idéntico se le asigna al trabajo oportuno de las tareas, en cuanto que su contenido será objeto de discusión en la clase. Si el estudiante no trabaja las tareas no podrá sacar el máximo provecho de su discusión y no podrá desarrollar su iniciativa en la solución de problemas.

La experiencia señala que una de las principales causas para el bajo aprovechamiento estudiantil reside en el poco beneficio que los estudiantes realmente logran obtener de sus clases. Muchos estudiantes desaprovechan la clase al perder contacto con el curso, es decir con las explicaciones del profesor y con las discusiones que se dan en clase. Ello, porque no se estudian los temas de clase después de cada clase y porque no se hacen esfuerzos serios de resolver las tareas para las fechas en que son asignadas.

6.2 Discusión de aula

Es un elemento dinamizador de la clase que a través de la interacción entre docente y estudiantes, presentando interrogantes, procesos de validación, análisis de gráficas,

argumentando y contrargumentando, se logra explorar preconceptos y consolidar o formalizar conceptos matemáticos.

6.3 La tarea.

Es una estrategia que permite verificar los conocimientos sobre los aspectos desarrollados en clase.

La tarea asigna al estudiante un trabajo preparatorio y/o de confrontación sobre el alcance de sus conocimientos, que bien pueden ser, de lecturas de aspectos teóricos, de resolución de ejercicios o de temas de investigación.

Debe ser por escrito, con el fin de llevar registro o soporte para lograr una mayor discusión en torno a sus interrogantes y alcances frente a él y el equipo de trabajo que integra.

Igualmente refleja una actitud de trabajo y compromiso frente al área. Es una herramienta de preparación para las evaluaciones sobre el conocimiento adquirido y un instrumento que permite una participación más activa en el desarrollo de las clases.

6.4 El trabajo en equipo.

Tomando como referencia a Cuervo Castañeda “se da el trabajo en equipo cuando varias personas comparten un mismo objetivo y se proponen lograrlo mediante la interacción adecuada de todas ellas”.

Una primera consideración que aparece con el trabajo en equipo es el hecho que permite satisfacer la tendencia gregaria de que está dotado el ser humano, además de que le facilita el desarrollo de virtudes sociales.

Nadie logra autoabastecerse a plenitud ni vivir aislado de los demás, situaciones que crean la necesidad de desarrollar ciertas virtudes sociales para la vida en comunidad. El trabajo en equipo constituye un reconocimiento permanente a esa necesidad de interacción con otros y sirve a la vez como escuela para aprender la lección de la convivencia armónica que vamos a requerir en otros escenarios de la vida.

En este sentido, “el trabajo en equipo es una estrategia fundamental en todo tipo de aprendizaje. En el caso de las matemáticas se utiliza, en primer lugar, como una manera de aprender a trabajar en equipo.

En segundo lugar, porque está comprobado que el hablar, discutir y escribir acerca de lo que nos enseñan, de cómo se resuelven los problemas que nos asignaron y sobre todo el por qué de las cosas, es un vehículo muy bueno para ayudar a nuestro aprendizaje”(4).

6.5 Texto guía y guías de trabajo.

La utilización de un texto guía apoya el trabajo de la **clase**, movilizand o el aprendizaje del estudiante, lo cual favorece los procesos de la actividad matemática tales como comunicar, conectar ideas, razonar y resolver problemas.

Con la estructura que los textos tienen para la presentación de los contenidos, se destacan el **referente histórico**, el **manejo de pre-conceptos**, las **aplicaciones en diferentes contextos** y **ejercicios variados de aplicación temática**, lo cual contribuye al desarrollo del pensamiento lógico-matemático del estudiante.

El texto de apoyo es utilizado en los grados de sexto a noveno como referente en cuanto a la consolidación de un hábito de estudio el cual le permite al estudiante un buen uso de la clase, participación activa, revisión de conceptos, realización de ejercicios con los cuales se abordan los aspectos algorítmicos y de resolución de problemas, en diferentes modalidades de trabajo, facilitándole de esta manera el acceso a temáticas de mayor nivel.

