



Desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional desde el estudio de las
inecuaciones lineales con variable real en contexto.

Valentina Gomez Ospina

Caren Liced Marin Perafan

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Septiembre, 2023

Desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional desde el estudio de las
inecuaciones lineales con variable real en contexto.

Valentina Gomez Ospina

Caren Liced Marin Perafan

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciadas en Matemáticas

Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

Directora Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Septiembre, 2023

Agradecimientos

A mis seres queridos, por su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y del desarrollo de este trabajo.

A mi compañera Caren Liced Marín Perafan, por su dedicación y entrega en cada una de las etapas abarcadas en este proyecto.

A todas y todos los que contribuyeron de alguna u otra forma al desarrollo y culminación del presente trabajo.

Especialmente a la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo por ser guía y apoyo en este proceso, y compartir su conocimiento, el cual ha sido muy valioso para mi formación profesional y personal.

Valentina Gomez Ospina

Principalmente, a mi familia por siempre creer en mí, apoyarme y acompañarme en cada etapa de mi proceso como estudiante y como persona, los amo mucho.

A nuestra directora por encaminarme a ser una mejor profesional y enseñarme desde los primeros semestres la importancia de la profesión docente.

A mi compañera de trabajo de grado por el tiempo, dedicación y esfuerzo invertidos en estas páginas.

Infinitas gracias.

Caren Liced Marin Perafan

Resumen

El propósito de este trabajo consiste en favorecer algunos aspectos del pensamiento variacional a través de la implementación de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real en estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

Para esto se fundamentó y diseñó una secuencia didáctica que articula aspectos de orden curricular, didácticos y matemáticos que son presentadas en el marco de referencia conceptual. La secuencia didáctica toma en cuenta la Educación Matemática Realista como enfoque teórico y sus niveles de matematización para su estructura, la cual fue implementada en ocho sesiones y consta de dos situaciones, las cuales tiene tres y cuatro tareas respectivamente, con preguntas que guían a los estudiantes por la construcción de nociones necesarias para el trabajo con las inecuaciones lineales y permiten por medio de las respuestas reconocer los aspectos del pensamiento variacional que se van trabajando a través de cada una de ellas.

Finalmente, de los resultados, su sistematización y el análisis de la implementación de la secuencia que se presentan se puede evidenciar que los estudiantes reconocen las cantidades fijas y variables dentro de un contexto y relacionan estos datos a través de una inecuación entre otros aspectos.

Palabras claves: pensamiento variacional, inecuaciones, inecuaciones en contexto, modelación, variable.

Abstract

The purpose of this paper is to promote some aspects of variational thinking through the implementation of a didactic sequence that involves the modeling process with linear inequalities with a real variable in students of the eleventh grade of the Educational Institution Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

To this end, a didactic sequence was based and designed that articulates aspects of curricular, didactic, and mathematical order that are presented in the conceptual framework. The didactic sequence takes into account Realistic Mathematics Education as a theoretical approach and its levels of modeling for its structure, which was implemented in eight sessions and consists of two situations, which have three and four tasks respectively, with questions that guide students through the construction of notions necessary for working with linear inequalities and recognize the aspects of variational thinking that are being worked on through each of them.

Finally, with the results, their systematization, and the analysis of the implementation From the sequence presented, it can be seen that the students recognize the fixed and variable quantities within a context and relate these data through inequality, among other aspects.

Keywords: variational thinking, inequalities, inequalities in context, modeling, variable.

Tabla de Contenido

Resumen	5
Introducción	14
Capítulo 1: Aspectos generales del trabajo.....	16
1.1 Planteamiento del problema	16
1.2 Objetivos	20
1.2.1 Objetivo general:	20
1.2.2. Objetivos específicos:.....	20
1.3 Justificación	21
1.4 Antecedentes	23
1.4.1 Trabajos relacionados con las desigualdades e inecuaciones en la escuela	23
1.4.2 Trabajos relacionados con la modelación matemática de variaciones lineales	28
1.4.3 Trabajos que integran problemas de modelación con inecuaciones	30
Capítulo 2: Marco de referencia conceptual.....	34
2.1 Perspectiva curricular	34
2.2 Perspectiva didáctica	41
2.2.1 Algunas dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones.....	41
2.2.2 Algunas alternativas de trabajo en la escuela	45
2.2.3 Modelación matemática desde la Educación Matemática Realista (EMR)	47
2.2.4 Secuencia didáctica	49
2.3 Perspectiva matemática.....	51
2.3.1 Análisis del contenido	51
2.3.2 Definición.....	53
2.3.3 Propiedades.....	54
2.3.4 Soluciones de una inecuación	55
2.4 Elementos fundamentales de las tres perspectivas	57
Capítulo 3: Las inecuaciones lineales con variable real contextualizadas en la escuela.....	59
3.1 Metodología de investigación	59
3.2 La secuencia didáctica	60
3.2.1 Contenidos y desempeños	62
3.2.2 Estructura de la propuesta	64
3.2.3 Propósito de la Secuencia	65
3.3 Implementación	66
3.3.1 Población.....	67
3.3.2 Metodología.....	67
3.4 Resultados y análisis de resultados	69
3.4.1 Resultados y análisis de resultados de la situación 1: Niveles de glucosa, diabetes y desigualdades numéricas.....	70
3.4.2 Resultados de la situación 2: Ventas de Cafetería El Madrigal e inecuaciones lineales	
110	
Capítulo 4: Conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas	165
4.1 Conclusiones generales	165

4.2 Algunas reflexiones.....	169
Referencias.....	171

Índice de Tablas.

Tabla 1: <i>Conjuntos solución</i>	56
Tabla 2: <i>Contenidos matemáticos y desempeños de la secuencia didáctica diseñada</i>	62
Tabla 3: <i>Cantidad de tareas y preguntas de la secuencia didáctica diseñada</i>	65
Tabla 4: <i>Tiempos de implementación de la secuencia didáctica diseñada</i>	69
Tabla 5: <i>Tipificación S1, T1, P1</i>	72
Tabla 6: <i>Tipificación S1, T1, P2</i>	73
Tabla 7: <i>Tipificación S1, T1, P3 y P4</i>	74
Tabla 8: <i>Tipificación S1, T1, P5</i>	75
Tabla 9: <i>Tipificación S1, T1, P6</i>	76
Tabla 10: <i>Tipificación S1, T2, P1a y P1b</i>	79
Tabla 11: <i>Tipificación S1, T2, P2</i>	80
Tabla 12: <i>Tipificación S1, T2, P3 y P4</i>	82
Tabla 13: <i>Tipificación S1, T2, P5</i>	83
Tabla 14: <i>Tipificación S1, T2, P6</i>	84
Tabla 15: <i>Tipificación S1, T2, P7</i>	85
Tabla 16: <i>Tipificación S1, T2, P8a y P8b</i>	87
Tabla 17: <i>Tipificación S1, T2, P9</i>	87
Tabla 18: <i>Tipificación S1, T3, P1a, P1b, y P1c</i>	89
Tabla 19: <i>Tipificación S1, T3, P1d</i>	90
Tabla 20: <i>Tipificación S1, T3, P1e</i>	91
Tabla 21: <i>Tipificación S1, T3, P1f</i>	92
Tabla 22: <i>Tipificación S1, T3, P2 y P3</i>	93

Tabla 23: <i>Tipificación S1, T3, P4</i>	94
Tabla 24: <i>Tipificación S1, T3, P5a y P5b</i>	97
Tabla 25: <i>Tipificación S1, T3, P6a</i>	99
Tabla 26: <i>Tipificación S1, T3, P6b</i>	99
Tabla 27: <i>Tipificación S1, T3, P7 y P8</i>	101
Tabla 28: <i>Tipificación S1, T3, P9</i>	103
Tabla 29: <i>Tipificación S1, T3, P10</i>	104
Tabla 30: <i>Tipificación S1, T3, P11</i>	105
Tabla 31: <i>Tipificación S1, T3, P12</i>	107
Tabla 32: <i>Tipificación S2, T1, P1a</i>	111
Tabla 33: <i>Tipificación S2, T1, P1b</i>	112
Tabla 34: <i>Respuesta de E13, P1a, T1, S2</i>	112
Tabla 35: <i>Tipificación S2, T1, P2 y P3</i>	114
Tabla 36: <i>Tipificación S2, T1, P4</i>	115
Tabla 37: <i>Tipificación S2, T1, P5</i>	115
Tabla 38: <i>Tipificación S2, T1, P6</i>	117
Tabla 39: <i>Tipificación S2, T1, P7</i>	119
Tabla 40: <i>Tipificación S2, T1, P8</i>	122
Tabla 41: <i>Tipificación S2, T2, P1a, P1b, P1c, P1d</i>	124
Tabla 42: <i>Tipificación S2, T2, P1e</i>	125
Tabla 43: <i>Tipificación S2, T2, P2</i>	126
Tabla 44: <i>Tipificación S2, T2, P3</i>	128
Tabla 45: <i>Tipificación S2, T2, P3</i>	129

Tabla 46: <i>Tipificación S2, T2, P3</i>	130
Tabla 47: <i>Tipificación S2, T2, P3a y P3b</i>	133
Tabla 48: <i>Tipificación S2, T2, P4</i>	133
Tabla 49: <i>Tipificación S2, T2, P5</i>	135
Tabla 50: <i>Tipificación S2, T2, P6</i>	137
Tabla 51: <i>Tipificación S2, T2, P7</i>	139
Tabla 52: <i>Tipificación S2, T2, P8</i>	141
Tabla 53: <i>Tipificación S2, T3, P1a y P1b</i>	142
Tabla 54: <i>Tipificación S2, T3, P2a</i>	143
Tabla 55: <i>Tipificación S2, T3, P2b y P2c</i>	144
Tabla 56: <i>Tipificación S2, T3, P3a y P3b</i>	145
Tabla 57: <i>Tipificación S2, T3, P4</i>	146
Tabla 58: <i>Tipificación S2, T3, P5a y P5b</i>	148
Tabla 59: <i>Tipificación S2, T3, P6 y P7</i>	150
Tabla 60: <i>Tipificación S2, T3, P8</i>	151
Tabla 61: <i>Tipificación S2, T3, P9</i>	153
Tabla 62: <i>Tipificación S2, T4, P1</i>	155
Tabla 63: <i>Tipificación S2, T4, P2</i>	155
Tabla 64: <i>Tipificación S2, T4, P3</i>	157
Tabla 65: <i>Tipificación S2, T4, P4</i>	158
Tabla 66: <i>Tipificación S2, T4, P5</i>	160

Índice de figuras.

Figura 1: <i>Coherencia vertical y horizontal del estándar escogido</i>	39
Figura 2: <i>Procedimiento erróneo al aplicar la propiedad uniforme</i>	43
Figura 3: <i>Carencia de contenido semántico de la inecuación</i>	44
Figura 4: <i>Niveles de matematización desde EMR</i>	49
Figura 5: <i>Red conceptual de las inecuaciones lineales</i>	52
Figura 6: <i>Matriz de síntesis de los aportes de la perspectiva teórica al diseño de la secuencia didáctica</i>	58
Figura 7: <i>Respuesta de E15. S1, T1, P6</i>	78
Figura 8: <i>Respuesta de E13 a P6, S1, T2</i>	86
Figura 9: <i>Respuesta de E6 a P6, S1, T2</i>	86
Figura 10: <i>Respuesta de E10, P2, T3, S1</i>	95
Figura 11: <i>Respuesta de E1 a P3, T3, S1</i>	95
Figura 12: <i>Respuesta de E12, P2, T3, S1</i>	96
Figura 13: <i>Respuesta de E1, P5, T3, S1</i>	98
Figura 14: <i>Respuesta de E11, P6b, T3, S1</i>	101
Figura 15: <i>Respuesta de E5, P9, T3, S1</i>	104
Figura 16: <i>Respuesta de E5, P12a, T3, S1</i>	107
Figura 17: <i>Respuesta de E14, P12a y P12b, T3, S1</i>	108
Figura 18: <i>Respuesta de E10, P2 y P3, T1, S2</i>	115
Figura 19: <i>Respuesta de E4, P6, T1, S2</i>	119
Figura 20: <i>Respuesta de E4, P7, T1, S2</i>	121
Figura 21: <i>Respuesta de E10, P7, T1, S2</i>	121

Figura 22: <i>Respuesta de E9, P7, T1, S2</i>	121
Figura 23: <i>Respuesta de E15, P8, T1, S2</i>	123
Figura 24: <i>Respuesta de E9, P2, T2, S2</i>	127
Figura 25: <i>Respuesta de E15, P5, T2, S2</i>	136
Figura 26: <i>Respuesta de E2, P5, T2, S2</i>	137
Figura 27: <i>Respuesta de E1, P4, T4, S2</i>	160

Introducción

El presente trabajo se desarrolla en el campo de la Educación Matemática el cual centra su atención en caracterizar y favorecer algunos aspectos del pensamiento variacional a partir de la implementación y análisis de una secuencia didáctica en grado undécimo que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con variable real. Para esto, inicialmente se hace una revisión documental que permite fundamentar aspectos de orden curricular, didáctico y matemático que aporten al diseño de la secuencia didáctica.

La revisión documental permitió claridad sobre aspectos como las dificultades y errores presentes en la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático de interés, así mismo, brindó algunas alternativas de trabajo para solventar dichas dificultades propias del estudio de las inecuaciones y de las matemáticas.

En este sentido, se presentan cuatro capítulos que ilustran el desarrollo del trabajo realizado, de la siguiente manera:

En el primer capítulo se exhiben los aspectos generales del trabajo, que corresponden al planteamiento del problema, el objetivo general y los objetivos específicos, la justificación y los antecedentes tenidos en cuenta para conocer las investigaciones que se han realizado hasta el momento en relación con el tema de interés.

En el segundo capítulo se muestra la fundamentación teórica necesaria para el diseño de la secuencia a implementar, a través de la perspectiva curricular, didáctica y matemática.

En el tercer capítulo se centra la atención en la descripción e implementación de la secuencia didáctica diseñada, describiendo a la población participante que corresponde a los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Además, se presenta la sistematización de las respuestas de los estudiantes a través de tablas y el análisis a la luz de las investigaciones mencionadas en el capítulo anterior.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones generales y algunas reflexiones producto del desarrollo del trabajo y análisis realizado. Posterior a este se presenta la bibliografía consultada y mencionada que incluye investigaciones, trabajos de grado y libros de texto importantes en la elaboración del presente trabajo.

Capítulo 1: Aspectos generales del trabajo

En el presente capítulo se exponen aspectos generales que muestran la importancia de desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes, por medio del diseño de una secuencia didáctica que involucra procesos de modelación matemática con inecuaciones lineales dirigida a estudiantes de grado undécimo.

Como punto de partida se presentan las dificultades, errores y obstáculos dentro de la educación matemática, teniendo como referencia la investigación realizada por Socas (1997). En la misma línea se retoman ideas de los trabajos realizados por Blanco et al. (2004), Vargas (2013), Heredia y Palacios (2014) y Borello (2011), quienes identifican dificultades y errores presentes en el aula al trabajar con inecuaciones. De acuerdo con las referencias expuestas, se plantea un objetivo general y tres específicos que ilustran la intención de las autoras en el desarrollo del presente trabajo.

Finalmente, se exponen trabajos de investigación que muestran la necesidad de abordar la problemática planteada, como Balanta y Garces (2017), Montenegro y Cruz (2010), Bucurú (2019), Morales et al. (2018), Lemus y Escobar (2021) y De Los Ríos y Chocó (2019) en los cuales se exhiben las dificultades alrededor del tema y se ofrecen estrategias para el trabajo con las inecuaciones dentro del aula.

1.1 Planteamiento del problema

En las últimas décadas, en el campo de la investigación en Educación Matemática se han realizado estudios con el fin de caracterizar las problemáticas propias del campo, como por ejemplo la identificación de errores, dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes en el momento de aprender determinado concepto matemático. Una de estas investigaciones es la

realizada por Socas (1997) quien explica que las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son de distinta naturaleza, las cuales se agrupan en cinco líneas generales, comprendiendo varias perspectivas: el saber matemático, el docente, el estudiante y la institución, estas son: Dificultades asociadas al objeto matemático, dificultades en los procesos de pensamiento, dificultades en los procesos cognitivos, dificultades relacionadas con las actitudes afectivas del estudiante respecto a las matemáticas y finalmente las dificultades en los procesos de enseñanza, las cuales están relacionadas con el currículo y los métodos que rigen la institución.

Así mismo, Socas (1997) presenta una concepción sobre los obstáculos como aspecto asociado a la organización del error, de estos se comprenden tres categorías; los obstáculos epistémicos propios del pensamiento matemático, los didácticos que se enmarcan en las matemáticas escolares y los cognitivos relacionados con la adquisición de nuevos esquemas conceptuales por parte del estudiante. Por último, el autor afirma que los errores pueden tener su origen en los obstáculos o en la ausencia de significado.

Teniendo en consideración el planteamiento anterior, algunas dificultades asociadas al objeto matemático son presentadas en las investigaciones realizadas por Blanco et al. (2004) y Heredia y Palacios (2014), como por ejemplo, la interpretación que le dan los estudiantes a las soluciones de las inecuaciones y la dificultad que se tiene para establecer diferencias claras entre las inecuaciones y las ecuaciones, además, Vargas (2013) presenta algunos errores como consecuencia de la ausencia de significado de las desigualdades e inecuaciones lineales como la no claridad de los símbolos de relación de orden “ $>$ ” y “ $<$ ”, no considerar los intervalos como una solución y la memorización del procedimiento algorítmico al momento de resolver inecuaciones lineales.

Por otro lado, Borello (2011), en su investigación, hace alusión a dificultades en los procesos de enseñanza, pues afirma que el tratamiento dado a las inecuaciones y las desigualdades en el ámbito escolar en el cual el discurso matemático ha privilegiado el uso de las inecuaciones como técnica de resolución de determinados problemas hace que el concepto de inecuación se convierta en un objeto aislado para los estudiantes, sin reconocerlo como medio para modelar situaciones. (p. 923)

El tratamiento de las inecuaciones como técnica de resolución lleva a dificultades asociadas a la manera como los estudiantes comprenden el dominio de las soluciones en las inecuaciones lineales, ya que no las reconocen como un campo de valores en un intervalo determinado. En este sentido, es pertinente hacer uso de fenómenos y situaciones problema en contexto que aporten a la superación de dichas dificultades, como por ejemplo problemas asociados a comparar los niveles de glucosa en sangre de un paciente, determinar el salario de un empleado teniendo en cuenta valores fijos y variables, y conocer la rentabilidad de una compra respecto a otra.

Así mismo, desde la perspectiva curricular, MEN, (1998) y Vasco (2002), se resalta que el análisis y representación de situaciones reales se desarrollan en el aula de clase por medio de la modelación matemática, ya que esta se enmarca dentro del desarrollo del pensamiento variacional el cual posibilita el reconocimiento de la variación y el cambio dentro de los fenómenos, sin reducirlos a la aplicación de algoritmos que llevan a descontextualizar y desligar el concepto de inecuación de la realidad causando dificultades en su tratamiento.

Por otra parte, desde la experiencia de las autoras, quienes se están formando profesionalmente para ser docentes, se identificó que los estudiantes no reconocen la aplicación del concepto de inecuación en sus actividades diarias, a causa de que por años en las clases se ha

privilegiado la enseñanza del algoritmo y no se ha hecho explícita la utilidad de las inecuaciones en su vida cotidiana y su relevancia en el aprendizaje de diversos contenidos matemáticos relacionados con el Cálculo.

Lo anterior deja en evidencia que factores como la manera en la que se enseñan los conceptos, tratamientos y representaciones de las inecuaciones, y la organización del currículo influyen en la forma en que los estudiantes adquieren e interiorizan este conocimiento matemático. Atendiendo a esto, en este trabajo se pretende indagar desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática:

¿Cómo a través de una secuencia didáctica que involucra procesos de modelación matemática relacionados con las inecuaciones lineales con una variable real se pueden desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional (variaciones numéricas, significado de la variable, relaciones funcionales, relaciones entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) en estudiantes de grado undécimo?

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo fomenta el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional haciendo uso de distintos sistemas de representación como el lenguaje natural, el simbólico y el gráfico, los cuales contribuyen al aprendizaje con significado de los sistemas algebraicos en los que se encuentran inmersas las inecuaciones lineales y aportan al reconocimiento del cambio, las variaciones numéricas, las relaciones funcionales, el significado de la variable y las relaciones entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general:

Favorecer algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes de grado undécimo a través de la implementación de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real.

1.2.2. Objetivos específicos:

- Fundamentar a través de la indagación documental desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática la problemática de investigación.
- Articular en una secuencia didáctica que involucra procesos de modelación matemática los fundamentos teóricos estudiados.
- Caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes de grado undécimo a través de la implementación de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real.

1.3 Justificación

El presente trabajo busca favorecer algunos aspectos del pensamiento variacional que se pueden desarrollar en estudiantes de grado undécimo por medio de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación matemática a través del fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con variable real.

Es importante aclarar que a pesar de que el contenido matemático involucrado desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se estudia desde el ciclo 8°-9°, las autoras evidenciaron que posterior a la pandemia algunos contenidos como el de las inecuaciones se desplazaron de un grado a otro, haciendo necesario desarrollar la secuencia didáctica con estudiantes de grado undécimo.

Adicionalmente, se ha identificado a través de la investigación que aún existen problemáticas asociadas al trabajo con las inecuaciones y las desigualdades, en particular los trabajos de: Campos (2020), Villamarín et al (2019), De los Ríos y Chocó (2019) y Heredia y Palacios (2014) quienes dan a conocer dificultades y errores persistentes en los estudiantes al trabajar con estos conceptos en la escuela.

En este sentido, es importante favorecer por medio de la investigación a la superación de aspectos de la problemática planteada a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica, que articula los conocimientos desarrollados a lo largo de la formación profesional docente, como el uso de distintos sistemas de representación que permiten ver las propiedades de los objetos matemáticos y la articulación de las perspectivas curricular, didáctica y matemática, por medio del desarrollo de un contexto cercano a la realidad de los estudiantes, permitiendo abordar los problemas asociados a las inecuaciones lineales de manera más amplia e integral.

Otro aspecto para resaltar de la secuencia didáctica es que integra el proceso de modelación matemática, el cual contribuye a desarrollar el pensamiento variacional, proceso y pensamiento que desde la perspectiva curricular son importantes, ya que permiten trabajar contextos que implican variación y contribuyen al tratamiento de los objetos matemáticos, a su interpretación y a la toma de decisiones en situaciones reales empleando un modelo.

Por otra parte, se resalta que para reconocer y analizar fenómenos de variación el concepto de inecuación es relevante, puesto que está fuertemente conectado con las desigualdades y con las relaciones que se pueden establecer con ellas como: comparar, ordenar y acotar datos, lo que a su vez contribuye al aprendizaje de procedimientos relevantes para el desarrollo del cálculo, como hallar rangos, establecer dominios y, comprender propiedades y definiciones de los números reales, el desarrollo del concepto de derivada, la razón de cambio, la función, el crecimiento o decrecimiento de una función y la noción de infinito, al estudiar el concepto de intervalo.

Finalmente, el desarrollo de este trabajo aporta elementos en la formación profesional de las autoras, ya que favorece habilidades como la recolección, análisis e interpretación de datos en su práctica investigativa a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica que a la vez beneficia a los estudiantes de la Institución Educativa donde se aplicará la secuencia didáctica, dado que el contenido matemático no es explícito en las propuestas curriculares y con la implementación se hacen acercamientos necesarios a contenidos importantes para el aprendizaje del cálculo.

1.4 Antecedentes

Para conocer el estado de la problemática presentada se realiza una búsqueda de las investigaciones desarrolladas en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las inecuaciones lineales, teniendo en cuenta tres pilares.

En el primer pilar se presentan investigaciones que se han realizado dentro del trabajo con los conceptos de inecuación y desigualdad en la escuela, esto debido a la estrecha relación que poseen estos conceptos dentro del marco matemático y curricular.

En el segundo pilar, se encuentran las investigaciones relacionadas con la modelación matemática y las variaciones lineales, con el fin de determinar de qué manera ha sido abordada su relación, pues se reconoce que el trabajo con inecuaciones se enmarca en el desarrollo del pensamiento variacional, el reconocimiento de fenómenos de cambio y variación, y la construcción de modelos asociados a dichos fenómenos.

Finalmente, el tercer pilar corresponde a los trabajos que abordan los problemas de modelación con inecuaciones lineales, siendo este el tema central de la investigación.

Dicho lo anterior, las investigaciones encontradas son:

1.4.1 Trabajos relacionados con las desigualdades e inecuaciones en la escuela

- Villamarín et al. (2019), desarrollan un trabajo de grado en maestría en el cual se expone la pertinencia de la enseñanza de las inecuaciones lineales a través de la revisión de referentes teóricos que fundamentan el diseño de una unidad didáctica como una herramienta de enseñanza y aprendizaje con la cual se potencie competencias evaluadas por el ICFES en grado once como la comunicación, el razonamiento y la resolución de problemas.

El diseño de la unidad didáctica se hace a partir de la revisión de documentos oficiales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), las pruebas Pisa 2012 y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016), además, en el trabajo se presentan una estructura conceptual y matemática, así como un análisis fenomenológico de las inecuaciones lineales con una incógnita, elementos que articulan y justifican los contenidos que se necesitan para el diseño.

La secuencia se implementó a estudiantes de grado once de la I.E.D. Nuevo San Andrés de los Altos, ubicada en el barrio San Andrés en la localidad de Usme en la ciudad de Bogotá, el principal recurso empleado para la implementación fue la unidad didáctica diseñada, la cual fue analizada con el objetivo de determinar sus alcances y hacer ajustes según los resultados obtenidos.

La revisión de los resultados obtenidos dejó evidenciar que el diseño no favorece la representación correcta de la solución de la inecuación por parte de los estudiantes y tampoco le permitía a los estudiantes construir estrategias para validar sus conjeturas. En este sentido, se realizó un rediseño de la unidad didáctica con el fin de fortalecer la habilidad de representar y validar.

- El trabajo de grado presentado por Bucurú (2019) para obtener el título de Magíster, se basa en la creación de una unidad didáctica diseñando un MOOC que abrevia el nombre Massive Open Online Course bajo el enfoque pedagógico socioconstructivista y las teorías de aprendizaje autónomo, con el fin de favorecer la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones en alumnos de grado once, a través del modelo de Van Hiele y la incorporación de las TIC.

El desarrollo de la propuesta se llevan a cabo cinco fases dentro de las cuales se toma como punto de partida las falencias presentadas por los estudiantes en la representación e interpretación de los conceptos de desigualdad e inequación, en este sentido se realiza una documentación acerca de los modelos pedagógicos a considerar, para lograr a partir de la creación del MOOC favorecer el acercamiento a los conceptos de inequación y desigualdad. Finalmente, luego de la fase de implementación, evaluar el desempeño y aportes didácticos de la herramienta diseñada en cuanto a la creación de material educativo, uso de recursos tecnológicos y estrategias comunicativas.

Entre los resultados encontrados se reconoce la importancia del diseño de estrategias de enseñanza y aprendizaje fundamentadas pedagógicamente, teniendo en cuenta los aportes que los profesores brindan al usar medios virtuales que faciliten la concepción, representación y el desarrollo de conocimiento pedagógico de los conceptos a trabajar.

- Heredia y palacios (2014) en su trabajo de pregrado caracterizan los errores y dificultades asociados a las desigualdades e inequaciones, a través de la aplicación de una prueba diagnóstica aplicada a 36 estudiantes de noveno grado de la fundación educativa Santa Isabel de Hungría de la ciudad de Santiago de Cali, en dos sesiones, teniendo en consideración diferentes perspectivas involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las inequaciones lineales como lo son la curricular, didáctica y matemática.

Como resultado de la investigación se describen algunos aspectos de la problemática que involucran las perspectivas tomadas en cuenta de la siguiente manera: Desde la perspectiva curricular, se reconoce que no se le presta atención suficiente a las inequaciones lineales, pues no aparecen explícitamente aquellos subprocesos en los que

actúa este concepto, lo cual es fuente de preocupación, pues, son estos los documentos que orientan a los docentes para organizar los contenidos en el aula.

Desde la perspectiva didáctica se evidenció que persisten dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones, como la no diferenciación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales. Además, los cambios de registro de representación afectan la forma en la que los estudiantes entienden las inecuaciones lineales, su tratamiento y la interpretación que les dan a su solución.

- Por otra parte, en el trabajo de pregrado realizado por Montenegro y Cruz (2010) se lleva a cabo un estudio en el que se resalta el reconocimiento de fenómenos didácticos presentes en el tratamiento escolar de las inecuaciones lineales, identificados a través del diseño y sistematización de cuestionarios que buscaban caracterizar las concepciones y el desempeño de estudiantes de noveno grado al enfrentarse a actividades relacionadas con este concepto.

Entre los resultados obtenidos, se identifica que el trabajo con inecuaciones lineales no genera interés en estudiantes, ni en profesores, lo que conlleva a no profundizar sobre este tema, además, el concepto se presenta “como un objeto dependiente de las ecuaciones y casi que carente de sentido ante estas.” (p. 101) lo que representa una dificultad en los estudiantes en el momento de darle sentido y utilidad a este concepto.

- Por su parte Balanta y Garces (2017) desarrollan un trabajo de pregrado en el cual analizan las propuestas de enseñanza en dos textos escolares con el fin de caracterizar la manera en la que está siendo abordado el concepto de inecuación lineal con una incógnita real en ellos, reconociendo que los textos escolares son un instrumento útil en el ejercicio

docente, ya que moviliza la toma de decisiones metodológicas, de planeación y evaluación de los contenidos matemáticos a enseñar.

Los textos objeto de estudio corresponden a los libros de texto: Hipertexto matemáticas 11, editorial Santillana (2010) y Nuevas matemáticas 11, editorial Santillana (2007), seleccionados por medio de una entrevista realizada a 20 docentes en ejercicio de instituciones educativas públicas y privadas de la zona rural y urbana de diferentes municipios del Cauca y del Valle del Cauca y analizados a la luz de una rejilla de análisis diseñada con la intención de caracterizar las propuestas de enseñanza en ellos y establecer posibles similitudes y contrastes.

A partir del análisis realizado se encontró que las propuestas de enseñanza abordadas en ellos se caracterizan por tener coherencia, articulación y secuencia en la manera en la que se presentan los conceptos, no obstante en los dos textos escolares se notaron falencias en la cantidad de ejemplos presentados, pues se reconoce el interés por privilegiar la ejercitación de procedimientos, además, la manera en la que se exponen las propiedades y ejemplos del contenido matemático, deja de lado el desarrollo de los procesos generales y de los pensamientos numérico y variacional en los cuales se inscriben las inecuaciones.

- Además, en el trabajo de pregrado realizado por De Los Ríos y Chocó (2019) se investiga la construcción de significado de las inecuaciones lineales a partir de un análisis discursivo en estudiantes de grado noveno del Liceo Ágora, una institución educativa de carácter privado del municipio de Jamundí-Valle, con una población de 14 estudiantes, a través del diseño de una actividad de situaciones contextualizadas con el concepto de inecuaciones lineales con el fin de movilizar el desarrollo del pensamiento algebraico y el

uso del discurso de los estudiantes para reconocer sus formas de entender, sin recurrir exclusivamente a símbolos algebraicos.

Para el diseño de la actividad y el análisis de los resultados, los autores toman tres perspectivas teóricas: la matemática, en la cual retoman autores como Radford (2006) quien aporta elementos para caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico y la construcción de significado de las inecuaciones lineales; la discursiva en la cual se toman en cuenta las Secuencias de actos de habla de Van Dijk (1980) mencionados por los estudiantes y la curricular proporcionada por los referentes nacionales para la educación colombiana.

Una vez analizados los datos obtenidos de la implementación del diseño, se encontró que los estudiantes hacen uso de diferentes actos de habla como: preguntas, afirmaciones, conjeturas y explicaciones que dan cuenta de las ideas, estrategias y soluciones que los estudiantes dan a una situación contextualizada con inecuaciones lineales, por otra parte, se reconoció que la construcción de significado de las inecuaciones lineales en los estudiantes está ligada al reconocimiento de nociones como las relaciones de orden, variación, cambio, interpretación y argumentación de los resultados obtenidos en las actividades propuestas en el diseño.

1.4.2 Trabajos relacionados con la modelación matemática de variaciones lineales

- Como parte de su trabajo de maestría Morales et al., (2018), realiza una investigación con el propósito de describir cómo los estudiantes de noveno grado desarrollan el proceso de modelación en situaciones de covariación lineal, con el fin de ayudarlos a construir conceptos como el de función.

El estudio se hizo a través de un enfoque de investigación que integra dos grandes componentes, el cuantitativo y el cualitativo. El cuantitativo se usa con la intención de establecer el grado de éxito de los estudiantes al enfrentarse a una prueba inicial de resolución de problemas, por otra parte, desde lo cualitativo se describe detalladamente la forma en que los estudiantes construyen los modelos al resolver los problemas de la secuencia didáctica.

En esta investigación se retoman las fases presentadas en la perspectiva de Bassanezi (2002) (Experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación) y las acciones mentales junto a los niveles de razonamiento dentro de la covariación presentados en Carlson (2003) (Coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, razón promedio y razón instantánea). Se concluye que los estudiantes alcanzan un nivel cuatro de covariación correspondiente al nivel de la razón promedio, al ser capaces de reconocer los cambios promedio en las variables.

Finalmente, entre sus conclusiones se destaca el uso de situaciones problema que sean de interés, motivación y que impliquen procesos de experimentación por parte de los estudiantes con el fin de que ellos mismos lleguen a conjeturas y conclusiones del comportamiento de las variables involucradas dentro de las situaciones propuestas.

- Por su parte, en el trabajo de maestría de González y Flórez (2018) se describen procesos de modelación matemática como estrategia didáctica en situaciones de covariación lineal, por medio del diseño y aplicación de una secuencia didáctica que involucra la función lineal y la construcción de la covariación lineal.

Este trabajo se enmarca en la preocupación por el bajo rendimiento de los estudiantes en el desarrollo del pensamiento matemático y particularmente en el pensamiento

variacional, pues organizaciones como la OCDE muestran que de manera general los estudiantes presentan dificultades a la hora de elaborar un modelo de situaciones de la vida real.

La secuencia propuesta por los autores consta de cuatro actividades, una prueba inicial diagnóstica y tres actividades que involucran situaciones problemas en relación con el desarrollo del pensamiento variacional. Ésta secuencia es aplicada a 25 estudiantes de ciclo V del Colegio Quiroga Alianza I.E.D. en la ciudad de Bogotá. Si bien la secuencia es implementada inicialmente con esta cantidad de estudiantes, los autores deciden tomar una muestra poblacional más pequeña la cual consta de tres estudiantes con nivel de desempeño académico bajo, medio y alto respectivamente, con la finalidad de identificar y describir los procesos de modelación que ellos muestran a partir del trabajo con la secuencia.

