

La heterodoxia de las lógicas de da Costa

Guillermo Ortiz Rico
Universidad del Valle

Recibido Nov. 27, 2007 Aceptado Ene. 28, 2008

Abstract

Based on the work of Sylvan [1990] and Urbas [1996] we prove the heterodoxy of da Costa's logics. We show that these systems do not satisfy the replacement theorem. Moreover, we show that there is no extension weaker than the classical logic and stronger than these da Costa's logics which satisfies the replacement theorem.

Keywords: paraconsistent, heterodoxy, not self-extensional, replacement theorem.

MSC(2000): Primary: 03B53.

Resumen

A partir de Sylvan [1990] y Urbas [1996] demostramos la heterodoxia de las lógicas de da Costa. Probamos que estas lógicas no satisfacen el teorema de sustitución. Más aún, probamos que no existen extensiones más débiles que la lógica clásica y más fuerte que las lógicas de da Costa las cuales satisfagan el teorema de sustitución.

Palabras y frases claves: paraconsistencia, heterodoxia, no auto-extensional, teorema de reemplazo.

Introducción

Convencidos de que la vida académica es un largo camino en el cual se hace indispensable apropiarse cada vez más de mejores instrumentos conceptuales y estéticos, acompañamos cualquier acercamiento a la paraconsistencia entendida en un sentido muy amplio, como todo aquello que tiene que ver con las contradicciones. En particular, cuando se trata de propuestas con lógicas paraconsistentes, es decir, lógicas que admiten ciertas contradicciones sin trivializarse. Este tipo de lógicas ha cobrado gran interés por las múltiples aplicaciones en representación de conocimiento e inteligencia artificial. Sin embargo, consideramos pertinente hacer un llamado a la prudencia cuando hacemos elección de una de estas lógicas sobre todo en relación con ciertas aplicaciones. Dentro de la gran variedad de lógicas paraconsistentes tenemos unas muy cercanas a la lógica clásica, lo cual es bienvenido en modelación y aplicación de representación de conocimiento, pero hay otras como las de da Costa ([7], [8], [9]) que son muy distantes del comportamiento clásico, es decir, gozan de un alto grado de heterodoxia.

En particular, algunas aplicaciones de inteligencia artificial requieren lógicas no clásicas que permitan obtener formas normales¹ y resultados cercanos al teo-

¹La obtención de formas normales se basa fundamentalmente en una serie de equivalencias lógicas y la certeza que al reemplazar fórmulas equivalentes en otras fórmulas se obtienen fórmulas equivalentes.

rema de Herbrand que permitan la implementación de métodos como el conocido *Principio de Resolución de Robinson*. Estos requisitos se tienen en cierto tipo de las denominadas *las lógicas anotadas* ([20], [16]) que pertenecen también a la gama de las paraconsistentes.

En nuestra opinión, para efectos de aplicaciones generales cercanas a las antes mencionadas, no consideramos apropiada la elección en primera instancia de las lógicas de da Costa. Esperamos que al final del presente artículo los lectores acompañen nuestra postura, y así sustentar teóricamente nuestra opinión. Un caso particular que nos llama la atención es la propuesta de definición de máquinas de Turing paraconsistentes ([1]), publicada en un número anterior de esta revista, que usa justamente como lógica subyacente la de da Costa.

Iniciaremos con un breve recorrido por los orígenes de la paraconsistencia, para luego pasar a las lógicas de da Costa con algún detalle y mostrar explícitamente un par de resultados teóricos que sustentan la heterodoxia de las lógicas de da Costa. El primero de estos resultados es nada menos que: las lógicas de da Costa no cumplen la propiedad de sustitución de fórmulas demostradas equivalentes. Es decir, en dichas lógicas no se cumple *el teorema de sustitución*: si A y $C \leftrightarrow B$ son teoremas y B es una subfórmula de A entonces al sustituir B por C en algunas o todas las ocurrencias de B en A se obtiene un teorema. El segundo, que no es posible extender dichas lógicas de tal forma que la propiedad de sustitución se logre sin trivializarse, es decir, no existe una extensión de las lógicas de da Costa que satisfaga la propiedad de sustitución y sea más débil que la lógica clásica.

Es usual en la literatura llamar *auto-extensional* ([4]) a una lógica en la que se cumpla la propiedad de sustitución, entre éstas tenemos la lógica clásica, la lógica intuicionista positiva, y las lógicas modales normales como **S4**. Dentro de las lógicas que no son auto-extensionales tenemos a **LP**, lógicas de pruebas, para las cuales recientemente Fitting en [15] ha logrado una versión débil de teorema de reemplazo. A **LP** la acompañan las lógicas de da Costa, dentro de las cuales no se ha logrado mostrar alguna versión débil de teorema de reemplazo. Más aún, éstas lógicas no son *simples*, es decir, en ellas no se puede definir una relación de congruencia no trivial (Mortensen [19]) y por tanto no son algebrizables ([17]), y como mostraremos aquí esta característica no es solucionable por extensiones sin trivializarse, aunque se pueden hacer extensiones de ellas que tienen relaciones de congruencias no triviales ([10]). Es muy pertinente mencionar que existen ejemplos de lógicas paraconsistentes auto-extensionales, entre otras la lógicas **P1** ([22]) y **LDJ** ([25]).