Guía de trabajo.

Es un documento generado institucionalmente para apoyar el proceso de formación matemática de los estudiantes de grados décimo y undécimo; contiene elementos de profundización conceptual, orientación metodológica, ejercicios de profundización algorítmica y discusiones de aula.

6.6 Proyecto

En cada grado se realiza un trabajo donde el estudiante puede aplicar o adquirir algunos de los conceptos propuestos construyendo vínculos entre las nociones intuitivas extractadas de un contexto particular y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

Además, el proyecto ayuda a fortalecer los valores en los estudiantes incentivando la investigación, el respeto por la palabra del otro, el producir argumentos persuasivos y convincentes, hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, reunir y evaluar información, lo cual les permite comprender, interpretar y evaluar ideas

6.7 Método de estudio

Un aspecto clave para que un estudiante tenga éxito en el aprendizaje de las matemáticas es que disponga de un buen método de estudio.

Un buen método de estudio supone, por una parte, de buenos hábitos de trabajo, disciplina y compromiso con lo que se estudia. El estudiante debe hacer buen uso de la clase, prepararse y participar en las discusiones de clase, preguntar cuando no entiende, cumplir cabalmente con trabajo de grupo, resolver oportunamente las tareas, volver sobre los

contenidos de cada clase antes de la siguiente. Lo anterior supone organizar un espacio de trabajo personal por fuera de clase que permita realizar apropiadamente dichas actividades.

Por otra parte, un buen método de estudio permite al estudiante disponer de criterios para juzgar sobre la calidad de su propio aprendizaje. Es decir, dispone de una buena capacidad para el estudio autónomo facilitándole una exitosa proyección social.

6.8. Formas de trabajo y estrategias propuestas

Entiéndase las formas de trabajo como el ejercicio que realiza el docente en la propuesta metodológica para interactuar con los estudiantes, basándose en las estrategias nombradas en la metodología.

La comunicación del área con el estudiante es de forma permanente y una manera de hacerlo es mediante el documento “conversando con los estudiantes” donde se cristalizan las reglas básicas del desarrollo del curso, el cual se va nutriendo período a período con información suministrada sobre fechas de inicio y finalización de período, contenidos a trabajar en el período, logros, criterios de evaluación (la tarea, el quiz, la participación, el proyecto y el examen de período), fecha de examen de período, proyecto a desarrollar, dejando constancia de recibido y enterado por parte del estudiante y padres de familia y/o acudiente.

En el desarrollo de los cursos los docentes cuentan con el apoyo de los textos guía (sexto a noveno) ó guías de trabajo (décimo y undécimo); con base en ellos se motivan discusiones de aula cuyos propósitos son, por una parte, brindar espacios de participación, y por otra, la consolidación de conceptos matemáticos.

La apropiación de los conceptos matemáticos se realiza desde diferentes elementos. Uno de ellos es la práctica de ejercicios y/o problemas en forma individual ó en equipo. Los equipos de trabajo, para los grados sextos y séptimo se conforman máximo con dos estudiantes con el ánimo de potencializar elementos fundamentales para este tipo de

estrategia de trabajo. En relación con los grados octavo y noveno, los equipos de trabajo se conforman máximo con tres estudiantes fortaleciendo las condiciones que permiten un trabajo adecuado con esta estrategia en los grados décimo y undécimo, en los cuales se conforman los mencionados equipos con máximo cuatro estudiantes.

Es importante resaltar que esta estrategia posibilita detectar estudiantes con características especiales en el proceso de formación matemática que les permite ganar el reconocimiento en este campo y ser propuestos y aceptados como monitores.

Otro elemento para la apropiación de conceptos matemáticos es la tarea, en la cual se asignan un conjunto de problemas, que deben ser resueltos por escrito. Las tareas pueden incluir, también, lecturas de textos matemáticos, para ser objeto de discusión en la clase.

