



**ANÁLISIS HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICO DE LOS ARGUMENTOS  
COMBINATORIOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTEO**

**MAYRA ALEJANDRA LARRAHONDO LOBOA**

**201157711**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE NORTE DEL CAUCA  
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS  
SANTANDER DE QUILICHAO, CAUCA**

**2016**

**ANÁLISIS HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICO DE LOS ARGUMENTOS  
COMBINATORIOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONTEO**

**MAYRA ALEJANDRA LARRAHONDO LOBOA**

**201157711**

*Trabajo de Grado como Requisito para Optar el Título de Licenciada en Educación Básica  
con Énfasis en Matemáticas*

**Director**

**Mag. DIEGO DÍAZ ENRIQUEZ**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE NORTE DEL CAUCA**

**LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

**SANTANDER DE QUILICHAO, CAUCA**

**2016**



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y  
PEDAGOGÍA  
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO  
DE GRADO

Programa Académico \_\_\_\_\_

Fecha

Código del programa: 3469

Resolución del programa: \_\_\_\_\_

| Día | Mes  | Año  |
|-----|------|------|
| 3   | Sept | 2016 |

|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                               |                                                   |                                            |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------|
| Título del Trabajo o Proyecto de Grado                                                                                                                                                                                                              |                                               |                                                   |                                            |                       |
| <i>Análisis Histórico-Epistemológico de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo.</i>                                                                                                                                   |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Se trata de:                                                                                                                                                                                                                                        |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Proyecto <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                                   |                                               | Informe Final <input checked="" type="checkbox"/> |                                            |                       |
| Director                                                                                                                                                                                                                                            |                                               |                                                   |                                            |                       |
| <i>Dirgo Barz</i>                                                                                                                                                                                                                                   |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Nombre del Primer Evaluador                                                                                                                                                                                                                         |                                               |                                                   |                                            |                       |
| <i>Monica Aponde</i>                                                                                                                                                                                                                                |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Nombre del Segundo Evaluador                                                                                                                                                                                                                        |                                               |                                                   |                                            |                       |
| <i>Gabriel Arbelaez</i>                                                                                                                                                                                                                             |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Estudiantes                                                                                                                                                                                                                                         |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Nombres y Apellidos                                                                                                                                                                                                                                 | Código                                        | Plan                                              | E-mail                                     | Teléfonos de contacto |
| <i>Mayra Alejandra Lavandero</i>                                                                                                                                                                                                                    | <i>3469</i>                                   |                                                   |                                            | <i>3145178964</i>     |
| Evaluación                                                                                                                                                                                                                                          |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Aprobado <input checked="" type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                                        | Meritorio <input checked="" type="checkbox"/> | Laureado <input type="checkbox"/>                 |                                            |                       |
| Aprobado con recomendaciones <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                               | No Aprobado <input type="checkbox"/>          | Incompleto <input type="checkbox"/>               |                                            |                       |
| En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:                                                                                         |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado <input type="checkbox"/>                                                                                                                                                                                   |                                               | Primer Evaluador <input type="checkbox"/>         | Segundo Evaluador <input type="checkbox"/> |                       |
| En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____                                                   |                                               |                                                   |                                            |                       |
| En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente). |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Firmas                                                                                                                                                                                                                                              |                                               |                                                   |                                            |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                               |                                                   |                                            |                       |
| Director del Trabajo o Proyecto de Grado                                                                                                                                                                                                            | Primer Evaluador                              | Segundo Evaluador                                 |                                            |                       |

Recomendaciones ☐Observaciones ☐Razón de desacuerdo - Alternativas ☐

\* Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

El trabajo es coherente, está muy bien estructurado, presenta un estudio detallado y muy bien elaborado sobre los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo.

Muy bien redactado, cumple con los objetivos trazados.

Este tipo de trabajos abre camino a los estudios histórico-epistemológicos de argumentos combinatorios con propuestas a la educación, se resalta el valor agregado de innovación por parte de la estudiante en la propuesta de caricaturas para llevar al aula argumentos combinatorios y resolver problemas de conteo. Sus referentes bibliográficos son acorde a la problemática y muy actualizados.

Por lo mencionado se decide de manera unánime que el trabajo es Aprobado y se sugiere por los dos evaluadores mención Meritoria.

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

### ***Dedicatoria***

*Dedicado a la memoria del Profesor Daniel Arbeláez, quien en vida, contribuyó a que este trabajo de grado saliera adelante dejando un gran legado para la Educación Estocástica.*

*A mi esposo, por su apoyo incondicional.*

*A mi hija, por su amor infinito.*

*A mi madre y hermanos, por contar siempre con su apoyo.*

### ***Agradecimientos***

*Dios, tu amor y tu bondad no tienen fin, me permites sonreír en cada uno de mis logros, los cuales son resultado de tu ayuda, y cuando caigo y me pones a prueba, aprendo de mis errores y me doy cuenta que los pones en frente mío para que mejore como ser humano y crezca de diversas maneras.*

*El amor recibido, la paciencia y la dedicación con la que cada día se preocupaban mi esposo, mi hija, mi madre y mis hermanos, por mi avance y desarrollo de este trabajo de grado, es simplemente único y se refleja ahora en la culminación de esta etapa.*

*Mi esposo, fue y siempre será un apoyo importante en mi vida. Él demostró a lo largo de esta etapa qué significa ser esposo, demostró ser una persona comprensiva, amorosa, interesado por mi bienestar, ayudándome día a día a culminar esta etapa que nos enorgullece.*

*Hija, eres mi orgullo y mi motivación, libras mi mente de todas las adversidades que se presentan y me impulsas a ser mejor cada día para que tu futuro sea mucho mejor que el mío. En estos dos años he aprendido mucho de ti y he descubierto cosas en mí que no conocía. Me has enseñado a ser madre y amar de forma incondicional.*

*A mi tutor de trabajo de grado, el Mg. Diego Díaz Enríquez, con sus conocimientos y con su manera de trabajar ha inculcado en mi seriedad, responsabilidad y rigor académico, sin los cuales no hubiera podido terminar mi trabajo en los tiempos establecidos.*

*A todos, muchas gracias por apoyarme y estar conmigo cuando más los necesitaba. Dios los Bendiga Siempre.*

## Contenido

|                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Resumen.....                                                                                         | 10 |
| Introducción .....                                                                                   | 11 |
| 1. Capítulo I: Aspectos Generales de la Investigación .....                                          | 14 |
| 1.1 Planteamiento del Problema.....                                                                  | 14 |
| 1.2 Justificación.....                                                                               | 18 |
| 1.2.1 Pertinencia del análisis Histórico – Epistemológico en la Educación Matemática .....           | 20 |
| 1.2.2 La Investigación En la Educación Estadística: La Importancia del Análisis Combinatorio. ....   | 22 |
| 1.2.3 La Combinatoria en la Matemática y en Otras Disciplinas .....                                  | 23 |
| 1.3 Objetivos .....                                                                                  | 25 |
| 1.3.1 Objetivo General.....                                                                          | 25 |
| 1.3.2 Objetivos Específicos.....                                                                     | 25 |
| 1.4 Antecedentes de la Problemática.....                                                             | 26 |
| 1.5 Metodología del Trabajo .....                                                                    | 28 |
| 2. Capítulo II: Panorama Histórico General de la Constitución de la Combinatoria.....                | 32 |
| 2.1 Uso inicial de la combinatoria en la historia de la probabilidad hasta 1654.....                 | 32 |
| 2.1.1 Luca Pacioli (1494).....                                                                       | 34 |
| 2.1.2 Niccolo Tartaglia (1556).....                                                                  | 35 |
| 2.1.3 Girolamo Cardano (1564).....                                                                   | 37 |
| 2.2 Primeros Cálculos Correctos: Correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat (1654) ..... | 38 |
| 2.2.1 Solución Mediante las Combinaciones:.....                                                      | 38 |
| 2.2.2 Solución Mediante el Triángulo Aritmético .....                                                | 43 |
| 2.2.2.1 El Triángulo Aritmético de Pascal.....                                                       | 45 |
| 2.2.2.2 Solución Problema de los Puntos.....                                                         | 51 |
| 3. Capítulo III: Historietas Combinatorias.....                                                      | 58 |
| 3. 1 Historietas Combinatorias .....                                                                 | 58 |

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.1 Historieta 1: Saludos.....                                                    | 59 |
| 3.1.2 Historieta 2: Jugando Fútbol.....                                             | 59 |
| 3.1.3 Historieta 3: Baile de Fin de Año Lectivo .....                               | 60 |
| 3.1.4 Historieta 4: Presentación Solemne. ....                                      | 61 |
| 3.1.5 Historieta 5: Canchas de Tenis .....                                          | 61 |
| 3.1.6 Historieta 6: Prueba de Conocimiento .....                                    | 62 |
| 3.1.7 Historieta 7: Juan como Futbolista y Matemático .....                         | 63 |
| 3.1.8 Historieta 8: Jugando con el Triángulo .....                                  | 65 |
| 3.2 Pautas para la enseñanza de Historietas Combinatorias en el Aula de Clase. .... | 66 |
| Conclusiones .....                                                                  | 69 |
| Referencias Bibliográficas .....                                                    | 72 |

## Tabla de Figuras

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Pruebas saber 5° y 9°, 2009.....                                                    | 17 |
| Figura 2: intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo (Anacona, 2003) ..... | 21 |
| Figura 3: Notación y Terminología de la Combinatoria.....                                     | 30 |
| Figura 4: Ecuación de Combinatoria .....                                                      | 30 |
| Figura 5: Panorama Histórico Siglo XXII AC – Siglo XVII.....                                  | 32 |
| Figura 6: Solución de Pacioli.....                                                            | 35 |
| Figura 7: División de la Apuesta Según Pascal .....                                           | 39 |
| Figura 8: Combinaciones de Posibles Resultados en 4 Rondas de Juego.....                      | 41 |
| Figura 9: Primera fórmula de Pascal para el cálculo de Combinaciones.....                     | 42 |
| Figura 10: Triángulo Aritmético de Pascal .....                                               | 47 |
| Figura 11: Ilustración Elementos Importantes del Triángulo Aritmético .....                   | 48 |
| Figura 12: Consecuencia última.....                                                           | 51 |
| Figura 13: Probabilidad de que el primer jugador gane el juego (a,b) .....                    | 55 |

## Resumen

Es a través de la historia como nos podemos dar cuenta del surgimiento de la combinatoria y de los personajes que han logrado realizar un aporte para la constitución de ésta. La combinatoria ha sido desplazada poco a poco del ámbito educativo por parte de los profesores, ya sea por falta de conocimiento de este concepto o por limitaciones de tiempo.

Es por ello que se realiza un análisis histórico – epistemológico para conocer todas aquellas formas de pensar y de razonar que tuvieron los historiadores desde tiempo remotos para poder construir la combinatoria y sobre todo los Argumentos Combinatorios que de cierta forma ayudan a mejorar la resolución de problemas ya que toman un papel importante dentro de la formación académica; además se realiza un uso alternativo de la combinatoria en “historietas”, cuyas moralejas serán sus equivalentes resultados, de tal forma que se puedan generar algunas pautas para la enseñanza de la combinatoria en la educación básica y media.

**Palabras claves:** Argumentos combinatorios, combinatoria, problemas de conteo, historietas combinatorias.

## Introducción

El presente trabajo se realiza bajo la línea de Historia y Educación Matemática, contemplando un análisis histórico-epistemológico de los argumentos combinatorios los cuales son importantes en la formación académica, además a través de la historia podemos evidenciar todos aquellos aciertos y desaciertos que se efectuaron al momento de realizar problemas de conteo que requirieron el uso de estos argumentos combinatorios para su posterior solución.

Este trabajo de grado fue realizado por la poca inclusión que han tenido las combinaciones a nivel de la educación Colombiana en el aula de clase, ya sea por falta de formación del docente o porque se les dificulta a los estudiantes su aprendizaje; aunque si la combinatoria es enseñada en el aula de clase, sólo se hace énfasis en la fórmula, dejando de lado la conceptualización y la argumentación; siendo de estas más importante la argumentación porque tanto un buen cuento como una buena cuenta están siempre respaldados por un buen argumento.

Además, el mismo ambiente social hace que la combinatoria sea explicada solamente desde la teoría, sabiendo que existe un contexto adecuado para cada situación y no hay nada más entendible que un problema diseñado o modificado para un contexto en particular; explicar y resolver problemas mediante situaciones de contexto da respuesta a una pregunta que es muy común entre los estudiantes ¿esto, para qué me sirve en la vida?, campos del conocimiento tan complejos necesitan estudiar la historia que les precede para conocer por qué son tan complejos y en que se les dificultó a los historiadores para su aprendizaje y conceptualización.

Articulando, este trabajo es realizado con el fin de generar unas pautas que permitan que la combinatoria sea puesta en acto dentro de la educación matemática haciendo uso de la

explicación de las historietas combinatorias, las cuales generan una moraleja que implica la utilización de los argumentos combinatorios para su respuesta. Estas historietas combinatorias ayudan a que los estudiantes logren conceptualizar y aplicar los argumentos combinatorios en su vida diaria, con lo cual se concibe que sirvan como constructo de las pautas que se pretenden generar.

El primer capítulo contempla los aspectos importantes que sustentan la siguiente pregunta problema *¿Cómo se han usado los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo a través de un estudio histórico – epistemológico?* , además se muestra la importancia de la combinatoria en la educación matemática y los antecedentes de la problemática, así como los objetivos que se desarrollarán en el trabajo de grado.

El segundo capítulo corresponde a un recorrido histórico general del uso inicial de la combinatoria en trabajos anteriores a Pascal y Fermat, aludiendo a la solución que dieron varios historiadores al problema de los puntos. Se presenta además, la solución que dieron Pascal y Fermat a este problema utilizando el triángulo aritmético de Pascal, como un método menos tedioso para hallar todas las posibilidades de repartir la apuesta en caso tal de que el juego continuara.