Aquí usaremos algunos resultados (los cuales son ampliamente conocidos y han sido logrados por los discípulos de da Costa), que nosotros tomamos de Sylvan [23] y Urbas [24], para dar una prueba abreviada de la heterodoxia de las lógicas de da Costa, mostrando que no satisfacen la propiedad de sustitución y que no admiten como extensiones lógicas auto-extensionales no triviales más que la lógica clásica.

1 Los antecedentes de las lógicas paraconsistentes

El inicio de la paraconsistencia se ubica en los trabajos de Lukasiewicz (1910), quien afirma que la exigencia de consistencia, *el principio de no contradicción*, no es tan fundamental; y en Vasiliev (1910-1913) quien propone derogar *las leyes de contradicción y el tercero excluido*. Después, en 1948, Jaskowski propone el primer cálculo proposicional discursivo. Sin embargo en 1953 un joven matemático argentino, Florencio González Asenjo, ahora Profesor Emérito de la Universidad de Pittsburgh, presentó en la Universidad de la Plata, en Argentina, una conferencia titulada *La idea de un cálculo de antinomias*. Asenjo desarrolló una teoría sobre la inconsistencia en esa década, pero sus primeras publicaciones aparecen entre 1965 y 1966 ([2]). A partir de 1958, de forma independiente, Newton da Costa, cuyo nombre es hoy sinónimo de paraconsistencia, presenta una serie de Cálculos Proposicionales Paraconsistentes, Cálculos de Predicados Paraconsistentes y Teorías de Conjuntos Paraconsistentes.

1.1 Paraconsistencia

La característica fundamental de la paraconsistencia es proveer teorías inconsistentes no triviales. En la búsqueda de este objetivo es necesario desarrollar lógicas subyacentes que sean tolerantes a ciertas inconsistencias.

En esta apreciación pensaremos la inconsistencia como un fenómeno primario, mientras que la paraconsistencia es derivado. Por este motivo el término “paraconsistencia” califica una propiedad de la lógica y no de la teoría, así como el término “inconsistente” califica la teoría y no a la lógica. Sin embargo, es usual encontrar en la literatura errores en ambas direcciones. Se puede concluir que las lógicas paraconsistentes exhiben formalmente maneras de “controlar” ciertas contradicciones.

En la lógica clásica, de una contradicción se deducen todas las proposiciones, es decir, si al modelar cualquier teoría con la lógica clásica, aparece una contradicción entonces se infieren todas las proposiciones de tal teoría. Este hecho usualmente se abrevia diciendo que la teoría se vuelve trivial. Así es comprensible el pavor a las contradicciones y el afán por eliminarlas.

En la inteligencia artificial, donde es frecuente que en una base de conocimiento se tenga alguna inconsistencia “local”, que bien podría considerarse “irrelevante” en vista del conjunto total de información contenida. ¿Que es lo razonable? Seguir sacando conclusiones interesantes. Pero la lógica clásica la vuelve trivial. Más específicamente, en consultas técnicas con distintos expertos éstos suelen no coincidir sobre un mismo aspecto del conocimiento del dominio. Por ejemplo en una base de datos de diagnóstico médico, se encuentra con la siguiente información; a partir de síntomas observados, dos distintos especialistas consignan opiniones contrarias. Obviamente no hay que eliminar la base de datos, ni tampoco dichas opiniones; por el contrario, es muy importante para el paciente en cuestión, quizás eso sugiera por lo menos consultar una tercera opinión. Esta ligera justificación

es una invitación a desarrollar nuevas lógicas donde no aparezca el límite de la no contradicción, al menos en un sentido tan fuerte.

1.2 El término paraconsistente

El término *paraconsistente* fue acuñado por el conocido filósofo peruano Francisco Miró Quesada², a petición de Newton da Costa, en el Tercer Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática en Campinas Brasil (1976). Aclaremos, a nuestro parecer, cuál sería la acepción correcta del término *paraconsistente*. Señalemos las distintas acepciones que tiene el prefijo *para*.

1. *Contra*, como en paradoja (En contra del sentido común).
2. *Más allá de*, como en paranormal.
3. *Muy similar*, como en paramilitar.

Es así que tal vez esta última acepción sea la más indicada en el significado del prefijo *para* dentro del término paraconsistente. Sin embargo, en el paso del tiempo dentro de la comunidad académica no se ha logrado una total satisfacción con el uso de este término. Así por ejemplo en el II WCP³ se defendió por un amplio grupo participante que tal vez es más apropiado el término *parainconsistente*. Además recientemente se ha usado el nombre de *lógicas de la inconsistencia formal* (ver por ejemplo [18] y [6]).

2 Las lógicas de da Costa

Las lógicas desarrolladas por Newton da Costa, en sus propios términos, en rasgos generales obedecen a los siguientes lineamientos:

- El principio de no contradicción, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, en general, no debe ser válido.
- De dos fórmulas contradictorias, α y $\neg\alpha$, en general, no debe existir la posibilidad de deducir una fórmula arbitraria.
- Mantener los esquemas y reglas de deducción del cálculo clásico que no interfieran con las dos condiciones anteriores.