Con la implementación y análisis de la secuencia se evidencia que las tareas en las que los estudiantes presentan menos dificultades son las relacionadas con encontrar y organizar valores en representación tabular, además, esta representación le permite a los estudiantes evidenciar la correlación de los fenómenos estudiados. Otro resultado encontrado fue que los estudiantes de nivel medio y alto lograban identificar la dependencia e independencia de las variables, mientras que el estudiante ubicado en el nivel bajo presentaba dificultades para poder realizar dicha identificación.

1.4.3 Trabajos que integran problemas de modelación con inecuaciones

- En un artículo publicado en la revista Espacios los profesores de matemáticas Lemus y Escobar (2021), se interesan por mostrar que el proceso de modelación matemática

posibilita la construcción de conceptos como las inecuaciones lineales a través de la comparación de magnitudes, para esto los autores inicialmente presentan un barrido bibliográfico sobre las inecuaciones a través del estado del arte de este concepto matemático desde las perspectivas histórica, matemática y curricular.

La investigación encuentra que la enseñanza tradicional focaliza el trabajo con las inecuaciones a la presentación de operaciones aritméticas que solo fomentan el aprendizaje de algoritmos de forma memorística y no en los conceptos ni en las representaciones, situación que ocasiona dificultades y no posibilita el proceso de argumentación de los estudiantes.

En este sentido el trabajo analiza los tipos de argumentación que usan los estudiantes durante el desarrollo de una tarea de modelación matemática para la construcción conceptual de las inecuaciones lineales. La implementación de la tarea de modelación es aplicada a 28 estudiantes de cuarto año de enseñanza media que tienen edades entre 17 y 18 años, de un colegio con enfoque científico humanista en la ciudad de Libertador Bernardo O'Higgins en Chile.

La tarea de modelación propuesta es diseñada por los autores, a través de una situación problema contextualizada, en la que los estudiantes deben medir los decibeles de una canción que reproduce un DJ en una fiesta teniendo en cuenta las normas que rigen la emisión de ruidos molestos en Chile.

Los resultados obtenidos a partir de las respuestas de los estudiantes, dan cuenta de la posibilidad de proponer distintas formas de enseñar las inecuaciones lineales en la escuela, sin recurrir necesariamente a la memorización de procesos algorítmicos.

También se menciona que el uso de elementos conceptuales de los objetos matemáticos

es útil en la construcción conceptual de ellos, así mismo, establecer relaciones como comparar permite la comprensión de las inecuaciones ya que posibilita la toma de decisiones a partir de una situación particular. Otro resultado encontrado es que las tareas diseñadas por la comunidad de docentes-investigadores y de enseñanza-aprendizaje desde elementos situados y con significado contribuye al desarrollo de las matemáticas en los estudiantes.

De las investigaciones presentadas anteriormente, aquellas que involucran las desigualdades e inecuaciones en la escuela dejan en evidencia que el trabajo con dicho concepto en las instituciones educativas ha privilegiado el tratamiento algorítmico, lo que ha causado que este carezca de sentido dentro de la realidad del estudiante.

Además, las investigaciones presentan la importancia del trabajo con inecuaciones en la escuela para el desarrollo del pensamiento variacional y matemático del estudiante, ilustrando la persistencia de dificultades en el trabajo con este concepto desde la caracterización de las respuestas de los estudiantes que dan luz de sus concepciones y creencias posterior al trabajo con este concepto.

Por otra parte, las investigaciones encontradas que involucran modelación con variaciones lineales si bien abordan la función lineal y la elaboración de modelos en relación con este concepto, sin involucrar las inecuaciones, aportaron aspectos a tener en cuenta para que los estudiantes logaran desarrollar modelos mentales y los representaran a través de expresiones algebraicas.

En relación con las investigaciones que involucran la modelación como proceso y las inecuaciones se encontró el trabajo realizado por Lemus y Escobar (2021) en la cual se analizan los tipos de argumentación de los estudiantes al comparar magnitudes en un contexto cotidiano y

se resalta la importancia del proceso de modelación y del uso de contextos en el trabajo con las inecuaciones

Lo anterior permitió reconocer algunos aspectos importantes para el trabajo con las inecuaciones y la modelación matemática, sin embargo queda en evidencia que el trabajo con modelación e inecuaciones lineales no ha sido una investigación con estudios significativos en el campo de la Educación Matemática colombiana, a pesar de su relevancia para el paso hacia el cálculo en la educación secundaria y de la existencia de estudios que reconocen su importancia como herramienta para el trabajo dentro de dicha rama de las matemáticas.

Capítulo 2: Marco de referencia conceptual

En este apartado se presentan elementos teóricos que sustentan el desarrollo del trabajo investigativo a través de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con variable real.

Para lo anterior, se exhiben tres perspectivas: la perspectiva curricular, a través de la revisión de los documentos oficiales expedidos por el MEN, tales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016); la perspectiva didáctica a través de investigaciones realizadas por Vargas (2013), Blanco et al. (2004), Heredia y Palacios (2014) quienes muestran los errores y dificultades asociadas al trabajo con desigualdades e inecuaciones al igual que algunas alternativas de trabajo, también se retoma a Guerrero et al (2004) para explicar la secuencia didáctica y se presenta la corriente didáctica de Educación Matemática Realista (EMR). Finalmente, la perspectiva matemática, es abordada desde el Análisis de Contenido presentado por Cañadas (2018) y los libros de Zill (1992), Sobel y Lerner (2006) y Lehmann (2004) como soporte para definir las inecuaciones lineales.

2.1 Perspectiva curricular

Colombia tiene una propuesta para las instituciones educativas que desde la perspectiva curricular tiene que ver con la formación de pensamiento matemático en los estudiantes y está direccionada por los documentos que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha puesto a disposición de las instituciones como los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje.

Los Lineamientos Curriculares (1998) son una propuesta del MEN para direccionar la manera de organizar los currículos de las instituciones educativas y plantea tres ejes fundamentales: Conocimientos básicos y sistemas, procesos generales y contextos.

Estos ejes se establecen conforme a la preocupación por establecer unos contenidos que estén relacionados con la experiencia de vida de los estudiantes y que sean aplicables a diferentes situaciones dentro y fuera de la escuela, a través de los cuales se pueda acceder a la conceptualización de los objetos matemáticos en estudio.

En este sentido, el primer eje corresponde a los conocimientos básicos, los cuales se desarrollan a través de los distintos tipos de pensamiento: el pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento variacional, pensamiento métrico y pensamiento aleatorio. Los distintos pensamientos están apoyados en unos sistemas que permiten ver los diversos contenidos matemáticos que se desarrollan en determinado pensamiento en relación con sus elementos, operaciones y relaciones y están interconectados con los sistemas para lograr el desarrollo del pensamiento matemático.

Además de estos conocimientos básicos, como segundo eje presentan unos procesos generales relacionados con el aprendizaje del estudiante, los cuales son: razonamiento, resolución y planteamientos de problemas, comunicación, modelación; y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Finalmente, el tercer eje expuesto en este documento es el contexto, relacionado con aquellas situaciones problema que se trabajan en clase, desde su vida diaria, desde las matemáticas mismas o desde otras ciencias, que se plantean desde la realidad del estudiante, su cultura y las condiciones sociales sobre la cual ellos se desenvuelven y que a su vez enmarca a la institución de la que hacen parte.

Teniendo en cuenta los tres ejes presentados anteriormente y según el objetivo de investigación, para este trabajo se toma en consideración el pensamiento variacional, los sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento numérico ya que en estos se encuentra inmerso el desarrollo y el trabajo con el concepto de inecuación, centrando la atención en los procesos de modelación y resolución de problemas y se tomarán en consideración contextos de tipo cotidiano y matemático.

El desarrollo del pensamiento numérico trabaja aspectos importantes en relación con el sentido numérico, que contribuye a la comprensión del sistema de numeración decimal, la construcción de nociones como cantidad y orden, los cuales se desarrollan de manera progresiva a lo largo de la educación básica y permite dominar el conjunto de procesos, conceptos, operaciones y modelos asociados a los diferentes sistemas numéricos.

Así mismo, el desarrollo del pensamiento variacional en la escuela pretende establecer bases matemáticas con el objetivo de que los estudiantes sean capaces de relacionar estructuralmente los conceptos y procedimientos de los contenidos matemáticos, favoreciendo el análisis, organización, comunicación, resolución y modelación de situaciones problemas en contextos cercanos a su realidad, que implique el estudio de fenómenos de cambio y variación.

En este sentido, la variación posibilita el trabajo con conceptos matemáticos como: lo continuo, los reales, las magnitudes, el álgebra simbólica, la función e incluso el desarrollo de modelos de función, modelos de situaciones aditivas y multiplicativas que permiten medir el cambio. La estructuración de dichos modelos para medir el cambio y la variación implica organizar, analizar y cuantificar los fenómenos relacionados a través del desarrollo del proceso general de modelación.

El proceso de modelación por su parte, permite establecer un puente entre las matemáticas y la realidad, al recrear por medio de modelos un fenómeno real, lo que ayuda a los estudiantes a resolver problemas a los que se ven enfrentados en su día a día, validando la aplicación del modelo según la situación afrontada, lo que posteriormente le permitirá hacer predicciones que le ayudan a tomar decisiones respecto a lo que debe hacer.

Por último, los contextos que se toman en consideración para el desarrollo de este trabajo son: contextos cotidianos y contextos matemáticos, que son cercanos a la realidad del estudiante y por tanto proveen situaciones significativas que ellos pueden encontrar dentro y fuera del aula.

Por otra parte, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC) (2006), documento que también es presentado por el MEN, las ideas respecto al pensamiento variacional y el proceso de modelación concuerdan con lo expuesto por los Lineamientos Curriculares, al reconocer que el pensamiento variacional está relacionado con “...el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (p. 66)

De la misma manera, este documento considera que desarrollar procesos como la modelación matemática es crucial para responder a la toma de decisiones de situaciones reales empleando un modelo. Así, con ayuda de los modelos, los estudiantes “... pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonables son éstos respecto a las condiciones iniciales” (MEN, 2006, p. 52).

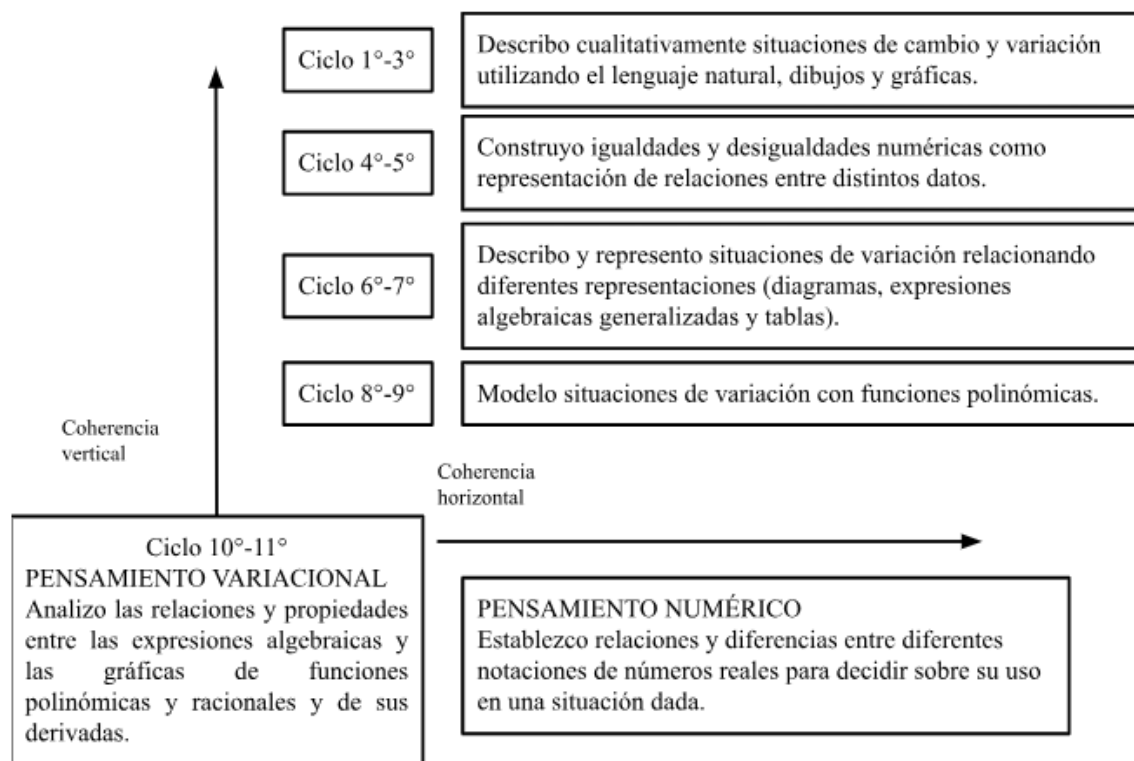
Es importante resaltar que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se establecen competencias entendidas como el saber-hacer de los estudiantes en situaciones específicas, que están divididas según ciclos escolares, tipos de pensamiento y sistemas

asociados. En este sentido, teniendo en cuenta que este documento es un referente para la educación colombiana, se escoge un estándar representativo de acuerdo con el trabajo que se desea realizar con estudiantes de grado undécimo, el cual es: “*Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales*” (pensamiento variacional, ciclo 10°-11°) (MEN, 2006, p. 89)

Considerando el estándar mencionado anteriormente y reconociendo que los pensamientos y sistemas están interconectados entre sí, es necesario establecer una coherencia vertical con el estándar pertinente a la problemática y otros estándares en diferentes ciclos que estén asociados al pensamiento variacional, además de una coherencia horizontal que relaciona el estándar escogido con otros estándares presentes en los distintos pensamientos del ciclo escogido, de la siguiente manera:

Figura 1

Coherencia vertical y horizontal del estándar escogido



Adaptado de: Ministerio de Educación Nacional, 2006

De esta manera, la coherencia vertical deja en evidencia que en ciclos anteriores hay estándares en los cuales se inscriben las inecuaciones lineales que desarrollan el pensamiento variacional desde diferentes acciones como describir cualitativamente situaciones de cambio, construir desigualdades numéricas y, describir, representar y modelar situaciones que involucran variación. Por otro lado, la coherencia horizontal da cuenta de la relación de los distintos pensamientos en función del tratamiento de las inecuaciones en el aula al involucrar el uso de operaciones y relaciones de los elementos del contenido matemático y el uso de representaciones en la resolución de situaciones problema que implican variación.

Finalmente, en la propuesta se toma en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (2016) los cuales son de igual manera una propuesta del Ministerio de Educación Nacional para secuenciar un conjunto de aprendizajes por grados y áreas, coherentes con los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencia con el fin de alcanzar los EBC asociados a determinado ciclo por medio de actividades que dotan de un contexto a los estudiantes del país y se proyectan a lo largo de un año lectivo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se asocia el DBA número 2 de Matemáticas del grado 11° con sus evidencias de aprendizaje correspondientes, el cual propone:

Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.

Evidencias de aprendizaje:

- Utiliza propiedades del producto de números Reales para resolver ecuaciones e inecuaciones.
- Interpreta las operaciones en diversos dominios numéricos para validar propiedades de ecuaciones e inecuaciones. (MEN, 2016, p. 81)

Para efectos de este trabajo, como se ha notado antes, se pretende a través del diseño de una secuencia didáctica aportar elementos al desarrollo de algunos aspectos del pensamiento variacional ya que los referentes curriculares muestran que el concepto de inecuación se encuentra inmerso en este pensamiento, además se reconoce su importancia para el trabajo con fenómenos de variación y cambio, los cuales se pueden ver representados por las inecuaciones lineales, este desarrollo se hace mediante el proceso de modelación matemática por su relevancia en la toma de decisiones y la capacidad para formular modelos en diferentes contextos a los cuales se puede ver enfrentado el estudiante y que para este trabajo son contextos cotidianos y

matemáticos en los que se encuentran inmersas las inecuaciones lineales, tales como, situaciones en las cuales es necesario establecer comparaciones cualitativas entre magnitudes dadas, determinar ganancias, determinar la producción diaria, calcular comisiones, sueldos variables y escoger la opción más rentable.

2.2 Perspectiva didáctica

A continuación, se presentan aspectos teóricos que fundamentan el desarrollo de este trabajo en relación con el aprendizaje y la enseñanza de las inecuaciones lineales. De esta manera, se toman en consideración las investigaciones de Vargas (2013), Blanco et al. (2004) y, Heredia y Palacios (2014) quienes exponen los errores y dificultades que los estudiantes presentan al trabajar con este concepto, además, de algunas alternativas didácticas, que se tendrán en cuenta para la elaboración de una secuencia didáctica. Esta última es entendida desde la perspectiva de Guerrero et al. (2006), como el plan de acción de los docentes en la presentación de actividades dentro del aula, para que los estudiantes desarrollen aspectos del pensamiento variacional a través del proceso de modelación matemática comprendida desde la corriente didáctica de Educación Matemática Realista.

2.2.1 Algunas dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones

Para efectos de este trabajo la noción de dificultad y error en el aprendizaje de las Matemáticas se abordan desde lo descrito por Socas (1997) como se describieron anteriormente, y se tiene en cuenta las investigaciones realizadas por Vargas (2013), Blanco et al. (2004), Heredia y Palacios (2014) en las cuales se presentan algunas dificultades y errores asociados al estudio de las inecuaciones:

- La no claridad en el uso e interpretación de los símbolos $>$, $<$.

Al respecto, Heredia y Palacios (2014) mencionan que a pesar de que los estudiantes tienen una apropiación de la noción de relación de orden, ellos presentan una dificultad recurrente respecto a cómo entienden e interpretan los símbolos $>$, $<$, esto ocurre cuando los estudiantes deben expresar enunciados de lenguaje natural en lenguaje simbólico a través de una desigualdad, pues suelen confundir las relaciones, más aún cuando la formulación de la inecuación requiere la articulación de dos desigualdades.

Igualmente, Blanco et al. (2004) encontraron en su investigación que esta dificultad se traslada a las desigualdades simultáneas en dos sentidos: el primero corresponde a que a pesar de que los signos se escriben en una misma expresión algebraica, su interpretación se hace por separado y el segundo, a que los símbolos “mayor que” y “menor que” se interpretan como nexos sin ningún tipo de significado semántico entre dos expresiones algebraicas.

Dentro de los errores encontrados por Vargas (2013) se presentan:

- La no comprensión del conjunto solución de una inecuación como los $x > a$ donde $a \in \mathbb{R}$.
- La no comprensión del proceso de resolución de una desigualdad, lo que lleva a la memorización del algoritmo.
- Se reproducen las mismas ideas de las ecuaciones lineales en el trabajo con inecuaciones, incluyendo las ideas que se aprendieron de manera errónea. Por ejemplo, operar a un solo lado de la ecuación como se muestra a continuación:

$$2x + 3 = 2$$

$$2x + 3(-3) = 2$$

$$2x = 2$$

Otro ejemplo fue evidenciado por Heredia y Palacios (2014) como se muestra a continuación:

Figura 2

Procedimiento erróneo al aplicar la propiedad uniforme

7. El conjunto solución, en los reales, de la inecuación $7x + 21 \geq 0$ es:

$$\begin{array}{l}
 \text{a. } [-3, \infty) \\
 \text{b. } (-3, \infty) \\
 \text{c. } (-\infty, -3] \\
 \text{d. } [-3, \infty)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 7x + 21 \geq 0 \\
 7x \geq -21 \\
 x \geq \frac{-21}{7} \\
 \boxed{x \geq -3}
 \end{array}$$

Diagrama 1

Fuente: Heredia y Palacios (2014), p.59

Procedimiento en el cual el estudiante no aplica de manera correcta la propiedad uniforme.

Al respecto del conjunto solución, los estudiantes generalmente sitúan las soluciones en los enteros y en un único número como solución, sin considerar un conjunto o un intervalo en su lugar, el cual pertenece a los reales. En relación con esto, Heredia y Palacios (2014) identificaron una dificultad asociada a:

- No comprensión del conjunto solución de una inecuación.

Cuando los estudiantes obtienen una desigualdad como conjunto solución de una inecuación, la verifican con un solo valor y olvidan la relación presente. En este mismo sentido, Blanco (2004) añade que identificar las soluciones como un único valor representa un obstáculo a la hora de interpretar las soluciones.

Adicionalmente, cuando se memoriza el algoritmo los estudiantes llegan a aplicar la transposición de términos indiscriminadamente lo que deja en evidencia la dificultad asociada a

- La carencia de contenido semántico de la inecuación

Según Blanco et. al, (2004), esta dificultad se debe a que las inecuaciones se resuelven solo con el objetivo de operar y por ejemplo cuando se ven enfrentados a multiplicar o dividir por una determinada cantidad a una inecuación, cambian el sentido de la inecuación sin tomar en cuenta si la cantidad a multiplicar es positiva o negativa, como se muestra a continuación:

Figura 3

Carencia de contenido semántico de la inecuación

$$\begin{aligned}
 4 < 2x + 2 < 8 \\
 1 - 2 < 2x < 8 - 2 \\
 2 < 2x < 6 \\
 \frac{2}{2} < x < \frac{6}{2} \\
 1 < x < 3 \\
 x \in [1, 3]
 \end{aligned}$$

Ilustración 6. Ejemplo de respuesta, pregunta 3

Fuente: Heredia y Palacios (2014) p. 71

- Por otro lado, se encuentra que los estudiantes tienen dificultad para reconocer las letras como variable ya que no reconocen su significado y no son conscientes de la necesidad de estas dentro de la situación presentada. (Vargas, 2013, p. 7)

Lo anterior también puede desembocar en dificultades para establecer una expresión algebraica que represente un enunciado

- Diferenciar los conceptos de inecuación y ecuación.

Cuando los estudiantes no diferencian el concepto de ecuación y el de inecuación, realizan los mismos tratamientos a ambos. Al respecto Heredia y Palacios (2014) añaden que

para ellos “...la única diferencia entre estas es la relación que une ambos términos de las expresiones, realizando los mismos procedimientos para su resolución.” (p. 81), e incluso reconocen otra dificultad asociada a esto y es que los estudiantes

- “...consideran que las relaciones “mayor que” “menor que” e “igual que” son equivalentes” lo que afecta la resolución de la inecuación y la interpretación de los resultados (p.77).

Cuando al resolver una ecuación los estudiantes llegan por ejemplo a $x < 10$ y no logran diferenciar entre las relaciones, consideran que 10 es la respuesta en este caso.

En concordancia, Blanco et al. (2004) identificó que los estudiantes tienen dificultad al

- Usar los términos “ecuación” e “inecuación” de manera indiscriminada cuando se está trabajando con las inecuaciones. Los estudiantes por ejemplo al justificar los pasos realizados o comunicar la solución obtenida dicen: la solución de la ecuación es $x < 10$.

2.2.2 Algunas alternativas de trabajo en la escuela

Teniendo en cuenta las investigaciones realizadas por Vargas (2013), Heredia y Palacios (2014) y Blanco (2004), a continuación, se presentan alternativas reportadas por estos autores para el trabajo con las inecuaciones:

- Presentar situaciones problema que involucren contextos cotidianos.

Desde la perspectiva de Heredia y Palacios (2014) incluir contextos cotidianos es una “...forma significativa y contextualizada para introducir las inecuaciones” (p.82) pues en concordancia con Vargas (2013) motiva a los estudiantes al presentarles la utilidad y la importancia del concepto en su realidad.

- Retomar conceptos previos.

Desde Heredia y Palacios (2014) y Vargas (2013) es importante retomar los conceptos previos necesarios para estudiar el concepto de inecuación, ya que de esta manera se identifican los errores que tienen los estudiantes aprendidos en su paso por la aritmética y las nociones se comprenden a profundidad.

- Claridad en el concepto de inecuación en su introducción.

Según Blanco (2004) es importante que antes de presentar la notación formal correspondiente a las inecuaciones, se deje clara la diferencia entre ecuación e inecuación, además de las técnicas de resolución para las inecuaciones, los símbolos y su contenido semántico, para los estudiantes.

- Uso de diferentes sistemas de representación.

En la investigación realizada por Heredia y Palacios (2014) las autoras proponen algunos aspectos que los docentes deberían tener en cuenta a la hora de enseñar inecuaciones, en este sentido, “se pone de manifiesto que el uso de los diferentes registros de representación y su articulación, son necesarios para movilizar conocimientos y saberes de un objeto matemático, puesto que este tratamiento favorece procesos de generalización.” (p. 82), reconociendo la importancia de las conversiones de un registro a otro, promoviendo la comprensión de las relaciones que se puedan establecer entre los datos del enunciado.

Así mismo, las autoras mencionan que en la enseñanza de las inecuaciones se debe trabajar con distintas representaciones matemáticas de la desigualdad e inecuación que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional, como la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos.

2.2.3 Modelación matemática desde la Educación Matemática Realista (EMR)

La modelación se aborda dentro de los referentes curriculares como un proceso y es presentada como actividad organizadora del quehacer matemático desde la corriente didáctica de Educación Matemática Realista. Es así, que como eje central se toma en cuenta lo expuesto por la EMR y se apoya en lo presentado por los documentos oficiales.

La corriente didáctica Educación Matemática Realista cuyo fundador es Hans Freudenthal, surge como en contraposición del enfoque mecanicista de los años 60, cuya base teórica más significativa es la conexión entre las matemáticas y la realidad.

La corriente posee 5 pilares fundamentales que están relacionados con:

1. Partir de situaciones imaginables para los estudiantes.
2. Utilizar modelos que surjan dentro de la actividad matemática de los estudiantes para organizar la situación.
3. Reconocer al docente como guía dentro del aula.
4. El aprendizaje como actividad social de reflexión.
5. La interrelación entre los diferentes ejes curriculares.

Además, comprende la matematización (entendida como modelación en los referentes curriculares nacionales), como aquella actividad que contribuye a organizar aspectos de la realidad por medios matemáticos. En este sentido, y para efectos de este trabajo la matematización se entiende como el proceso de modelación que implica el trabajo con situaciones problema de diferente naturaleza, como las cotidianas, matemáticas o científicas, en las que se hace necesario reconocer y reflexionar acerca de las características que componen la situación, como regularidades, el contexto matemático en el que se enmarca, las operaciones y/o

procedimientos necesarios para resolverla, con el fin de llevar su complejidad a una situación más cercana al estudiante y a sus conocimientos.

En concordancia con lo anterior, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), la modelación permite a los estudiantes desglosar una situación problema reconociendo las variables en juego y sus relaciones,

...lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales. (p. 53)

Desde la EMR estos modelos cumplen con las siguientes condiciones: se desarrollan a partir de contextos imaginables; deben apoyar la progresión en la acción de matematizar, es decir, que un mismo modelo pueda alcanzar varios niveles de generalidad permitiendo ir y venir entre ellos, y deben ser adaptables a las estrategias matemáticas de los estudiantes.

Estos modelos corresponden al nivel de matematización en el que se encuentra el estudiante, lo que corresponde a la *matematización horizontal* y se caracterizan por formalizar las matemáticas que el estudiante posee, partiendo de los modelos informales generados en contextos cotidianos a modelos formales desarrollados en contextos matemáticos, lo que se entiende como *matematización vertical*. Como lo ilustra la Figura 4, los distintos niveles de progresión del modelo son:

El nivel situacional, en el cual la elaboración del modelo está totalmente ligada a la interpretación que hace el estudiante de la información que se presenta dentro de la situación en relación con las características que él logra identificar usando los conocimientos informales que posee.

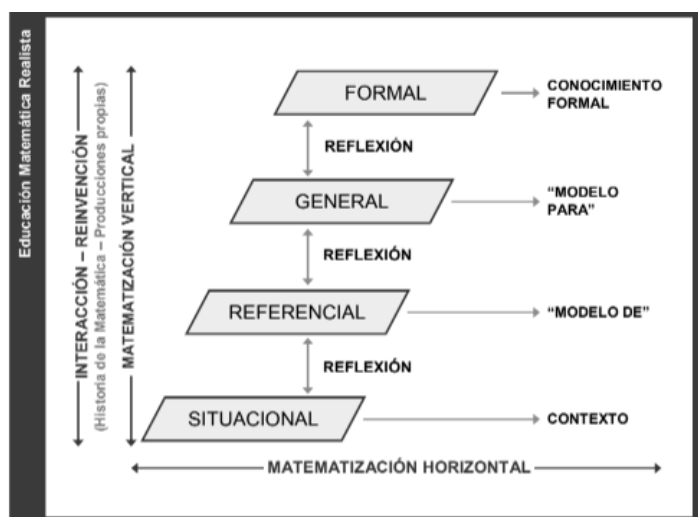
El nivel referencial en el que se esquematiza el problema usando las herramientas que el estudiante posee, dando paso a los primeros *modelos de*, que dan respuesta a una situación particular.

El nivel general retoma el modelo alcanzado en el nivel anterior y lo generaliza por medio de estrategias matemáticas que permitan desligarse del contexto proporcionado inicialmente, dando lugar a los *modelos para*, acercándose a la formalización de las matemáticas.

El nivel formal consiste en el tratamiento netamente matemático que hace el estudiante del modelo.

Figura 4

Niveles de matematización desde EMR



Tomado de: Bressan et al. (2016) p.7

2.2.4 Secuencia didáctica

Para efectos de este trabajo se asume una secuencia didáctica entendida como el plan de actuación del profesor, necesaria para organizar de manera sistemática el trabajo en el aula, teniendo en consideración al estudiante, profesor, saber, entorno y las relaciones entre estos. En

la secuencia se diferencian los momentos de la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes, se definen sus roles, la organización del trabajo del aula, incluyendo el tiempo y los materiales necesarios, la descripción de la actividad y los referentes teóricos. (Guerrero et al., 2006).

El desarrollo de la secuencia didáctica toma en consideración los siguientes aspectos.

- Una “actividad diagnóstica” que permite determinar los conocimientos iniciales con los que cuenta el estudiante y guía al profesor sobre los aspectos que debe tener en cuenta como punta de partida.
- La presentación de situaciones problema que representen un reto para los estudiantes y se ajusten a las metas de aprendizaje.
- Establecer indicadores de desempeño basados en la experiencia empírica, práctica y de formación del profesor acerca de los contenidos matemáticos que se esperan alcanzar.
- Propiciar situaciones adidácticas, en las que el estudiante interactúa con sus pares y con distintos medios para resolver determinado problema en ausencia de interacciones con el profesor y situaciones didácticas en las que el profesor sea un guía permanente.
- Determinar un momento de validación que se desarrolla a partir de la discusión generada entre los estudiantes o los estudiantes y el profesor en la que se argumentan la validez de las distintas estrategias usadas en la resolución de situaciones problema.
- Considerar la evaluación como un proceso constante y no como un producto al final de la secuencia.

2.3 Perspectiva matemática

En aras de entender y definir el concepto de inecuación se toma en cuenta lo expuesto por Cañadas et al (2018) en torno al análisis de contenido puesto que aporta elementos para la elaboración de unidades didácticas en la educación matemática, además se toma en consideración la perspectiva histórica, las definiciones y propiedades presentadas por el libro de Zill (1992), Sobel y Lerner (2006); y Lehmann (2004).

2.3.1 Análisis del contenido

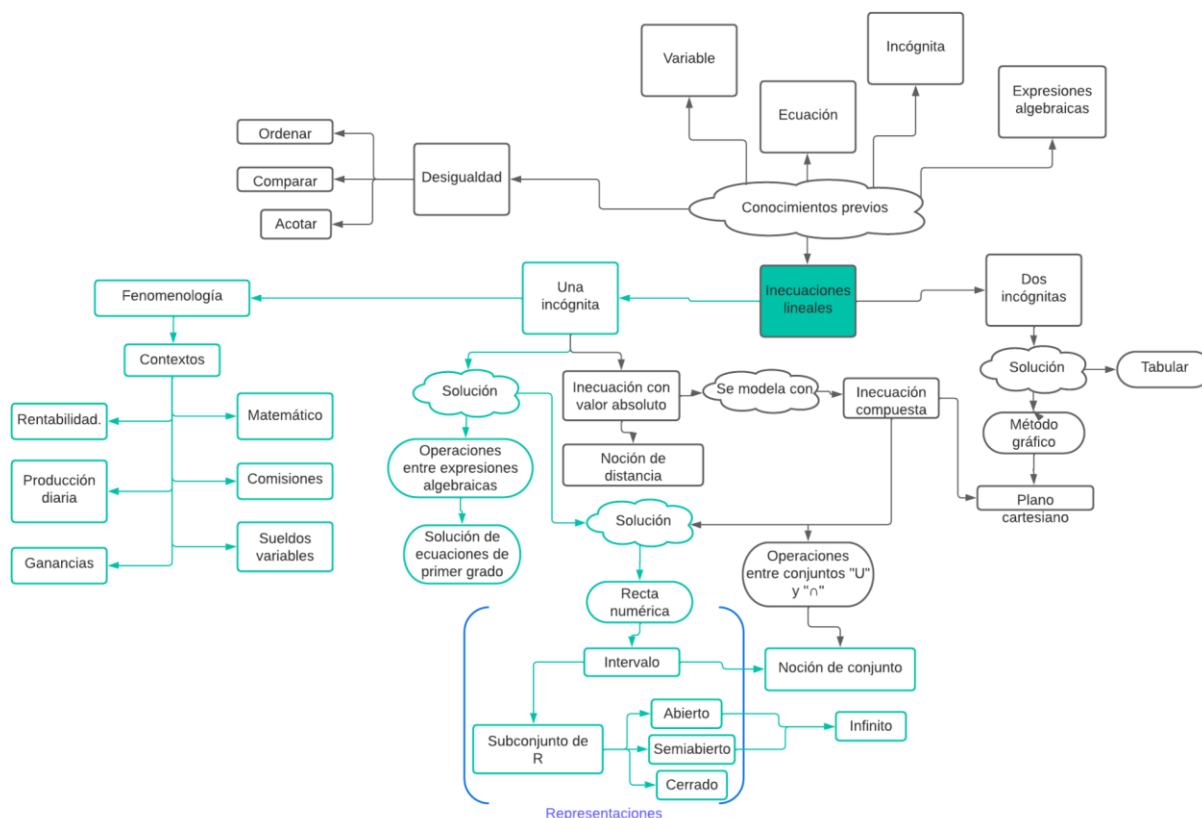
Según Cañadas et al. (2018) para realizar un análisis de contenido es importante considerar cuatro referentes, los cuales corresponden a:

- La estructura conceptual, con el objetivo de identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos.
- Los sistemas de representación, con el objetivo de establecer los sistemas de representación asociados al concepto y las relaciones entre ellos.
- La fenomenología para identificar los fenómenos que dan sentido al tema, los contextos fenomenológicos y las subestructuras matemáticas respectivas que organizan estos fenómenos.
- Y, la historia como eje transversal, que aporta información al desarrollo del concepto complementando los tres conceptos pedagógicos anteriores.