El tercer capítulo, hace alusión a la respuesta de la pregunta problema, ya que los argumentos combinatorios han sido usados por medio de siete Historietas Combinatorias de las cuales se abstrae una moraleja que contienen dichos argumentos. Estas historietas son sacadas de un taller que realizan los profesores Daniel Arbeláez y Diego Díaz en el curso de Matemática Recreativa de la Universidad del Valle en el año 2013. A parte de las siete historietas, se crea una utilizando la estructura del triángulo aritmético de Pascal. A cada una de las Historietas Combinatorias se

les realiza una interpretación con el fin de que el lector sepa de donde sale cada argumento y como se puede ir construyendo la moraleja. Las historietas plasmadas en este capítulo pueden ser sometidas a cambios dependiendo del nivel de complejidad que se quiera abarcar en el aula de clase.

En el cuarto capítulo, se conciben algunas pautas generales para incluir las Historietas Combinatorias en el aula de clase, mostrando los beneficios que están llevan consigo, pues con ellas se pretende innovar en el aula de clase utilizando el contexto del estudiante. Estas Historietas se le atribuyen a dos maestras insignes de la Matemática Recreativa: Martha Sved y Doris Schattschneider.

# **1. Capítulo I: Aspectos Generales de la Investigación**

## **1.1 Planteamiento del Problema**

La teoría probabilística como un campo en constante crecimiento, comprende muchos temas, entre ellos está la combinación, la permutación y la variación, los cuales perciben las diferentes técnicas de conteo. En Colombia, las políticas educativas proponen el desarrollo de distintos pensamientos matemáticos, entre ellos está el pensamiento aleatorio y sistemas de datos el cual se desarrolla a lo largo de la actividad matemática en el aula de clase.

Uno de los documentos establecidos por las políticas educativas, son los Estándares de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en donde se desarrolla cada uno de los pensamientos matemáticos dependiendo del conjunto de grados de escolaridad; entre ellos el pensamiento aleatorio el cual plantea de manera implícita el análisis combinatorio para los distintos niveles de educación básica, secundaria y media.

Otro documento establecido son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), que aportan elementos para el desarrollo de cada uno de los pensamientos matemáticos en los estudiantes. De manera particular, aporta pautas generales que apunten al desarrollo del pensamiento aleatorio.

En este orden de ideas, (Osorio, Suárez, & Uribe, 2011) articulan de manera general lo enunciado anteriormente diciendo que en Colombia el Ministerio de Educación Nacional plantea a través de las competencias matemáticas, lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con el conocimiento que ellos adquieren en la educación básica y media (MEN, 2006). Es así como el pensamiento aleatorio y el manejo de los sistemas de datos hace parte de las competencias que debe tener todo estudiante al finalizar este ciclo, las cuales son evaluadas en las pruebas de

Estado. Los lineamientos curriculares del MEN hacen alusión al pensamiento aleatorio (MEN, 1998) y los estándares curriculares de matemáticas especifican sus propósitos. (MEN, 2006).

Pese a esto, se puede evidenciar que Colombia no se ha destacado en los encuentros internacionales de educación estadística, sin embargo, a partir del año 2005, en el Simposio Nacional de Estadística que organizó la Universidad Nacional de Colombia, se abrió un espacio para presentar ponencias que vayan acorde a la pedagogía y didáctica de la estadística.

Conforme a esto, se ve el interés que ha obtenido el estado por propiciar espacios de formación de docentes de tal forma que puedan brindar estrategias metodológicas para la implementación de la estadística en el aula de clase.

Aludiendo a lo anterior, uno de los problemas fundamentales que se desarrolla en el curso de estadística, especialmente cuando se trata el tema de análisis combinatorio, es que solamente se utilizan fórmulas tras fórmulas, identificando variables y sustituyendo valores en ellas, dejando de lado el desarrollo de habilidades de pensamiento que les permita llegar a los conceptos y aplicarlos a diversos contextos cotidianos; esto hace que el proceso de asimilación y los objetivos planteados en el área se minimicen, contribuyendo así, de forma errónea, que la solución de problemas combinatorios se realiza solamente de manera algorítmica representada a través de fórmulas, perdiendo el sentido analítico que realmente contiene este concepto matemático. Es por ello que es necesario el uso de argumentos combinatorios para dar respuesta a problemas de conteo y de esa forma desarrollar la competencia de resolución de problemas.

Ahora bien, no se está diciendo que los procedimientos no tengan vigencia, es más, se requiere de ellos para obtener los resultados esperados, más no son los instrumentos que posibilitan el desarrollo de habilidades de pensamiento en los estudiantes, pues los conlleva a

mecanizar las ecuaciones sin asociar a ellas los conceptos que están inmersos dentro de este. En este sentido, es pertinente citar a Godino, Batanero, & Cañizares (1996):

La Combinatoria es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de los diferentes niveles educativos (Navarro-Pelayo, 1994 y Roa, 2000), es un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas que componen el currículo y eso ha provocado, en ocasiones, que el tema no se enseñe y, cuando se enseña, que se enfatice solo en aspectos de tipo algorítmico.

En la mayoría de los libros de textos escolares, los contenidos temáticos que se encuentran en el pensamiento aleatorio están ubicados en la última parte del libro, lo cual hace que ni siquiera se alcanza a ver en el transcurso del año escolar dejando a los estudiantes sin esos conocimientos que son meramente importantes para su formación académica.

En las pruebas saber 5° y 9° del 2009, según el informe de los resultados de evaluaciones nacionales realizados para estos grados en matemáticas, mostraron a través de un ejemplo de nivel avanzado para grado quinto que desarrollando tareas que llevan a la interpretación del grado de probabilidad de un evento aleatorio, los alumnos tienen grandes dificultades. Un ejemplo de ello es el siguiente:

Figura 1: Pruebas saber 5° y 9°, 2009

| NIVEL DE DESEMPEÑO: AVANZADO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <b>Ejemplo 3. Juego en clase</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                |
| <p>La profesora Nancy quiere hacer un juego con sus estudiantes, que consiste en sacar sin mirar, una balota de una bolsa. La bolsa tiene 4 balotas blancas y 2 balotas negras, de igual forma y tamaño.</p> <p>El número de posibilidades de sacar una balota negra es:</p> <p>A. La mitad del número de posibilidades de sacar una balota blanca.<br/> B. El doble del número de posibilidades de sacar una balota blanca.<br/> C. La tercera parte del número de posibilidades de sacar una balota blanca.</p> |                                                |
| <b>Características del ítem</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                |
| <b>Nivel</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Avanzado                                       |
| <b>Competencia</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Comunicación                                   |
| <b>Componente</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Aleatorio                                      |
| <b>Afirmación</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Expresar el grado de probabilidad de un suceso |
| <b>Respuesta correcta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | A                                              |
| <b>Porcentajes de respuesta de la opción correcta</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 29,31%                                         |
| <b>Porcentajes de respuestas en las opciones no validas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | B: 22,50%<br>C: 22,79%<br>D: 22,41%            |

Cabe resaltar que para poder dar respuesta al problema, es indispensable el uso de la combinatoria y como es sabido, los estudiantes, en su gran mayoría, no conocen acerca de este concepto matemático.

En general, para poder comprender el porqué de esta situación, es necesario que como futuros docentes conozcamos la historia que precede a estos conceptos matemáticos, y así, poder encontrar una posible solución que permita que la combinatoria sea incluida como un constructo

importante dentro de la formación académica de los estudiantes. Por tanto, se planteó la siguiente pregunta de investigación:

***¿Cómo se han usado los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo a través de un estudio histórico – epistemológico?***

## **1.2 Justificación**

El MEN (1998) establece unos Lineamientos Curriculares de Matemáticas que evocan pautas para la creación de las mallas curriculares y los distintos planes de estudio que debe tener cada institución acreditada por el MEN, de igual modo, determinan que competencias se deben desarrollar en cada uno de los pensamientos matemáticos dependiendo del conjunto de grados.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, (MEN, 2006), es un tipo de pensamiento que ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. Éste pensamiento, se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria.

Cabe resaltar, que la combinatoria permite calcular las distintas formas en que se pueden representar los diferentes arreglos de un conjunto. En Batanero (2001) las operaciones combinatorias pueden definirse, mediante experimentos aleatorios (extracción con o sin reemplazamiento, ordenada o no ordenada). Esta conexión entre los experimentos compuestos y la combinatoria se clarifica con el uso de diagramas en árbol.

Aparte del diagrama en árbol, que se usa como una introducción a la combinatoria, es importante el uso de argumentos combinatorios que de cierta forma, ayudan a que el estudiante desarrolle la resolución de problemas y sepa en qué problema se le pide una respuesta que requiere el uso indispensable de este concepto matemático. Además, el mundo está muy globalizado y la forma en cómo se enseña y se aprende algún concepto matemático ligado al pensamiento aleatorio se ha ido refinando poco a poco, es por ello que hoy en día ya no es tan importante que los estudiantes se aprendan las fórmulas y cómo resolverlas, sino que es importante el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publican en periódicos y revistas, entre otras.

En el MEN (2006) se puede encontrar que la probabilidad y la estadística son ramas de las matemáticas que desarrollan procedimientos para cuantificar, proponen leyes para controlar y elaboran modelos para explicar situaciones que por presentar múltiples variables y de efectos impredecibles son consideradas como regidas por el azar, y por tanto denominadas aleatorias.

El carácter globalizante de la probabilidad y la estadística está en la presencia del pensamiento aleatorio para la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias. Particularmente en el conocimiento matemático escolar, este carácter globalizante se asume cuando el énfasis se hace en el tratamiento de situaciones no deterministas, en donde la recolección, la organización y la representación de los datos obedece a una intencionalidad que les dé sentido, que guíe su interpretación para la toma de decisiones y posteriores predicciones; el desarrollo de la intuición sobre la probabilidad mediante valoraciones cualitativas y mediante la exploración de problemas reales que permitan la elaboración de modelos de probabilidad.

De acuerdo a lo que plantea el MEN, es necesario que los estudiantes manejen de forma adecuada datos estadísticos y sepan dar una respuesta coherente a un determinado problema y

más si son de conteo, ayudándose de argumentos combinatorios que les faciliten la resolución de determinados problemas.

### **1.2.1 Pertinencia del análisis Histórico – Epistemológico en la Educación**

#### **Matemática**

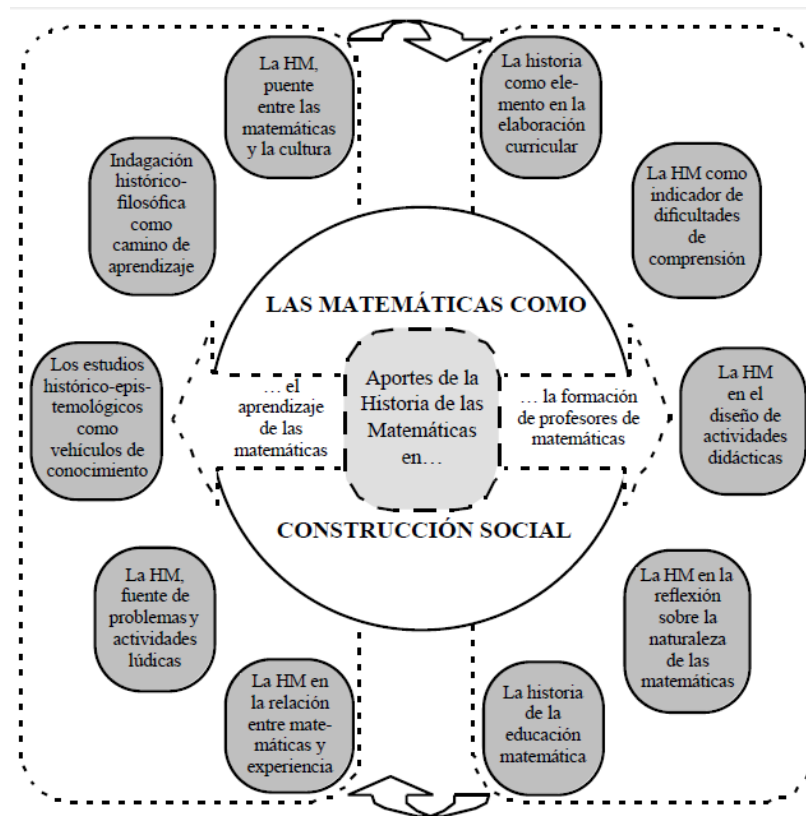
Es importante conocer y tomar conciencia de la historia que precede a cada concepto matemático, pues se conocen cada una de las falencias que se obtuvieron para poder convertirse en un concepto matemático, así lo confirma Anacona (2003):

Un estudio histórico-epistemológico acerca de la génesis y consolidación de estos conceptos da cuenta de la complejidad que los rodea y de los múltiples aspectos que incidieron en su construcción teórica... nociones matemáticas de alto nivel de abstracción, fundamentales en el desarrollo de las matemáticas y de difícil aprendizaje, desbordan toda intuición sensible y, por tanto, un estudio que dé cuenta de las condiciones lógicas que intervienen en el proceso de constitución en el objeto matemático. (pp. 33-34)

La combinatoria toma un papel importante en la formación académica, es por ello que es importante retomar la historia para conocer los obstáculos que impiden que éste sea enseñado en las instituciones.

En este sentido, los estudios históricos – epistemológicos ligados al proceso de aprendizaje de las matemáticas son un vehículo de conocimiento. Anacona (2003) presenta un diagrama sobre la intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo, en donde intenta mostrar que las matemáticas son el producto de una actividad viva de razonamiento en la que han intervenido históricamente, de una u otra manera, diversos aspectos del contexto sociocultural.

Figura 2: intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo (Anacona, 2003)



En este diagrama se reflejan, los aportes que brinda la Historia de las Matemáticas tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en la formación de profesores, y con ello, se puede evidenciar la pertinencia que posee ésta monografía en el aprendizaje de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo. Ahora, Anacona (2003), cita a Vasco (2002):

(...) iniciar investigaciones en la historia de las matemáticas y de la educación matemática en cada país no es sólo un lujo teórico, sino una necesidad cultural para recuperar la historia de las ideas, las ciencias y las artes en el propio país, y el mejor

vehículo para la autoformación y para involucrar y entusiasmar a otros docentes por la historia de las matemáticas. (p. 44)

### **1.2.2 La Investigación En la Educación Estadística: La Importancia del Análisis Combinatorio.**

En cuanto al estado actual de las investigaciones en el análisis combinatorio, se puede decir que no se han realizado muchas investigaciones debido a la falta de interés por parte del profesorado y con ello, las dificultades por parte de los estudiantes para aprender la combinatoria. Primeramente, porque la combinatoria es un poco compleja en su enseñanza y si es mal enseñada, los resultados del aprendizaje van a ser evidentemente fallidos; y es ahí donde nace la segunda falencia en cuanto a la enseñanza de este concepto matemático.