2.1 Axiomas y reglas

$$[\rightarrow_1] \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$[\rightarrow_2] \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$[\rightarrow_3] \quad A, A \rightarrow B \ / \ B$$

²A quién además de cierta forma debemos el título del presente trabajo.

³II World Congress On Paraconsistency, Sao Paulo Brazil, Mayo de 2000.

$$[\wedge_1] \quad A \wedge B \rightarrow A$$

$$[\wedge_2] \quad A \wedge B \rightarrow B$$

$$[\wedge_3] \quad A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

$$[\vee_1] \quad A \rightarrow A \vee B$$

$$[\vee_2] \quad B \rightarrow A \vee B$$

$$[\vee_3] \quad (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

$$[\neg_1] \quad B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$[\neg_2] \quad A^0 \wedge B^0 \rightarrow ((A \rightarrow B)^0 \wedge (A \wedge B)^0 \wedge (A \vee B)^0)$$

$$[\neg_3] \quad A \vee \neg A$$

$$[\neg_4] \quad \neg \neg A \rightarrow A$$

$$[\neg_{(n),1}] \quad B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$$

$$[\neg_{(n),2}] \quad A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B)^{(n)} \wedge (A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)})$$

$$[\{\neg_{(n),1}\}^-] \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

Donde :

- $A^0 = \neg(A \wedge \neg A)$
- $A^1 = A^0$
- $A^n = A^{000\dots 0}$ (n-veces).
- $A^{(1)} = A^1$
- $A^{(n)} = A^1 \wedge A^2 \wedge \dots \wedge A^n$

La *lógica intuicionista positiva*⁴, que abreviaremos aquí por **LIP**, está determinada por $\rightarrow_{1,2,3}$ $\wedge_{1,2,3}$ y $\vee_{1,2,3}$, mientras que:

- $\mathbf{C}_\omega = \mathbf{LIP} + \neg_3, \neg_4$
- $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_\omega + \{\neg_{(n),1}\}^-$ que corresponde a la lógica proposicional clásica.
- $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_\omega + \neg_1, \neg_2$
- $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_\omega + \neg_{(n),1}, \neg_{(n),2}$

⁴Algunas veces en la literatura se encuentra la notación **H**, pero no es lo estándar.

El axioma $\neg_2$ representa a *el tercero excluido*, y $\neg_3$ *la doble negación dialéctica*. No es aventurado afirmar que $\mathbf{C}_\omega$ es dual a la lógica intuicionista, pues en *la lógica intuicionista* ($\mathbf{I}$) se rechaza la doble negación dialéctica y en su lugar se coloca el esquema dual $(A \rightarrow \neg\neg A)$, además mientras en $\mathbf{I}$ se rechaza el tercero excluido y mantienen *el principio de no contradicción* $\neg(A \wedge \neg A)$, en $\mathbf{C}_\omega$ y todos los $\mathbf{C}_n$ se preserva el tercero excluido y debilitan el principio de no contradicción, una suerte de rechazo. Algo tal vez interesante de recalcar que la ley de Peirce no es válida en $\mathbf{I}$, mientras que si lo es en $\mathbf{C}_1$, (ver [12]) con lo cual la lógica positiva de $\mathbf{C}_1$ no es precisamente **LIP**, ó equivalentemente la lógica clásica positiva, como de alguna manera se había propuesto da Costa en sus consideraciones iniciales. En [23] Sylvan señala este hecho como una falla de los sistemas de da Costa, el cual mitiga con la jerarquía de los cálculos $\mathbf{C}_n$, que en este contexto podría parecer artificial. Una discusión un tanto más amplia acerca de estas jerarquías, así como propuestas alternativas aparecen en Bunder [5], quién elimina de los cálculos $\mathbf{C}_n$ los axiomas de la doble negación dialéctica y disyunción de casos, preserva la **LIP**, y admite $\vdash A \wedge \neg A$ para ciertas A , pero no para todas, esencialmente no quiere $\vdash A \wedge \neg A$ para cuando A sea una fórmula compleja. Define recursivamente ${}^n A$ como ${}^0 A = A$ y ${}^{k+1} A = {}^k A \wedge \neg({}^k A)$, y define los cálculos $\mathbf{B}_n$ como **LIP** agregando el esquema ${}^n A \rightarrow B$, los cuales tienen la gracia que su lógica positiva es justamente **LIP**. Lo que le permite cuestionar el tercer item de las condiciones de da Costa para lograr lógicas paraconsistentes razonables, pues tal restricción puede ser reemplazada por lógica intuicionista ó cualquier otro conjuntos de esquemas y reglas que den restricciones en cierto sentido.

