

**DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE DE LA CONGRUENCIA DE
TRIÁNGULOS PARA DESARROLLAR LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS DE
VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO
NOVENO DEL COLEGIO SAN GABRIEL FUNDESIA**

CRISTIAN ARNOLDO IQUINÁS VOLVERÁS

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2017

**DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE DE LA CONGRUENCIA DE
TRIÁNGULOS PARA DESARROLLAR LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS DE
VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO
NOVENO DEL COLEGIO SAN GABRIEL FUNDESIA**

CRISTIAN ARNOLDO IQUINÁS VOLVERÁS 0832569

**Trabajo de Grado para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA**

DIRECTOR

JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2017

Dedicatoria

A Dios por ayudarme a culminar esta etapa de mi vida. A mi mamá, por ser mi motivación y estar siempre a mi lado apoyándome en los momentos más difíciles de la carrera, y por sus sabios consejos que me dieron fuerza para seguir hacia adelante y nunca rendirme. A mis hermanas, Norida y Tatiana, por su apoyo incondicional para alcanzar esta meta.

Agradecimientos

Al profesor Jorge Enrique Galeano Cano, por sus enseñanzas, su paciencia, dedicación, y por sus grandes aportes que contribuyeron a la finalización de este trabajo de grado.

Resumen

Este trabajo de grado presenta una experiencia realizada en el Colegio San Gabriel Fundesia, en la que se diseñaron dos situaciones puestas en escena bajo la metodología de los Experimentos de Enseñanza. Para las situaciones se formularon seis tareas que buscaron que los estudiantes de grado noveno den un primer paso en el desarrollo de las actividades Cognitivas de Visualización y Razonamiento en el trabajo con plantillas que representan triángulos, y trabajar de este modo el concepto de congruencia entre triángulos en este grado de escolaridad.

Estas situaciones se caracterizan por presentar el trabajo de la noción de congruencia entre figuras, en particular los triángulos mediante el uso de instrumentos no convencionales en la clase de geometría, que se emplean para que los estudiantes a través de una manipulación identifiquen y conozcan las características de la congruencia entre triángulos.

En esta investigación se encontró que los estudiantes en el procedimiento de solución de las actividades presentan en sus producciones escritas y en sus enunciaciones procesos asociados a la visualización y al razonamiento. En esta parte, los tipos de aprehensión ayudan a caracterizar la forma de ver de los estudiantes al enfrentarse a un problema de geometría; y en el razonamiento predomina el discurso natural para explicar la solución en cada una de las actividades, lo que implica una aproximación al discurso teórico.

Palabras clave: Visualización, Razonamiento, Experimento de Enseñanza, Diseño de Situaciones, Enseñanza de la Geometría.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	10
CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES	13
1.1 Planteamiento del problema	13
1.2 Presentación del problema.....	14
1.3 Formulación del problema.....	19
1.4 Justificación	21
1.5 Objetivos	29
1.5.1 Objetivo General.....	29
1.5.2 Objetivos Específicos.....	29
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS.....	31
2.1 Marco teórico	31
2.1.1 Perspectiva Matemática	32
2.1.2 Perspectiva curricular	34
2.1.3 Perspectiva cognitiva	36
2.2 Metodología	40
2.2.1 Los Experimentos De Enseñanza.....	42
2.2.2 Las situaciones, su diseño e implementación.....	44
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS Y RESULTADOS	48
3.1 Situación 1	49
3.1.1 Descripción general.....	49
3.1.2 Análisis local de la situación 1.....	55
3.1.3 Análisis sobre el alcance de las metas de aprendizaje en la situación 1	76
3.2 Situación 2	77
3.2.1 Descripción general.....	77
3.2.2 Análisis local de la situación 2.....	86
3.2.3 Análisis sobre el alcance de las metas de aprendizaje de la situación 2	100
3.3 Análisis Retrospectivo	102

CONCLUSIONES	112
Bibliografía.....	114
ANEXOS	115

Lista de tablas

Tabla 1. Episodio 1: Actividad 2. Parte 2.a. Uso de las herramientas como plantilla.....	56
Tabla 2. Episodio 2: Actividad 2. Parte 2.a. Trazos de forma individual	57
Tabla 3. Episodio 3: Actividad 2. Parte 2.a. No se puede construir el triángulo.....	58
Tabla 4. Episodio 1: Actividad 2: Parte 2.c. No se puede construir el triángulo	61
Tabla 5. Episodio 2: Actividad 2. Parte 2.c. Juntar las reglas	62
Tabla 6. Episodio 3: Actividad 2. Parte 2.c. Acercamiento a la desigualdad triangular	63
Tabla 7. Episodio 4: Actividad 2. Parte 2.c. Relación entre los lados del triángulo	63
Tabla 8. Episodio 1: Actividad 3. Parte 2.a. Usando sólo dos reglas.	65
Tabla 9. Episodio 2: Actividad 3. Parte 2.b. Usando dos lados y el ángulo comprendido entre ellos	67
Tabla 10. Episodio 3. Actividad 3. Parte 2.d. Usando tres ángulos	72
Tabla 11. Episodio 1: Actividad 1. Pregunta 3.....	87
Tabla 12. Episodio 2: Actividad 1. Preguntas 4 y 5.....	89
Tabla 13. Episodio 1: Actividad 2. Pregunta 3.....	93
Tabla 14. Episodio 1: Actividad 2. Pregunta 5.....	93
Tabla 15. Episodio 1: Actividad 3. Pregunta 3.....	96
Tabla 16. Episodio 2: Actividad 3. Pregunta 3.....	97
Tabla 17. Episodio 3. Actividad 3. Pregunta 5.....	98

Lista de Ilustraciones

Ilustración 1: Diagrama extraído de Duval (2001)	37
Ilustración 2: Plantillas de la actividad 1.....	50
Ilustración 3: Plantillas de la actividad 2.....	52
Ilustración 4: Plantillas de la actividad 3.....	54
Ilustración 5: Proceso de construcción del triángulo	57
Ilustración 6: Proceso de construcción del triángulo	58
Ilustración 7: Instrumentos de la actividad 3. Punto b.	67
Ilustración 8: Producción de la estudiante.....	68
Ilustración 9: Instrumentos de la actividad 3. Punto c.....	69
Ilustración 10: Construcción del triángulo.....	70
Ilustración 11: Producción de la estudiante.....	71
Ilustración 12: Instrumentos de la actividad 3. Punto 2e.	74
Ilustración 13: Producciones escritas de las estudiantes. Actividad 3. Punto 2e	74
Ilustración 14: Construcciones de las estudiantes. Actividad 3. Punto 2e	75
Ilustración 15: plantillas de la actividad 1	80
Ilustración 16: plantillas de la actividad 2	82
Ilustración 17: plantillas de la actividad 3	85
Ilustración 18: Producciones de la estudiante	88
Ilustración 19: Producciones del estudiante	90
Ilustración 20: Producciones de la estudiante	91
Ilustración 21: Producciones de la estudiante	93
Ilustración 22: Producción escrita de la estudiante	94
Ilustración 23: Producciones de la estudiante	96
Ilustración 24: Producción de la estudiante.....	98
Ilustración 25: Producciones de la estudiante	99

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se articuló con el trabajo ya culminado a nivel de maestría del Profesor Jorge Galeano del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle. En el que se resalta el diseño de situaciones para trabajar con figuras geométricas basado en las actividades cognitivas de construcción, visualización y razonamiento. Por esta razón, este trabajo tiene la particularidad de hacer énfasis en el diseño de una situación de aprendizaje de la congruencia de triángulos para desarrollar la visualización y el razonamiento en los estudiantes de grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia.

Este trabajo expone el interés por identificar, conocer, caracterizar e implementar en la práctica docente los conceptos de la teoría cognitiva de Duval, quien ha dado grandes aportes a la enseñanza de la geometría.

Los resultados que se presentan en este trabajo provienen de la puesta en marcha de un experimento de enseñanza diseñado en virtud de los elementos de la teoría de Duval y de la propuesta metodológica de (Molina, Castro , Molina, & Castro, 2011), quienes muestran los aspectos a tener en cuenta a la hora de realizar un diseño bajo la metodología de Experimentos de Enseñanza. Por consiguiente, la investigación realizada se enmarca en un experimento de enseñanza.

La teoría cognitiva de Duval se considera como un referente para el diseño de una situación de aprendizaje que ayude a los estudiantes a desarrollar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, y de esta manera mejorar el desempeño en el área de matemáticas.

La aplicación del experimento de enseñanza, junto con sus resultados y su respectivo análisis, es uno de los pasos a seguir bajo esta metodología en la búsqueda de situaciones que permitan construir conocimiento matemático en los estudiantes de básica secundaria, en particular en el aprendizaje de la geometría.

El capítulo 1 presenta la problemática en torno al aprendizaje de la geometría y se propone estudiar las actividades cognitivas de Visualización y Razonamiento como posibilidad de mejoramiento en el desempeño de los estudiantes de grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia; y de esta forma contribuir a la construcción del conocimiento matemático en este grado de escolaridad.

El capítulo 2 centra la atención en la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la geometría desde un punto de vista cognitivo. Se consideran aspectos relevantes que permitan realizar una propuesta de intervención en el aula al interior de las instalaciones del Colegio San Gabriel Fundesia y que ayuden a desarrollar las actividades cognitivas de Visualización y Razonamiento. En este capítulo también se considera la metodología que intervino en la investigación y se describe cada una de las fases de esta propuesta.

El capítulo 3 presenta los elementos que conforman la intervención de aula en el Colegio San Gabriel Fundesia, y expone en detalle las situaciones propuestas y realizadas por los estudiantes; finalmente, en este capítulo se muestran los resultados del análisis de la intervención realizada en el grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia.

Dentro del análisis y resultados de este capítulo, se encuentra lo que se ha denominado análisis retrospectivo que reúne los elementos esenciales para la construcción de una tercera propuesta de intervención de aula llamada situación 3, que deja abierta la continuidad de este trabajo para posteriores investigaciones.

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo resaltando la valoración del uso de instrumentos no convencionales, como las plantillas, en la clase de geometría para contribuir en el desempeño de los estudiantes y favorecer su cambio de mirada sobre las figuras.

También se hace referencia al uso del lenguaje cotidiano como elemento clave por parte de los estudiantes para explicar y argumentar las respuestas a los desafíos

de cada una de las actividades; lo que implica que el uso del lenguaje matemático está poco desarrollado en los estudiantes de este grado de escolaridad, pues dependen del lenguaje ordinario para explicar sus respuestas.

En cuanto a la noción de congruencia de triángulos, se encontró que los estudiantes identificaron adecuadamente las características de este concepto haciendo uso de instrumentos no convencionales como las plantillas. Lo anterior permite establecer un escenario conveniente para el aprendizaje de los objetos geométricos mediante el empleo de instrumentos no estándar en la clase de geometría; y de esta forma, ayudar a los estudiantes en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos y propiciar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de este grado de escolaridad.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se plantean el problema de investigación y los objetivos que apuntan a la realización de un estudio de las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría en los estudiantes de grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia para que desarrollen los procesos de visualización y razonamiento.

También se presenta la justificación de este trabajo. Se hace desde diferentes perspectivas que tratan sobre la importancia de la geometría en la escuela, los aspectos curriculares vinculados con este estudio, la parte matemática del concepto a enseñar, los aspectos cognitivos asociados a esta indagación, y algunas ideas de otras investigaciones que se relacionan con esta propuesta de trabajo. A continuación, se presentan las componentes de este capítulo.

1.1 Planteamiento del problema

El interés de este apartado es mostrar al lector el esbozo de las ideas elementales que se proponen como fundamento del planteamiento del problema y que se van hilando a lo largo del texto. Este planteamiento se exhibe en dos partes, la primera parte es la presentación del problema, y la segunda parte es la formulación del problema.

En la primera parte se encontrarán varios momentos. Primero se desarrollará un recorrido histórico sobre los acontecimientos más influyentes en la Educación Matemática en Colombia. En el segundo momento, se procederá a explicar las

consecuencias de las reformas curriculares, es decir que se hará referencia a la importancia de los documentos oficiales que en este sentido publicó el Ministerio de Educación Nacional MEN y a los resultados que obtuvieron los estudiantes en algunas pruebas nacionales e internacionales.

En la segunda parte se realizará la formulación del problema, que a su vez se divide en dos momentos. En el primero se aclarará el interés en los objetos y las relaciones geométricas, particularmente se sitúa en el pensamiento espacial; se mencionarán su importancia y algunas consideraciones con las cuales se evidenciará que hay una creciente preocupación en la Educación Matemática referente a esta cuestión. Y para finalizar, en el segundo momento se hará alusión al estudio del investigador Raymond Duval, donde se menciona la importancia de tres actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría; a saber: construcción, visualización y razonamiento.

1.2 Presentación del problema

Las reformas curriculares que se implementan en los países han sido producto de la preocupación de los grandes académicos por la formación matemática de los estudiantes. Colombia no ha sido la excepción dado que durante la década de 1960 hasta la actualidad se han presentado modificaciones tanto en los currículos escolares como en los decretos y leyes que reglamentan la educación.

Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, alrededor de los años 60 y 70 se estableció un movimiento que se denominó “Matemática Moderna”, movimiento que se generó principalmente por tres razones: la primera, referida a las dificultades que se presentaron en la enseñanza de la matemática en el nivel pre universitario; la segunda razón alude a la ideología y la filosofía de las matemáticas; la tercera razón apunta hacia el contexto político e histórico de la posguerra. Esta tendencia dio lugar a que se enfatizaran los currículos escolares y libros de texto hacia la teoría de conjuntos, el simbolismo moderno, la introducción

de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, la algebrización de la trigonometría, etc. Es decir, que la matemática se inclinó por los procesos netamente formales, y de esta manera favorecer al desarrollo de la educación científica.

Esta reforma se atendió en el país mediante el decreto 1710 de 1963 y más adelante bajo el decreto 080 de 1970; ambos decretos establecieron las normas de los programas escolares para primaria y secundaria respectivamente, cuyo diseño lo conformaban los objetivos generales y específicos, propios de la época.

En los años 70 y 80 surgió un debate entre los académicos que defendían el movimiento de la Matemática Moderna y los que querían retomar lo básico de la enseñanza de las matemáticas. Así en 1975, tal cual se menciona en los Lineamientos Curriculares del MEN, se inició en Colombia una reforma curricular que tuvo como propósito la renovación de los programas, la capacitación de docentes y el apoyo mediante estrategias que contribuyeran a la calidad de la educación. Por esta razón, en el año 1976 la Dirección General de Educación de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional creó e implementó un currículo para los niveles de primero a tercero en algunas escuelas del país.

En 1978 se reestructuraron las matemáticas escolares mediante la revisión de los programas de matemáticas de los niveles de primero a tercero; luego se estableció un marco teórico que precisó los criterios de revisión y diseño de los programas de los niveles de la Educación Básica.

De esta manera, el marco teórico le propuso al docente un enfoque de sistemas, es decir, la propuesta efectuada a los maestros consistía en establecer un enfoque de los diversos aspectos de las matemáticas que fueran vistos como sistemas. Esta reforma curricular, constituyó un reto para los maestros en ejercicio, y los maestros en formación, dado que se estableció un acercamiento a las matemáticas, desde una perspectiva sistémica a los números, la lógica, los

conjuntos, los datos estadísticos, las medidas, la geometría; que se concibieran como estructuras, que poseen elementos, operaciones y relaciones.

Los desarrollos pedagógicos de los siguientes años fueron asumidos en las políticas educativas del país, en especial, el enfoque por sistemas. Este enfoque fue adoptado en la Renovación Curricular para el área de Matemáticas y se evidencia en la ley 115 de 1994.

En el año 1998 se introdujo un documento oficial, el cual recibe el nombre de Lineamientos Curriculares de Matemáticas, que se define a sí mismo como una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación. Los Lineamientos son una guía educativa no acabada, una orientación y/o criterio nacional para los currículos escolares, la cual se encuentra abierta a discusión, debate y análisis, en busca de una mejora de la calidad educativa en Matemáticas, y, sobre todo, lograr que los estudiantes adquieran un mayor aprecio hacia las matemáticas. Según (MEN, 1998, pág. 7):

El enfoque de estos Lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana.

Los Lineamientos Curriculares proponen entonces que la enseñanza de las matemáticas no se debe hacer por temas ni por contenidos, sino que se debe realizar por medio de estrategias que desarrollen competencias matemáticas, es decir, habilidades que les permitan a los estudiantes ser capaces de resolver situaciones problema, que se presenten en la vida cotidiana, a través del pensamiento matemático.

Estos lineamientos sugieren que se organice el currículo de matemáticas en torno a tres aspectos esenciales; el primero se refiere a los procesos generales los cuales son: El razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de

procedimientos; el segundo aspecto menciona los conocimientos básicos, estos aluden a los procesos específicos que desarrolla el pensamiento matemático con los sistemas propios de las matemáticas. Estos sistemas son: El pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos y por último el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El tercer aspecto se refiere al contexto, en el cual se menciona la importancia de los diferentes ambientes que rodean al estudiante y que dotan de sentido a las matemáticas; el contexto se conforma por las mismas matemáticas, la vida diaria y otras ciencias.

En este orden de ideas, los Lineamientos Curriculares resaltan la importancia de enseñar matemáticas a partir de las situaciones problema, dado al reconocimiento de formar parte de un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela.

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (MEN, 1998, pág. 24)

Más adelante, en el año 2006, se publican los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que se definen como un conjunto de criterios claros, una guía que fija los parámetros de lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Los Estándares expresan situaciones que hacen referencia a lo que se espera que los estudiantes aprendan, describen el nivel de calidad que se espera alcanzar, específicamente en grupos de grados (1° a 3°, 4° a 5°, 6° a 7°, 8° a 9°, y 10° a 11°) y guardando una coherencia vertical y horizontal.

Este documento se convierte en un reto para los maestros, dado que trae consigo un nuevo concepto educativo: Competencias matemáticas. Ser competente en

matemáticas se refiere a gozar y desarrollar habilidades que permitan solucionar situaciones problema, dentro de un contexto, a partir del pensamiento matemático.

De acuerdo con lo expuesto por el MEN en los documentos oficiales, se prioriza la enseñanza de la Matemática por medio de situaciones problema. *“Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”*. (MEN, 2006)

Lo mencionado anteriormente no corresponde a lo que realmente acontece en las clases de matemáticas, debido a que la mayoría de los maestros actuales de matemáticas fueron formados bajo la influencia de la matemática moderna; esto se evidencia en los objetivos de la clase, en la metodología y recursos usados, y en la evaluación. Lo anterior conlleva a un sin número de consecuencias para la Educación Matemática del país; a continuación se nombrarán algunas.

Primero, el descuido que ha sufrido la geometría como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX (entre 1960-1980) pues a pesar de que se reconoce a la geometría como una rama de la Matemática, ha sido dejada en un segundo plano, debido a que en muchas instituciones educativas se considera innecesaria y no se tiene en cuenta en los currículos escolares; en otras se enseña pocas horas o en ocasiones al finalizar el año lectivo, centrándose el estudio de las matemáticas sólo en los procedimientos mecánicos de cálculo numérico (desconociendo que el pensamiento matemático está conformado por cinco conocimientos básicos) y en el aprendizaje memorístico de las definiciones, axiomas, propiedades y teoremas (ignorando los cinco procesos generales). De allí que surja una concepción errónea, en la cual los estudiantes consideran las matemáticas aisladas de la geometría, creen que la geometría es una asignatura y las matemáticas otra.

También existen un sin número de dificultades que se escapan a los desaciertos en la formación pasada de los educadores, las cuales tienen que ver con las políticas educativas estatales y las propias de cada institución, la formación docente, los libros de textos escolares, las dificultades propias de la Matemática, los obstáculos epistemológicos, las dificultades cognitivas de los estudiantes, entre otras.

1.3 Formulación del problema

Dada la necesidad del fortalecimiento de las competencias de los estudiantes en el área de matemáticas, surgen en el país reformas curriculares, que exigen hacer cambios en las formas de enseñanza. Estos aspectos sin duda han afectado el aprendizaje de las matemáticas escolares, imponiendo a los maestros en formación y en ejercicio que re direccionen su labor, y reflexionen sobre lo que es ser profesor de matemáticas en estos tiempos. Es decir, los docentes en su labor educativa deben implementar herramientas y estrategias de enseñanza que les permita abordar con éxito la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

En últimas, lo que las reformas han buscado es que los estudiantes se comprometan con el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, se intenta que los estudiantes aprecien y valoren el aprendizaje de las matemáticas, reconozcan su utilidad, y sean competentes para resolver problemas; abandonen la idea de que la Matemática es sólo un área de estudio obligatoria, que ofrece situaciones aisladas, procedimientos mecánicos y memorísticos, que carecen de significado para los estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, surgen los siguientes interrogantes: ¿De qué manera deben ser las clases?, ¿Cómo deben ser las actividades que se propongan en la clase? y ¿De qué manera debe hacerse? Según esto, es necesario implementar una metodología para llevar al aula, y de esta manera diseñar una situación de

aprendizaje que ayude a identificar y observar la forma en que los estudiantes aprenden y permitan mejorar su desempeño en matemáticas.

Estas situaciones de aprendizaje son tareas que cuentan con una trayectoria hipotética de aprendizaje, se establecen conjeturas sobre el proceso, y se diseñan desde los Estándares Básicos de Competencias y Lineamientos Curriculares en Matemáticas propuestos por el MEN.

Para llevar a cabo esta investigación, las actividades propuestas se situarán al interior del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. En este sentido, en el sistema geométrico se rescatan tres aspectos: los elementos del sistema, las operaciones y transformaciones, y los vínculos y relaciones entre ellos; por esto es de interés para los investigadores el concepto de Congruencia, puesto que desde el primer conjunto de grados hasta el final se le da gran importancia a este objeto geométrico, es decir, que en cada grado debe ser enseñado debido a la necesidad de conocer la equivalencia de la igualdad matemática que se presenta en la aritmética y el álgebra en comparación con la igualdad en geometría denominada congruencia, y a medida que se avanza en la escolaridad, se incrementa la complejidad de este concepto.

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) se pide que el estudiante primero reconozca la congruencia, luego la identificación y justificación de las relaciones de congruencia, después la resolución y formulación de problemas que involucren relaciones y propiedades de congruencia, y para finalizar la aplicación y justificación de los criterios de congruencia.

Así mismo, desde los documentos oficiales se tiene que para el área de matemáticas se deben movilizar los cinco procesos generales, que anteriormente se mencionaron. Sin embargo, en el marco de esta investigación se contempla la resolución de problemas como la vía con la cual se plantearán las actividades y/o tareas que corresponden a la situación de aprendizaje, y la visualización y el razonamiento como las actividades cognitivas propias de la geometría.

Se reconoce la importancia del aporte del investigador Raymond Duval para el desarrollo de este trabajo y se toma su teoría semiótica como referente conceptual. Duval (2001) menciona que la actividad geométrica de los estudiantes involucra tres procesos cognitivos que son: la construcción de configuraciones, la visualización, y el razonamiento.

La construcción se caracteriza por el uso de instrumentos, la visualización por ser el primer proceso asociado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, y el razonamiento concebido como toda idea que tiene un estudiante para comunicar, explicar y demostrar lo que ha descubierto, analizado y concluido.

De otro lado, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas mencionan la importancia de la noción de congruencia dentro de las matemáticas escolares, del ciclo octavo a noveno de la Educación Básica, y se propone el siguiente estándar:

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

Para llevar a cabo este proyecto de investigación es de interés reflexionar sobre las dificultades que presentan los estudiantes para plantear y resolver problemas en los que interviene el concepto de congruencia entre triángulos. De lo anterior, se inclina a responder la siguiente pregunta:

¿Qué aspectos de la visualización y el razonamiento se deben considerar para el diseño de una situación de aprendizaje en el grado noveno de escolaridad, respecto a los criterios de congruencia entre triángulos?

1.4 Justificación

Este trabajo se justifica desde diferentes perspectivas. En la primera se abordan argumentos que tienen relación con la importancia de la geometría en la escuela;

en la segunda parte se exhiben los aspectos matemáticos que se plantean en el diseño de la secuencia; luego, se enuncian los aspectos curriculares que intervienen, se desarrollan ideas referente a los aspectos cognitivos y finalmente, a manera de antecedentes, se exponen las ideas fundamentales de algunas de las investigaciones que se relacionan con la presente propuesta.

En este primer momento se hará referencia a la importancia de realizar un diseño de una situación de aprendizaje, en torno a los contenidos geométricos, dando importancia al desarrollo del Pensamiento espacial en los estudiantes y a las dificultades que se presentan al momento de desarrollar una situación problema, ya sea en el contexto de las matemáticas, de otras ciencias o de la vida diaria.

Las dificultades presentes en los estudiantes con relación a los conceptos geométricos pueden ser producto de la forma en que se les ha enseñado, es decir, el tipo de enseñanza usados por el docente, las concepciones que él tenga sobre la geometría, la manera de cómo se enseña, y la importancia dentro del currículo escolar, las dificultades propias del área, las dificultades cognitivas, errores y obstáculos de los estudiantes.

Algunos profesores conciben la geometría como una asignatura en donde sólo se dan definiciones, nombres a los objetos geométricos y cuya principal función es presentar las figuras mediante representaciones gráficas, dejando a un lado la importancia de esta rama de la matemática en el aprendizaje de los estudiantes.

Por esto, es necesario identificar cada una de las razones por la que es importante enseñar geometría en la escuela. Una de ellas se encuentra relacionada con el entorno de las personas, pues en él se pueden evidenciar relaciones y conceptos geométricos.

El espacio que percibimos es modelado por la geometría, es decir, "*La geometría es la Matemática del espacio*" (Bishop, 1983) Por ejemplo, consideremos una situación de la vida cotidiana de las personas: se tiene una habitación cuya forma

es similar a un prisma rectangular, en la cual sus paredes son perpendiculares al techo, este último se encuentra paralelo al suelo; las paredes y el techo también tienen forma rectangular; los segmentos de recta de los lados de sus ventanas forman una figura geométrica; al abrir y cerrar la puerta de la habitación se observa que se forman diferentes ángulos que son otro concepto importante de la geometría. La situación anterior, se puede emplear para identificar algunos conceptos de la geometría, además de acercar a los estudiantes a conceptos matemáticos abstractos a través de situaciones que se pueden percibir, que sirvan como argumento para la enseñanza en la escuela desde el contexto de la vida cotidiana de los estudiantes.