Esto último se puede ver representado a través de una red conceptual, que asocia el concepto de inecuación lineal, sus operaciones, su fenomenología y representaciones, se interrelacionan de la siguiente manera:

Figura 5

Red conceptual de las inecuaciones lineales



Fuente: Elaboración propia

En esta red se presenta de manera amplia la estructura que subyace al concepto de inecuación lineal y a su vez, se demarca la estructura a considerar en el presente trabajo, reconociendo su relación con actividades como, comparar, ordenar y ordenar cantidades, nociones asociadas al concepto de desigualdad que surgen a lo largo de la historia como respuesta a las necesidades de la humanidad.

2.3.2 Definición

A continuación se presentan las definiciones y propiedades tomadas en cuenta para caracterizar el concepto de inecuación.

Inicialmente es importante mencionar cómo está definida la desigualdad. Para efectos de esta investigación se toma la definición proporcionada por Lehmann (2004) quien menciona que se tiene una *desigualdad* si, dos expresiones son desiguales, es decir que una expresión es mayor que la otra. (p.135) como se muestra en la siguiente definición:

Definición $a < b$: Para dos números reales a y b , $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positiva.

Así mismo, el autor reconoce que existen dos tipos de desigualdades:

1. Una desigualdad **absoluta o incondicional** es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$.
2. Una desigualdad **condicional o inecuación** es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones. $x - 2 < 3$, válida solo si $x < 5$; $x^2 > 4$, válida solo si $x > 2$ ó si $x < -2$. (Lehmann, 2004, p. 136)

Estas clases permiten establecer la relación entre desigualdad e inecuación, a través de los valores para los cuales sus soluciones están definidas.

2.3.3 Propiedades

Continuando con la definición de inecuación y su caracterización, se presentan las siguientes propiedades que fueron adaptadas de los libros publicados por, Zill (1992), Sobel y Lerner (2006); y Lehmann (2004) :

Propiedad 1- Transitividad: Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Propiedad 2- Tricotomía: Dados dos números a y b , es válido uno de los siguientes casos:

1. $a < b$.
2. $a = b$.
3. $a > b$.

Propiedad 3 - Orden de la suma: Dados los números a, b y c perteneciente a los reales, se tiene que

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Propiedad 4 - Orden de la multiplicación: Dados los números a, b y c perteneciente a los reales:

1. Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ac < bc$.
2. Si $a < b$ y c es negativo, entonces $ac > bc$.

Propiedad 5: Si una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, la dirección de la desigualdad se invierte.

Propiedad 6- inverso aditivo: Dados los números a, b y c perteneciente a los reales:

1. Si $a < b$ entonces, $-a > -b$.
2. Si $a > b$ entonces, $-a < -b$.

Propiedad 7- Inverso multiplicativo: Dados $a, b > 0$ o $a, b < 0$ se tiene que:

1. Si $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2. Si $b < a$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Las desigualdades condicionales o inecuaciones cuando poseen una sola variable x de primer grado, son llamadas **inecuaciones lineales**, cuyas soluciones son determinadas para ciertos valores en los cuales las expresiones algebraicas que componen la inecuación son válidas.

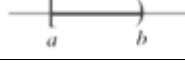
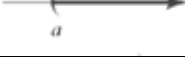
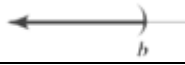
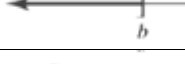
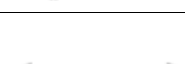
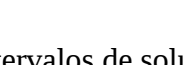
Adicionalmente, se encuentran desigualdades de la forma $a < x < b$, las cuales se denominan **desigualdades simultáneas**. Que representan una inecuación con desigualdad doble y cuyas soluciones se determinan a través de la intersección de los conjuntos de solución:

$$s = \{x: x > a \cap x < b\}$$

2.3.4 Soluciones de una inecuación

Las **soluciones** de las inecuaciones se pueden ver representadas de la siguiente manera:

Tabla 1*Conjuntos solución*

Desigualdad	Conjunto solución	Notación de intervalos	Nombre	Gráfica
$a < x < b$	$\{x a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$a \leq x \leq b$	$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x$	$\{x a < x < \infty\}$	(a, ∞)	Intervalos no acotados o infinitos	
$x < b$	$\{x -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$		
$x \leq b$	$\{x -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty, b]$		
$a \leq x$	$\{x a \leq x < \infty\}$	$[a, \infty)$		
$-\infty < x < \infty$	$\{x -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty, \infty)$		

Tomado de: Zill (1992) *Álgebra y Trigonometría* p. 147

En la tabla anterior se muestran diferentes representaciones de los intervalos de solución de las desigualdades, particularmente en su representación gráfica por medio de intervalos. La notación de estos se establece haciendo uso de paréntesis “()” y corchetes “[]” que aluden a intervalos abiertos (), semiabierto (], [) o cerrados [] y flechas “→” que aluden a intervalos no acotados totalmente.

De esta manera se centra la atención en el concepto de inecuación lineal con una variable, en las propiedades que este concepto comprende y que anteriormente han sido descritas y, en sus

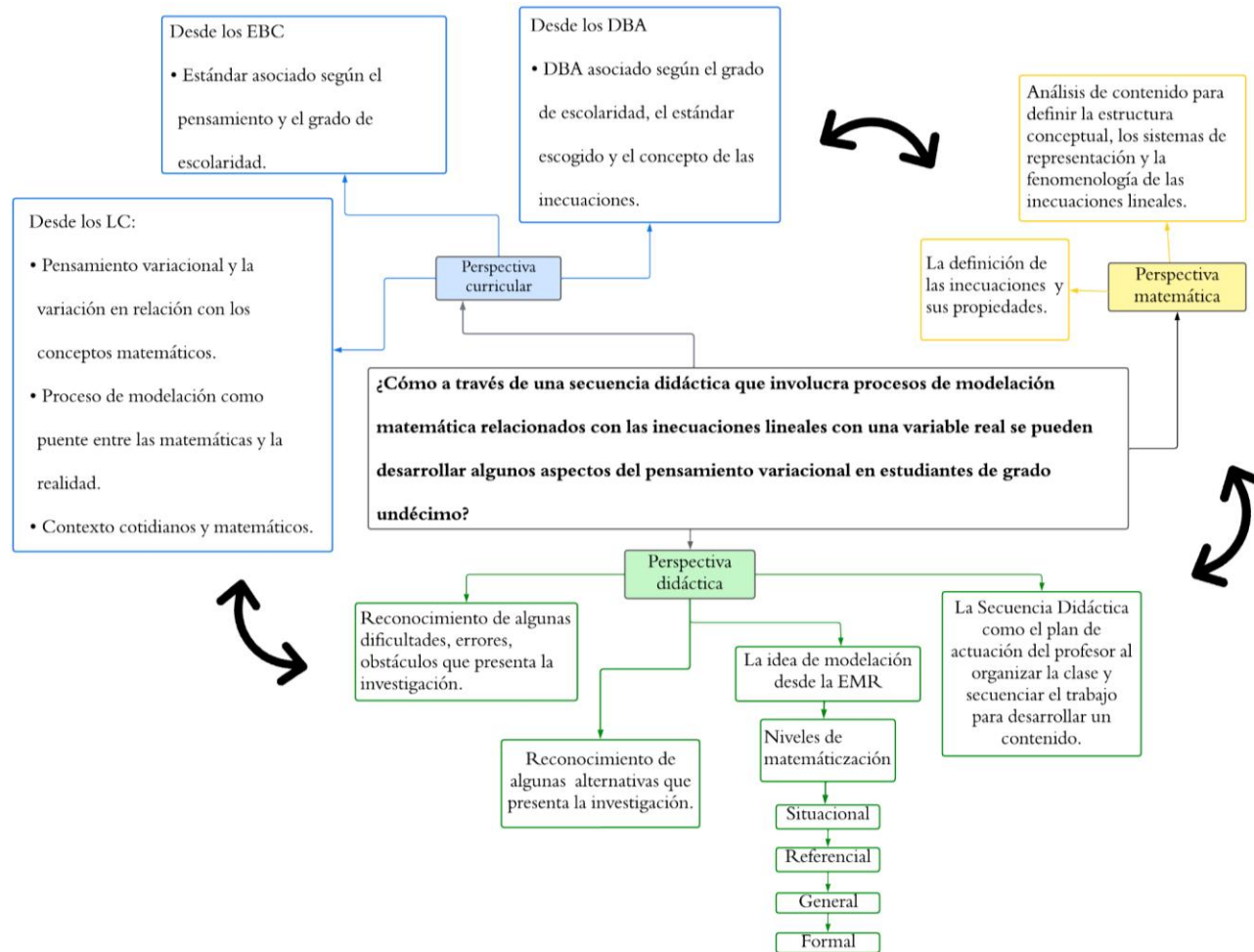
soluciones que se entienden como conjuntos de valores dentro de los reales. Conocer estos elementos matemáticos es crucial para desarrollar una secuencia didáctica que atienda a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y contribuya a superar las dificultades y errores expuestos anteriormente.

2.4 Elementos fundamentales de las tres perspectivas

Para el diseño de la secuencia didáctica se tendrá en cuenta aspectos mencionados anteriormente, como se muestra a continuación:

Figura 6

Matriz de síntesis de los aportes de la perspectiva teórica al diseño de la secuencia didáctica



Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3: Las inecuaciones lineales con variable real contextualizadas en la escuela

En este capítulo se muestran los elementos metodológicos a tener en cuenta para desarrollar una investigación cualitativa en el campo de investigación en Educación Matemática atendiendo a las necesidades propias del campo, a través de procedimientos que permitan describir, interpretar, relacionar y hacer predicciones acerca del quehacer matemático.

3.1 Metodología de investigación

Según Balcázar et al. (2006), una investigación cualitativa busca interpretar fenómenos que se dan dentro de las interacciones humanas, considerando a los agentes que hacen parte de estas como un todo y cuyas diferentes perspectivas son importantes para caracterizar lo que está sucediendo. Particularmente, en la educación matemática los fenómenos inherentes a la enseñanza y el aprendizaje pueden ser caracterizados a través de la articulación de distintos pilares, como los aspectos didácticos, curriculares, sociales, y matemáticos que la constituyen.

En este sentido, la presente investigación es de corte cualitativo, en tanto los datos que se obtienen son analizados a través de la descripción de las acciones que los sujetos hacen al enfrentarse a tareas que involucran contextos matemáticos y contextos cotidianos particulares en los cuales se reconocen fenómenos a modelar a través de las inecuaciones lineales.

Adicionalmente, en este tipo de investigaciones se toma en consideración la realidad del estudiante, aspectos didácticos como los errores y dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con las inecuaciones, aspectos curriculares como la organización del currículo nacional a través de sus tres ejes fundamentales y aspectos matemáticos como las definiciones, propiedades, operaciones y representaciones del objeto matemático de interés, para contribuir al estudio de

alternativas de tratamiento asociadas al concepto que favorezcan la enseñanza y aprendizaje en el aula.

Como estrategia investigativa se toman en cuenta algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas y de los Experimentos de Enseñanza, para el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica.

En este sentido, desde la Teoría de Situaciones Didácticas se retoma la importancia del docente como guía y organizador de la clase, quien toma en consideración los conocimientos de los estudiantes como punto de partida, ajustando la evaluación de manera constante y teniendo en cuenta las discusiones generadas en clase (Guerrero et al., 2006).

Por su parte, según Camargo (2018), los Experimentos de Enseñanza se consideran una estrategia capaz de capturar el aprendizaje de las matemáticas del estudiante, siguiendo la construcción de sus conocimientos matemáticos paso a paso al resolver las actividades, de manera que el docente pueda encaminar dichos conocimientos.

De esta manera, el diseño de la secuencia didáctica ha de ser flexible, susceptible de ser modificada a partir de un análisis constante, teniendo en cuenta los objetivos establecidos, los datos recogidos y resultados obtenidos en su puesta en práctica, reformulando las conjeturas iniciales, con el fin de responder a las necesidades que se puedan encontrar en relación con el momento de aplicación y los agentes en cuestión como el estudiante, su comprensión, los medios disponibles, entre otros.

3.2 La secuencia didáctica

En el presente apartado se expone cómo está conformada la secuencia didáctica, los desempeños, contenidos matemáticos y los niveles de matematización que se trabajan a lo largo

de las tareas, además de la cantidad de tareas y preguntas en cada una de las dos situaciones que la componen. Para efectos de organización del presente documento, la secuencia didáctica puede ser consultada en los anexos.

Teniendo en cuenta las investigaciones consultadas y presentadas en el Capítulo 2 en la perspectiva didáctica, cada situación está diseñada con base en contextos reales, los cuales son pensados con la intención de que las tareas sean cercanas e imaginables para los estudiantes, ya que esto constituye una alternativa para dotar de significado los contenidos que se trabajan en el área de Educación Matemática.

3.2.1 Contenidos y desempeños

En la Tabla 2 se presentan de manera sistematizada las tareas de la situación 1 y situación 2 con sus respectivos contenidos, desempeños y niveles matematización de EMR, los cuales están estructurados para trabajar de manera progresiva algunos aspectos del pensamiento variacional a través de tareas que le permitan al estudiante establecer modelos con inecuaciones lineales con una variable real.

Tabla 2

Contenidos matemáticos y desempeños de la secuencia didáctica diseñada

Situaciones	Tareas	Contenido Matemático	Desempeño - Modelación matemática	
S1: Los niveles de glucosa en sangre y la desigualdad numérica.	T1	Comparaciones cualitativas de magnitudes.	- Comprende la situación presentada por medio de sus conocimientos previos e informales. - Usa los sistemas de representación gráfico y natural en la solución de la tarea.	Nivel situacional
	T2	- Desigualdades numéricas. - Dominio de una desigualdad.	- Establecen relaciones de orden. - Formula desigualdades como expresión algebraica. - Reconoce el dominio de una desigualdad en un contexto dado.	Nivel situacional - referencial

	T3	- Representación de una desigualdad numérica. - Noción de intervalo.	- Establecen intervalos en diferentes conjuntos numéricos. - Representa los intervalos de desigualdades numéricas haciendo uso de distintos sistemas de representación como la recta numérica, lenguaje natural y lenguaje algebraico dado un contexto cotidiano. - Valida los valores pertenecientes a un intervalo. - Construyen situaciones imaginables dada una desigualdad.	Nivel referencial
S2: Ventas de Cafetería El Madrigal e inecuaciones lineales.	T1	Expresiones algebraicas.	- Relaciona valores fijos y variables en un contexto cotidiano. - Construye <i>modelos de</i> en relación con las inecuaciones simultáneas en un contexto dado.	Nivel referencial
	T2	- Resolución de una inecuación. - Dominio del conjunto solución de una inecuación.	- Reconoce la inecuación lineal a través de sus operaciones y propiedades. - Halla la solución de una inecuación lineal - Interpreta la solución de una inecuación en un contexto cotidiano.	Nivel referencial
	T3	Relación funcional.	- Interpreta una inecuación lineal a partir de su función en el plano. - Valida el conjunto solución de una inecuación lineal haciendo uso de la representación en el plano y la recta numérica.	Nivel general.
	T4	Inecuaciones lineales con una incógnita.	- Resuelve inecuaciones lineales desde un contexto matemático - Valida los conocimientos en relación con las inecuaciones a través de un contexto matemático.	Nivel general.

Fuente: Elaboración propia

3.2.2 Estructura de la propuesta

La propuesta está compuesta por dos situaciones que de manera general busca que los estudiantes se apropien de nociones como las desigualdades numéricas y las inecuaciones lineales.

Como se presenta en la Tabla 3, La situación 1 consta de tres tareas las cuales se enmarcan en el contexto de los niveles de glucosa en sangre. En las tareas se plantean problemáticas como la comparación de magnitudes, teniendo en cuenta los resultados de exámenes de glucosa, los niveles normales y anormales de azúcar en sangre y los criterios para diagnosticar un paciente con diabetes, además, se trabaja la lectura de gráficos y la representación gráfica y simbólica de las desigualdades numéricas.

De igual forma, en la Tabla 3 se muestra la estructura de la situación 2, la cual contiene cuatro tareas, de las cuales la tarea 1, tarea 2 y tarea 3, se enmarcan en la compra y venta de productos en una cafetería, en las cuales se trabajan problemáticas como construir una expresión, considerando cantidades que varían como las comisiones por venta y cantidades fijas como un salario semanal establecido, además de hallar el conjunto solución de la expresión algebraica establecida.

Por otra parte, la tarea 4 de la situación 2 se enmarca en un contexto netamente matemático que busca validar los conocimientos que los estudiantes han adquirido a lo largo del desarrollo de la secuencia.

Es importante mencionar que las preguntas de la tarea 3 y tarea 4 de la situación 2 son diseñadas para desarrollarse con el apoyo del software GeoGebra como herramienta para

visualizar las gráficas y el conjunto solución de las inecuaciones en el plano cartesiano y de esta manera abordar las inecuaciones como función.

Tabla 3

Cantidad de tareas y preguntas de la secuencia didáctica diseñada

Situación	Tareas	Preguntas
S1: Los niveles de glucosa en sangre y la desigualdad numérica	Tarea 1: Comprendiendo la situación a través de los niveles de glucosa	6
	Tarea 2: Niveles de glucosa durante el día y la comparación de magnitudes.	9
	Tarea 3: Niveles de glucosa normal y una representación gráfica de la desigualdad simultánea.	9
S2: Ventas de Cafetería El Madrigal e inecuaciones lineales	Tarea 1: Las comisiones por ventas y la formulación de una inecuación.	8
	Tarea 2: El salario y las inecuaciones simultáneas.	8
	Tarea 3: Acumular puntos y las inecuaciones como función.	9
	Tarea 4: La inecuación lineal en las matemáticas.	7

Fuente: Elaboración propia

3.2.3 Propósito de la Secuencia

Propósito de la secuencia:

El propósito de la secuencia didáctica es que los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Farallones de la ciudad de Cali se apropien de conceptos matemáticos fundamentales como la inecuación y las desigualdades numéricas, a

través de la resolución de dos situaciones problema, en este sentido se establecen los propósitos de cada una de estas situaciones así:

Propósito de la situación 1: Esta situación tiene como propósito que los estudiantes reconozcan y establezcan desigualdades simultáneas a través de tareas que se enmarcan en un contexto real como lo son los niveles de glucosa en sangre y la diabetes, partiendo de comparar magnitudes cualitativamente, luego formular desigualdades y posteriormente desigualdades simultáneas, haciendo uso de representaciones en lenguaje natural, simbólico y gráfico

Propósito de la situación 2: Esta situación busca que los estudiantes reconozcan y trabajen con los elementos, las propiedades y las relaciones de las inecuaciones lineales, por medio de tareas que permiten que ellos relacionen valores fijos y variables de las inecuaciones diseñadas bajo un contexto de rentabilidad, además de hallar soluciones, interpretarlas y validarlas en contextos cotidianos y matemáticos, haciendo uso de la función y su representación en el plano.

3.3 Implementación

En este apartado se caracteriza la población teniendo en cuenta el contexto de la institución educativa de la cual hacen parte, además, se presenta la metodología al especificar la manera en la que se desarrollaron las sesiones de clase y los recursos que se utilizaron y finalmente se expone la consolidación de los datos obtenidos en la implementación y los resultados del análisis.

3.3.1 Población

La secuencia didáctica se implementó en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali, perteneciente al sector oficial ubicada en zona urbana de la ciudad, en la Cra. 22 #2-65 comuna 3. Esta institución cuenta con dos jornadas, es decir, jornada de la mañana en la que asisten estudiantes desde grado noveno hasta grado undécimo y jornada de la tarde en la que asisten estudiantes desde grado sexto hasta grado octavo, además, la institución cuenta con un Programa de Formación Complementaria que busca formar docentes para la primera infancia y la básica primaria.

Para efectos de la implementación de la secuencia didáctica se tomó una muestra de la población, correspondiente a quince estudiantes del grado undécimo de la jornada de la mañana quienes tienen entre 17 y 19 años de edad. La cantidad de estudiantes fue establecida con el fin de obtener una buena calidad en el registro de los datos, en apoyo a su posterior análisis.

Los estudiantes involucrados en la implementación de la secuencia didáctica habían trabajado con las desigualdades numéricas, ya que este es un contenido que se desarrolla a lo largo de la básica primaria y secundaria. Además, para el momento de la implementación, en su curso de matemáticas se estaba introduciendo el contenido matemático de las inecuaciones.

3.3.2 Metodología

A continuación, se presenta una descripción de la implementación de la secuencia didáctica, la forma en la que se desarrollaron las tareas con las fechas y tiempos correspondientes.

Inicialmente, se presentó la secuencia didáctica a los profesores de secundaria del área de matemáticas de la institución educativa con el fin de determinar la pertinencia de la secuencia

según los conocimientos de los estudiantes y el plan de área de la institución. Con esto se evidenció que después de la pandemia los contenidos matemáticos presentados en los documentos oficiales fueron desplazados de un grado a otro y para llegar a un nivel de matematización general como el que se aborda en la secuencia didáctica era necesario implementar en grado undécimo.

Al iniciar cada sesión de clase se explicó la dinámica del desarrollo de la misma, en la cual cada estudiante trabajó de manera individual y se le hacía entrega de la impresión de la tarea a desarrollar y una hoja en blanco anexa para realizar los procedimientos y registrar las respuestas a cada pregunta, con la posibilidad de preguntar a las investigadoras cualquier duda que surgiera en el desarrollo de las preguntas.

Al finalizar cada tarea se recogieron las impresiones y las hojas anexas con las respuestas para realizar una plenaria a modo de socialización, guiada por las investigadoras. En ese espacio se compartieron las respuestas y estrategias que los estudiantes usaron para responder cada pregunta de la tarea y se resolvían las dudas.

La secuencia didáctica se desarrolló en ocho sesiones distribuidas en dos sesiones para la situación 1 y seis sesiones para la situación 2, de la siguiente manera:

En relación con la implementación de la situación 1, como se muestra en la Tabla 4, las tres tareas involucradas se implementaron en dos sesiones de clase de 90 minutos cada una. En la primera se desarrolló la tarea 1 y 2 el día 2 de junio de 2023 y en la segunda sesión se desarrolló la tarea 3 el día 9 de junio de 2023.

Por su parte, la implementación de la situación 2 compuesta por cuatro tareas, se llevó a cabo en seis sesiones de clase. En la primera y segunda sesión se desarrolló la tarea 1 los días 14 y 15 de junio de 2023 con una duración de 70 minutos en total, la tercera y cuarta sesión de 90

minutos cada una en la que se abordó la tarea 2 se desarrolló los días 20 y 23 de junio de 2023, la quinta sesión se abordó la tarea 3 el día 26 de julio de 2023 con una duración de 90 minutos, finalmente, en la sexta sesión se desarrolló la tarea 4 el día 3 de agosto de 2023 en un lapso de 70 minutos de clase.

Tabla 4

Tiempos de implementación de la secuencia didáctica diseñada

	situación 1		situación 2					
Sesión	1	2	3	4	5	6	7	8
Tareas	T1 y T2	T3	T1	T1	T2	T2	T3	T4
Minutos	90	90	40	30	90	90	90	70

Fuente: Elaboración propia

3.4 Resultados y análisis de resultados

En el presente apartado se muestra la sistematización de las respuestas brindadas por los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali, a lo largo del desarrollo de la secuencia diseñada y el análisis de los resultados obtenidos a la luz de la fundamentación teórica descrita en los capítulos 1 y 2, y los desempeños establecidos en cada una de las tareas de las situaciones que hacen parte de la secuencia didáctica.

La sistematización de las respuestas de los estudiantes se organizó en tablas que incluyen la pregunta trabajada y los tipos de respuesta obtenidos con su respectiva descripción y justificación según sea el caso, además, se añade la frecuencia absoluta (Fa) y frecuencia relativa (Fr) en las cuales se indica la cantidad de estudiantes y el porcentaje correspondiente al tipo de respuesta, respectivamente.

Adicionalmente, se estableció una notación que permite identificar a los estudiantes con el fin de conservar su anonimato y consta de la letra E seguida de un número entre el uno y el quince, por ejemplo, al estudiante 1 le corresponde la notación E1. La situación, la tarea y la pregunta desarrollada se identifica con la siguiente notación: S1, T1, P1 que se corresponden con la situación 1 (S1), Tarea 1 (T1) y Pregunta 1 (P1).

3.4.1 Resultados y análisis de resultados de la situación 1: Niveles de glucosa, diabetes y desigualdades numéricas

Situación 1: Niveles de glucosa, diabetes y desigualdades numéricas.

La diabetes es una enfermedad en la que los niveles de azúcar en la sangre (glucosa) se encuentran elevados o son anormales. El azúcar viene de la digestión de los alimentos y por medio de la hormona insulina ingresa a las células para posteriormente transformarse en energía la cual es utilizada para las actividades diarias. Minsalud, (s.f.)

Según el ADA (American Diabetes Association) los valores normales de frecuencia de los niveles de glucosa en sangre son determinados según la edad de los pacientes, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1

Niveles de glucosa en sangre normales

Edad	Valores de referencia.		Unidad
Recién nacidos mayores de 1 día.	50	80	mg/dL
Niños.	60	100	mg/dL
18-60 años.	74	100	mg/dL
60-90 años.	82	115	mg/dL
> 90 años.	75	121	mg/dL

Nota: mg=miligramos, dL= decilitros y mg/dL=miligramos de azúcar por decilitro.

Además, lo niveles de glucosa en sangre anormales se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2

Niveles de glucosa en sangre anormales.

Valores de referencia según ADA-OMS-ALAD		
Niveles de glucosa en sangre anormal en ayunas	100 mg/dL	125 mg/dL
Criterio para diagnóstico de Diabetes	Mayor o igual a 126 mg/dL	

Se diagnostica diabetes en un paciente si el nivel de glucosa en ayunas es mayor o igual a 126 mg/dl en dos exámenes diferentes.

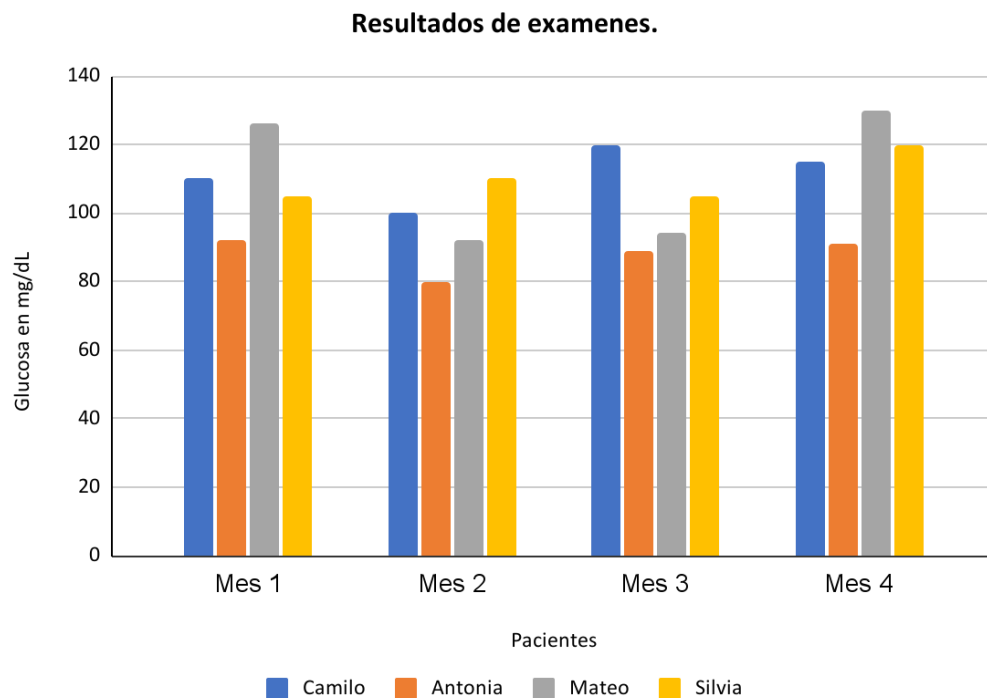
Tarea 1: Comprendiendo la situación a través de los niveles de glucosa

Lea atentamente la siguiente información:

Camilo, Antonia, Mateo y Silvia son cuatro adolescentes que tienen entre 14 y 15 años, ellos se han realizado exámenes de glucosa cada seis meses durante los dos últimos años, como se muestra a continuación:

Figura 1.

Resultados de los exámenes de los estudiantes



Situación 1: Tarea 1, Pregunta 1 (S1, T1, P1)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 5

Tipificación S1, T1, P1

Pregunta 1: Según la información de la figura 1. 1. Indique para que mes los niveles de glucosa de cada paciente fueron anormales. - Camilo - Antonia - Mateo - Silvia			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr

1	Estudiantes que indican de manera acertada todos los meses en los que los pacientes tuvieron niveles de glucosa anormales y argumentan alguna razón de la anormalidad de la glucosa, relacionando cada paciente con los meses. (E8, E10, E12, E13)	4	27%
2	Estudiantes que indican de manera acertada todos los meses en los que los pacientes tuvieron niveles anormales de glucosa en sangre, relacionando cada paciente con los meses. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E11, E14, E15)	10	67%
3	Estudiantes que indican de manera acertada todos los meses en los que los pacientes tuvieron niveles de glucosa anormales, relacionando cada mes con los pacientes. (E9)	1	7%

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 2 (S1, T1, P2)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 6

Tipificación S1, T1, P2

Pregunta 2: Indique cuál paciente puede ser diagnosticado con diabetes y ¿por qué?				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que indican de manera correcta el paciente (Mateo) que puede ser diagnosticado con diabetes.	Estudiantes que justifican teniendo en cuenta los dos criterios para diagnosticar diabetes. (Glucosa mayor o igual a 126 en ayunas, en dos exámenes diferentes) (E1, E5, E11, E14, E15)	5	33%
		Estudiantes que justifican teniendo en cuenta únicamente el criterio de "glucosa mayor o igual a 126 mg/dL". (E3, E4, E6, E7, E12, E13)	6	40%
		Estudiantes que justifican con los niveles	4	27%

		anormales de glucosa. (E2, E8, E10, E9)		
--	--	---	--	--

Teniendo en cuenta la Tabla 5 y Tabla 6 de los resultados correspondientes a las preguntas 1 y 2 de la situación 1, Tarea 1 (S1, T1) se puede observar que la mayoría de los estudiantes comprenden la situación, puesto que identificaron los meses en que cada paciente presenta niveles de glucosa anormales y el paciente que puede ser diagnosticado con diabetes.

Lo anterior significa que los conocimientos previos de los estudiantes les permitieron reconocer elementos fundamentales relacionados con la comparación cualitativa de magnitudes. Además, se detectaron habilidades en la lectura e interpretación de la información presentada en una tabla y datos registrados en una gráfica de manera acertada, lo que evidencia que usan distintos sistemas de representación para la solución de las tareas.

Sin embargo, con relación a la manera en que justifican cuando un paciente es diagnosticado con diabetes, el 40% de los estudiantes omitió uno de los dos criterios necesarios para el diagnóstico, lo que parece indicar una falta de lectura minuciosa de la información presentada en el enunciado.

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 3 y 4. (S1, T1, P3 y P4)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 7

Tipificación S1, T1, P3 y P4

Pregunta 3 : Indique quien tuvo el mayor nivel de glucosa en el mes 3. Pregunta 4 : Indique quien tuvo el menor nivel de glucosa en el mes 4.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr

Única respuesta	Estudiantes que indican de manera correcta que Camilo obtuvo el mayor nivel de glucosa en el mes 3 y que Antonia obtuvo el menor nivel de glucosa en el mes 4. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	15	100%
-----------------	---	----	------

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 5 (S1, T1, P5)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 8

Tipificación S1, T1, P5

Pregunta 5: Compare el nivel de glucosa de Mateo y Silvia en el mes 1.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta en lenguaje natural que el nivel de glucosa de Mateo es mayor que el nivel de glucosa de Silvia. (E1, E2, E9, E11, E15)	5	33%
2	Estudiantes que establecen una comparación a través de una resta como operación aritmética. (E4, E14)	2	13%
3	Estudiantes que establecen una comparación en lenguaje natural usando los símbolos de relación de orden (E5)	1	7%
4	Estudiantes que no establecen una comparación y mencionan que los niveles de glucosa de ambos pacientes son anormales o elevados. (E3, E6, E7, E8, E10, E12, E13)	7	47%

Teniendo en cuenta la Tabla 7 y Tabla 8 de los resultados correspondientes a las preguntas 3 y 4 de la S1, T1, se aprecia en la Tabla 7 que el total de estudiantes indicaron de manera correcta al leer la información de la gráfica adjunta en la Figura 1 del taller los pacientes que tuvieron el mayor nivel de glucosa en el mes 3 y menor nivel de glucosa en el mes 4, lo que evidencia una correcta lectura del registro de representación gráfico.

En relación con la Tabla 8 correspondiente a la pregunta 5 se observa que el 40 % de los estudiantes que establecieron de manera correcta una comparación en lenguaje natural, destacándose los estudiantes E4 y E14 que hicieron uso de la resta como operación aritmética, mientras que E5 usa el lenguaje natural y simbólico como sistemas de representación, al realizar una comparación que emplea de manera correcta el símbolo *mayor que*. Lo anterior evidencia que los estudiantes establecen diferentes maneras de comparar.

Adicionalmente, se encontró que el 47% restante de los estudiantes describieron características referentes a la anormalidad de los niveles de glucosa de cada paciente sin establecer una comparación.

Las respuestas de los estudiantes registradas en las Tablas 7 y 8, deja en evidencia que reconocieron aspectos elementales del contexto necesarios para responder a las preguntas propuestas, lo cual los ubica en el nivel situacional de la matematización al hacer uso de sus conocimientos previos e informales en el momento de establecer las diferentes comparaciones.

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 6 (S1, T1, P6)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 9

Tipificación S1, T1, P6

Pregunta 6: Indique entre los valores de Camilo y Antonia en el mes 2 ¿cuál obtuvo el mayor nivel de glucosa en sangre?, ¿cuál es la diferencia entre los dos?