Intuitivamente, con el símbolo “bolita” se quiere representar las fórmulas que tienen un buen comportamiento, las que tienen un comportamiento clásico, si una fórmula es clásica (tiene un buen comportamiento) es razonable pensar que no se puede tener ella y su negación. De la misma manera $A^{(n)}$ intenta guardar el buen comportamiento de A , el buen comportamiento del buen comportamiento de A , ..., y así hasta el nivel n . Los axiomas $\neg_1$ y $\neg_{(n),1}$ corresponden a *reductio ad absurdum* para fórmulas de buen comportamiento y de n -buen comportamiento respectivamente.

En correspondencia con la jerarquía de los cálculos proposicionales $\mathbf{C}_n, 0 \leq n \leq \omega$ da Costa presenta los cálculos de predicados de primer orden $\mathbf{C}_n^*, 0 \leq n \leq \omega$. Estos se obtienen de los $\mathbf{C}_n$ respectivos agregando los siguientes axiomas y reglas (sujetas a las restricciones usuales):

$$\begin{array}{ll}
[\forall_1] \quad \forall x A(x) \rightarrow A(t) & [\exists_1] \quad A(t) \rightarrow \exists x A(x) \\
[\forall_2] \quad \frac{A \rightarrow B(x)}{A \rightarrow \forall x B(x)} & [\exists_2] \quad \frac{A(x) \rightarrow B}{\exists x A(x) \rightarrow B} \\
[\forall_3] \quad \forall x (A(x))^{(n)} \rightarrow (\forall x A(x))^{(n)} & [\exists_3] \quad \forall x (A(x))^{(n)} \rightarrow (\exists x A(x))^{(n)}
\end{array}$$

La jerarquía de los cálculos de predicados de primer orden $\mathbf{C}_n^*, 0 \leq n \leq \omega$ tiene una jerarquía de cálculos de predicados de primer orden con igualdad $\mathbf{C}_n^-, 0 \leq$

$n \leq \omega$ incrementando los axiomas (sujetas a las restricciones usuales):

$$[=1] \quad x = x$$

$$[=2] \quad x = y \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))$$

Teorema 2.1. *En $\mathbf{C}_n$ se cumplen todos los teoremas válidos en $\mathbf{LIP}$, para todo n .*

Teorema 2.2. *En $\mathbf{C}_1$ si $A, B \vdash C^0, C, \neg C$ entonces $A \vdash \neg B$.*

Tempranamente da Costa y Guillaume ([11]) muestran que las lógicas de da Costa no cumplen el teorema de reemplazo, también aparece en Urbas [24] usando matrices 5×5 aunque basta con matrices 3×3 .

2.2 Matrices lógicas

Las matrices lógicas fueron introducidas formalmente en la tercera década del siglo XX por Lukasiewicz y Tarski, aunque ya aparecían en algunos trabajos anteriores del mismo Lukasiewicz, de Bernays y Post entre otros. Para presentar el concepto de matriz lógica necesitamos precisar el de álgebra sobre un lenguaje dado.

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, diremos que una $\mathcal{L}$ -álgebra es una estructura $\mathbf{A} = \langle A, w \rangle_{w \in \mathcal{L}}$ donde A , el universo de $\mathbf{A}$, es un conjunto no vacío, y w es una operación sobre A de rango k para cada conector w de rango k .

Una $\mathcal{L}$ -matriz es un par $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F \rangle$, donde $\mathbf{A}$ es una $\mathcal{L}$ -álgebra y F es un subconjunto de A ; los elementos de F se llaman los *valores designados* de A .

Dada una $\mathcal{L}$ -matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ tiene una única interpretación en $\mathbf{A}$ dependiendo sólo de los valores en $\mathbf{A}$ que son asignados a sus variables. Usando el hecho de que $\mathcal{Fm}$ es el álgebra absolutamente libre generada por el conjunto de las variables, la interpretación de una fórmula φ puede ser expresada algebraicamente con $h(\varphi)$, donde $h : \mathcal{Fm} \rightarrow \mathbf{A}$ es el homomorfismo que aplica cada variable en el valor asignado. Una *valuación* sobre una $\mathcal{L}$ -matriz $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F \rangle$ es el único homomorfismo que extiende la función (definida en el conjunto de variables proposicionales) $u : P \rightarrow A$ a $u^* : \mathcal{Fm} \rightarrow \mathbf{A}$.

La fórmula φ es una *consecuencia* de Γ en $\mathcal{A}$, simbólicamente $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$ si para toda valuación $u : P \rightarrow A$, $u^*(\psi) \in F$, para toda $\psi \in \Gamma$ implica $u^*(\varphi) \in F$.

Para un sistema deductivo (una lógica) S diremos que una matriz $\mathcal{A}$ es una *matriz modelo* de S si $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$.