De esta forma, la geometría se encuentra inmersa en el entorno de las personas, esta puede ser una de las razones para establecer la importancia de su enseñanza y aprendizaje. También la enseñanza de la geometría permite desarrollar formas de pensamiento que generan en las personas una mayor capacidad para afrontar situaciones problemáticas y resolverlas.

A través del aprendizaje de la geometría los estudiantes desarrollan el conocimiento del espacio pues este interactúa con él desde el momento que nace. De este modo, se espera que los estudiantes puedan en algún momento manipular mentalmente las diferentes imágenes de las figuras y los conceptos geométricos, desarrollen y hagan uso de su capacidad de abstracción y no se queden únicamente con la construcción intuitiva de los objetos geométricos que logran mediante su interacción con el espacio.

Ahora bien, en este segundo momento se acercará al lector a los aspectos curriculares, matemáticos y didácticos que intervienen en el diseño.

De acuerdo con el MEN (1998), el objetivo primordial de la Educación Matemática en los niveles de básica y media es aportar al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes a través de propuestas didácticas en las que se

propongan situaciones problemáticas derivadas del contexto sociocultural, de las matemáticas o de otras ciencias.

Es decir, la Educación Matemática en Colombia se debe preocupar fundamentalmente en fomentar el desarrollo del pensamiento matemático de su población a través de la solución de situaciones problemas tomadas de diferentes contextos. Esto con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades que les sean de utilidad, de herramientas para la vida. Así mismo, Miguel de Guzmán plantea que:

La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (MEN, 1998, pág. 24).

También se establece la importancia del estudio del pensamiento espacial y los sistemas geométricos y se definen como, *“el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.”* (MEN, 1998, pág. 37).

Esto quiere decir que es necesario trabajar en el pensamiento espacial de los estudiantes, para que desarrollen habilidades, destrezas, formas de representación y herramientas fundamentales para afrontar con éxito situaciones de su vida diaria; de este modo, se pueden hacer más competentes para la vida. Cárdenas, (2013), afirma que:

Es importante retomar en las instituciones educativas la enseñanza de la geometría que tiene como fin la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de problemas, jugar con las construcciones geométricas, diseños y realizar transformaciones o movimientos en el plano que ayuden a los niños a fortalecer el pensamiento espacial y sistemas geométricos (p. 42).

Por esta razón, la enseñanza de la geometría es fundamental en la escuela para que los estudiantes desarrollen pensamiento matemático, en particular el

pensamiento espacial y manipulen los sistemas geométricos, que en su diario vivir son una vía esencial para el éxito de las personas ante situaciones problemáticas que se les presenten.

Los Estándares Básicos de Competencias establecen, para el inicio de la Educación Básica Primaria, la apropiación de las competencias que se encuentran al interior del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, que hacen referencia a la categorización y conocimiento de las figuras bidimensionales, para llegar a la aplicación e interpretación de propiedades y relaciones geométricas. Así, en todos los niveles de educación básica, se resalta el estudio de las relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.

De esta manera, el concepto de congruencia se aborda desde la primera infancia hasta grados superiores, de acuerdo a lo establecido por los Estándares Básicos de Competencias. El estudio de la noción de congruencia entre figuras permite la comprensión de conceptos de la Matemática más avanzados como la proporcionalidad geométrica.

La apropiación del concepto de congruencia es fundamental en el conocimiento de los estudiantes; a través de este concepto geométrico se consigue la adquisición de la noción de igualdad entre figuras, al establecer la misma forma y tamaño entre ellas. Es decir, se puede apreciar la importancia de este concepto en el análisis de algunas situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, al considerar una cancha de tenis, se puede establecer que sus lados opuestos son congruentes respecto a la malla, que se establece como eje de simetría. Similarmente, ocurre lo mismo con una cancha de fútbol, en donde el eje de simetría es la línea recta que pasa por el centro del terreno, aquí los lados opuestos también son congruentes.

A continuación se desarrollan ideas sobre aspectos didácticos que se relacionan con el presente trabajo. Desde esta mirada se hace referencia a los antecedentes. De la revisión de algunos trabajos se encontró uno a nivel de pregrado y otro a

nivel de maestría en Educación Matemática. Estos trabajos son los que más se relacionan con el presente proyecto.

Bahamón Charry & Bonelo Ayala, (2015) establecen como tema central el trabajo con figuras bidimensionales para potenciar las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría, es decir, aprecian la importancia de la enseñanza de la geometría mediante el desarrollo de los procesos cognitivos de visualización y razonamiento en los estudiantes de sexto grado de educación básica secundaria.

El aporte principal que hacen al presente trabajo tiene que ver con el diseño de una situación de aprendizaje para fortalecer las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el trabajo con figuras geométricas, a través de la metodología de los experimentos de enseñanza. De esta manera, se tiene, por un lado, que la propuesta en este trabajo es pertinente y necesaria para contribuir al desarrollo de las actividades cognitivas de los estudiantes al aprender geometría y, por otro lado, la metodología a emplear es fundamental para alcanzar los objetivos del trabajo.

Cárdenas (2013) realiza una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría sobre las relaciones geométricas, dejando claro que la importancia de estos conceptos geométricos se sustenta desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, en los que se establece el énfasis en todos los grados de educación básica el estudio de las relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.

En relación con lo anterior, tenemos que un aporte al presente trabajo es el estudio de la relación geométrica de congruencia como una competencia fundamental en la enseñanza de la geometría, en la que los estudiantes construyen el concepto de igualdad entre figuras y reconocen sus propiedades.

Otro aporte importante es el uso de tareas como mediación pedagógica para la enseñanza de la geometría. De esta manera, se rescata la importancia en la

elaboración de estas tareas el tener en cuenta cuál es su estructura y la finalidad con la cual se elaboran. Así, al ser implementadas en el aula, estas tareas se convierten en una vía apropiada para alcanzar los objetivos de esta investigación y se espera que sean eficientes para el aprendizaje de los estudiantes.

De lo anterior, en el presente trabajo es pertinente hacer uso de algunas tareas que darán forma a la situación de aprendizaje y que a su vez se encuentran asociadas al concepto de congruencia entre triángulos. Con la implementación de la situación de aprendizaje, se piensa obtener la información necesaria para el posterior análisis de los datos y alcanzar los objetivos propuestos en esta investigación.

En los aspectos curriculares, los Lineamientos de Matemáticas mencionan que el aprendizaje de la geometría es de gran importancia para el desarrollo del pensamiento matemático, en particular, del pensamiento espacial. Bahamón Charry & Bonelo Ayala, (2015) afirman:

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que estudia las relaciones del ser humano con el mundo que lo rodea, tomando como primordial el espacio. Estas relaciones se fundamentan en la percepción a través de los sentidos y mediadas por complejos procesos cognitivos que permiten idealizar el mundo en el que vivimos, al mismo tiempo que se modelan y codifican estas relaciones, lo cual permite configurar un lenguaje y una red de ideas que fundamentan un escenario posible entre la geometría y las personas, situación que origina conceptos e ideas más complejas que componen los fundamentos de la relación (p. 20).

Es decir, el espacio en donde se establecen las relaciones de los seres humanos con su entorno es modelado por la geometría. Según Duval (2001) la geometría involucra tres procesos de orden cognitivo, a saber: la construcción, la visualización y el razonamiento. Este trabajo se encuentra enfocado principalmente en los procesos de visualización y razonamiento. Mediante la relación de estos procesos se puede caracterizar la actividad geométrica de los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos.

Dicho lo anterior, se ubica al lector en el cuarto momento, en el que se abordarán las actividades cognitivas. Duval en su teoría semiótica dice que: “estas tres

clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría” (Duval, 2001). Esto quiere decir que para el aprendizaje de la geometría es necesario que los estudiantes desarrollen estos procesos, y es allí donde el docente de matemáticas debe contribuir al desarrollo de estos procesos en sus estudiantes y potenciarlos, mediante la aplicación de situaciones de clase que ayuden a que estos procesos sean desarrollados.

Así, con la guía del profesor, el estudiante deberá adquirir las herramientas, habilidades y destrezas necesarias para la comprensión geométrica y para resolver situaciones problemas propios de la geometría.

En el momento en el que los estudiantes desarrollan situaciones problema en geometría, se evidencian procesos cognitivos que se caracterizan por su intervención en la solución de problemas geométricos, tales como la visualización y el razonamiento. Estos procesos son de gran importancia para los docentes, en virtud de que éstos interpretan de forma constante las producciones de los estudiantes, para luego ayudarlos a desarrollar o mejorar sus capacidades geométricas. Duval (2001) declara:

Estos procesos pueden ser realizados separadamente. Así, la visualización no depende de la construcción: hay acceso a las figuras de cualquier manera que hayan sido construido. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas. En última instancia, si la visualización es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar una demostración, el razonamiento depende exclusivamente del corpus de proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) de los que se dispone. Y, en algunos casos la visualización puede ser engañosa o imposible (p. 1).

De esta forma, existe una conexión entre los procesos de visualización y razonamiento: en ocasiones para abordar la solución a un problema geométrico los estudiantes se valen de las representaciones tales como las gráficas, tablas, etc. Estas representaciones para su interpretación y formulación necesitan de la visión, pero es necesario distinguir los términos ver y visualizar, pues la acción de

ver no es lo mismo que visualizar en geometría. Si consideramos los objetos geométricos como las figuras, éstas representan gráficamente una imagen mental, que lo asociamos a la visualización; mientras que ver simplemente es observar, solo percibir.

Dicho lo anterior, se evidencia que el desarrollo de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en los estudiantes, son fundamentales para el aprendizaje de las Matemáticas, en particular de la geometría.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

Diseñar una situación de aprendizaje mediante la resolución de problemas para favorecer el desarrollo de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento de los estudiantes de grado noveno de escolaridad, respecto a los criterios de congruencia entre triángulos.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Identificar las características de una situación de aprendizaje, basada en criterios cognitivos, para la enseñanza de la congruencia de triángulos.
- Caracterizar las condiciones requeridas para movilizar en los estudiantes el aprendizaje de la congruencia de triángulos.
- Determinar las ventajas y desventajas que tiene el diseño de la situación propuesta, para el aprendizaje de la congruencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se busca realizar el diseño de una situación de aprendizaje que reúna los elementos necesarios para construir el

concepto de congruencia en los estudiantes de grado noveno, en particular los criterios de congruencia entre triángulos, y que favorezca el desarrollo de los procesos cognitivos asociados al aprendizaje de la geometría; y de esta forma, se contribuya en el crecimiento del pensamiento matemático de los estudiantes.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo se presentan dos elementos importantes que guían a esta investigación que hacen referencia a la fundamentación teórica y metodológica que permitió el desarrollo de este trabajo.

La primera, se encuentra conformada por tres perspectivas asociadas a la parte matemática, curricular y cognitiva, que hacen parte de los aspectos que componen el marco teórico del presente trabajo de grado.

En la segunda, se trata la metodología empleada en esta investigación, enmarcada en los experimentos de enseñanza; un escenario potente para promover el desarrollo de las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría.

Lo anterior favoreció, la toma y el registro de los datos que sirvieron para el posterior análisis, y la obtención de los resultados que permitieron formular las conclusiones de este informe. Finalmente, se describe un resumen de cómo se realizó este estudio, y lo puesto en escena para la elaboración de este trabajo.

A continuación, se presentan las componentes que conforman el marco teórico y la metodología empleada que promovió la puesta en marcha, y el avance de esta indagación.

2.1 Marco teórico

Para realizar el análisis de las situaciones de aprendizaje propuestas para el desarrollo del concepto de congruencia en estudiantes de noveno grado, se tendrá

en cuenta la perspectiva matemática de dicho objeto matemático, además de la importancia dada por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas con respecto a la enseñanza de la geometría, y finalmente lo establecido por Raymond Duval concerniente a la perspectiva cognitiva de la geometría.

2.1.1 Perspectiva Matemática

El concepto de congruencia de figuras fue expuesto por Euclides en su obra los Elementos. En dicha obra introduce 132 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas además de varias proposiciones que se distribuyen en 13 libros.

Euclides (1991) En los Elementos expone las siguientes nociones comunes:

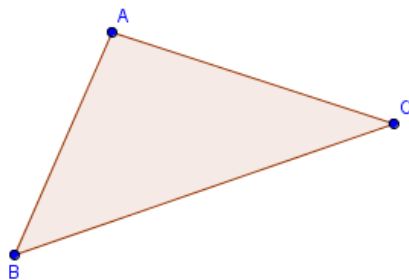
- Las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, los totales son iguales.
- Si cosas iguales se sustraen de cosas iguales, los restos son iguales.
- Las cosas que coinciden entre sí, son iguales.
- El todo es mayor que la parte.

La cuarta noción común en la introducción hecha por Luis Vega en (Euclides, 1991, pág. 60) se dice *“representa un axioma de congruencia que no parece tener la generalidad de las anteriores”*, es decir, tal noción común es un acercamiento a la congruencia geométrica.

También, se presenta la definición: *“Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas”*, además de poner de manifiesto *“De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales y escaleno la que tiene los tres lados desiguales”* (Euclides, 1991, pág. 195).

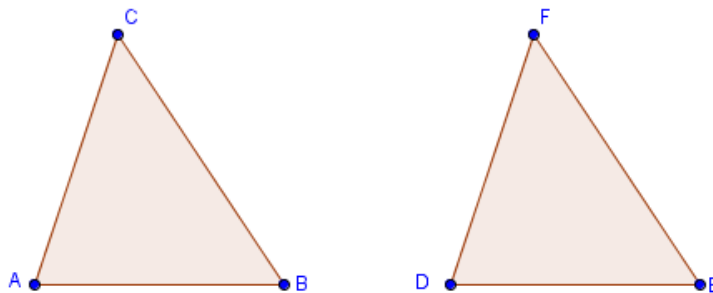
Sin embargo, (Hoyos, 2014) considera las definiciones de triángulo y congruencias de triángulos de la siguiente manera:

- Dados tres puntos A, B, C no colineales, llamamos triángulo a la figura formada por los tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



Los puntos A, B, C se llaman vértices, los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados. (Hoyos, 2014, pág. 27)

- Dos triángulos son congruentes si en alguna correspondencia entre sus vértices, los lados correspondientes y los ángulos correspondientes son congruentes.



Así, la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia si se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} m(\overline{AB}) = m(\overline{DE}) & m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) \\ m(\overline{AC}) = m(\overline{DF}) & m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle E) \\ m(\overline{BC}) = m(\overline{EF}) & m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle F) \end{array}$$

Además, también define las siguientes correspondencias entre triángulos:

- Correspondencia ALA cuando dos ángulos y el lado correspondido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo.
- Correspondencia LAL cuando dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo.
- Correspondencia LLL cuando los tres lados del primer triángulo son congruentes a los tres lados correspondientes del segundo triángulo. (Hoyos, 2014, pág. 30)

En dicho trabajo se considera como axioma: “*Toda correspondencia ALA es una congruencia*”, además, se presentan los siguientes teoremas:

- Teorema: Toda correspondencia LAL es una congruencia.
- Teorema: Toda correspondencia LLL en una congruencia.

Los anteriores conceptos, teoremas y axiomas, permiten el desarrollo de las situaciones de aprendizaje, en donde es primordial que los estudiantes de noveno grado de escolaridad desarrollen el concepto de congruencias, además de reconocer las tres correspondencias antes mencionadas.

2.1.2 Perspectiva curricular

La geometría guarda un papel primordial en la escuela; su enseñanza en ella permite que los estudiantes desarrollen ciertas actividades cognitivas, las cuales en diversas investigaciones se ha establecido la importancia que juegan en el desarrollo del pensamiento espacial, hecho imprescindible en las matemáticas.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) se habla de los sistemas geométricos en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual se considera como “*el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las*

relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998, pág. 37); por consiguiente, el tratamiento en la escuela de estos sistemas es fundamental para promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Entonces, tales sistemas geométricos se construyen haciendo una exploración y modelando el espacio, mediante la manipulación mental y creando sistemas de referencia. En (MEN, 1998) también se expone que:

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales. (pág. 37).

Por consiguiente, el desarrollo de dicho pensamiento espacial, mediante el uso de sistemas de representación y manipulaciones ya sean físicas o mentales, aportan en el aprendizaje de la geometría; de esta manera, el uso adecuado de los objetos geométricos en la realización de actividades de las clases es imprescindible dado el papel tan importante que juegan en la enseñanza de la geometría.

En particular si nos ubicamos en el concepto de congruencias de triángulos, tema a estudiar en este trabajo, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) dicen que al terminar el grado noveno los estudiantes deben conjeturar y verificar propiedades de congruencias entre figuras bidimensionales; además de aplicar y justificar criterios de congruencia en la resolución y formulación de problemas.

En consecuencia, debido a la importancia que se le asignan, tanto al concepto de congruencia de figuras, como a la aplicación de los criterios de congruencia, es pertinente el estudio del desarrollo del concepto de congruencia y sus criterios en un triángulo en la enseñanza de la geometría a estudiantes de noveno grado de escolaridad.

2.1.3 Perspectiva cognitiva

La enseñanza de la geometría en la escuela es una de las grandes problemáticas que se presenta en el campo de investigación en educación matemática, porque ¿cómo hace un docente para que el estudiante le interese la geometría?, ¿qué debe de tener en cuenta un docente para crear situaciones de aprendizaje con el fin de desarrollar conceptos de la geometría en el aula de clases? Las anteriores preguntas surgen dada la necesidad de mejorar la enseñanza de la geometría.

En efecto, Duval (2001, pág.1) menciona que para llevar a cabo un estudio de la enseñanza de la geometría “*se debe tomar en cuenta la complejidad cognitiva subyacente de la actividad geométrica*”, además indica tres procesos cognitivos involucrados en tal actividad:

Procesos de **visualización** con referencia a las *representaciones espaciales* para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva.

Procesos de **construcción** mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como un *modelo* en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.

El **razonamiento** en su relación con los *procesos discursivos* para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación.

Dichos procesos se pueden trabajar por separado, porque por ejemplo el razonamiento depende del manejo de las proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas), de otro lado, en el proceso de visualización en ocasiones no es posible observar propiedades matemáticas, hecho que, en el proceso de construcción,

mediante la manipulación sí. Sin embargo, los procesos tienen una conexión la cual se puede observar en el siguiente diagrama:

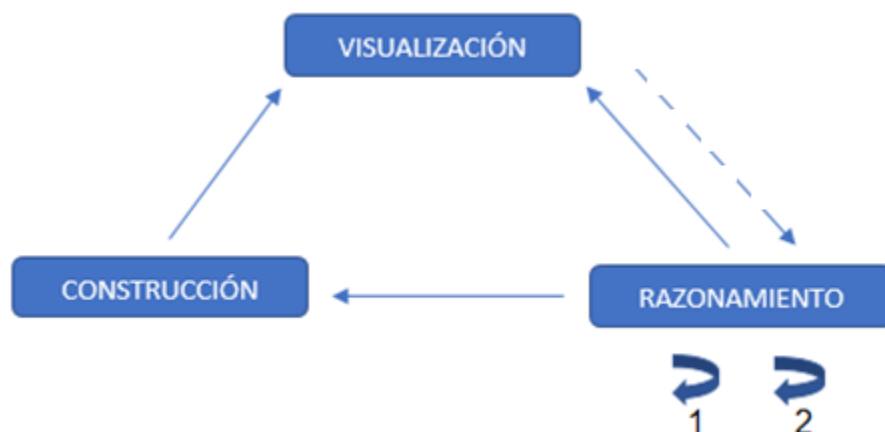


Ilustración 1: diagrama extraído de Duval (2001)

Cada flecha muestra como un proceso contribuye al otro, la línea punteada que parte del proceso de Visualización al Razonamiento representa que no siempre visualizar ayuda a la producción de un razonamiento. La flecha 1 representa el razonamiento realizado en lenguaje natural, la flecha 2 en cambio, expone lo realizado haciendo uso de definiciones, axiomas, teoremas, donde el discurso es desarrollado de manera deductiva.

Duval (2001, pág. 2) dice que la coordinación de los procesos de visualización, construcción y razonamiento solamente ocurre cuando los tres procesos se han desarrollado por separado, y la importancia de la diferenciación de los tipos de razonamiento y visualización ha sido trabajada en el currículo. Entonces veamos cuáles son los tipos de visualización y razonamiento.

Sin embargo, primero se debe considerar la diferencia entre dibujo y figura, el primero es la representación gráfica de una figura, en cambio la figura es la imagen mental de un objeto físico, es decir la figura es “*se puede representar mediante una configuración geométrica –dibujo– y se compone de otras figuras mostradas por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensión*

geométrica menor o igual que la original, las cuales también están vinculadas a afirmaciones matemáticas” (Torregrosa & Quesada, 2007, pág 6).

Ahora, Duval considera el concepto de Aprehensión como la forma de ver la figura matemáticamente, donde *“la identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos”* (Torregrosa & Quesada, 2007, pág 280). En el proceso de visualización, el autor presenta tres tipos de aprehensión:

- Aprehensión perceptiva: hace referencia a lo que a primera vista se identifica.
- Aprehensión discursiva: es la asociación entre la configuración identificada y las afirmaciones matemáticas. Hay dos tipos de dicha aprehensión que dependen de las direcciones de transferencia realizada, lo que se denomina cambio de anclaje:
Del anclaje visual al anclaje discursivo: esto es cuando a una figura se le asocia una afirmación matemática.
Del anclaje discursivo al anclaje visual: esto es cuando se da la afirmación matemática y el estudiante realiza el dibujo que cumpla las características de dicha afirmación.
- Aprehensión Operativa: cuando el estudiante realiza cambios a la configuración inicial para resolver un problema. Hay dos tipos de cambios:
Aprehensión operativa de cambio figural: cuando a la configuración inicial se le añaden o quitan elementos geométricos.
Aprehensión operativa de reconfiguración: *“cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un puzzle”* (Torregrosa & Quesada, 2007, pág 11).

Además, debido a la interacción entre los distintos tipos de aprehensión se tienen tres tipos de cambios con relación al proceso de visualización: el cambio dimensional, el cambio de anclaje y el cambio configural. Se debe tener claro que en el primero no necesariamente se le asocia afirmaciones matemáticas, en cambio en el segundo si, dada su relación con la aprehensión discursiva, donde *“el cambio de anclaje es de gran importancia para coordinar los distintos modos de*

representación al solucionar problemas geométricos” (Torregrosa & Quesada, 2007, pág 14).

Por otra parte, en el proceso de razonamiento se distinguen tres procesos cognitivos. Según Duval (2001) se tiene:

Un proceso puramente configural, descrito arriba como una aprehensión operativa.

Un proceso discursivo natural que es espontáneamente realizado en la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación, argumentación.

Un proceso discursivo teórico que es realizado a través de la deducción. La experiencia de la necesidad lógica está cercanamente conectada a este proceso teórico. Puede ser realizada en un registro puramente simbólico o en el registro de la lengua natural. Pero estos dos registros no proveen ni la misma dificultad ni el mismo significado para los alumnos. (pág. 7).

En el primer proceso se da una coordinación de la aprehensión discursiva y operativa. Tal coordinación depende de la visualización que realiza el estudiante, es decir, si es una visualización icónica o no icónica. Chacón (2012) expresa que:

En la visualización icónica el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo). La visualización no icónica reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura. (pág. 13).

En consecuencia, dependiendo de cómo el estudiante coordine su aprehensión discursiva y la aprehensión operativa, permite el desarrollo de un razonamiento cercano al discurso teórico; por consiguiente, dada la importancia de la visualización y el razonamiento del estudiante, es necesario actividades que

potencialicen y desarrollen las habilidades del estudiante, y así éste construya de la mejor manera posible ese pensamiento espacial tan importante en la Geometría escolar.

Según Duval (2001):

La geometría, más que otras áreas en matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento. Esta debe ser una tarea esencial para la enseñanza de la geometría. Pero se requiere obtener una práctica amplia y bien balanceada de estos procesos cognitivos subyacentes. Esto significa que se requieren situaciones específicas de aprendizaje para la diferenciación y coordinación entre varias clases de procesos en visualización y en razonamiento. (pág. 11).

Por lo tanto, el hecho de plantear situaciones que favorezcan la enseñanza de la geometría en la escuela es primordial, pues de ellas depende que un estudiante le brinde la importancia que se debe a la geometría, debido a que ésta debe ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento, lo que lleva a que en el aprendizaje de la misma se pueda desarrollar habilidades de razonamiento y representación visual en los estudiantes.

2.2 Metodología

Para mejorar el trabajo en el aula es necesario conocer cómo aprenden los estudiantes, es decir, de qué manera adquieren el conocimiento matemático. A través de la observación de la forma como aprenden, y mediante el análisis de las dificultades que tienen cuando aprenden matemáticas, es posible construir algunas situaciones de aprendizaje que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, y de esta forma, ayudar a que los conceptos matemáticos logren ser comprendidos por ellos.

Según lo anterior, y lo establecido por (Molina, Castro , Molina, & Castro, 2011) la investigación educativa ha dado lugar a una metodología que se encarga del análisis del aprendizaje en contexto, denominada *Investigación de diseño*, que a

través del diseño, la implementación de herramientas y estrategias de enseñanza, tales como las situaciones de aprendizaje, busca promover las prácticas de aula, y mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Esta metodología es de naturaleza cualitativa enmarca los experimentos de diseño, y dentro de ésta, se destacan los que se han denominado experimentos de enseñanza. Los experimentos de enseñanza se conforman por episodios de enseñanza en los que participan varios sujetos, entre los que se encuentra el investigador-docente, los estudiantes, y los investigadores-observadores.

Los experimentos de enseñanza presentan tres fases que, en conjunto, establecen la metodología de investigación: la preparación del experimento, la experimentación que promueve el aprendizaje, y el respectivo análisis de los datos recogidos durante la observación.

Para la preparación del experimento, en la primera fase, se tienen en cuenta algunos aspectos, entre los que destacamos los siguientes:

- a. El problema de investigación.
- b. Los sujetos a observar.
- c. La trayectoria de aprendizaje (metas de aprendizaje para los estudiantes, conjetura y actividades de clase)

La intervención en el aula se realiza en la segunda fase del experimento, teniendo en cuenta los siguientes elementos: preparación del diseño, intervención en el aula y recogida de los datos, y análisis local de los datos recogidos.