Pero no toda la responsabilidad cae en el docente, Aristizabal (2012) enuncia tres dificultades asociadas a varios factores:

- ❖ No hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores.
- ❖ No hay muchos recursos didácticos para apoyar la enseñanza de la combinatoria.
- ❖ Los libros de texto que se usan para enseñar estadística dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido.

(Pág,33)

Además, la Combinatoria no es simplemente una herramienta de cálculo para la probabilidad; desde la postura de Piaget & Inhelder (1951), se afirma que si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales, más aún, estos autores relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del

concepto de combinación. Si analizamos el uso del diagrama de árbol en probabilidad y combinatoria, podemos también observar que hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.

En el contexto colombiano, según el currículo, la Combinatoria está presente en cada grado de escolaridad, pero la gran mayoría de los alumnos terminan el bachillerato sin poder diferenciar una combinación de una permutación y de una variación, todo ello debido a que en ciertas instituciones no se abordan las temáticas establecidas, y en el caso de que se aborden, se hacen de forma procedimental y no conceptual.

En este orden de ideas, es importante concluir que la Combinatoria toma un papel importante en la formación académica y por tanto, es indiscutiblemente necesario retomarla en las aulas de clase y sobre todo aprender a pensarla y razonarla para poderla utilizar como un recurso en la resolución de problemas matemáticos.

### **1.2.3 La Combinatoria en la Matemática y en Otras Disciplinas**

La combinatoria está presente en cada etapa de la vida diaria, en los simples problemas de conteo que suelen confundir al ser humano cuando se enfrenta a preguntas como estas: ¿Cuántas monedas tienes en tu bolsillo? ¿De cuántas maneras puedo sentar a mis amigos si tengo tantas sillas? ¿De cuántas formas puedo cambiar un billete actual de \$100.000 con las denominaciones de los billetes que circulan en Colombia? Preguntas como las anteriores indagan *el cuánto o las posibles maneras de*, que se ven inmersas en el quehacer diario de una persona y de la sociedad en general. Es por ello que la combinatoria toma un papel importante en la formación académica del estudiante y es importante tomar una reflexión en cuanto a ella.

Además, se debe tener presente que la combinatoria no sólo debe ser relacionada con la probabilidad sino también con muchas otras ramas de la matemática e inclusive con diferentes campos de investigación como lo son la física, la ingeniería, la biología la química, etc.

En concordancia con lo anterior, Parra (2015), cita a Arbeláez (2013), en donde él, de manera general, describe las nuevas profesiones que requieren el uso de la combinatoria.

La presentación que hace Feller de algo tan sumamente serio, como son las concepciones de Einstein, de Maxwell, de Bose, Dirac acerca de la distribución de partículas en un espacio, no son más que problemas de urnas y balotas. Son por supuesto, relativamente fáciles de entender y de una profunda belleza. Creo que a un estudiante sensible a la física, frente a un escenario como el que plantea Feller, cuya fundamentación es relativamente sencilla llevarla a un plano pedagógico, es decir argumentativo, le sacaría un gran provecho intelectual. Pero no solamente es en la física y en la biología.

La ingeniería moderna está impregnada de elementos combinatorios: las redes telemáticas, los viajes espaciales, la fotografía, la escanografía, la transmisión de imágenes de Marte, la epidemiología del Sida, todos estos problemas tienen una profunda naturaleza aleatoria y combinatoria. Las nuevas profesiones: ingeniería de sistemas, ingeniería electrónica, ingeniería de materiales, el diseño industrial, el diseño arquitectónico, por supuesto la estadística y muchas más tiene entre sus presupuestos ciertas destrezas y una de ellas, muy importante, el del arte de contar y de combinar. (Pág. 16)

La combinatoria en la matemática está dentro del análisis matemático, del álgebra, de la geometría, de la topología combinatoria y primordialmente en la probabilidad.

En Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo(1996) se encuentran las disciplinas que de alguna manera estudian las diferentes formas de agrupar y de contar, y que, probablemente se han remitido a la combinatoria para solucionar sus inquietudes.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo General**

Realizar un análisis histórico – epistemológico sobre los argumentos combinatorios que posibilitaron la solución de problemas que involucraban estrategias de conteo con el fin de generar unas pautas para la enseñanza de la combinatoria.

#### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- ❖ Reconocer cual fue el uso inicial de la combinatoria en la historia de la probabilidad en trabajos anteriores a Pascal y Fermat.
- ❖ Interpretar el uso de argumentos combinatorios en la solución de problemas de conteo a través del uso alternativo de Historietas combinatorias
- ❖ Identificar la potencia de escribir historietas usando argumentos combinatorios con el fin de generar algunas pautas para su enseñanza.

## 1.4 Antecedentes de la Problemática

Con el fin de establecer las pertinencias de la investigación, se realizó un rastreo bibliográfico en torno a las investigaciones que se han realizado sobre los argumentos combinatorios a nivel nacional.

Como resultado de este rastreo bibliográfico, en esta sección se describen las investigaciones a nivel nacional en campos de la matemática, como lo son la Didáctica, la Historia y las Tic's.

En el campo de la didáctica está el trabajo Lucia Zapata, Sandra Quintero y Sandra Morales titulado: *“La Enseñanza de la Combinatoria Orientada Bajo la Teoría de Situaciones Didácticas”*<sup>1</sup>. Esta propuesta es el resultado de la investigación llevada a cabo en el Núcleo de Pensamiento Aleatorio y los objetivos fueron: (1) diseñar una unidad didáctica que (a) abordara la enseñanza de la combinatoria con un fuerte énfasis en la comprensión e (b) involucrara a los estudiantes en la construcción colectiva de los significados mediante el trabajo en grupos colaborativos. (2) contrastar la efectividad de la unidad didáctica en el desempeño de los estudiantes en un test de combinatoria. Para responder a estos objetivos se siguió las recomendaciones de la *Teoría de situaciones didácticas* de Brousseau y las recomendaciones para el análisis de datos cuantitativos. (Zapata, Quintero, & Morales, 2010).

En el campo de historia de la Matemática, está el trabajo de (Parra, 2015) *“Análisis Histórico – Epistemológico de la Iniciación de la Combinatoria. Caso: Combinaciones”*. El objetivo general que se desarrolló en este trabajo es realizar un análisis histórico – epistemológico de la evolución de la combinatoria teniendo como eje central el trabajo de Pascal en búsqueda del

---

<sup>1</sup> Se encuentra un artículo en la Memoria 11° del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Lucia Zapata pertenece a la Universidad de Antioquia – Grupo GECEM. Quintero y Morales también pertenecen a la Universidad de Antioquia.

surgimiento de las combinaciones; con el propósito de plantear una sugerencias de enseñanza. Para poder alcanzar ese objetivo general, la autora se planteó los siguientes objetivos específicos:

- Reconocer las raíces de la noción de combinaciones y presentar un panorama general histórico de la combinatoria para identificar los elementos primigenios que surgieron frente a la actividad del conteo.
- Establecer el desarrollo historiográfico en términos de notación moderna de la noción de combinaciones desde los trabajos de Pascal hasta la conceptualización de Gottfried Wilhelm Leibniz y Jacobo Bernoulli con el fin de presentar la propuesta de Pascal en su Tratado del triángulo aritmético y contrastar con los trabajos realizados por Leibniz y Bernoulli.
- Caracterizar y mostrar las propiedades de los números combinatorios a partir de las relaciones o estudios de estructuras discretas para conocer su comportamiento y poderlos instaurar.
- Identificar elementos principales en la composición o el cambio de las estructuras discretas a partir de operaciones, más específicamente en la noción de combinaciones con la intención de sugerir algunas pautas o elementos para la enseñanza de las combinaciones

En este orden, en el campo de las Tic's se encuentra el trabajo de Aristizábal (2012) con el fin de obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, titulada: *“Propuesta Metodológica para el Acercamiento del Análisis Combinatorio y Probabilidades a Situaciones Cotidianas”*. Con el objetivo de plantear e implementar una propuesta metodológica, mediante la aplicación de guías de aprendizaje que faciliten el proceso de acercamiento a los

conceptos del análisis combinatorio y probabilidades a través de la solución de situaciones cotidianas, empleando plataformas virtuales como apoyo ha dicho proceso.

### **1.5 Metodología del Trabajo**

El aspecto metodológico que se llevaó a cabo en este trabajo y teniendo en cuenta las metodologías trabajadas en la Historia de la Matemática, fue proponer un análisis histórico-epistemológico con la finalidad de dar cuenta de los problemas que requirieron el uso de argumentos combinatorios para su solución.

Se pretendió mostrar la utilización de los argumentos combinatorios en la solución de Historietas Combinatorias, las cuales pertenecen al profesor Daniel Arbeláez, guiado por dos maestras insignes de la matemática recreativa: Marta Sved y Doris Schattschneider. Con ello se buscó generar algunas pautas para la enseñanza de estos argumentos. Para ampliar esta parte se utilizan los artículos de Sriraman & English (2004) y Kapur (1970), que tratan acerca de la implementación de la combinatoria en el aula de clase.

Para abordar éste problema de investigación, son rotundamente necesarios unos referentes teóricos; para efectos de este trabajo se enfatizó en un referente histórico, un referente curricular y uno matemático, de tal forma que dieron cuenta de los propósitos del trabajo.

En primera instancia, para lograr reconocer cuál fue el uso inicial de la combinatoria en la historia de la probabilidad se recurre al libro *Pascal's Arithmetical Triangle* de Edwars (1987) debido a que permite realizar un análisis detallado de los trabajos de Tartaglia, Cardano, Fermat, Pascal, Huygens, Bernoulli, entre otros. Además la correspondencia entre Pascal y Fermat fue crucial para vislumbrar el uso de la combinatoria en la solución del problema de los puntos o conocido también como el problema del reparto o de la apuesta, que sirven, por cierto, para

rastrear aquellos aciertos, desaciertos, soluciones e interpretaciones novedosas dadas a los problemas y sistematización de métodos de solución. Ésta parte de la correspondencia se puede ampliar con el capítulo 5: *The foundation of probability theory by Pascal and Fermat in 1654* del libro de Hald (1990).

Otra de las fuentes fue el libro *A history of probability and statistics and their applications before 1750* de Hald (1990), quien muestra un gran compendio de varios matemáticos que trabajaron la combinatoria desde tiempo remotos, mostrando además los aportes de manera resumida que lograron varios de ellos en cuanto a la combinatoria.

Cerrando ésta parte histórica, el capítulo 6: *Los Primeros Cálculos Probabilísticos* de Hacking (1995) relatan sucesos en la historia para poder calcular todas las posibles combinaciones de los elementos del mundo, el gran trabajo combinatorio sigue esta tradición. La primera monografía sobre la teoría de combinaciones y la cual está estrechamente relacionada con la teoría de la probabilidad se le atribuye a Leibniz (1666) con el *Ars Combinatoria*. Ésta monografía contempla doce problemas acerca de las Combinaciones, Variaciones y Permutaciones, que serán objeto de estudio para poder encontrar los problemas que requirieron el uso de los argumentos de la combinatoria para su posterior solución.

En la parte matemática, el libro *Azar y Probabilidad* de Godino, Batanero, & Cañizares (1996) especialmente la sección *Teoría Matemática Elemental de la Probabilidad*, en la cual los autores se refieren a la combinatoria y sus elementos de estudio.

También, se toma en cuenta los libros de Feller (1973) *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*; de Ribnikov (1988) titulado *Análisis Combinatorio*, para

tomar todo lo referente al concepto de Combinatoria y el de Ross (2010) *A First Course in Probability*, en donde se define la combinatoria de la siguiente manera:

Figura 3: Notación y Terminología de la Combinatoria

| Notation and terminology                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>We define <math>\binom{n}{r}</math>, for <math>r \leq n</math>, by</p> $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$ <p>and say that <math>\binom{n}{r}</math> represents the number of possible combinations of <math>n</math> objects taken <math>r</math> at a time.<sup>†</sup></p> |

Thus,  $\binom{n}{r}$  represents the number of different groups of size  $r$  that could be selected from a set of  $n$  objects when the order of selection is not considered relevant.

Para lograr hacer una distinción entre Combinatoria y Argumentos Combinatorios se recurre al libro *Matemática Discreta y sus Aplicaciones 5ª edición* de Rosen (2004). En la sección 4 del libro citado muestran ambas definiciones. La definición de combinatoria es así:

El número de  $r$ -combinaciones de un conjunto de  $n$  elementos, donde  $n$  es un entero no negativo y  $r$  es un entero tal que  $0 \leq r \leq n$ , es:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Figura 4: Ecuación de Combinatoria

Ahora, presentan una definición de argumentos combinatorios, el cual en esta ocasión es llamado como *demostración combinatoria*:

Una *demostración combinatoria* es una demostración que utiliza argumentos de recuento para probar un teorema en lugar de otros métodos tales como las técnicas algebraicas. (p. 300)

Un ejemplo de la utilización de argumentos combinatorios es el siguiente:

Utilizar un argumento combinatorio para demostrar la fórmula de Pascal<sup>2</sup>:

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1, k-1)$$

Solución:

1.  $C(n,k)$  es el número de subconjuntos con  $k$  elementos de un conjunto con  $n$  elementos.

Para un elemento particular  $x$ : los subconjuntos con  $k$  elementos se pueden dividir en dos: aquellos que contienen a  $x$  y los que no lo contienen.

Hay  $C(n-1,k)$  subconjuntos con  $k$  elementos que no contienen a  $x$ , y  $C(n-1, k-1)$  subconjuntos con  $k$  elementos que sí contienen a  $x$ , y la suma de estos dos establece la fórmula de Pascal.

El anterior, es un ejemplo sencillo de la demostración de la fórmula de Pascal en donde se utilizan argumentos combinatorios. En el tercer capítulo se estudiarán las Historietas Combinatorias, las cuales en su moraleja o respuesta, comprenden argumentos combinatorios.

Como referentes curriculares están los documentos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN): Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los cuales ya han sido objeto de estudio en la justificación y son puestos aquí para fundamentar el uso indispensable de la combinatoria y de sus argumentos en la formación académica.