La tarea no se escoge al azar, es un medio para el diálogo entre el profesor y el estudiante, se propone con objetivos de formación específicos y, por lo tanto, su confrontación, le permite, al profesor, inferir en qué medida el joven está apropiando un conocimiento específico y, en esta dirección, fortalecer puntos débiles en dicho aprendizaje, a la vez que consolidar y ahondar otros puntos que el profesor considera importantes en dicho proceso.

6.9. Recursos y materiales

El trabajo académico está apoyado en el uso textos guías de tercero de primaria

A undécimo

De manera general se cuenta con una serie de libros de apoyo que permanecen en las bibliotecas de los diferentes centros educativos (textos de consulta, libros de reserva y bibliobanco).

Los docentes cuentan con ayudas didácticas como:

- Juego de escuadras.

- Compás
- Transportador
- Documento de rutas y contenidos
- Video-beam.
- Internet

Por otra parte, los docentes disponen de un documento de trabajo profesoral el cual contiene los siguientes elementos:

- Plan de área
- Plan de aula
- Plan de tareas
- Plan de evaluación por período (formato de contenidos y logros asociados)

7. CRITERIOS GENERALES PARA LA EVALUACIÓN

La caracterización de la matemática escolar, pone de relieve el uso de ellas en situaciones significativas, manejo que necesariamente lleva a las actuaciones, prácticas o formas de proceder propias de la disciplina. Así, se pretende evaluar el acercamiento al hacer matemático, a los procesos de pensamientos propios de una matemática en continua construcción.

La evaluación del aprendizaje es un proceso formativo que comprende la búsqueda y obtención de información de diversas fuentes acerca de la calidad del desempeño, avance, rendimiento o logro del estudiante y de la calidad de los procesos empleados por los docentes del área, es decir, la evaluación es un proceso permanente y sistemático que permite recoger datos e información válida para determinar el grado de avance y de desarrollo de logros y competencias alcanzados por los estudiantes.

Por lo tanto, para el área la evaluación es un juicio en donde se comparan propósitos y deseos con la realidad que ofrecen los procesos. Con la evaluación el área tiene en cuenta al estudiante en el comportamiento que muestra con su trabajo cotidiano: su actitud, su dedicación, su interés, su participación, su habilidad para asimilar y comprender informaciones y procedimientos, su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, analizar, crear y resolver problemas, permitiéndole alcanzar los distintos niveles de desempeño según el decreto 1290 de abril de 2009. Desempeño Superior, Alto ,Básico y Bajo.

Para los colegios Comfandi es importante destacar el proceso de la AUTOEVALUACIÓN ,COEVALUACIÓN en tres dimensiones como son el SER, SABER y el Hacer, es decir que el estudiante sea partícipe del seguimiento y cumplimiento de la evaluación que se le propone institucionalmente.. Sin detrimento de la evaluación cualitativa, es importante estandarizar una relación alfa numérica con fines estadísticos, donde se corresponda el nivel de competencia alcanzado por el estudiante.

Con esta correspondencia, se busca respetar y resaltar el proceso individual de cada estudiante, evitando caer en la homogenización de sus ritmos de aprendizaje.

La información para establecer esta evaluación proviene de las distintas actividades realizadas en el desarrollo del curso. En cada una de ellas, los aspectos mencionados anteriormente aparecen casi siempre integrados. Dichas actividades serán: los trabajos de equipo en el aula, las discusiones de aula, participación en clase, las tareas tanto desde la óptica de la presentación como de la confrontación, realización de quiz (prueba escrita corta en cuanto a los ejercicios propuestos y el tiempo empleado para realizarlos), salidas al tablero, desarrollo de proyectos y examen de periodo.

En el registro⁴ se emplean números que están en una escala de uno a cinco, para recoger la información del proceso de las actividades como por ejemplos: quiz, tareas, participaciones, talleres, etc.

⁴ Ver anexo G

Ahora, en cuanto al examen de período, que es una prueba escrita de construcción colectiva, por niveles, entre los docentes de los distintos centros educativos, tiene las siguientes características:

- Contenidos trabajados en el período.
- Competencias correspondientes a los contenidos.
- Construcción de un primer cuestionario
- Análisis de las preguntas del cuestionario por parte de los docentes del respectivo nivel.
- Elaboración de propuesta de examen de período con solucionario.

