

La Transformación de Funciones de Producción Bruta en Funciones de Producción Neta

Carlos H. Ortiz Q.*

* Economista, Profesor del Departamento de Economía y
Director del CIDSE.

Resumen*

En este artículo se examinan las condiciones bajo las cuales la escogencia óptima de los insumos intermedios se puede incorporar en un conjunto de funciones de producción bruta para relacionar los factores primarios de producción con el producto neto máximo de cada sector. Si tales condiciones no se presentan, la descripción funcional de la tecnología exige la incorporación explícita de las relaciones tecnológicas insumo-producto; especialmente si la actividad económica se caracteriza por externalidades tecnológicas que cambian el nivel de la eficiencia económica con la reasignación de los recursos.

1 Introducción

En el mundo real, la actividad productiva requiere tanto factores primarios (trabajo, capital, tierra, etc.) como insumos intermedios. La función que relaciona el uso de factores primarios e insumos intermedios con la máxima producción se denomina función de producción bruta. Probablemente pocos microeconomistas rechazarían esta definición general de la tecnología; sin embargo, el cuerpo teórico neoclásico se ha construido primordialmente sobre funciones de producción neta, o sea funciones de producción cuyos únicos argumentos son factores primarios.

Para justificar este procedimiento, Samuelson (1966) probó que bajo los supuesto de producción no conjunta y rendimientos constantes a escala, cada mercancía puede pensarse como producida por sus factores primarios totales (factores directos más factores indirectos requeridos para la producción de los insumos intermedios consumidos en la producción de una mercancía). Así, cada sector económico se considera como una industria integrada que produce sus propios insumos intermedios. En un sentido figurado, cada sector de la economía puede considerarse como una especie de "caja negra" cuyos insumos son factores primarios totales y cuyos productos son mercancías netas de requerimientos de insumos intermedios. Esto es lo que entendemos por la transformación de funciones de producción bruta en funciones de producción neta.

Con esta transformación Samuelson desarrolló el procedimiento, usado originalmente por los economistas clásicos, para expresar el valor de las mercancías como una suma del trabajo directo e indirecto utilizado en su producción. Samuelson, por supuesto, generalizó el procedimiento para cualquier número de factores primarios que aparezcan como argumentos en las funciones de producción bruta.

Ahora bien, desarrollos recientes en la teoría del crecimiento económico han planteado que las externalidades tecnológicas pueden ser elementos fundamentales del mecanismo económico que induce crecimiento sostenido (el artículo seminal se le debe a Romer, 1986). Como es conocido, la presencia de externalidades puede generar rendimientos crecientes a escala. Por tanto, nos proponemos investigar, como problema de fondo, las condiciones bajo las cuales la transformación de Samuelson es aún válida cuando se presentan externalidades

***Samuelson probó
que bajo los supuestos;
de producción no conjunta y
rendimientos constantes
a escala, cada mercancía
puede pensarse como
producida por sus factores
primarios totales***

* Este artículo se basa parcialmente en el primer capítulo de mi tesis doctoral (Ortiz, 1993).

***Nos proponemos estudiar
las condiciones
bajo las cuales
la transformación
de Samuelson es aún válida
cuando se presentan
externalidades tecnológicas
en la economía***

tecnológicas en la economía.

El análisis de este problema se desarrolla en la sección 3. Primero examinamos, en la sección 2, la transformación de Samuelson en una economía sin externalidades tecnológicas. Terminamos en la sección 4 con algunas breves conclusiones.

2. La Transformación sin Externalidades Tecnológicas

2.1 Una Mercancía

La transformación es trivial cuando sólo se considera una función de producción agregada. Sin embargo, es instructivo considerar inicialmente este caso para simplificar la exposición posterior.

Empecemos entonces suponiendo una función de producción bruta linealmente homogénea:

$$[1] \quad X = F(N, K, Q).$$

donde X denota la producción bruta, N mide el tamaño de la fuerza de trabajo, K es el acervo de capital y Q es el monto de insumo intermedio consumido en el proceso de producción. Claramente, X y Q son flujos en el período de producción, mientras N y K son acervos dados.