---

<sup>2</sup> Ejemplo y su debida solución tomado de (Espinosa, 2010)

## 2. Capítulo II: Panorama Histórico General de la Constitución de la Combinatoria

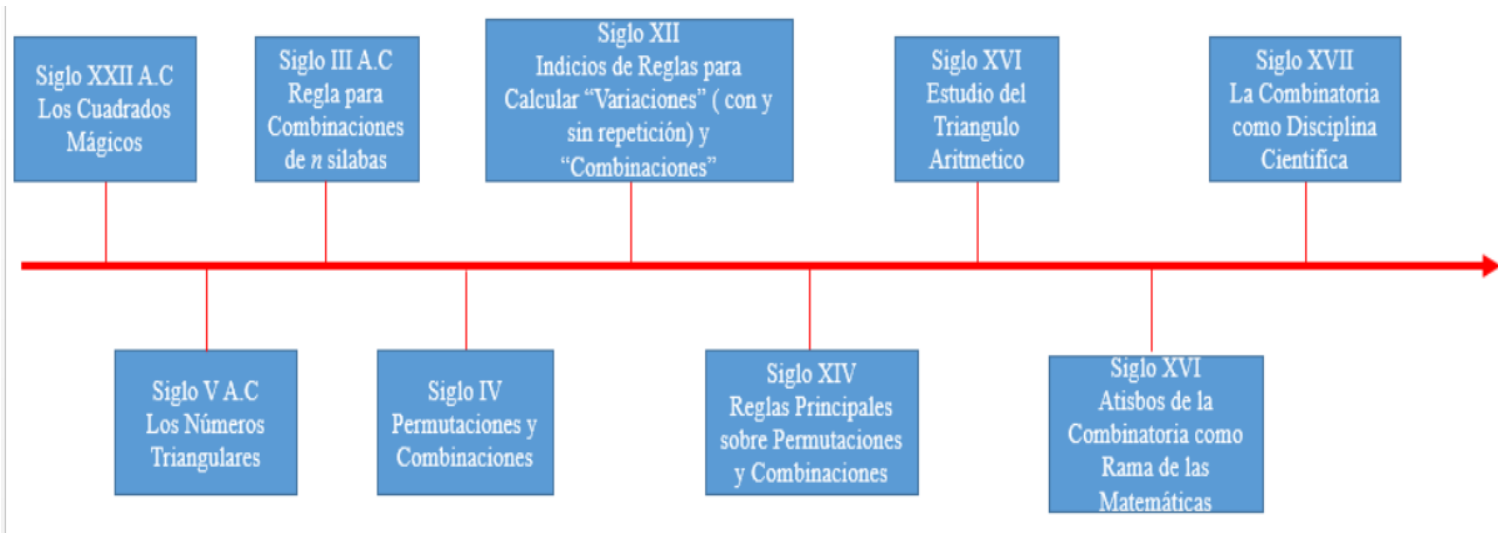
### 2.1 Uso inicial de la combinatoria en la historia de la probabilidad hasta 1654

En este capítulo, se pretende encontrar el uso inicial de la combinatoria en la historia de la probabilidad con trabajos desde Luca Pacioli (1494) hasta los trabajos de Pascal y Fermat (1654), debido a que en este intervalo de tiempo se hace un uso más racional de la combinatoria y su principal uso, el cual fue demostrado dándole solución al Problema de los Puntos.

Antes de este intervalo de tiempo se reflejaron en algunos siglos, según investigaciones realizadas tanto por historiadores como por antropólogos, que la combinatoria ha sido un interés del ser humano desde hace tiempo debido a la necesidad de saber la forma de seleccionar o elegir parejas de un determinado conjunto de elementos.

A continuación se presenta un diagrama que contiene los avances que se obtuvieron en cuanto a la combinatoria en sus respectivos siglos.

Figura 5: Panorama Histórico Siglo XXII AC – Siglo XVII



Existen dos aspectos claramente distintos sobre las anticipaciones de la teoría de las probabilidades: los problemas combinatorios y los problemas sobre juegos repetidos<sup>3</sup>. Para efectos de este trabajo se hace necesaria la historia que tuvieron los problemas combinatorios, pues estos quedaron unidos al problema de los puntos de una manera clara y reconocible en la época de Pascal.

En Italia del siglo XV, se hallaron intentos genuinos de aplicar el álgebra a problemas de juegos, tal cual como el problema de los puntos, y el cual estudiaremos durante este capítulo. Una forma especial de mostrar las dificultades que los matemáticos han encontrado al construir una nueva teoría es a través de la solución de un problema, en este caso, el Problema de los Puntos, debido a que este vislumbra la utilización de la combinatoria para tener su solución y es por ello que se realiza este recorrido histórico. Según García (2000) la formulación general del problema sería la siguiente:

Dos jugadores compiten por un premio que es otorgado después de que uno de ellos haya ganado  $n$  lances en un juego. El jugador A ha ganado más que el jugador B y, debido a alguna intervención externa, deben abandonar el juego antes de llegar al número  $n$ . ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los jugadores? (p. 2)

Éste problema a través de la historia ha sufrido cambios en cuanto al contenido, es decir, existen varias versiones pero todas inclinadas al mismo objetivo.

Ahora, se realizará un recorrido histórico concerniente a la solución que dieron varios historiadores al Problema de los Puntos. Desde Luca Pacioli hasta Girolamo Cardano, se tomará como referencia el artículo de la revista SUMA *Historia de un problema: el reparto de la*

---

<sup>3</sup> Para una mejor ampliación de los problemas sobre juegos repetidos, dirigirse a (Hacking, 1995)

*apuesta* cuyo autor es Juan Antonio García Cruz; debido a que él presenta la solución que dieron estos personajes al problema en cuestión.

### 2.1.1 Luca Pacioli (1494).

Pacioli es el primer matemático interesado en darle solución al problema. Como se dijo anteriormente, este problema ha tenido varias versiones y para dar cuenta de ello, Pacioli, en su obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalitá* (Venecia 1494) presenta la siguiente versión:

Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada uno. (p, 2)

La solución que da Pacioli es la siguiente:

$$\frac{5}{11} + \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

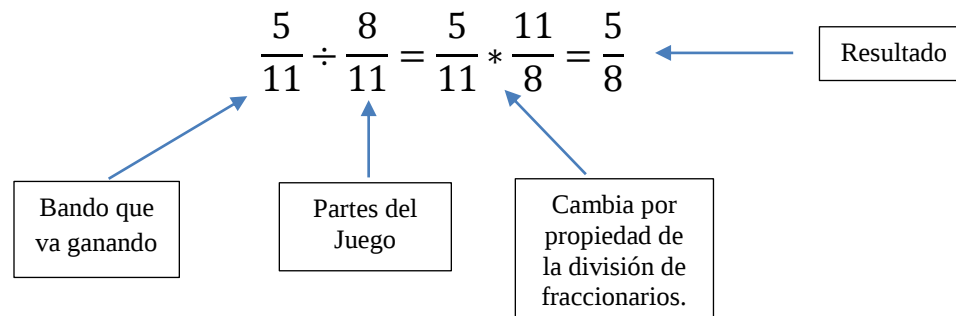
Deduce que los  $\frac{8}{11}$  son igual a los 22 ducados de la apuesta, por lo tanto, él sostiene que al bando que va ganando le corresponderá  $\frac{5}{11}$  de 22 ducados ( $3\frac{3}{4}$ ) y al bando que va perdiendo le corresponderá  $\frac{3}{11}$  de 22 ducados ( $8\frac{1}{4}$ ).

*Aporte: para saber cuánto le pertenece a cada bando es necesario tener en cuenta lo siguiente:*

Se debe tener en cuenta que parte del juego ya se había jugado y que proporción de esa parte había conseguido el equipo. El número máximo de puntos a conseguir son 11: 6 del que gana y 5 del que pierde, y se han conseguido 8, para tener un monto de  $\frac{8}{11}$ . Lo que considera Pacioli es

que los 22 ducados se apuestan por las  $\frac{8}{11}$  partes del juego en lugar del juego completo. Según eso, la proporción que se debe llevar cada uno es:

Figura 6: Solución de Pacioli



A partir de aquí ya se puede llegar al resultado que dio Pacioli.

Un punto a consideración sería que el bando que va perdiendo dijera que la apuesta se debe dividir por igual, pues tal apuesta se pactó a término y no hubo acuerdo previo sobre otra contingencia del juego.

Se puede notar que esta solución es meramente aritmética, un simple problema de reparto. Sin embargo Pacioli termina con estas palabras: “*He encontrado que las opiniones sobre la solución difieren de una persona a otra, pero todos parecen insuficientes en sus argumentos. Yo afirmo la verdad y doy la forma correcta de solucionar el problema*”.

### 2.1.2 Niccolo Tartaglia (1556).

Medio siglo después, aparece este personaje, quien aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et misure* (Venecia 1556). Tartaglia reproduce la solución dada por Pacioli, y sin duda lanza una objeción: *supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 puntos y el otro bando 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual para Tartaglia no tiene sentido.*

Con respecto a lo anterior, Tartaglia resuelve un problema en donde maneja los mismos datos de Pacioli y por lo cual ha lanzado la anterior objeción: *En una partida a 60 puntos, A ha ganado 10 y B ha ganado 0. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?*

La solución dada por Tartaglia es la siguiente:

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ parte de los 22 ducados, en fracción mixta sería } \frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}$$

$$\text{Conforme a ello, el jugador A recibirá } 22 + 3\frac{2}{3} = 25\frac{2}{3} \text{ ducados.}$$

$$\text{El jugador B recibirá } 22 - 3\frac{2}{3} = 18\frac{2}{3} \text{ ducados.}$$

De esta solución dada por Tartaglia, se deduce, que consiste en dar al jugador que va ganando lo que apostó más una parte proporcional correspondiente a los puntos ganados. En el siguiente problema que emplea Tartaglia con los mismos datos que utilizó Pacioli, es donde se ve claramente su método de solución.

*En una partida a 60 puntos, A ha ganado 50 y B ha ganado 30. ¿Cómo debería dividirse la apuesta si cada jugador ha colocado 22 ducados?*

La solución que da es la siguiente:

$$50 - 30 = 20; \frac{20}{60} = \frac{1}{3}; \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Luego,

$$\text{El jugador A recibe } 22 + 7\frac{1}{3} = 29\frac{1}{3}$$

$$\text{El jugador b recibe } 22 - 7\frac{1}{3} = 14\frac{1}{3}$$

Con lo anterior, está claro el método que utiliza Tartaglia: el jugador que lleva la ventaja recibe su apuesta más la parte del remanente proporcional a su ventaja.

En consecuencia, las soluciones dadas por Pacioli y Tartaglia no convencen porque ambas carecen de lo mismo, no cuentan con lo que pudiera ocurrir en las partidas que quedan por jugar. La solución a este problema no era tan sencillo, implicaba conceptos que escapaban del alcance de las matemáticas de esa época.

### 2.1.3 Girolamo Cardano (1564).

Este personaje en su obra *Practica arithmeticae generalis* (1539), señala una nueva versión para abordar la solución del problema de los puntos. Cardano también critica a Pacioli diciendo que no ha tenido en cuenta el número de juegos que ha cada jugador le quedan por ganar, en caso tal de que el juego continuara.

Su expresión para el reparto de la apuesta es la siguiente:

$$\frac{\text{Parte de A}}{\text{Parte de B}} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n - q)}{1 + 2 + 3 + \dots + (n - p)}$$

Donde,

$n$ : número total de puntos a jugar.

$p$  y  $q$ : números de puntos ganados por A y B.

Esta expresión es correcta para resolver el caso particular enunciado por Pacioli, más no es válida en general. Cardano solo lanzó esta fórmula pero no se aventuró a resolver el problema de manera coherente.

## 2.2 Primeros Cálculos Correctos: Correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat (1654)

En 1654 comienza la famosa correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat en lo referente al problema de los puntos. Se le darán dos soluciones al problema, la primera es mediante las combinaciones, y la segunda aplicando el Triángulo Aritmético de Pascal, utilizando la sección 3, parte II del Tratado de Pascal. Además, se tomará como referente el apéndice 1 del libro *Pascal's Arithmetical Triangle*. Cabe resaltar, que la solución es de forma general, permitiendo que el problema se pueda trabajar con dos o más participantes.

### 2.2.1 Solución Mediante las Combinaciones:

Para la solución mediante las combinaciones, se utiliza como guía un Blog de Uruguay de la profesora Graciela Slekis Riffel, el cual tiene como nombre *Concierta Ciencia: El conocimiento es más que un conjunto de datos*<sup>4</sup>.

Para la solución del problema mediante este método, Pascal puso a consideración de Fermat la siguiente versión del problema: “A y B han pactado un juego en el que una moneda es lanzada al aire en cada ronda que se juega, de tal forma que cuando cae cara gana A y cuando cae cruz gana B, y además acordaron que ganará el juego quien primero complete 3 rondas a su favor, para lo cual cada uno apostó 32 *pistolas* (monedas de oro francesas del siglo XVII). El juego se detiene cuando A ha ganado 2 rondas y B solamente ha ganado 1 ronda. ¿Cómo se debe distribuir entre ellos la apuesta de las 64 *pistolas*?”

---

<sup>4</sup> El Link: <https://conciertaciencia.wordpress.com/2014/02/24/blaise-pascal-pierre-de-fermat-y-el-caballero-de-mere-jugadores/>

En esta nueva variación del problema, Pascal propone que la apuesta se divida de acuerdo a las probabilidades futuras de ganar que tendrían los jugadores en caso tal de que el juego continuara. El razonamiento que utiliza Pascal está basado en el análisis combinatorio. Véase en la siguiente tabla:

*Figura 7: División de la Apuesta Según Pascal*

| División de la Apuesta según Pascal              |                                                                |                                                                |                                                                         |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Estado actual del juego: Rondas ganadas de A y B | División de la apuesta si A gana la siguiente ronda del juego: | División de la apuesta si B gana la siguiente ronda del juego: | División de la apuesta si A y B suspenden el juego en el estado actual: |
| $A=2$ y $B=1$                                    | $A=64$ y $B=0$                                                 | $A=32$ y $B=32$                                                | $A=48$ y $B=16$                                                         |

La tabla anterior, muestra como Pascal comprende la situación del problema, analizando el estado actual del juego, como se debería dividir la apuesta si A o B ganan la siguiente ronda y como se debe repartir la apuesta en el estado actual. Es claro, que la probabilidad de que A o B ganen o pierdan la siguiente ronda es de  $\frac{1}{2}$ .