La última fase es el análisis de los datos. En esta parte del experimento, se organizan y analizan las respuestas de los estudiantes, y se observa la producción de sus tareas. La recopilación de esta información es analizada y se centra en la comprensión de la situación de aprendizaje, es decir, se mira si ha servido o no esta situación en el progreso de los estudiantes. El progreso se hará mediante el análisis del conjunto de datos que se obtienen de dicha observación. Y finalmente, se construye un modelo de aprendizaje o desarrollo de los estudiantes asociado a

un concepto matemático. Este aprendizaje surge como resultado de la forma en que el investigador-docente utiliza las situaciones de aprendizaje que ha diseñado para tal fin. Y, por último, se sacan conclusiones sobre el estudio realizado.

2.2.1 Los Experimentos De Enseñanza

A través de los experimentos de enseñanza se piensa contribuir al desarrollo de las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría. Es decir, con este experimento se pretende promover en los estudiantes un acercamiento al desarrollo de los procesos cognitivos de construcción, visualización y razonamiento, que se encuentran relacionados cuando se aprende geometría.

Para esto, se implementará una situación de aprendizaje conformada por algunas actividades enmarcadas en el proceso de la resolución de problemas.

Estos problemas conforman las actividades de aprendizaje, donde el objeto matemático a trabajar es la congruencia entre triángulos. Cada problema debe estar relacionado con la visualización, la construcción y el razonamiento; es decir, los problemas a trabajar tendrán un poco de cada una, haciendo énfasis en los procesos de visualización y razonamiento, de modo que se realice las primeras pinceladas en el desarrollo de estos procesos cognitivos.

Con este experimento de enseñanza se quiere incentivar el aprendizaje de la geometría, en particular el concepto de congruencia entre figuras; y de ese modo favorecer el desarrollo de las actividades cognitivas de los estudiantes, y de esta forma contribuir en el desarrollo de su pensamiento espacial, el cual es importante en la actividad matemática.

Las Fases

Dentro de las fases del experimento de enseñanza, se tienen como asuntos particulares de interés para este trabajo los siguientes:

- Planear actividades de clase que promuevan el aprendizaje de los estudiantes; en particular, el concepto de congruencia.
- Implementar en el aula un experimento de enseñanza que ayude a promover el desarrollo de las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría.
- Tomar un registro de datos mediante la aplicación de un experimento de enseñanza.
- Analizar los datos arrojados en la observación.
- Presentar un concepto matemático a través de una metodología diferente a la usada tradicionalmente.
- Realizar un diseño de una situación de aprendizaje enmarcado en el experimento de enseñanza.
- Hacer una reflexión en torno a esta metodología que ayuda a los docentes de matemáticas en su labor educativa, presentando los saberes de una forma diferente a la habitual.

De lo anterior, tenemos que el problema de investigación se formula con el fin de realizar un estudio de una problemática que se ha identificado en el contexto escolar. A esta problemática se le asocia un grupo de estudiantes, cuyas características es necesario estudiar para ayudarles a mejorar en su desempeño y desarrollar ciertas habilidades que les permitan desenvolverse con éxito en la sociedad.

Una vez identificado el problema de investigación se describe a los sujetos elegidos que serán objeto de estudio, con el fin de establecer una trayectoria de aprendizaje. Esta trayectoria la conforman las metas de aprendizaje para los estudiantes; una conjetura que sirve de guía en la investigación; ésta a su vez la componen dos dimensiones, la de contenido y la pedagógica; y las actividades de clase.

Con los elementos anteriores se obtienen los datos que serán analizados en la fase final del experimento. Y de esta forma, mediante la implementación de estas

fases, el experimento de enseñanza permite observar y comprender cómo los estudiantes aprenden y construyen los conceptos matemáticos mediante su razonamiento. Se busca pues, promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes a través de la implementación de una metodología distinta a la usual.

2.2.2 Las situaciones, su diseño e implementación

Por medio de grabación de video en las clases de matemáticas y la producción escrita de los estudiantes, se registraron los datos sobre las diversas actividades que apuntan al aprendizaje de la congruencia de triángulos, a partir de la implementación del uso de instrumentos no convencionales, con el fin de aproximar a los estudiantes al desarrollo de los procesos cognitivos de visualización y razonamiento.

La situación de aprendizaje se presenta como un ejercicio realizado en algunas clases de geometría del grado noveno del colegio San Gabriel Fundesia, en virtud de un Experimento de Enseñanza. En este trabajo de grado se analizan dos situaciones clasificadas en situación 1 y 2, y compuestas cada una por tres actividades, con el fin de que los estudiantes tengan un acercamiento al concepto de congruencia, y puedan desarrollar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento.

Las situaciones de aprendizaje 1 y 2 están conformadas por tres actividades, cada actividad se encuentra asociada a una conjetura y a una meta de aprendizaje. Algunos de los apartados de las actividades fueron grabados en video generando de esta manera episodios de clase, que posteriormente permitieron la clasificación de los mismos, y con esto se construyó una rejilla de análisis.

La rejilla de las situaciones 1 y 2 la conforman dos categorías denominadas: se logra y no se logra, que se refieren a si las metas de aprendizaje fueron abordadas

satisfactoriamente o no. Es decir, si los estudiantes con estas actividades alcanzan la meta de aprendizaje, o por el contrario el contenido de las actividades no es suficiente para abordar con satisfacción cada una de las metas. La construcción se toma como componente de ambas categorías dependiendo de que si se realizó o no una construcción por parte de los estudiantes en las actividades. Esta componente hace referencia a la forma en que el estudiante utiliza los instrumentos dados para realizar la construcción pedida en cada una de las actividades. En esta parte, se observa la manera en que el estudiante hace uso de instrumentos no convencionales como las plantillas y reglas para construir un triángulo.

Es importante saber cómo los estudiantes aprenden los conceptos matemáticos que se les propone en el aula de clase. Con el fin de contribuir al mejoramiento de la comprensión de estos conceptos, y de esta manera promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Es necesario emplear una metodología que facilite el estudio de algunas variables que se debe considerar cuando se analiza la forma en que los estudiantes aprenden.

La metodología empleada en esta investigación se denomina: “experimentos de enseñanza” conformada por tres fases fundamentales que componen los pasos a seguir durante todo el estudio. A saber, preparación del experimento, experimentación, y el análisis retrospectivo de los datos. En este documento se considera la primera, la preparación del experimento, que a su vez contiene ciertos elementos que se deben considerar, para obtener la información que posteriormente será objeto de análisis en la fase final de la investigación.

El primer elemento a considerar dentro de esta primera fase, es el problema de investigación que se piensa abordar. El problema se formula mediante la siguiente pregunta:

¿Qué aspectos de la visualización y el razonamiento se deben considerar para el diseño de una situación de aprendizaje en el grado noveno de escolaridad, respecto a los criterios de congruencia entre triángulos?

El segundo elemento importante dentro de esta primera parte de preparación, son los sujetos participantes de este estudio. Es decir, en esta investigación se ha tomado como objeto de observación a los estudiantes de grado noveno del Colegio San Gabriel Fundesia. Este grupo está conformado por 30 estudiantes pertenecientes a los estratos 1 y 2 de las comunas 18 y 54 de Santiago de Cali, con edades que oscilan entre los 13 y 17 años. Se ha escogido a este grupo porque el docente-investigador comparte más tiempo con ellos, y conoce las características de los estudiantes, es decir, no es ajeno a su problemática social y académica.

La relación de congruencia es de vital importancia dentro de los saberes que deben aprender los estudiantes desde el inicio de la educación básica primaria hasta el bachillerato; pues, mediante el estudio de este concepto matemático en geometría, los estudiantes tienen un acercamiento a la comprensión de la igualdad entre figuras y al estudio de sus propiedades.

Un segundo elemento es la trayectoria de aprendizaje, que tiene a su vez tres elementos que se deben considerar; los cuales son: las metas de aprendizaje, la conjetura que guía el proceso de investigación, y las actividades de clase.

Metas de aprendizaje para los estudiantes

Es de gran importancia en esta investigación los objetivos de instrucción, es decir, las metas de aprendizaje que los estudiantes deben alcanzar. Como metas tenemos las siguientes:

- Reconoce el concepto de congruencia.
- Comprende el concepto de congruencia.
- Caracteriza los criterios de congruencia entre triángulos.
- Aplica los criterios de congruencia entre triángulos en la resolución de problemas.

Actividades de clase (diseño)

En esta parte de la preparación del experimento, se proponen algunas tareas para que los estudiantes trabajen en el aula con el fin de obtener la información necesaria para el posterior análisis de estos datos. Estas actividades de clase en forma conjunta conforman lo que se ha denominado situación de aprendizaje.

Según lo dicho en este capítulo, se establecen las bases necesarias para abordar el concepto de congruencia entre figuras, y promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en este grado de escolaridad, mediante una metodología potente que le dará grandes aportes al investigador-docente para mejorar su trabajo, y de esta forma contribuir al mejoramiento del desempeño de los estudiantes.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de la información de los registros que se obtuvieron de las situaciones 1 y 2, teniendo en cuenta las categorías de la rejilla de análisis: se logra y no se logra. Como componentes de las categorías se considera relevante para este trabajo el análisis de una figura en función del reconocimiento perceptivo, el conocimiento de las propiedades geométricas, el uso de instrumentos para construir, y el análisis del discurso natural de los estudiantes.

Para la realización de este análisis, se han considerado dos temas de gran importancia para esta investigación, identificados durante la revisión de la información suministrada en la implementación del experimento de enseñanza; a saber, la visualización con reconocimiento perceptible y el razonamiento que presentaron los estudiantes en los procesos de solución en cada una de las actividades de las situaciones.

A continuación se presentan las dos situaciones aplicadas en el marco de un Experimento de Enseñanza, sus características y componentes tales como: su descripción general, el análisis local de las situaciones, el análisis sobre el alcance de las metas de aprendizaje en cada situación, y el análisis retrospectivo.

Este último reúne los elementos que permitieron la elaboración de una tercera propuesta en virtud del aprendizaje del concepto de los criterios de congruencia entre triángulos; para el alcance de las metas de aprendizaje que no se abordaron en las dos primeras situaciones, y favorecer al desarrollo de las actividades cognitivas asociadas al aprendizaje de la geometría.

3.1 Situación 1

3.1.1 Descripción general

Esta situación de aprendizaje está conformada por tres actividades de reproducción de una figura, específicamente triángulos, mediante el uso de instrumentos no convencionales de construcción. Estas tareas consisten en la producción de una representación gráfica de triángulos que debe conservar las propiedades de los triángulos entregados.

La situación se aplica en el marco de un experimento de enseñanza en el cual se establece una conjetura y las dos dimensiones de la misma. En esta se involucran los elementos y características propias de la situación.

De acuerdo a la investigación de (Galeano, 2015), se considera para la situación 1 lo siguiente:

Conjetura: *el uso de plantillas como instrumentos no convencionales permite que los estudiantes conozcan las características y propiedades de la congruencia entre figuras geométricas.*

Dimensión pedagógica: *las actividades de superposición de triángulos, representación y construcción de dichas superposiciones, además del razonamiento realizado, constituyen un ambiente de aprendizaje ideal para que los estudiantes a través de la manipulación de instrumentos no convencionales exploren las características de la congruencia entre triángulos.*

Dimensión del contenido: *los triángulos, al ser una figura familiar a los estudiantes, se convierten en un elemento clave para estudiar las características de comparación entre ellos, como la forma y el tamaño, necesarios para abordar el concepto de congruencia.*

Actividad 1

Tiene como finalidad introducir a los estudiantes en el tipo de tareas que componen la situación de aprendizaje, debido a que no se encuentran familiarizados con este tipo de actividades. Para esto, se plantean cinco preguntas relacionadas con la caracterización y clasificación de un triángulo, que será la figura fundamental para esta actividad, pues, es una figura fácil de identificar por los estudiantes; pero cuyas propiedades es necesario analizar.

Por estas razones, se tiene en cuenta los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes identifiquen los elementos que conforman un triángulo.

Meta de aprendizaje: Identificar los elementos que conforman un triángulo.

Los materiales de trabajo para esta actividad la conforman cinco plantillas, la primera es una regla no graduada con un solo lado rectilíneo; las otras cuatro representan diferentes tipos de triángulos. La siguiente ilustración, muestra los instrumentos empleados por los estudiantes en esta actividad.



Ilustración 2: plantillas de la actividad 1

SITUACIÓN 1. ACTIVIDAD 1

Usando los instrumentos que se te entregaron, responde las siguientes preguntas.

1. ¿qué longitud tiene la regla? _____ ¿cómo logró encontrar dicho valor?

2. ¿Alguno de los lados de los triángulos tiene la misma longitud de la regla?
3. En la siguiente tabla, escribe la longitud de los lados de cada uno de los triángulos.

Longitud	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3	Triángulo 4
Lado 1				
Lado 2				
Lado 3				

4. Compara los ángulos de cada uno de los triángulos y llena la siguiente tabla, donde vas a suministrar la cantidad de lados y ángulos iguales.

Triángulos	Lados iguales	Ángulos iguales
Triángulo 1		
Triángulo 2		
Triángulo 3		
Triángulo 4		

5. Con la información obtenida en los puntos anteriores, realiza la clasificación de cada uno de los triángulos suministrados.

Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3	Triángulo 4

Actividad 2

Se pretende familiarizar a los estudiantes con el proceso de construcción de triángulos dados dos o tres segmentos por medio del uso de plantillas que se convierten en instrumentos no convencionales de construcción y caracterizar el concepto de desigualdad triangular. Por tal motivo, la actividad presenta tres partes; la primera tiene como propósito familiarizar al estudiante con los elementos que conforma un triángulo; la segunda aproxima al estudiante a la propiedad que guardan los triángulos: desigualdad triangular; y la tercera busca que el estudiante

emplee lo que aprendió en las partes anteriores. En esta actividad se tiene en cuenta los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes conozcan las características de la desigualdad triangular.

Meta de aprendizaje: caracterizar la desigualdad triangular.

Los materiales empleados en esta actividad la conformaron varias reglas, que fueron utilizadas para construir los triángulos con las características pedidas en cada ítem. La siguiente ilustración, muestra los instrumentos utilizados por los estudiantes en esta actividad.



Ilustración 3: plantillas de la actividad 2

SITUACIÓN 1. ACTIVIDAD 2

Parte 1

- Usando los instrumentos que se te entregaron construye un triángulo.
- Con los mismos instrumentos dados construye otro triángulo diferente al anterior.
- ¿cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿por qué?

Parte 2

- Usando los instrumentos que se te entregaron (dos reglas), construye, si es posible, un triángulo. Explique ¿por qué es posible o no la construcción del triángulo?

- b. Usando los instrumentos dados (tres reglas), construye, si es posible, un triángulo. Explique ¿por qué es posible o no la construcción del triángulo?
- c. Usando los instrumentos dados (tres reglas), construye, si es posible, un triángulo que tenga como lados la longitud de las reglas. Explique ¿por qué es posible o no la construcción del triángulo?

Parte 3

Dadas las siguientes medidas de segmentos, decida en cada uno de los casos, si con ellas se puede o no construir un triángulo. Justifique su respuesta.

- a. 5 cm, 2 cm, 1 cm.
- b. 6 cm, 11 cm, 7 cm.
- c. 10 cm, 5 cm, 2 cm.
- d. 7 cm, 2 cm, 4 cm.

Actividad 3

Se pretende que los estudiantes identifiquen por medio de la exploración y el uso de plantillas los criterios de congruencia, lado-ángulo-lado, ángulo-lado-ángulo y lado-lado-lado. Para esto se proponen dos momentos. El primero consiste en construir un triángulo a partir de cierta información suministrada por el docente o algún compañero de clase, y el segundo momento se conforma de cinco preguntas que acercan al estudiante a los criterios de congruencia.

Para esta actividad se tiene en cuenta los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes conozcan las características de los criterios de congruencia.

Meta de aprendizaje: Caracterizar los criterios de congruencia entre triángulos.

Los instrumentos utilizados en esta actividad la conforman plantillas que representan a los ángulos, y los lados de un triángulo. La siguiente ilustración, muestra los materiales empleados por los estudiantes en esta actividad.

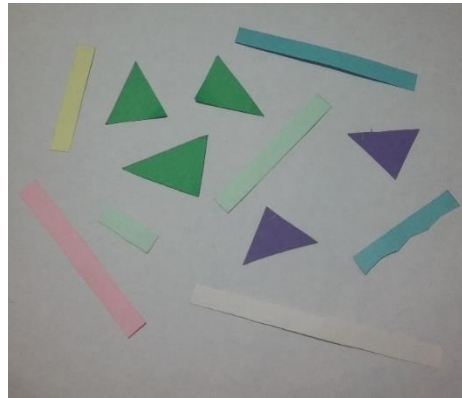


Ilustración 4: plantillas de la actividad 3

SITUACIÓN 1. ACTIVIDAD 3

Parte 1

Con uno de tus compañeros y con los instrumentos que se les entregó, construye un triángulo igual al dado por el profesor. Para esto, uno de los dos debe darle cierta información a su compañero, para que éste logre construir el triángulo pedido.

Parte 2

Contesta las siguientes preguntas.

- Dados dos lados, ¿con esta información es suficiente para construir el triángulo dado? _____ ¿por qué? _____

- Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, ¿es posible obtener el mismo triángulo? _____ ¿por qué? _____

- Dados dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, ¿se puede construir un triángulo igual al dado? _____ ¿por qué? _____

- Dados tres ángulos, ¿es posible construir un triángulo igual al dado? _____ ¿por qué? _____

-
-
- e. Dados tres lados, ¿se puede construir un triángulo igual al dado?_____ ¿por qué?_____
-
-
-

3.1.2 Análisis local de la situación 1

Para la situación 1 se registraron videos y producciones escritas por los estudiantes, que mostraran elementos importantes para la visualización y el razonamiento. A continuación, se presentan los episodios seleccionados de los videos más relevantes para este trabajo; correspondientes a las actividades 2 y 3, y cuyas transcripciones se encuentran en los anexos.

Actividad 2. Construcción de triángulos a partir de instrumentos suministrados

Se presentan algunos episodios de clase correspondientes a la actividad 2, donde los estudiantes construyeron un triángulo con dos reglas de diferente longitud y color. En esta actividad se registra la conversación del profesor con algunos de los estudiantes del curso. Para esto, se utilizan símbolos de convención como (P) para referirse al profesor de la clase y (E) para algún estudiante del grupo.

Construcción de un triángulo con dos reglas

La siguiente tabla muestra el primer episodio que corresponde a una conversación del profesor con un estudiante (E1) que utiliza las reglas como plantilla para construir un triángulo.

Tabla 1. Episodio 1: Actividad 2. Parte 2.a. Uso de las herramientas como plantilla

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3713 ítem a. 0:01:12 [1] E1: toca utilizar una, dos veces para poder construir el triángulo, porque con dos no más no vas a poder, entonces tendrías que hacer este procedimiento, así. [2] P: entonces lo que tú dices es que usando solamente dos reglas puedo construir una parte, cierto, o sea, formando un ángulo, y para poder construir realmente el triángulo... [3] E1: se forma así [4] P: si [5] E1: entonces para poder construir el triángulo usas de nuevo, nuevamente una regla, y los trazos serian así; y entonces allí te va a quedar el triángulo. 0:01:46	[1] E1 toma las reglas blanca y amarilla formando un ángulo con ellas, y traza dos lados del triángulo. [3] E1 traza el lado que le faltaba utilizando por segunda vez la regla amarilla. [5] E1 realiza los trazos sobre la hoja de papel usando la regla blanca.

La estudiante número 1 explica el procedimiento que empleó para construir un triángulo mediante la utilización de las reglas como plantilla. Para ello, en [1] ubica los instrumentos formando un ángulo comprendido entre las dos, y traza dos segmentos que corresponde a una parte del contorno de la figura. Luego, en [3] utiliza nuevamente una de las reglas para trazar otro segmento que es la parte del contorno que hace falta. Obteniendo como resultado el triángulo pedido. La siguiente ilustración muestra dos de los pasos realizados por la estudiante en el proceso de construcción.



Paso 1



Paso 2

Ilustración 5: proceso de construcción del triángulo

Los trazos que realiza la estudiante corresponden a segmentos de recta; debido a la utilización de las reglas como plantilla que producen formas 2D (Duval, 2005), lo que le permite construir el contorno de la figura. Y, de esta forma, resolver el problema de construcción propuesto en la actividad.

Se presenta el segundo episodio seleccionado que evidencia la realización de trazos en 1D para construir el triángulo. Mientras que el experimento sigue su curso, se entrevista algunos estudiantes que ya han construido el triángulo con los instrumentos entregados, y se les pide que expliquen su procedimiento de construcción.

Tabla 2. Episodio 2: Actividad 2. Parte 2.a. Trazos de forma individual

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3715 ítem a. 0:00:00 [1] P: ¿cómo lo construiste? [2] E2: con la regla blanca la puse aquí, trace la línea, para que me pudiera formar bien, después la amarilla, deje la blanca por aparte y puse la amarilla aquí (señala en el triángulo que construyo), trace la línea, me faltaba una regla, como no tenía más, bueno tenía más, pero para que me pudiera trazar bien el triángulo, cogí otra y trace la línea que quedaba, para poder armar el triángulo (señala en el triángulo que construyo), queda aquí, y	[2] E2 ubica la regla blanca sobre el segmento que trazó, y la retira a un lado. Luego, toma la regla amarilla y la sitúa en otro borde y señala el trazo que realizó con ella. Después, con la misma regla del paso anterior manifiesta que construyó el lado faltante del triángulo.

ya. 0:00:25	
----------------	--

La estudiante número 2 manifiesta en [2] que para construir el triángulo toma cada regla y realiza trazos individuales, y utiliza por segunda vez una de ellas para completar el contorno de la figura. De esta manera, el estudiante muestra como utiliza los instrumentos para obtener el triángulo de la actividad. En la siguiente ilustración se muestra algunos pasos que realizó la estudiante en la construcción del triángulo pedido.

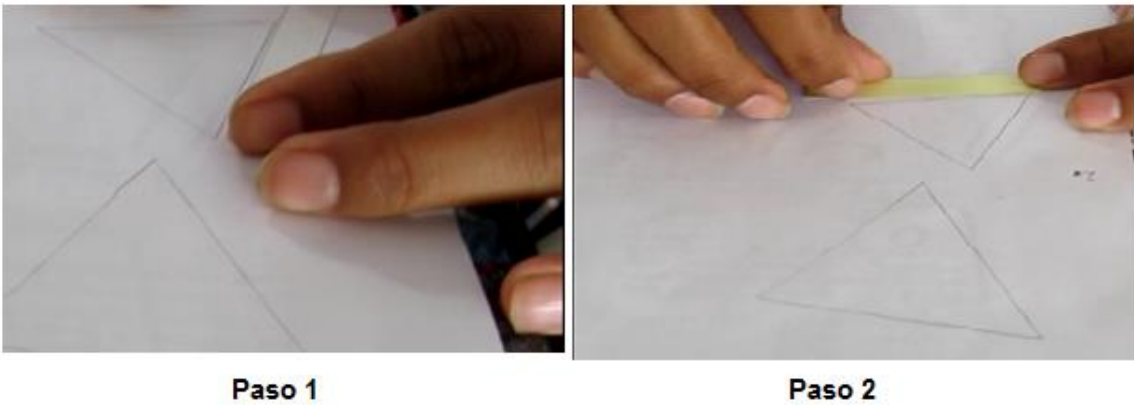


Ilustración 6: proceso de construcción del triángulo

Los trazos realizados por la estudiante se efectuaron por medio de la utilización de las reglas que son instrumentos de trazado gráfico que producen formas 1D (Duval, 2005); lo que le permitió construir el triángulo pedido en el problema de construcción propuesto en la actividad.

En el tercer episodio seleccionado, se tiene a un estudiante que manifiesta que no es posible construir un triángulo con las reglas.

Tabla 3. Episodio 3: Actividad 2. Parte 2.a. No se puede construir el triángulo

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3698 ítem a.	

0:00:12 P: ¿se puede construir el triángulo? [1] E15: porque, porque con dos reglas no es posible hacer un triángulo, porque para hacer un triángulo se necesitan de tres reglas. P: porque tres reglas [2] E15: porque entonces si yo coloco esto así faltaría el pedazo de acá abajo, de cualquier manera, que lo coloque faltaría un lado 0:00:29	[1] E15 ubica las reglas sobre el papel y señala la parte que le hace falta para formar el triángulo. [2] E15 muestra la posición de sus reglas, que forman un ángulo comprendido entre ellas.
---	---

El estudiante número 15 manifiesta en [1] que no se puede construir un triángulo con las reglas asignadas, porque hace falta una tercera regla que le permitiría obtener el tercer lado. En [2] se tiene un ángulo comprendido entre las reglas, debido a la posición que realiza con los instrumentos, y por el que podría trazar una parte del contorno de la figura; para luego completar la figura empleando otra vez una de las reglas; a pesar de esto el estudiante insiste en que no es posible construir el triángulo.

Con los episodios que se describieron anteriormente, y que hacen parte de una selección realizada de todo lo que aconteció durante la implementación, se elabora un análisis que relaciona lo ocurrido con lo esperado según la trayectoria de aprendizaje propuesta en la actividad. De esta forma, se identifican dos temas que son relevantes para centrar la discusión en esta parte del trabajo, que a continuación se presentan.

Visualización reconocimiento perceptible

Los estudiantes de los episodios 1 y 2, presentan similitudes en los procedimientos realizados para la construcción del triángulo con las reglas entregadas. Pues, ambos utilizan dos veces una de las reglas para trazar el contorno cerrado de la figura. Es decir, a cada regla le asocian un único lado del triángulo. Así, los trazos realizados se obtienen con instrumentos que producen formas 1D, en este caso las reglas asignadas.

Los estudiantes identifican la forma 2D, el contorno cerrado de la figura, porque consideran que el triángulo está formado por tres lados. En uno de los procedimientos hacen uso de las dos reglas y construyen dos lados del triángulo, donde el vértice es un punto que comparten los segmentos, y a partir de los puntos extremos de cada segmento se traza el tercer lado. Aquí las reglas se emplean como plantillas produciendo una forma 2D. En el otro procedimiento, el uso de las reglas por separado permite realizar trazos rectilíneos individuales, que corresponden a las formas 1D.

El estudiante del tercer episodio identifica contornos cerrados, la forma 2D, por lo que asocia a cada regla un lado del triángulo. Por esta razón, manifiesta que no se puede construir porque hace falta una tercera regla para el lado restante, y como el triángulo tiene tres lados concluye que se necesitan tres reglas.