El producto neto se define como la dife-

rencia entre el producto (bruto) y el insumo intermedio,

$$[2] \quad Y = X - Q.$$

El problema es encontrar una función que relacione factores primarios, K y N , con el producto neto máximo:

$$[3] \quad Y = \text{Max}(X - Q) = \text{Max}[F(N, K, Q) - Q].$$

La condición de primer orden es simplemente

$$[4] \quad f_Q = F_{Q+1} - 1 = 0,$$

donde el subíndice denota una derivada parcial. La ecuación [4] define la asignación óptima del insumo intermedio, $Q = Q'$, como una función de los parámetros dados, K y N . La concavidad de $F(\cdot)$ garantiza que Q' sea un máximo bien definido. El producto marginal del insumo intermedio propio no puede ser mayor (menor) que 1; en tal caso sería conveniente asignar una mayor (menor) porción del producto bruto como insumo intermedio.

Ahora bien, la sustitución de Q' en la ecuación [3] arroja la función de producción neta que buscamos:

$$[5] \quad Y = \theta(N, K).$$

Examinemos las propiedades de esta nueva función. Usando el teorema de Euler podemos reescribir la función de producción bruta (ecuación [1]) de la siguiente forma:

$$[6] \quad X = F_N(N)N + F_K(K)K + F_Q(Q)Q,$$

y, usando la ecuación [4], también podemos reescribir la función de producción neta:

$$[7] \quad Y = X - Q' = F_N(N)N + F_K(K)K,$$

donde las derivadas con asterisco se evalúan en Q' . Si N , K y Q se duplican, X se duplica y el producto neto, Y , también se duplica¹. Las derivadas con asterisco en la ecuación [7] no varían porque ellas son homogéneas de grado cero en N , K y Q . Se deduce que las derivadas parciales de la función de producción neta se definen por $\langle t \rangle_* = F_* X$ y $\langle t \rangle_* = F\%$; por consiguiente, la función de producción neta, 0 ($''$), también es homogénea lineal.

2.2 Dos Mercancías

Estamos listos para la transformación cuando existen dos mercancías en la economía. Una economía con dos sectores nos permite capturar la existencias de relaciones interindustriales. Examinaremos el procedimiento de Samuelson de acuerdo con la exposición de Gandolfo (1987).

La producción conjunta se excluye y la producción bruta de cada sector se relaciona con los factores primarios (trabajo y capital) y los insumos intermedios del sector como sigue:

$$[8] \quad X_j = FM.KM,$$

$$[9] \quad X^* = G(A).$$

- 1 Para ser rigurosos debemos probar que la duplicación de los factores primarios también duplica la asignación óptima del insumo intermedio. Dado que FQ ($''$) es homogénea de grado cero en N , K y Q , tenemos:

$$FQNN + FQKK + FQQQ = 0.$$

Diferenciando parcialmente la condición de optimización (ecuación [4]) con respecto a los parámetros N y K obtenemos:

$$FQN + FQQ \frac{dQ}{dN} = 0, \quad y$$

$$FQK + FQQ \frac{dQ}{dK} = 0$$

La sustitución de estas ecuaciones en la anterior arroja:

$$Q' = \left(\frac{dQ}{dN} N + \left(\frac{dQ}{dK} K \right) K \right).$$

Así, el insumo intermedio óptimo, Q , es una función linealmente homogénea en N y K , Q.E.D.

- 2 Note que las ecuaciones [8] y [9] no incluyen los insumos intermedios propios como argumentos. Esto simplifica el análisis sin pérdida de generalidad: dado que las derivadas con respecto a los insumos propios deben igualarse a 1 para maximizar el producto neto, como se probó en la sección anterior, podemos normalizar los insumos propios a cero.

donde X_j es el producto bruto del sector j ($j = 1, 2$), N_j es el monto de fuerza de trabajo en el sector j , K_j es el acervo de capital en el sector j , y X_{ij} es el monto de insumo intermedio i -ésimo utilizado en la producción del sector j -ésimo ($i, j = 1, 2$).² $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ son funciones de producción caracterizadas por rendimientos constantes a escala.