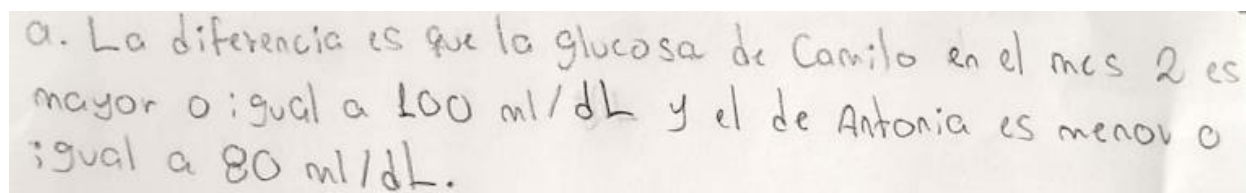
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta el paciente (Camilo) que obtuvo el mayor nivel de glucosa en sangre en el mes 2.	Estudiantes que justifican indicando una diferencia cuantitativa (20mg/dL). (E1, E2, E4, E5, E8, E14)	6	40%
		Estudiantes que justifican indicando una desigualdad numérica en lenguaje natural. (Camilo en el mes 2 es mayor o igual a 100 mg/dL) (E15)	1	7%
		Estudiantes que justifican indicando una diferencia cualitativa (los números de Camilo fueron mayores). (E9, E10)	2	13%
		Estudiantes que justifican teniendo en cuenta los niveles normales y anormales de glucosa en sangre. (E7)	1	7%
2	Estudiantes que no indican el paciente que obtuvo el mayor nivel de glucosa en sangre en el mes 2.	Estudiantes que mencionan los niveles normales y anormales de glucosa en sangre de cada paciente. (E11)	1	7%
		Estudiantes que indican una diferencia cualitativa entre los niveles de glucosa de cada paciente. (E12)	1	7%
		Estudiantes que indican el nivel de	3	

		glucosa de cada paciente. (E3, E6, E13)		20%
--	--	---	--	-----

Con relación a los resultados correspondientes a la pregunta 6 de la S1, T1, se aprecia que el 67% de los estudiantes indicaron de manera correcta el paciente que obtuvo el mayor nivel de glucosa en el mes 2 sobresaliendo los estudiantes E1, E2, E4, E5, E8 y E14 que justificaron determinando la resta como operación que permite establecer una diferencia cuantitativa, en este caso entre los valores del nivel de glucosa. Por su parte E15 relacionó los resultados de la Figura 1 de la secuencia didáctica por medio de desigualdades numéricas, indicando en lenguaje natural como se muestra en la Figura 7 que los resultados son mayores o iguales a determinado número.

Figura 7

Respuesta de E15, S1, T1, P6



a. La diferencia es que la glucosa de Camilo en el mes 2 es mayor o igual a 100 ml/dL y el de Antonia es menor o igual a 80 ml/dL.

Por otra parte, los estudiantes E9 y E10 justificaron realizando una comparación cualitativa en términos del resultado mayor y E7 justifica teniendo en cuenta los niveles de glucosa anormal.

Las respuestas de los estudiantes evidencian la comprensión del enunciado de la pregunta, a la vez que una correcta lectura de la gráfica dentro del contexto en el que se encuentran planteadas, ya que justificaron haciendo uso de dos sistemas de representación para establecer una comparación entre los niveles de glucosa de los dos pacientes.

Tarea 2: Niveles de glucosa durante el día y la comparación de magnitudes.

Los niveles de glucosa en sangre no permanecen estáticos durante el día, pues después de cada comida la glucosa puede subir hasta alcanzar un valor máximo de 140 mg/dL.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presentan los niveles de glucosa en sangre de Mariana de 21 años durante un día entero.

Tabla 3

Glucosa de mariana durante el día

Horario de Mariana.	Niveles de glucosa.
7 am	80 mg/dL
9 am	100 mg/dL
11 am	90 mg/dL
13 pm	126 mg/dL
15 pm	102 mg/dL

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 1a y 1b (S1, T2, P1a y P1b)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 10

Tipificación S1, T2, P1a y P1b

Pregunta 1: Teniendo en cuenta esta información:

- Indique el valor más alto de glucosa de Mariana en el día
- Complete la siguiente tabla utilizando desigualdades numéricas para establecer las relaciones de orden entre el valor anterior y cada uno de los valores de glucosa reportados durante todo el día.

<table><tr><td>Valor del nivel de glucosa</td><td>Relación</td><td>Valor del nivel de glucosa</td></tr><tr><td>80 mg/dL</td><td></td><td></td></tr><tr><td>126 mg/dL</td><td>></td><td>90 mg/dL</td></tr><tr><td></td><td></td><td>102 mg/dL</td></tr><tr><td></td><td><</td><td></td></tr></table>				Valor del nivel de glucosa	Relación	Valor del nivel de glucosa	80 mg/dL			126 mg/dL	>	90 mg/dL			102 mg/dL		<	
Valor del nivel de glucosa	Relación	Valor del nivel de glucosa																
80 mg/dL																		
126 mg/dL	>	90 mg/dL																
		102 mg/dL																
	<																	
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr															
1	Estudiantes que indican acertadamente el valor más alto de glucosa (126 mg/dL) y establecen de manera correcta las relaciones de orden entre el valor mayor con cada uno de los valores de glucosa reportados durante todo el día (80, 90, 100, 102 mg/dL) (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	14	93%															
2	Estudiantes que no indican acertadamente el valor más alto de glucosa (126 mg/dL), indicando la hora en la cual se registra este valor y establecen de manera correcta las relaciones de orden entre el valor mayor con cada uno de los valores de glucosa reportados durante todo el día (80, 90, 100, 102 mg/dL) (E9)	1	7%															

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 2 (S1, T2, P2)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 11

Tipificación S1, T2, P2

Pregunta 2: Escriba falso o verdadero según el caso.		
a.	90 mg/dL < 80 mg/dL	()
b.	102 mg/dL < 125 mg/dL	()
c.	126 mg/dL > 126 mg/dL	()

d. $126 \text{ mg/dL} \geq 126 \text{ mg/dL}$ ()			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta cuatro valores de verdad. (E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	14	93%
2	Estudiantes que establecen de manera correcta tres valores de verdad y un valor incorrecto. (E2)	1	7%

Con relación a los resultados correspondientes presentados en la Tabla 10 se aprecia que el 93% de los estudiantes indicaron de manera acertada el valor más alto de glucosa (126 mg/dL) y establecieron de manera correcta las relaciones de orden entre ese valor con cada uno de los otros valores de glucosa de Mariana reportados en un día al usar cantidades enteras positivas. Lo anterior deja en evidencia que los estudiantes identificaron y seleccionaron dentro del contexto los valores necesarios para solucionar las preguntas, además, establecieron las relaciones de orden usando los símbolos de manera correcta para formular desigualdades numéricas.

En relación con el tipo respuestas de la Tabla 11, se logra evidenciar que el 93% de los estudiantes establecieron de manera correcta cuatro valores de verdad correspondientes a las relaciones de orden entre dos números naturales. Sin embargo, el 7%, es decir, un estudiante estableció tres valores de verdad de manera correcta e de manera incorrecta el valor de verdad correspondiente a la desigualdad que incluye el símbolo de mayor o igual ($\geq$). Esto deja en evidencia que la mayoría de estudiantes validaban las relaciones de orden debido a que están cursando el grado undécimo y el contenido matemático de las desigualdades numéricas se trabaja desde grados anteriores.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 3 y 4 (S1, T2, P3 y P4)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 12

Tipificación S1, T2, P3 y P4

Pregunta 3: Si x representa los valores diferentes al valor mayor del nivel de glucosa de Mariana, escribe una expresión que relacione el valor mayor con x. Pregunta 4: Si y representa todos los valores diferentes al valor menor de glucosa de Mariana, escribe la expresión que relacione el valor menor de glucosa con y.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta las relaciones de orden en las dos expresiones de manera simbólica. ($x < 126, y > 80$). (E1, E2, E4, E5, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E15)	11	73%
2	Estudiantes que establecen de manera correcta la relación de orden en una sola expresión de manera simbólica ($y > 80$). (E9)	1	7%
3	Estudiantes que establecen de manera incorrecta las relaciones de orden, usando los símbolos $\leq, \geq$. (E3, E6, E13)	3	20%

La Tabla 12 correspondiente a las respuestas presentadas por los estudiantes en las preguntas 3 y 4 de la S1, T2, muestra que el 73% de los estudiantes formularon de manera correcta dos expresiones usando los símbolos de relación de orden, lo que deja en evidencia que la mayoría de los estudiantes generalizaban y reconocían el significado de la x como variable que representa diferentes valores correspondientes a los niveles de glucosa de Mariana durante el día, estableciendo desigualdades como expresiones algebraicas.

Además el 20% de los estudiantes que incluye a E3, E6 y E13 establecieron de manera incorrecta las relaciones de orden, puesto que hacen uso de los símbolos $\leq, \geq$ lo que indica el uso incorrecto de los símbolos de relación de orden.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 5 (S1, T2, P5)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 13

Tipificación S1, T2, P5

Pregunta 5: Juan, estudiante de grado once, indica que la expresión que representa los niveles de glucosa de Mariana entre las 7 am a 13 pm es: $80 \leq x \leq 126$. Escribe los valores de x para los cuales la expresión es verdadera.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta los cuatro valores para los cuales la expresión es verdadera (80, 90, 100, 126). (E1, E2, E7, E8, E9, E10, E11, E12)	8	53%
2	Estudiantes que establecen de manera correcta los cuatro valores para los cuales la expresión es verdadera (80, 90, 100, 126) e incluyen un valor incorrecto (102). (E4, E14)	2	13%
3	Estudiantes que establecen de manera correcta solo dos valores para los cuales la expresión es verdadera (90, 100) e incluyen un valor incorrecto. (E3, E5, E6, E13)	4	27%
4	Estudiantes que indican que todos los valores hacen verdadera la expresión. (E15)	1	7%

En la Tabla 13 se puede ver que el 66% de los estudiantes establecieron de manera correcta los cuatro valores para los cuales la expresión es verdadera, el 27% establecieron de

manera correcta solo dos valores y el 7%, es decir, un estudiante indicó en lenguaje natural que todos los valores hacen verdadera la expresión, sin tomar valores particulares. Esto muestra que gran parte de los estudiantes realizaron una correcta lectura de los datos del contexto y reconocieron el dominio de una desigualdad según el contexto y las relaciones de orden incluidas en la desigualdad, puesto que identificaron dentro de los valores presentados aquellos que cumplen con las condiciones de la desigualdad y del enunciado.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 6 (S1, T2, P6)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 14

Tipificación S1, T2, P6

Pregunta 6: Suponga que para unas horas diferentes a las registradas en la tabla Mariana tiene los siguientes niveles de glucosa. Determine si los valores están dentro del rango de la expresión $80 \leq x \leq 126$. • 85 mg/dL • 102 mg/dL • 130 mg/dL • 115 mg/dL • 69 mg/dL			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que determinan de manera correcta los tres valores que se encuentran dentro del rango de la expresión, argumentando en lenguaje natural. (E13).	1	7%
2	Estudiantes que determinan de manera correcta los tres valores que se encuentran dentro del rango de la expresión de manera simbólica por medio de desigualdades. (E3, E6)	2	13%

3	Estudiantes que indican de manera correcta los tres valores que se encuentran dentro del rango de la expresión, en lenguaje natural. (E2, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E5, E1, E14, E15).	11	73%
4	Estudiantes que establecen de manera correcta los tres valores para los cuales la expresión es verdadera y añaden un valor incorrecto. (E4)	1	7%

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 7 (S1, T2, P7)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 15

Tipificación S1, T2, P7

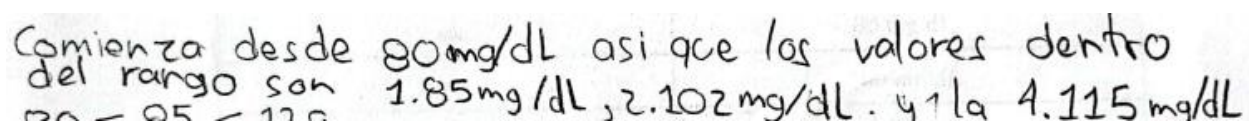
Pregunta 7: Escribe cinco posibles valores que puede tomar x diferentes a los anteriores que cumplan con las condiciones de la expresión $80 \leq x \leq 126$.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que escriben de manera correcta cinco valores diferentes a los planteados en la pregunta 6. (E1, E2, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E14)	11	73%
2	Estudiantes que escriben de manera correcta solo cuatro valores diferentes a los planteados en el ítem b, estableciendo simbólicamente una desigualdad. (E3, E15)	2	13%
3	Estudiantes que escriben de manera correcta entre uno y tres valores diferentes a los planteados en el ítem b, estableciendo simbólicamente una desigualdad respecto a las cotas superior e inferior. (E6, E13)	2	13%

Según lo que se observa en la Tabla 14 de las respuestas que los estudiantes en relación con la pregunta, el 100% de los estudiantes establecieron de manera correcta los tres valores que

se encuentran dentro del rango de la expresión, de los cuales sobresalen el estudiante E13 quien argumentó en lenguaje natural los valores que pertenecen a la desigualdad, teniendo en cuenta la cota inferior como lo muestra la Figura 8.

Figura 8

Respuesta de E13 a P6, S1, T2

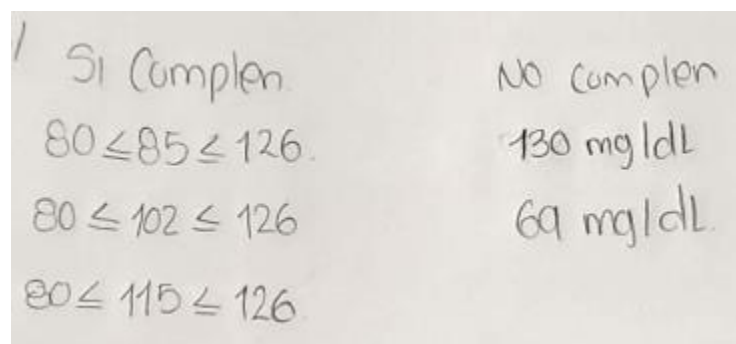


Comienza desde 80mg/dL así que los valores dentro del rango son 1.85mg/dL, 2.102mg/dL y la 4.115mg/dL

Además, E3, E6 sobresalen ya que como se puede ver en la Figura 9 los estudiantes verificaron por medio de desigualdades si el valor pertenece o no pertenece a la desigualdad.

Figura 9

Respuesta de E6 a P6, S1, T2



Si Cumplen	No Cumplen
$80 \leq 85 \leq 126$	130 mg/dL
$80 \leq 102 \leq 126$	69 mg/dL
$80 \leq 115 \leq 126$	

En relación con las respuestas a la pregunta 7 de la S1, T2, sistematizadas en la Tabla 15 se encuentra que el 86% de los estudiantes identificaron de manera correcta entre cuatro y cinco valores que cumplen con las condiciones de la desigualdad y son diferentes a los presentados anteriormente.

De lo anterior se puede concluir que la mayoría de los estudiantes realizaron una lectura correcta de la desigualdad y comprendieron el dominio de valores que la condiciona, como la

cota superior e inferior, al determinar de manera correcta los valores que puede tomar x como variable según las condiciones de la expresión, usando números enteros positivos.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 8a y 8b (S1, T2, P8a y P8b)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 16

Tipificación S1, T2, P8a y P8b

Pregunta 8: Teniendo en cuenta los niveles de glucosa de Mariana durante el día. a. Indique el mayor valor de glucosa. b. Indique el mínimo valor de glucosa.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que establecen de manera correcta el valor mayor (126 mg/dL) y el valor menor (80 mg/dL) de glucosa de Mariana durante el día. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	14	100%

Según lo expuesto en la Tabla 16, el total de estudiantes reconocieron el mayor y el mínimo valor de glucosa de Mariana durante el día, evidenciando una correcta lectura de la información presentada en el contexto.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 9 (S1, T2, P9)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 17

Tipificación S1, T2, P9

Pregunta 9: Indique si el valor pertenece a la desigualdad dada, marcando verdadero o falso.			
a.	-3 pertenece a	$-7 < x < 7$	()
b.	27 pertenece a	$28 > x \geq 9$	()

c. 43 pertenece a $24 < x$ ()			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que indican de manera correcta los valores de verdad según corresponda (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	14	100%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 9 de la S1, T2, presentados en la Tabla 17, se observa que todos los estudiantes indicaron de manera correcta si los valores pertenecen a las desigualdades correspondientes. Lo cual significa que hubo comprensión de la desigualdad y del dominio de valores que puede tomar x en desigualdades que se encuentran desligadas de un contexto particular.

Situación 1: Tarea 3

Tarea 3: Niveles de glucosa normal y una representación gráfica de la desigualdad simultánea.

Las desigualdades simultáneas se pueden representar a través de varios sistemas de representación matemáticos, en la Tabla 5 se muestran algunos ejemplos.

Tabla 5

Notaciones de la desigualdad

Los valores de una desigualdad se pueden representar gráficamente a través de intervalos de la siguiente manera:			
Notación de desigualdad	Notación de intervalo	Nombre del intervalo	Representación gráfica del intervalo

$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x < b$	(a, b)	Intervalo abierto	

Fuente: Elaboración propia.

Nota: Se coloca “[“ o “]” cuando el extremo hace parte del intervalo y “(“ o “)” cuando el extremo no hace parte del intervalo.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1a, 1b, y 1c (S1, T3, P1a, P1b, y P1c)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 18

Tipificación S1, T3, P1a, P1b, y P1c

Pregunta 1: Teniendo en cuenta que el nivel de glucosa normal en niños se encuentra entre 60 mg/dL y 100 mg/dL. a. Determina la desigualdad que representa la situación anterior. b. Escriba la notación del intervalo que representa la situación anterior. c. Escriba el nombre del intervalo.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen la desigualdad ($60 \leq x \leq 100$), la notación $[60, 100]$ y el nombre del intervalo (intervalo cerrado). (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11, E13, E14, E15)	12	80%

2	Estudiantes que establecen la desigualdad usando los símbolos $<$ ($60 < x < 100$), la notación $[60,100]$ y el nombre del intervalo (intervalo cerrado). (E7, E9, E12)	3	20%
---	---	---	-----

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes presentadas en la Tabla 18, se observa que el 80% de los estudiantes reconocieron intervalos correspondientes a desigualdades puesto que establecieron simbólicamente la desigualdad, escribieron la notación y determinaron el nombre del intervalo según la información proporcionada en el enunciado de la pregunta. Por otra parte, el 20% de los estudiantes escribieron de manera correcta la notación y determinaron el nombre del intervalo, sin embargo, al determinar la desigualdad mediante símbolos lo hicieron de manera incorrecta al usar el signo $<$ en lugar de $\leq$ y obviar el signo igual.

De lo anterior se puede inferir que los estudiantes E7, E9 y E12 confundieron las relaciones al no interpretar el significado del símbolo menor o igual ($\leq$), esto muestra que a pesar de que los estudiantes ya habían trabajado con las desigualdades y sus diferentes representaciones, aún persistían vacíos respecto al significado de los símbolos y sus relaciones.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1d (S1, T3, P1d)

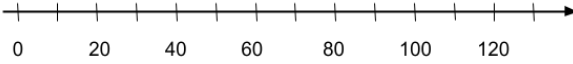
Población: 15 estudiantes.

Tabla 19

Tipificación S1, T3, P1d

Pregunta 1d: Teniendo en cuenta que el nivel de glucosa normal en niños se encuentra entre 60 mg/dL y 100 mg/dL.

d. Grafique el intervalo en la recta numérica.

			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que marcan de manera correcta las cotas superior (100) e inferior (60) y subrayan el intervalo. (E8, E10, E13, E14)	4	27%
2	Estudiantes que marcan de manera correcta las cotas superior (100) e inferior (60) sin subrayar el intervalo. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E11, E12, E15)	11	73%

En la Tabla 19 se ilustra que el 73% de los estudiantes determinaron de manera correcta las cotas superior e inferior del intervalo $[60,100]$, sin embargo, no marcaron los puntos que pertenecían al interior del intervalo. El otro 27% de los estudiantes representaron el intervalo con los puntos que representaban los límites de la desigualdad y los puntos interiores del intervalo.

De manera general, los resultados muestran que los estudiantes hicieron uso de distintos sistemas de representación como la recta numérica, lenguaje natural y lenguaje algebraico, sin embargo, la mayoría de ellos no reconocieron el intervalo como un conjunto de puntos y, por tanto, no lo marcan, dejando en evidencia una tensión entre los valores que representan lo continuo y lo discreto en el momento de trabajar con intervalos.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1e (S1, T3, P1e)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 20

Tipificación S1, T3, P1e

Pregunta 1 e: Teniendo en cuenta que el nivel de glucosa normal en niños se encuentra entre 60 mg/dL y 100 mg/dL

e. Indique si es posible que un paciente tenga -30mg/dL en su resultado del nivel de glucosa.

Justifique su respuesta.				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que no es posible tener -30 mg/dL.	Estudiantes que justifican teniendo en cuenta que los resultados de glucosa se ubican en los números positivos. (E1, E8, E10, E13, E15)	5	33%
		Estudiantes que justifican teniendo en cuenta los niveles normales y anormales de glucosa en niños. (E2, E4, E5, E6, E7, E9, E11, E12, E14)	9	60%
2	Estudiantes que no responden. (E3)		1	7%

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1f (S1, T3, P1f)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 21

Tipificación S1, T3, P1f

Pregunta 1 f: Teniendo en cuenta que el nivel de glucosa normal en niños se encuentra entre 60 mg/dL y 100 mg/dL f. ¿Todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo? ¿por qué?				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que no todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo.	Estudiantes que justifican indicando que los valores ubicados en la recta no se corresponden totalmente con los valores del intervalo. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E13, E15)	11	73%
2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo.	Estudiantes que justifican indicando que todos los valores ubicados en la recta son posibles niveles de glucosa. (E7, E12, E14)	3	20%

3	Estudiantes que no responden. (E11)	1	7%
---	-------------------------------------	---	----

En la Tabla 20 en la cual se registran las respuestas de la pregunta 1e de la S1, T3, se muestra que el 93% de los estudiantes reconocieron que no es posible tener un resultado del nivel de glucosa de -30 mg/dL entre los cuales cuatro estudiantes justificaron que los niveles de glucosa se ubicaban en los números positivos y los nueve estudiantes restantes justificaron indicando que este valor no es posible dentro del rango de valores de nivel de glucosa normal de niños en ayunas.

En la Tabla 21 en la cual se registran las respuestas de la pregunta 1f de la S1, T3, se observa que el 73% de los estudiantes indicaron de manera correcta que no todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo señalado, justificando que los valores de la recta no se corresponden en su totalidad con los valores del intervalo. Y un 20% de los estudiantes indicaron de manera incorrecta que todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo pues son posibles valores en los resultados de niveles de glucosa en sangre.

Las preguntas anteriores estaban diseñadas para que los estudiantes validen los valores pertenecientes a un intervalo, reflexionen si son discretos o continuos y determinen el conjunto numérico al cual pertenecen dentro del contexto.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 2 y 3 (S1, T3, P2 y P3)

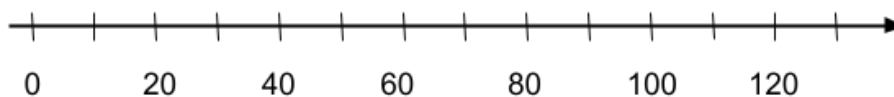
Población: 15 estudiantes.

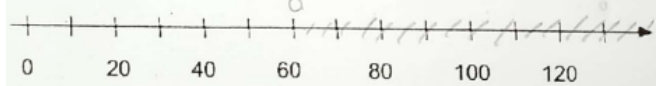
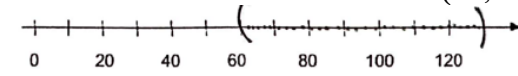
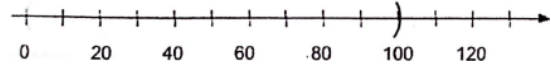
Tabla 22

Tipificación S1, T3, P2 y P3

Pregunta 2: Si x representa los niveles de glucosa en sangre, grafique los valores tal que $x > 60$, en la siguiente recta numérica.

Pregunta 3: Si x representa los niveles de glucosa en sangre, grafique los valores tal que $x < 100$, en la siguiente recta numérica.



Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que grafican las desigualdades en la recta numérica y marca el intervalo considerando los valores del contexto como discretos. (E1) 	1	7%
2	Estudiantes que grafican las desigualdades en la recta numérica indicando las cotas superior e inferior y marcando el intervalo al considerar los valores del contexto como discretos. (E5, E8, E10, E13, E14) 	5	33%
3	Estudiantes que grafican las desigualdades en la recta numérica marcando el intervalo con una línea continua. (E11, E15)	2	13%
4	Estudiantes que grafican las desigualdades en la recta numérica sin marcar el intervalo, ni considerar los valores del contexto como discretos. (E2, E3, E4, E6, E7, E9, E12) 	7	47%

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 4 (S1, T3, P4)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 23

Tipificación S1, T3, P4

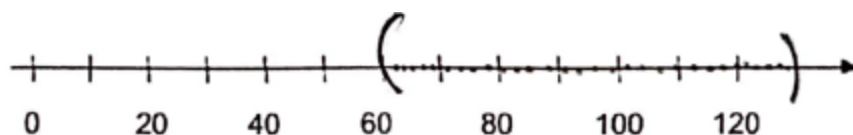
Pregunta 4: ¿Qué puede deducir al comparar las tres gráficas anteriores?			
Tipos de	Descripción	Fa	Fr

respuesta			
1	Estudiantes que comparan las gráficas y deducen que las tres tienen en común los valores de 60 a 100. (E4, E9)	2	13%
2	Estudiantes que reconocen algunas características de las tres gráficas (intervalo abierto, niveles de glucosa anormales y normales), sin establecer una comparación. (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12)	10	67%
3	Estudiantes que no comparan las gráficas. (E13, E14, E15)	3	20%

La Tabla 22 en la cual se registraron las respuestas de la pregunta 2 y 3 de la S1, T3, permite identificar que seis de los estudiantes marcaron el intervalo considerando los niveles de glucosa como discretos, al dibujar los valores del interior del intervalo mediante puntos o líneas separadas, sin embargo, cinco de ellos marcaron el intervalo indicando una cota superior e inferior en cada uno de los casos, como se ilustra en la Figura 10.

Figura 10

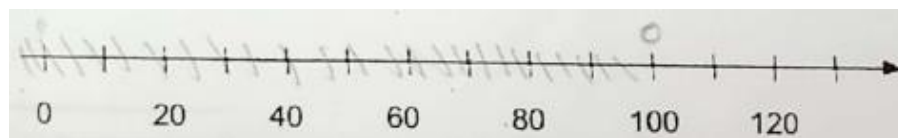
Respuesta de E10, P2, T3, S1



Además, como se muestra en la figura 11 solo el estudiante E1 representó los intervalos como abiertos al infinito en la recta numérica.

Figura 11

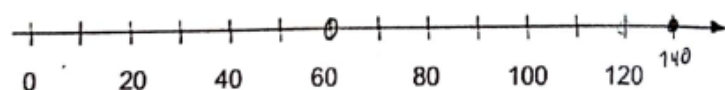
Respuesta de E1 a P3, T3, S1



De los ocho estudiantes restantes, los cuales no marcan el intervalo, E2 y E11 indicaron solamente la cota inferior en la pregunta 2 (60) y la cota superior en la pregunta 3 (100) y E3, E4, E6, E7, E9 y E12 indicaron intervalos marcando una cota superior y una cota inferior en cada caso como se ve en la Figura 12.

Figura 12

Respuesta de E12, P2, T3, S1



Por otro lado, de la tabla 23 en la cual se registraron las respuestas de la pregunta 4 de la S1, T3, se evidencia que solo el 13% de los estudiantes, es decir, dos estudiantes, E4 y E9 compararon las tres gráficas y dedujeron que tenían en común los valores entre 60 y 100. El 87% de los estudiantes no compararon las tres gráficas, sin embargo, E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E11 y E12 reconocieron algunas de sus características como que los intervalos son abiertos o cerrados e incluso hay estudiantes que determinaron si los valores correspondientes a los niveles de glucosa en sangre representados en cada una de las gráficas, eran normales o anormales.

De lo anterior se puede evidenciar que los estudiantes reconocieron la representación gráfica del intervalo correspondiente a la desigualdad planteada e hicieron uso de distintos sistemas de representación como el simbólico y la representación gráfica para responder a las preguntas propuestas.

Además, se puede inferir que las preguntas promovieron una reflexión en torno a los valores que toma un intervalo según un contexto determinado, que en este caso corresponde a los niveles de glucosa en sangre, dentro de la cual el 40% reconocieron que, aunque la desigualdad

está escrita de manera continua, los valores que representa el contexto se corresponden con valores discretos dentro de la gráfica.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 5a y 5b (S1, T3, P5a y P5b)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 24

Tipificación S1, T3, P5a y P5b

Pregunta 5: Determine la desigualdad y la notación del intervalo correspondiente en cada uno de los siguientes casos. a. Glucosa para adultos mayores entre 60 y 90 años. b. Glucosa en adultos mayores de 90 años			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que determinan la desigualdad y la notación del intervalo de manera correcta en uno o dos casos, usando el símbolo menor o igual que ($\leq$) y escribiendo un intervalo cerrado. (E3, E4, E5, E6, E11, E12, E13, E14) $(82 \leq x \leq 115, [82, 115])$ $(75 \leq x \leq 121, [75, 121])$	8	53%
2	Estudiantes que determinan la desigualdad o la notación del intervalo de manera correcta pero no ambas, usando el símbolo menor o igual que ($\leq$) o escribiendo un intervalo cerrado. (E1, E5, E8, E9, E10)	5	33%
3	Estudiantes que determina la desigualdad y la notación del intervalo de manera incorrecta en ambos casos, usando el símbolo menor que ($<$) y escribiendo un intervalo semiabierto. (E2) 	1	7%
4	Estudiantes que determinan la desigualdad y la notación del intervalo de manera incorrecta al no tomar los extremos. (E15) $(82 < x < 115, (82, 115))$ $(75 < x < 121, (75, 121))$	1	7%

En la Tabla 24 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 de la S1, T3, se evidencia que el 86% de los estudiantes formularon las desigualdades a partir de las condiciones del enunciado usando el símbolo menor o igual que ($\leq$) y reconocieron que la desigualdad correspondiente se representaba por medio de un intervalo cerrado, sin embargo, los estudiantes E1, E5, E8, E9 y E10 realizaron de manera correcta la desigualdad o la notación del intervalo, pero no ambas, como se observa en la Figura 13, si bien el estudiante E1 escribió de manera correcta las desigualdades, omitió escribir la notación del intervalo correspondiente en cada una.

Figura 13

Respuesta de E1, P5, T3, S1

5
 a) $1152 \text{ mg/dL} \leq X \leq 1445 \text{ mg/dL}$
 b) $75 \text{ mg/dL} \leq X \leq 124 \text{ mg/dL}$

Lo anterior permite ver que en general los estudiantes hicieron uso de los sistemas de representación, pasando del lenguaje natural a la representación simbólica, estableciendo las desigualdades correspondientes a las situaciones planteadas, además, reconocieron los intervalos correspondientes a las desigualdades, sin embargo, se observa que no hubo una lectura minuciosa de la pregunta por parte de los estudiantes E1, E5, E8, E9 y E10 debido a que omitieron realizar las dos consignas planteadas en el enunciado. Por último, se diferencia el estudiante E2 al no contemplar una de las cotas tanto en la desigualdad como en la notación de cada uno de los intervalos.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 6a (S1, T3, P6a)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 25

Tipificación S1, T3, P6a

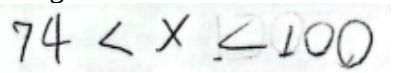
Pregunta 6a: Según Pedro, la siguiente desigualdad representa los valores normales de glucosa para adultos entre 18 y 60 años. $60 < x < 100$ a. Indique que tuvo en cuenta Pedro para formular la expresión.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que los valores de la desigualdad corresponden a la glucosa en niños y no en adultos entre 18 y 60 años. (E1, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E13, E14)	11	73%
2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que los valores de la desigualdad corresponden a la glucosa para adultos entre 18 y 60 años. (E5, E10)	2	13%
3	Estudiantes que realizan una lectura de la desigualdad. (E15)	1	7%
4	Estudiantes que indican no saber el rango de edad al que corresponden los valores presentados en la desigualdad. (E2)	1	7%

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 6b (S1, T3, P6b)**Población: 15 estudiantes.**

Tabla 26

Tipificación S1, T3, P6b

Pregunta 6b: Según Pedro, la siguiente desigualdad representa los valores normales de glucosa para adultos entre 18 y 60 años. $60 < x < 100$ b. ¿La expresión de Pedro es correcta? si no lo es, corrígela.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que reconocen que la desigualdad es incorrecta,	4	

	explicando que los valores de glucosa no corresponden a la población del enunciado y corrigen la desigualdad de manera correcta. ($74 \leq x \leq 100$). (E1, E2, E4, E11)		27%
2	Estudiantes que reconocen que la desigualdad es incorrecta y la corrigen de manera correcta, sin ningún tipo de explicación. (E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13)	9	60%
3	Estudiantes que reconocen que la desigualdad es incorrecta y la corrigen de manera incorrecta usando el símbolo ($<$). (E14) 	1	7%
4	Estudiantes que reconocen que la desigualdad es incorrecta y omiten corregirla. (E15)	1	7%

En la Tabla 25, se registran las respuestas de los estudiantes de la pregunta 6a de la S1, T3 y se observa que el 73% de los estudiantes identificaron que los valores de la desigualdad corresponden a la glucosa en niños y no en adultos entre 18 y 60 años como se indica en el enunciado, mostrando que los estudiantes realizaron una correcta lectura y comparación de los datos proporcionados en el enunciado de la pregunta y la información suministrada en el contexto.

El 20% restante indicaron de manera incorrecta que la desigualdad planteada corresponde con la información proporcionada o indicó no saber a qué datos corresponde la desigualdad como lo expresa el estudiante E2, mientras que E15 correspondiente al 7% restante realizó una lectura de las relaciones de orden de la desigualdad, lo que evidencia una lectura poco minuciosa del enunciado y de la información presentada allí.