Los estudiantes identifican el contorno cerrado de la figura como resultado de una aprehensión perceptiva; es decir, reconocen la representación gráfica, dibujo, de la figura geométrica triángulo. Por esta razón, los lados del triángulo lo asocian con los instrumentos utilizados, en este caso se establece una correspondencia entre los lados del triángulo y las reglas.

Lo anterior implica que, la meta de aprendizaje correspondiente a esta actividad no se satisface porque la percepción visual de los estudiantes no garantiza que en esta parte de la actividad se pueda caracterizar la desigualdad triangular; debido a que sólo asocian los lados del triángulo con las reglas, y no tienen en cuenta la longitud de las mismas para construir el triángulo pedido.

Razonamiento

Los estudiantes tienen una idea inicial de lo que es un triángulo, en consecuencia, al emplear las reglas para realizar la pregunta su percepción visual los lleva a asociar cada lado con cada regla. De lo anterior, se puede decir que se presenta una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo.

Por medio del lenguaje natural los estudiantes explican el procedimiento que realizaron para construir un triángulo, o por el contrario argumentan porque no se puede realizar la construcción de la figura.

Construcción de un triángulo con tres reglas

Continuando con la actividad 2, considere la segunda parte, en el inciso c, donde los estudiantes deben construir un triángulo usando tres reglas; y cuyos lados deben tener la longitud de que cada una de las reglas. A continuación, se presenta los episodios seleccionados para ilustrar lo más relevante para este trabajo.

La siguiente tabla muestra el primer episodio seleccionado donde un estudiante del curso manifiesta que el triángulo no se puede construir.

Tabla 4. Episodio 1: Actividad 2: Parte 2.c. No se puede construir el triángulo

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3717 ítem c. 0:00:40 E3: no da, no da P: porque no es posible [1] E3: porque lo que pasa es que la blanca es demasiado larga como para unirse con los otros puntos, es muy larga y los otros son demasiado pequeños como para unirlos P: o sea, estas dos reglas son muy cortas (reglas verde y amarilla); tienen una longitud muy pequeña en comparación con la más larga E3: ujum P: y por esa razón no es posible construirlo E3: si, es imposible 0:01:09	[1] E3 ubica la regla de mayor longitud junto a otra regla formando un ángulo entre ellas, luego toma la tercera regla y trata de formar el triángulo sin conseguirlo.

El estudiante número 3 en [1] menciona que la longitud de las reglas no permite construir el triángulo; porque una de ellas es demasiado larga en comparación con las otras que tienen una longitud menor. Pues, trata de formar el triángulo con las reglas situando una en seguida de la otra; pero no lo consigue.

El siguiente episodio muestra a dos estudiantes que realizan una conversación en torno a que el triángulo pedido no se puede construir debido a la longitud de las reglas entregadas. Realizan la acción de juntar las reglas, una enseguida de la otra, para apreciar si se puede formar un triángulo.

Tabla 5. Episodio 2: Actividad 2. Parte 2.c. Juntar las reglas

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3721 ítem c. 0:00:32 [1] E1: no da, para poder unir las estas (reglas verdes) son demasiado cortas, entonces no llega para poder unir las E2: deberían ser todas tres de la misma longitud E1: o no tanto de la misma, pero deberían una de estas ser un poquitico más larguita [2] E2: no, o sea, simplemente una debería, para formar esto, una debería, ejemplo ésta debería ir aquí, tendría un poquito, esta (regla verde) un poquito aquí con un, digamos un borde aquí (usa las reglas verdes), y esta, no, si algo así, que llegara y uniera la punta de acá P: o sea una de las dos debe ser más larga E2: una de las dos debería ser un poquito más larga para poder unirla y así crear el triangulo 0:01:41	[1] E1 toma las reglas y trata de formar el triángulo uniendo las reglas una en seguida de la otra [2] E2 ubica la regla rosada sobre el papel y las reglas verdes las sitúa una en seguida de la otra formando una sola regla

En [1] tenemos a un estudiante que trata de formar un triángulo con las reglas asignadas mediante la acción de juntarlas una enseguida de las otras; pero no lo consigue pues afirma que las reglas son demasiado cortas. Mientras que otro estudiante, en [2], ejecuta una acción similar, pues junta dos de las reglas formando una sola con el objetivo de alcanzar uno de los extremos de la tercera regla, sin conseguir formar el triángulo. Por tanto, los estudiantes llegan a la conclusión de que la longitud de una de las reglas debe ser mayor que las otras.

En el siguiente episodio se muestra a dos estudiantes en una conversación con el profesor del curso, y se puede evidenciar que algunos de ellos identifican la necesidad de que la longitud de dos de las reglas en forma conjunta, debe ser mayor que la longitud de la tercera regla, para que se pueda formar el triángulo

pedido. Lo que implica, un acercamiento a lo que se conoce como la desigualdad triangular.

Durante el desarrollo de esta parte de la actividad estos estudiantes formaron el triángulo con las reglas entregadas, y se dieron cuenta que al adicionar la longitud de una regla a otra se obtenía una longitud mayor que la correspondiente a la tercera regla, mediante la comparación de longitudes. Al observar esto, el profesor del curso realiza la siguiente pregunta: ¿Cuándo ustedes comparan esos dos lados, cuando las juntan, qué deben cumplir para que se pueda formar el triángulo?

Tabla 6. Episodio 3: Actividad 2. Parte 2.c. Acercamiento a la desigualdad triangular

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3728 0:07:20 [1] E1: deben, cuando se unen siempre tiene que llegar uno más largo que el otro P: ¿cuándo se unen? cuando E2: dos reglas para formar otra 0:07:32	[1] E1 sitúa la regla de menor longitud enseguida de otra mucho más larga y que juntas sobrepasan a la regla de mayor longitud

Según la respuesta a la pregunta, los estudiantes han logrado identificar que el triángulo se puede formar con las reglas cuando al juntar dos de ellas supera en longitud a la tercera como se menciona en [1]. Sin embargo, enunciar dicha propiedad de forma correcta aún es complicada para los estudiantes. Pues como se ve en el siguiente episodio.

Tabla 7. Episodio 4: Actividad 2. Parte 2.c. Relación entre los lados del triángulo

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3728 0:08:12 P: usted que puede decir, teniendo en cuenta dos lados y haciendo esa adición de dos lados, ¿qué propiedad debería cumplir con respecto al otro para que pueda formar el triángulo? [1] E1: cuando en este caso, bueno en todos los casos son tres regletas no, y cuando uno las une de modo que queden solo dos reglas	[1] E1 forma una sola regla uniendo los extremos de dos de ellas y situándola en seguida de la regla de mayor longitud

siempre tiene que tener una más larguita que la otra. 0:08:44	
--	--

El estudiante en [1], llega a la comparación de solo dos reglas, en donde una de ellas es el resultado de juntar dos reglas de menor longitud, y que resultan de longitud mayor que la tercera. Dicha comparación se realiza respecto a la regla de mayor longitud, es la magnitud de referencia, no tienen en cuenta las posibles combinaciones que existen para comparar la longitud de las reglas. Por esta razón, tienen dificultad para identificar la relación ser “mayor que” entre la longitud de las reglas; lo que le permitiría acercarse a la afirmación de la desigualdad triangular.

Visualización reconocimiento perceptible

A continuación, de la misma actividad 2, consideremos la segunda parte, precisamente en el inciso (c); aquí los estudiantes realizan la acción de juntar uno de los extremos de dos de las reglas para formar un triángulo sin hacer ningún trazo. Primero formando un ángulo comprendido entre las reglas y observando si pueden unirlo con uno de los extremos de la tercera regla. Luego, formando una sola regla a través de la unión de los extremos de dos reglas, generando una especie de adición de longitudes de los instrumentos. Esto permite observar un primer acercamiento por parte de los estudiantes a la comparación de las longitudes de las reglas, acción que se vuelve necesaria para saber si con los instrumentos es posible construir un triángulo con las características que se pide en la actividad.

En esta parte los estudiantes identifican las superficies o los contornos cerrados, es decir, reconocen las formas 2D. Por esta razón, asocian a los lados de un triángulo con cada una de las reglas. Así, por medio de la identificación de las formas 1D (segmentos) desean obtener una forma 2D (triángulo), en este caso se tiene un cambio dimensional.

Razonamiento

Los estudiantes utilizan el lenguaje natural para describir y explicar sus procedimientos de construcción. De igual forma, para argumentar porque no se puede construir el triángulo pedido.

En esta parte se evidencia un acercamiento a la aprensión operatoria debido a la manipulación que se hace con las reglas para comparar sus longitudes respecto a la más grande, y solucionan el problema con una conjetura, la cual dice: se puede construir un triángulo si al juntar dos reglas su longitud es mayor que la tercera regla.

Actividad 3. Construcción de triángulos a partir de condiciones dadas

En la actividad 3 también se toma en consideración aspectos relevantes para este trabajo; tales como la percepción con reconocimiento de los elementos y propiedades de la figura en relación con la congruencia de triángulos. A continuación, se presentan algunos episodios que describen las respuestas de los estudiantes, donde el propósito es llegar a la igualdad de dos objetos a partir de condiciones dadas.

Para lo anterior, se considera la segunda parte de la actividad donde los estudiantes deben construir un triángulo que satisfaga las condiciones establecidas por el profesor, y se obtenga un acercamiento a lo que es la congruencia entre triángulos.

Dados dos lados no es posible construir un triángulo congruente al del profesor

En la siguiente tabla se muestra la conversación del docente del curso con dos estudiantes que llegan a la conclusión de que por falta de instrumentos no es posible construir un triángulo idéntico al del profesor.

Tabla 8. Episodio 1: Actividad 3. Parte 2.a. Usando sólo dos reglas.

Lo dicho por los estudiantes

MVI_3731 ítem a.

0:00:00

P: ¿el que nosotros tenemos es suficiente para construir el mismo triángulo?

E1: no creo

P: ¿Por qué?

E1: porque solo tengo dos fichas y tendría que volver a utilizar una, otra bueno la misma para que me pueda dar el triángulo que usted me dice

P: pero, eso garantiza ¿que sea el mismo triángulo que yo tengo?

E1: no

P: cierto que no, hace falta más información

E2: si falta información, faltaría una ficha más para poder construir el triángulo y para poderlo formar o sea que con estas dos fichas no podríamos (solo se les dio dos reglas)

0:00:28

En esta parte de la actividad se evidencia que los estudiantes conservan algunos aspectos de la actividad 2, pues asocian la necesidad de que para construir un triángulo se necesitan comparar las longitudes de las reglas y les hace falta una regla, por lo que la comparación entre las longitudes no es posible. Por esta razón, afirman que no se puede construir el triángulo con dos reglas, y que satisfaga las condiciones iniciales del enunciado del problema porque es necesario de una tercera regla.

Visualización reconocimiento perceptible

El estudiante presenta una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo porque sólo puede ver dos reglas y lo relaciona con dos lados del triángulo, por eso afirma que le hace falta otra regla.

Razonamiento

El estudiante sólo explica porque no se puede construir el triángulo mediante el discurso natural. Por consiguiente, solo presenta el proceso discurso natural. Es decir, el estudiante hace uso del lenguaje cotidiano para justificar porque no se puede construir un triángulo con las mismas características de la figura geométrica del profesor; y para esto, se basan en el reconocimiento perceptible que obtienen de la figura, lo que les permite argumentar sus respuestas.

Dados dos lados y un ángulo si es posible construir un triángulo congruente al del profesor

El propósito del ejercicio (b), es familiarizar a los estudiantes con el criterio lado-ángulo-lado (LAL), por medio de la construcción de un triángulo que debe ser congruente al triángulo suministrado por el docente. Dicha construcción se llevó a cabo con ayuda de dos reglas que tenían la misma longitud de dos lados del triángulo suministrado por el docente y la medida del ángulo comprendido entre los lados. En la siguiente ilustración se muestra los instrumentos empleados para desarrollar la actividad.



Ilustración 7: Instrumentos de la actividad 3. Punto b.

En la siguiente tabla se presenta un fragmento del diálogo entre el docente y una estudiante que manifiesta que no se puede construir el triángulo pedido con los instrumentos.

Tabla 9. Episodio 2: Actividad 3. Parte 2.b. Usando dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3732 Ítem b. 0:03:10 P: bien, ¿con eso ustedes creen que es suficiente para construir el triángulo? [1] E1: no, la verdad no porque la de abajo, entonces, ¿tendría que volver a usar este?, o ¿solo es el ángulo? 0:03:27	[1] E1 traza dos segmentos con un ángulo comprendido a partir de los instrumentos entregados.

La estudiante realiza la acción de encajar los instrumentos de tal forma que se pueda trazar elementos rectilíneos para obtener la figura. En [1] se trazan dos segmentos que el estudiante asocia con dos lados del triángulo pedido. Sin embargo, el contorno cerrado no se obtiene porque hace falta un lado, a lo que el estudiante manifiesta, un poco inseguro, que para construir el lado faltante se debe usar una de las reglas por segunda vez. En la siguiente ilustración, se muestra la respuesta de la estudiante.

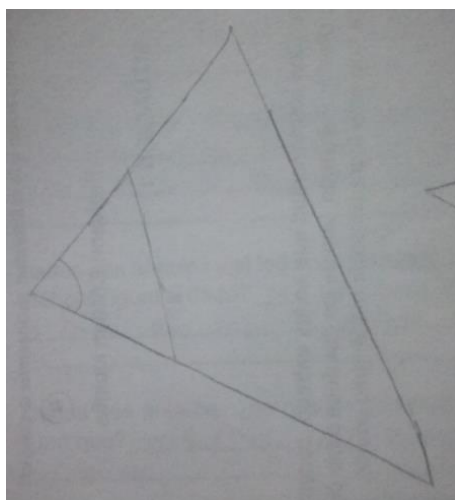


Ilustración 8: Producción de la estudiante

El estudiante concluye que el triángulo se puede construir con ayuda de las dos reglas, trazando dos segmentos que se intersectan en sus puntos iniciales formando uno de los vértices del triángulo y uno de sus ángulos, y su tercer lado se construye trazando una línea que une los puntos finales de cada segmento construido.

Lo cual implica, que con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos si es posible construir un triángulo con las mismas características que el triángulo del profesor; pues las medidas de las reglas y el ángulo utilizados en la construcción tienen medidas equivalentes, lo que les permite obtener un triángulo congruente al suministrado por el profesor.

Visualización reconocimiento perceptible

El estudiante evidencia una aprensión operativa de cambio figural. Porque, parte de un ángulo formado por dos segmentos, y para lograr la construcción del triángulo realiza el trazo de otro segmento que sería el nuevo elemento añadido al dibujo inicial. Además, se presenta una aprensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo, debido a que hace uso de conceptos geométricos.

Razonamiento

El estudiante emplea el lenguaje natural para explicar la respuesta a la pregunta. También, se evidencia un proceso configural debido a la interacción de la aprensión operativa y la aprensión discursiva que se produce al hallar la solución del problema propuesto.

Dados dos ángulos y un lado si es posible construir un triángulo congruente al del profesor

El propósito del ejercicio (c), es familiarizar a los estudiantes con el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo (ALA), por medio de la construcción de un triángulo que debe ser congruente al triángulo suministrado por el docente. La construcción se llevó a cabo con dos plantillas de forma triangular que representan a los ángulos del triángulo y una regla. En la siguiente ilustración se muestra los instrumentos utilizados para desarrollar la actividad.

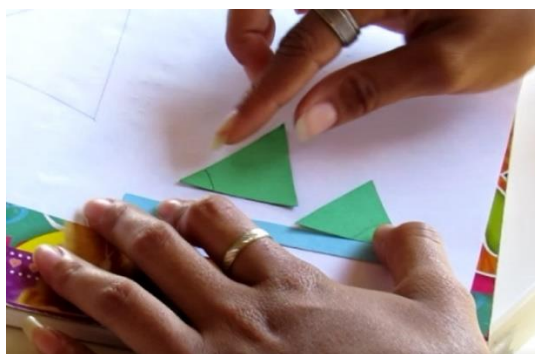


Ilustración 9: Instrumentos de la actividad 3. Punto c.

La estudiante en su construcción realiza trazos rectilíneos con ayuda de la regla, apoyándose en las plantillas de forma triangular para obtener los ángulos de la figura pedida, de tal manera que el contorno construido corresponda al triángulo buscado. En la siguiente ilustración se muestra los pasos de construcción.

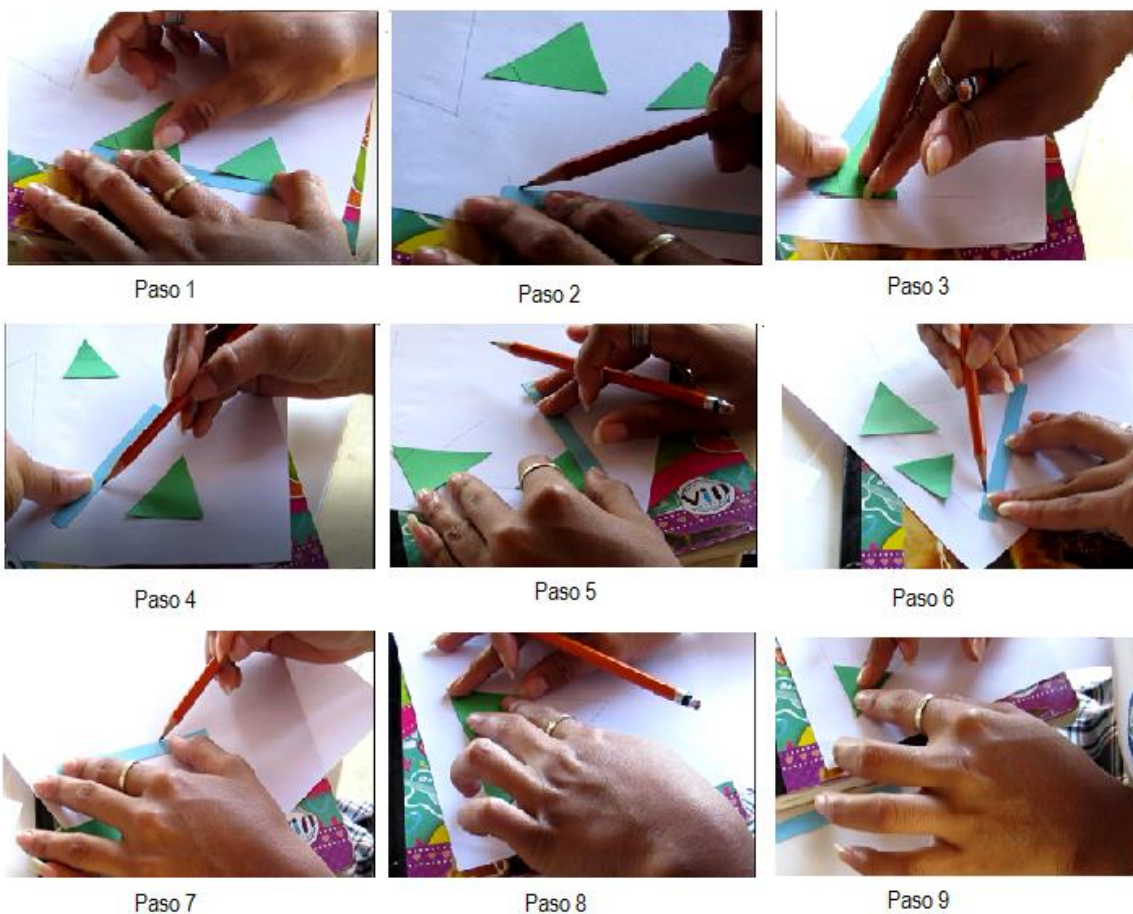


Ilustración 10: Construcción del triángulo

La estudiante utiliza estos instrumentos para producir formas en 1D, segmentos de recta, que componen el contorno cerrado de la figura buscada, la cual tiene forma 2D. Se inicia la construcción buscando la posición en que deben ubicarse las herramientas sobre el papel (paso 1). Posteriormente, realiza el primer segmento que resulta ser uno de los lados del triángulo (paso 2). Como solo cuenta con una regla emplea las plantillas de forma triangular como soporte para construir los ángulos de la figura, y se apoya en los segmentos que ha construido (pasos 3 y 5), y realizar los trazos que representan los lados de triángulo (pasos 4 y 6). Luego,

realiza una prolongación de trazado (paso 7) para completar uno de los lados de la figura, obteniendo un triángulo. Finalmente, verifica si los ángulos tienen la amplitud correcta (pasos 8 y 9) por medio de la superposición de las plantillas en el triángulo construido.

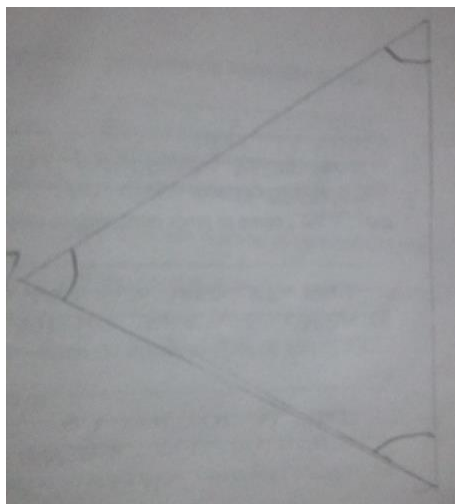


Ilustración 11: Producción de la estudiante

Esta ilustración muestra el triángulo equilátero producido por la estudiante después de realizar los pasos anteriores de la construcción. Así, concluye que se puede construir el triángulo con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

Visualización reconocimiento perceptible

Se evidencia una aprensión operativa de cambio figural en el procedimiento de solución de la estudiante. Porque, parte de la construcción de un segmento, y para lograr la construcción del triángulo realiza trazos de otros segmentos que serían los nuevos elementos añadidos al dibujo inicial. Además, se presenta una aprensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo, debido a que hace uso de conceptos geométricos.

Razonamiento

El estudiante emplea el lenguaje natural para explicar la respuesta a la pregunta. También, se evidencia un proceso configural debido a la interacción de la aprensión operativa y la aprensión discursiva que se produce al hallar la solución del problema propuesto.

Dados tres ángulos no se puede obtener de forma inmediata un triángulo congruente al del profesor

La siguiente tabla muestra un fragmento de la conversación del docente y un estudiante del curso en relación al inciso (d) de la segunda parte de la actividad. Se concluye que hace falta un lado para construir un triángulo congruente con el del profesor. Es decir, los instrumentos entregados no son suficientes para obtener un triángulo con las características que pide el ejercicio.

Tabla 10. Episodio 3. Actividad 3. Parte 2.d. Usando tres ángulos

Lo dicho por el profesor y estudiante
MVI_3743 ítem d. 0:00:03 P: muéstrame aquí como estuviste haciendo. ¿Por qué no es suficiente? E: porque pues de ángulos queda muy bien; pero el tamaño queda muy diferente. Entonces, cuando lo vamos a medir con el triángulo que ya está queda, sino queda muy pequeño, queda muy grande, entonces es muy necesario un lado. 0:0:24

La estudiante identifica que se puede construir varios triángulos, porque al fijar los ángulos y formar un triángulo se dio cuenta por medio de desplazamientos de los ángulos se podía formar otros triángulos de diferente tamaño; por lo tanto, la estudiante concluyó que se necesita un lado para construir el triángulo del profesor.

Visualización reconocimiento perceptible

Se presenta en el procedimiento de solución de la estudiante una aprensión operativa de cambio figural. Porque parte de una figura inicial, en este caso de un triángulo, que ha sido construido a partir de tres ángulos. Sin embargo, se

obtienen otros triángulos de diferente tamaño por el desplazamiento de los ángulos a partir de las plantillas que los representan; lo que da como resultado la construcción de una infinidad de triángulos.

También, se presenta en la solución de la estudiante una aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo; y viceversa. Porque la estudiante le asocia conceptos geométricos a la figura que forma inicialmente, y la forma 2D que percibe en principio, un triángulo, le asocia conceptos geométricos para validar el hecho de que no se puede construir un triángulo con las mismas características del suministrado por el profesor.

Razonamiento

La estudiante emplea el lenguaje natural para argumentar sus respuestas. También, se evidencia en el procedimiento de solución de la estudiante un proceso configural; debido a la interacción entre la aprehensiones discursiva y operativa.

Dados tres lados si es posible construir un triángulo congruente al del profesor

El propósito del ejercicio (e), es familiarizar a los estudiantes con el criterio de congruencia Lado-Lado-Lado (LLL), por medio de la construcción de un triángulo que debe ser congruente al triángulo suministrado por el docente. La construcción se llevó a cabo con tres reglas de diferente longitud. En la siguiente ilustración se muestra los instrumentos utilizados para desarrollar la actividad.

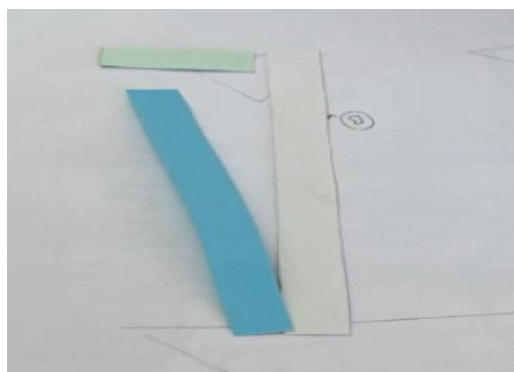


Ilustración 12: Instrumentos de la actividad 3. Punto 2e.

En la actividad se evidenció que las estudiantes lograron construir el triángulo con las tres reglas sin dificultad, y llegaron a la conclusión de que con tres reglas es suficiente para construir un triángulo idéntico al suministrado por el profesor.

La siguiente ilustración muestra las producciones escritas en lenguaje natural de las estudiantes, en relación a la construcción de un triángulo dados tres lados.

e. Dados tres lados, ¿se puede construir un triángulo igual al dado? si ¿por qué? De cualquier manera que lo quieras te da, la figura que tu necesitas.

Estudiante 1

e. Dados tres lados, ¿se puede construir un triángulo igual al dado? si ¿por qué? con dos líneas hacemos la parte de los lados y con la q es mas largita hacemos la parte de arriba.

Estudiante 2

e. Dados tres lados, ¿se puede construir un triángulo igual al dado? si ¿por qué? Por que los lados son muy fundamentales y sabiendo eso se puede hacer bien con los mismos angulos.

Estudiante 3

Ilustración 13: Producciones escritas de las estudiantes. Actividad 3. Punto 2e

Las estudiantes coinciden en sus respuestas, pues argumentan que es posible construir un triángulo con las mismas características que tiene el triángulo del profesor; por consiguiente, se obtiene la unicidad de la solución del problema.