Como la apuesta debe ser distribuida equitativamente con fundamento en las probabilidades de triunfo de cada jugador, y si los jugadores deciden terminar el juego cuando el resultado está 2 rondas a favor de A y 1 ronda a favor de B, entonces a A por sus probabilidades acumuladas de triunfo le corresponde recibir  $\frac{3}{4}$  partes de las 64 pistolas, es decir, 48 pistolas porque:  $64 \times \frac{3}{4} = \frac{192}{4} = 48$ , mientras que a B por su única probabilidad de triunfo le corresponde recibir  $\frac{1}{4}$  parte de las 64 pistolas, es decir, 16 pistolas porque:  $64 \times \frac{1}{4} = \frac{64}{4} = 16$ .

Conforme a esto, Pascal advirtió que este tipo de problema conduce hacia un nuevo campo del análisis combinatorio<sup>5</sup> en el cual lo importante es determinar las múltiples formas como dos eventos opuestos (que la ronda la gane *A* o que la ronda la gane *B*) pueden ocurrir en distintos momentos del tiempo, teniendo en cuenta que cada ronda jugada puede producir como resultado únicamente esos dos eventos opuestos.

Respecto de este problema, a Pascal lo que más le interesaba era encontrar un procedimiento matemático que permitiera calcular la cantidad de posibles combinaciones, pues para él es evidente que en cada ronda la probabilidad para que ocurra cada resultado opuesto es de  $1/2$ , y entre más rondas se jueguen, la probabilidad de llegar a un determinado puntaje entre *A* y *B* se debe calcular multiplicando  $1/2$  por sí mismo tantas rondas se jueguen.

Así, Fermat recibe todas estas cuestiones propuestas por Pascal, entendiendo que el meollo de este problema, es determinar la cantidad de posibles combinaciones en los resultados que pueden ocurrir a través de las ramificaciones o bifurcaciones, en cada nueva ronda jugada y que conducen a situaciones en las que puede ganar tanto *A* como *B*. Fermat, llega a que le faltarían 4 rondas futuras para que alguno de los dos gane definitivamente al completar las 4 rondas a su favor. Para ello se realiza la siguiente tabla:

---

<sup>5</sup> Cabe resaltar que en esa época aun no existía el análisis combinatorio pero que ya se podía dar cuenta de ello mediante la solución del problema

Figura 8: Combinaciones de Posibles Resultados en 4 Rondas de Juego

| Ronda | Combinaciones de posibles resultados en 4 rondas de juego |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |              |    |    |    |    |
|-------|-----------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--------------|----|----|----|----|
|       | 1                                                         | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12           | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1°    | A                                                         | A | A | A | B | A | A | B | A | B  | B  | B            | B  | B  | A  | B  |
| 2°    | A                                                         | A | A | B | A | A | B | A | B | A  | B  | B            | B  | A  | B  | B  |
| 3°    | A                                                         | A | B | A | A | B | A | A | B | B  | A  | B            | A  | B  | B  | B  |
| 4°    | A                                                         | B | A | A | A | B | B | B | A | A  | A  | A            | B  | B  | B  | B  |
|       | A favor de A                                              |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    | A favor de B |    |    |    |    |

Con la tabla anterior, Fermat afirma que son posibles 16 combinaciones diferentes entre los resultados que aparecen a favor de A y de B durante las 4 rondas de juego. Las 11 primeras combinaciones le permiten a A ganar las 2 rondas que le hacen falta, y con esto la probabilidad de triunfo a favor de A es  $\frac{11}{16}$ , mientras que la probabilidad de B es  $\frac{5}{16}$ , porque sólo puede ganar con las combinaciones representadas en las columnas 12, 13, 14, 15 y 16. Debido a que son todas las posibilidades en donde B logra anotar 3 puntos a su favor.

### 2.2.1.1 Primera Fórmula de Pascal para el Cálculo de Combinaciones<sup>6</sup>.

Pascal le responde la carta a Fermat y está completamente de acuerdo con la solución que le da al problema, sin embargo considera que el método es demasiado tedioso al tener que elaborar tablas para poder visualizar de manera exhaustiva las diferentes combinaciones. Para ello propuso una fórmula matemática general aplicable para poder calcular la probabilidad de

<sup>6</sup> Para establecer esta fórmula, se recurre a un blog de Uruguay, el cual tiene como nombre *Concierta Ciencia: El conocimiento es más que un conjunto de datos*. El Link: <https://conciertaciencia.wordpress.com/2014/02/24/blaise-pascal-pierre-de-fermat-y-el-caballero-de-mere-jugadores/>

ocurrencia de todas las posibles combinaciones de resultados a favor de A o B, independientemente del puntaje que cada uno tenga al momento de la interrupción del juego e independientemente de la cantidad de rondas que se jueguen o se deban jugar.

La fórmula es la siguiente:

*Figura 9: Primera fórmula de Pascal para el cálculo de Combinaciones.*

$$nC_r = \frac{n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) \cdots (n - r + 1)}{r * (r - 1) * (r - 2) * (r - 3) \cdots (r - r + 1)}$$

Donde  $n$  equivale a la Cantidad de rondas a jugar, la letra  $C$  indica que se trata del cálculo de una combinación, y la letra  $r$  indica la cantidad de apariciones que tiene un resultado dentro de la cantidad de rondas a jugar.

#### ***2.2.1.2 Aplicación de la Fórmula de Pascal al Problema de los Puntos.***

Pascal en su carta retoma el problema planteado por Fermat, para utilizar la herramienta de cálculo combinatorio: A y B juegan a lanzar una moneda, de tal manera que cuando cae la cara gana A y cuando cae la cruz gana B, y acuerdan que el juego lo ganará quien primero complete 4 rondas a su favor, pero el juego se detiene cuando A tiene 2 rondas a su favor y B tiene 1 ronda a su favor: ¿Cómo se pueden determinar las probabilidades de cada jugador para efectos de la distribución equitativa de la apuesta teniendo en cuenta que a A le hacen falta 2 rondas para ganar y a B le hacen falta 3 rondas para el triunfo?.

Retomando la solución que dio Fermat, donde concluye que a A le corresponde una 11/16 parte del pozo y a B sólo le corresponde una 5/16 parte del pozo apostado según sus respectivas probabilidades de triunfo, pero para llegar a tal conclusión Fermat tuvo que elaborar una tabla abarcando todas las posibles combinaciones de los resultados que pueden ocurrir en las siguientes 4 rondas que sería necesario jugar para dirimir la apuesta.

Pascal, basado en su fórmula de cálculo combinatorio, considera que para determinar la cantidad total de posibles combinaciones que se pueden formar al aparecer un determinado resultado  $n$  veces dentro de las 4 rondas a jugar, basta realizar una sumatoria de todas las combinaciones posibles cuando el resultado aparece 0 veces, 1 vez, 2 veces, 3 veces y 4 veces dentro de las 4 rondas a jugar, es decir, se debe calcular:

$$4C0 + 4C1 + 4C2 + 4C3 + 4C4 = \text{total de combinaciones posibles.}$$

Al realizar estas operaciones se obtienen las siguientes cifras:

$$4C0 = \frac{4}{4} = 1$$

$$4C1 = \frac{4}{1} = 4$$

$$4C2 = \frac{4 * 3}{2 * 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$4C3 = \frac{4 * 3 * 2}{3 * 2 * 1} = \frac{24}{6} = 4$$

$$4C4 = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{4 * 3 * 2 * 1} = \frac{24}{24} = 1$$

Al sumar estos resultados, tenemos que el total es de 16 combinaciones, lo cual concuerda con la solución que planteó Fermat.

## 2.2.2 Solución Mediante el Triángulo Aritmético

Para esta correspondencia, Pascal utiliza una nueva versión del Problema de los Puntos. Uno de los casos particulares se refiere al “valor de la primera partida”, la cual consiste en resolver el

siguiente problema: Los dos jugadores inician el juego necesitando ganar ambos el mismo número de puntos, o de partidas, estando en igualdad de condiciones en lo que se refiere a ganar cada partida, ambos tiene igual probabilidad de ganar cada una de ellas. Se inicia el juego y el primer jugador gana la primera partida. En ese instante el juego es interrumpido, por lo que el primer jugador, además de retirar su parte de la apuesta, ha de recibir una cantidad de la apuesta del segundo en compensación por su ventaja sobre él. Pues bien, dicha cantidad, expresada como proporción de la apuesta del segundo, es lo que Pascal llama el “valor de la primera partida”.

Pascal dirige una carta a Fermat el 29 de julio de 1654, en donde le manifiesta la forma en que lleva a cabo su valoración:

Pero la proporción de la primera partida no es fácil de encontrar: es así, pues no quiero ocultar nada, y he aquí el problema al que yo le prestaba tanta atención, porque en efecto me agrada mucho: Dado el número de partidas que se quiera, encontrar el valor de la primera.

Sea el número dado de partidas, por ejemplo, 8. Tomad los ocho primeros números pares y los ocho primeros números impares, a saber: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, y 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Multiplicad los números pares de esta forma: el primero por el segundo, el producto por el tercero, el producto por el cuarto, el producto por el quinto, etcétera; multiplicad los números impares de la misma forma: el primero por el segundo, el producto por el tercero, etcétera. El último producto de pares es el denominador y el último producto de impares es el numerador de la fracción que expresa el valor de la primera partida de ocho: es decir, que si juega cada uno el número de doblones expresado

por el producto de los pares, le pertenecerá sobre el dinero del otro el número expresado por el producto de los impares.

Lo que se demuestra, pero con mucho trabajo, por las combinaciones, tal como lo habéis imaginado, y no he podido demostrarlo por esa otra vía que acabo de contaros, sino solamente por aquélla de las combinaciones,... (Basulto, Camuñez, Ortega & Perez, 2004, p.158)

Teniendo en cuenta lo anterior, Basulto et al. (2004), describe cómo Pascal encontró la proporción anterior: 1) el número 8 que Pascal utiliza en el párrafo es el número de partidas que le faltan al primer jugador el cual ha ganado la primera partida, es decir, el juego ha sido interrumpido cuando al primer jugador le faltan 8 partidas por ganar y al segundo 9 partidas, por lo cual se dice que el juego está en situación (8,9); 2) Cuando Pascal dice que “no he podido demostrarlo por esa otra vía”, se refiere a que no ha podido aplicar su método universal.

#### **2.2.2.1 El Triángulo Aritmético de Pascal.**

Para Pascal, el triángulo aritmético es un instrumento de cálculo. El Tratado del Triángulo Aritmético, está dividido en dos partes, a saber:

Parte I: Descripción del triángulo aritmético y la demostración de diecinueve propiedades.

Parte II: Uso del Triángulo Aritmético. En la sección 3 de esta parte, aplica el Triángulo a la solución del Problema de los Puntos.

Aunque Pascal no sea el creador del triángulo aritmético, siendo casi el último de una larga lista de “descubridores”, su nombre estará por siempre ligado al mismo porque fue el primero en

llevar a cabo un estudio sistemático de las relaciones que en él aparecen. Los méritos del trabajo de Pascal en ese aspecto son, pues, suficientes como para justificar el uso de su nombre.

En esta sección, se proporcionarán las definiciones básicas del Triángulo Aritmético y la última consecuencia, debido a que es lo principal que utiliza Pascal para darle solución al Problema de los Puntos con este método.

Comenzando, el Triángulo Aritmético es una matriz de números, cuya representación de las primeras filas y columnas es la siguiente:

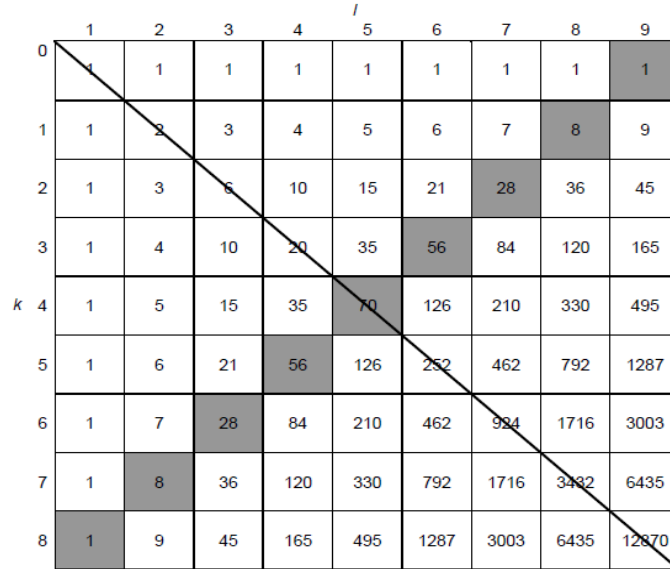
Las filas son representadas por la letra  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) y las columnas mediante  $l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ), y el número situado en la celda  $(k, l)$  lo representaremos por  $f(k, l)$ .

Pues bien, los números del triángulo están definidos por:

$$f(k, l) = f(k, l - 1) + f(k - 1, l),$$

La siguiente imagen da cuenta de cómo es la forma del triángulo aritmético de Pascal y en la cual se puede observar cuáles son las filas y las columnas:

Figura 10: Triángulo Aritmético de Pascal<sup>7</sup>



|   |   |   |    |     |     |      |      |      |       |
|---|---|---|----|-----|-----|------|------|------|-------|
|   | 1 | 2 | 3  | 4   | 5   | 6    | 7    | 8    | 9     |
| 0 | 1 | 1 | 1  | 1   | 1   | 1    | 1    | 1    | 1     |
| 1 | 1 | 2 | 3  | 4   | 5   | 6    | 7    | 8    | 9     |
| 2 | 1 | 3 | 6  | 10  | 15  | 21   | 28   | 36   | 45    |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20  | 35  | 56   | 84   | 120  | 165   |
| 4 | 1 | 5 | 15 | 35  | 70  | 126  | 210  | 330  | 495   |
| 5 | 1 | 6 | 21 | 56  | 126 | 252  | 462  | 792  | 1287  |
| 6 | 1 | 7 | 28 | 84  | 210 | 462  | 924  | 1716 | 3003  |
| 7 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792  | 1716 | 3432 | 6435  |
| 8 | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 |

Pascal da la siguiente explicación: “el número de cada celda es igual a aquél de la celda que le precede en su rango perpendicular más aquél de la celda que le precede en su rango paralelo”. Él denominaba *Rango Perpendicular* a lo que se conoce como columna de una matriz, tanto que el *Rango Paralelo* es la fila de la misma.