De otra parte, como se había mencionado anteriormente, los proyectos se organizan de acuerdo a temáticas específicas y para su evaluación se tienen en cuenta las siguientes componentes:

- Cumplimiento.
- Avances.
- Sustentación.

En el área se evalúan los procesos generales y los conceptos específicos, en síntesis se evalúan las competencias básicas como son: resolución de problemas, comunicación, razonamiento y modelación.

7.1 Refuerzos y Superaciones

La superación entendida como las oportunidades que tienen los estudiantes, de mostrar que han evolucionado positivamente en el logro de objetivos de formación, que no han mostrado previamente, está integrada con los procesos regulares de evaluación.

El proceso de superación se realiza periodo a periodo con el ánimo de movilizar al estudiante facilitándole el alcance de competencias y para ello, el área ha establecido los siguientes criterios:

- En la semana siguiente a la entrega del examen corregido por el profesor, de cualquier periodo, los estudiantes que queden con el estatus de desempeño Bajo en lo cognitivo deberán cumplir ya aprobar el plan de mejoramiento para tratar de superar este desempeño.
- Para aquellos estudiantes que queden con el estatus de Insuficiente, en el periodo, su recuperación podrá alcanzar máximo un estatus de Aceptable. Para los que queden con el estatus de Aceptable en el periodo, y voluntariamente presenten el examen de recuperación, la valoración máxima será de Sobresaliente.
- La superación en otros aspectos considerados en la evaluación como *actitud, compromiso, disciplina y hábitos de trabajo* dependerá de la forma como, en cada periodo, el estudiante encare su trabajo en el curso.

Considerando todo lo anterior, el área ha establecido el siguiente protocolo que el estudiante debe cumplir:

- Recibir el examen de periodo calificado por el docente.
- Corregir los puntos del examen en los que falló.
- Volver sobre los ejercicios asignados como tarea durante el periodo haciendo mayor énfasis en las partes donde presenta dificultades registrando lo realizado.
- Conocer la fecha para aclaración de las dudas.
- Presentar la prueba escrita para verificar el nivel de competencia según cronograma establecido con anterioridad.
- Recibir los resultados del plan de mejoramiento diez días después de aplicada la prueba escrita, esta valoración aparece en el boletín de calificaciones del periodo siguiente.

8. EJES TEMÁTICOS

8.1 Eje de conteo.

Este tiene en cuenta el concepto de número, que asociado inicialmente a la noción de cantidad, surge después como objeto matemático independiente y se complejiza en las construcciones de los diferentes sistemas numéricos, sus operaciones, relaciones y propiedades, que han permitido su caracterización a través de la historia y, de hecho, observar su evolución desde los naturales hasta los reales a partir de su manejo, identificación y uso.

8.2 Eje de medición.

Los conceptos que figuran en este eje son: medida, métrica, espacio y todas las relaciones que entre éstos se puedan generar a partir de las experiencias con cantidades y formas geométricas y las diferentes aplicaciones que de la métrica se hagan; además considera las formas y sus movimientos y las condiciones invariantes en ellas.

8.3 Eje de variación.

Aquí se tiene en cuenta el concepto de variable y las diferentes relaciones, elementos y significaciones que lo configuran. Desde la identificación de la variable en el seguimiento de patrones, pasando por el uso de las funciones, hasta el análisis

matemático, donde la variable adquiere cierto significado como introducción a la naturaleza variacional del cálculo.

Al caracterizar este eje es importante tener en cuenta el manejo de diferentes formas de representación asociados a la variación y sus aplicaciones.

8.4 Eje de aleatoriedad

Está configurado por la interpretación y el uso de datos, sus descripciones y representaciones gráficas, el establecimiento de arreglos y combinaciones, teniendo en cuenta los diferentes rasgos que caracterizan las distintas muestras; el establecimiento de posibilidades para un evento y la probabilidad de que un evento ocurra bajo determinadas circunstancias

9. OBJETIVOS

9.1 Objetivos Generales.

El estudio de las matemáticas propende que cada estudiante pueda:

- Desarrollar una actitud favorable hacia el estudio de las matemáticas que le permita lograr una comprensión y aplicación de conceptos, procesos y estrategias básicas.
- Desarrollar la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real.