Definimos el producto neto del sector i , Y_i , como el exceso de la producción bruta sobre la fracción usada como insumo intermedio:

$$[10] \quad Y_i = X_i - X_{i2}$$

$$[11] \quad Y_2 = X_2 - X_{21}$$

La metamorfosis de las funciones de producción bruta en neta debe restringirse, por supuesto, por los acervos de factores primarios en el período de producción:

$$[12] \quad M + Af = A? + Ai = N,$$

$$[13] \quad At + K = tf + K\ddot{U} = K,$$

donde N y K denotan respectivamente los acervos totales de trabajo y capital en la economía, N_j y K_j denotan respectivamente los montos directos de trabajo y capital usados en el sector j ($j = 1, 2$), y X_{ij} denotan respectivamente los montos totales de trabajo y capital usados en el sector j .

Ahora viene el problema. De acuerdo con la definición neoclásica de función de producción, la función de producción neta arroja el producto máximo que puede obtenerse dados los factores primarios totales del sector integrado. Así, pues, la función de producción neta de la mercancía 1 se define como sigue:

$$[14] \quad F_1 = \text{Max} [F(N_1, K_1, X_{21}) - X_{21}]$$

Desde el punto de vista de la industria integrada que produce la mercancía 1, el sector

2 es sólo un proveedor de insumos intermedios. Por tanto, defuimos

$$[15] \quad X_{ij} = G(JVf-Nt, K_j - K_i, X_j) .$$

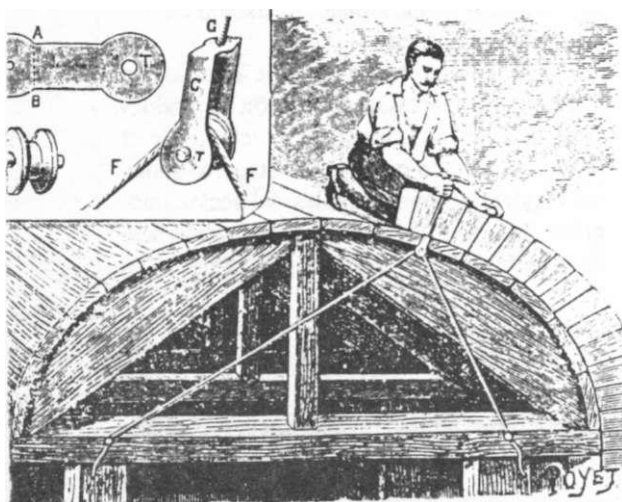
Debemos buscar la asignación óptima de N_i , K_i , y N_u que maximiza el producto neto de la mercancía 1 sujeto a la ecuación [15]. Las correspondientes condiciones de maximización de primer orden son las siguientes:

$$o N_i$$

$$[17] \quad j^{\wedge} = F_k - F_k G_k = 0,$$

$$[18] \quad o X_n \sim \wedge = F_n G_n - I = 0.$$

Los argumentos de las funciones $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ han sido suprimidos por simplicidad; las derivadas con respecto a trabajo y capital se denotan con los subíndices N y K respectivamente; y el producto marginal de un bien intermedio se denota con el tipo de insumo de manera que $F_n = dF(\cdot)/dX_n$ y $G_{ad} = dG/dX_i^*$.



La interpretación de estas condiciones es intuitiva. Las derivadas con respecto a los factores primarios (ecuaciones [16] y [17]) implican que la productividad marginal directa debe igualarse a la productividad marginal indirecta i.e. la productividad marginal de un factor primario que es directamente usado en la producción del sector j debe ser igual a la productividad marginal de este factor por medio de la producción del insumo intermedio i usado por el sector en cuestión. Por otra parte, el producto de las derivadas con respecto a los insumos intermedios cruzados (ecuación [18]) debe igualar la unidad; i.e. la productividad de una mercancía que es usada para producir la misma mercancía a través de la producción de su insumo intermedio debe ser igual a 1, tal como en el caso de las derivadas con respecto a los insumos propios.