Por otra parte, en la Tabla 26 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 6b se logra observar que el 100% de los estudiantes reconocieron que la desigualdad planteada en la consigna es incorrecta. De los cuales el 87% corrigieron la expresión de manera acertada y se destacan E1, E2, E4 y E11 quienes añadieron una explicación en lenguaje natural

explicitando las razones por las cuales la expresión del enunciado está incorrecta como se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Respuesta de E11, P6b, T3, S1

b No, no es correcta, ya que los valores de las personas entre 18-60 años se representarían $74 \leq x \leq 100$

Todo lo anterior deja en evidencia que la mayoría de los estudiantes usaron distintas representaciones como el lenguaje natural y el simbólico, al contrastar la información presentada en ambos sistemas de representación para validar si la información proporcionada correspondía a los valores que pertenecen al intervalo de glucosa normal en adultos entre 18 y 60 años. Además, a excepción de E14 la mayoría de los estudiantes corrigieron la desigualdad incluyendo el símbolo de relación de orden $\leq$, mostrando una correcta interpretación de las relaciones.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 7 y 8 (S1, T3, P7 y P8)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 27

Tipificación S1, T3, P7 y P8

Pregunta 7: Los siguientes intervalos están definidos en los enteros ($\mathbb{Z}$), determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.

- | | | | |
|----|------|---------|-------------|
| a. | 50 | () | [30,70) |
| b. | -33 | () | (15,48) |
| c. | 64 | () | (30,64) |
| d. | -102 | () | [-102, -64] |

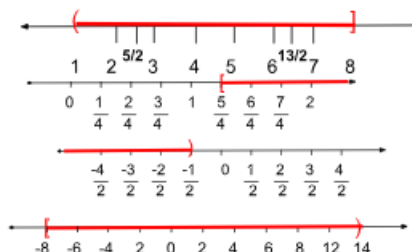
Pregunta 8: Los siguientes intervalos están definidos en los racionales ($\mathbb{Q}$), determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.

a. $\frac{5}{2}$ ()

b. $\frac{3}{4}$ ()

c. $\frac{-2}{2}$ ()

d. -4 ()



Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta cinco valores que pertenecen ($50, -102, \frac{5}{2}, \frac{-2}{2}, -4$) y tres valores que no pertenecen ($-33, 64, \frac{3}{4}$) a los intervalos. (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E14, E15)	12	80%
2	Estudiantes que indican de manera correcta cinco valores que pertenecen ($50, -102, \frac{5}{2}, \frac{-2}{2}, -4$) y dos valores que no pertenecen al intervalo, ($-33, \frac{3}{4}$) y marcan de manera incorrecta un valor que pertenece (64). (E3, E12, E13)	3	20%

Las preguntas 7 y 8 de la S1, T3 son propuestas con el fin de que los estudiantes se desliguen del contexto e introducir otros conjuntos numéricos distintos al de los naturales en las distintas representaciones, al validar si los valores pertenecen a los intervalos definidos en el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) y racionales ($\mathbb{Q}$).

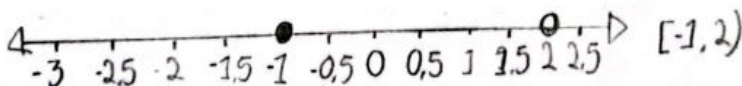
Además, en la tabla 27 se observa que en general los estudiantes validaron de manera acertada los valores pertenecientes a los intervalos correspondientes, exceptuando los estudiantes E3, E12 y E13 que indicaron de manera incorrecta que el número 64 pertenece al intervalo (30,64) lo que refleja una lectura poco minuciosa de la notación de los intervalos.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 9 (S1, T3, P9)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 28

Tipificación S1, T3, P9

Pregunta 9: Determine y grafique un intervalo que contenga valores pertenecientes al conjunto de los números naturales, enteros y racionales.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que determinan y grafican de manera correcta un intervalo que contiene valores pertenecientes al conjunto de los números naturales, enteros y racionales.(E1, E4, E6, E8, E9, E10, E11, E14, E15) Ej: 	9	60%
2	Estudiantes que determinan y grafican de manera incorrecta un intervalo, considerando únicamente el conjunto de los números naturales y racionales. (0,5 , 3,5)(E5)	1	7%
3	Estudiantes que determinan de manera incorrecta el intervalo considerando todos los puntos que pertenecen a la recta numérica $(-\infty, \infty)$ (E2, E3, E13)	3	20%
4	Estudiantes que no responden. (E7, E12)	2	13%

En la Tabla 28 se evidencia que la pregunta 9 de la S1, T3 favoreció una discusión sobre los conjuntos numéricos, los elementos que ellos comprenden y sus relaciones, ya que la pregunta requiere que los estudiantes usen sus conocimientos del conjunto de los naturales, enteros y racionales para formular un intervalo que incluya valores pertenecientes a los tres conjuntos.

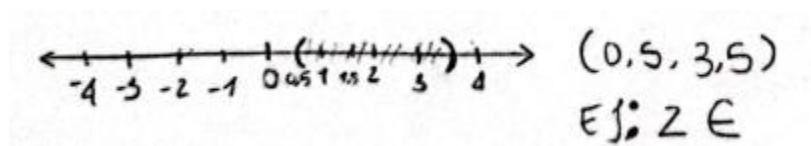
En relación con las respuestas, se observa que el 60% de los estudiantes determinaron y graficaron de manera correcta un intervalo que contiene números naturales, enteros y racionales.

Lo que deja en evidencia que la mayoría de los estudiantes reconocieron y establecieron intervalos que involucraban diferentes conjuntos numéricos.

Del porcentaje restante de los estudiantes, E5 consideraba el conjunto de los enteros para diseñar la recta numérica; sin embargo, no contempló los números negativos al establecer el intervalo y su representación en la recta numérica, como se muestra en la Figura 15:

Figura 15

Respuesta de E5, P9, T3, S1



Por otra parte, los estudiantes E2, E3 y E13 establecieron un intervalo al infinito en sus dos direcciones $(-\infty, \infty)$ sin especificar qué números estaban considerando del conjunto de los naturales, enteros y racionales.

Las respuestas registradas de los estudiantes dejan ver que la pregunta 9 de la S1, T3 permitió hacer un acercamiento al continuo numérico, en tanto los estudiantes lograron establecer intervalos en los cuales reconocieron, relacionaron y ordenaron los elementos de distintos conjuntos numéricos en la recta numérica, lo que evidencia que la pregunta movilizó aspectos del pensamiento variacional y numérico.

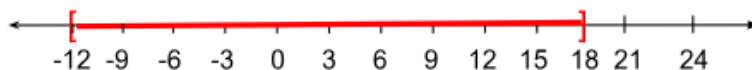
Situación 1: Tarea 3, Pregunta 10 (S1, T3, P10)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 29

Tipificación S1, T3, P10

Pregunta 10: El siguiente intervalo está definido en el conjunto de números reales ($\mathbb{R}$).
determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.



- a. -5 ()
 b. $-\frac{1}{2}$ ()
 c. π ()
 d. 21 ()

Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que indican de manera correcta tres valores que pertenecen (-5 , $-\frac{1}{2}$, π) y un valor que no pertenece al intervalo (21). (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	15	100%

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 11 (S1, T3, P11)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 30

Tipificación S1, T3, P11

Pregunta 11: En el caso anterior, ¿Todos los puntos que se encuentran entre $[-12, 18]$ pertenecen al intervalo? ¿Por qué?				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que responden de manera correcta indicando que todos los puntos pertenecen al intervalo $[-12, 18]$	Estudiantes que justifican indicando que es un intervalo cerrado y contiene todos los puntos. (E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E10, E11, E13)	10	67%
		Estudiantes que justifican sin tomar en cuenta el intervalo del enunciado. (E9, E14)	2	13%

2	Estudiantes que responden de manera incorrecta indicando que todos los puntos no pertenecen al intervalo.	Estudiantes que justifican indicando que el intervalo no toma todos los valores que se encuentran en la recta numérica. (E6, E15)	2	13%
3	Estudiantes que no responden. (E12)		1	7%

En la Tabla 29 correspondiente a las respuestas de los estudiantes en relación con la pregunta 10, de la S1, T3 se identificó que la totalidad de los estudiantes validaron de manera acertada los valores que pertenecían y no pertenecían al intervalo al incluir valores definidos en el conjunto de los números reales como el número π . Lo que además evidencia que las preguntas en torno a los conjuntos numéricos y sus relaciones lograron abordar de manera significativa el paso de lo discreto a lo continuo en la recta numérica.

En la Tabla 30 en la cual se consolidan las respuestas de los estudiantes a la pregunta 11 de la S1, T3 se observa que el 80% de los estudiantes indicaron de manera correcta que todos los puntos pertenecen al intervalo $[-12, 18]$ de los cuales se destacan E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E10, E11 y E13, quienes justificaron que todos los puntos pertenecen al ser un intervalo cerrado, evidenciando que reconocían propiedades de este tipo de intervalos.

Lo anterior deja en evidencia que los estudiantes identificaron la representación gráfica de la solución de una desigualdad y realizaron una correcta lectura de la notación del intervalo correspondiente, puesto que validaron los valores que pertenecían al mismo y determinaron si sus extremos pertenecían o no dependiendo de su notación. Esto permite ver que la pregunta permitió el trabajo con el contenido matemático de la desigualdad por medio de los intervalos, el reconocimiento de las características de un intervalo cerrado y su notación.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 12 (S1, T3, P12)

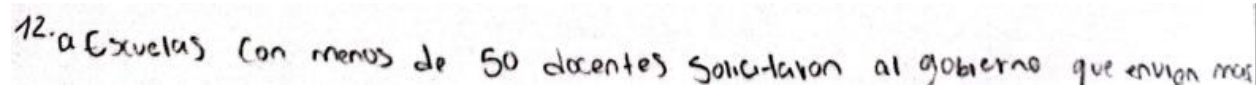
Población: 15 estudiantes.

Tabla 31

Tipificación S1, T3, P12

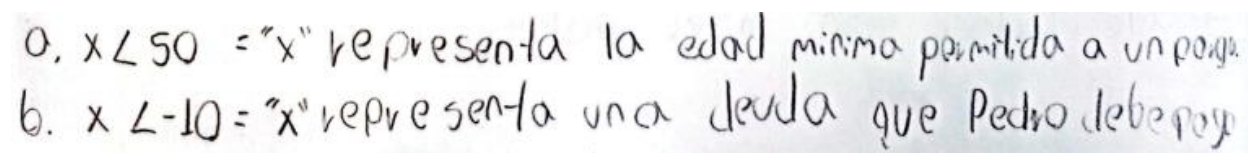
Pregunta 12: Crea una situación que se pueda representar por medio de la siguiente expresión. a. $x < 50$ b. $x < -10$ c. $2000 < x < 4000$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta tres situaciones que se representan por las desigualdades planteadas. (E1, E4)	2	13%
2	Estudiantes que establecen de manera correcta una o dos situaciones que se representan por las desigualdades planteadas. (E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E15)	9	60%
3	Estudiantes que asignan un significado a la variable (edad, deuda y precio), pero no crean una situación. (E14)	1	7%
4	Estudiantes que no responden. (E2, E3, E13)	3	20%

Conforme a lo presentado en la Tabla 31 se muestra que el 73% de estudiantes crearon situaciones que se pueden representar por medio de las desigualdades planteadas, lo que evidencia una correcta interpretación de las desigualdades y sus relaciones, al ser capaces de crear situaciones imaginables según sus experiencias y de dar un significado a la variable x , como se muestra en la Figura 16.

Figura 16*Respuesta de E5, P12a, T3, S1*


12. a Escuelas con menos de 50 docentes solicitaron al gobierno que envíen más

Por otra parte, se reconoce que aunque el estudiante E14 no creó situaciones que involucran las desigualdades planteadas, si estableció un significado a la variable x como se muestra en la figura 17.

Figura 17*Respuesta de E14, P12a y P12b, T3, S1*


a. $x < 50$ = "x" representa la edad mínima permitida a un pago.
b. $x < -10$ = "x" representa una deuda que Pedro debe pagar

De esto se concluye que la mayoría de los estudiantes establecieron situaciones que se pueden modelar a través de desigualdades numéricas haciendo uso de sus conocimientos informales, lo cual lo ubica en el nivel referencial de la matematización.

Al finalizar la sistematización y análisis de las tablas de las respuestas de los estudiantes a las preguntas de las tareas de la situación 1, se puede concluir que:

- En relación con el contexto, la situación fue interesante para los estudiantes en tanto abrió espacios de discusión sobre la manera en la que funciona la glucosa en las personas en diferentes etapas de la vida, etapas que están determinadas por rangos de edad, además, las discusiones en la plenaria se vieron enriquecidas debido a las experiencias que algunos estudiantes habían tenido al realizarse exámenes de glucosa.
- Es importante resaltar que los estudiantes hicieron una lectura correcta de la información presentada tanto de la contextualización como de los enunciados de las preguntas, lo cual

les permitió asociar una desigualdad a un enunciado y viceversa, además de dotar de sentido a las expresiones dentro de su realidad.

- La situación fomentó la formulación de *modelos de* a través de las desigualdades numéricas, puesto que los estudiantes establecieron desigualdades como $x < 100$ y desigualdades simultáneas como $60 < x < 100$, como modelos para un contexto particular a través del concepto de desigualdad que ellos conocían previamente.
- La situación permitió que los estudiantes se acercaran a las distintas representaciones del conjunto solución de una inecuación, puesto que en el desarrollo de las preguntas de la situación 1 se evidenció que los estudiantes usaron e interpretaron el nombre, al establecer cuando un intervalo era cerrado o abierto; la notación, al usar paréntesis o corchete de manera adecuada según era el caso; y la gráfica de intervalos que representaban un contexto, al realizar su lectura y validar los valores que pertenecían al intervalo.
- Además, en la situación se abordaron dificultades como la carencia de contenido semántico de la inecuación en la realidad, ya que los estudiantes tomaron datos específicos del contexto y los relacionaron por medio de desigualdades, y la dificultad relacionada con la no claridad de los símbolos de relación de orden puesto que los estudiantes constantemente ordenaron, acotaron y compararon los datos proporcionados por el contexto de la situación en lenguaje natural y posteriormente haciendo uso de los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$).
- También se abordó la carencia de significado de la variable, al realizar la inclusión de preguntas que llevaron al estudiante a reconocer la variable x como todos los posibles valores dentro de un rango determinado por el contexto que en este caso representaba los

niveles de glucosa en sangre de un paciente según su edad y con los cuales los estudiantes realizaron comparaciones cualitativas y cuantitativas y a su vez usaron diferentes sistemas de representación como el gráfico y algebraico para representar la variable.

- Finalmente, es importante resaltar que las tareas en esta situación permitieron alcanzar los primeros dos niveles de matematización de la Educación Matemática Realista, el nivel situacional y el nivel referencial, puesto que, en las producciones de los estudiantes se pudo evidenciar el uso de sus conocimientos y estrategias previas para responder las preguntas y construir modelos simples en los cuales se relacionaran los datos del enunciado haciendo uso del lenguaje algebraico.

3.4.2 Resultados y análisis de resultados de la situación 2: Ventas de Cafetería El Madrigal e inecuaciones lineales

En la cafetería El Madrigal que brinda atención a la mesa, los empleados ganan un salario fijo semanal de \$325.151¹, más una comisión por cada venta que hagan según el producto vendido.

Tarea 1: Las comisiones por ventas y la formulación de una inecuación

En la cafetería El Madrigal han sacado una torta a base de café y caramelo. Por el mes en curso se dará una comisión a los trabajadores de \$1.180 por cada torta vendida.

Carolina es una trabajadora de la cafetería y desea que su salario sea mayor esta semana, teniendo en cuenta la comisión que puede ganar al vender las tortas a base de café y caramelo.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 1a (S2, T1, P1a)

Población: 14 estudiantes.

¹ Este valor corresponde a la cuarta parte del SMLMV incluyendo el auxilio de transporte para el año 2023.

Tabla 32*Tipificación S2, T1, P1a*

Pregunta 1: La siguiente tabla muestra las comisiones y el salario semanal que puede ganar Carolina según las ventas. Completa la tabla según corresponda.

Tabla 6*Comisiones y salario semanal*

Comisión por torta	Cantidad de tortas	Comisión total	Salario fijo semanal.	Salario semanal total.
1.180	42	49.560	325.151	374.711
	37	43.660	325.151	368.811
1.180	53		325.151	
1.180	68			405.391
1.180		94.400		419.551

a. Escribe las cantidades que no cambian de la tabla anterior.

Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan de manera correcta la tabla e identifican las cantidades que no cambian en la tabla (Comisión por torta y salario fijo semanal). (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	13	93%
2	Estudiantes que completan de manera correcta la tabla y omiten escribir las cantidades que no cambian en la tabla (E9)	1	7%

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 1b (S2, T1, P1b)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 33*Tipificación S2, T1, P1b*

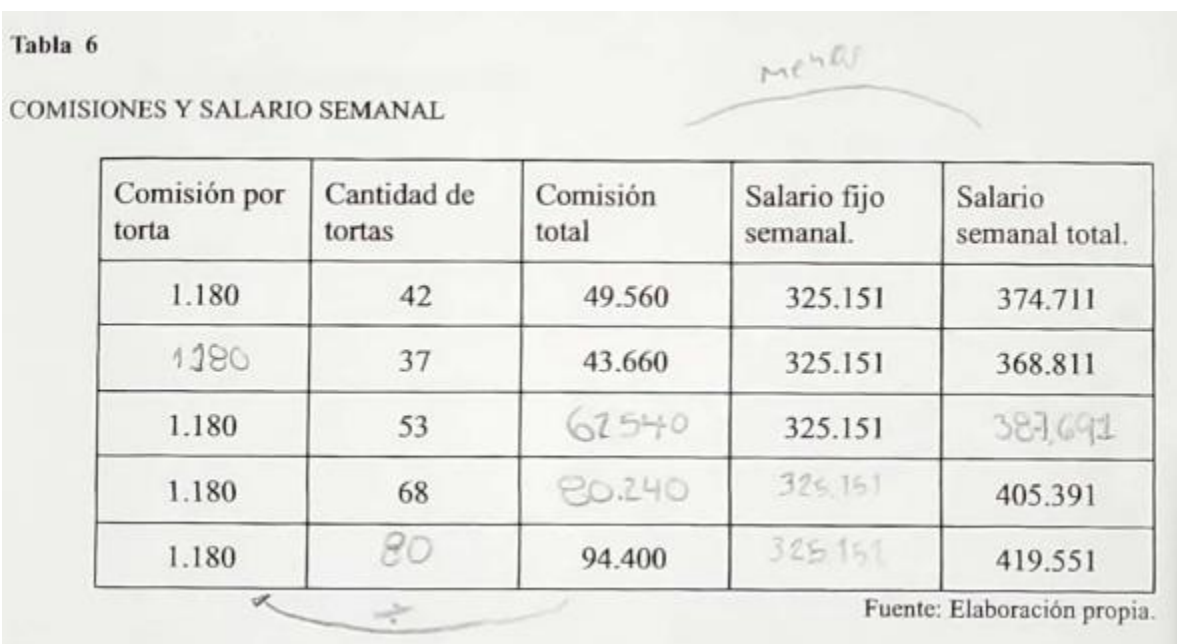
Pregunta 1b: Escribe cómo hallaste la comisión total.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que el valor de la <i>comisión total</i> se halla multiplicando (la comisión por torta, por la cantidad de tortas), en lenguaje natural. (E1, E2, E4, E6, E7, E11, E12, E13, E14, E15)	9	64%
2	Estudiantes que indican el procedimiento para hallar el <i>salario semanal total</i> . (E5, E8, E10)	4	29%
3	Estudiantes que no responden. (E9)	1	7%

Como se presenta en la Tabla 32 la totalidad de los estudiantes completaron la Tabla 6 de la secuencia didáctica de manera correcta indicando las cantidades faltantes. Se destaca el estudiante E13 quien reconoció las operaciones inversas que relacionan los valores como lo muestra la Tabla 34, lo que deja ver que la tabla de la pregunta posibilitó no solo que los estudiantes completaran los valores faltantes por medio de la multiplicación y la suma, sino que comprobaran los resultados usando la división y la resta.

Tabla 34*Respuesta de E13, P1a, T1, S2*

Tabla 6

COMISIONES Y SALARIO SEMANAL



Comisión por torta	Cantidad de tortas	Comisión total	Salario fijo semanal.	Salario semanal total.
1.180	42	49.560	325.151	374.711
1.180	37	43.660	325.151	368.811
1.180	53	62.540	325.151	387.691
1.180	68	80.240	325.151	405.391
1.180	80	94.400	325.151	419.551

Fuente: Elaboración propia.

Del total de estudiantes, el 93% identificaron que la comisión por torta y salario fijo semanal son cantidades que permanecen fijas y el 7% restante omitieron escribir las cantidades que no cambian.

Por otro lado, la Tabla 33 muestra que de los resultados obtenidos en la pregunta P1b de la S2, T1 que el 64% de los estudiantes reconocieron y escribieron en lenguaje natural que el procedimiento para hallar el valor de la comisión total correspondía a una multiplicación entre la comisión por torta y la cantidad de tortas, mientras que el 29% del total de estudiantes indicaron el procedimiento para hallar el salario semanal total, evidenciando una lectura poco minuciosa del enunciado.

De manera general, se puede decir que la mayoría de los estudiantes completaron la tabla y respondieron de manera acertada las preguntas usando el lenguaje natural. Además, se reconoce que la Tabla 6 de la secuencia didáctica sirvió como una herramienta para que los estudiantes identificaran valores fijos y variables y las operaciones que permiten relacionar estos valores dentro del contexto.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 2 y 3 (S2, T1, P2 y P3)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 35

Tipificación S2, T1, P2 y P3

Pregunta 2: Si n representa el número de tortas vendidas. Indique una expresión que le permite a Carolina calcular el dinero a ganar en comisión total. Pregunta 3: Indique la comisión total de Carolina al vender 70 tortas.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta la expresión que le permite a Carolina calcular el dinero a ganar en <i>comisión total</i> ($n \cdot 1.180$) e indican de manera correcta la <i>comisión total</i> al vender 70 tortas (82.600), añadiendo una explicación del procedimiento en lenguaje natural . (E8, E9, E10, E13, E14)	5	36%
2	Estudiantes que indican de manera correcta la expresión que le permite a Carolina calcular el dinero a ganar en comisión total ($n \cdot 1.180$) e indican de manera correcta la <i>comisión total</i> al vender 70 tortas (82.600). (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E11, E12, E15)	9	64%

En la Tabla 35 se observa que la totalidad de los estudiantes indicaron de manera correcta la expresión que permite hallar la comisión total usando la variable n e indicaron de manera correcta que 82.600 corresponde al valor de la comisión total al vender 70 tortas. Entre las respuestas proporcionadas, se destacan los estudiantes E8, E9, E10, E13 y E14, que añadieron una explicación del procedimiento en lenguaje natural como se observa en la Figura 18 lo que deja ver que los estudiantes realizaron una correcta lectura del enunciado y en sus respuestas relacionan dos sistemas de representación, el lenguaje algebraico y el lenguaje natural.

Figura 18

Respuesta de E10, P2 y P3, T1, S2

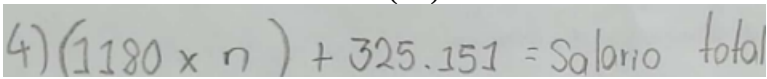
2. 1180×7 (Comisión total). Debe multiplicar la comisión por torta por el total de tortas vendidas para hallar la comisión total.
3. $1180 \times 70 = 82,600$

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 4 (S2, T1, P4)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 36

Tipificación S2, T1, P4

Pregunta 4: Explica cómo calcular el salario semanal total.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que explican de manera correcta en lenguaje natural una manera de calcular el <i>salario semanal total</i> (multiplicando la comisión por torta con la cantidad de tortas, luego sumar el resultado anterior con salario fijo semanal). (E1, E2, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	13	93%
2	Estudiantes que indican de manera correcta una expresión para calcular el salario semanal total. (E4) 	1	7%

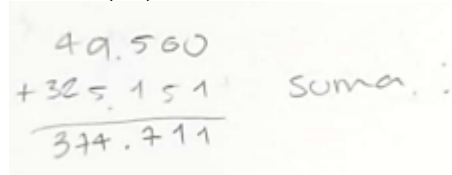
Situación 2: Tarea 1, Pregunta 5 (S2, T1, P5)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 37

Tipificación S2, T1, P5

Pregunta 5: Teniendo en cuenta la expresión encontrada en la pregunta 2, escribe la expresión que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr

1	Estudiantes que formulan una expresión que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina, teniendo en cuenta la expresión encontrada en la pregunta 2. (E2, E7, E10, E15) ($1.180 \times n + 325.151$)	4	29%
2	Estudiantes que formulan una expresión que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina usando siglas. (E1, E5, E11) ($CT + SFS$).	3	21%
3	Estudiantes que escriben en lenguaje natural la operación que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina. (E4, E6, E9, E12, E13) (<i>comisión total + salario fijo semanal</i>)	5	36%
4	Estudiantes que formulan una expresión que relaciona n con el salario fijo semanal. ($n + 325.151$)(E14)	1	7%
5	Estudiantes que escriben la operación que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina en la fila uno de la tabla 6. (E8) 	1	7%

Teniendo en cuenta la Tabla 36 se observa que el 100% de los estudiantes identificaron el procedimiento para hallar el salario semanal total, destacándose el estudiante E4 que estableció de manera simbólica una expresión haciendo uso de la expresión $1.180 \times n$ planteada en S2, T1, P2, mientras que el 93% explicó el procedimiento haciendo uso del lenguaje natural.

Por su parte en la Tabla 37 se encuentra que el 86% de los estudiantes establecieron de manera acertada una expresión que permite calcular el salario semanal total, dentro de los cuales, el 36% indica los términos de la expresión en lenguaje natural "*comisión total + salario fijo semanal*", el 29% relacionan la expresión $1.180 \times n$ con el salario fijo semanal, obteniendo la expresión " $1.180 \times n + 325.151$ " y el 21% hace uso de siglas CT y SFS que

representan una abreviación de la comisión total y salario fijo semanal respectivamente, para determinar la expresión.

Por otra parte, se encuentra el estudiante E14 establece la expresión $n + 325.151$ quien no explicitó el significado de la variable n y E8 que explicó la operación haciendo uso de un ejemplo particular en el cual la comisión total equivale a 49.560, sumado al salario fijo semanal que es igual a 325.151.

De manera general, se muestra que la mayoría de los estudiantes reconocieron cómo calcular el salario semanal total, construyendo un modelo que relaciona los valores fijos y variables dentro del contexto, con ayuda de la Tabla 6 de la secuencia didáctica. Además, la diversidad de las respuestas de los estudiantes permite ver que un modelo se puede construir haciendo uso de distintos sistemas de representación como el lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

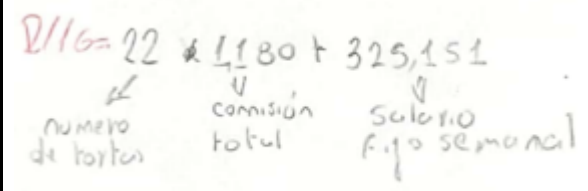
Situación 2: Tarea 1, Pregunta 6 (S2, T1, P6)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 38

Tipificación S2, T1, P6

Pregunta 6: Indique la expresión que le permite a Carolina saber la cantidad de tortas a vender para que su salario sea mayor o igual \$350.000			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que formulan de manera correcta la expresión $(1.180n + 325.151 \geq 350.000)$ (E1, E2, E5, E8, E10)	5	36%
2	Estudiantes que formulan una expresión usando la cantidad de tortas específica. (E7, E15)	2	14%

			
3	Estudiantes que indican que $n \geq 22$ permite ganar un salario mayor o igual a \$350.000. (E11)	1	7%
4	Estudiantes que formulan de manera incorrecta la expresión, al no relacionar de manera acertada los datos del enunciado u omitir la variable x . (E4, E6, E9, E12, E14)	5	36%
5	Estudiantes que no responden. (E13)	1	7%

En la Tabla 38 se observa que el 50% de los estudiantes reconocieron la expresión que modela la situación presentada en el enunciado, de los cuales E1, E2, E5, E8 y E10 establecieron la expresión general, mientras que E7 y E15 formularon una expresión usando una cantidad de tortas específica, señalando que representa cada parte de esta.

Al igual que E7 y E15, el estudiante E11 reconoció la cantidad de 22 tortas como el valor mínimo de tortas a vender para obtener un salario mayor o igual a \$350.000 y a pesar de que en la hoja de trabajo no queda registrado, se evidencia que el estudiante reconoció la expresión que modela las condiciones del enunciado y realizó un procedimiento de resolución que le permitió hallar el conjunto solución.

Por su parte, del 36% estudiantes que escribieron de manera incorrecta la expresión, los estudiantes E6, E9 y E12 olvidaron algún término como la variable x , mientras que E4 y E14 relacionaron los datos del enunciado de manera errónea, como lo muestra la Figura 19, el estudiante E4 estableció un modelo que no corresponde a la situación planteada, lo que evidencia

según Vargas (2013) una dificultad en el paso del enunciado en lenguaje natural a una expresión en lenguaje algebraico (p.7).

Figura 19

Respuesta de E4, P6, T1, S2

6) $350.000 \div 1.180 = X > 350.000$

Lo anterior deja en evidencia de que a pesar de que se encontraron dificultades, la mayoría de los estudiantes reconocieron y establecieron de manera correcta la expresión al relacionar los datos de la situación presentada con las operaciones y los símbolos de orden correspondientes. Además, muestra que la situación 2 de la secuencia didáctica está desarrollada en un contexto que permitió que los estudiantes realizaran modelos particulares relacionando valores fijos y variables a través de una inecuación lineal, ubicando las matemáticas de los estudiantes en el nivel referencial de la matematización.

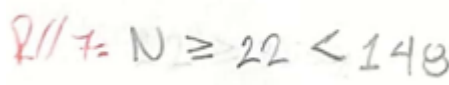
Situación 2: Tarea 1, Pregunta 7 (S2, T1, P7)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 39

Tipificación S2, T1, P7

Pregunta 7: Indique la expresión que le permite a Carolina saber la cantidad de tortas a vender para que su salario sea mayor o igual \$350.000 y menor que \$500.000			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que formulan de manera correcta la expresión $(350.000 \leq 1.180n + 325.151 \leq 500.000)$ (E1, E2, E13)	3	21%

2	Estudiantes que formulan de manera correcta dos desigualdades, relacionando la expresión del salario total con cada una de las cotas respectivamente. (E15) $(350.000 \leq n \times 1.180 + 325.151)$ $(n \times 1.180 + 325.151 \leq 500.000)$	1	7%
3	Estudiantes que reconocen el valor máximo y el valor mínimo que permite ganar un salario mayor o igual a \$350.000 y menor que \$500.000 y establecen una desigualdad de manera incorrecta. (E6, E7, E11, E12) 	4	29%
4	Estudiantes que formulan de manera incorrecta la expresión, al relacionar de manera errónea los datos del enunciado. (E4, E5, E8, E9, E10, E14)	6	43%

En la Tabla 39 se puede observar que el 28% de los estudiantes establecieron de manera correcta la expresión que representaba los datos del enunciado, de los cuales tres estudiantes E1, E2 y E13 formularon una inecuación que relacionó el salario semanal total con las cantidades de \$350.000 y \$500.000, mientras que el estudiante E15, establece dos inecuaciones una que relaciona el salario semanal total con \$350.000 y otra que relaciona el salario semanal total con \$500.000, mostrando que los estudiantes construyen *modelos de*, que relacionan valores fijos y variables a través de inecuaciones simultáneas.

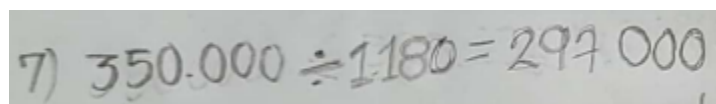
Por otra parte, el 29% del total de estudiantes reconocieron la cantidad de tortas mínima y máxima a vender para que el salario se encontrara dentro del rango de valores establecido, sin embargo, establecieron de manera incorrecta la desigualdad que relaciona estos valores con la variable n .

El 43% restante de los estudiantes, establecieron de manera incorrecta la expresión que representa la situación planteada.

El estudiante E4 como lo muestra la Figura 20 realizó una división entre dos valores involucrados en la situación, la cual dio como resultado un número decimal (296.61) que el estudiante aproximó y a la vez añadió tres ceros, lo que evidencia que se tomaron valores del enunciado y se realizaron operaciones de manera indiscriminada, sin tener en cuenta la consigna de la pregunta.

Figura 20

Respuesta de E4, P7, T1, S2

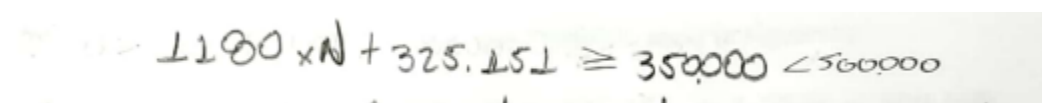


$$7) 350.000 \div 1180 = 297 000$$

Por su parte, los estudiantes E5, E8 y E10 reconocieron los valores que permiten determinar la expresión que representa el enunciado, sin embargo, establecieron de manera incorrecta las relaciones entre estos, como lo muestra la Figura 21.

Figura 21

Respuesta de E10, P7, T1, S2

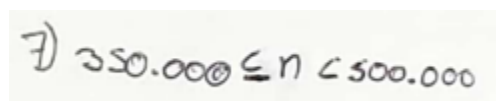


$$1180 \times n + 325.451 \geq 350.000 < 500.000$$

Además, E9 y E14 establecieron una desigualdad que relacionaba la variable n con el salario mínimo y máximo que se deseaba obtener, determinando una expresión incorrecta que omitía datos del contexto y del enunciado. En la Figura 22 se muestra la respuesta de E9.

Figura 22

Respuesta de E9, P7, T1, S2.



$$7) 350.000 \leq n < 500.000$$

Lo anterior deja en evidencia que la mayoría de los estudiantes presentaban dificultades al expresar información que se encuentra en lenguaje natural por medio de expresiones simbólicas como las inecuaciones simultáneas, al omitir datos del enunciado y establecer de manera incorrecta las relaciones entre estos.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 8 (S1, T3, P8)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 40

Tipificación S2, T1, P8

Pregunta 8: Si la comisión por cada torta vendida es de \$1.553, la expresión que determina la cantidad de tortas que tiene que vender Carolina para que su salario sea mayor o igual \$350.000 y menor que \$500.000 sería la siguiente: $350.000 \leq 325.151 + 1.553x < 500.000$ Estás de acuerdo ¿por qué?				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que responden que la expresión es correcta.	Estudiantes que justifican indicando que la expresión representa los datos del enunciado. (E4, E5, E6, E7, E11, E12)	6	43%
		Estudiantes que justifican indicando que la x representa la comisión por torta. (E1, E9)	2	14%
		Estudiantes que justifican reconociendo que el valor de la comisión cambia. (E2)	1	7%
		Estudiantes que justifican indicando que el cambio de signo no altera la expresión. (E8, E10)	2	14%
2	Estudiantes que responden que la expresión es incorrecta.	Estudiantes que justifican indicando que la expresión no permite conocer la cantidad de tortas a vender. (E14)	1	7%

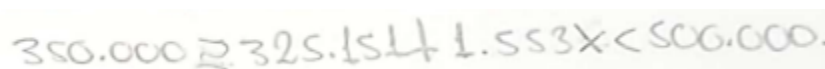
		Estudiantes que justifican corrigiendo de manera incorrecta la expresión. (E15)	1	7%
3	Estudiantes que no responden. (E13)		1	7%

Como se puede observar en la Tabla 40 el 78% de los estudiantes identificaron que la expresión representa las condiciones del enunciado, entre los cuales sobresale E2, al justificar que la expresión presentada es similar a la expresión encontrada en el punto anterior ($350.000 \leq 1.180n + 325.151 \leq 500.000$) pero con un valor de comisión por torta diferente.