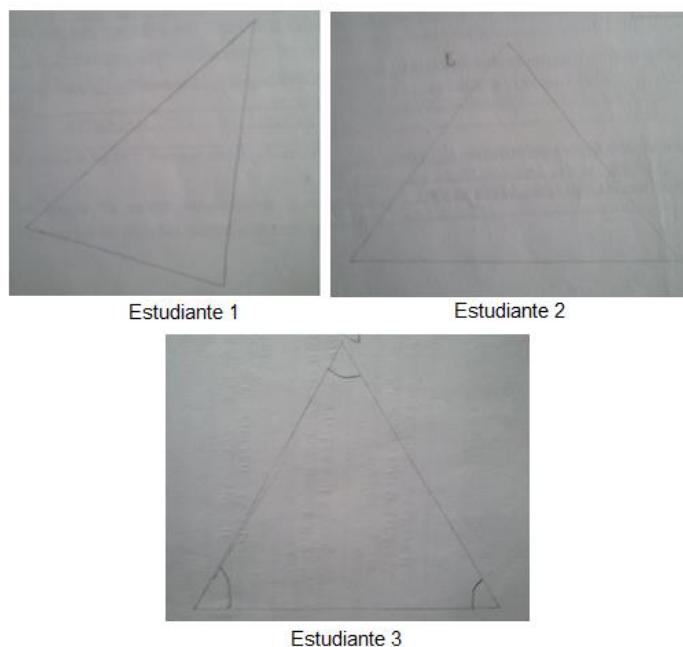


Ilustración 14: Construcciones de las estudiantes. Actividad 3. Punto 2e

Es decir, la construcción en esta parte de la actividad es una solución única, porque la longitud de las reglas entregadas a las estudiantes es igual a la longitud de lados correspondientes del triángulo buscado. Por esta razón, se puede construir el triángulo que satisfaga las condiciones iniciales.

Visualización reconocimiento perceptible

En el proceso de solución de las estudiantes se presenta una aprehensión operativa de cambio figural. Porque parten de la construcción de un segmento, que posteriormente le añaden al dibujo otros dos segmentos mediante el uso de las reglas, y cuyos segmentos conforman el contorno cerrado de la figura resultante que es un triángulo.

También, se presenta en una aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo, porque a cada elemento construido las estudiantes le asocian elementos geométricos; lo que valida el hecho de que con tres reglas se puede construir un triángulo con las mismas características del triángulo suministrado por el profesor.

Razonamiento

En el procedimiento de solución de las estudiantes se puede identificar un proceso configural, porque existe una interacción entre las aprehensiones discursiva y operativa. Además, para explicar y argumentar sus respuestas las estudiantes hacen uso del lenguaje natural, obteniendo de esta forma una solución al problema propuesto.

El análisis anterior permite establecer los elementos necesarios para la realización de un análisis retrospectivo que hace referencia a la visualización y el razonamiento, cuyos procesos cognitivos son la esencia de este trabajo.

3.1.3 Análisis sobre el alcance de las metas de aprendizaje en la situación 1

Se presenta a continuación, la descripción de lo que se observó en relación al desempeño de los estudiantes correspondiente a la situación 1. Se toma en consideración las actividades 2 y 3 que fueron empleadas para realizar el análisis local. En esta parte, se relacionan dos categorías que conforman la rejilla de análisis, que se encuentra en los anexos, de donde se establece el alcance o no de las metas de aprendizaje para cada actividad utilizada de la situación. Las categorías se denominan: se logra y no se logra.

Se logra

En la actividad 2 se logra un acercamiento a la meta de aprendizaje, porque los estudiantes identifican que para construir un triángulo es necesario que la suma de

las longitudes de dos reglas debe ser mayor que la longitud de la tercera regla. Teniendo en cuenta sólo un caso de comparación de las longitudes, pues la regla de referencia era la de mayor longitud.

En la actividad 3 se logra que el estudiante compruebe la veracidad de los criterios de congruencia; debido a que realizan la actividad satisfactoriamente.

No se logra

En la actividad 2 no se logra identificar que para construir un triángulo al tomar siempre dos reglas va a ser mayor que la tercera; porque los estudiantes siempre tomaban la regla de mayor longitud como referencia y las comparaban con las otras reglas que eran de longitud menor. Lo que implica, que la caracterización de la desigualdad triangular no se establece del todo; debido a que los estudiantes sólo consideran un caso de comparación entre la longitud de las reglas empleadas en la actividad; dejando a un lado los otros casos de comparación entre las longitudes que permitiría caracterizar esa propiedad que se establece en los triángulos.

En la actividad 3 no se logra que los estudiantes evidencien que las condiciones de construcción son criterios de congruencia. Debido, a que se limitan únicamente a responder las preguntas de la actividad mediante la ayuda de los instrumentos utilizados, es decir, no son conscientes de la correspondencia que se establece entre las condiciones del problema de construcción y los criterios de congruencia entre triángulos. En esta parte, la formulación de las preguntas y la orientación del profesor del curso no fueron lo suficientemente claras para que los estudiantes alcanzaran la meta de aprendizaje.

3.2 Situación 2

3.2.1 Descripción general

La situación de aprendizaje 2 está conformada por tres actividades de superposición de figuras, especialmente triángulos, para esto se emplean plantillas en cada una de las actividades, con el fin de comparar las figuras resultantes y las que poseen áreas compartidas debido a la superposición entre las figuras iniciales; y de esta forma resolver el desafío propuesto en cada actividad. Cada una de ellas se encuentra asociada a una conjetura y a una meta de aprendizaje.

La situación se aplica en el marco de un experimento de enseñanza en donde se establece una conjetura y las dos dimensiones de la misma. En esta se involucra los elementos y características propias de la situación. Según (Galeano, 2015), se debe considerar para la situación 2 lo siguiente.

Conjetura: *el uso de plantillas como instrumentos no convencionales permite que los estudiantes conozcan las características y propiedades de la congruencia entre figuras geométricas.*

Dimensión pedagógica: *las actividades de superposición de triángulos, la representación de dichas superposiciones y el razonamiento que se realiza constituyen un ambiente de aprendizaje ideal, para que los estudiantes manipulen instrumentos no convencionales, y exploren las características de la congruencia entre triángulos.*

Dimensión del contenido: *los triángulos, al ser una figura familiar a los estudiantes, se convierten en un elemento clave para estudiar las características de comparación entre ellos, como la forma y el tamaño, necesarios para abordar el concepto de congruencia.*

Con los elementos anteriores se trabajó la fase de diseño, en el cual se produjeron tres actividades, que a continuación se presentan.

Actividad 1

La actividad 1 tiene como finalidad introducir a los estudiantes en el tipo de tareas que conforman la situación de aprendizaje, pues ellos no se encuentran familiarizados con esta clase de tareas. En esta actividad, los estudiantes deben probar que los triángulos formados por las diagonales del rectángulo dado son congruentes, a partir de la superposición de figuras, y pasando por la comparación entre las áreas compartidas resultantes de la superposición de los triángulos iniciales. Para ello, se utiliza plantillas que modelen la figura inicial.

En esta actividad se considera los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de planillas permite que los estudiantes identifiquen que las partes sobrantes en una figura producto de una superposición entre figuras congruentes son congruentes.

Meta de aprendizaje: identificar que las partes sobrantes en una figura producto de una superposición entre figuras congruentes son congruentes.

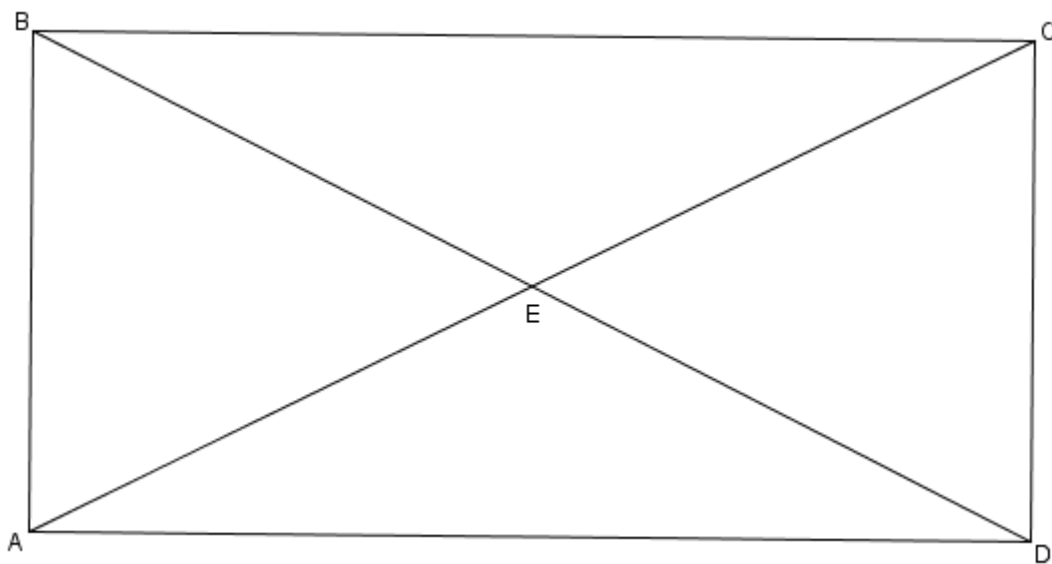
Los materiales de trabajo para esta actividad la conformaron cuatro plantillas de forma triangular, precisamente un triángulo rectángulo; en el cual dos de ellas fueron de color azul y el otro par de color amarillo, con el fin de que el estudiante hiciera una comparación entre las figuras geométricas representadas por las plantillas para verificar si efectivamente eran congruentes o no. Y resolver el desafío propuesta en esta actividad. La siguiente ilustración, muestra los instrumentos empleados por los estudiantes en la actividad.



Ilustración 15: plantillas de la actividad 1

SITUACIÓN 2. ACTIVIDAD 1

Considere el rectángulo $ABCD$ con sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, las cuales se intersectan en el punto E .



Nuestro desafío es probar que los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle DEC$ son congruentes.

Para poder cumplir con el desafío vamos a desarrollar los siguientes puntos.

1. ¿Los triángulos entregados son congruentes? Justifique su respuesta.

2. Teniendo en cuenta los triángulos asignados forme la siguiente figura.

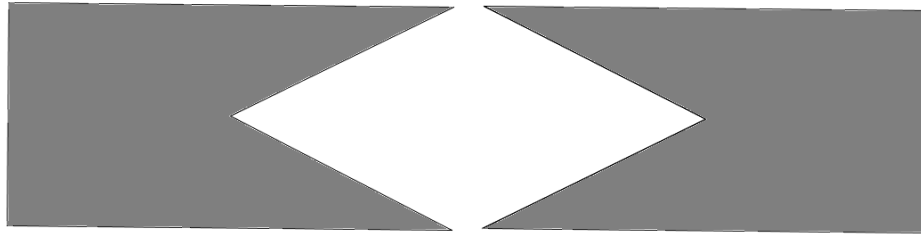


Figura 1

3. ¿qué figura geométrica forma el área compartida por los triángulos?
-
4. Retirar el área compartida por los triángulos iniciales, ¿qué figuras se forman? Dibújelas.
5. ¿los triángulos del punto anterior son congruentes? _____ ¿por qué?
-
-
-
6. Teniendo en cuenta la figura 1, forme el rectángulo inicial.
7. Teniendo en cuenta los puntos desarrollados con anterioridad, y el rectángulo formado por las plantillas, realice el desafío inicial.

Actividad 2

La actividad 2 tiene como propósito explorar la superposición de figuras, y probar que los triángulos obtenidos de esa superposición son congruentes. Lo anterior, se realiza a partir del uso de plantillas que modelan triángulos, y pasando por la comparación entre las áreas no compartidas y resultantes de la superposición de los triángulos iniciales. Para ello, se utiliza plantillas que modelen la figura inicial.

En esta actividad se consideran los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes verifiquen que las partes que tienen en común figuras congruentes producto de la superposición entre figuras también son congruentes.

Meta de aprendizaje: verificar que las partes que tienen en común figuras congruentes producto de la superposición entre figuras también son congruentes.

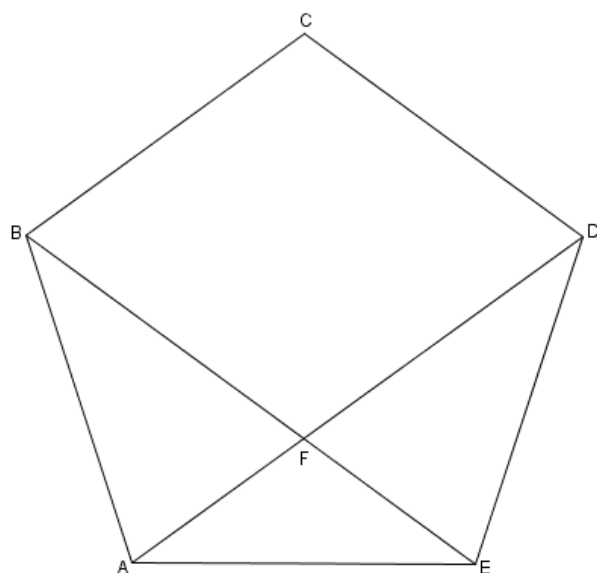
Los materiales de trabajo para esta actividad la conformaron cuatro plantillas, dos de ellas representan trapecios y triángulos isósceles, respectivamente. Cada par de plantillas de color verde y morado; con el fin de que el estudiante hiciera una comparación entre las figuras geométricas representadas por las plantillas para verificar si efectivamente eran congruentes o no y resolver el desafío propuesto. La siguiente ilustración, muestra los instrumentos empleados por los estudiantes en la actividad.



Ilustración 16: plantillas de la actividad 2

SITUACIÓN 2. ACTIVIDAD 2

Considere el pentágono regular $ABCDE$ con dos de sus diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, las cuales se intersectan en el punto F .



Nuestro desafío es probar que los triángulos $\triangle AFB$ y $\triangle EFD$ son congruentes.

Para alcanzar el desafío vamos a desarrollar los siguientes puntos.

1. ¿Los triángulos que se forman por las diagonales son congruentes? ¿por qué?

2. Forme la siguiente figura con los triángulos iniciales.



Figura 1.

3. ¿qué figura geométrica forma el área compartida por los triángulos?

4. Retirar el área compartida por los triángulos iniciales, ¿qué figuras se obtienen como resultado? Dibújelas.

5. Las figuras resultantes y correspondientes en el punto anterior, ¿son congruentes? ¿por qué?

6. Teniendo en cuenta la figura 1, forme el pentágono inicial.
7. Teniendo en cuenta los puntos desarrollados anteriormente, y el pentágono formado por las plantillas, resuelva el desafío inicial.

Actividad 3

La actividad 3 tiene como propósito explorar las características de forma y tamaño entre figuras para determinar si son congruentes. Para esto, los estudiantes deben usar plantillas que representen la figura dada inicialmente, trapecio. Luego, aplicar la superposición y analizar el área compartida por las figuras para responder si efectivamente son congruentes. Para esto, se espera que las partes de la figura que sobran sean comparadas y analizadas para establecer si son congruentes o no. Y resolver el desafío inicial.

Para esta actividad se consideran los siguientes elementos:

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes comprueben que las partes compartidas entre figuras superpuestas son congruentes pues son el resultado de la superposición de las partes de una figura que sobran que también resultan ser congruentes.

Meta de aprendizaje: comprobar que las partes compartidas entre figuras superpuestas son congruentes pues resultan de la superposición de las partes de una figura que sobran y que son congruentes.

El material de trabajo para la actividad la conformaron cuatro plantillas que representan triángulos escalenos de color rosado y naranja; cada par del mismo color al ser ensamblados forman un trapecio isósceles. Esto con el fin de que el estudiante hiciera una comparación entre las figuras geométricas representadas

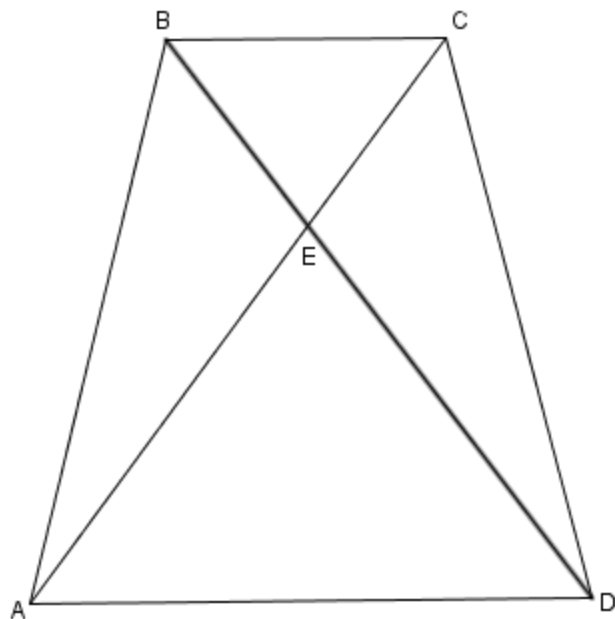
por las plantillas y verificaran por medio de la superposición si efectivamente eran congruentes o no, y resolver el desafío que se propone en esta tarea. La siguiente ilustración, muestra los instrumentos empleados por los estudiantes en la actividad.



Ilustración 17: plantillas de la actividad 3

SITUACIÓN 2. ACTIVIDAD 3

Considere el trapecio $ABCD$ con sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, las cuales se intersectan en el punto E .



Nuestro desafío es probar que los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle DEC$ son congruentes.

Para cumplir con el desafío vamos a desarrollar los siguientes puntos.

1. ¿los triángulos entregados son congruentes? Justifique su respuesta.

2. Forme la siguiente figura con los triángulos iniciales.

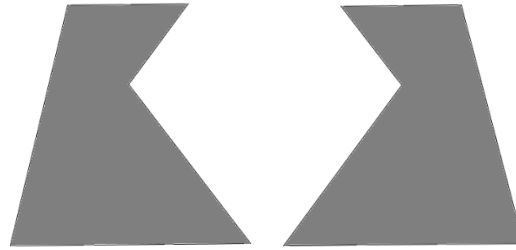


Figura 1

3. ¿qué figura geométrica forma el área compartida por los triángulos?

4. Retirar el área compartida por los triángulos iniciales, ¿qué figuras se obtienen como resultado? Dibújelas.

5. Las figuras resultantes y correspondientes en el punto anterior, ¿son congruentes?
_____ ¿cuáles? _____ ¿por qué?

6. Teniendo en cuenta la figura 1, forme el trapecio inicial.

7. Teniendo en cuenta los puntos desarrollados anteriormente, y el trapecio formado por las plantillas, realice el desafío inicial.

3.2.2 Análisis local de la situación 2

Para la situación 2 se registraron videos y producciones escritas por los estudiantes, que mostraran elementos importantes para la visualización y el razonamiento. A continuación, se presentan los episodios seleccionados de los videos más relevantes para este trabajo.

Actividad 1. Congruencia de triángulos parte 1

Se presentan algunos episodios de clase correspondientes a la actividad 1, donde los estudiantes tienen como desafío probar que dos triángulos son congruentes a partir del uso de plantillas que representan triángulos rectángulos congruentes. En esta actividad se registra la conversación del profesor con algunos de los estudiantes del curso. Para esto, se utilizan símbolos de convención como (P) para referirse al profesor de la clase y (E) para algún estudiante del grupo.

Obtención de un triángulo isósceles como resultado de la superposición de plantillas

La siguiente tabla muestra el primer episodio que corresponde a una conversación del profesor con una estudiante (E1) que argumenta, que los triángulos que observa por la superposición de las plantillas entregadas son isósceles.

Tabla 11. Episodio 1: Actividad 1. Pregunta 3

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3808 0:00:41 P: ahora forma la figura número uno de la guía... ¡listo! Bien, ahora, ambos triángulos comparten un área, ¿cierto? Por ejemplo, estos dos triángulos y estos dos triángulos comparten, tienen un área compartida, ¿el área compartida qué figura forma? [1] E1: un triángulo isósceles P: muéstrame ahí en las plantillas cual es, donde se ve el triángulo isósceles, cual es el triángulo isósceles, muéstrame ahí [2] E1: el que se divide entre estos dos triángulos aquí, que queda así triángulo, el lado de acá (señala uno de los lados del triángulo) P: ¿por qué isósceles? [3] E1: porque solo tiene dos ángulos, dos ángulos iguales P: y los lados [4] E1: los lados también 0:01:38	[1] E1 señala sobre las plantillas [2] E1 señala uno de los lados del triángulo obtenido por la superposición de las plantillas

La estudiante identifica en [1] dos triángulos isósceles y describe, en [3] y [4], sus características para argumentar su respuesta. A continuación, se muestra una ilustración que detalla las respuestas de la estudiante.

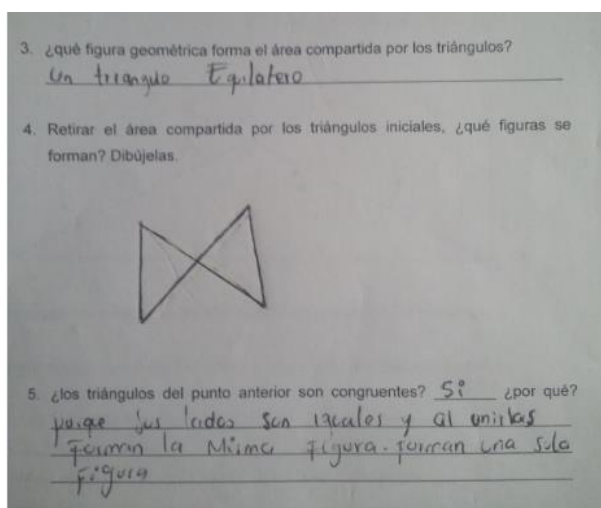


Ilustración 18: Producciones de la estudiante

La estudiante hace uso del lenguaje natural para argumentar sus respuestas, el dibujo que realiza es la representación gráfica de lo que ve en la superposición de las plantillas entregadas. Se afirma que los lados son iguales y al unirlos se obtiene la misma figura, es decir, la medida de los lados correspondientes es la misma, y al superponer un triángulo sobre el otro, se tiene que la forma y el tamaño coincide, lo que hace que sus elementos también coincidan. Por esta razón, se tiene que los triángulos de la ilustración anterior son congruentes.

Ahora veamos los procesos cognitivos que evidencia la estudiante de este episodio.

Visualización reconocimiento perceptible

Se presenta en el proceso de solución de la estudiante una aprensión perceptiva porque identifica en lo que observa a un triángulo. La forma de ver de la estudiante corresponde a una visualización no icónica, porque reconoce los elementos que le permiten concluir que se trata de un triángulo isósceles. Además, se tiene una

aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo, debido a que asocia al triángulo que ve con una afirmación matemática, pues menciona que el triángulo es isósceles. También, se evidencia una aprehensión operativa de cambio figural porque la estudiante realiza una operación mental para añadir un segmento que en este caso será uno de los lados de la figura.

Razonamiento

La estudiante hace uso del lenguaje natural para argumentar sus respuestas. También, se presenta una interacción entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica que el razonamiento de la estudiante corresponde a un proceso configural debido a la acción coordinada de las aprehensiones.

Congruencia de triángulos explicación 1

Se presenta en el segundo episodio a un estudiante que caracteriza la congruencia de dos triángulos que se obtienen como resultado de la superposición de las plantillas entregadas.

Tabla 12. Episodio 2: Actividad 1. Preguntas 4 y 5

Lo dicho	Lo realizado
MVI_3765 0:02:18 P: entonces que concluimos con los dos triángulos, que decimos [1] E2: que, si son congruentes porque tienen la misma forma, el mismo tamaño y los mismos ángulos. P: y, ¿la medida de los lados es la misma? E2: sí P: muy bien 0:03:27	[1] E2 señala en los triángulos que se forman por la superposición de las plantillas.

El estudiante asocia, en [1], a los triángulos que ve la relación de igualdad en los elementos tales como: el tamaño, la forma, la medida de los ángulos y los lados. Cuyas características son compartidas por ambas figuras. Por esta razón, el estudiante concluye que los triángulos que se obtiene por la superposición de los

instrumentos son congruentes. La siguiente ilustración muestra las respuestas del estudiante.

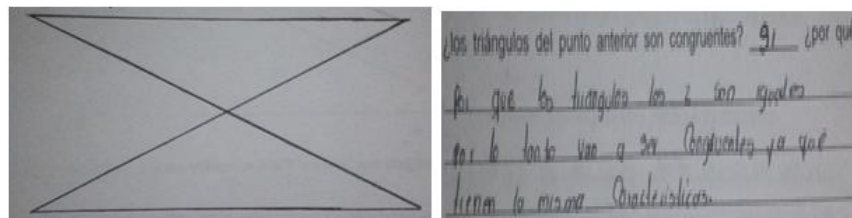


Ilustración 19: Producciones del estudiante

El estudiante utilizó el lenguaje natural para explicar la congruencia entre los triángulos; apoyándose en el dibujo de la ilustración anterior, el estudiante identifica con mayor claridad los elementos de los triángulos para luego compararlos; y llegar así a la noción de congruencia mediante el uso de plantillas. Ahora, veamos los procesos cognitivos que presenta el estudiante de este episodio.

Visualización reconocimiento perceptible

El estudiante en el proceso de solución presenta una aprehensión perceptiva porque el dibujo que realiza en la actividad lo asocia con la representación gráfica de una figura geométrica, que en este caso son los triángulos. Además, se evidencia una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a discursivo; debido a que les asocia a los triángulos que ve conceptos geométricos tales como la igualdad en forma y tamaño, la igualdad en las medidas de ángulos y los lados. Por último, le asocia al dibujo una afirmación matemática la cual dice que los triángulos son congruentes.

También, se evidencia en el procedimiento de solución una aprehensión operativa de cambio figural porque el estudiante efectúa una operación mental para retirar el triángulo que se forma por la superposición de las plantillas lo que le permite realizar el dibujo en la pregunta 4 de la actividad.

Razonamiento

El estudiante emplea el lenguaje natural para argumentar la congruencia de los triángulos que representó gráficamente en la actividad. Además, se evidencia una coordinación en el proceso de solución del estudiante entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica, que el razonamiento del estudiante corresponde a un proceso configuracional.

Congruencia de triángulos explicación 2

La siguiente ilustración muestra las respuestas de una estudiante del curso, quien manifiesta que los triángulos dibujados en el punto 4 de la actividad son congruentes.