2.3 Algunos resultados básicos en las lógicas $\mathbf{C}_n$

Teorema 2.3. *El esquema $\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha)$ no es un teorema en $\mathbf{C}_n$.*

Demostración. Si tomamos uno de los sistemas deductivos (una lógica) de da Costa $\mathbf{C}_n$ y consideramos la matriz $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F \rangle$, donde $\mathbf{A} = \langle A, \wedge^{\mathbf{A}}, \vee^{\mathbf{A}}, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \neg^{\mathbf{A}} \rangle$, con $A = \{1, 2, 3\}$,

$\wedge^{\mathbf{A}}$	1	2	3	$\vee^{\mathbf{A}}$	1	2	3	$\rightarrow^{\mathbf{A}}$	1	2	3	α	$\neg^{\mathbf{A}}$
1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3
2	1	1	3	2	1	1	1	2	1	1	3	2	1
3	3	3	3	3	1	1	3	3	1	1	1	3	1

y como valores distinguidos a 1 y a 2, es decir, $F = \{1, 2\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una matriz modelo⁵ para $\mathbf{C}_n$, sin embargo no es modelo para la fórmula $\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha)$, baste tomar el valor de α igual a 2. $\square$

También, es conocido que en $\mathbf{C}_1$ no son teoremas, entre otros, los esquemas:

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta), \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta), \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta, \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta \text{ y } \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha.$$

Como ya habíamos señalado en el teorema 2.1 en todos los $\mathbf{C}_n$ se cumplen todas los teoremas y las reglas de deducción del cálculo proposicional clásico positivo. En particular resaltemos que como los axiomas $\rightarrow_1$ y $\rightarrow_2$ son exactamente los mismos de la implicación clásica y $\rightarrow_3$ es la única regla de inferencia, que es justamente el Modus Ponens clásico, entonces en los cálculos $\mathbf{C}_n$ de da Costa se cumplen los siguientes dos importantes resultados. Al primero de ellos nos referiremos como un teorema básico.

Teorema 2.4. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple $\vdash A \rightarrow A$.*

Teorema 2.5. (De la Deducción) *Si $\Gamma, A \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.*

Como consecuencias inmediatas del teorema de la deducción tenemos los siguientes esquemas válidos en los cálculos $\mathbf{C}_n$.

Proposición 2.6.

- *Permutación de antecedentes (PA)*
- *Importación de antecedentes (IA)*

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{(A \wedge B) \rightarrow C}$$

- *Transitividad de la implicación (TI)*

$$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

De otro lado usando el teorema de la deducción y el axioma $\neg_{(n),1}$ podemos concluir lo siguiente.

Teorema 2.7. *Si a $\mathbf{C}_n$ se agrega el esquema $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ como un nuevo axioma se obtiene el cálculo proposicional clásico.*

⁵Esto es fácil de verificar, incluso es bastante simple desarrollar un programa que valide cada uno de los axiomas en estas matrices, y como la validez es preservada por la única regla de inferencia se recibe el resultado.

Ahora fijemos un resultado importante en la búsqueda de nuestro objetivo general.

Teorema 2.8. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple que:*

1. $\vdash (\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$
2. $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$

Demostración. El ítem 1 es consecuencia de los axiomas $\wedge_1$ y $\wedge_3$ y el teorema de la deducción 2.5, mientras que el ítem 2 es el teorema básico 2.4 de la lógica intuicionista positiva. $\square$

También, es conocido que en $\mathbf{C}_1$ son teoremas, entre otros, los esquemas:
 $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$, $\vdash \alpha^{00}$ y $\vdash \alpha^0 \rightarrow (\neg\alpha)^0$.

Además se tienen entre otros los resultados generales:

Teorema 2.9. (Arruda [3]) *En $\mathbf{C}_n$ no se cumple la reducción de negaciones, es decir, si representamos por $\neg_p A$ la expresión $\neg\neg\dots\neg A$, donde el símbolo $\neg$ aparece p veces, entonces no son válidas en general las siguientes equivalencias:*

- $A \leftrightarrow \neg_p A$
- $\neg_{2p-1} A \leftrightarrow \neg_{2k-1} A$ siendo $p \neq k$.
- $\neg_{2p} A \leftrightarrow \neg_{2k} A$ siendo $p \neq k$.
- $\neg_{2p} A \leftrightarrow \neg_{2k-1} A$

Del teorema de Arruda 2.9 se recibe a manera de corolario que los cálculos $\mathbf{C}_n$ no son decidibles por matrices finitas.

Teorema 2.10. (Fidel [14]) *$\mathbf{C}_1$ es decidable.*

Teorema 2.11. *Si $\neg^* \alpha$ es una abreviación para la fórmula $\neg\alpha \wedge \alpha^0$, entonces $\neg^*$ cumple todas las propiedades de la negación clásica en $\mathbf{C}_n$.*

Ahora mostremos que $\mathbf{C}_n$ se tiene un esquema de reducción al absurdo para fórmulas con un n -buen comportamiento. Este resultado es conocido desde los inicios de las lógicas $\mathbf{C}_n$, más aún se demuestra que los sistemas $\mathbf{C}_n$ son equivalentes a los sistemas obtenidos al cambiar el axioma $\neg_1$ por la fórmula que describe el n -buen comportamiento a continuación.

Proposición 2.12. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple que $\vdash B \wedge \neg B \wedge B^{(n)} \rightarrow C$.*

Demostración. Si en el axioma $\neg_{(n),1}$ tomamos el lugar de A y colocamos $\neg C$ obtenemos $B^{(n)} \rightarrow ((\neg C \rightarrow B) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\neg C))$, de donde usando **PA** dos veces tenemos el esquema $(\neg C \rightarrow B) \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C))$.