El 14% restante, es decir, dos estudiantes, respondieron que la expresión presentada es incorrecta. Por su parte, E14 indicó que no se corresponde con las condiciones de la consigna y E15 de manera particular corrigió la inecuación formulando una expresión errónea como se muestra en la Figura 23.

Figura 23

Respuesta de E15, P8, T1, S2



$$350.000 \geq 325.151 + 1.553x < 500.000.$$

De todo lo anterior se puede concluir que la mayoría de estudiantes realizaron una correcta lectura del enunciado e identificaron características de la expresión que le permiten determinar la validez de esta en relación con la información del enunciado.

Tarea 2: El salario y las inecuaciones simultáneas.

En la cafetería los productos nuevos no son los únicos con comisión, en la siguiente tabla se muestran las comisiones de otros productos que venden en el Café Madrigal:

Tabla 7

Productos y comisiones

Producto	Comisión.
Bebida con café y vainilla	\$120
Bebida de café y caramelo.	\$135
Bebida de matcha y miel.	\$200
Torta de banano y nueces.	\$800
Torta de zanahoria.	\$500

Fuente: Elaboración propia.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 1a, 1b, 1c, 1d (S2, T1, P1a, P1b, P1c, P1d)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 41

Tipificación S2, T2, P1a, P1b, P1c, P1d

Pregunta 1: Se desea conocer la cantidad de tortas de banano y nueces a vender para que el salario de un empleado sea mayor o igual \$350.751 y menor que \$504.351, realizando el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Paso 1} & \left\{ \begin{array}{l} 350.751 \leq 325.151 + 800x < 504.351 \\ 350.751 - 325.151 \leq 325.151 - 325.151 + 800x < 504.351 - 325.151 \end{array} \right. \\
 \text{Paso 2} & \left\{ \begin{array}{l} 25.600 \leq 800x < 179200 \\ 25.600 \leq \frac{800}{800}x < \frac{179200}{800} \end{array} \right. \\
 \text{Paso 3} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{25.600}{800} \leq \frac{800}{800}x < \frac{179200}{800} \\ 32 \leq x < 224 \end{array} \right. \\
 \text{Paso 4} & \left\{ \begin{array}{l} 32 \leq x < 224 \quad \Leftrightarrow \text{Conjunto solución.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

a. Indique qué operación realizó Juan en el paso 1 b. Indique qué operación realizó Juan en el paso 2 c. Indique qué operación realizó Juan en el paso 3 d. Indique qué operación realizó Juan en el paso 4			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta las operaciones realizadas. (restar, dividir, pasar al otro lado) (E1, E2, E4, E5, E7, E8, E10, E9, E11, E12, E14, E15)	12	92%
2	Estudiantes que no responden. (E13)	1	8%

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 1 (S2, T2, P1e)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 42

Tipificación S2, T2, P1e

Pregunta 1e: Explica con tus palabras el resultado obtenido.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que explican el significado del resultado obtenido como la cantidad de tortas a vender para obtener el salario descrito. (E1, E2, E4, E5, E8, E10, E11, E14, E15)	9	69%
2	Estudiantes que no responden. (E7, E9, E12, E13)	4	30%

En la Tabla 41 se muestra que el 92% de los estudiantes reconocieron de manera acertada las operaciones involucradas en cada uno de los pasos del procedimiento de la pregunta 1 de la

S2, T2 puesto que indicaron que la resta y la división son operaciones que se efectúan en la resolución de la inecuación.

Sin embargo, E2 y E12 usaron el término "pasar al otro lado" para indicar la operación que se realiza en determinado paso haciendo referencia de manera implícita a la propiedad uniforme. Además, se encontró que E4, E6, E10 y E12 reconocieron la división como una fracción.

Por otra parte, en la Tabla 42 se observa que el 69% de los estudiantes indicaron que el conjunto solución corresponde a la cantidad de tortas que se deben vender para obtener el salario descrito.

De manera general se puede decir que las respuestas de los estudiantes permiten ver un primer acercamiento a la resolución de una inecuación lineal a través de sus operaciones y propiedades, además, que la mayoría de los estudiantes interpretaron el conjunto solución dentro del contexto, reconociendo la variable x como la cantidad de tortas.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 2 (S2, T2, P2)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 43

Tipificación S2, T2, P2

Pregunta 2: Realiza un procedimiento similar al anterior con la siguiente inecuación indicando la operación realizada en cada uno de los pasos. $10.600 < 53.000 + 53x < 84.800$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que realizan el procedimiento de manera correcta y	8	

	establecen el conjunto solución de manera correcta. (E2, E4, E5, E8, E10, E12, E14, E15) $10.600 < 53.000 + 53x < 84.800$ $10.600 - 53.000 < 53.000 - 53.000 + 53x < 84.800 - 53.000$ $-42.400 < 53x < 31.800$ $\frac{-42.400}{53} < \frac{53}{53}x < \frac{31.800}{53}$ $-800 < x < 600$		61%
2	Estudiantes que realizan el procedimiento de manera correcta y establecen el conjunto solución de manera incorrecta. (E1, E13)	2	15%
3	Estudiantes que realizan una resta de manera incorrecta. (E7, E9, E11)	3	23%

Conforme al tipo de respuestas registradas en la Tabla 43 se puede decir que el 61% de los estudiantes resolvieron de manera correcta la inecuación replicando los pasos presentados en el procedimiento de la pregunta anterior y encontrando el conjunto solución correspondiente.

Por otro lado, se puede observar que el 15% de los estudiantes realizan el procedimiento de manera correcta, sin embargo, establecen el conjunto solución de manera incorrecta, indicando valores que no corresponden a la solución de la inecuación.

El 23% restante de los estudiantes realizan el procedimiento replicando los pasos del punto anterior, sin embargo, como se muestra en la Figura 24 al efectuar la resta $84.800 - 53000$ indican un valor incorrecto que altera el conjunto solución.

Figura 24

Respuesta de E9, P2, T2, S2

$$\begin{aligned}
 a & 10.600 < 53.000 + 53x < 84.800 \\
 b & 10.600 - 53.000 < 53.000 - 53.000 + 53x < 84.800 - 53.000 \\
 c & -42.400 < 53x < 31.400 \\
 d & \frac{-42.400}{53} < \frac{53x}{53} < \frac{31.400}{53} \\
 e & -800 < x < 592.45
 \end{aligned}$$

De manera general, se puede constatar que la secuencia de preguntas les permitió a los estudiantes acercarse a la resolución de inecuaciones simultáneas y establecer el conjunto solución a través del uso de operaciones y propiedades como la propiedad uniforme para la resolución de las mismas.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (S2, T2, P3)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 44

Tipificación S2, T2, P3

Pregunta 3: Complete la siguiente tabla realizando la operación correspondiente.

Tabla 8

Operaciones básicas en desigualdades

Inecuación Lineal	Operación para realizar en ambos lados	Resultado
$5x < 3$	Sumar 2 unidades	
$5x < 3$	Restar 2 unidades	
$5x < 3$	Sumar -2 unidades	

Nota: Adaptado de “Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales” p. 9 por Vargas, A. 2013.

Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr			
1	Estudiantes que expresan y/o resuelven de manera correcta la operación. (E2, E4, E10). $5x - 2 < 3 - 2$	3	23%			
2	Estudiantes que operan de manera incorrecta al sumar términos que no son semejantes en dos o tres filas. (E1, E5, E7, E8, E9, E11, E12, E13, E15) $5x < 3 \quad \quad \text{Sumar 2 unidades} \quad \quad 7x < 5$	9	69%			
3	Estudiantes que despejan la x. (E14) <table border="1"><tr><td>$5x < 3$</td><td>Sumar 2 unidades</td><td>$x < \frac{3}{5}$</td></tr></table>	$5x < 3$	Sumar 2 unidades	$x < \frac{3}{5}$	1	8%
$5x < 3$	Sumar 2 unidades	$x < \frac{3}{5}$				

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (S2, T2, P3)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 45

Tipificación S2, T2, P3

Pregunta 3: Complete la siguiente tabla realizando la operación correspondiente.

Tabla 8

Operaciones básicas en desigualdades

Inecuación Lineal	Operación a realizar en ambos lados	Resultado
$5x < 3$	Multiplica por 2	
$5x < 3$	Multiplica por -2	
$5x < 3$	Divida por 2	
$5x < 3$	Divida por -2	

Nota: Adaptado de “Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales” p. 9 por Vargas, A. 2013.									
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr						
1	Estudiantes que expresan y/o resuelven de manera correcta el procedimiento en las cuatro filas, cambiando el sentido de la desigualdad. (E4, E7, E10, E15) <table><tr><td>$5x < 3$</td><td>Multiplica por -2</td><td>$5x \cdot -2 > 3 \cdot -2$</td></tr></table>	$5x < 3$	Multiplica por -2	$5x \cdot -2 > 3 \cdot -2$	4	30%			
$5x < 3$	Multiplica por -2	$5x \cdot -2 > 3 \cdot -2$							
2	Estudiantes que resuelven de manera correcta la operación en las dos filas correspondientes al producto y omiten la x en las filas del cociente. (E1, E9, E11) <table><tr><td>$5x < 3$</td><td>Multiplica por -2</td><td>$-10x > -6$</td></tr><tr><td>$5x < 3$</td><td>Divida por 2</td><td>$2,5 < 1,5$</td></tr></table>	$5x < 3$	Multiplica por -2	$-10x > -6$	$5x < 3$	Divida por 2	$2,5 < 1,5$	3	23%
$5x < 3$	Multiplica por -2	$-10x > -6$							
$5x < 3$	Divida por 2	$2,5 < 1,5$							
3	Estudiantes que expresan y/o resuelven de manera correcta el procedimiento al operar con números positivos y de manera incorrecta al operar con números negativos al conservar el sentido de la desigualdad. (E2, E5, E8, E12, E13) <table><tr><td>$5x < 3$</td><td>Multiplica por -2</td><td>$-10x < -6$</td></tr><tr><td>$5x < 3$</td><td>Divida por 2</td><td>$2,5x < 1,5$</td></tr></table>	$5x < 3$	Multiplica por -2	$-10x < -6$	$5x < 3$	Divida por 2	$2,5x < 1,5$	5	38%
$5x < 3$	Multiplica por -2	$-10x < -6$							
$5x < 3$	Divida por 2	$2,5x < 1,5$							
4	Estudiantes que despejan la x . (E14) <table><tr><td>$5x < 3$</td><td>Multiplica por 2</td><td>$x < 0,32$</td></tr><tr><td>$5x < 3$</td><td>Multiplica por -2</td><td>$x > 0,32$</td></tr></table>	$5x < 3$	Multiplica por 2	$x < 0,32$	$5x < 3$	Multiplica por -2	$x > 0,32$	1	8%
$5x < 3$	Multiplica por 2	$x < 0,32$							
$5x < 3$	Multiplica por -2	$x > 0,32$							

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (S2, T2, P3)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 46

Tipificación S2, T2, P3

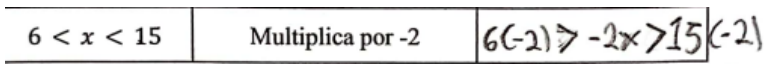
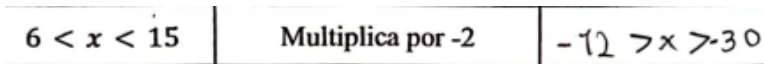
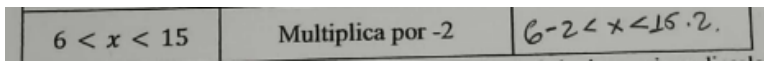
Pregunta 3: Complete la siguiente tabla realizando la operación correspondiente.

Tabla 8

Operaciones básicas en desigualdades

Inecuación Lineal	Operación a realizar en ambos lados	Resultado
$6 < x < 15$	Multiplica por -2	

Nota: Adaptado de “Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales” p. 9 por Vargas, A. 2013.

Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que expresan y/o resuelven de manera correcta el procedimiento, cambiando el sentido de la desigualdad y operan todos los términos. (E4, E7) 	2	15%
2	Estudiantes que cambian el sentido de la desigualdad y operan los extremos. (E1, E11, E15) 	3	23%
3	Estudiantes que conservan el sentido de la desigualdad y operan los extremos. (E2, E5, E8, E9, E10, E12, E13, E14) 	8	61%

De acuerdo con la Tabla 44 se observa que el 77% de los estudiantes realizaron las operaciones de manera incorrecta al operar términos que no son semejantes. Además, se

encontró que el 23% restante de los estudiantes resolvieron y/o expresaron de manera correcta la operación solicitada.

Por otro lado, el tipo de respuestas registradas en la Tabla 45 muestra que el 38% de los estudiantes expresaron y/o resolvieron de manera correcta la operación solicitada cuando involucra números positivos y de manera errónea cuando se solicita hacer la operación con números negativos, dado que omiten cambiar el sentido de la desigualdad.

Además, se puede observar que el 53% de los estudiantes resolvieron y/o expresaron las operaciones de manera correcta, sin embargo, los estudiantes E1, E9 y E11 no conservan la variable x en el momento registrar el resultado que se obtuvo al efectuar las operaciones correspondientes a las filas del cociente.

De manera particular, E14 despejó la x sin realizar la operación requerida en las filas correspondientes a la suma, resta, división y multiplicación de inecuaciones del tipo $ax < b$.

Por otra parte, en la Tabla 46 se muestra que el 84% de los estudiantes operaron solo los extremos de la inecuación, sin considerar el término que incluye la x , de los cuales solo E1, E11 y E15 al efectuar la operación cambiaron el sentido de la desigualdad. Finalmente, el 15% restante de los estudiantes expresaron y/o resolvieron de manera correcta al operar los tres términos de la inecuación, multiplicando por -2 y cambiando el sentido de la desigualdad.

Es importante aclarar que la Tabla 8 “Operaciones básicas en desigualdades” de la secuencia didáctica, fue diseñada con la intención de que los estudiantes reflexionaran acerca de las relaciones de orden, las operaciones y las propiedades en la resolución de inecuaciones lineales, sin embargo, todo lo anterior permite evidenciar que las operaciones a realizar dentro de la tabla no fueron claras para los estudiantes y no se prestó mayor atención a la Figura 3

“Propiedades de las inecuaciones lineales” de la secuencia didáctica, en la cual se presentan las propiedades a considerar para resolver las operaciones solicitadas.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3a y 3b (S1, T3, P3a y P3b)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 47

Tipificación S2, T2, P3a y P3b

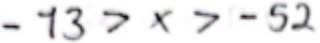
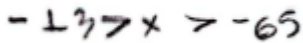
Pregunta 3: a. Indique qué cambia de la inecuación al multiplicar por -2 y ¿por qué? b. Indique qué cambia de la inecuación al dividir por -2 y ¿por qué?				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que el sentido de la desigualdad cambia.	Estudiantes que justifican que el sentido cambia al operar con un número negativo, según las propiedades. (E1, E7, E9, E10, E11, E12, E14, E15)	8	61%
		Estudiantes que justifican que el sentido cambia para mantener el enunciado válido. (E2, E5, E8)	3	23%
		Estudiantes que no justifican. (E4)	1	8%
2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que el sentido de la desigualdad no cambia.	Estudiantes que justifican que solo cambia el resultado del lado de la desigualdad en el que se operan números naturales. (E13)	1	8%

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 4 (S2, T2, P4)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 48

Tipificación S2, T2, P4

Pregunta 4: Resuelve la siguiente inecuación teniendo en cuenta las propiedades de la tabla 8. $315 < 120 - 15x < 900$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que realizan el procedimiento y establecen el conjunto solución de la inecuación de manera correcta al cambiar el sentido de la desigualdad. (E1, E8, E10, E11, E15) 	5	38%
2	Estudiantes que realizan el procedimiento de manera correcta y establecen el conjunto solución de la inecuación de manera incorrecta al contemplar valores diferentes. (E2, E5, E7) 	3	23%
3	Estudiantes que realizan el procedimiento y establecen el conjunto solución de la inecuación de manera incorrecta. (E4, E9, E13)	3	23%
4	Estudiantes que no responden. (E12, E14)	2	15%

Según lo expuesto en la Tabla 47 el 92% de los estudiantes identificaron de manera acertada que al multiplicar y dividir por -2 en representación de los números negativos el sentido de la inecuación cambia, de los cuales se destacan los estudiantes E1, E7, E9, E10, E11, E12, E14 y E15 quienes justificaron haciendo mención a las propiedades de las inecuaciones al operar por un número negativo.

Por otro lado, en la Tabla 48 se evidencia que el 61% de los estudiantes resolvieron la inecuación de manera correcta usando las propiedades, al operar por un número negativo y cambiar el sentido de la desigualdad; sin embargo, los estudiantes E2, E5 y E7 indicaron valores diferentes al establecer el conjunto solución.

Por su parte, el 23% de los estudiantes realizaron el procedimiento y establecieron el conjunto solución de la inecuación de manera incorrecta al omitir elementos de la inecuación inicial en el momento de resolver. Por ejemplo, E4 omitió la x al plantear el conjunto solución, E9 despreció el signo menos que acompaña al $15x$ y E13 omitió términos al resolver la inecuación.

Según lo descrito anteriormente, se evidencia que las preguntas promovieron el uso y reflexión de las propiedades expuestas en la Figura 3 “*Propiedades de las inecuaciones lineales*” de la secuencia didáctica en comparación con las preguntas anteriores en las cuales se evidenció que los estudiantes no hacían uso de las propiedades, esto permitió que la mayoría de los estudiantes reconocieran la inecuación a través de sus propiedades, operaciones, además de enfatizar en el cambio del sentido de la inecuación al operar por un número negativo.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 5 (S2, T2, P5)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 49

Tipificación S2, T2, P5

Responda las preguntas 5, 6, 7 y 8 usando el siguiente enunciado:

La expresión que determina si un salario se encuentra entre \$354.651 y \$450.151 incluyendo la comisión de las tortas de zanahoria es la siguiente:

$$354.651 \leq 325.151 + 500x \leq 450.151$$

Pregunta 5: Comprueba usando la expresión anterior si las siguientes cantidades de torta permiten obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151

- a. 48 tortas
- b. 251 tortas
- c. 59 tortas
- d. 63,8 tortas

Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta dos valores que cumplen (59, 63,8) y uno o dos valores que no cumplen (48, 251). (E1, E7, E9, E10, E11, E12, E14, E15)	8	61%
2	Estudiantes que indican de manera correcta dos valores que cumplen y dos valores que no cumplen con las condiciones del enunciado e indican en lenguaje natural si los valores pertenecen o no pertenecen a la ecuación . (E2)	1	8%
3	Estudiantes que indican de manera correcta un valor que cumple y un valor que no cumple con las condiciones del enunciado al resolver la inecuación. (E4)	1	8%
4	Estudiantes que no indican los valores que cumplen y no cumplen con las condiciones de la inecuación. (E5, E8, E13)	3	23%

En la Tabla 49 se puede observar que el 69% de los estudiantes indicaron de manera acertada los valores que pertenecen y que no pertenecen al conjunto solución de la inecuación.

En las hojas de trabajo, los estudiantes E1, E2, E4, E9, E14 y E15 exponen los procedimientos que realizaron, lo que permite evidenciar que E4, E9 y E15, resolvieron la inecuación y hallaron el conjunto solución como lo muestra la Figura 25 y verificaron si las cantidades hacían parte del intervalo encontrado.

Figura 25

Respuesta de E15, P5, T2, S2

$$\begin{aligned}
 &E1. 354.651 \leq 325.151 + 500x \leq 450.151. \\
 &354.651 - 325.151 \leq 325.151 - 325.151 + 500x \leq 450.151 - 325.151. \\
 &\frac{29.500}{500} \leq \frac{500x}{500} \leq \frac{125.000}{500} \quad \bullet \text{ La } c \text{ y la } d \text{ son suficientes para estar entre } 354.651 \text{ y } 450.151. \\
 &59 \leq x \leq 250
 \end{aligned}$$

Por su parte, E1, E2 y E14 reemplazaron las cantidades de torta en la inecuación y verificaron si los resultados encontrados correspondían al dominio de la inecuación presentada en el enunciado, teniendo en cuenta las cotas de la misma.

Sin embargo, como se muestra en la Figura 26 el estudiante E2 se refiere a la inecuación como una ecuación, lo cual según Blanco et al. (2004) evidencia una dificultad relacionada con el uso indiscriminado del término ecuación al trabajar con inecuaciones.

Figura 26

Respuesta de E2, P5, T2, S2.

5. a) 349.151 X $\rightarrow$ Es menor que 354.651
 b) 450.651 X $\rightarrow$ Es mucho mayor de lo que indica el enunciado.
 c) 354.651 $\checkmark$ $\rightarrow$ Entra exactamente en la ecuación.
 d) 357.051 $\checkmark$ $\rightarrow$ pertenece a la ecuación.

De manera general, se puede decir que la mayoría de los estudiantes reconocieron el significado de la variable x como la cantidad de tortas, usando dos métodos de comprobación diferentes, al reemplazar en la inecuación las cantidades indicadas y verificar si cumplen o no con las condiciones de la inecuación; y al resolver la inecuación para hallar el conjunto solución y con este verificar las cantidades dadas.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 6 (S1, T3, P6)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 50

Tipificación S2, T2, P6

Pregunta 6: Indique si al vender la cantidad de 63,8 tortas permite obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151 y ¿por qué?

Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que la cantidad de 63,8 tortas permite obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151	Estudiantes que indican que la cantidad de tortas permite obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151 y explican el procedimiento realizado. (E2, E7)	2	15%
		Estudiantes que indican que la cantidad de tortas permite obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151 (E1, E9, E10, E11, E12, E14, E15)	7	54%
2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que la cantidad de 63,8 tortas no permite obtener el salario según las condiciones dadas.	Estudiantes que indican que 63,8 no pertenece al conjunto solución. (E4)	1	8%
		Estudiantes que indican que el número de tortas debe ser menor o igual a 59 y menor que 250. (E5)	1	8%
		Estudiantes que indican que al vender 63,8 tortas no se obtiene un salario entre \$354.651 y \$450.151. (E8)	1	8%
3	Estudiantes que no indican que la cantidad de 63,8 tortas permite o no obtener el salario según las condiciones dadas y resuelve la inecuación: $354.651 \leq 325.151 + 63,8x \leq 450.151$. (E13)		1	8%

En la Tabla 50, en la cual se registran las respuestas de los estudiantes a la P6, T2, S2 se encontró que el 69% de los estudiantes indicaron de manera correcta que la cantidad de 63,8 tortas pertenece al conjunto solución de la inecuación que representa el contexto.

Entre las justificaciones que expresan los estudiantes, E2 y E7 sobresalen al explicar el procedimiento que realizaron, el cual consistió en reemplazar y resolver la expresión $325.151 + 500x$ teniendo en cuenta la cantidad de 63,8 tortas para determinar si la cantidad permitía obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151.

Por otra parte el 24% de los estudiantes indicaron que la cantidad de tortas no hace parte del conjunto solución de la inecuación del enunciado, entre los cuales es importante resaltar la

justificación del estudiante E5, ya que se evidencia una lectura incorrecta del intervalo que representa la solución ($59 \leq x \leq 250$), que a la luz de Blanco et al. (2004) esto representa una dificultad en relación con la interpretación de los símbolos de relación de orden.

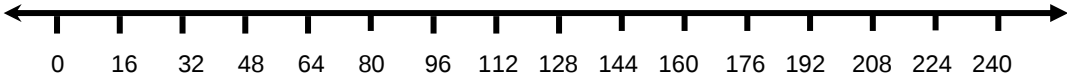
Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes reconoció que dado el contexto, el conjunto solución de la inecuación presentada incluye cantidades pertenecientes al conjunto de números racionales, lo cual evidencia que la pregunta y el contexto permitió que los estudiantes contemplaran valores dentro del conjunto numérico de los racionales y no solo de los naturales.

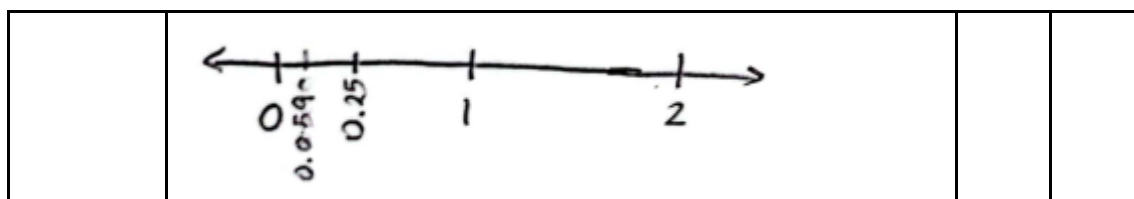
Situación 2: Tarea 2, Pregunta 7 (S2, T2, P7)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 51

Tipificación S2, T2, P7

Pregunta 7: Grafica el conjunto solución al resolver la expresión en la siguiente recta numérica. 			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que grafican de manera correcta el intervalo del conjunto solución. (E1, E2, E7) ($59 \leq x \leq 250$)	3	23%
2	Estudiantes que grafican de manera incorrecta el intervalo del conjunto solución al incluir los valores menores a 59. (E4, E5, E8)	3	23%
3	Estudiantes que grafican de manera incorrecta el intervalo al señalar solo las cotas superior y/o inferior. (59, 250) (E9, E10, E11, E13, E14, E15)	6	46%
4	Estudiantes que resuelven la inecuación con decimales y grafican de manera incorrecta el intervalo (E12)	1	8%



Conforme a la Tabla 51 se observa que el 77% de los estudiantes graficaron el intervalo de manera incorrecta. Por un lado, los estudiantes E4, E5 y E8 graficaron un conjunto solución diferente al de la inecuación planteada en el enunciado, evidenciando una interpretación incorrecta de la relación de orden respecto a la cota inferior (59), al incluir los valores menores a 59 cuando la relación indica que son mayores o iguales a este valor.

Por otro lado, los estudiantes E9, E10, E11, E13, E14 y E15 marcaron solo los extremos del conjunto solución, sin explicitar en la hoja de respuestas qué ocurre con los valores que se encuentran entre las cotas superior e inferior. En relación con lo anterior, es importante añadir que durante la plenaria algunos estudiantes manifestaron que a pesar de no marcar el interior del intervalo, al indicar las cotas en la recta numérica se sobreentiende que los valores entre estas hacían parte del conjunto solución.

Por su parte, E12 gráfico una recta en la cual señala valores decimales que no se corresponden con el conjunto solución, lo que muestra que en el proceso de resolución realizó operaciones confundiendo el punto que indica mil con la coma que separa la parte entera de la parte decimal en un número.

Finalmente, solo los estudiantes E1, E2 y E7 graficaron de manera correcta el intervalo que representa el conjunto solución al señalar las cotas y tomar los valores que se encuentran entre estas.

En conclusión, se puede notar que la mayoría de los estudiantes comprendió el rango del conjunto solución, sin embargo, es necesario aclarar la manera de graficar el conjunto solución

en la recta numérica, ya que presentaron dificultades al representar el intervalo en la recta numérica.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 8 (S2, T2, P8)

Población: 15 estudiantes.

Tabla 52

Tipificación S2, T2, P8

Pregunta 8: Explica con tus propias palabras qué representa el conjunto solución hallado.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que el conjunto solución representa la cantidad mínima y máxima de tortas a vender para obtener el salario indicado. (mayor o igual a 59 y menor a 250) (E1, E2, E4, E7, E9, E10, E11, E14, E15)	9	69%
2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que la cantidad de tortas a vender debe ser menor o igual a 59 y menor a 250. (E8, E5)	2	15%
3	Estudiantes que indican que el conjunto solución representa el resultado del proceso de la inecuación. (E12)	1	8%
4	Estudiantes que no responden. (E13)	1	8%

En las respuestas registradas en la Tabla 52 se evidencia que el 69% de los estudiantes interpretaron de manera correcta el conjunto solución encontrado según la información que el contexto les proporciona, al indicar que el intervalo representa la cantidad de tortas que se deben vender para obtener un salario que cumpla con las condiciones del enunciado.

A su vez, los estudiantes E8 y E5, quienes representan el 15% del total de estudiantes reconocieron que el conjunto solución hace referencia a la cantidad de tortas que se deben vender, sin embargo, realizaron una lectura incorrecta de las relaciones de orden, evidenciando la

dificultad mencionada anteriormente relacionada con la carencia de sentido de los símbolos de relación de orden para los estudiantes.

Se puede evidenciar que los estudiantes interpretan y le dan sentido al conjunto solución encontrado en relación con el contexto en el que se enmarca la situación.

Tarea 3: Acumular puntos y las inecuaciones como función.

María quiere invitar a sus amigos a tomar café, para esto desea encontrar un lugar que le permita acumular puntos y redimirlos en próximas compras.

Ella visitó dos cafeterías que le ofrecen las siguientes opciones:

Opción A: 2 puntos fijos en la compra realizada, más 1.5 puntos por café comprado.

Opción B: 8 puntos fijos en la compra realizada, más 0.5 puntos por café comprado.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 1a y 1b (S2, T3, P1a, P1b)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 53

Tipificación S2, T3, P1a y P1b

Pregunta 1: Teniendo en cuenta la información anterior: - Indique la función ($f(x)$) que representa los puntos que se pueden acumular con la opción A. - Indique la función ($g(x)$) que representa los puntos que se pueden acumular con la opción B.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta las dos funciones que representan la opción A ($f(x) = 2 + 1.5x$) y la opción B ($g(x) = 8 + 0.5x$). (E1, E2, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E15)	12	92%
2	Estudiantes que indican de manera correcta la función que representa la opción A ($f(x) = 2 + 1.5x$) y de manera	1	8%

	incorrecta la función que representa la opción B ($g(x) = 8 + 1.5x$) (E14)		
--	--	--	--

Como se observa en la Tabla 53 el 92% de los estudiantes indican de manera correcta las dos funciones que modelan la situación del enunciado de la tarea, lo que evidencia una correcta lectura e interpretación de los datos del enunciado, puesto que reconocen y relacionan los valores fijos y variables involucrados y le dan significado a la variable x .

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 2a (S2, T3, P2a)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 54

Tipificación S2, T3, P2a

Pregunta 2: Grafica en GeoGebra las expresiones encontradas anteriormente y responde las siguientes preguntas:															
a. Evalúa 4 valores de x en la función correspondiente y completa las siguientes tablas.															
<table><tr><td>x</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>6.5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>				x	3					$f(x)$	6.5				
x	3														
$f(x)$	6.5														
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td></td><td>10.5</td><td></td><td></td></tr></table>				x			5			$g(x)$			10.5		
x			5												
$g(x)$			10.5												
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr												
1	Estudiantes que evalúan correctamente cuatro valores de x en cada una de las funciones e indican el procedimiento realizado. (E2, E5, E6, E8, E10, E12, E13, E15)	8	61%												

2	Estudiantes que evalúan correctamente cuatro valores de x en cada una de las funciones. (E1, E7, E9, E11, E14)	5	38%
---	--	---	-----

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 2b y 2c (S2, T3, P2b y P2c)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 55

Tipificación S2, T3, P2b y P2c

Pregunta 2: b. Para $x = 2$ ¿Qué opción permite acumular más puntos? c. Para $x = 9$ ¿Qué opción permite acumular más puntos?			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que la opción B permite acumular más puntos para $x = 2$ y que la opción A permite acumular más puntos para $x = 9$ mostrando el procedimiento realizado. (E2, E6, E8, E10, E12, E15)	6	46%
2	Estudiantes que indican de manera correcta que la opción B permite acumular más puntos para $x = 2$ y que la opción A permite acumular más puntos para $x = 9$ (E7, E9, E11, E13, E14)	5	38%
3	Estudiantes que indican de manera correcta solo una de las opciones que permite acumular más puntos. (E1)	1	8%
4	Estudiantes que indican el procedimiento de manera correcta, sin establecer cuál opción permite acumular más puntos. (E5)	1	8%

La Tabla 54 correspondiente a la pregunta P2a de la S2, T3 muestra que todos los estudiantes establecieron cuatro valores para x y los evaluaron de manera correcta en las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Para el desarrollo de la tarea se hizo uso del software GeoGebra el cual les permitió a los estudiantes explorar las funciones en el plano, en dos sentidos, el primero para determinar según la gráfica los valores de y correspondientes a los valores de x escogidos, sin hacer cálculos adicionales y el segundo para comprobar si los valores de y encontrados al reemplazar x en las expresiones de las funciones coincidían con la relación presentada en la gráfica de las mismas.

Por su parte, la Tabla 55 en la cual se presentan las respuestas proporcionadas por lo estudiantes a la P2b y P2c, T3, S2, se puede observar que todos los estudiantes evaluaron los valores de x en las funciones para determinar según el caso cuál permitía acumular más puntos, de los cuales el 84% de los estudiantes indicaron de manera correcta que la opción B la cual en GeoGebra fue representada por la gráfica $g(x)$ permite acumular más puntos para $x = 2$ y que la opción A representada por la gráfica $f(x)$ permite acumular más puntos para $x = 9$. Del total de estudiantes, el 46% evaluaron los valores $x = 2$ y $x = 9$ en cada una de las funciones y determinaron cuál opción permitía acumular más puntos en cada caso según los resultados obtenidos.