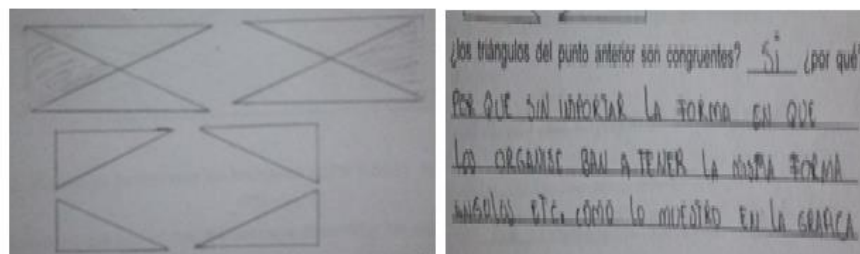


Ilustración 20: Producciones de la estudiante

La ilustración anterior muestra la forma de utilización de las plantillas por parte de la estudiante, para encontrar los triángulos que posteriormente compara para establecer la relación de congruencia. A continuación, se presentan los procesos cognitivos que evidencia la estudiante de este episodio.

Visualización reconocimiento perceptible

En el proceso de solución de la estudiante se presenta una aprehensión perceptiva porque el dibujo que realiza en la actividad lo asocia con la representación gráfica de una figura geométrica, que en este caso son los triángulos. También, se evidencia una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a discursivo; debido a que le asocia a los triángulos que ve

conceptos geométricos tales como la igualdad en forma y tamaño, la igualdad en las medidas de ángulos y los lados. Por último, le asocia al dibujo la relación de congruencia.

Además, se presenta en el procedimiento de solución una aprehensión operativa de reconfiguración, porque la estudiante manipula las figuras iniciales como las piezas de un puzzle (Torregrosa & Quesada, 2007). Para luego retirar el triángulo que se forma por la superposición de las plantillas lo que le permite realizar el dibujo en la pregunta 4 de la actividad.

Razonamiento

La estudiante emplea el lenguaje natural para argumentar sus respuestas en relación a la congruencia de los triángulos que representó gráficamente en la actividad. Además, se evidencia una coordinación en el proceso de solución de la estudiante entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica, que el razonamiento de la estudiante corresponde a un proceso configuracional.

Actividad 2. Congruencia de triángulos parte 2

En la actividad 2 también se tiene en cuenta aspectos relevantes para este trabajo; tales como la percepción con reconocimiento de los elementos y propiedades de la figura, y el discurso empleado para argumentar la solución de un problema en relación a la congruencia de triángulos. A continuación, se presenta un solo episodio que describe las respuestas de una estudiante, que tiene como desafío probar que dos triángulos son congruentes a partir del uso de plantillas que representan triángulos isósceles congruentes.

En esta actividad se registra la conversación del profesor con una de las estudiantes del curso. La siguiente tabla muestra una parte del diálogo establecido en clase en relación al tipo de triángulos que ve la estudiante, y que argumenta, que el triángulo que observa por la superposición de las plantillas entregadas es isósceles.

Tabla 13. Episodio 1: Actividad 2. Pregunta 3

Lo dicho por el profesor y la estudiante
MVI_3776 0:00:48 P: esos dos triángulos, en esa posición comparten un área, ¿qué área compartida forman ellos? E: un triángulo P: ¿qué tipo de triángulo será? E: un isósceles P: ¿por qué isósceles? E: porque tiene dos ángulos iguales y dos lados iguales 0:01:10

La estudiante identifica un triángulo isósceles y describe sus características para argumentar su respuesta. La siguiente ilustración muestra las respuestas de la estudiante.

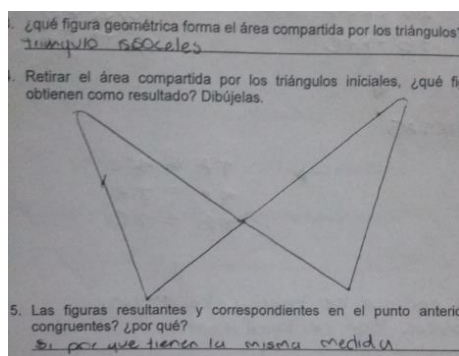


Ilustración 21: Producciones de la estudiante

La estudiante emplea el lenguaje natural para argumentar que los triángulos obtenidos por la superposición de las plantillas son congruentes; y asocia esta congruencia a la medida, haciendo referencia a la medida de los ángulos y lados correspondientes.

Ahora considere otro fragmento de la conversación entre el profesor y la estudiante, donde afirma que los triángulos del desafío son congruentes.

Tabla 14. Episodio 1: Actividad 2. Pregunta 5

Lo dicho por el profesor y la estudiante
MVI_3776 0:01:30 P: ¿estos dos triángulos son congruentes? E: sí

P: ¿Por qué?

[1] E: porque por lo menos el área compartida se le quitó en igual medida a los dos

P: bueno aparte de eso que podemos decir

E: tienen también lados iguales, lo mismo si los juntamos quedan prácticamente iguales, son prácticamente iguales

P: coincide todos los ángulos y las medidas de los lados

E: si

0:01:55

La estudiante argumenta que los triángulos representados gráficamente son congruentes, como se interpreta en [1]; pues inicialmente los triángulos entregados son congruentes, y al retirar una parte compartida de dos objetos congruentes se tiene que el resto también es congruente. La siguiente ilustración muestra la producción escrita que realizó la estudiante en esta parte de la actividad para probar que los triángulos del desafío son congruentes.

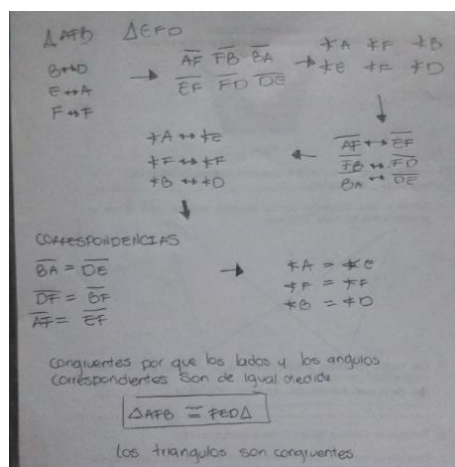


Ilustración 22: Producción escrita de la estudiante

La estudiante presenta un proceso discursivo teórico; debido al uso de la definición de correspondencias entre los elementos de un triángulo, lo que la lleva a resolver el desafío de la actividad. Se puede decir, que, mediante un direccionamiento de parte del profesor, se puede inducir al estudiante hacia un discurso teórico.

A continuación, se presenta los procesos cognitivos que evidencia la estudiante.

Visualización reconocimiento perceptible

Se presenta en el proceso de solución de la estudiante una aprehensión perceptiva porque el dibujo que realiza en la actividad lo asocia con la representación gráfica de una figura geométrica, que en este caso es un triángulo. La forma de ver de la estudiante corresponde a una visualización no icónica, porque reconoce los elementos que le permiten concluir que se trata de un triángulo isósceles. Además, se tiene una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo, debido a que asocia al triángulo que ve con una afirmación matemática, pues menciona que el triángulo es isósceles. También, se evidencia una aprehensión operativa de cambio figural porque la estudiante realiza una operación mental para añadir un par de segmentos que en este caso serán dos de los lados de la figura.

Razonamiento

La estudiante hace uso del lenguaje natural para argumentar sus respuestas. También, se presenta una interacción entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica que el razonamiento de la estudiante corresponde a un proceso configural; debido a la acción coordinada de las aprehensiones. Además, la producción escrita de la estudiante corresponde a un acercamiento al discurso teórico porque hace uso de conceptos matemáticos, tales como: la definición de correspondencia y de la relación de igualdad entre los elementos de un par de triángulos, lo que le permite concluir que los triángulos son congruentes.

Actividad 3. Congruencia de triángulos parte 3

En la actividad 3 se toma en consideración aspectos relevantes para este trabajo; tales como la percepción con reconocimiento de los elementos y propiedades de la figura, y el discurso empleado para argumentar la solución de un problema en relación a la congruencia de triángulos. A continuación, se presentan algunos episodios que describen las respuestas de los estudiantes, que tienen como desafío probar que dos triángulos son congruentes a partir del uso de plantillas que representan triángulos escalenos congruentes.

Identificación de triángulos escalenos

En esta actividad se registra la conversación del profesor con algunos de los estudiantes del curso. La siguiente tabla muestra una parte del diálogo establecido en clase en relación al tipo de triángulos que ve una estudiante que argumenta, que los triángulos que observa por la superposición de las plantillas entregadas son escalenos.

Tabla 15. Episodio 1: Actividad 3. Pregunta 3

Lo dicho por el profesor y la estudiante
MVI_3799 0:01:48 P: Y, ¿qué figura forma el área compartida por esos dos triángulos? E1: Un triángulo P: y, ¿qué tipo de triángulo será? E1: ese triángulo es escaleno P: ¿Por qué es escaleno? E1: porque tiene tres lados de diferente medida, y tres ángulos de diferente medida. 0:02:22

La estudiante identifica un triángulo escaleno y describe sus características para argumentar su respuesta. La siguiente ilustración muestra las respuestas de la estudiante número 1.

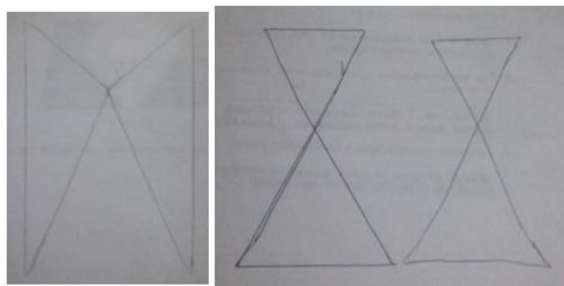


Ilustración 23: Producciones de la estudiante

La estudiante presenta una visualización no icónica, ´porque a las figuras de la ilustración anterior, le asocia conceptos geométricos. A través del uso de las plantillas se puede verificar la congruencia entre triángulos; debido a la superposición que se hace entre las plantillas entregadas.

Ahora veamos los procesos cognitivos que evidencia la estudiante de este episodio.

Visualización reconocimiento perceptible

Se presenta en el proceso de solución de la estudiante una aprehensión perceptiva porque identifica en lo que observa a un triángulo. La forma de ver de la estudiante corresponde a una visualización no icónica, porque reconoce los elementos que le permiten concluir que se trata de un triángulo escaleno. Además, se tiene una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo, debido a que asocia al triángulo que ve con una afirmación matemática, pues menciona que el triángulo es escaleno. También, se evidencia una aprehensión operativa de cambio figural porque la estudiante realiza una operación mental para añadir un segmento que en este caso será uno de los lados de la figura.

Razonamiento

La estudiante hace uso del lenguaje natural para argumentar sus respuestas. También, se presenta una interacción entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica que el razonamiento de la estudiante corresponde a un proceso configural debido a la acción coordinada de las aprehensiones.

Relación de igualdad entre los elementos correspondientes de dos triángulos

Se presenta en el segundo episodio a una estudiante que caracteriza la congruencia de dos triángulos que se obtienen como resultado de la superposición de las plantillas entregadas.

Tabla 16. Episodio 2: Actividad 3. Pregunta 3

Lo dicho por el profesor y la estudiante
MVI_3816 0:04:03 P: ¿Esos dos triángulos escalenos serán congruentes?

E2: si
P: ¿por qué?
E2: porque tienen la misma forma, las mismas medidas, y pues las mismas medidas de ángulos
P: o sea son congruentes
E2: si son congruentes
0:04:18

La estudiante asocia a los triángulos que ve la relación de igualdad en los elementos tales como: la forma, la medida de los ángulos y los lados. Aunque olvida mencionar el tamaño, estas características son compartidas por ambas figuras. Por esta razón, la estudiante concluye que los triángulos que se obtienen por la superposición de los instrumentos son congruentes.

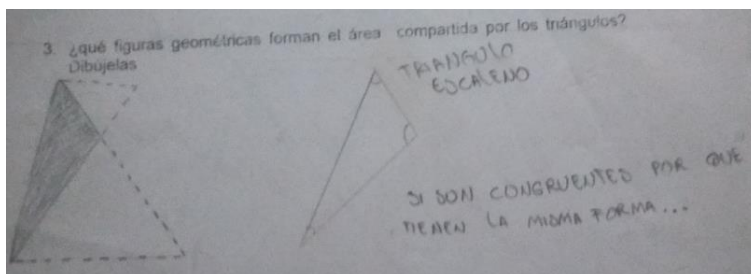


Ilustración 24: Producción de la estudiante

La ilustración anterior muestra las respuestas de la estudiante, donde hace uso del lenguaje natural para argumentar su solución, la forma de ver de la estudiante corresponde a una visualización no icónica; debido al uso de conceptos geométricos que asocia al dibujo, y por consiguiente una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo.

Ahora considere otro fragmento de la conversación entre el profesor y la estudiante número 2, donde afirma que los triángulos no son congruentes.

Tabla 17. Episodio 3. Actividad 3. Pregunta 5

Lo dicho por el profesor y la estudiante
MVI_3816
0:02:50
P: ¿será que esos dos triángulos son congruentes?
E2: si son congruentes
P: mira bien

E2: no, no son congruentes

P: ¿por qué?

E2: pues son, tienen la misma forma, y las mismas medidas; pero no tienen el mismo tamaño

0:03:07

La estudiante argumenta que los triángulos representados no son congruentes porque el tamaño no es el mismo. La siguiente ilustración muestra el dibujo y la producción escrita que realizó la estudiante en esta parte de la actividad.

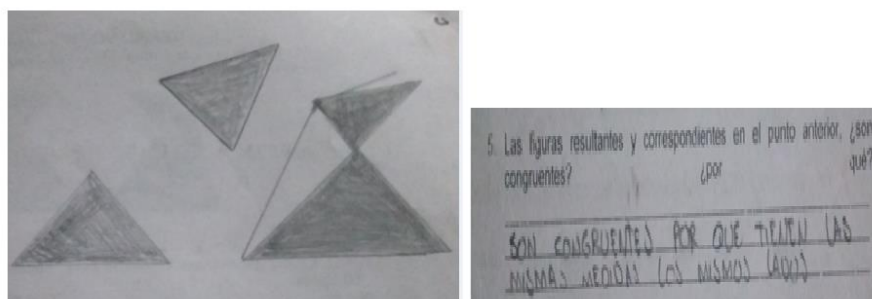


Ilustración 25: Producciones de la estudiante

La estudiante hace uso del lenguaje natural para argumentar que los triángulos que representó gráficamente no son congruentes; debido a la diferencia de tamaño. Aunque no coincide con lo que responde a la pregunta, pues establece que efectivamente los triángulos obtenidos son congruentes; lo cual indica que la estudiante estuvo confundida y olvidó corregir su respuesta escrita.

Ahora, veamos los procesos cognitivos que presenta la estudiante de este episodio.

Visualización reconocimiento perceptible

La estudiante en el proceso de solución presenta una aprehensión perceptiva porque el dibujo que realiza en la actividad lo asocia con la representación gráfica de una figura geométrica, que en este caso son los triángulos. Además, se evidencia una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de lo visual a discursivo; debido a que les asocia a los triángulos que ve conceptos geométricos tales como la igualdad en su forma, la igualdad en las medidas de ángulos y los

lados. Por último, le asocia al dibujo una afirmación matemática la cual dice que los triángulos son congruentes.

También, se evidencia en el procedimiento de solución una aprehensión operativa de cambio figural porque la estudiante efectúa una operación mental para retirar el triángulo que se forma por la superposición de las plantillas lo que le permite realizar el dibujo en la pregunta 4 de la actividad.

Razonamiento

La estudiante emplea el lenguaje natural para argumentar la congruencia y la no congruencia de los triángulos que representó gráficamente en la actividad. Además, se evidencia una coordinación en el proceso de solución de la estudiante entre la aprehensión discursiva y operativa, lo que implica, que el razonamiento de la estudiante corresponde a un proceso configural.

3.2.3 Análisis sobre el alcance de las metas de aprendizaje de la situación 2

Se presenta a continuación, la descripción de forma general de lo que se observó en relación al desempeño de los estudiantes en la situación 2. Se consideran dos categorías, a saber, se logra y no se logra, pertenecientes a la rejilla de análisis. Las cuales permiten establecer el alcance o no de las metas de aprendizaje en las actividades de la situación.

Se logra

En las actividades se alcanza la meta de aprendizaje por parte de algunos estudiantes, porque identifican los triángulos que se obtienen por la superposición de las plantillas, y cuyo procedimiento de solución los lleva a concluir que efectivamente son congruentes.

El desarrollo de las actividades de esta situación por parte de los estudiantes les permite un acercamiento al concepto de congruencia entre triángulos, debido a la identificación de los elementos que lo caracterizan.

Mediante el uso de instrumentos no convencionales como las plantillas los estudiantes logran identificar de manera perceptiva los elementos que caracterizan a un triángulo, y les permite establecer las características de la noción de congruencia entre triángulos.

No se logra

Los criterios de congruencia entre triángulos no se logran abordar con satisfacción, porque el desarrollo de las actividades de esta situación, sólo establece una aproximación a este concepto geométrico. Sin embargo, estas actividades sirven de apoyo a los estudiantes, para identificar los elementos necesarios y argumentar la congruencia entre triángulos.

3.3 Análisis Retrospectivo

De los análisis locales correspondientes a las situaciones 1 y 2, se obtienen elementos importantes como lo es la visualización con reconocimiento perceptible y el razonamiento, que evidencian los estudiantes durante el proceso de solución de las preguntas y desafíos de las actividades que conforman cada situación. Por esta razón, es de vital importancia realizar un análisis que reúna los elementos anteriores y permita elaborar una propuesta de trabajo que conforme una situación 3. Con esta se pretende abordar lo que en las situaciones anteriores no se alcanzó o no se trabajó de manera apropiada, con el fin de que los estudiantes alcancen las metas de aprendizaje propuestas en este trabajo.

3.3.1. Análisis final de la información suministrada en el experimento de enseñanza

En la actividad 2 de la situación 1, se presentan dos momentos; en el primero, en la parte de la visualización se tiene que los estudiantes identifican el contorno cerrado de la figura; pues se evidencia una aprehensión perceptiva, lo que les permite reconocer la representación gráfica de esta figura geométrica.

Sin embargo, el reconocimiento perceptible no garantiza que la meta de aprendizaje se alcance satisfactoriamente; pues asocian lo que ven del dibujo de un triángulo con los instrumentos empleados, las reglas. Es decir, los estudiantes establecen una correspondencia entre los lados de la figura con la cantidad de instrumentos utilizados; lo que implica, la no consideración de las longitudes de las reglas; lo cual es pertinente en el momento de comparar las longitudes de las reglas para caracterizar la desigualdad triangular que es la meta de aprendizaje de esta actividad.

Mientras que, en el segundo momento de esta actividad, se evidencia en los estudiantes un primer acercamiento a la comparación entre las longitudes de las reglas para construir el triángulo con las características pedidas. Sin embargo, el

alcance de la meta de aprendizaje no se satisface, porque los estudiantes únicamente consideran la comparación de las longitudes de las reglas para construir triángulos; olvidando que con la acción de sumar las longitudes en todas sus combinaciones se logra caracterizar la desigualdad triangular.

Además, se presenta un cambio dimensional, pues los estudiantes a partir de la identificación de los elementos 1D, segmentos, pretenden construir el contorno cerrado de una figura, forma 2D. Lo que implica, una deconstrucción dimensional de las formas 2D en formas 1D; por consiguiente, se evidencia en los estudiantes un cambio de mirada sobre las figuras, en este caso en los triángulos.

En la parte del razonamiento, los estudiantes hacen uso del lenguaje natural para explicar el proceso de construcción, y de esta forma argumentar sus respuestas. Los estudiantes en el proceso de solución de la actividad manipulan los instrumentos, de tal forma, que se pueda comparar la longitud entre ellas para poder construir un triángulo.

Por consiguiente, se evidencia una aproximación a la aprehensión operatoria, pues se parte de la idea de lo que es la representación de un triángulo; al asociar cada uno de los lados de la figura con las reglas. Y, mediante la comparación de las longitudes se establece, que, para construir un triángulo, es necesario que la suma de las longitudes de dos de las reglas debe ser mayor que la longitud de la tercera.

Lo que implica un acercamiento a la aprehensión operativa de cambio figural, pues a la representación inicial se le añaden elementos que la modifican; esta acción la realiza el estudiante con el fin de resolver el problema de construcción propuesto en la actividad.

La esencia de la actividad 3 de la situación 1, es la construcción de triángulos a partir de condiciones dadas. En la cual, se presentan elementos importantes como

lo es la visualización con reconocimiento perceptible y el razonamiento, que evidencian los estudiantes durante el proceso de solución de la actividad.

Del análisis local se tiene que, en los procedimientos de solución de los estudiantes se presentan las aprehensiones discursiva y operativa; con cambio de anclaje de lo visual a discursivo y de cambio figural; respectivamente. Lo anterior, permite identificar el tipo de aprehensión dominante en las respuestas de los estudiantes, la cual es la aprehensión operativa de cambio figural; y conocer la forma en que los estudiantes resuelven el problema propuesto en la actividad.

Mientras que, en la parte del razonamiento se evidencia la coordinación de las aprehensiones discursiva y operativa, dejando como resultado un proceso configural; que se produce al hallar la solución del problema propuesto en la actividad.

En las actividades de la situación 2 se evidencia en los procesos de solución de algunos estudiantes las aprehensiones asociadas a la visualización; a saber, la perceptiva, la discursiva con cambio de anclaje de lo visual a discursivo, y la operativa de cambio figural. Además, se presenta la visualización no icónica en la forma de ver de los estudiantes que les permite identificar las características de la figura, para luego asociarlas con afirmaciones matemáticas. Y, caracterizar de esta forma la figura con la que se trabaja y resolver el problema de congruencia propuesto en la actividad.

En particular, se presentó en esta actividad una estudiante que evidencia en su procedimiento de solución una aprehensión operativa de reconfiguración; (ver ilustración 20), para realizar el desafío de congruencia en la actividad.

El tipo de razonamiento que presentaron los estudiantes en estas actividades, corresponde a un proceso configural; debido a la interacción que se evidencia entre la aprehensión discursiva y operativa. El lenguaje natural fue utilizado para argumentar las respuestas en relación al desafío de congruencia.

En relación a la actividad 2, una estudiante presentó en la parte del razonamiento una aproximación al discurso teórico para argumentar la solución del problema de congruencia propuesta en la actividad. (ver ilustración 22).

Por consiguiente, las metas de aprendizaje correspondientes a estas actividades fueron alcanzadas en algunos estudiantes; debido a la manipulación adecuada de los instrumentos de trabajo. Es decir, el desarrollo de la conjetura de la situación, en estos casos, permite que los estudiantes en estas actividades conozcan las características y propiedades de la congruencia entre triángulos.

Teniendo como referencia lo dicho anteriormente, se elabora una propuesta de trabajo denominada situación 3; que reúne los elementos encontrados de la visualización y el razonamiento en las anteriores situaciones, con el fin de abordar la caracterización y la aplicabilidad de los criterios de congruencia entre triángulos.

3.3.2 SITUACIÓN 3

Descripción general

A partir de lo ocurrido en las situaciones 1 y 2, se plantea la situación 3 y se establece para esta una conjetura y sus dimensiones. La situación se conforma de dos actividades, cada una asociada a una conjetura, las dimensiones de la misma y la meta de aprendizaje. A continuación, se presenta los elementos que caracterizan a la situación 3.

Conjetura: el uso de los criterios de congruencia entre triángulos permite que los estudiantes prueben que dos triángulos son congruentes.

Dimensión pedagógica: las actividades de visualización de triángulos ayudan a los estudiantes a caracterizar los criterios de congruencia.

Dimensión de contenido: los elementos que caracterizan a la congruencia entre triángulos permite abordar los criterios de congruencia entre ellos.

Actividad 1

La actividad 1 tiene como propósito explorar las propiedades del octógono regular; a partir del uso de la noción de congruencia entre los elementos de una figura; y la utilización de instrumentos que permiten operaciones de trazado gráfico que producen formas 1D con transferencia de medida (Duval, 2005); tales como el compás y la regla graduada. Y, de esta forma, introducir a los estudiantes en este tipo de tareas y prepararlos para que aborden el desafío propuesto en la segunda actividad de la situación.

Se considera para esta actividad los siguientes elementos.

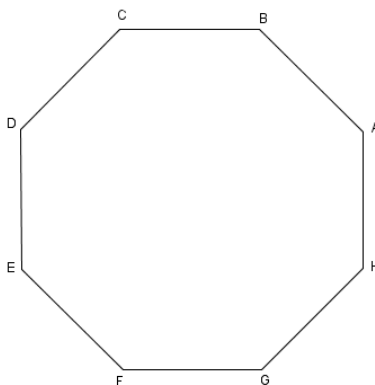
Conjetura: la congruencia permite conocer las propiedades de un octógono regular.

Meta de aprendizaje: conocer las propiedades de un octógono regular

SITUACIÓN 3. ACTIVIDAD 1

Materiales: transportador, regla graduada, compás y lápiz.

Considere la siguiente figura



Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿cuánto miden los ángulos internos de la figura?

Recuerde que un ángulo interno es un ángulo formado por dos lados de la figura que comparten un vértice común, y está dentro de la figura.

2. ¿cuál es la relación entre los ocho ángulos internos de la figura?

3. ¿cuánto miden los lados de la figura?

4. ¿cuál es la relación entre los ocho lados de la figura?

5. Trazar los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, y $\overline{HD}$, y determine su punto de intersección I.
6. ¿cuántos triángulos se obtienen? _____ ¿Qué tipo de triángulos se forman?
_____ ¿Por qué?

7. Hacer centro en I y tome como radio el segmento $\overline{DI}$, para trazar una circunferencia.
¿Cuánto mide el ángulo $\angle BIH$? _____ ¿Por qué?

- ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BIA$? _____ ¿Por qué?

Actividad 2

La actividad 2 tiene como esencia la aplicabilidad de los criterios de congruencia entre triángulos; por esta razón, se espera que los estudiantes hagan uso de la definición de congruencia entre los elementos correspondientes de las figuras a comparar, y utilicen la aplicación de estos criterios para llegar a identificar las propiedades de una figura geométrica. En esta actividad, se utiliza la regla como instrumento que produce formas 1D (Duval, 2005); para construir el contorno cerrado de la figura que se pretende caracterizar y que permite resolver el desafío propuesto en la actividad.

A continuación, se considera los siguientes elementos en esta actividad.