Para el caso de  $k = 0$  tendríamos  $f(0, l) = f(0, l - 1) + f(-1, l)$  y para  $l = 1$ ,  $f(k, 1) = f(k, 0) + f(k - 1, 1)$ . Pues bien, suponemos que fuera del triángulo hay una fila y una columna de ceros, o sea,  $f(-1, l) = 0$  y  $f(k, 0) = 0$ , con lo que se evita la posible indefinición de algunas celdas del triángulo.

Ahora bien, para introducir la idea de triángulo utilizado por Pascal se recurre a Basulto, Camuñez, Ortega & Pérez, (2004), en el capítulo 9: *Una fórmula casi mágica en la resolución de Pascal del Problema de los Puntos*, debido a que presentan el triángulo aritmético y cómo éste es utilizado por Pascal para darle solución al problema de los puntos:

<sup>7</sup> Tomado de: Basulto, Camuñez & Pérez (2004)

Al número situado en la primera celda le llamó “número generador” y en su definición de triángulo aritmético señaló que éste es un número arbitrario, aunque en el *Traité* utilizó la unidad como tal. A lo que entendemos como diagonal principal de una matriz, Pascal la llamó “dividente”. Lo que sería la segunda diagonal de la matriz va a ser la “base” del triángulo aritmético correspondiente... Si en cada cuadrado con vértice el número generador trazamos la segunda diagonal (diagonal en sentido matricial) se obtienen sucesivos triángulos numéricos cuyas bases estarán formadas por los números de esa segunda diagonal. Identificaremos esos triángulos por el número correspondiente a la fila desde la cual comienza a trazarse dicha diagonal. A dicho número, incrementado en una unidad (pues él comienza a enumerar las bases desde 1, no desde 0), Pascal le llaman “exponente”.

Así, el triángulo de base  $n$  (de exponente  $n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ) tendrá en la base los números:

$$\{f(r, n - r + 1), r = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

o sea, la base del triángulo  $n$ -ésimo está formada por  $n + 1$  números. (p. 161)

A continuación se ilustra lo dicho anteriormente:

Figura 11: Ilustración Elementos Importantes del Triángulo Aritmético<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Tomado del Trabajo de Grado de Parra (2015).

|    | Generador | Base | Célula | Exponente | Recíprocas |                        |                      |                  |   |    |
|----|-----------|------|--------|-----------|------------|------------------------|----------------------|------------------|---|----|
|    | 1         | 2    | 3      | 4         | 5          | 6                      | 7                    | 8                | 9 | 10 |
| 1  | 1         | 1    | 1      | 1         | 1          | 1                      | 1                    | 1                | 1 | 1  |
| 2  | 1         | 2    | 3      | 4         | 5          | 6                      | 7                    | 8                | 9 |    |
| 3  | 1         | 3    | 6      | 10        | 15         | 21                     | 28                   | 36               |   |    |
| 4  | 1         | 4    | 10     | 20        | 35         | 56                     | 84                   | Rangos paralelos |   |    |
| 5  | 1         | 5    | 15     | 35        | 70         | 126                    | Triángulo Aritmético |                  |   |    |
| 6  | 1         | 6    | 21     | 56        | 126        | Rangos perpendiculares |                      |                  |   |    |
| 7  | 1         | 7    | 28     | 84        |            |                        |                      |                  |   |    |
| 8  | 1         | 8    | 36     | Método    |            |                        |                      |                  |   |    |
| 9  | 1         | 9    |        |           |            |                        |                      |                  |   |    |
| 10 | 1         |      |        |           |            |                        |                      |                  |   |    |

Para los primeros triángulos, las bases serían:

- Para  $n = 0, f(0,1) = 1$ .
- Para  $n = 1, f(0,2) = 1, f(1,1) = 1$ .
- Para  $n = 2, f(0,3) = 1, f(1,2) = 2, f(3,1) = 1$ .

Además, una celda cualquiera  $(k, l)$  pertenece a la base del triángulo  $n = k + l - 1$ , y este número es el que se usa como identificador del triángulo al que pertenece la celda. Así, los números de la base 8 son: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1. En total nueve números. Nos fijamos también en los primeros números de la dividente: 1, 2, 6, 20, 70,... dado el interés que tienen esos números para la solución del problema de los puntos.

De lo expuesto anteriormente vemos que Pascal define los números del triángulo de forma recurrente o, dicho de otra forma, mediante una ecuación en diferencias parciales. Dio los números del triángulo hasta  $k = 8$  y  $l = 9$ .

Ahora bien, como consecuencias del triángulo se toma en cuenta la última, ya que sirve para la solución del problema en cuestión.

$$f(k, k + 1) = 4 \frac{2k - 1}{2k} f(k - 1, k)$$

En palabras de Pascal, esta última consecuencia se define de la siguiente manera:

*En todo Triángulo Aritmético dos células continuas que están en la dividente, la inferior es a la superior tomada cuatro veces, como el exponente de la base de esta superior es a un número mayor que la unidad.*

Gráficamente sería de la siguiente forma:

Figura 12: Consecuencia última<sup>9</sup>

|    | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 6   | 7  | 8  | 9 | 10 |
|----|---|---|----|----|-----|-----|----|----|---|----|
| 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1 | 1  |
| 2  | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 6   | 7  | 8  | 9 |    |
| 3  | 1 | 3 | 6  | 10 | 15  | 21  | 28 | 36 |   |    |
| 4  | 1 | 4 | 10 | 20 | 35  | 56  | 84 |    |   |    |
| 5  | 1 | 5 | 15 | 35 | 70  | 126 |    |    |   |    |
| 6  | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 |     |    |    |   |    |
| 7  | 1 | 7 | 28 | 84 |     |     |    |    |   |    |
| 8  | 1 | 8 | 36 |    |     |     |    |    |   |    |
| 9  | 1 | 9 |    |    |     |     |    |    |   |    |
| 10 | 1 |   |    |    |     |     |    |    |   |    |

La figura anterior permite que la solución del problema sea más comprensible y por ende, conocer de dónde salen los resultados.

### 2.2.2.2 Solución Problema de los Puntos

Como se dijo anteriormente, se van a tomar en cuenta el libro de Edwars (1987) y el de Basulto et al. (2004), debido a que reproducen la solución de Pascal al Problema de los Puntos utilizando el triángulo aritmético.

Pascal y Fermat, ya habían dado solución al problema de los puntos utilizando el método de las combinaciones, el cual fue analizado en la correspondencia del verano de 1654. La razón por la cual Pascal busca una solución alternativa, diferente a las combinaciones, es quizás por lo tedioso que es la enumeración de todas las posibilidades.

<sup>9</sup> Tomado del Trabajo de grado de Parra (2015)

En términos actuales, la solución dada por Pascal implica el análisis de un árbol de posibles resultados, desde, hacia atrás hasta el inicio, utilizando la forma repetida de que si un jugador en una partida determinada puede ganar  $X$  o  $Y$  unidades monetarias teniendo igual probabilidad, entonces su “ganancia esperada” es  $\frac{1}{2}(X + Y)$ ; cantidad que sería la que recibiría el jugador si la partida no se jugara, logrando el reparto de la apuesta si el juego es interrumpido. Este es un ejemplo claro de cómo se valora un juego a través de su esperanza.

En el desarrollo del Tratado no se da una solución general al problema de los puntos utilizando el método de la esperanza, más bien, se resuelve una generalización parcial, cuando  $a=1$  y  $b$  cualquiera, es decir, cuando al primer jugador le hace falta solo una partida y al segundo jugador le hacen falta varias partidas. Teniendo así, este caso, para que el jugador B gane el juego, necesita ganar las siguientes  $b$  partidas, lo cual ocurrirá con la probabilidad de que la proporción de la apuesta total que recibiría este jugador, en compensación por la interrupción del juego en la situación  $(1, b)$ .

Pascal finaliza esta parte con la siguiente conclusión:

Por este método se harán los repartos en toda clase de situaciones, tomando siempre lo que le pertenece en caso de ganar y lo que le pertenece en caso de perder, y asignando para el caso del reparto la mitad de estas dos sumas.

He aquí una de las maneras de hacer el reparto.

Hay otras dos, una por medio del Triángulo Aritmético, y la otra por las combinaciones.

(Basulto, et al. 2004, p. 164)

Pascal utiliza el siguiente lema, para resolver el problema de los puntos usando el triángulo aritmético como instrumento de cálculo y en el cual se resume el Método del Valor Esperado que él ha introducido:

Si dos jugadores juegan a un juego de puro azar, con la condición de que, si el primero gana, a él le pertenecerá una porción cualquiera de la suma que ellos juegan, expresada por una fracción, y que, si pierde, le pertenecerá una menor porción de la misma suma, expresada por otra fracción: si ellos quieren separarse sin jugar, la condición de reparto se encontrará de esta forma. Sean reducidas las dos fracciones al mismo denominador, si ellas no están; tómese una fracción donde el numerador sea la suma de los dos numeradores, y el denominador doble de los precedentes: esta fracción expresa la porción que pertenece al primero sobre la suma que está en juego.

Dicho lo anterior, Pascal modifica el valor esperado de un juego  $(a, b)$ , donde al primer jugador le faltan  $a$  partidas y al segundo  $b$  partidas:  $\frac{E[(a,b)]}{2K}$ , es decir, divide el valor de lo que espera ganar el primer jugador por el total de lo que han apostado entre ambos jugadores.

En lenguaje actual, esta proporción es la probabilidad de que el primer jugador gane el juego, es decir, consiga los  $a$  puntos que le faltan antes de que el otro jugador logre los  $b$  que le faltan a él. Si  $P[(a, b)]$  es la probabilidad de que gane el primer jugador, y si  $P[(a - 1, b)]$  y  $P[(a, b - 1)]$  son las probabilidades que tiene el primer jugador de ganar en los juegos  $(a - 1, b)$  y  $(a, b - 1)$ , respectivamente, entonces debe verificarse la siguiente relación:

$$P[(a, b)] = 0,5 \cdot P[(a - 1, b)] + 0,5 \cdot P[(a, b - 1)] = \frac{P[(a - 1, b)] + P[(a, b - 1)]}{2}$$

Es a partir de esta relación, donde Pascal decide aplicar el Triángulo Aritmético para obtener la expresión  $P[(a, b)]$ , para ello crea un problema que posteriormente se convierte en su primera proposición y de donde se obtiene una regla general. El problema se resume en que si el juego es  $(a, b)$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ , es decir, al primer jugador le faltan  $a$  partidas y al otro  $b$  partidas, Pascal propone la siguiente solución:

1. Tomar la base  $n = a + b - 1$  del triángulo aritmético de Pascal.

2. Sumar los valores de las  $b$  primeras celdas situadas en la base  $n = a + b - 1$ .

Es decir, calcular:

a.  $B(n, b - 1) = \sum_{r=0}^{b-1} f(r, n - r + 1)$

b. siendo  $f(\cdot, \cdot)$  el valor de la correspondiente celda del triángulo aritmético.

3. La probabilidad de que gane el primer jugador es

a.  $P[(a, b)] = \frac{B(n, b-1)}{2^n}$

b. donde el denominador  $2^n$  es el valor de la suma de todas las celdas situadas en la base  $n = a + b - 1$  (Consecuencia octava del Triángulo).

Para demostrar la igualdad anterior, donde se calcula la probabilidad de ganar el primer jugador en cada situación, Pascal utiliza el Método de Inducción Completa ya que el número de posibilidades es infinito. Para ello considera los dos siguientes lemas<sup>10</sup>:

*Lema primero.*- Hemos de probar que la igualdad es cierta para  $n = 1$  (Pascal comienza en  $n = 2$  por enumerar sus filas desde la unidad).

*Lema segundo.*- Suponiendo que la igualdad es cierta para todos los juegos  $(a', b')$  con  $a' + b' - 1 = n - 1$ , hemos de probar que es cierta para todos los juegos  $(a, b)$  con  $a + b - 1 = n$ .

De esta manera, según el primer lema tenemos:

$$P[(a, b)] = \frac{P[(a - 1, b)] + P[(a, b - 1)]}{2}$$

donde los juegos  $(a - 1, b)$  y  $(a, b - 1)$  están en la base  $n - 1$ , por lo que las probabilidades de ganar el primer jugador en estos juegos se conocen por hipótesis. Entonces la probabilidad de que el primer jugador gane el juego  $(a, b)$  es:

---

<sup>10</sup> La demostración de cada uno de los lemas se puede encontrar en Basulto et al. (2004), capítulo 9: Una formula casi mágica en la resolución de Pascal del Problema de los Puntos.

Figura 13: Probabilidad de que el primer jugador gane el juego  $(a,b)$

$$P[(a, b)] = \left( \frac{B(n-1, b-1)}{2^{n-1}} + \frac{B(n-1, b-2)}{2^{n-1}} \right) / 2 = \frac{B(n-1, b-1) + B(n-1, b-2)}{2^n}$$

Ahora bien, la consecuencia decima del Tratado demuestra que  $B(n-1, b-1) + B(n-1, b-2) = B(n, b-1)$ . Por lo tanto la probabilidad buscada es  $P[(a, b)] = \frac{B(n, b-1)}{2^n}$ , que en pocas palabras, es lo que se quería demostrar.

Para proporcionar la casi “mágica” proporción entre producto de impares y producto de pares para valorar la primera partida la cual se comentaba al principio, Pascal decide simplificar la formula anterior considerando juegos del tipo  $(a,b)$  con  $b > a$ , es decir juegos donde al primer jugador le hacen falta menos partidos que al segundo.

Si  $b > a$ , está claro que si lo apostado es  $2K$  (pues cada uno apuesta  $K$ ) entonces lo que espera ganar el primer jugador será de la forma  $E[(a, b)] = K + \beta \cdot K$ , es decir, lo apostado por él,  $K$ , más una parte de lo apostado por el otro jugador  $\beta K$ , siendo  $\beta$  la proporción de lo apostado por el segundo jugador que se llevaría el primero.