Estas preguntas permitieron una reflexión acerca de la interpretación que le dan los estudiantes a los ejes del plano cartesiano relacionados con la función encontrada y representada dentro de un contexto, que en este caso estaba relacionado con la acumulación de puntos. Lo anterior constituía un paso importante para la posterior interpretación de las inecuaciones lineales a partir de su función en el plano cartesiano.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 3a y 3b (S2, T3, P3a y P3b)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 56

Tipificación S2, T3, P3a y P3b

Pregunta 3: Dentro del contexto: a. Indica qué representan los valores de x . b. Indica qué representan los valores de y .			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que los valores de x representan la cantidad de cafés y que los valores de y representan los puntos acumulados. (E1, E2, E5, E6, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	11	85%
2	Estudiantes que indican de manera correcta que los valores de x representan la cantidad de cafés y de manera incorrecta que los valores de y representan los puntos por café. (E7, E9)	2	15%

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 4 (S2, T3, P4)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 57

Tipificación S2, T3, P4

Pregunta 4: Ubica el punto de intersección de las dos rectas y explica por qué crees que se cortan en ese punto.				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta las coordenadas del punto de intersección (6,11).	Estudiantes que explican que al vender seis cafés la opción A y la opción B acumulan los mismos puntos. (E1, E6, E9, E13, E14, E15)	6	46%
		Estudiantes que no explican que representa el punto de intersección. (E2)	1	8%
2	Estudiantes que indican de manera correcta solo una de las coordenadas del punto de intersección.	Estudiantes que no explican. (E12)	1	8%
3	Estudiantes que omiten indicar las coordenadas del punto de intersección.	Estudiantes que explican que al vender seis cafés se obtiene el mismo resultado. (E5)	1	8%
		Estudiantes que explican indicando otras coordenadas que permiten acumular los mismos puntos, sin tener en cuenta el punto de intersección. (E7, E11)	2	15%
		Estudiantes que explican que las rectas se cortan al no ser paralelas. (E10)	1	8%
4	Estudiantes que no responden. (E8)		1	8%

Conforme se muestra en la Tabla 56 correspondiente a las respuestas de la pregunta 3a y 3b de la S2, T3 el 85% de los estudiantes indica de manera acertada lo que representan dentro del contexto las variables x e y , identificando que x representa la cantidad de cafés comprados e y la totalidad de los puntos acumulados, lo que permite ver que los estudiantes interpretaron el significado de las variables dentro de un contexto cotidiano.

Por su parte, la Tabla 57 correspondiente a las respuestas de la pregunta 4 de la S2, T3 muestra que más de la mitad de los estudiantes realizan las dos consignas del enunciado al ubicar

las coordenadas del punto de intersección y explicar qué representa éste punto dentro del contexto, incluyendo al estudiante E5, que a pesar de no dejar de manera explícita las coordenadas del punto de intersección, reconoció que la relación involucra a $x = 6$ ya que al evaluar este valor en ambas funciones se obtiene el mismo resultado.

Por otra parte, se pudo evidenciar que los estudiantes E7 y E11 asociaron el punto de intersección con aquellos valores que al ser evaluados en las funciones permiten obtener la misma cantidad de puntos, es así como encontraron que para $f(x)$ cuando $x = 7$ y para $g(x)$ cuando $x = 9$ les permitía acumular la misma cantidad de puntos (12,5) y este representaba el punto de intersección. Lo anterior refleja que los estudiantes no hicieron uso de la gráfica, pues los valores descritos no corresponden a las coordenadas del punto de intersección.

Estos resultados permiten ver que de manera general la mayoría de los estudiantes identifican que el punto de intersección representa que las dos funciones tienen el mismo valor de y , lo que ilustra una correcta lectura de las gráficas, además de la resignificación e interpretación de los ejes acorde al contexto en el que se enmarca.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 5a y 5b (S2, T3, P5a y P5b)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 58

Tipificación S2, T3, P5a y P5b

Pregunta 5: Indica que puedes deducir al comparar las dos gráficas: a. $f(x)$ y $g(x)$ antes del punto de intersección. b. $f(x)$ y $g(x)$ después del punto de intersección.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr

1	Estudiantes que comparan las rectas y deducen de manera correcta que antes del punto de intersección los valores de $f(x)$ permiten ganar menos puntos que $g(x)$ y que después del punto de intersección los valores de $f(x)$ permite ganar más puntos que $g(x)$. (E1, E2, E5, E6, E9, E13, E14)	7	54%
2	Estudiantes que comparan las rectas y deducen que a corto plazo la opción B permite tener más puntos y a largo plazo la opción A permite obtener más puntos. (E7, E11)	2	15%
3	Estudiantes que comparan las rectas y deducen que antes del punto de intersección $f(x)$ está por debajo de $g(x)$ y después del punto de intersección $f(x)$ está por encima de $g(x)$. (E12)	1	8%
4	Estudiantes que comparan las rectas y deducen de manera incorrecta que antes del punto de intersección $f(x)$ permite acumular más puntos que $g(x)$ y que después del punto de intersección $g(x)$ permite acumular más puntos que $f(x)$. (E15)	1	8%
5	Estudiantes que comparan las rectas y deducen que solo se cortan en un punto. (E10)	1	8%
6	Estudiantes que no responden. (E8)	1	8%

La Tabla 58 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 de la S2, T3, muestra que 69% de los estudiantes compararon las gráficas, reconocieron e indicaron en lenguaje natural cuál función permitía acumular más puntos antes y después del punto de intersección, teniendo como referencia la función $f(x)$. En este sentido, los estudiantes indicaron que antes del punto de intersección los valores de $f(x)$ permitían ganar menos puntos que $g(x)$ y que después del punto de intersección los valores de $f(x)$ permitía ganar más puntos que $g(x)$.

En particular, los estudiantes E7 y E11 compararon las funciones y expresaron la acumulación de puntos en términos de corto o largo “plazo” haciendo referencia al conjunto de valores del eje x en los cuales de 0 a 6, es decir a “corto plazo” (según los estudiantes), la opción B permitía acumular más puntos, mientras que de 6 en adelante a “largo plazo” la opción A permitía obtener más puntos.

Además, se pudo observar que los estudiantes E10 y E12 realizaron una comparación de las gráficas en la cual reconocieron características de estas por fuera del contexto. E12 indica la posición de la función $f(x)$ respecto a la posición de $g(x)$ en el plano, es decir, si está por encima o por debajo, mientras que E10 se centra en el punto de corte de las rectas.

Lo anterior evidencia que la mayoría de los estudiantes reconocieron que dependiendo de la ubicación de la recta de una función respecto a la otra se obtenían más o menos puntos lo que evidencia que los estudiantes interpretaron una inecuación lineal a partir de su función en el plano al realizar comparaciones y establecer relaciones teniendo en cuenta la gráfica proporcionada.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 6 y 7 (S2, T3, P6 y P7)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 59

Tipificación S2, T3, P6 y P7

Pregunta 6: Indica en qué valor la opción A y B permiten acumular la misma cantidad de puntos. Pregunta 7: Indica entre qué valores la opción A permite acumular más puntos que la opción B.			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que $x = 6$ permite acumular la misma cantidad de puntos en las dos opciones e indican que cuando $x > 6$ la opción A permite acumular más puntos que la opción B. (E2)	1	8%
2	Estudiantes que indican de manera correcta que $x = 6$ permite acumular la misma cantidad de puntos en las dos opciones e indican que $(6, \infty)$ es el intervalo en el cual la opción A permite acumular más puntos que la opción B. (E5, E6, E12, E13)	4	30%

3	Estudiantes que indican de manera correcta que $x = 6$ permite acumular la misma cantidad de puntos en las dos opciones e indican que $(6,1, \infty)$ es el intervalo en el cual la opción A permite acumular más puntos que la opción B. (E1, E9, E14)	3	23%
4	Estudiantes que indican de manera correcta que $x = 6$ permite acumular la misma cantidad de puntos en las dos opciones e indican de manera incorrecta un intervalo en el cual la opción A permite acumular más puntos que la opción B. (E10, E15)	2	15%
5	Estudiantes que indican de manera incorrecta dos valores de x para los cuales las opciones acumulan la misma cantidad de puntos e indican de manera incorrecta que a partir de 8 la opción A permite acumular más puntos que la opción B. (E7, E11)	2	15%
6	Estudiantes que no responden. (E8)	1	8%

Conforme a lo presentado en la Tabla 59 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 6 de la S2, T3 se observa que el 61% de los estudiantes identificaron e indicaron de manera acertada que cuando $x = 6$, la opción A y la opción B permitían acumular la misma cantidad de puntos e indican de manera correcta que el conjunto de valores que hace más rentable a la opción A son aquellos que están después de $x = 6$. Entre estos estudiantes sobresale E2, ya que estableció la desigualdad $x > 6$, dando lugar a la notación que se ha venido trabajando con la secuencia didáctica diseñada.

Es importante resaltar que los estudiantes E1, E9 y E14 establecieron que el intervalo en el cual la opción A permite acumular más puntos que la opción B es $(6,1, \infty)$, lo que permite ver que los estudiantes reconocieron que el 6 no hacía parte del intervalo que hace que la opción A sea más rentable, por lo cual tomaron un intervalo que inicia desde 6,1, sin embargo, escribieron la notación del intervalo de manera incorrecta al no incluir al 6,1 como parte del conjunto solución de los valores que responden a la pregunta del enunciado.

De manera general, la mayoría de los estudiantes hicieron uso de la representación en el plano y la recta numérica para validar el conjunto solución de una inecuación lineal, es decir, que en este caso particular reconocieron implícitamente que la solución de una inecuación se correspondía con la gráfica de la función que representaba la opción que permitía acumular más puntos.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 8 (S2, T3, P8)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 60

Tipificación S2, T3, P8

Pregunta 8: Determina los valores de x para los cuales $g(x) > f(x)$. Justifica tu respuesta.				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que en el intervalo $(-\infty, 6)$ la opción B permite acumular más puntos.	Estudiantes que justifican indicando que antes del punto de intersección la opción permite obtener más puntos. (E5)	1	8%
2	Estudiantes que indican que de 0 a 6 la opción B permite acumular más puntos.	Estudiantes que no justifican. (E6, E12, E13)	3	23%
3	Estudiantes que indican que de 1 a 6 la opción B permite acumular más puntos.	Estudiantes que no justifican. (E2, E7, E10, E11)	4	30%
4	Estudiantes que indican que a partir de $x = 1$ la opción B permite acumular más puntos.	Estudiantes que justifican indicando que con la opción B se pueden ganar más puntos. (E14)	1	8%
		Estudiantes que justifican indicando que con la opción B se pueden ganar más vasos. (E9)	1	8%
5	Estudiantes que indican unos valores particulares para $f(x)$ y	Estudiantes que indican que $f(x)$ no supera los puntos por compra de $g(x)$	1	8%

	$g(x)$.	en los valores evaluados. (E15)		
		Estudiantes que no justifican. (E1)	1	8%
6	Estudiantes que no responden. (E8)		1	8%

Desde lo presentado en la Tabla 60 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 8 de la S2, T3, el 85% de los estudiantes reconocieron que dado el contexto, los valores para los cuales $g(x) > f(x)$ se ubican en los números positivos en la recta numérica. Por su parte, los estudiantes E1 y E15 establecieron unos valores particulares que cumplieran con la condición $g(x) > f(x)$, mientras que E2, E6, E7, E10, E11, E12 y E13 identificaron un rango de valores que no sobrepasan, ni incluyen el valor $x = 6$, ya que este es el valor que hace que las dos opciones acumulen la misma cantidad de puntos. De los estudiantes anteriormente mencionados, sobresalen E6, E12 y E13 al reconocer que la opción B permite acumular más puntos a partir de $x = 0$.

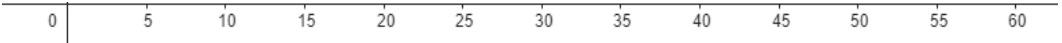
Por otro lado, E5 generalizó su respuesta al establecer el intervalo $(-\infty, 6)$, lo que evidencia que su respuesta está desligada del contexto al incluir los números negativos como parte de los valores que hacen que $g(x) > f(x)$.

De manera general, los estudiantes hicieron uso de la representación en el plano y la recta numérica para validar el conjunto solución cuando $g(x) > f(x)$. Además, se evidenció que las respuestas de los estudiantes estaban condicionadas al contexto que se trabajó a lo largo de la situación 2 de la secuencia didáctica.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 9 (S2, T3, P9)

Población: 13 estudiantes.

Tabla 61*Tipificación S2, T3, P9*

Pregunta 9: Según Ana Maria el intervalo que representa los valores tal que la opción A permite acumular más puntos que la opción B es el siguiente: $I = (-2, 14)$ a. ¿Estás de acuerdo con Ana Maria? si no estás de acuerdo escribe el intervalo correcto. b. Grafique el intervalo en la recta numérica. 			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican no estar de acuerdo con el intervalo del enunciado, corrigen indicando de manera correcta el intervalo $(6, \infty)$ y grafican de manera correcta el intervalo en la recta numérica. (E2, E5, E7)	3	23%
2	Estudiantes que indican no estar de acuerdo con el intervalo del enunciado, corrigen indicando de manera correcta el intervalo $(6, \infty)$ y omiten graficar. (E11, E12)	2	15%
3	Estudiantes que indican no estar de acuerdo con el intervalo del enunciado, corrigen indicando y graficando un intervalo incorrecto. (E1, E6, E9, E10, E13, E14, E15)	7	54%
4	Estudiantes que no responden. (E8)	1	8%

Según lo expuesto en la Tabla 61 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 9 de la S2, T3, el 38% de los estudiantes indicaron que el intervalo escrito en el enunciado es incorrecto y establecieron de manera acertada el intervalo que corresponde a las condiciones del enunciado. De estos estudiantes solo E2, E5 y E7 graficaron de manera correcta el intervalo $(6, \infty)$ en la recta numérica.

Por otro lado, se reporta que la mayoría de los estudiantes, el 54%, a pesar de indicar que el intervalo del enunciado es incorrecto, reconocieron que los valores mayores a $x = 6$ son aquellos con los cuales la opción A permite acumular más puntos que la opción B, sin embargo E6, E9 E13 y E14 no establecieron el intervalo correspondiente y en su lugar indicaron y ubicaron solo la cota inferior en la recta numérica, mientras que E1, E10 y E15 establecieron intervalos diferentes a $(6, \infty)$ en los cuales la opción A permite acumular más puntos que la opción B.

De manera general se evidenció que los estudiantes reconocieron cuando el intervalo corresponde al conjunto solución de una inecuación lineal, sin embargo no lograron establecer la representación gráfica del intervalo que representa todos los valores que hacen a la expresión verdadera a pesar de que esta actividad se trabajó en tareas anteriores.

Tarea 4: La inecuación lineal en las matemáticas.

Situación 2: Tarea 4, Pregunta 1 (S2, T4, P1)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 62

Tipificación S2, T4, P1

Pregunta 1: Grafique las siguientes inecuaciones en Geogebra y determine para cuáles valores de x son verdaderas. a. $4x - 3 > 5$ b. $3x - 15 > 5x - 2 - 7$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta los intervalos añadiendo la resolución de la inecuación. (E7, E11, E15) a. $(2, \infty)$	3	21%

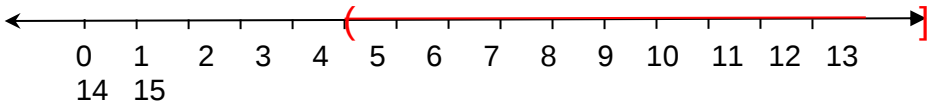
	b. $(-\infty, -3)$		
2	Estudiantes que establecen de manera correcta los intervalos. (E2, E5, E6, E8, E10, E13) a. $(2, \infty)$ b. $(-\infty, -3)$	6	43%
3	Estudiantes que establecen de manera correcta solo un intervalo. (E1, E9, E12, E14) a. $(2, \infty)$	4	29%
4	Estudiantes que establecen de manera incorrecta los dos intervalos. (E4)	1	7%

Situación 2: Tarea 4, Pregunta 2 (S2, T4, P2)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 63

Tipificación S2, T4, P2

Pregunta 2: Indica la inecuación que tiene como solución el intervalo señalado en la figura  a. $45 > 5x + 20 > -55$ b. $12 < 5x - 13 \leq 62$ c. $16 < 3x - 3 < 3$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que establecen de manera correcta que la inecuación $12 < 5x - 13 \leq 62$ tiene como solución el intervalo señalado. (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E15)	14	100%

En la Tabla 62 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 de la S2, T4, se puede observar que el 64% de los estudiantes respondieron de manera acertada los

intervalos correspondientes al conjunto solución de cada una de las inecuaciones del enunciado de la pregunta, entre los cuales se destacan los estudiantes E7, E11 y E15 al añadir un procedimiento que deja ver de manera explícita que con las herramientas brindadas a lo largo de la secuencia los estudiantes resolvieron las inecuaciones lineales las cuales se enmarcan en un contexto netamente matemático.

Por su parte, el 29% de los estudiantes establecieron de manera correcta el intervalo $(2, \infty)$ correspondiente al conjunto solución de la inecuación $4x - 3 > 5$, sin embargo, indicaron de manera incorrecta el intervalo $(-3, -\infty)$ como el conjunto solución de $3x - 15 > 5x - 2 - 7$, dejando en evidencia el reconocimiento de las cotas del intervalo solución pero no la manera de escribir la notación del intervalo de manera adecuada.

Además, en la Tabla 63 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 de la S2, T4, el 100% de los estudiantes indicó de manera correcta la inecuación cuyo conjunto solución se encuentra graficado en la recta numérica del enunciado de la pregunta.

Es importante mencionar que en la plenaria se pudo constatar que para responder a las preguntas los estudiantes hicieron uso del software GeoGebra el cual les permitió visualizar gráficamente las inecuaciones involucradas, lo que evidencia que el recurso favoreció el reconocimiento de la representación gráfica del conjunto solución asociado a las inecuaciones presentadas como alternativa al método de resolución analítico.

Situación 2: Tarea 4, Pregunta 3 (S2, T4, P3)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 64

Tipificación S2, T4, P3

Pregunta 3: El intervalo $(-\infty, 2)$ NO es solución de la inecuación: a. $2(7x - 4) < 10x$ b. $8 < -4(-5 + x) < 36$ c. $-17 > 4x - 25$			
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de manera correcta que el intervalo no es solución de la inecuación $8 < -4(-5 + x) < 36$. (E1, E4, E6, E7, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15)	11	79%
2	Estudiantes que establecen de manera incorrecta que el intervalo no es solución de la inecuación $2(7x - 4) < 10x$. (E2, E5, E8)	3	21%

Conforme a lo que se presenta en la Tabla 64 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 3 de la S2, T4, se puede observar que el 79% de los estudiantes establecieron de manera correcta que el intervalo $(-\infty, 2)$ no corresponde al conjunto solución de la inecuación $8 < -4(-5 + x) < 36$.

A su vez, el 21% de los estudiantes respondió de manera incorrecta, al señalar que la inecuación que no tenía como conjunto solución el intervalo $(-\infty, 2)$ es $2(7x - 4) < 10x$, lo que muestra una lectura superficial del enunciado.

En conclusión, se encontró que al igual que en el desarrollo de las preguntas anteriores el software GeoGebra favoreció la solución de la pregunta, ya que la mayoría de los estudiantes hicieron uso de este recurso para graficar el conjunto solución de las tres inecuaciones presentadas y verificar a cuál de estas no correspondía el intervalo $(-\infty, 2)$.

Situación 2: Tarea 4, Pregunta 4 (S2, T4, P4)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 65

Tipificación S2, T4, P4

Pregunta 4: Determina teniendo en cuenta la siguiente gráfica: a. Cuando $f(x)$ es mayor que $g(x)$ y por qué. b. Cuando $f(x)$ es menor que $g(x)$ y por qué.				
Tipos de respuesta	Descripción	Justificación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican de manera correcta que en el intervalo $(-\infty, 10)$, $f(x)$ es mayor que $g(x)$ y en el intervalo $(10, \infty)$, $f(x)$ es menor que $g(x)$.	Estudiantes que justifican que antes del punto de intersección $f(x)$ es mayor que $g(x)$ y después del punto de intersección $f(x)$ es menor que $g(x)$. (E2, E5, E8, E11)	4	29%
		Estudiantes que no justifican. (E10, E12, E14)	3	21%
2	Estudiantes que indican de manera correcta en lenguaje natural que antes del 10 $f(x)$ es mayor que $g(x)$ y después del 10 $f(x)$ es menor que $g(x)$.	Estudiantes que justifican teniendo en cuenta los valores del eje x y añaden un procedimiento. (E1)	1	7%
		Estudiantes que justifican teniendo en cuenta los valores del eje y. (E15)	1	7%
		Estudiantes que no justifican. (E9)	1	7%
3	Estudiantes que indican de manera incorrecta uno o dos intervalos al incluir una de las cotas.	Estudiantes que no justifican. (E4, E6, E7, E13)	4	29%

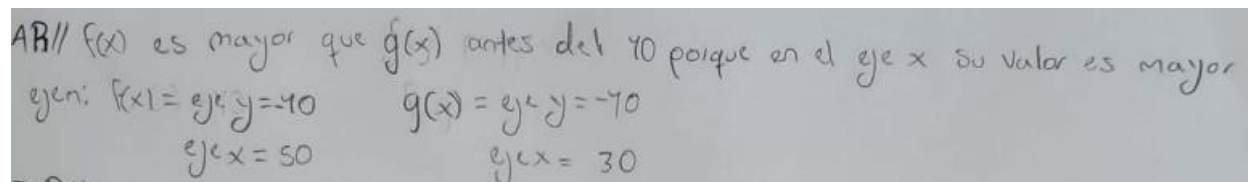
De acuerdo con los resultados de la Tabla 65 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 4 de la S2, T4, se observa que el 71% indica de manera correcta que

para los valores de x menores a 10 la función $f(x)$ es mayor que la función $g(x)$ y que para los valores mayores a 10 la función $f(x)$ es menor que la función $g(x)$, de estos, E2, E5, E8, E10, E11, E12 y E14 establecen la notación del intervalo correspondiente, de los cuales sobresalen E2, E5, E8 y E11 quienes justifican teniendo en cuenta el punto de intersección, lo que deja ver que reconocen este punto como un corte importante en el momento de analizar la gráfica de dos funciones que hacen parte de una inecuación.

De los estudiantes restantes que pertenecen al porcentaje anterior, se destacan E1 y E15 quienes indican que al momento de determinar cuál función era mayor que otra tuvieron en cuenta los valores de los dos ejes. Por ejemplo, E1, como se muestra en la Figura 27 determinó que $f(x)$ es mayor que $g(x)$ al escoger un solo valor del eje y , y encontrar el valor de x correspondiente en cada función, para luego comparar este resultado y concluir que una función es mayor que otra cuando su valor en el eje x es mayor.

Figura 27

Respuesta de E1, P4, T4, S2



AB// $f(x)$ es mayor que $g(x)$ antes del 10 porque en el eje x su valor es mayor
 ejen: $f(x) = y, y = -10$ $g(x) = y, y = -10$
 $y < x = 50$ $y < x = 30$

Finalmente, el 29% restante de los estudiantes reconocieron los valores que hacen parte de los intervalos; sin embargo, tuvieron dificultades para establecer la notación del intervalo al incluir los extremos de un intervalo abierto.

Como conclusión, los estudiantes realizaron una correcta lectura del enunciado y de la gráfica al reconocer cuándo una función es mayor que otra, lo que evidencia que el desarrollo de

la secuencia posibilitó la validación de los conocimientos en relación con las inecuaciones lineales y su interpretación en el plano.

Situación 2: Tarea 4, Pregunta 5 (S2, T4, P5)

Población: 14 estudiantes.

Tabla 66

Tipificación S2, T4, P5

Pregunta 5: Indique con una línea qué enunciado corresponde a la expresión algebraica.			
	La suma de dos números enteros consecutivos es menor a 25	$3x < 76$	
	La tercera parte de un numero aumentada en 5 es mayor que la mitad del número.	$x + (x + 1) < 25$	
	La diferencia del triple de un número y la mitad del número es menor que 24.	$\frac{x}{3} + 5 > \frac{x}{2}$	
	El perímetro de un rectángulo equilátero con lado x es menor que 76.	$3x - \frac{x}{2} < 24$	
Tipos de respuesta	Descripción	Fa	Fr
Única respuesta	Estudiantes que establecen de manera correcta los enunciados con su correspondiente inecuación lineal.	14	100%

Según la Tabla 66 correspondiente a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 de la S2, T4, de manera general se puede ver que los estudiantes realizaron una correcta lectura e

interpretación de enunciados al reconocer las cantidades y las relaciones que existen entre estas para establecer la inecuación asociada.

Lo que evidencia que la secuencia aportó elementos esenciales para la interpretación de los enunciados en lenguaje natural y la formulación de modelos matemáticos que den cuenta de los datos presentados, en expresiones algebraicas como las inecuaciones lineales.

De manera general, las respuestas de los estudiantes a las preguntas de las tareas de la situación 2 dejan ver lo siguiente:

- Las respuestas a las tareas de la situación 2 muestran que los estudiantes lograron relacionar valores del enunciado, para establecer expresiones algebraicas que modelan situaciones particulares, al distinguir y relacionar cantidades fijas, cantidades variables y darle significado a la variable x .
- Además, las preguntas permitieron que los estudiantes reconocieran y trabajaran con los elementos, las propiedades y las relaciones de las inecuaciones lineales, en diferentes sistemas de representación, en tanto lograron identificar los pasos para resolver una inecuación e interpretarlos para replicarlos en otras situaciones similares que poco a poco contribuyeron a afianzar las propiedades de las inecuaciones lineales.
- Por otra parte, GeoGebra posibilitó la visualización de las inecuaciones en el plano, lo que permitió a los estudiantes reconocer la inecuación como la relación entre dos funciones, al establecer comparaciones entre estas e interpretar y validar el conjunto solución de una inecuación como la proyección de puntos en el eje x .
- Algunas dificultades abordadas en esta situación correspondieron a la carencia de significado de la variable, además de la comprensión e interpretación del conjunto solución. Estas se abordaron dotando de un contexto a la situación que permitió que los

estudiantes atribuyeran características específicas a la variable, al afirmar que los valores del conjunto solución se corresponden con el rango de valores que puede tomar la variable. Además, a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica se evidenció que los estudiantes construyeron expresiones que representaban la información de un enunciado en lenguaje natural, lo cual fue registrado como una dificultad anteriormente.

Finalmente, se evidencia que las tareas de la situación 2 les permitió a los estudiantes reconocer propiedades para la resolución de una inecuación, ya que aplicaron correctamente propiedades como el cambio de sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir con números negativos y desarrollaron estrategias para validar el conjunto solución, como verificar en su representación en el plano y reemplazar el valor de x en la expresión, las cuales fueron aplicadas inicialmente en las preguntas que involucraban contextos cotidianos y posteriormente en las preguntas diseñadas en un contexto matemático. Lo anterior sugiere que la secuencia permitió que los estudiantes alcanzaran el nivel general de matematización, al lograr el paso de estrategias informales como la comparación cualitativa de magnitudes, hasta establecer y resolver inecuaciones haciendo uso de propiedades y definiciones propias del área de matemáticas.

Es importante mencionar que al final de la secuencia se realizaron dos preguntas a los estudiantes enfocadas en conocer los elementos que ellos consideraron necesarios al resolver las inecuaciones e identificar las dificultades en el trabajo con las mismas. Con las respuestas a estas preguntas se identificó que los estudiantes consideran que algunos aspectos necesarios para la resolución de las inecuaciones son:

- Las propiedades de las inecuaciones que incluyen el cambio de sentido de los símbolos al multiplicar o dividir por un número negativo.

- Matemáticas básicas que incluyen la aritmética, las operaciones y su jerarquía.
- Las representaciones que incluyen la representación en la recta numérica y en el plano.
- Además, algunos estudiantes resaltaron la importancia de hacer uso de herramientas como GeoGebra para el estudio de las inecuaciones.

Por otra parte, algunas dificultades expresadas por los estudiantes fueron:

- La interpretación de los enunciados al momento de determinar la expresión algebraica asociada y la interpretación del conjunto solución según el contexto.
- La resolución de las inecuaciones, ya que para ellos representa un procedimiento largo y requiere tener en cuenta las propiedades propias de la aritmética y el álgebra, como la propiedad uniforme y la propiedad que indica cuando el sentido del símbolo de una inecuación cambia.

Capítulo 4: Conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas

En este apartado se presentan las conclusiones luego del desarrollo del trabajo, teniendo en cuenta los objetivos específicos, el objetivo general y reflexiones que se dieron en la práctica investigativa.

4.1 Conclusiones generales

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, las conclusiones se organizan de acuerdo a los objetivos específicos y el objetivo general de la siguiente manera:

Con relación al primer objetivo específico, el cual consistió en fundamentar desde referentes teóricos e investigaciones las perspectivas curricular, didáctica y matemática asociadas a la problemática de investigación, se puede concluir que:

- Desde la perspectiva curricular se definió el contenido matemático desde el pensamiento variacional, ya que permite ver las inecuaciones como relaciones entre expresiones algebraicas y se determinó un estándar y un DBA en el grado undécimo que respondiera al objetivo de este trabajo. Además, se escogió el proceso de modelación como puente entre la realidad y las matemáticas, y se establecieron los contextos cotidianos y matemáticos, puesto que generan situaciones problema asociadas a la variación, permitiendo al estudiante hacer predicciones y tomar decisiones.
- Desde la perspectiva didáctica, se identificaron dificultades como: la no comprensión del conjunto solución de una inecuación, la carencia de contenido semántico de las inecuaciones, la no claridad en el uso e interpretación de los símbolos de relación de orden y alternativas de trabajo como: incluir contextos cotidianos en las situaciones

problema, retomar conceptos previos, usar diferentes sistemas de representación, que fueron clave para el diseño de la secuencia.

- Además, desde la perspectiva matemática se consideraron libros de texto que permitieron definir las inecuaciones, sus propiedades y sus representaciones.

Lo anterior permitió tener perspectiva amplia y claridad sobre algunos aspectos a tener en cuenta para el diseño de las tareas.

Con relación al segundo objetivo específico, el cual consistía en articular en una secuencia didáctica los procesos de modelación matemática y los fundamentos teóricos presentados, se puede afirmar que:

- Se diseñó una secuencia didáctica bajo dos situaciones que involucran contextos cotidianos, como el nivel de glucosa en sangre, la comisión por ventas en una cafetería y los puntos acumulados por compras de bebidas de café, ya que desde los trabajos de investigación incluir este tipo de contextos es una alternativa de trabajo para darle sentido a las inecuaciones en la realidad, además, se añadió un contexto matemático en las últimas tareas de la secuencia pensado para validar los conocimientos adquiridos de los estudiantes.
- También, atendiendo la recomendación de la literatura, se hizo uso de distintos sistemas de representación en el trabajo con las inecuaciones, como, el simbólico, gráfico y el lenguaje natural, ya que promueven procesos de generalización y reconocimiento de propiedades del concepto.
- Por su parte, los niveles de matematización de la Educación Matemática Realista (EMR) sirvieron como eje central para la estructura y secuenciación de cada una de las tareas de la secuencia didáctica, teniendo en cuenta esto, se consideró que para el desarrollo de la

misma era necesario que los estudiantes partieran de sus conocimientos previos en relación con el concepto de desigualdad, desarrollaran estrategias de resolución a medida que se avanzaba en las tareas y llegaran a formalizar sus matemáticas, involucrando situaciones imaginables y procesos de modelación.

Con relación al tercer objetivo específico, el cual buscaba caracterizar algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes de grado undécimo al implementar la secuencia didáctica diseñada que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real, se puede afirmar que:

- Al finalizar la secuencia didáctica se logra evidenciar que los estudiantes pasan de un nivel situacional a un nivel general, ya que inicialmente ellos realizaron las tareas con sus conocimientos informales, realizando comparaciones cualitativas y dando explicaciones en lenguaje natural, luego, realizaron comparaciones por medio de desigualdades numéricas lo que promovió el uso de los símbolos de relación de orden para la construcción de modelos iniciales que posteriormente se generalizaron junto con los conocimientos anteriores llegando a establecer inecuaciones simultáneas que requerían el reconociendo de las cantidades y relaciones de orden involucradas entre estas.
- En relación con el desarrollo de aspectos del pensamiento variacional, se logra que los estudiantes reconozcan aquellas cantidades que varían y permanecen constantes dentro de los enunciados de las tareas, tanto en los contextos cotidianos como en el contexto netamente matemático.
- También, los estudiantes interpretaron las variables dentro de los contextos, lo que llevó a darle sentido a la variable y a la inecuación, ya que las situaciones planteadas se enmarcaban en contextos imaginables para los estudiantes.

- Por otra parte, se identificó que los estudiantes realizaban la conversión de un sistema de representación a otro, reconociendo las cantidades que varían y permanecen constantes dentro de los datos del enunciado, como por ejemplo, pasar de los enunciados en lenguaje natural a establecer expresiones algebraicas como las inecuaciones lineales que representaran la situación planteada y con las cuales establecían modelos susceptibles a ser generalizados dentro de un contexto matemático.
- Además, se identificaron dificultades al presentar la resolución de una inecuación haciendo uso de la propiedad uniforme, ya que los estudiantes hasta el momento habían trabajado la resolución de inecuaciones con estrategias como, “pasar al otro lado” para despejar la x . Además, se identificó que en ocasiones, algunos estudiantes establecían de manera incorrecta la relación entre los términos de una inecuación, al pasar el enunciado en lenguaje natural de manera literal en su representación como inecuación. Por otra parte, al representar en la recta numérica el conjunto solución de las inecuaciones marcaban solo las cotas de los intervalos, omitiendo señalar los valores en el interior. Por último, se identificó que, en el desarrollo de la tarea 2 de la situación 2 de la secuencia, los estudiantes sumaban términos que no eran semejantes, como sumar 2 unidades a $5x$.
- Finalmente, es importante mencionar que involucrar tecnología con la herramienta GeoGebra ayudó a que los estudiantes visualizaran las inecuaciones como la relación entre dos funciones en el plano e identificaran el conjunto solución como la proyección de puntos en el eje x , además de reconocer la relación entre el eje x y el eje y , lo que permitió a su vez trabajar las relaciones entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para determinar las relaciones de orden entre funciones. Lo anterior deja ver que el trabajo con inecuaciones en el plano

permitió dar un enfoque funcional y abordar un tema que se desarrollará más adelante en el cálculo.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se puede afirmar que se logra el objetivo general, el cual consistía en favorecer algunos aspectos del pensamiento variacional en estudiantes de grado undécimo a través de la implementación de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real, puesto que del pensamiento variacional se reconoce la variable, el significado de los símbolos de relación de orden, se identifican los valores que varían y aquellos que permanecen constantes en las situaciones presentadas, las relaciones funcionales presentes en las inecuaciones lineales, y se determinan estrategias para hallar, graficar e interpretar el conjunto solución de las inecuaciones.

4.2 Algunas reflexiones

A continuación, se presentan algunas reflexiones en torno a la implementación de una secuencia didáctica que involucra el proceso de modelación con inecuaciones lineales con una variable real.