Si las condiciones de segundo orden para maximización son satisfechas, las ecuaciones [16], [17] y [18] definen N_i , K_i y X_{ij} en términos de los parámetros dados, N_i y K_i . Por tanto, la sustitución de estas variables en las ecuaciones [14] y [15] determina la función de producción neta de la mercancía 1. Esta es, hasta aquí, la versión de Gandolfo de la transformación de Samuelson.

Ahora bien, dado el supuesto de rendimientos constantes a escala, podemos avanzar un poco aplicando el teorema de Euler y reescribiendo las ecuaciones [8] y [15] como sigue:

$$[19] \quad X_i = F_n N_i + F_k K_i + F_x X_{ij},$$

$$[20] \quad X_n = G_n(N_i - N_j) + G_k(K_i - K_j) + G_x X_{ij}.$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación [14] y usando las condiciones de primer orden (ecuaciones [16], [17] y [18]), obtenemos

$$[21] \quad y, = F_n t_f + F_k K_i = 0 \quad (JN, KI),$$

donde las derivadas con asterisco denotan que se evalúan en el punto óptimo, i.e. ellas son funciones de los factores primarios totales ($\mathbf{M}$ y K). La función $0(\cdot)$ es también una función de estos parámetros y muestra rendimientos constantes a escala ya que satisface el teorema de Euler³. Claramente, siguiendo un procedimiento simétrico podemos definir una función de producción neta con rendimientos constantes a escala para el sector 2:

$$[22] \quad 7_2 = r(A\mathbf{E}, \#).$$

Las ecuaciones [21] y [22] definen el conjunto de funciones de producción neta que se deduce del conjunto de funciones de producción bruta conformado por las ecuaciones [8] y [9].

De las consideraciones anteriores se deduce que el teorema de Samuelson parece justificar el método neoclásico. Bajo los supuestos de producción no conjunta y rendimientos constantes a escala, funciones de producción neta pueden derivarse de funciones de producción bruta de tal forma que las primeras conservan las propiedades de las últimas, i.e. homogeneidad lineal y concavidad. Este teorema es obviamente muy importante para la escuela neoclásica porque los teoremas básicos del comercio internacional (Heckscher-Ohlin, igualación del precio de los factores, Stolper-Samuelson, Rybczynsky) no necesitan modificarse para dar cuenta del rol de los bienes intermedios.

Sin embargo, algunas advertencias son necesarias. En primer lugar, aunque el teorema está aparentemente basado en supuestos débiles, estos no siempre deben ser satisfechos; este es el caso, por ejemplo, de la existencia de

***Bajo los supuestos
de producción no conjunta y
rendimientos constantes
a escala, funciones de
producción neta pueden
derivarse de funciones
de producción bruta
de tal forma que las primeras
conservan las propiedades
de las últimas,
Le. homogeneidad lineal y
concavidad***

rendimientos crecientes a escala y/o la existencia de externalidades tecnológicas, las cuales se pueden asimilar en este contexto a la existencia de producción conjunta -exploraremos estas posibilidades en la siguiente sección. En segundo lugar, si el fundamento tecnológico original de la economía es un conjunto de funciones de producción bruta, funciones de producción neta pueden definirse sólo para industrias integradas y, así, la intensidad factorial directa (observable) puede ser un indicador sesgado de la intensidad factorial total a nivel sectorial. No obstante, Chacholiades (1978) probó que las intensidades factoriales totales se jerarquizan de acuerdo con las intensidades directas (observables) cuando se satisfacen las condiciones de rendimientos constantes a escala y de pleno empleo de los factores, i.e. bajo las condiciones mencionadas las intensidades totales no pueden exhibir reversiones con respecto a las intensidades directas. Desde el punto de vista del economista aplicado, la transformación de Samuelson implica que las funciones de producción neta pueden estimarse sólo después de que los requerimientos factoriales totales han sido calculados, pero esto requiere el conocimiento

3 Para probar rigurosamente que las funciones de producción neta son linealmente homogéneas debemos probar que las derivadas con respecto a capital y trabajo no varían con cambios proporcionales de los factores totales. Para una prueba formal véase Chacholiades (1978). La demostración para el caso de un solo bien se encuentra en el pie de página 1.