Aquí Pascal presupone que si  $b > a$ , entonces  $P[(a, b)] > 0,5$  para que dicho valor esperado sea superior a  $K$ . De todas formas, a partir del Triángulo se puede demostrar que ese resultado es cierto.

Dado que  $E[(a, b)] = 2K \cdot P[(a, b)] = K + \beta \cdot K$  y como  $K > 0$ , simplificando se obtiene  $2P[(a, b)] = 1 + \beta$ . Por tanto,  $\beta = 2P[(a, b)] - 1$ , igualdad que se escribe en la forma:

$$B[(a, b)] = 2P[(a, b)] - 1, \text{ con } b > a,$$

Entonces  $\beta[(a, b)]$  mide, para cualquier juego  $(a,b)$  con  $b > a$ , la proporción que se lleva el primer jugador de lo apostado por el segundo.

Por último, Pascal ordena todos los juegos del tipo  $(0,b)$ ,  $(1,b)$ ,  $(2,b)$ , ...  $(b-2,b)$  y  $(b-1,b)$  para considerar la siguiente función diferencia:

$$W[(r,b)] = \beta[(b-r,b)] - \beta[(b-r+1,b)],$$

para  $r = 1, 2, \dots, b-1, b$  y donde  $\beta[(0,b)] = 1$ , ya que si al primer jugador no le falta ninguna partida, entonces debe llevarse todo lo apostado, y, en particular, todo lo apostado por el segundo jugador.

Esta función,  $W$ , valora lo que le aporta cada una de las partidas ganadas por el primero, en forma de proporción sobre lo apostado por el segundo jugador. Por ejemplo,  $W[(2,b)]$  es la diferencia entre la proporción que el primer jugador se lleva del otro al haber alcanzado el juego  $(b-2,b)$ , y esta misma cuando llegó al juego  $(b-1,b)$ . En este caso, usando el lenguaje de Pascal, se dice que mide el valor de la segunda partida. Igualmente,  $W[(1,b)]$  es el valor de la primera partida, es decir, compara el juego  $(b-1,b)$  con el juego  $(b,b)$ . Por último,  $W(b,b)$  valora lo aportado por la última partida, es decir, la proporción que obtendría el primer jugador de la apuesta del segundo por pasar del juego  $(1,b)$  al juego  $(0,b)$ .

Conforme a esto, Basulto et al. (2004) encuentran un lema que sirve también para la solución del problema y el cual uso Pascal con el mismo fin. Tal lema<sup>11</sup> verifica que  $W[(r,b)] = \frac{f(b-r,b)}{2^{2b-r-1}}$ , para  $r=1, 2, \dots, b-1, b$ .

A continuación, Pascal resuelve una serie de casos particulares (valoraciones de diferentes partidas) del cual toma interés el que presenta como Problema III:

*Dados dos jugadores que juegan cada uno una misma suma en cierto número dado de partidas, encontrar en el Triángulo Aritmético el valor de la primera partida sobre la apuesta del perdedor.*

---

<sup>11</sup> Para ver la demostración del lema, dirigirse a Basulto et al. (2004), capítulo 9, P. 168

Por el lema anterior, el valor de la primera partida es tomada, como:

$$W[(1, b)] = \frac{f(b-1, b)}{2^{2b-2}}$$

La cual es la fracción entre el valor de la celda del Triángulo  $(b-1, b)$  y la suma de todas las celdas de la base  $n = 2b - 2$ . Como numerador toma el valor de la celda impar de celdas, y como denominador, la suma de los valores de todas las celdas de dicha base. Pascal obtiene el resultado en esta parte del tratado usando el ejemplo  $(3, 4)$ , un juego donde al primer jugador le faltan tres partidas y al otro cuatro. El valor que él encuentra es  $\frac{20}{64}$ , valor que obtiene toman  $r=1$  y  $b=4$ , obteniendo así  $\frac{f(3,4)}{64} = \frac{20}{64}$ .

Se le recuerda al lector que se había obtenido, como un resultado de la Consecuencia última del Tratado, el valor de  $f(b-1, b)$ , dado por

$$f(b-1, b) = 2^{2(b-1)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots [2(b-1) - 1]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots [2(b-1)]}$$

Donde el numerador de la fracción es el producto de los  $b-1$  primeros números impares (siendo  $b-1$  el número de partidas que le falta ganar al primer jugador, el cual ya ha ganado una partida, mientras que el segundo no ha ganado ninguna) y el denominador es el producto de los  $b-1$  primeros números pares. A partir de esta última expresión se obtiene:

$$W[(1, b)] = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots [2(b-1) - 1]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots [2(b-1)]}$$

La cual proporciona la casi “mágica” proporción entre producto de impares y producto de pares para valorar la primera partida y con la cuál Pascal da por resuelto el Problema de los Puntos mediante este método.

### 3. Capítulo III: Historietas Combinatorias

#### 3. 1 Historietas Combinatorias

Una gran parte de los estudiantes asocian la combinatoria con experiencias negativas, hallando permutaciones y combinaciones, y al final confundiéndolas entre sí; la otra parte de los estudiantes, se podría decir, que no conocen la combinatoria. Pero, ¿Qué es la combinatoria? Sriraman & English (2004) dan la respuesta:

Combinatorics can be defined as the art of counting, or more specifically, as “an area of mathematics in which we study families of sets (usually finite) with certain characteristic arrangements of their elements or subsets, and ask what combinations are posible and how many there are ”. (p. 182)

Los problemas combinatorios han encontrado un lugar bastante importante en la historia de las matemáticas. Algunos ejemplos históricos que trabajan la combinatoria son los cuadrados mágicos, los problemas de Ramsey, the walking problem, el problema de los puntos, entre otros.

Las Historietas Combinatorias, se les atribuyen a Marta Sved y Doris Schattschneider, debido a que son maestras insignes de la matemática recreativa. Los profesores Daniel Arbeláez y Diego Díaz de la Universidad del Valle, han retomado algunas historietas creadas por estas dos maestras, las cuales han sido utilizadas en el curso de Matemática Recreativa y son sumamente importantes para el desarrollo de este capítulo. Además, se crea una historieta utilizando el Triángulo Aritmético de Pascal.

Las Historietas Combinatorias han sido creadas en un contexto educativo, para que no sean ajenas a los estudiantes y se puedan sentir identificados, además son una alternativa útil y

didáctica para introducirlas dentro del aula de clase, de tal forma que se pueda captar toda la atención del estudiantado.

A continuación se le dará una breve interpretación a cada una de la moraleja de las historietas:

### **3.1.1 Historieta 1: Saludos.**

*En el curso existe un alumno que siempre llega tarde. Ya todos los estudiantes se han saludado entre si cuando Juan llega. Al llegar Juan, le toca pasar la mano a cada uno de sus compañeros.*

Moraleja 1:  $Saludos(n) = Saludos(n - 1) + (n - 1);$

$Saludos(2) = 1$

Interpretación: Esta primera historieta es una de las más sencillas. Ella hace alusión al saludo realizado por una persona en particular. Pero el número de saludos distintos no sería ese valor indicado. Se toma como  $n$  el número de personas a las que se tiene que saludar, luego, los primeros saludos  $(n-1)$  equivale a los saludos que todos los estudiantes han hecho entre si cuando llega Juan; se le suma otro  $(n-1)$  porque son los saludos que realiza Juan a sus compañeros cuando él llega.

### **3.1.2 Historieta 2: Jugando Fútbol**

*Juan es un excelente jugador de fútbol. Reconocido por todo el grupo. La maestra quiere armar un torneo en el cual los  $n$  estudiantes tengan la oportunidad de conocerse y de jugar entre sí en equipos de  $k$  jugadores. Todos van a querer jugar con Juan. La maestra piensa: la primera parte de los torneos los jugaremos sin Juan y al final, cuando los jugadores se hayan entrenado lo suficiente, meteremos a Juan.*

Moraleja: 
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Interpretación: Por definición de combinatoria, tenemos que  $\binom{n}{k}$  representa el número de estudiantes  $n$  combinado con la cantidad de equipos de  $k$  jugadores. La primera parte equivale a que los demás estudiantes jueguen sin Juan en equipos de  $k$  jugadores:  $\binom{n-1}{k}$ , al cual se le suma una segunda parte que es donde Juan juega  $\binom{n-1}{k-1}$ .

### 3.1.3 Historieta 3: Baile de Fin de Año Lectivo

*La profesora a cargo de un curso de  $n$  niños y  $m$  niñas quiere al final del año lectivo organizar un baile. Para ello piensa llevarlo a cabo en tres salones: el salón de los niños, el salón de las niñas y el salón del baile propiamente dicho con una orquesta. La profesora piensa que no es bueno que los niños y niñas estén todo el tiempo juntos, por eso les ha separado. En los recesos de la orquesta los niños tienen la oportunidad de departir entre sí y las niñas departen entre sí, eso sí separadamente los niños de las niñas. Sólo cuando la orquesta suena los niños salen a buscar sus parejas, y la fiesta dura tanto que todos los niños bailan con todas las niñas.*

Moraleja: 
$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + (n * m)$$

Interpretación: Entiéndase  $\binom{n+m}{2}$  como el conjunto de niños más niñas; luego al conjunto de solo niños  $n$  se le atribuye  $\binom{n}{2}$  debido a que solo los niños departen entre sí, y al conjunto de las niñas  $m$  se le atribuye  $\binom{m}{2}$  por las mismas razones. Cuando suena la orquesta y los niños bailan con las niñas, se le ha representado por medio de  $(n * m)$ .

### 3.1.4 Historieta 4: Presentación Solemne.

*Para el día de la presentación solemne de fin de año, la profesora piensa en la forma en que debería alinear a los niños y las niñas; piensa que si los separa entre niños y niñas, primero pone los niños y luego las niñas, o primero las niñas y luego los niños tendría  $2n!m!$  y luego piensa en presentarlos sin separarlos. Sería excesivo, ni pensarlo!*

*Moraleja<sup>12</sup>:  $(n + m)! > n!m!$*

Interpretación: La solución de esta historieta va ligada a saber el significado que toma el signo mayor que  $>$ , y la definición clara de la operación del factorial. Pensemos, si denominamos a las niñas por  $n$  y a los niños por  $m$ , los sumamos  $n + m$  y le realizamos la operación de factorial, pues debido a que la maestra quiere saber de cuantas maneras los puede alinear de forma en que no los separe. Esta operación resulta muy excesiva para su orden, por ende una manera de organizar a los niños es por separado,  $n!m!$

### 3.1.5 Historieta 5: Canchas de Tenis

*En la escuela de Juan también se practica el tenis. Es más, la escuela tiene  $n$  canchas de tenis. En la escuela hay  $2n$  niños y niñas. Se quiere armar un gran torneo. ¿De cuántas maneras se podría armar?*

*La maestra piensa: para la primera cancha de los  $2n$  niños puedo seleccionar dos niños, para la segunda cancha puedo seleccionar de los  $(2n-2)$  niños restantes otros dos y así sucesivamente. Para Juan la cosa es ligeramente distinta: se imagina colocando todos los niños en una larga fila, que podría armar de  $(2n)!$  A los dos primeros niños de la fila les asigna la*

---

<sup>12</sup> Se le recomienda el lector inventarse una historieta cuya moraleja sea  $(kn)! > (k!)^n$

cancha 1, a los dos siguientes la cancha 2 y así sucesivamente. Claro, anota Juan, que los jugadores pueden intercambiar el lado de la cancha.

$$\text{Moraleja: } \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{4}{2} \binom{2}{2} = (2n)!/2^n$$

Interpretación: Como se menciona en el enunciado,  $2n$  representa la cantidad de niños y niñas que tiene la escuela, motivo por el cual la primera parte es  $\binom{2n}{2}$ , total de estudiantes combinado con los 2 que se escogen para jugar en la cancha de tenis. Ahora,  $\binom{2n-2}{2}$  es el total de estudiantes menos los 2 que ya están jugando en la primera cancha. Este procedimiento sigue hasta que se logren ubicar todos los estudiantes para el torneo.

Por ende, se llega a una formula general  $(2n)!/2^n$ , en donde  $(2n)!$  hace referencia a la cantidad de estudiantes con los que se pueden armar el torneo; esa cantidad de estudiantes es dividida por  $2^n$  ya que  $n$  es la cantidad de canchas que hay en la escuela y el 2 representa a la cantidad de estudiantes por cancha.

### 3.1.6 Historieta 6: Prueba de Conocimiento

*En la escuela que tiene  $(n+1)$  cursos, grado 1, grado 2, ..., grado  $(n+1)$ . La profesora, que tiene esa mente tan organizativa, pretende realizar la prueba Z. Es una prueba de conocimientos, uno contra dos, que consiste en colocar a un estudiante en una especie de podio, y otros dos estudiantes en el piso en la casilla 1 y en la casilla 2. El estudiante del podio siempre debe estar en un grado más alto que los grados de los otros dos estudiantes. La profesora piensa hacer todos los experimentos posibles. Ella cree, en primer lugar, que en el podio se puede colocar desde el grado  $(n+1)$  hasta el segundo grado. Luego piensa el asunto de otra*

manera: Se obtiene una selección de tres grados y se coloca el de mayor grado en el podio y luego se organizan los dos de menor grado en las dos casillas. Saca luego una selección de dos grados, coloca un estudiante del mayor grado en el podio y coloca dos estudiantes del menor grado en las casillas 1 y 2.

Moraleja:  $\sum_{i=1}^n i^2 = \binom{n+1}{3} 2! + \binom{n+1}{2}$

Interpretación: En la sumatoria esta  $i^2$  el cual es igual a  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$ , los cuales representan a los dos estudiantes que ocupan las casillas 1 y 2, el estudiante del podio queda de manera fija por ser el estudiante de mayor grado.

Ahora,  $\binom{n+1}{3}$  representa a la cantidad de estudiantes  $(n+1)$  combinado los 3 estudiantes que la profesora necesita para realizar su prueba Z. Este  $\binom{n+1}{3}$  se le multiplica  $2!$ , ya que son los dos estudiantes que quedan para ocupar las casillas 1 y 2, y por lo cual su posición varía entre las dos casillas. Por esa misma razón, se le debe atribuir un  $\binom{n+1}{2}$ , pues de todos los estudiantes se deben extraer dos al azar para que completen la cantidad de estudiantes que la profesora necesita.