Ahora como el axioma $\rightarrow_1$ nos asegura que $B \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$, usando **TI** recibimos que $B \rightarrow ((\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C))$. De donde usando nuevamente **PA** obtenemos que $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow (B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C))$. De nuevo como el axioma $\rightarrow_1$ nos asegura que $\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$, usando una vez más **TI** recibimos que $\neg B \rightarrow (B \rightarrow (B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C))$, y por **PA** $B \rightarrow (\neg B \rightarrow (B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C))$. Con lo cual usando **IA** dos veces recibimos $B \wedge \neg B \wedge B^{(n)} \rightarrow \neg\neg C$. De donde gracias a $\neg_4$ concluimos $(B \wedge \neg B) \wedge B^{(n)} \rightarrow C$. $\square$

A partir del teorema de la deducción y **TI** es inmediato mostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple que $\vdash (D \rightarrow E) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (C \rightarrow E))$.*

Igualmente del cálculo clásico intuicionista positivo tenemos los siguientes dos resultados.

Proposición 2.14. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple que $\vdash D \vee (D \rightarrow E)$.*

Proposición 2.15. *En $\mathbf{C}_n$ se cumple que $\vdash A \vee (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \leftrightarrow B)$.*

3 La heterodoxia de las lógicas de da Costa

Después de este rápido recorrido por las lógicas de Da Costa, estamos listos para dar los siguientes dos resultados que en nuestra opinión establecen técnicamente la heterodoxia de las lógicas de da Costa.

Teorema 3.1. *En $\mathbf{C}_n$ no se cumple el teorema de sustitución.*

Demostración. Si suponemos que se cumple el teorema de sustitución, por el teorema 2.8 tendríamos que $\neg\alpha \rightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha)$ es un teorema, lo que contradice el teorema 2.3. $\square$

Ahora concluimos presentando el segundo resultado teórico que sustenta la heterodoxia de $\mathbf{C}_n$.

Teorema 3.2. *No existe una extensión de $\mathbf{C}_n$ ($n > 1$) que satisfaga la propiedad de sustitución y sea más débil que $\mathbf{C}_0$.*

Demostración. La idea de la prueba es suponer que la propiedad de sustitución se cumple en $\mathbf{C}_n$ y colapsarlo a $\mathbf{C}_0$. Para lograr esto basta probar $B^{(n)}$ ya que por $\neg_{(n),1}$ se obtendrá $\{\neg_{(n),1}\}^-$ y así $\mathbf{C}_0$. Siendo más precisos buscaremos una fórmula F tal que se pueda demostrar $B \leftrightarrow F$ y $F^{(n)}$ con lo cual aplicando sustitución se demostrará $B^{(n)}$.

Si tomamos los lugares de B y C en $\vee_3$ y los hacemos iguales a A^n tenemos que $(A \rightarrow A^n) \rightarrow ((A^n \rightarrow A^n) \rightarrow ((A \vee A^n) \rightarrow A^n))$. Por otra parte si escogemos $A = B^{(n)} \wedge (B \wedge \neg B)$, por la proposición 2.12 obtenemos el esquema $A \rightarrow C$. Más aún tomando en este esquema a C como A^n recibimos que $A \rightarrow A^n$. Además por el teorema básico 2.4 $A^n \rightarrow A^n$, y así tenemos que $A \vee A^n \rightarrow A^n$.

De otro lado, por definición $\neg A^k = \neg\neg(A^{k-1} \wedge \neg A^{k-1})$, entonces usando $\neg_4, \wedge_2$ y **TI** concluimos que $\neg A^k \rightarrow \neg A^{k-1}$. Por inducción tenemos que $\neg A^k \rightarrow \neg A^0$ y así por $\neg_4, \wedge_1$ y **TI** obtenemos $\neg A^k \rightarrow A$ para cada $k > 1$. Lo cual junto a $\neg_3$ nos permite concluir $\neg A \vee A^k$ para cada $k > 1$. Así se obtiene $(A \vee A^k) \wedge (A \vee A^{k-1}) \wedge \dots \wedge (A \vee A^0)$, por tanto se tiene $A \vee (A^k \wedge A^{k-1} \wedge \dots \wedge A^0)$, y en correspondencia

se concluye $A \vee A^{(k)}$. Lo que nos garantiza como resultado⁶ $A \vee A^n$ y así por la conclusión final del párrafo anterior tenemos $A^{(n)}$.

Además por la proposición 2.13, $(A \rightarrow D^{(n)}) \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow D^{(n)}))$, cuyo antecedente ya hemos probado en la proposición 2.12. Lo que nos permite usando **PA** concluir el esquema $D \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow D^{(n)})$. Como además usando el axioma $\rightarrow_1$ podemos garantizar que $D^{(n)} \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow D^{(n)})$, tenemos que usando $\vee_3$ recibimos $D \vee D^{(n)} \rightarrow ((D \rightarrow A) \rightarrow D^{(n)})$, cuyo antecedente hemos probado dos párrafos atrás, así obtenemos el esquema (I): $(D \rightarrow A) \rightarrow D^{(n)}$.