previo de las funciones de producción bruta. En tercer lugar, recordemos que la transformación de Samuelson arroja relaciones matemáticas entre factores primarios totales y producto neto máximo. Por tanto, el supuesto usual de que el valor agregado se relaciona tecnológicamente con los insumos primarios puede ser válido sólo en un modelo agregado donde el producto neto es idéntico al valor agregado. A nivel sectorial, el producto neto y el valor agregado son variables diferentes: el valor agregado es la diferencia en valor entre el producto bruto y los insumos intermedios de

***Claramente, para definir
el valor agregado
a nivel sectorial es necesario
conocer de antemano un
vector de precios relativos.
Por tanto, los modelos
multisectoriales, que definen
el valor agregado de un
sector como la variable
dependiente de una
"función de producción "
cuyos argumentos son los fac-
tores primarios directos del
sector, son erróneos.***

cada sector, mientras el producto neto es la diferencia entre la producción bruta y la absorción de esta mercancía como insumo intermedio. Claramente, para definir el valor agregado a nivel sectorial es necesario conocer de antemano un vector de precios relativos. Portante, los modelos multisectoriales, que definen el valor agregado de un sector como la variable dependiente de una "función de producción" cuyos argumentos son los factores primarios directos del sector, son erróneos. El problema

simplemente se agrava si en vez de factores primarios totales se usan como argumentos factores primarios directos. Por último, aunque no menos importante, es apropiado señalar que la forma reducida del conjunto de funciones de producción neta que surgen de un conjunto dado de funciones de producción bruta no conserva las trazas de los encadenamientos interindustriales originales, de manera que las ecuaciones originales no pueden recuperarse trabajando en sentido inverso. Como consecuencia, las funciones de producción neta no pueden dar cuenta del intercambio de bienes intermedios entre los sectores (o entre naciones, si el modelo es de economía abierta). Además, las restricciones que la economía enfrenta debido a la existencia de requerimientos de insumos intermedios no pueden ser identificadas con una tecnología cuyas transacciones interindustriales son implícitamente incorporadas. La tecnología como un conjunto de "cajas negras", o funciones de producción neta, puede simplificar el análisis económico, pero oscurece el análisis de las relaciones intersectoriales.

Creemos que las anteriores razones justifican una aproximación al análisis multisectorial que evite todos los problemas que la transformación de Samuelson puede enfrentar. La forma obvia de hacerlo es modelando la tecnología desde el comienzo con un conjunto de funciones de producción bruta. Este procedimiento es inevitable si las condiciones de Samuelson no aplican.

3. La Transformación en Presencia de Externalidades

3.1 Una Mercancía

La sección anterior supuso explícitamente que no existen externalidades tecnológicas en el proceso de producción. Sin embargo, desarrollos recientes en la teoría del crecimiento han sugerido un rol definitivo para las externalidades como una fuente de crecimiento

económico endógeno. El problema que queremos enfrentar ahora es si la transformación de Samuelson es válida cuando tales externalidades se presentan en la economía.

Arrow (1962), Sheshinski (1967), Romer (1986) y otros han mostrado que externalidades de aprendizaje en la práctica ("learning-by-doing") y de difusión de conocimientos pueden ser incorporadas en un modelo competitivo de crecimiento económico si las firmas individuales no pueden explotar el proceso de creación y transferencia del conocimiento. Estos autores consideran externalidades que surgen del conocimiento agregado de la economía, el cual puede estar incorporado o no en el stock agregado de capital. Tales externalidades no afectan la transformación de las funciones de producción bruta en neta en la medida que el acervo de factores primarios está dado en el período de producción. Así, la asignación de factores y bienes intermedios entre sectores no puede afectar los coeficientes tecnológicos. Para examinar esta afirmación volvamos a nuestra función de producción agregada modificada con progreso técnico neutral:

$$[23] \quad X = A F(N, K, Q),$$

donde la notación previa se mantiene y A es el coeficiente tecnológico que se define como sigue:

$$[24] \quad A = A(K) \quad , \quad A'(K) > 0 \quad .$$

Suponemos que A es una función creciente del nivel agregado de capital. La intuición de este enfoque es la externalidad de aprendizaje en la práctica que se asocia con el acervo de capital: entre más capital se acumule, más conocimiento se produce y transfiere por efectos de difusión.