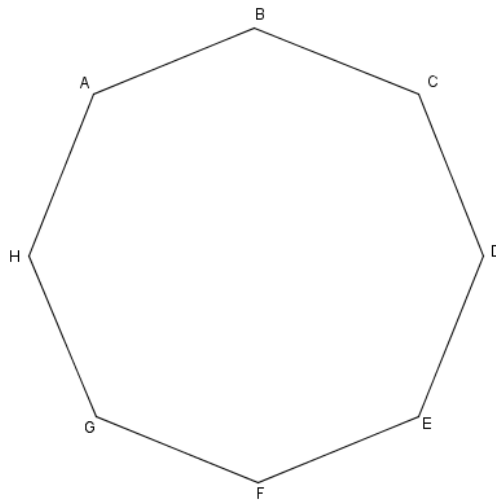
Conjetura: la aplicación de los criterios de congruencia entre triángulos permite caracterizar a una figura geométrica.

Meta de aprendizaje: caracterizar la figura geométrica cuadrado

SITUACIÓN 3. ACTIVIDAD 2

Materiales: regla y lápiz.

Considere la siguiente figura



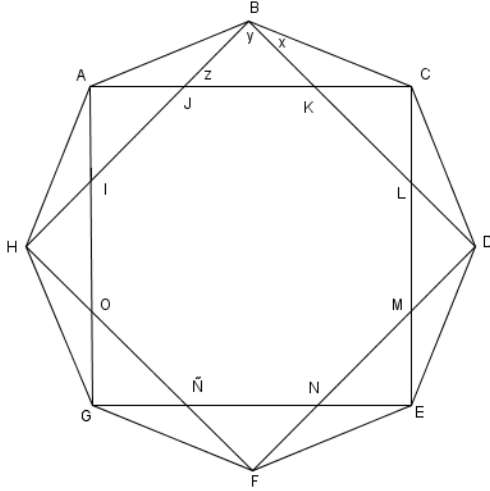
Considere la siguiente indicación.

Trace los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$, y $\overline{GA}$;

Nuestro desafío es demostrar que la figura HBDF es un cuadrado. Para esto realice los siguientes pasos.

1. Trazar los segmentos $\overline{HB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DF}$, y $\overline{FH}$
2. Considere el triángulo $\triangle ABC$. ¿cuántos triángulos congruentes a $\triangle ABC$ se encuentran en la figura? _____
3. Explique por qué los triángulos del punto anterior son congruentes.

Considere la siguiente figura.



4. Considere los triángulos ΔHIA y ΔBJA , ¿qué tipo de triángulos son? ¿porque?

5. Pruebe que los triángulos ΔHIA y ΔBJA son congruentes.
6. ¿cuántos triángulos son congruentes a ΔHIA ? _____
7. Explique porque los triángulos del punto anterior son congruentes.

8. ¿qué tipo de triángulo es ΔJBK ? _____ ¿Por qué?

9. Considere los ángulos $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$; recuerde que la suma de los ángulos internos en un triángulo es 180° , y los ángulos internos de un octógono regular miden 135° . Escriba un sistema de ecuaciones con dos incógnitas para los ángulos y determine su solución. ¿cuánto mide y ? _____ Resuelva el desafío inicial.

La situación anterior se deja como propuesta para implementarse en el aula como ejercicio o parte de un experimento de enseñanza para quien esté interesado en continuar el estudio de la congruencia entre triángulos a través de la metodología de los Experimentos de Enseñanza.

CONCLUSIONES

El uso del lenguaje natural desempeña un papel importante en la búsqueda de caracterizar una situación de aprendizaje que permita desarrollar las actividades cognitivas de visualización y razonamiento; pues mediante el lenguaje los estudiantes dan a conocer la forma de ver y de analizar las figuras, lo que permite hacer un seguimiento para ajustar y elaborar actividades que faciliten alcanzar dicho objetivo.

Los estudiantes en su mayoría no logran construir un lenguaje matemático en sus explicaciones, se quedan con el lenguaje cotidiano para argumentar y dar solución a los desafíos de las actividades. Es decir, en el análisis de las respuestas de los estudiantes no predomina el uso del lenguaje matemático para nombrar los elementos geométricos que se presentan en el proceso de solución de cada una de las actividades; pues no logran expresar correctamente con palabras lo que observan, pues usan un vocabulario impreciso; por esto hacen uso de términos propios del lenguaje ordinario para comunicar sus ideas y explicar sus respuestas.

Sin embargo, en algunos casos se presenta el manejo de conceptos matemáticos asociados a las producciones de los estudiantes que son enunciadas en el proceso de solución para argumentar las respuestas, esto se vincula a la aprehensión discursiva de cambio de anclaje, lo que establece una aproximación al discurso teórico. Para el caso de la situación 2, sólo una estudiante evidenció un acercamiento al proceso discursivo teórico, específicamente en la actividad 2; debido al uso de la definición de correspondencia entre los elementos de los triángulos a comparar, lo que le permitió llegar a la congruencia entre triángulos, y construir un discurso muy cercano al teórico. (Ilustración 22)

El desempeño de los estudiantes se puede favorecer mediante el uso de instrumentos no convencionales en clase de geometría, pues determina un

escenario de posibilidades para desarrollar la visualización, ya que la utilización de uno o varios instrumentos por parte del estudiante sirve como puente en el paso de la acción humana de ver a la acción matemática de visualizar; y esto sin duda genera cambios en la enseñanza de la geometría.

La utilización de plantillas en la situación 1 favorece un cambio de mirada del estudiante sobre la figura, porque se establece una deconstrucción dimensional de las formas 2D en formas 1D; el paso de contornos cerrados a líneas rectas, pues los estudiantes realizan las construcciones a partir de elementos 1D (segmentos de recta) para obtener la figura en 2D; debido a que las plantillas guían la forma de hacer los trazos cuyos elementos producidos son rectas.

Por lo tanto, trabajar bajo la propuesta de Duval como punto de partida de este Experimento de Enseñanza aportó resultados significativos a la hora de estudiar la noción de congruencia entre triángulos por parte de los estudiantes, pues se evidencia que la comprensión de este concepto se alcanzó satisfactoriamente; debido al reconocimiento de los elementos de la figura mediante la percepción y la argumentación de sus respuestas a los desafíos que se plantearon en cada actividad.

En este trabajo se tuvo como relieve la caracterización de los criterios de la congruencia entre triángulos; sin embargo; esto no se alcanzó satisfactoriamente en las situaciones 1 y 2; debido a que no se logra que los estudiantes sean conscientes de la aplicabilidad de los criterios, pues sólo se dan cuenta de su veracidad. Por tanto, fue necesario hacer ajustes para diseñar y aplicar una situación 3 que aborde dicho concepto geométrico; pero ésta se deja como propuesta de implementación en clase de geometría.

BIBLIOGRAFÍA

- Bahamón Charry, L. C., & Bonelo Ayala, Y. (2015). *Diseño de una situación de aula para potenciar las actividades cognitivas razonamiento y visualización en el trabajo con figuras geométricas al inicio de la educación básica secundaria del Colegio Jefferson*. Cali: Universidad del Valle.
- Bishop, A. (1983). *Space and geometry*. Academic Press.
- Cárdenas, D. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Chacón, I. G. (2012). *Visualización matemática: intuición y razonamiento. Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés*.
- Duval, R. (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo*.
- Duval, R. (2005). *Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras*. Grand.
- Euclides. (1991). *Elementos*. (M. P. Castaños, Trad.) España: Gredos, S.A.
- G. T., & H. Q. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2).
- Galeano, J. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento*. Cali: Universidad del Valle.
- Hoyos, D. (2014). *Geometría Fundamental*. Cali: Departamento de Matemáticas.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemática*. Bogotá.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas*. Bogotá.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*.

ANEXOS

Rejilla de la situación 1. Actividad 1

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes identifiquen los elementos que conforman un triángulo.

Meta de aprendizaje: Identificar los elementos que conforman un triángulo.

Pregunta 1.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3687 0:00:00 E1: son seis porque mira aquí nos muestra un centímetro, dos centímetros, tres centímetros, cuatro, cinco y último seis (muestra la proyección de los segmentos en la regla). 0:00:10	MVI_3685 0:00:20 E2: Al medir la esquina, las esquinas de esta reglita, viendo cada centímetro, aquí podemos encontrar que hay siete centímetros, por lo menos esto viene como marcado no (empieza a contar las puntas del lado no rectilíneo de la regla.) 0:00:37	MVI_3687 0:00:01 La estudiante cuenta los espacios que hay entre las líneas perpendiculares a la parte rectilínea de la regla; obteniendo de esta forma, 6 cm como longitud de la misma. 0:00:10
MVI_3688 0:00:00 P: no pues explícame lo que estás diciendo, por ejemplo, cómo vas a encontrar la longitud de la regla fijándose en la parte que no es rectilínea. E1: porque vea en cada abertura uno la puede bajar así y forma un centímetro (traza con el lápiz segmentos en la regla) en cada, cada aberturita uno lo puede bajar así y forma un centímetro, entonces si bajamos aquí y aquí, aquí había un centímetro y si la seguimos bajando (traza segmentos como proyección de puntos sobre la regla), ahí está los seis centímetros de la regla. 0:00:28	MVI_3686 0:00:30 P: desde donde empiezan a contar E1: Desde aquí (muestra la regla) y nos dio siete centímetros E2: mire cada vez que uno tiene acá (muestra la regla) trae un centímetro, aquí en estas esquinas hay un centímetro (muestra las puntas del lado no rectilíneo de la regla) entonces por eso nos pudimos dar cuenta que hay siete centímetros. P: y esos o sea esos centímetros que usted me dice cuántos de esos están acá (señala las puntas del lado no rectilíneo de la regla). E2: por lo menos aquí dice hay uno, y este otro serían dos, tres, cuatro, cinco, seis, y la última esquina siete (cuenta las puntas del lado no rectilíneo de la regla)	MVI_3688 0:00:10 El estudiante traza con el lápiz segmentos perpendiculares a la parte rectilínea de la regla; esto lo lleva a cabo, a partir de los picos de la parte no rectilínea de la misma. Luego, llega a obtener 6 cm como longitud de la regla. 0:00:27

	0:00:56	
MVI_3689 0:00:01 E1: uno pero mire por las, por las puntas cierto pero sería cuatro, tres unidades o...(muestra la medición que realiza sobre el triángulo azul en uno de sus lados) P: ya encontraste la longitud de esta esta regleta E1: pues según eso es una unidad, porque no tiene pues lo que diga que es un centímetro, que son milímetros. 0:00:17	MVI_3691 0:00:00 P: listo E1: seis P: seis que E1: seis partes de unidad 0:00:20	MVI_3691 0:00:02 La estudiante traza líneas perpendiculares para ver la relación entre el segmento de la parte superior de la regla con la parte rectilínea de la misma; es decir, como proyección de segmentos sobre la regla. Luego, cuenta los espacios que obtiene. 0:00:11
MVI_3692 0:00:01 E1: las partes superiores damos cuenta que cada segmento está separado por... serían seis segmentos, y cuando unimos estos puntos (señala el borde no rectilíneo de la regla) en la regla las divisiones nos da seis unidades. 0:00:11	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.
MVI_3693 0:00:00 E1: según lo que ella me explicó, que había que ir viendo los, (señala en la regla) bueno de aquí, aquí me da un punto, aquí otro; pero si no lo miraba por puntos sino por segmentos, no, me dio seis, ya los puse (señala la hoja de la actividad) y lo expliqué tal como hice y el otro 0:00:17	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

Pregunta 2.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3694 0:00:03 P: cuánto mide ese lado E1: seis tiene seis de longitud pues según lo que yo había puesto en la uno (señala la hoja de respuestas) 0:00:12	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.
MVI_3695 0:00:17 P: veamos que dice, dice: algunos de los lados de los triángulos tiene la misma longitud de la regla? Usted que dice. ¿Cómo resuelve eso allí? O sea algunos de los lados del triángulo, de los triángulos, ¿tiene la longitud de la regla? E1: si P: si, cierto (la estudiante mide con la regla uno de los lados del triángulo naranja) porque dices que sí. E1: profe pues nada más estos dos que me da igual, estos dos lados (realiza la medición con la regla en uno de los lados de los triángulos azul y naranja) 0:00:54	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

Pregunta 3.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3702 0:00:00 Estamos midiendo cada, esto aquí, por lo menos aquí está todo esto igual (mide con la regla un lado del triángulo de color azul), entonces da 6 cm; por lo menos este, este da 8 por que mira, seis y dos, ocho (señala la medición que realiza con la regla en uno de los lados del triángulo de color	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

morado), este también es igual (mide uno de los lados del triángulo naranja), y este (mide uno de los lados del triángulo verde), aquí son seis y cuatro son diez. 0:00:39		
MVI_3694 0:00:03 P: cuánto mide ese lado E1: seis tiene seis de longitud pues según lo que yo había puesto en la uno. 0:00:12	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.
MVI_3695 0:00:47 E1: profe pues nada más estos dos que me da igual, estos dos lados (realiza la medición con la regla en uno de los lados de los triángulos azul y naranja) 0:00:52	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

Pregunta 4.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3704 0:02:31 P: no importa si son iguales o no, sino me encaja todos; pero lo único que yo quiero ver es si estas esquinas encajan (señala las esquinas de los pequeños triángulos), si eso pasa es porque los ángulos son iguales, ¿encaja? Entonces, ¿esos ángulos son iguales? E1: Si 0:02:44	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

Pregunta 5.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3704 0:02:54 P: usted quiere mirar si estos ángulos son iguales cierto, y usted ya sabe que todos los verdecitos son iguales, entonces explíqueme porque esos ángulos del triángulo grande son iguales. La estudiante ubica los triangulitos verdes sobre los ángulos del triángulo grande de color verde. E1: primero porque todos miden lo mismo, pues la longitud de todos es casi igual, es igual, y pues al ubicarlos aquí nos muestra que el ángulo es igual, acá cambia y acá también (señala los triángulos verdes situados en los ángulos del triángulo grande de color verde); entonces este triángulo viene siendo un equilátero. 0:03:27	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.

Rejilla de la situación 1. Actividad 2

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes conozcan las características de la desigualdad triangular.

Meta de aprendizaje: caracteriza la desigualdad triangular.

Parte 1. Ítem a.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3707 0:00:00 Las estudiantes tratan de formar un triángulo con las tres reglas dadas. E1: ¿tenemos que dibujarlo? P: claro Las estudiantes consiguen dibujar un triángulo con las tres reglas, situándolas una en el extremo de la otra. 0:02:12
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3708 0:00:01 P: verónica explíqueme como ¿cómo construyo el triángulo?, ¿cómo utilizó los instrumentos?, ¿cómo utilizó las reglas para hacer ese triángulo? ¿Cómo hizo? E1: con la más larga la cruce hacia acá, luego cruce esta, y luego esta; y con la parte que me sobró lo complementé acá. (muestra con las reglas las posiciones que utilizó para cada una de ellas sobre la hoja de papel) P: me hace el favor y lo muestra, me muestra como hizo el dibujo me hace el favor. E1: y esta parte la complementé con la regla amarilla (señala el pedazo que completo con la regla amarilla) 0:00:35
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3709 0:00:00 E1: yo cogí la parte más larga que es la blanca, la puse a la parte horizontal, la puse aquí, cogí la parte que es azul que

categoría.	categoría.	es un poquito más larga, la puse al borde bueno hacia la superior, para que me pudiera medir aquí, la amarilla la puse a este otro, no me alcanzó entonces la complemente la baje un poquito, la complemente para que me pudiera llegar acá, ya. (señala el procedimiento que realizó sobre el triángulo que construyo con las tres reglas) 0:00:24
-------------------	-------------------	---

Ítem b.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3710 0:01:18 P: me puedes hacer el favor y me explicas como obtuviste ese triángulo? ¿Cómo uso los instrumentos? E2: en esta parte puse la más larga abajo, la amarilla la, luego hice la línea, luego la quite, la hice la otra con la amarilla y luego le hice con la verde dejándole un pedazo sin rayar. (la estudiante explica el procedimiento que empleo señalando sobre el triángulo que produjo con las reglas) 0:01:37
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3712 0:00:00 E1: puse la más grande al lado superior de acá, trace la línea a este borde, de ahí cogí la verde la trace hacia este lado de acá, trace la línea, y como la amarilla es la más pequeña la puse a este borde para que me pudiera complementar el espacio que me quedaba ahí y poderlo armar (explica el procedimiento utilizando las reglas de color blanco, amarillo y verde). 0:00:20

Parte 2.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3713 ítem a. 0:01:01 P: Entonces ahora explícame si es posible o no construir el triángulo. E1: pues es posible, pues solo hay dos reglas. P: si E1: toca utilizar una dos veces para poder construir el triángulo, porque con dos no más no vas a poder, entonces tendrías que hacer este procedimiento, así. (toma las reglas blanca y amarilla y forma un ángulo con ellas) P: entonces lo que tú dices es que usando solamente dos reglas puedo construir una parte cierto, o sea, formando un ángulo, y para poder construir realmente el triángulo... E1: se forma así (construye el triángulo trazando sus lados con las reglas dadas) P: si E1: entonces para poder construir el triángulo usas de nuevo nuevamente una regla, y los trazos serian así (realiza los trazos sobre la hoja de papel usando la regla blanca); y entonces allí te va a quedar más o menos el triángulo. 0:01:46	MVI_3696 ítem b. 0:00:26 P: ¿es posible con estos tres? (la profesora le pasa al estudiante una regla de longitud muy pequeña; el estudiante trata de formar el triángulo con las tres reglas) E1: no P: ¿porque? E1: porque este lado está muy pequeño para poder que llegue al vértice o llegue al extremo del otro P: cuando te pase esto si se podía (la profesora le pasa una regla de longitud mayor) E1: porque este lado es más largo y llega hasta el otro extremo (el estudiante forma el triángulo con las reglas) 0:01:04	MVI_3715 ítem a. 0:00:00 P: ¿cómo lo construiste? E1: con la regla blanca la puse aquí trace la línea, para que me pudiera formar bien, después la amarilla, deje la blanca por aparte y puse la amarilla aquí (señala en el triángulo que construyo), trace la línea, me faltaba una regla, como no tenía más, bueno tenía más, pero para que me pudiera trazar bien el triángulo, cogí otra y trace la línea que quedaba, para poder armar el triángulo (señala en el triángulo que construyo), queda aquí, y ya. P: o sea que, o sea que usando dos reglas. E2: no, no se puede P: eh, usando dos reglas puedes formar una parte del triángulo y se construye un ángulo E1: un ángulo P: para poder realizar completamente el triángulo E1: tendría que poner otra regla, tener otra regla para completar P: bueno allí estas usando una regla dos veces E1: mmjiji exacto 0:00:49
MVI_3714 ítem a. 0:00:05 P: vamos con la parte b. ¿es posible construir el triángulo? E1: si P: sí, me muestras como lo construiste E1: con la más pequeña hice la primera línea (toma la regla amarilla y señala la forma en que hizo el trazo), y luego con la blanca la trace (toma la	MVI_3698 ítem a. 0:00:12 P: ¿se puede construir el triángulo? E15: porque, porque con dos reglas no es posible hacer un triángulo, porque para hacer un triángulo se necesitan de tres reglas. P: porque tres reglas E15: porque entonces si yo coloco esto así (muestra la	MVI_3716 ítem b. 0:01:44 E1: tenemos tres reglas, pues yo utilice la regla más pequeña (toma la regla blanca) para medir para poderlo medir aquí (señala la parte del triángulo construido); que me diera una longitud igual a la regla, la amarilla la puse al lado, al borde de acá (ubica la regla en un lado del

regla y señala la forma de hacer el trazo) para hacer las otras partes que faltaba. 0:00:20	posición de sus reglas) faltaría el pedazo de acá abajo, de cualquier manera, que lo coloque faltaría un lado 0:00:29	triángulo construido); no miento (corrige la posición de la regla al ubicarlo en otro de los lados del triángulo construido), puse al borde de acá para poderle hacer la parte de abajo; y la blanca como es la parte más larga, aunque tiene la misma medida que la verde use mejor la blanca para poderla medir acá, y tener tres reglas para utilizar esto, y me dio un triángulo pequeño. 0:02:18
MVI_3716 ítem b. 0:02:29 P: construye el triángulo, quiero ver como lo construyes ahí E2: con la más pequeña hice la parte primera (toma la regla verde y la ubica en el lado del triángulo que construyo con ella), luego con la amarilla hice la de acá (hace lo mismo con la amarilla); y con la blanca trace esta (señala el trazo que realizo con la regla) y le deje una pedazo sobrando. P: en conclusión si es posible construir el triángulo usando las tres reglas cierto. E2: si 0:02:49	MVI_3717 ítem c. 0:00:40 E3: no da, no da P1: porque P: porque no es posible E3: porque lo que pasa es que la blanca es demasiado larga como para unirse con los otros puntos, es muy larga y los otros son demasiado pequeños como para unir. P: o sea, estas dos reglas son muy cortas (reglas verde y amarilla); tienen una longitud muy pequeña en comparación con la más larga E3: ujum P: y por esa razón no es posible construirlo E3: si, es imposible 0:01:09	MVI_3728 ítem c. 0:00:28 P1: porque siempre están comparando esos dos lados con la blanca, yo he visto que siempre hacen eso, toman los dos lados y los comparan con la blanca. (E1 une las reglas verde y rosada en forma conjunta, y los compara con la regla blanca, el resultado sigue siendo una longitud menor que la regla blanca) ¿Qué propiedad debería cumplir esos dos lados cuando los une, para que en verdad se pudiera tener un triángulo? ¿Qué pasa ahí? ¿Por qué no se puede obtener? E1: Pues primero que todo, porque deberíamos no sé, deberíamos tener la misma longitud de esa regla a estas dos; pero como estas dos (regla rosa y verde) son más cortas, entonces pues tendríamos el cuadrado, pero pues no, el triángulo, pero pues no, no nos daría la longitud que necesitamos obtener. 0:01:12
MVI_3728 ítem c. 0:07:20 E1: deben, cuando se unen siempre tiene que llegar uno más largo que el otro	No se presentan episodios de clase correspondiente a esta categoría.	MVI_3728 0:08:12 P: usted que puede decir, teniendo en cuenta dos lados y haciendo esa adición de dos

P: ¿cuándo se unen? Cuando E2: dos reglas para formar otra 0:07:32		lados, ¿qué propiedad debería cumplir con respecto al otro para que pueda formar el triángulo? E1: cuando en este caso, bueno en todos los casos son tres regletas no, y cuando uno las une de modo que queden solo dos reglas siempre tiene que tener una más larguita que la otra. 0:08:44
MVI_3722 ítem c. 0:00:19 P1: bueno, que pasaría entonces, si yo, supongamos que este que está aquí se alargó un poquito y quedó convertido en este (cambia una regla verde por una de color amarilla de mayor longitud), ¿con el si se podría? E1: si se puede P1: porque crees que se puede E1: porque estas dos partes son de la misma longitud, y al trazar; o sea, al unir las así, (junta los extremos de las reglas rosada y amarilla, formando un ángulo), y esta como es más pequeña, la pondría aquí y me daría el triángulo P1: esta tiene, o sea ¿siempre tiene que haber dos partes iguales? E1: pues no siempre, porque, porque la mayoría de veces uno puede utilizar la regla; pero en esta ocasión sí, para poder armarlo. (forma el triángulo con las tres reglas) 0:01:35	MVI_3721 ítem c. 0:00:32 E1: no da, para poder unir las estas (reglas verdes) son demasiado cortas, entonces no llega para poder unir las E2: deberían ser todas tres de la misma longitud E1: o no tanto de la misma, pero deberían una de estas ser un poquitico más larguita E3: pero no todos tienen que tener un mismo orden E2: no, o sea, simplemente una debería, para formar esto, una debería, ejemplo ésta debería ir aquí (ubica la regla rosa sobre el papel), tendría un poquito, esta (regla verde) un poquito aquí con un, digamos un borde aquí (usa las reglas verdes), y esta, no, si algo así, que llegara y uniera la punta de acá P: o sea una de las dos debe ser más larga E2: una de las dos debería ser un poquito más larga para poder unirla y así crear el triángulo P: listo, o sea que, con estos tres reglas no es posible porque dos de ellas tienen la longitud muy corta con respecto a la otra, listo. 0:01:52	MVI_3728 ítem c. 0:01:28 P1: ustedes siempre comparan las dos, que ese nuevo lado que ustedes quieren construir, cuando unen esos dos lados que debería cumplir con respecto a la blanca, la regleta blanca E2: eh cuando los unimos para comparándolos, deberían llegar por lo menos aquí (une las dos reglas cortas para comparar con la regla blanca, señala una parte de la regla blanca más abajo de la mitad), para que nos dé un triángulo bien realizado. Porque allí, como nos da uno, pero sin, casi sin forma P1: hagan eso mismo, comparen esos, ustedes toman esos dos lados y lo compara con la blanca, usted me dice que debería ser más grande, ahora vaya donde verdad se podría construir el triángulo y haga esa comparación, tome esos dos lados más pequeños y compárelos con la regla blanca, a ver qué pasa E2: es que no se puede no P1: y póngale la verde ¿Qué paso ahí? (E2 coloca la regla azul junto a la verde y esa longitud total resulta mayor que la regla blanca) E2: pues queda más largo, y pues hasta parece que con esto si da, porque cuando los

		unimos uno queda más largo que el otro, y entonces separados si podría dar un triángulo (E2 forma con las reglas un triángulo) 0:02:48
--	--	---

Parte 3.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
MVI_3729 ítem a. 0:00:42 E3: el punto, bueno estamos en el (b) igual, el número cinco es muy superior al dos y al uno, para poder formar un triángulo tiene que ser un número un poco más alto para poder que la línea quede un poquito sobrepasada, entonces tendríamos que utilizar el número cuatro y el número dos en la parte de acá, para que ahora si pasara un poquito más al número cinco 0:01:05	MVI_3729 ítem a. 0:00:25 P: y usted que dice del (a) E2: yo digo no se puede, porque este tiene dos y este uno, uniendo el dos y el uno daría tres, y quedaría muy pequeño, no serviría 0:00:38	MVI_3729 ítem a. 0:00:00 P: ¿en el punto (a) se puede? E1: ¿en el (a)? no, no se puede porque mira, deberían ser, por decir aquí el tres y acá el dos, así nos daría los dos juntándolos nos daría diez centímetros, entonces tampoco se podría, entonces tendría que ser aquí el cuatro y acá el dos, así nos daría un centímetro más y así lo podríamos hacer 0:00:23
MVI_3730 ítem b. 0:00:00 E1: si se puede, aquí se puede porque sumando estos dos (señala los números 6 y 7) nos da más que este (señala el número 11); entonces ahí sí se puede porque siempre tiene que haber uno más largo que el otro, entonces aquí si se podría. E3: yo también digo que sí se puede, porque bueno en el 11 que es la más larga en este caso y unimos el 6 y el 7 nos daría una tirilla mucha más larga, entonces si se podría. P: ujumm E2: el número 7, sumando el número con el número 6 nos daría una longitud más larga que el número 11 y ahí si podríamos armar, armar el triángulo.	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3730 ítem b. 0:00:12 E1: si se puede, aquí se puede porque sumando estos dos (señala los números 6 y 7) nos da más que este (señala el número 11); entonces ahí sí se puede porque siempre tiene que haber uno más largo que el otro, entonces aquí si se podría. 0:00:27

0:00:59		
MVI_3730 ítem c. 0:01:10 P1: listo, esto en la c E2: no se podría P1: ¿porque no? E1: porque mira, son diez centímetros, al unir este con este (señala los números 5 y 2) nos daría solo siete, entonces no se podría porque siempre tiene que haber una más larga que la otra 0:01:21	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3730 0:02:46 P1: En la b yo note que ustedes siempre toman los números más pequeños y lo comparan con el número más grande, cierto E1: para que sobrepase al otro P1: aja, que pasa si comparo el 6 con el 11, si sumo 6 y 11 y lo comparo con el 7, ¿qué pasa? E2: Daría 17 y sobrepasaría mucho más al 7 P1: cierto, y si comparo el 11 con el 7, si sumo E1: daría más entonces el 6 0:03:14
MVI_3730 ítem d. 0:01:26 P1: y en el d E1: en el d, tampoco P1: ¿porque no se puede en el d? E2: por eso, nos daría iguales si la medimos E1: no, no daría igual E2: no, no daría igual E1: de pronto se podría E2: no se puede porque el 7, sumando estos dos (señala los números 2 y 4) nos daría 6, nos daría 6 y tiene que sumar un número más grande para poder pasar el número 7 y nos quede una tirilla más larga 0:01:54	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3730 0:05:46 dígame, expreseme eso que está cumpliendo los lados del triángulo, tomo y sumo dos lados que pasa con el otro E1: si suma dos lados P1: la medida de dos lados P: ¿que tiene que pasar! E1: la medida de los dos lados E2: Uno quedaría más mayor que el otro 0:06:08 0:06:47 E2: que no importa el lugar donde coloquemos la otra ficha, la otra regla, que igual manera va a dar le triangulo P: Pero como que no da, siempre y cuando que E2: siempre y cuando lo coloquemos en cualquiera de los dos, no E3: siempre y cuando una parte sea mayor que la otra P1: ¿Qué? P: siempre y cuando E3: una parte sea mayor que la otra 0:07:08

Rejilla de la situación 1. Actividad 3

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes conozcan las características de los criterios de congruencia.