Pero como ya habíamos probado $D^{(n)}$, por los axiomas $\neg_{n,2}$ y $\wedge_3$, junto a **TI** tenemos que $D^{(n)} \rightarrow (D \rightarrow A)^{(n)}$, y así usando **TI** obtenemos el esquema (II): $(D \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A)^{(n)}$.

Ahora usando la instancia $(B \rightarrow A) \rightarrow A$ para D en el esquema (I) tenemos $((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)^{(n)}$, y la instancia $B \rightarrow A$ para D en el esquema (II) obtenemos $((B \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)^{(n)}$.

Usando la letra F para representar la fórmula $(B \rightarrow A) \rightarrow A$, las dos instancias anteriores se convierten en $(F \rightarrow A) \rightarrow F^{(n)}$ y $F \rightarrow F^{(n)}$. De donde por $\vee_3$ recibimos que $F \vee (F \rightarrow A) \rightarrow F^{(n)}$, cuyo antecedente se tiene por la proposición 2.14, y así concluimos $F^{(n)}$.

Ahora por $\vee_3$ tenemos que $(A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C \rightarrow C))$, cuyo primer antecedente es un esquema ya demostrado, y el segundo un teorema básico, entonces tenemos el esquema $A \vee C \rightarrow C$. Usando la instancia $((B \rightarrow A) \rightarrow A) \leftrightarrow B$ para C , tenemos que $A \vee (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \leftrightarrow B) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A) \leftrightarrow B)$, cuyo antecedente se tiene por la proposición 2.15, y así terminamos la prueba con la conclusión $F \leftrightarrow B$. $\square$

En contraste con los sistemas **C_n** los cuales no satisfacen la propiedad de sustitución, tenemos el sistema **P1** que si la satisface, y que también satisface una propiedad de maximabilidad similar. Sette demuestra en [22] que no existe un cálculo proposicional que extienda a **P1** más débil del cálculo clásico. Este resultado es ratificado por Pynko en [21], recurriendo al álgebra universal, donde se estudia la variedad⁷ del sistema de Sette y da una prueba algebraica de que la única extensión axiomática no trivial de **P1** es la lógica proposicional clásica.

4 Un par de extensiones para **C_n** por Sylvan

Ahora veamos explícitamente que en **C_w** la negación no es monótona con respecto a las equivalencias, y por tanto lo mismo sucede en todas las **C_n**. La prueba de este resultado se encuentra en una de las primeras publicaciones de da Costa, en este caso conjuntamente con Sette ([13]), siendo muy pertinente recalcar el uso de matrices lógicas para la misma.

⁶Este hecho es originalmente obtenido por Arruda [3].

⁷Término usado para las clases de álgebras cerradas bajo subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos.

Teorema 4.1. *En $\mathbf{C}_\omega$ el hecho que dos fórmulas sean equivalentes no implica que sus negaciones lo sean.*

Demostración. La matriz $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F \rangle$, del teorema 2.3 es un modelo para $\mathbf{C}_\omega$, pero no lo es para el esquema $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$. $\square$

En vista de estas particularidades, las lógicas de da Costa no satisfacen el teorema de sustitución y la negación no es monótona con respecto a la equivalencia, Sylvan las ve como fallas de dichos sistemas, propone inicialmente agregar una nueva regla al sistema que remedie tal situación, a la cual se refiere como *regla de contraposición*, tomada al parecer de la lógica modal **S2**. Esta regla esta dada por

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

El sistema obtenido de $\mathbf{C}_n$ al agregar la regla de contraposición lo denomina $\mathbf{CC}_n$, análogamente obtiene $\mathbf{CC}_\omega$, y usando matrices demuestra que para todo n se cumple que $\mathbf{CC}_\omega \neq \mathbf{CC}_n$, y además hace un amplio desarrollo semántico para dichos sistemas. Desafortunadamente en $\mathbf{CC}_\omega$ se demuestra A^0 y por tanto $\mathbf{CC}_1$ coincide con el cálculo proposicional clásico.

Otra propuesta de Sylvan es agregar a los sistema $\mathbf{C}_n$, la *regla de equivalencia débil*, inspirada al parecer de la lógica modal **S1**. La cual está dada por

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

El sistema obtenido de $\mathbf{C}_n$ al agregar la regla de equivalencia débil lo denomina $\mathbf{EC}_n$, y demuestra que para todo n el sistema $\mathbf{EC}_n$ colapsa al cálculo proposicional clásico⁸. Como corolario de este resultado Sylvan obtiene el teorema 3.2.

5 Conclusiones

Las lógicas de da Costa no logran el cometido propuesto, a saber en sus lineamientos generales se esperaba obtener una lógica paraconsistente perdiendo lo menos posible de la lógica clásica. Como él mismo sabía existen infinitas de tales lógicas, sin embargo dentro de éstas, sus sistemas al no tener teorema de reemplazo y sin poder lograrse por extensiones, son de las más distantes a la lógica clásica. Creemos que al existir un sin número de otras propuestas de lógicas paraconsistentes que no tienen esta molesta particularidad, el objetivo propuesto por da Costa en sus lineamientos no se logró con las lógicas $\mathbf{C}_n$.