Para calcular la función de producción neta seguimos un procedimiento similar al de la sección 2.2. Pero entonces es inmediatamente claro que este procedimiento no va a ser dife-

rente al anterior a excepción del coeficiente A que se toma como una constante. Por tanto, el cálculo mencionado arroja la siguiente ecuación:

$$[25] \quad Y = A \{ F_N N + F_K K \},$$

donde las derivadas con asterisco se evalúan en el óptimo; el resto de la notación ya es conocida. Esta función de producción exhibe rendimientos constantes a escala anivel de la firma -donde el nivel tecnológico se supone dado-, pero muestra rendimientos crecientes a nivel agregado. Por tanto, la transformación de Samuelson es exitosa en este caso.

Consideremos ahora la aparentemente inocente variación de la función de progreso técnico A :

$$[26] \quad A = A(K, Q), \quad A_K > 0, A_Q > 0 \quad .$$

Esta variación podría sustentarse con base en la difusión de conocimiento y aprendizaje en la práctica. Podríamos argumentar que el capital agregado, K , incorpora el conocimiento social, mientras que el insumo intermedio agregado, Q , refleja el proceso de aprendizaje en la práctica por difusión de innovaciones tecnológicas entre firmas y sectores. Por tanto, el coeficiente tecnológico, A , es una función creciente en estas dos variables. El problema es, de nuevo, encontrar la función que maximiza el producto neto, Y , definido como la diferencia entre producción bruta e insumo intermedio. Dados el acervo de capital, K , y el tamaño de la fuerza de trabajo, N , la condición de primer orden para la maximización del producto neto es

$$[27] \quad \frac{\partial Y}{\partial Q} = A F_Q + A_Q F - 1 = 0 \quad ,$$

donde los argumentos de la función $F(\cdot)$ han sido suprimidos por simplicidad en la notación. Esta condición muestra que la asignación de insumos intermedios tiene ahora un

efecto adicional sobre la productividad marginal propia que no estaba presente en el caso sin cambio tecnológico (véase la ecuación [4]). Este es precisamente el efecto del proceso de aprendizaje sobre la productividad marginal.

Ahora, expandiendo la función de producción bruta (ecuación [23]), y usando el teorema de Euler, la definición de producto neto y la ecuación [27], obtenemos:

$$[28] \quad Y = X - Q'' = A(F_N N + K) + A_Q Q',$$

donde las deñvadas con asterisco se evalúan en la asignación óptima del insumo intermedio, Q' . Así, la ecuación [28] muestra que en este caso no podemos reducir la función de producción bruta en una función de producción neta que preserve las cualidades de la anterior. La transformación de Samuelson en este caso todavía es posible si el nivel tecnológico, A ("), es una ecuación logarítmica en Q , de manera que el término AQQ' en la ecuación [28] sea una constante y la función de producción neta se defina sólo en términos de los factores primarios (N y K). Sin embargo, inclusive en este caso la transformación pierde la propiedad de homogeneidad lineal.

Porque el insumo intermedio agregado contribuye a la producción y también genera conocimiento intangible (o habilidad técnica) la cual, a su vez, aumenta la productividad total de los factores, tenemos una forma particular de producción conjunta y rendimientos crecientes a escala. Por tanto, las condiciones de Samuelson se violan y la transformación no tiene lugar. Este resultado requiere que el insumo intermedio agregado sea una variable de escogencia para la maximización del producto neto (lo cual es parte de la transformación). En el caso anterior, donde las externalidades eran generadas por el capital agregado o el conocimiento agregado, también teníamos produc-

ción conjunta y rendimientos constantes a escala; sin embargo, la transformación de Samuelson no se afectó porque ni el capital agregado ni el conocimiento agregado son variables de escogencia para la maximización del producto neto.