Meta de aprendizaje: Caracteriza los criterios de congruencia entre triángulos.

Parte 2.

SE LOGRA	NO SE LOGRA	CONSTRUCCIÓN
No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.	MVI_3731 ítem a. 0:00:00 P: ¿el que nosotros tenemos es suficiente para construir el mismo triángulo? E1: no creo P: ¿Por qué? E1: porque solo tengo dos fichas y tendría que volver a utilizar una, otra bueno la misma para que me pueda dar el triángulo que usted me dice P: pero, eso garantiza ¿que sea el mismo triángulo que yo tengo? E1: no P: cierto que no, hace falta más información E2: si falta información, faltaría una ficha más para poder construir el triángulo y para poderlo formar o sea que con estas dos fichas no podríamos (solo se les dio dos reglas) 0:00:28	No se presentan episodios de clase correspondientes a esta categoría.
MVI_3732 ítem b. 0:03:29 P: tiene yo les di dos lados y un ángulo, cierto; esa líneas que ustedes trazaron deben tener la misma longitud de esa reglitas que yo les di, cierto, ¿las tienen? (las estudiantes verifican que las líneas que trazaron tienen la misma longitud de las reglas dadas), ¡sí! Cierto, bien ahora entonces, ¿Qué tendría que hacer? (comienzan a trazar el lado que le faltaba para	MVI_3732 ítem b. 0:00:42 P: muy bien, con eso haz, haz si quieres comienza a rayar, y dime si con esos dos, si con esas tres cosas tu puedes construir el triángulo que yo tengo. Igual tú (E2), tu tendrías que mirar entonces, si con esas dos, esos tres perdón tú puedes construir el triángulo que tiene Verónica. (las estudiantes construyen una parte del triángulo con las dos	MVI_3732 ítem b. 0:03:10 P: bien, ¿con eso ustedes creen que es suficiente para construir el triángulo? E1: no, la verdad no porque la de abajo, entonces, ¿tendría que volver a usar este?, o ¿solo es el ángulo? 0:03:27

obtener el triángulo) 0:03:53	reglas y el ángulo comprendido entre ellas, quedando por construir el tercer lado) Listo, bien con eso ustedes creen que es suficiente para construir el triángulo E1: no, la verdad no porque la de abajo, entonces, ¿tendría que volver a usar este?, o ¿solo es el ángulo? 0:03:27	
MVI_3740 ítem c. 0:00:00 P: ¿Qué tienes que hacer para verificar si estas comparando los mismos ángulos? P1: ¿Qué tendría que mirar? E1: este aquí es como más angosto P: pero de esos cuál corresponde a ese, de esos que te entregué E1: este P: ¿Por qué? E1: porque mira colocando este me da igual P: queda igual, bien y el otro E1: este, de este lado P: aaaaa,... y ese lado de donde corresponde que te di (E1 trata de construir el triángulo con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos) 0:00:40 0:02:20 Cuando yo digo que el ángulo y el lado que se comprende entre ellos es este ángulo, este ángulo cual es lado que se comprende de ellos, este de acá abajo, este E2: no el de acá P: el de acá, es de tratarlo de formar así... ya pudiste entonces respóndeme E2: si me da 0:02:38	MVI_3742 ítem c. 0:00:00 La estudiante no logra construir un triángulo exactamente igual al del profesor; pues la ubicación de uno de los ángulos no fue correcta lo que ocasionó que el ángulo construido fuese de mayor abertura que el original. 0:01:43	MVI_3740 ítem c. 0:00:07 La estudiante construye el triángulo pedido con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. Toma como base la regla dada y traza un segmento que corresponde a uno de los lados del triángulo; luego ubica los ángulos de color verde sobre los extremos del segmento construido para tomar la medida de los ángulos; finalmente con la regla traza los otros dos segmentos y construye un triángulo equilátero cuya longitud de sus lados es la misma de la regla dada. 00:03:42
MVI_3743 ítem d. 0:00:03 P: muéstrame aquí como	MVI_3744 ítem d. 0:0 E1:no	MVI_3743 ítem d. 0:00:54 P: si yo te doy estos tres es

estuviste haciendo. ¿Por qué no es suficiente? E: porque pues de ángulos queda muy bien; pero el tamaño queda muy diferente. Entonces, cuando lo vamos a medir con el triángulo que ya está queda, sino queda muy pequeño, queda muy grande, entonces es muy necesario un lado. P: es necesario darle, muy bien, entonces escríbame eso. 0:0:26	P: ¿Por qué no? E1: porque lo ángulos, uno de los tres ángulos, al unir los tres ángulos forma una recta a los dos ángulos de aquí a aquí tengo un ángulo, ejemplo este sería (a) y este sería (b); sería un ángulo (a) y (b); y aquí tendría, este le pondríamos (c) sería (c), (a) y (c); sería ya formaría los tres ángulos ahí P: pero; entonces. ¿Construiste el mismo que debiste haber construido? E1: este (toma un triángulo morado) P: ¿es el mismo? E1: si es este P: pero, ¿te quedó igualito? E1: no P: ¿Qué tendría que tener? E1: tendría que tener una línea recta P: pero, ¿cualquier línea recta? E1: no, una que sobre pase P: que sobre pase que E1: aquí que aumentara más porque los ángulos no me ayudan de a mucho son muy cortos y no me ayudan con la gráfica P: listo ella ya terminamos 0:01:13	suficiente para construir un triángulo, no me mires esto, no lo vayas a comparar con el de acá, simplemente con esos tres. ¿Es suficiente para construir ese triángulo? (la estudiante trata de construir el triángulo) 0:03:55 La estudiante sitúa los ángulos en diferentes posiciones hasta conseguir la posición adecuada para construir un triángulo. Aunque el triángulo que forma es diferente al que tiene la profesora.
--	---	--

Rejilla de la situación 2. Actividad 1

Conjetura: el uso de planillas permite que los estudiantes identifiquen que las partes sobrantes en una figura producto de una superposición entre figuras congruentes son congruentes.

Meta de aprendizaje: identificar que las partes sobrantes en una figura producto de una superposición entre figuras congruentes son congruentes.

SE LOGRA	NO SE LOGRA
----------	-------------

MVI_3753 0:00:06 P: me puedes hacer el favor y me explicas: si, ¿esos triángulos son congruentes? E: claro profe, los triángulos son congruentes porque al poner uno encima del otro se puede notar que son de la misma medida y tienen la misma forma. Por lo tanto, son congruentes. 0:00:22 MVI_3765 0:02:18 P: entonces que concluimos con los dos triángulos, que decimos E2: que, si son congruentes porque tienen la misma forma, el mismo tamaño y los mismos ángulos P: y, ¿la medida de los lados es la misma? E2: si P: muy bien 0:03:27	MVI_3759 0:00:29 P: ahora, dime, ¿qué área comparten las plantillas? ¿Qué área comparten los dos triángulos, el azul y el amarillo? ¿Qué área comparten? E: esta área (señala el área compartida por las plantillas) P: esa área, y esa área, ¿qué figura forma? E: forma un triángulo isósceles P: isósceles y, ¿Por qué isósceles? E: porque tiene dos ángulos iguales, dos lados iguales y uno desigual P: muy bien, ahora si retiras esa área compartida que es un triángulo isósceles que me queda como resultado E: me queda como resultado esta parte de aquí (señala las figuras que representó en su hoja de respuestas) P: esa parte E: si P: muéstrame con las plantillas como la obtienes, muéstrame, si tú tienes estas plantillas así (toma una de las plantillas de color azul y la otra de color amarillo y forma la figura 1 de la guía); el área compartida, ¿cuál es?; ¿ésta cierto? Ésta (señala el área formada por el triángulo isósceles) E: si P: entonces si tú quitas esta área compartida, tú la retiras, imaginariamente la retiras, ¿qué queda como resultado? Muéstrame lo que queda como resultado E: esta parte (señala el dibujo realizado en su hoja de respuestas) P: pero muéstrame con las plantillas E: ah con las plantillas P: tú quitas esta área compartida, la retiras, que me queda como resultado, con las plantillas, a ver muestra, que me queda E: estas dos (señala las figuras sobrantes de la superposición de las plantillas) P: esas dos muy bien E: si 0:01:37
MVI_3808 0:00:05 P: ¿los triángulos que te acabé de entregar son congruentes? E: ¡sí! P: ¿Por qué? E: porque ambos triángulos tienen la misma medida, la misma forma, el mismo tamaño y	MVI_3808 0:00:41 P: ahora forma la figura número uno de la guía ¡listo! Bien, ahora, ambos triángulos comparten un área, ¿cierto? Por ejemplo, estos dos triángulos y estos dos triángulos comparten, tienen un área compartida, ¿el área compartida qué figura forma?

los mismos ángulos. (superpone un triángulo, de color amarillo sobre el otro). P: ¿y los triángulos azules también? E: sí, porque al unirlos también forman la misma medida. (superpone una plantilla de color azul sobre la otra). P: y todos los triángulos entre sí, ¿serán congruentes? E: sí P: sí, muéstrame E: ¿cómo así? ¿todos? P: sí, muéstrame porque E: sí, porque al unirlos todos de la misma figura, con los mismos lados, y los mismos ángulos (superpone las plantillas amarillas sobre las azules) P: o sea que todo coincide. E: aja P: o sea que, conclusión. E: son congruentes. 0:00:41	E: un triángulo isósceles P: muéstrame ahí en las plantillas cual es, donde se ve el triángulo isósceles, cuál es el triángulo isósceles, muéstrame ahí. E: el que se divide entre estos dos triángulos, aquí (señala uno de los lados del triángulo obtenido por la superposición de las plantillas) que queda así triángulo, el lado de acá (señala una de los lados del triángulo) P: ¿Por qué isósceles? E: porque solo tiene dos ángulos, dos ángulos iguales P: y los lados E: los lados también P: sí, entonces digamos a ver. Este lado de aquí es igual a que a cuál a este de la base o a este lado de acá (señala uno de los lados del triángulo) E: a este lado de acá (señala uno de los lados del triángulo) P: y este ángulo de aquí, la medida de este ángulo es igual a que ángulo, a la medida de este ángulo o a la medida de este ángulo (señala el ángulo superior y el inferior izquierdo del triángulo) E: ¿cuál ángulo? P: este ángulo de aquí (señala el ángulo inferior izquierdo del triángulo) P: si E: es igual a este de acá (señala un ángulo exterior al triángulo) P: No, no, no, este que está aquí, este que está aquí. Este formado (señala el ángulo inferior izquierdo del triángulo) E: aaaa es igual a este de acá (señala el ángulo inferior derecho del triángulo) P: aaaa listo o sea que es un triángulo isósceles E: aja P: listo 0:02:05
---	--

Rejilla de la situación 2. Actividad 2

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes verifiquen que las partes que tienen en común figuras congruentes producto de la superposición entre figuras también son congruentes.

Meta de aprendizaje: verificar que las partes que tienen en común figuras congruentes producto de la superposición entre figuras también son congruentes.

SE LOGRA	NO SE LOGRA
MVI_3771 0:00:08 P: bueno, con las plantillas que te acabé de entregar, vemos que tenemos dos triángulos, ¿esos dos triángulos son congruentes? E: ¡ah! ¡Si, obvio! P: ¿Por qué son congruentes? E: son congruentes porque al unirlos dan la misma medida, tienen los mismos ángulos, y la misma, el mismo tamaño. (Superpone la plantilla de color morado sobre la verde). P: ¿y la forma es la misma? E: y la forma también es la misma porque al unirlos forman una misma medida por eso son iguales. (Superpone el triángulo de color morado sobre el verde). P: listo, muy bien 0:00:31	MVI_3772 0:00:25 P: ahora, como ya me dijiste que son congruentes. Ahora, forma con esos dos triángulos la figura número 1. Forma esta figura, ¿cómo haces? (señala la figura 1 de la guía de trabajo. El estudiante forma la figura 1 con las plantillas que representan a los triángulos). Listo, ahora, dime estos dos triángulos forman un área compartida, ¿esa área compartida, ¿qué figura forma? E: forma un triángulo isósceles P: muéstrame en las plantillas la forma de esa figura E: se le quita aquí y quedaría esta figura (señala el área compartida por las plantillas superpuestas) P: eso, o sea que, cuál, ¿cuál sería? E: así (forma con las plantillas la figura que dibujó en la hoja de respuestas) P: no, pero yo me refiero a que, cuando tú lo tienes así de esta forma, así, forma un área compartida (forma con las plantillas la figura 1 de la guía), cierto, ¿cuál es el área compartida? E: este y este (señala los lados del triángulo que se forma por la superposición de las plantillas) P: eso, es un triángulo, ¿qué tipo de triángulo es? E: un triángulo isósceles P: ¿Por qué isósceles? E: porque tiene dos lados iguales y un lado desigual P: ¿cuáles son los dos lados iguales? E: sería éste y éste (muestra los lados en las plantillas) P: ¿cuáles son los lados iguales? Éste lado es igual a la base o a este lado de acá (señala los lados del triángulo formado por la plantillas superpuestas) E: a este lado de aquí (señala los lados de igual medida del triángulo)
MVI_3772 0:00:08 P: con las plantillas que te acabé de entregar vemos que dos de ellas son triángulos, entonces la pregunta es ésta: ¿los triángulos que te acabé de entregar son congruentes? E: si P: ¿porque son congruentes? E: porque tienen los mismos ángulos entre sí, y tienen la misma forma y el mismo tamaño. (Superpone el triángulo de color verde sobre el de color morado). 0:00:24	
MVI_3773 0:00:11 P: con las plantillas que te acabé de entregar dime si estos dos triángulos son congruentes. E: si son congruentes porque al ver, los juntamos y son iguales los dos triángulos, al parecer tienen los dos mismos ángulos, aquí, aquí y aquí (señala los ángulos del triángulo verde) y son iguales. (Superpone el triángulo de	

color morado sobre el verde) P: ¿y los lados también cumplen la misma propiedad? E: los lados también son iguales entonces vea (muestra la coincidencia de los lados mediante la superposición de las plantillas). P: entonces que concluimos. E: que sí son congruentes. 0:00:52	P: y los ángulos, este ángulo de aquí es igual a que ángulo, a este ángulo de aquí o al superior (señala los ángulos del triángulo isósceles) E: a este ángulo (señala el ángulo inferior derecho del triángulo) P: listo, será ¿que esa base es igual a este lado y a este lado en medida? E: no
MVI_3776 0:00:48 P: esos dos triángulos, en esa posición comparten un área, ¿qué área compartida forman ello? E: un triángulo P: ¿qué tipo de triángulo será? E: un isósceles P: ¿Por qué isósceles? E: porque tiene dos ángulos iguales y dos lados iguales 0:01:10 MVI_3776 0:01:30 P: ¿estos dos triángulos son congruentes? E: sí P: ¿Por qué? E: porque por lo menos el área compartida se le quitó en igual medida a los dos P: bueno aparte de eso que podemos decir E: tienen también lados iguales, lo mismo si los juntamos quedan prácticamente iguales, son prácticamente iguales P: coincide todos los ángulos y las medidas de los lados E: sí 0:01:55	P: ¿no? Porque es un triángulo isósceles. Ahora, que pasa si yo retiro ese triángulo, yo quito esa área compartida, ¿Qué obtenemos como resultado? E: tendríamos estos dos triángulos (señala los triángulos que dibujo en la hoja de respuestas) P: y esos dos triángulos en las plantillas, ¿cuáles serían? Si yo quito esto (señala los triángulos formados por la superposición de las plantillas) E: serían este y este (señala los triángulos en las plantillas superpuestas) P: ¿Cuáles? ¿Esta? E: esta y esta (señala los triángulos formados por la superposición de las plantillas) P: eso, muy bien. Entonces, serían dos triángulos que es lo que dibujaste aquí sobre el papel E: si P: ahora, dime si esos dos triángulos que dibujaste y que podemos visualizar en las plantillas son iguales E: si son iguales porque tienen los mismos ángulos, la misma forma y el mismo tamaño. P: ¿son congruentes? E: si son congruentes P: ¿porque? E: porque los mismos ángulos son iguales entres si, éste con este, y este con este,..., (señala los ángulos correspondientes de los triángulos formados por la superposición de las plantillas) P: o sea este, los lados, por ejemplo este lado ¿es igual a este lado? (señala los lados del triángulo) E: a este lado (señala los lados correspondiente en el otro triángulo) P: y este lado, ¿es igual a cuál? E: a este lado P: y este lado de aquí E: sería igual a este P: y los ángulos, ¿éste ángulo es igual a que

	ángulo en el otro triángulo? E: a este ángulo P: ¿y este ángulo de aquí? E: a este P: ¿y este ángulo de aquí? E: a este de acá P: entonces, los dos triángulos son congruentes E: si son congruentes 0:03:03
--	---

Rejilla de la situación 2. Actividad 3

Conjetura: el uso de plantillas permite que los estudiantes comprueben que las partes compartidas entre figuras superpuestas son congruentes pues son el resultado de la superposición de las partes de una figura que sobran que también resultan ser congruentes.

Meta de aprendizaje: comprobar que las partes compartidas entre figuras superpuestas son congruentes pues resultan de la superposición de las partes de una figura que sobran y que son congruentes.

SE LOGRA	NO SE LOGRA
MVI_3799 0:00:07 P: las plantillas que te acabé de entregar cierto, ¿son congruentes los triángulos correspondientes? E: si P: porque, muéstrame, me haces el favor y me muestras. E: porque al unirlos, o sea al juntarlos solo da una figura (superpone los triángulos de color rosado sobre los de color naranja). P: listo, con esa..., con la manipulación de las plantillas de esa forma, o sea al superponer una sobre la otra vemos que sus ángulos, los ángulos correspondientes coinciden cierto, es decir, la medida de los ángulos es la misma, y ¿la medida de los lados también? E: si P: y la forma y el tamaño también E: también P: es la misma, entonces que concluimos E: que son congruentes P: listo 0:00:50	MVI_3807 0:00:34 P: ahora, forma la figura uno de la guía (la estudiante utiliza las plantillas para formar la figura 1), bien, muy bien. Ahora, mira que estos dos triángulos comparten un área, ¿esa área compartida por los dos triángulos que figura forman? E: ¿cuál? P: por ejemplo este triángulo naranja y este triángulo rosado comparten un área, esa área compartida por ambos triángulos, ¿qué figura forman? E: forma esta figura (señala la figura realizada en su hoja de respuestas) P: esa figura, no, no, tenemos aquí mira, este triángulo; este triángulo naranja y este triángulo rosado tienen un área que lo comparten, esa área compartida ¿cuál sería? ¿Sería esta de acá arriba? E: ahhh sí, si P: O ¿ésta de acá abajo? O ¿sería esta de aquí? (señala las áreas obtenidas por la superposición de las plantillas), ¿cuál sería? E: pues sería esta ¿esta? (señala el área compartida por las plantillas) P: ¿cuál? Esa ¡muy bien! E: este, este lado de acá P: y ¿qué figura forma esa área compartida? E: un triángulo
MVI_3799 0:01:48 P: y, ¿qué figura forma el área compartida por esos dos triángulos?	

E1: un triángulo P: y, ¿qué tipo de triángulo será? E1: ese triángulo es escaleno P: ¿Por qué es escaleno? E1: porque tiene tres lados de diferente medida, y tres ángulos de diferente medida. 0:02:22 MVI_3793 P: las figuras que te acabé de entregar, las plantillas, dime si son congruentes. E: si P: ¿porque son congruentes? E: porque al unirlos tienen la misma forma (superpone el triángulo de color naranja sobre el de color rosado) P: ¿y el tamaño es igual? E: si P: bueno que más podemos decir, ¿qué pasa con los lados y con los ángulos? E: tiene los mismos lados y los mismos ángulos P: ¿y lo mismo se cumple con el otro par de triángulos? E: si P: listo 0:00:31	P: y ¿qué tipo de triángulo? E: ¿un triángulo equilátero? P: equilátero a ver, si fuese un triángulo equilátero tendríamos que los tres lados serían iguales, a ver miremos, este lado de aquí a ver, este lado, este lado de aquí, ¿es igual a este lado de acá? E: aaa no, entonces es un escaleno P: un escaleno, y ¿Por qué es un escaleno? E: porque tiene lados diferentes P: y ¿Qué pasa con los ángulos? serán iguales o serán también de diferente medida? E: si todo es diferente porque no tienen la misma medida P: listo muy bien. Ahora, esos triángulos tú los debiste haber dibujado en el punto siguiente, cierto. Ahora, esos dos triángulos, este triángulo escaleno y acá; este otro triángulo escaleno, esos dos triángulos es la figura que forman ambos triángulos que comparten esa misma área no E: aja P: esos triángulos cierto, ahora, la pregunta es: ¿esos triángulos serán congruentes? Esos dos triángulos escalenos E: los que comparten la, la P: los que comparten ambos triángulos E: si son iguales P: son iguales, son congruentes y porque E: son congruentes porque pues comparten la misma figura en ambos lados (señala la figura 1 formada con las plantillas superpuestas) P: comparten la misma figura ¿cómo así? E: pues cuando, pues esta parte es la misma del lado de acá, entonces forman la misma figura a este lado y para este lado (señala la parte compartida por las plantillas debido a la superposición) P: y este lado de aquí es igual a cual en el otro triángulo E: al lado de acá, la figura compartida del lado de acá P: a ver entonces miremos a ver. Este lado de aquí es igual a cuál de los lados en el otro triángulo. Este lado de aquí E: al lado de acá P: muéstrame E: este, este, pedacito de acá, este triángulo que se forma en esta parte de acá (señala el triángulo escaleno resultante de la superposición de las plantillas) P: eso, muy bien, y este lado de aquí, este lado es igual a qué otro lado, a qué lado en el otro
MVI_3801 0:00:07 P: los triángulos que te acabé de entregar, ¿son congruentes? E: como podéis ver son congruentes porque tienen la misma forma y los mismos ángulos, que serían aquí, aquí y aquí, entonces... (Señala los ángulos del triángulo de color naranja); (Superpone uno de los triángulos pequeños de color naranja sobre el de color rosado) P: y los lados E: los lados también son los mismos porque este lado coincide con este, este lado coincide con este, o este lado coincide con este, y el de acá abajo coincide con este (señala los lados correspondientes de los triángulos); y al unirlos serían como un misma pieza, entonces como podéis ver si son congruentes. P: ¿y lo mismo ocurre con los otros dos triángulos? E: con los otros dos triángulos también serían congruentes porque al unirlos serían como una sola pieza (superpone el triángulo	

de color rosado sobre el de color naranja) P: o sea que tanto sus ángulos como sus lados correspondientes coinciden E: si serían congruentes y coinciden P: y la forma y el tamaño es igual es la misma E: como podéis ver son bastante igual (muestra la superposición de los triángulos grandes) P: o sea, conclusión E: si son congruentes 0:01:12 MVI_3816 0:04:03 P: ¿esos dos triángulos escalenos serán congruentes? E2: sí P: ¿Por qué? E2: porque tienen la misma forma, las mismas medidas, y pues las mismas medidas de ángulos P: o sea son congruentes E2: si son congruentes 0:04:18	triángulo E: ¿cuál? P: este lado de aquí, este E: es igual a este lado de acá P: y este lado de aquí, este lado de aquí es igual a qué lado en el otro triángulo E: a este lado de acá P: ahhh muy bien, o sea que, ¿esos dos triángulos son congruentes? E: si, si son congruentes 0:03:45 MVI_3816 0:02:50 P: ¿será que esos dos triángulos son congruentes? E2: si son congruentes P: mira bien E2: no, no son congruentes P: ¿Por qué? E2: pues son, tienen la misma forma, y las mismas medidas; pero no tienen el mismo tamaño 0:03:07
---	--