Creemos muy pertinente recomendar, en primera instancia, las lógicas paraconsistentes auto-extensionales para el manejo de ciertas contradicciones en aplicaciones generales.

⁸Al parecer este resultado es obtenido sintácticamente en la tesis doctoral de Urbas, On Brazilian Paraconsistent Logics, Australian National University, Canberra, 1987.

Agradecimientos Agradezco a los evaluadores anónimos por sus importantes comentarios en la precisión del presente artículo.

Referencias

- [1] Agudelo, J. C. y Sicard, A., Máquinas de Turing Paraconsistentes : una posible definición, Matemáticas : Enseñanza Universitaria, vol. XII No. 2, ERM Colombia, 2004.
- [2] Asenjo, F. G., A calculus of antinomies, Notre Dame Journal of Formal Logic Vol. 7, (1966), 103-105.
- [3] Arruda, A., Remarques sur les systèmes C_n , C.R. Acad. Sc. Paris t. 280 (1975), 1253-1256.
- [4] Béziau, J. Y., The Future of Paraconsistent Logic. Submitted to ILCSDP (2006)
- [5] Bunder, M., A new hierarchy of paraconsistent logic. Proceedings of the Third Brazilian Conference of Mathematical Logic, Edited by A. I. Arruda and others, Sociedade Brasileira de Logica, Sao Paulo, 1980.
- [6] Carnielli, W., Coniglio, M. and Marcos, J., Logics of Formal Inconsistency. In: Dov M. Gabbay; Franz Guenther. (Org.). Handbook of Philosophical Logic. 2 ed. Dordrecht: Springer, v. 14, p. 1-93 (2007).
- [7] da Costa, N.C.A., Opérations non monotones dans les treillis, C.R. Acad. Sc. Paris t. 263 (1966), 429-432.
- [8] da Costa, N.C.A., On the theory of inconsistent formal systems, Notre Dame Journal of Formal Logic XI (1974), 497-510.
- [9] da Costa, N.C.A. and Alves, E. H., A semantical analysis of the calculi C_n , Notre Dame Journal of Formal Logic XVIII (1977), 621-630.
- [10] da Costa, N.C.A., Béziau, J.Y. and Bueno, O., Paraconsistent Set Theory (en Portugués), Campinas, Centro de Lógica, Epistemologia e Historia da Ciência (Colec. CLE 23), Brasil 1998.
- [11] da Costa, N.C.A., et Guillaume, M., Sur les calculs C_n , Anais da Academia Brasileira de Ciências, 36 (1964), pp. 379-382.
- [12] da Costa, N.C.A., et Guillaume, M., Négations composées et loi de Peirce dans les systèmes C_n , Portugaliae Mathematica, 24 (1965), pp. 201-210.
- [13] da Costa, N.C.A., et Sette, M., Les algèbres C_ω , C.R. Acad. Sc. Paris t. 268 (1969), 1011-1014.

- [14] Fidel, M., La decidibilidad de los cálculos C_n , Antología de la Lógica en América Latina, CEILIJIS, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela, Fundación Banco Exterior, 1988.
- [15] Fitting, M., A replacement Theorem for LP, Thechnical report, CUNY Ph.D. Program in Computer Sciense, March 21, 2006.
- [16] Komendantskaya, E. and Seda, A. K., Sound and complete SLD-resolution for bilattice-based annotated logic programs, In Proceeding of the International Conference INFORMATION-MFCSIT'06, Cork, Ireland, August 1-5 (2006)
- [17] Lewin R. A., Mikenberg I. F., Schwarze M. G., C_1 is not Algebraizable, Notre Dame Journal of Formal Logic 32 (1991), 609-611.
- [18] Marcos, J., Logics of Formal Inconsistency, Tesis doctoral, Universidad Técnica de Lisboa, Febrero (2005).
- [19] Mortensen, C., Every Quotient Algebra for $\mathbf{C}_1$ is Trivial, Notre Dame Journal of Formal Logic 21 (1980), 694-700.
- [20] Ortiz, G., The Annotated Logics OP_{BL} , Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 228 (2002), 411-433.
- [21] Pynko, A. P., Algebraic Study of Sette's Maximal Paraconsistent Logic, Studia Logica 54 (1995), 89-128.
- [22] Sette, A.M., On the propositional calculus P1, Mathematica Japonicae, Volume 16 (1973), 173-180.
- [23] Sylvan, R., Variations on da Costa C Systems and Dual-Intuitionistic Logics, Studia Logica XLIX,1 (1990), 47-65.
- [24] Urbas, I. Paraconsistency and the C-Systems of da Costa, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 30, Number 4, Fall (1996), 440-451.
- [25] Urbas, I. Dual Intuitionistic Logics, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 37, Number 4, Fall (1989), 583-597.

Dirección del autor

Guillermo Ortiz Rico — Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Calle 13, 100-00, Cali-Colombia
 e-mail: gortizri@univalle.edu.co