- Inicialmente, es importante mencionar que las dificultades presentadas a lo largo del desarrollo de la secuencia fueron abordadas en la socialización realizada al finalizar cada tarea, lo que contribuyó a reflexionar colectivamente sobre lo realizado.
- Por otra parte, las inecuaciones son un tema que no tiene mucha fenomenología que permite asociarse con un contexto particular, por esto, se espera que este trabajo aporte a los profesores en ejercicio y en formación contextos en los cuales puedan desarrollar actividades para el trabajo con dicho concepto.

- Además, las inecuaciones, como se presenta en los documentos curriculares y como se evidenció en la implementación, son fundamentales para articular lo numérico con lo variacional, pues posibilita elaborar estrategias y reconocer elementos que permiten conectar el estudio y análisis de fenómenos de cambio y variación al reconocer, interpretar y establecer las relaciones entre los valores dentro de un contexto.
- También se pudo notar que los contextos con los cuales se diseñó la secuencia didáctica fueron significativos para los estudiantes, ya que generó discusiones en torno a experiencias previas que ellos habían tenido y permitió abordar el concepto de una manera cercana a sus conocimientos y su realidad.
- A su vez se identificó que los contextos trabajados pueden ser articulados con otras áreas, promoviendo la interdisciplinariedad y la reflexión en torno a temas como la salud y el bienestar. En este sentido, los contextos aportan a la formación ciudadana e integral de los estudiantes.
- Por otra parte, para futuros proyectos se sugiere que, a través del desarrollo y análisis del desarrollo de la secuencia, realizar un seguimiento al proceso de evaluación formativa de cada uno de los estudiantes, ya que esta permite tener evidencias del trabajo progresivo que realiza cada uno de ellos.
- Finalmente, desde la perspectiva personal de las investigadoras se logra adquirir un ejercicio investigativo, en tanto que este trabajo permitió desarrollar habilidades de recolección, sistematización e interpretación de datos a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica.

Referencias

- Balanta Gómez, D y Garcés Carabalí, Y. (2019). *Enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales con una incógnita real : un análisis a la propuesta de enseñanza presentada en dos textos escolares de la educación colombiana*.
- Balcázar Nava, P., González-Arratia López-Fuentes, N. I., Gurrola Peña, G. M., & Moysén Chimal, A. (2013). Investigación cualitativa.
<http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4641>
- Borello, Mariangela; Lezama, Javier (2011). *Hacia una resignación de las desigualdades e inecuaciones a partir de las prácticas del profesor*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 921-929). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
<http://funes.uniandes.edu.co/5016/1/BorelloHaciaALME2011.pdf>
- Blanco, L., Garrote, M. & Hidalgo, J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 46, 37-44.
<http://funes.uniandes.edu.co/11033/1/Heredia2014Las.pdf>
- Bressan, A., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *educación*, 63, 1-11.
- Bucurú Vasco, J. (2019). *MOOC para la enseñanza de desigualdades e inecuaciones en alumnos de once grado de la institución educativa Nueva granada del municipio de Dosquebradas* (Doctoral dissertation, Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ciencias Básicas. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). [Trabajo de maestría] Pereira, Colombia: Universidad tecnológica de Pereira.

<https://hdl.handle.net/11059/10539>

Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.

Manuscrito no publicado.

Campos, M., & Rodríguez, M. (2020). Un estudio sobre la aprehensión conceptual de las inecuaciones. *Revista Paradigma*, 41, 540-570.

<http://funes.uniandes.edu.co/22158/1/Campos2020Un.pdf>

Cañadas, M, Gómez, P y Pinzón, A. (2018). *Capítulo 3: Análisis de contenido*. Universidad de los Andes.

De Los Ríos Hoyos, N., Chocó Mancilla, D. C., & Correa Ángel, M. (2019). *Construcción de significado de las inecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado a partir de un análisis discursivo [recurso electrónico]*. Universidad del Valle.

<http://hdl.handle.net/10893/18516>.

González, J., & Florez, J. (2018). La modelación matemática y la construcción de la covariación lineal. Bogotá, Colombia: Pontificia Universidad Javeriana.

<https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/35028/LA%20MODELACIO%cc%81N%20MATEMA%cc%81TICA%20Y%20LA%20CONSTRUCCIO%cc%81N%20DE%20LA%20COVARIACIO%cc%81N%20LINEAL.pdf?sequence=3&isAllowed=y>

Guerrero, F., Sánchez, N. y Lurduy, O. (2006). *La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas*. En Martínez, Gustavo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 598-603). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

<http://funes.uniandes.edu.co/5616/1/GuerreroLapRACTICAAlme2006.pdf>

Heredia , Monica; Palacios, Maira Alejandra (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre la enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Lehmann, C. H. (1992). *Álgebra*. México: Limusa.

Lemus-Cortez, N., y Escobar, H. (2021). Modelación matemática en la construcción conceptual de las inecuaciones al comparar magnitudes: uso de una norma medioambiental en la música. *Revista Espacios, Volumen 42* (01), 50 – 65. DOI: 10.48082/espacios-a21v42n01p05.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN, Bogotá: MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Ministerio de Educación Nacional, (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje Lineamientos curriculares. Matemáticas. Bogotá: MEN. https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf

Ministerio de Educación Nacional, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciencias Ciudadanas. Santa Fe de Bogotá Colombia. https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/1921/788071114_2006_A.pdf?sequence=6.

Montenegro, C. E., & Cruz, G. A. (2010). Aproximación didáctica al tratamiento escolar de las inecuaciones lineales [Recurso electrónico]. Universidad del Valle. <https://eds.p.ebscohost.com/eds/detail/detail?vid=1&sid=4596286f-86c1-4115-924d-6727be7d691d%40redis&bdata=Jmxhbm9ZXMmc2l0ZT1lZHMtbGl2ZQ%3d%3d#AN=udv.756250&db=c07246a>.

- Morales et al. (2018). *Proceso de modelación desarrollado por estudiantes de grado noveno en situaciones de covariación lineal*. Bogotá, Colombia: Pontificia Universidad Javeriana.
<https://repository.javeriana.edu.co/handle/10554/35055>.
- Sobel, M., & Lerner, N. (2006). Precálculo. Distrito Federal.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M.
- Vargas, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, 37, 1-16. <https://www.redalyc.org/pdf/440/440294440001.pdf>.
- Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.
<http://funes.uniandes.edu.co/10178/>.
- Villamarín et al. (2019). *Inecuaciones lineales con una incógnita*. Documento no publicado (Informe). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
<http://funes.uniandes.edu.co/23294/>
- Vrancken, S., Müller, D., & Engler, A. (2010). Inecuaciones Algebraicas. Una Experiencia Didáctica Articulando Diversos Sistemas de Representación. *Yupana*, 1(5), 55–66.
<https://doi.org/10.14409/yu.v1i5.261>
- Zill, D. (Ed.) (1992). *Algebra y Trigonometría*. Santafé de Bogotá, Colombia: Editorial McGRAW-HILL/INTERAMERICANA, S.A.

Anexos

Situación 1: Niveles de glucosa, diabetes y desigualdades numéricas.

La diabetes es una enfermedad en la que los niveles de azúcar en la sangre (glucosa) se encuentran elevados o son anormales. El azúcar viene de la digestión de los alimentos y por medio de la hormona insulina ingresa a las células para posteriormente transformarse en energía la cual es utilizada para las actividades diarias. Minsalud, (s.f.)

Según el ADA (American Diabetes Association) los valores normales de frecuencia de los niveles de glucosa en sangre son determinados según la edad de los pacientes, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1

Niveles de glucosa en sangre normales

Edad	Valores de referencia.		Unidad
Recién nacidos mayores de 1 día.	50	80	mg/dL
Niños.	60	100	mg/dL
18-60 años.	74	100	mg/dL
60-90 años.	82	115	mg/dL
> 90 años.	75	121	mg/dL

Nota: mg = miligramos, dL = decilitros y mg/dL = miligramos de azúcar por decilitro.

Además, los niveles de glucosa en sangre anormales se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2

Niveles de glucosa en sangre anormales.

Valores de referencia según ADA-OMS-ALAD		
Niveles de glucosa en sangre anormal en ayunas	100 mg/dL	125 mg/dL
Criterio para diagnóstico de Diabetes	Mayor o igual a 126 mg/dL	

Se diagnostica diabetes en un paciente si el nivel de glucosa en ayunas es mayor o igual a 126 mg/dl en dos exámenes diferentes.

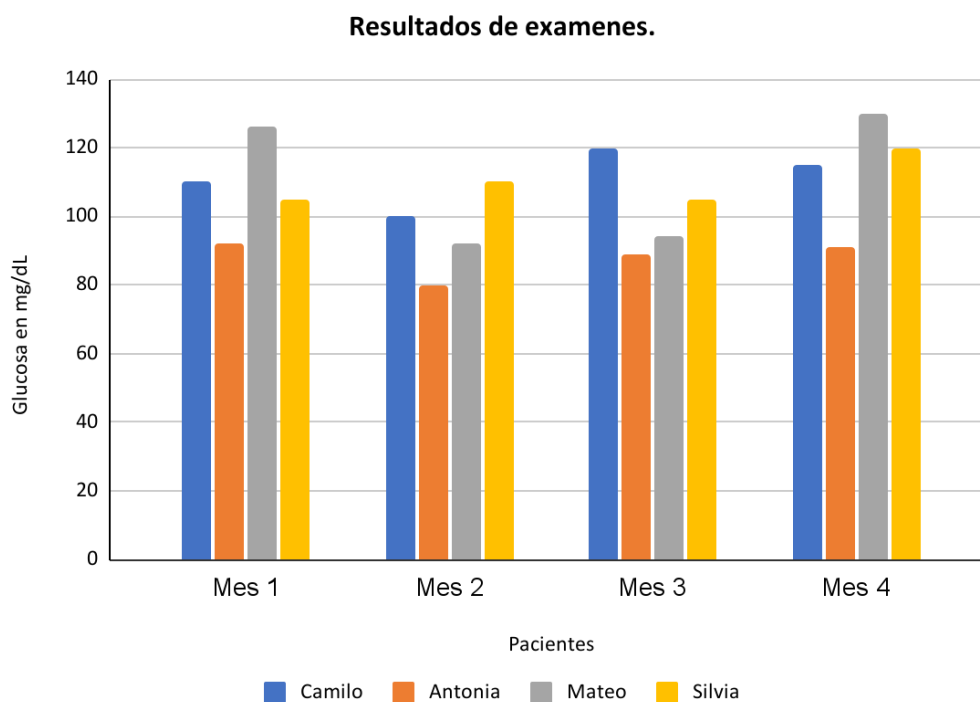
Tarea 1: Comprendiendo la situación a través de los niveles de glucosa

Lea atentamente la siguiente información:

Camilo, Antonia, Mateo y Silvia son cuatro adolescentes que tienen entre 14 y 15 años, ellos se han realizado exámenes de glucosa cada seis meses durante los dos últimos años, como se muestra a continuación:

Figura 1.

Resultados de los exámenes de los estudiantes.



Según la información de la figura 1.

1. Indique para que mes los niveles de glucosa de cada paciente fueron anormales.
 - a. Camilo
 - b. Antonia
 - c. Mateo
 - d. Silvia
2. Indique cuál paciente puede ser diagnosticado con diabetes y ¿por qué?
3. Indique quien tuvo el mayor nivel de glucosa en el mes 3.

4. Indique quien tuvo el menor nivel de glucosa en el mes 4.
5. Compare el nivel de glucosa de Mateo y Silvia en el mes 1.
6. Indique entre los valores de Camilo y Antonia en el mes 2 cuál obtuvo el mayor nivel de glucosa en sangre y cuál es la diferencia entre los dos.

Tarea 2: Niveles de glucosa durante el día y la comparación de magnitudes.

Los niveles de glucosa en sangre no permanecen estáticos durante el día, pues después de cada comida la glucosa puede subir hasta alcanzar un valor máximo de 140 mg/dL.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presentan los niveles de glucosa en sangre de Mariana de 21 años durante un día entero.

Tabla 3

Glucosa de mariana durante el día

Horario de Mariana.	Niveles de glucosa.
7 am	80 mg/dL
9 am	100 mg/dL
11 am	90 mg/dL
13 pm	126 mg/dL
15 pm	102 mg/dL

1. Teniendo en cuenta esta información:
 - a. Indique el valor más alto de glucosa de Mariana en el día
 - b. Complete la siguiente tabla utilizando desigualdades numéricas para establecer las relaciones de orden entre el valor anterior y cada uno de los valores de glucosa reportados durante todo el día.

Tabla 4*Relación de niveles de glucosa*

Valor del nivel de glucosa	Relación	Valor del nivel de glucosa
80 mg/dL		
126 mg/dL	>	90 mg/dL
		102 mg/dL
	<	

2. Escriba falso o verdadero según el caso.

- a. 90 mg/dL < 80 mg/dL ()
- b. 102 mg/dL < 125 mg/dL ()
- c. 126 mg/dL > 126 mg/dL ()
- d. 126 mg/dL $\geq$ 126 mg/dL ()

3. Si x representa los valores diferentes al valor mayor del nivel de glucosa de Mariana, escribe una expresión que relacione el valor mayor con x .

4. Si y representa todos los valores diferentes al valor menor de glucosa de Mariana, escribe la expresión que relacione el valor menor de glucosa con y .

5. Juan, estudiante de grado once, indica que la expresión que representa los niveles de glucosa de Mariana entre las 7 am a 13 pm es $80 \leq x \leq 126$. Escribe los valores de x para los cuales la expresión es verdadera.

6. Suponga que para unas horas diferentes a las registradas en la tabla Mariana tiene los siguientes niveles de glucosa. Determine si los valores están dentro del rango de la expresión $80 \leq x \leq 126$.

- 85 mg/dL
- 102 mg/dL
- 130 mg/dL
- 115 mg/dL
- 69 mg/dL

7. Escribe cinco posibles valores que puede tomar x diferentes a los anteriores que cumplan con las condiciones de la expresión $80 \leq x \leq 126$.

Figura 2

Desigualdad simultánea

Expresiones como la anterior se conocen como **desigualdades simultáneas** y son de la forma:

$$a \leq x \leq b.$$

Se denomina desigualdad simultánea porque para $x \in \mathbb{R}$ los valores de x están entre los números a y b ; en otras palabras, $x \geq a$ y simultáneamente $x \leq b$.

Fuente: Adaptado de Zill (1992) *Álgebra y Trigonometría* p. 147

Nota: Para el caso de la pregunta anterior x {valores del nivel de glucosa de Mariana durante el día}

8. Teniendo en cuenta los niveles de glucosa de Mariana durante el día.
- Indique el mayor valor de glucosa.
 - Indique el mínimo valor de glucosa.

El mayor valor indicado se conoce como **cota superior** y el menor valor se conoce como **cota inferior**, los cuales determinan un intervalo.

9. Indique si el valor pertenece a la desigualdad dada, marcando verdadero o falso.
- 3 pertenece a $-7 < x < 7$ ()
 - 27 pertenece a $28 > x \geq 9$ ()
 - 43 pertenece a $24 < x$ ()

Tarea 3: Niveles de glucosa normal y una representación gráfica de la desigualdad simultánea.

Las desigualdades simultáneas se pueden representar a través de varios registros de representación matemáticos, en la Tabla 5 se muestran algunos ejemplos.

Tabla 5

Notaciones de la desigualdad.

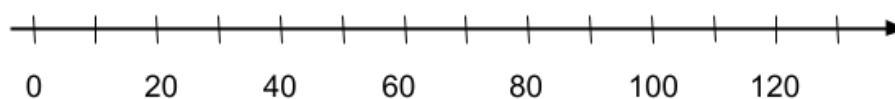
Los valores de una desigualdad se pueden representar gráficamente a través de **intervalos** de la siguiente manera:

Notación de desigualdad	Notación de intervalo	Nombre del intervalo	Representación gráfica del intervalo
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x < b$	(a, b)	Intervalo abierto	

Fuente: Elaboración propia.

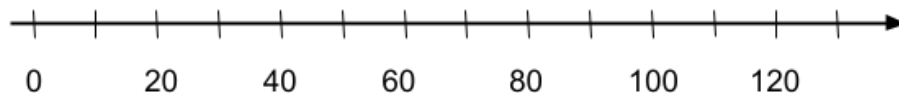
Nota: Se coloca “[“ o “]” cuando el extremo hace parte del intervalo y “(“ o “)” cuando el extremo no hace parte del intervalo.

1. Teniendo en cuenta que el nivel de glucosa normal en niños se encuentra entre 60 mg/dL y 100 mg/dL.
 - a. Determina la desigualdad que representa la situación anterior.
 - b. Escriba la notación del intervalo que representa la situación anterior.
 - c. Escriba el nombre del intervalo.
 - d. Grafique el intervalo en la recta numérica.

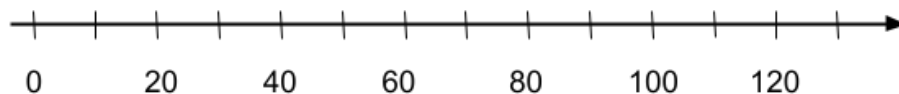


Si el intervalo representa el nivel de glucosa normal en niños:

- e. Indique si es posible que un paciente tenga -30mg/dL en su resultado del nivel de glucosa. Justifique su respuesta.
- f. ¿Todos los puntos de la recta pertenecen al intervalo? ¿por qué?
2. Si x representa los niveles de glucosa en sangre, grafique los valores tal que $x > 60$, en la siguiente recta numérica.



3. Si x representa los niveles de glucosa en sangre, grafique los valores tal que $x < 100$, en la siguiente recta numérica.

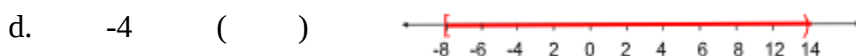
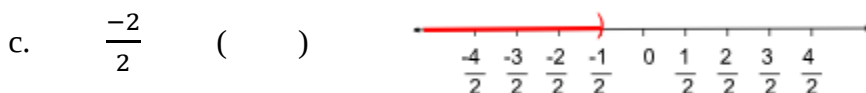
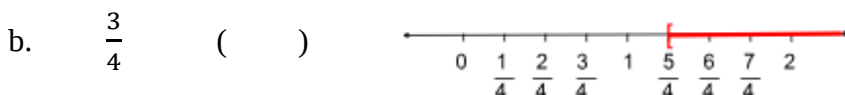
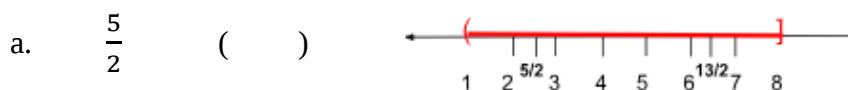


4. ¿Qué puede deducir al comparar las tres gráficas anteriores?
5. Determine la desigualdad y la notación del intervalo correspondiente en cada uno de los siguientes casos.
- Glucosa para adultos mayores entre 60 y 90 años.
 - Glucosa en adultos mayores de 90 años
6. Según Pedro, la siguiente desigualdad representa los valores normales de glucosa para adultos entre 18 y 60 años.

$$60 < x < 100$$

- Indique que tuvo en cuenta Pedro para formular la expresión.
 - ¿La expresión de Pedro es correcta? si no lo es, corrígela.
7. Los siguientes intervalos están definidos en los enteros ($\mathbb{Z}$), determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.
- 50 () $[30, 70)$
 - 33 () $(15, 48)$
 - 64 () $(30, 64)$
 - 102 () $[-102, -64]$

8. Los siguientes intervalos están definidos en los racionales ($\mathbb{Q}$), determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.



9. Determine y grafique un intervalo que contenga valores pertenecientes al conjunto de los números naturales, enteros y racionales.

10. El siguiente intervalo está definido en el conjunto de números reales ($\mathbb{R}$). determine si los valores pertenecen ($\in$) o no pertenecen ($\notin$) según sea el caso.



a. -5 ()

b. $-\frac{1}{2}$ ()

c. π ()

d. 21 ()

11. En el caso anterior, ¿Todos los puntos que se encuentran entre $[-12, 18]$ pertenecen al intervalo? ¿Por qué?

12. Crea una situación que se pueda representar por medio de la siguiente expresión.

a. $x < 50$

b. $x < -10$

c. $2000 < x < 4000$

Situación 2: Ventas de Cafetería El Madrigal e inecuaciones lineales.

En la cafetería El Madrigal que brinda atención a la mesa, los empleados ganan un salario fijo semanal de \$325.151, más una comisión por cada venta que hagan según el producto vendido.

Tarea 1: Las comisiones por ventas y la formulación de una inecuación.

En la cafetería El Madrigal han sacado una torta a base de café y caramelo. Por el mes en curso se dará una comisión a los trabajadores de \$1.180 por cada torta vendida

Carolina es una trabajadora de la cafetería y desea que su salario sea mayor esta semana, teniendo en cuenta la comisión que puede ganar al vender las tortas a base de café y caramelo.

1. La siguiente tabla muestra las comisiones y el salario semanal que puede ganar Carolina según las ventas. Completa la tabla según corresponda.

Tabla 6

Comisiones y salario semanal

Comisión por torta	Cantidad de tortas	Comisión total	Salario fijo semanal.	Salario semanal total.
1.180	42	49.560	325.151	374.711
	37	43.660	325.151	368.811
1.180	53		325.151	
1.180	68			405.391
1.180		94.400		419.551

Fuente: Elaboración propia.

Nota: La comisión es de: **mil ciento ochenta pesos**, en la calculadora el punto corresponde a una coma y se genera de manera automática.

- a. Escribe las cantidades que no cambian de la tabla anterior.
 - b. Escribe cómo hallaste la comisión total.
2. Si n representa el número de tortas vendidas. Indique una expresión que le permite a Carolina calcular el dinero a ganar en comisión total.
 3. Indique la comisión total de Carolina al vender 70 tortas.
 4. Explica cómo calcular el salario semanal total.
 5. Teniendo en cuenta la expresión encontrada en la pregunta 2, escribe la expresión que permite calcular el salario semanal total que va a ganar Carolina.
 6. Indique la expresión que le permite a Carolina saber la cantidad de tortas a vender para que su salario sea mayor o igual \$350.000

7. Indique la expresión que le permite a Carolina saber la cantidad de tortas a vender para que su salario sea mayor o igual \$350.000 y menor que \$500.000
8. Si la comisión por cada torta vendida es de \$1.553, la expresión que determina la cantidad de tortas que tiene que vender Carolina para que su salario sea mayor o igual \$350.000 y menor que \$500.000 sería la siguiente:

$$350.000 \leq 325.151 + 1.553x < 500.000$$

Estás de acuerdo ¿por qué?

Tarea 2: El salario y las inecuaciones simultáneas.

En la cafetería los productos nuevos no son los únicos con comisión, en la siguiente tabla se muestran las comisiones de otros productos que venden en el Café Madrigal:

Tabla 7

Productos y comisiones.

Producto	Comisión.
Bebida con café y vainilla	\$120
Bebida de café y caramelo.	\$135
Bebida de matcha y miel.	\$200
Torta de banano y nueces.	\$800
Torta de zanahoria.	\$500

Fuente: Elaboración propia.

1. Se desea conocer la cantidad de tortas de banano y nueces a vender para que el salario de un empleado sea mayor o igual \$350.751 y menor que \$504.351, realizando el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Paso 1} & \downarrow \quad 350.751 \leq 325.151 + 800x < 504.351 \\
 \text{Paso 2} & \downarrow \quad 350.751 - 325.151 \leq 325.151 - 325.151 + 800x < 504.351 - 325.151 \\
 \text{Paso 3} & \downarrow \quad 25.600 \leq 800x < 179200 \\
 \text{Paso 4} & \downarrow \quad \frac{25.600}{800} \leq \frac{800}{800}x < \frac{179.200}{800} \\
 & \quad \quad 32 \leq x < 224 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Conjunto solución.}
 \end{array}$$

De acuerdo con el procedimiento realizado anteriormente.

- a. Indique qué operación realizó Juan en el paso 1
 - b. Indique qué operación realizó Juan en el paso 2
 - c. Indique qué operación realizó Juan en el paso 3
 - d. Indique qué operación realizó Juan en el paso 4
 - e. Explica con tus palabras el resultado obtenido.
2. Realiza un procedimiento similar al anterior con la siguiente inecuación indicando la operación realizada en cada uno de los pasos.

$$10.600 < 53.000 + 53x < 84.800$$

Figura 3

Propiedades de las inecuaciones lineales.

Para resolver inecuaciones lineales es necesario hacer uso de las siguientes propiedades que por medio de operaciones permiten obtener inecuaciones lineales equivalentes:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
3. Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y c es negativo, entonces $ac > bc$.
5. **Si una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, la dirección de la desigualdad se invierte.**

Nota: Adaptado de los libros publicados por, Zill (1992), Sobel y Lerner (2006); y Lehmann (2004)

3. Complete la siguiente tabla realizando la operación correspondiente.

Tabla 8

Operaciones básicas en desigualdades

Inecuación Lineal	Operación a realizar en ambos lados	Resultado
$5x < 3$	Sumar 2 unidades	
$5x < 3$	Restar 2 unidades	
$5x < 3$	Sumar -2 unidades	
$5x < 3$	Multiplica por 2	
$5x < 3$	Multiplica por -2	
$5x < 3$	Divida por 2	
$5x < 3$	Divida por -2	
$6 < x < 15$	Multiplica por -2	

Nota: Adaptado de “Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales” p. 9 por Vargas, A. 2013.

- a. Indique qué cambia de la inecuación al multiplicar por -2 y ¿por qué?
 - b. Indique qué cambia de la inecuación al dividir por -2 y ¿por qué?
4. Resuelve la siguiente inecuación teniendo en cuenta las propiedades de la tabla 8.

$$315 < 120 - 15x < 900$$

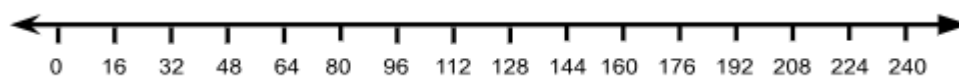
Responda las preguntas 5, 6, 7 y 8 usando el siguiente enunciado:

La expresión que determina si un salario se encuentra entre \$354.651 y \$450.151 incluyendo la comisión de las tortas de zanahoria es la siguiente:

$$354.651 \leq 325.151 + 500x \leq 450.151$$

5. Comprueba usando la expresión anterior si las siguientes cantidades de torta permiten obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151
- a. 48 tortas
 - b. 251 tortas
 - c. 59 tortas
 - d. 63,8 tortas
6. Indique si al vender la cantidad de 63,8 tortas permite obtener un salario entre \$354.651 y \$450.151 y ¿por qué?

7. Grafica el conjunto solución al resolver la expresión en la siguiente recta numérica.



8. Explica con tus propias palabras qué representa el conjunto solución hallado.

Tarea 3: Acumular puntos y las inecuaciones como función.

María quiere invitar a sus amigos a tomar café, para esto desea encontrar un lugar que le permita acumular puntos y redimirlos en próximas compras.

Ella visitó dos cafeterías que le ofrecen las siguientes opciones:

Opción A: 2 puntos fijos en la compra realizada, más 1.5 puntos por café comprado.

Opción B: 8 puntos fijos en la compra realizada, más 0.5 puntos por café comprado.

1. Teniendo en cuenta la información anterior:
 - a. Indique la función ($f(x)$) que representa los puntos que se pueden acumular con la opción A
 - b. Indique la función ($g(x)$) que representa los puntos que se pueden acumular con la opción B
2. Grafica en GeoGebra las expresiones encontradas anteriormente y responde las siguientes preguntas:
 - a. Evalúa 4 valores de x en la función correspondiente y completa las siguientes tablas.

x	3				
$f(x)$	6.5				

x			5		
$g(x)$			10.5		

- b. Para $x=2$ ¿Qué opción permite acumular más puntos?
- b. Para $x=9$ ¿Qué opción permite acumular más puntos?
3. Dentro del contexto:
- a. Indica qué representan los valores de x .
- b. Indica qué representan los valores de y .
4. Ubica el punto de intersección de las dos rectas y explica por qué crees que se cortan en ese punto.
5. Indica que puedes deducir al comparar las dos gráficas:
- a. $f(x)$ y $g(x)$ antes del punto de intersección.
- b. $f(x)$ y $g(x)$ después del punto de intersección.

Figura 4.

Relación de orden en funciones

Considerando que cada miembro de una inecuación puede ser visto como una función de x ; en general, dada una inecuación $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, podemos traducir el significado de los símbolos como:

- El símbolo $>$ usando la expresión “arriba de”, “por encima de”.
- El símbolo $<$ usando la expresión “debajo de”.
- La igualdad como intersección o coincidencia de las gráficas de las funciones involucradas.

En el contexto gráfico resolver una inecuación, es controlar el conjunto de valores de x para los cuales la gráfica de una de las funciones esté por encima, por debajo o coincida con la gráfica de la otra.

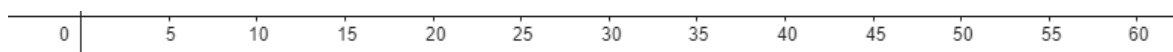
Tomado de: Vrancken, S., et al, (2010) Inecuaciones algebraicas. una experiencia didáctica articulando diversos sistemas de representación. p. 60.

6. Indica en qué valor de x la opción A y B permiten acumular la misma cantidad de puntos.
7. Indica entre qué valores la opción A permite acumular más puntos que la opción B.
8. Determina los valores de x para los cuales $g(x) > f(x)$. Justifica tu respuesta.

9. Según Ana María el intervalo que representa los valores tal que la opción A permite acumular más puntos que la opción B es el siguiente:

$$I = (-2, 14)$$

- ¿Estás de acuerdo con Ana María? si no estás de acuerdo escribe el intervalo correcto.
- Grafique el intervalo en la recta numérica.



Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que la proyección de los puntos sobre el eje x para los cuales $g(x) > f(x)$ determina el conjunto solución de la inecuación.

Estudiante:

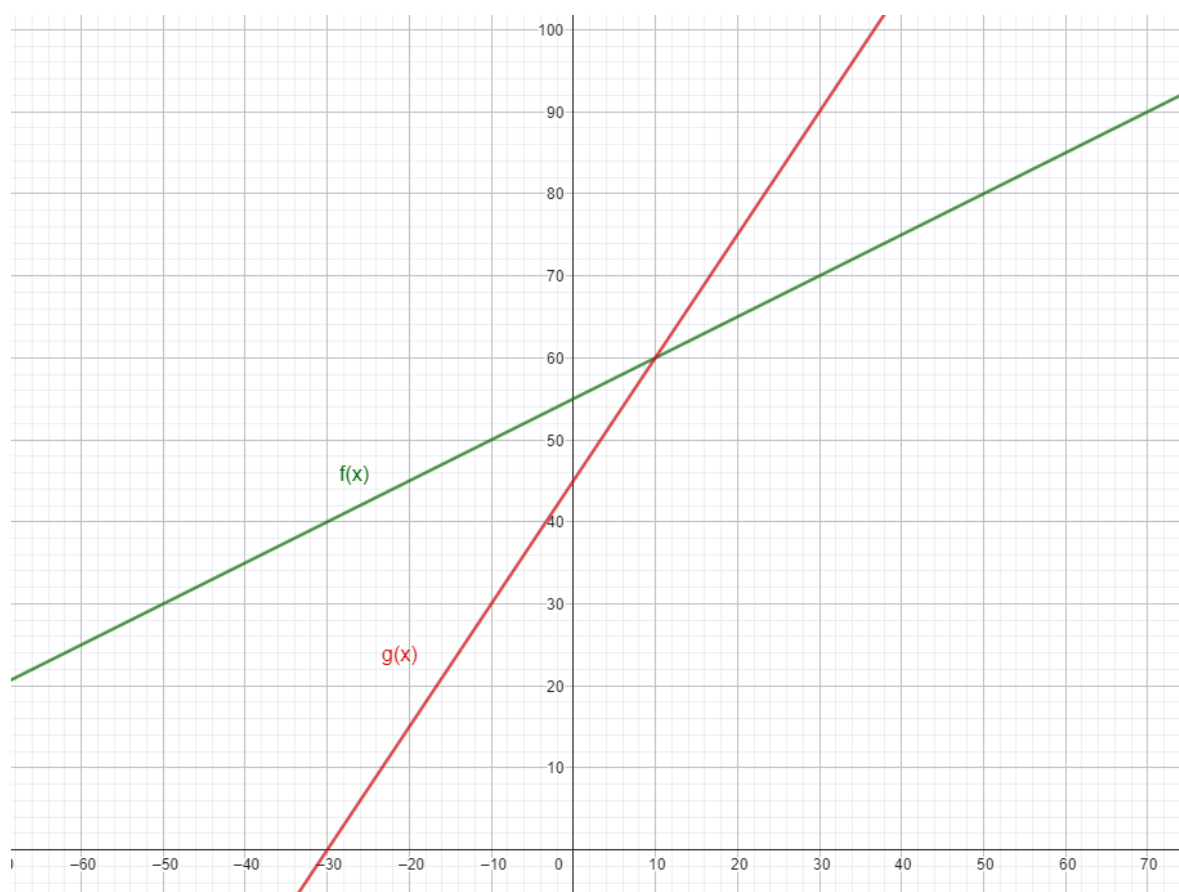
Tarea 4: La inecuación lineal en las matemáticas.

- Grafique las siguientes inecuaciones en GeoGebra y determine para cuáles valores de x son verdaderas.
 - $4x - 3 > 5$
 - $3x - 15 > 5x - 2 - 7$
- Indica la inecuación que tiene como solución el intervalo señalado en la figura
 - $45 > 5x + 20 > -55$
 - $12 > 5x - 13 \leq 62$
 - $16 < 3x - 3 < 3$
- El intervalo $(-\infty, 2)$ NO es solución de la inecuación:
 - $2(7x - 4) < 10x$
 - $8 < -4(-5 + x) < 36$
 - $-17 > 4x - 25$
- Determina teniendo en cuenta la siguiente gráfica:
 - Cuando $f(x)$ es mayor que $g(x)$ y por qué.

- b. Cuando $f(x)$ es menor que $g(x)$ y por qué.

Figura 5.

Gráfica de funciones



5. Indique con una línea qué enunciado corresponde a la expresión algebraica.

La suma de dos números enteros consecutivos es menor a 25	$3x < 76$
La tercera parte de un número aumentada en 5 es mayor que la mitad del número.	$x + (x + 1) < 25$
La diferencia del triple de un número y la mitad del número es menor que 24.	$\frac{x}{3} + 5 > \frac{x}{2}$
El perímetro de un rectángulo equilátero con lado x es menor que 76.	$3x - \frac{x}{2} < 24$

6. Escribe un párrafo con los elementos que consideras necesarios para la solución de las inecuaciones.
7. ¿Cuál crees que es la mayor dificultad en el trabajo con las inecuaciones lineales?