3.2 Dos Mercancías

Podría arguirse que la falla de la transformación de Samuelson en el caso anterior se encuentra en el hecho de que el insumo intermedio es una fuente de externalidades. Pero el asunto fundamental es si la transformación afecta la asignación de factores e insumos la cual, a su vez, afecta el nivel tecnológico. Por tanto, una externalidad que tenga un origen sectorial invalida la transformación de Samuelson. Para mostrar esto, examinemos un sistema económico de dos sectores en el cual el progreso tecnológico aumenta la capacidad productiva del trabajo". Consideremos entonces las siguientes funciones de producción brota linealmente homogéneas:

$$[29] \quad X_1 = F(N_1, K_1, M_1),$$

y

$$[30] \quad X_2 = G(N_2, K_2, X_1),$$

donde AN_1 y BN_2 son los insumos de trabajo en unidades de eficiencia. Los coeficientes tecnológicos A y B se definen como sigue

$$[31] \quad A = A(K_1, A'X_1),$$

y

$$[32] \quad B = B(K_2, B'X_2).$$

Las restricciones del monto total de los factores primarios todavía aplican (ecuaciones [12] y [13]), y las definiciones de producción neta son por supuesto las mismas (ecuaciones [10] y [11]). La justificación para este tipo de

4 Podríamos seguir considerando un crecimiento técnico neutral, pero la variación propuesta no modifica la esencia de nuestro análisis y simplifica el álgebra.

LA TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES DE PRODUCCIÓN

sistema puede ser que el conocimiento es generado primariamente en un sector (el paradigma que tenemos presente es una economía donde el sector manufacturero invierte en nuevos conocimientos mientras el sector agrícola obtiene la nueva tecnología por aprendizaje y efectos de difusión). En cualquier caso, el sistema económico en su conjunto se beneficia de la inversión realizada en el sector 2.

Procediendo como en los casos anteriores, definamos la función de producción neta de la mercancía 1 como sigue:

$$[33] \quad Y^{\wedge} \text{Max} [F Q_i N_t K_i X_u - X_a],$$

sujeta a

$$[34] \quad X_u = G[B(t_f \cdot N), (K_i \sim K), X_j].$$

Las variables de escogencia en este problema son N_i , K_i , y X_i . Las correspondientes condiciones de maximización de primer orden son las siguientes:

$$L^{3.5} \quad \text{O } N_i \sim \wedge = F_A \cdot F_G \cdot B = Q,$$

$$[36] \quad \wedge \bullet = F_K \cdot F_N \cdot A' \\ - F_G [G, (t_f \cdot N) B' + G_j] = 0,$$

$$[37] \quad \wedge - = F_{X_i} G_{X_i} - \wedge = Q,$$

donde el subíndice E denota la derivada parcial con respecto al trabajo en unidades de eficiencia.

Ahora, expandamos las ecuaciones [33] y [34] usando el teorema de Euler:

$$[38] \quad r_i = F_u A N_i + F_K K_i + F_G X_{G_i} - X_{G_i}.$$

5 Usando la ecuación [36] obtenemos

$$(F'K \cdot F X_i G'K) = F'N_i A' + (N_i \cdot N_i f G' \cdot B' \cdot 0$$

Un resultado similar se obtiene para la función de producción neta de la mercancía 2.

$$[39] \quad X_{G_i} = G_B Q^{\wedge} N_i \\ + G_K (K_i - K) + G_{X_{G_i}} X_{G_i}.$$