- Emplear apropiadamente el lenguaje matemático para comunicar de una manera eficaz sus ideas y sus experiencias matemáticas.

9.2 Objetivos específicos.

Que el estudiante sea capaz de:

- Proponer y utilizar cálculos y procedimientos en diferentes situaciones.
- Plantear y solucionar situaciones problema que impliquen conocimientos matemáticos.
- Desarrollar las capacidades para el razonamiento lógico mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos, de operaciones y de relaciones, así como su utilización en la interpretación y solución de problemas de la ciencia o de la vida cotidiana.
- Construir sus propios argumentos acerca de hechos matemáticos y compartirlos con sus compañeros en un ambiente de respeto y tolerancia.

10. ESTÁNDARES

“Los estándares se definen como criterios claros y públicos que permiten conocer cual es la enseñanza que deben recibir los estudiantes. Son el punto de referencia de lo que un niño puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel. Son guía referencial para que todos los colegios ya sean urbanos o rurales, privados o

públicos de todos los lugares del país, ofrezcan la misma calidad de educación a todos los estudiantes colombianos.

Los estándares que se describirán a continuación tienen en cuenta tres procesos que deben estar presentes en la actividad matemática: planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración), comunicación matemática.

Los estándares están organizados en cinco formas de pensar matemáticamente:

1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

10.1 Pensamiento numérico y sistemas numéricos

Este estándar describe la comprensión profunda y fundamental del conteo, del concepto de número y de las relaciones aritméticas como también de los sistemas numéricos y sus estructuras.

Involucra los conceptos y algoritmos de la aritmética elemental así como las propiedades y las características de las clases de números que son el comienzo de la teoría de números. También incluye la proporcionalidad y el concepto y uso de fracciones.

Lo central de este estándar es el desarrollo del sentido numérico: la habilidad de descomponer números de manera natural, el uso de las operaciones matemáticas para resolver problemas, la comprensión del sistema decimal, la estimación, el sentido numérico y el reconocimiento de las magnitudes relativas y absolutas de los números.

Con el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para:

- Comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los sistemas numéricos.

- Comprender el significado de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras.
- Hacer cálculos de manera fluida y hacer estimaciones razonables.

10.2 Pensamiento espacial y sistemas geométricos

A través del estudio de la geometría, los estudiantes aprenden acerca de las formas geométricas y sus estructuras y cómo analizar sus características y relaciones. La visualización espacial (entendida como la construcción y la manipulación de representaciones mentales de objetos de dos y tres dimensiones y la percepción de los objetos desde diferentes perspectivas) es un aspecto importante del pensamiento geométrico. La modelación geométrica y el razonamiento espacial ofrecen formas de interpretar y resolver problemas.

El estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos incluye un énfasis en el desarrollo y prueba de razonamientos, mediante el uso de definiciones y el establecimiento de hechos.

Con el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para:

- Analizar las características y propiedades de las formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos acerca de las relaciones geométricas.
- Especificar localizaciones y describir relaciones espaciales usando la geometría coordenada y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelación geométrica para resolver problemas.
- Descubrir y describir la congruencia y la semejanza de figuras.

10.3 Pensamiento métrico y sistemas de medidas

El estudio de la medida es importante en el currículo de las matemáticas desde preescolar hasta grado undécimo debido a su practicidad en muchos aspectos de la vida diaria. El estudio de la medida también ofrece una oportunidad para aprender y aplicar las operaciones, las ideas geométricas, los conceptos de estadística y las

nociones de función. Estas conexiones se complementan con las relaciones que existen entre las medidas y las ciencias sociales, la ciencia, el arte, y la educación física.

Con el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para:

- Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición.
- Aplicar técnicas apropiadas, herramientas y fórmulas para determinar medidas.