### 3.1.7 Historieta 7: Juan como Futbolista y Matemático

*Juan ha jugado muchos partidos de fútbol en su escuela. Tiene una memoria fantástica. Recuerda con precisión y gran detalle todos los partidos que ha jugado o visto jugar; ha llegado a una observación que tiene dudando a su maestra acerca de su futuro. Cree que podría ser tanto futbolista como matemático. Juan ha dicho: Cuando ganamos un partido, a veces tenemos el marcador favorable y en varias ocasiones tenemos en algún momento el marcador desfavorable. Siempre quisiéramos tener el marcador favorable, por supuesto. “...pero hay una*

*cuestión muy curiosa en esos marcadores, en los partidos que hemos ganado, pero que no siempre mantuvimos el marcador a nuestro favor, siempre hay un juego equivalente, como si el otro equipo hubiese iniciado el marcador y de allí en adelante hasta que empatamos, es como si un gol nuestro pudiese haberse atribuido al oponente y los goles del oponente pudiesen haber sido goles nuestros...”. Veamos un ejemplo: Muchas veces hemos ganado 3-2. Hay 10 maneras de llegar a esa final, entre equipo A ganador y un equipo B:*

*AAABB, AABAB, ABAAB, BAAAB, AABBA, ABABA, BAABA,*

*\*        \*        1        1        2        3        3*

*ABBAA, BABAA, BBAAA*

*4        4        2*

*\* A siempre lleva la delantera*

*Moraleja: El número de partidos donde A es ganador es igual al número de partidos donde A abre el marcador y siempre lleva la delantera más el doble del número en que B abre el marcador.*

Interpretación: la solución de este problema no es tan inmediata, tiene que ver con el problema del escrutinio, conteo de votos.

Para saber todas las posibles combinaciones para llegar a la final del partido se hace la operación  $\binom{3}{2}$ , 3 goles del equipo A combinado 2 goles del equipo B, para un total de 10 combinaciones. En esta Historieta es necesario realizar todas las posibles combinaciones, pues se quiere saber las distintas maneras de llegar a esa final, saber cómo pueden variar los marcadores.

### 3.1.8 Historieta 8: Jugando con el Triángulo

En un curso de matemáticas, la profesora decide organizar a los estudiantes en dos grupos. A los estudiantes del primer grupo les asigna camisas de color azul, les dice que ellos representan a los números naturales positivos y que ella les asigna sus números. En consecuencia, a los estudiantes del segundo grupo les asigna camisas de color rojo, les dice que ellos representan los números negativos.

La profesora propone que deben armar un triángulo que comience con un solo estudiante arriba, luego siguen dos estudiantes, luego 3 y así sucesivamente hasta formar el triángulo. La condición es que deben quedar intercalados los dos grupos, es decir, si el primer estudiante es del grupo de los positivos y además tiene asignado el número 1, en la siguiente fila debe comenzar con un estudiante del equipo de los números negativos el cual tiene asignado el número 1 y a su lado uno del grupo de los positivos al cual se le ha asignado el mismo número. Los colores deben quedar intercalados: azul, rojo-azul, azul-rojo-azul.

Importante: la suma de cada fila, a partir de la segunda, debe ser igual a cero

Moraleja:

Negativos  
Positivos

|   |    |    |    |    |     |       |
|---|----|----|----|----|-----|-------|
|   |    |    | 1  |    |     |       |
|   |    | -1 |    | 1  | = 0 |       |
|   | 1  |    | -2 |    | 1   | = 0   |
|   | -1 | 3  |    | -3 |     | 1 = 0 |
| 1 |    | -4 | 6  |    | -4  | 1 = 0 |

### Interpretación:

Para la solución de esta historieta, se hace uso del triángulo aritmético de Pascal, de su forma y numeración, realizándole un pequeño ajuste, que es asignándole el signo  $(-)$  de número negativo para que en cada fila la suma sea igual a cero. Con esta historieta se pretende emplear el triángulo como una forma de representar las operaciones con números negativos. De igual forma, se puede para utilizar la multiplicación.

### **3.2 Pautas para la enseñanza de Historietas Combinatorias en el Aula de Clase.**

En esta parte del capítulo, se crean algunas pautas para enseñar las Historietas Combinatorias dentro del aula de clase. No son una guía estructurada, pero se identifican conceptos claves para poderlas incluir.

Tanto el docente como el estudiante, deben conocer y manejar bien las diferentes técnicas de conteo, pues son necesarias para poder incluir las Historietas Combinatorias, además se debe tener conocimiento previo de la combinatoria y de sus propiedades. El estudiante debe manejar el principio de multiplicación y el principio de suma, ya que son fundamentales en el análisis combinatorio.

Para aclarar lo que significa el principio de multiplicación, se recurre a la proposición que explica la utilización de este principio:

Si una situación puede ocurrir de  $m$  maneras y otra de  $k$  maneras, entonces ambas situaciones pueden ocurrir de  $m * k$  maneras. (Wilhelmi, 2004, p.14)

El mismo autor define el principio de suma de la siguiente manera:

Si una situación puede ocurrir de  $m$  maneras diferentes y otra de  $k$  maneras diferentes, incompatibles las unas con las otras, entonces existen  $m + k$  maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda, mas no ambas. (Wilhelmi, 2004, p.15)

Las anteriores proposiciones, en su trasfondo aluden a que no en todos los casos se puede utilizar el conteo manual, sacando todas *las posibles combinaciones de o formas de*, es un proceso que en algunos casos se torna muy tedioso. Surgen algunos casos en los que se necesitan métodos de cálculo explícitos para encontrar todas las configuraciones posibles, pero que con certeza sean las configuraciones exactas y es ahí donde se utilizan las diferentes técnicas de conteo, las cuales en su término global, son conocidas como Combinatoria.

Por otra parte, en el artículo de Kapur, J (1970), se encuentran algunas razones que hacen que el análisis combinatorio sea importante en la Educación Matemática, las cuales serán aplicadas a las historietas combinatorias, de tal forma que se pueda ver la importancia y estrategia que tienen para ser integradas en el aula de clase.

1. Las historietas no dependen de un cálculo, por ende se pueden apropiar para cualquier grado de escolaridad, y si se desea, se pueden ilustrar y proponerle a los estudiantes que creen sus propias historietas con sus debidas ilustraciones.
2. Pueden ser utilizadas para reforzarle a los estudiantes las técnicas de conteo, el uso de conjuntos, las conjeturas, etc.
3. Se pueden adecuar para diferentes áreas del conocimiento, tales como la física, la química, la programación, teoría de números, topología, la misma matemática recreativa. Son susceptibles a cambios y adaptaciones, desde lo más simple hasta lo más complejo.
4. La mente e imaginación de los estudiantes pueden ser usadas para la creación de nuevas Historietas y para deducir su respectiva moraleja.

5. Estas historietas pueden ayudar al desarrollo de la actitud de la mente combinatoria, pues examina todas las posibilidades, las enumera y descubre la mejor posibilidad, y por tanto, conduce a un pensamiento lúdico.

La contextualización de las historietas, ayuda a que los estudiantes se sientan identificados con cada una de las situaciones, tornando un poco más fácil la utilización de los argumentos, pues los identifican en el interior de cada Historieta.

## Conclusiones

A lo largo de estos tres capítulos, se ha podido evidenciar una problemática que yace en el seno de la educación matemática, la cual es la poca inclusión que ha tenido la combinatoria y en especial los argumentos combinatorios en el aula de clase.

En primer lugar, se realiza un recorrido histórico con el fin de mostrarle al lector, cómo iniciaron las combinaciones, el cual gira en torno al problema de los puntos. Además este problema evoca aspectos importantes a considerar para poder utilizar las diferentes técnicas o formas de resolver un problema que es meramente de conteo; resaltar como este problema atrae la atención de varios personajes que intentan darle solución tomando a consideración aspectos y conceptos importantes de la matemática ayuda a que como futuros docentes, tengamos bases para construir conocimientos sólidos en nuestros estudiantes.

Después de haber conocido como surgieron las combinaciones, las cuales son unas de las técnicas de conteo para poder comprender problemas que se resuelven con estas diferentes técnicas, se llega a la columna vertebral del trabajo, la cual era encontrar a través de un estudio histórico-epistemológico el uso de los argumentos combinatorios para darle solución a problemas de conteo y una forma de ello es mediante las Historietas Combinatorias, las cuales son autoría del profesor Daniel Arbeláez guiado por dos maestras insignes de la matemática recreativa, las cuales son Marta Sved y Doris Schattschneider.

Contextualizar las Historietas con situaciones reales que viven los estudiantes a diario en sus instituciones, ayuda a tener un interés mayor hacia la combinatoria y los motiva a crear sus propias Historietas, pues saben, que de ellas puede surgir un argumento combinatorio. Además, esto demuestra que la combinatoria no solo puede ser vista desde lo algorítmico, sino que también puede ser vista con el uso alternativo de las Historietas Combinatorias, con las cuales los

estudiantes pueden generar y desarrollar la competencia de resolución de problemas al manejar diferentes tipos de argumentos para resolver problemas de conteo.

Se pretende profundizar en los algoritmos combinatorios en otros ámbitos a futuro, es importante resaltar que estas Historietas pueden romper el paradigma de la inclusión de la combinatoria dentro del aula de clase. Pero para poder romper este paradigma, los docentes debemos enseñar la combinatoria, no solamente de forma algorítmica, sino dejando que el estudiante conceptualice lo que está aprendiendo, utilice este objeto matemático dentro de su vida diaria, y como se ha mencionado anteriormente, el análisis combinatorio está presente en cada etapa de la vida diaria del estudiante y del mundo en general.

Sin duda alguna, existen innumerables instituciones en donde la combinatoria está ausente, (aunque no hayan fuentes que lo comprueben) donde los estudiantes salen de la educación básica sin conocer y distinguir una combinación de una permutación, sería interesante que alguien interesado en enseñar las distintas técnicas de conteo pudiera incluir estas Historietas como parte de su proceso de enseñanza.

La realización de este trabajo, hizo parte de dos encuentros importantes:

1. El X encuentro departamental de semilleros de investigación, tuvo lugar en Santander de Quilichao los días 26 y 27 de mayo de 2016, en el cual se presentó la ponencia “Análisis histórico – epistemológico de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo”.
2. El Segundo Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, tuvo lugar en la ciudad de Bogotá los días 10, 11 y 12 de octubre de 2016, en el cual se presentó la ponencia “Uso alternativo de los argumentos combinatorios mediante historietas”.

En ambas ponencias, el trabajo tuvo gran acogida por el colectivo docente, afirmando interés en que las historietas combinatorias puedan ser replicadas en el aula de clase, afirmaron que es otra alternativa didáctica de incluir la combinatoria dentro del aula de clase. Es un gran insumo que este trabajo siguiera trascendiendo para apoyar la Educación Matemática.

## Referencias Bibliográficas

- Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*. VOL. 8, N° 1, 30-46.
- Arbeláez, D. (2013). *Notas de clase del seminario de historia de la probabilidad*. Cali: Universidad del Valle.
- Arbeláez, D.; Diego, D. (2013). *Notas del clase del curso Matemáticas Recreativas*. Universidad del Valle
- Aristizábal, D. (2012). *Propuesta Metodológica para el Acercamiento del Análisis Combinatorio y Probabilidades a Situaciones Cotidianas*. Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Basulto, Camuñez, Ortega & Perez. (2004). Una fórmula casi mágica en la resolución de Pascal del problema de los puntos. Universidad de Sevilla.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J., & Navarro - Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio*. España: Síntesis S.A.
- Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*.
- Edwards, A. (1987). *Pascal's Arithmetical Triangle*. London: Charles Griffin.
- Espinosa, R. (2010). *Matemáticas Discretas*. México: Alfaomega.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa - W Wiley.
- García, J. (2000). Historia de un Problema: El Reparto de la Apuesta. *SUMA*, 33, 25-36.
- Godino, J., Batanero, C., & Cañizares, M. (1996). *Teoría matemática elemental de la probabilidad*. En J. Godino, C. Batanero & M. Cañizas, *Azar y probabilidad* (Pág.144-152). Madrid: Síntesis S.A.
- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia*. Gedisa.
- Hald, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*. New York: Wiley.
- Kapur, J. (1970). Combinatorial Analysis and School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 3.1, 111–127.

- Leibniz, G. (1666). *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Berlín: Sämtliche Schriften und Briefe.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá.
- Osorio, M., Suárez, A., & Uribe, C. (2011). Revisión de aspectos asociados a la Problemática del aprendizaje de la probabilidad. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*, 364-366.
- Parra, D. M. (2015). *Análisis histórico - epistemológico de la iniciación de la Combinatoria. Caso: Combinaciones*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La g n se de l'id e d'hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaire de France.
- Ribnikov, K. (1988). *Análisis combinatorio*. Moscú: Mir.
- Rosen, K. (2004). Recuento. En *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* (págs. 279-324). Aravaca, Madrid: Mc Graw Hill.
- Ross, S. (2010). *A Firts Course in Probability* . New Jersey: Pearson .
- Schattschneider, D.. (1991). Counting It Twice. *The College Mathematics Journal*, 22(3), 203–211. <http://doi.org/10.2307/2686642>
- Slekis, G. (s.f). Blog: Concierta ciencia: el conocimiento es más que un conjunto de datos. Link: <https://conciertaciencia.wordpress.com/2014/02/24/blaise-pascal-pierre-de-fermat-y-el-caballero-de-mere-jugadores/>. Recuperado el: 21 de abril de 2016.
- Sriraman, B., & English, L. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into Practice. *The Mathematics Teacher*, 98(3), 182–191.
- Sved, M. (1983). *Counting and recounting*. *The Mathematical Intelligencer*; Vol. 5 #4; P. 21-26
- Vasco, C. (2002). *Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Wilhelmi, M. (2004). Recuento sistemático. en *Combinatoria y Probabilidad*. Universidad de Granada. España
- Zapata, L., Quintero, S., & Morales, S. (2010). *La Enseñanza de la Combinatoria Orientada Bajo la Teoria de Situaciones Didácticas*. Memoria 11  Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.