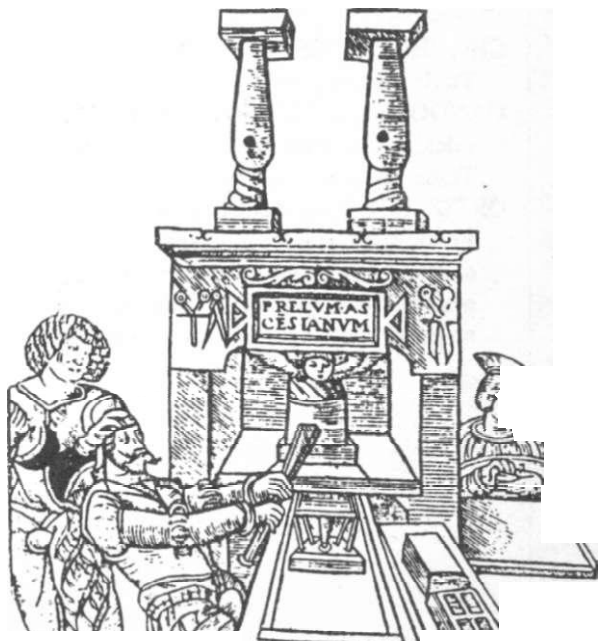
Sustituyendo la ecuación [39] en la ecuación [38] y usando las condiciones de maximización obtenemos

$$[40] \quad Y^{\wedge} f f i A t f + i F n G D i Z \\ + (F^* K - F x_i G'_{X_i}) K_i.$$

Siguiendo un procedimiento paralelo también obtenemos

$$[41] \quad Y_2 = (G'_{X_i}) B N_2 + (G_{X_i} F_{X_i}) K_i \\ + (G_{X_i} - G'_{X_i} F_{X_i}) K_{X_i}.$$

En estas dos ecuaciones las variables con asterisco se evalúan en el punto óptimo y el superíndice "T" denota requerimientos totales del factor. Claramente, las funciones de producción neta dependen del nivel directo de capital. Utilizando la condición de primer orden para el capital puede mostrarse que los coeficientes asociados a los montos directos de capital son diferentes a cero si $A'(K_i) > 0$ o $B'(K_i) > 0$. Además, es claro que las funcio-



nes transformadas no experimentan rendimientos constantes a escala. Por tanto, la transformación de Samuelson falla nuevamente.

Si alguna intuición debe darse para estos resultados es posiblemente la siguiente: cambios tecnológicos asociados a las externalidades que, a su vez, son causados por reasignaciones de factores primarios y/o insumos intermedios impiden la reducción de los bienes intermedios en términos de factores primarios. Por tanto, si tales cambios ocurren la transformación de Samuelson no tiene lugar. Esta situación se presenta claramente cuando la tecnología de un sector se caracteriza por producción conjunta de bienes y conocimiento. En este caso cualquier variación en la asignación de recursos tiene un efecto doble sobre el nivel tecnológico: un efecto directo, que corresponde a la productividad propia de los factores, más un efecto indirecto debido a la

externalidad. Por tanto, es la tecnología cambiante lo que impide la expresión de los bienes intermedios en términos de factores primarios.

4. Conclusiones

Los eslabonamientos interindustriales son importantes. Algunas veces podemos evitarlos en el análisis macroeconómico por medio de la transformación de Samuelson, pero en otras ocasiones no es posible. Además, incluso si el nivel tecnológico es independiente del grado de integración tecnológica entre los sectores, el análisis de los eslabonamientos interindustriales puede ayudarnos a entender los efectos de retroalimentación del cambio tecnológico entre sectores y entre naciones. Estos objetivos se alcanzan más fácilmente con modelos económicos que incorporen funciones de producción bruta.

REFERENCIAS

- ARROW, K.J. 1962. The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies*, Vol. 29, 155-173.
- CHACHOLIADES, M. 1978. *International Trade Theory y Policy*, McGraw-Hill.
- GANDOLFO, G. 1987. *International Economics I, The Pure Theory of International Trade*, section 7, Springer-Verlag.
- ORTIZ, C.H. 1993. *Industry Structure and Economic Growth: Essays on the Impact of the Production Structure and Openness on Development*, disertación doctoral no publicada, London School of Economics and Political Science.
- ROMER, M. 1986. Increasing Returns and Long Run Growth, *Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, October, 1002-1037.
- SAMUELSON, A. 1966. The Fundamental Singularity Theorem for Non-Joint Production, *International Economic Review*, January, 179-145.
- SHESHINSKI, E. 1967. Optimal Accumulation with Learning by Doing, in K. Shell, *Essays on the Theory of Optimal Growth*, Cambridge, Mass., MIT Press.