10.4 Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

Este estándar recomienda que los estudiantes formulen preguntas que puedan ser resueltas usando la recolección de datos y su interpretación. Los estudiantes podrán aprender a coleccionar datos, organizar sus propios datos o los de los demás, y disponerlos en gráficas y diagramas que sean útiles para responder preguntas. Los conceptos básicos de probabilidad que pueden manejar de mano de los conceptos estadísticos.

Con el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para:

- Formular preguntas que puedan resolverse mediante el análisis de datos.
- Seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos.
- Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos.
- Entender y aplicar los conceptos básicos de la probabilidad.

10.5 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

El álgebra tiene sus raíces históricas en el estudio de los métodos generales para resolver ecuaciones. Este estándar enfatiza las relaciones entre las cantidades, incluyendo las funciones, las formas de representar relaciones matemáticas y el análisis del cambio. Las relaciones funcionales pueden expresarse mediante símbolos que permiten que las ideas complejas puedan expresarse de manera eficiente.

Pero el álgebra es mucho más que símbolos. Los estudiantes necesitan aprender el concepto de álgebra, las estructuras y los principios que gobiernan la manipulación de

los símbolos, y la forma como los mismos símbolos pueden usarse para interpretar ideas.

Con el desarrollo de este estándar se prepara a todos los estudiantes para:

- Entender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas.
- Analizar el concepto de cambio de varios contextos”.⁵

11. COMPETENCIAS

Es saber hacer en contexto, es decir, el conjunto de acciones que un estudiante realiza en un contexto particular y que cumple con las exigencias específicas del mismo.

11.1 Competencias de Evaluación

11.1.1 Interpretativa:

Comprende las acciones orientadas a encontrar el sentido de un texto, proposición, problema, gráfica, mapa, esquema, de los argumentos en pro o en contra de una teoría, es decir, se funda en la reconstrucción local o global de un texto.

11.1.2 Argumentativa:

Involucran todas aquellas acciones que tienen como fin dar razón de una afirmación y que se expresan en la explicitación de los por qué de una proposición en la articulación de conceptos y teorías con el ánimo de justificar una afirmación.

⁵ Estándares Curriculares, M.E.N.

11.1.3 Propositiva:

Hacen referencia a las acciones de generación de hipótesis, de resolución de problemas, de construcción de muchos posibles a nivel literario, de establecimiento de regularidades y generalizaciones, de proposiciones alternativas, de soluciones a conflictos sociales.

11.2 Competencias Matemáticas

11.2.1 Comunicación.

Una necesidad común que tienen todos los seres humanos en todas sus actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad de comunicarse, donde la matemática juega un papel importante en el desarrollo de esta competencia. ¿Cómo lo hace? Dándole continuidad al desarrollo de un pensamiento lógico, coherente y ordenado; cuando se permite expresar ideas matemáticamente hablando, escribiendo, mostrándolas visualmente o cuando se debe utilizar vocabulario matemático, notaciones y estructuras para presentar ideas o descubrir relaciones.

11.2.2 Razonamiento.

De manera general se entiende por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta la edad del estudiante y su nivel de desarrollo, entendiendo que cada logro alcanzado en un grado se retoma y amplía en los grados siguientes.

Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación y como procedimiento.

11.2.3 Resolución de problemas.

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas, van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

La resolución de problemas da el énfasis central del currículo de matemáticas y como tal, es un objetivo básico en contexto con los conceptos y herramientas aprendidas.

11.2.4 Modelación

La modelación es producir modelos matemáticos de acuerdo a situaciones problema en donde se interprete, explore, analice, verifique y se demuestre resultados del mundo real en contextos escolares.

Lo anterior permite afirmar que “la modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar,

discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa”⁶.

Para transferir la situación matemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar algunas actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general
- Esquematizar
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas
- Descubrir relaciones
- Descubrir regularidades
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

⁶ Lineamientos curriculares 1998. M.E.N. Bogotá: Panamericana formas e impresos S.A. 101