



Un acercamiento histórico-epistemológico a los números reales de Schanuel

Uber Alberto Samboni Verdugo

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas y Física
Santiago de Cali
2019



Un acercamiento histórico-epistemológico a los números reales de Schanuel

Uber Alberto Samboni Verdugo

Trabajo de Grado para optar por el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TUTOR:

Guillermo Ortiz Rico

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas y Física
Santiago de Cali

2019

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento a Dios por brindarme la salud, el espacio y el tiempo para desarrollar este trabajo de grado.

Agradezco a mis padres, esposa y familiares que me apoyaron en el transcurso de mi carrera.

Agradezco a mis compañeros y amigos que creyeron en mí brindándome su apoyo.

Agradezco a Carolina Mejía por responder a mis correos aclarando las dudas que surgieron a lo largo de la construcción de este proyecto

Agradezco al profesor José Ramón Lara (Q.D.P.), por formarme como ser humano y darme herramientas para defenderme en el mundo laboral.

Finalmente quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento a los profesores Guillermo Ortiz y Maribel Anacona, principales colaboradores durante todo este proceso, quienes con su dirección, conocimiento y enseñanza permitieron el desarrollo de este trabajo.

UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO A LOS NÚMEROS REALES DE SCHANUEL

RESUMEN

Este trabajo de grado presenta la forma como se llevó a cabo una construcción de los números reales que se le atribuye a Stephen Schanuel (1933-2014), la cual parte de los números enteros sin hacer uso explícito de los números racionales a partir de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ llamadas cuasi-homomorfismos.

La construcción se hizo a partir de un análisis histórico - epistemológico con el objetivo de mostrar a docentes de matemáticas, como puede influir en su formación conocer una construcción alternativa de los números reales. Los apartes técnicos formales se fundamentan esencialmente en (Mejía 2004)

Palabras clave: cuasi-homomorfismos - números reales de Schanuel

ABSTRACT

This work of degree presents the way in which a construction of the real numbers that is attributed to Stephen Schanuel (1933-2014) was carried out, which starts from the whole numbers without making explicit use of the rational numbers from functions of $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ called quasi-homomorphisms.

The construction was made from a historical - epistemological analysis with the objective of showing mathematics teachers how an alternative construction of real numbers can influence their formation. The formal technical sections are essentially based on (Mejía 2004)

Keywords: quasi-homomorphisms - real numbers of Schanuel

Contenido

INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO I.....	10
CONTEXTUALIZACIÓN HISTÓRICA.....	10
1.1 Magnitudes conmensurables.....	11
1.2 Magnitudes inconmensurables.....	14
1.3 La teoría que admite inconmensurables	16
1.4 Proporcionalidad de Eudoxo-Euclides.....	17
1.5 Los Elementos de Euclides	21
1.6 Definición 5 del libro V de los Elementos	22
1.7 Intuición de Arthan de cuasi – homomorfismo en la definición 5 del libro V de los Elementos.....	23
CAPÍTULO II	27
PRELIMINARES	27
2.1 Números enteros ($\mathbb{Z}$):	28
2.2 Inducción matemática	31
2.3 Relaciones:	32
2.4 La función parte entera:	40
2.5 Valor absoluto:	41
2.6 Grupos:	43
2.7 Subgrupo:	43
2.8 Anillos:	44
2.9 Homomorfismo:	45
2.10 Sucesiones:	46
CAPÍTULO III.....	48
ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE SCHAUDEL REALIZADA POR MEJÍA	48
CAPÍTULO IV	62
ALGUNAS REFLEXIONES DE ORDEN EDUCATIVO A MANERA DE CONCLUSIÓN.....	62
REFERENCIAS.....	70

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se inscribe en la línea de formación en Historia y Epistemología de las Matemáticas; del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle; va dirigido a docentes de matemáticas en formación y en servicio que deseen conocer una construcción de los números reales de forma alternativa.

La construcción histórica de los números reales es uno de los aspectos centrales del desarrollo de las matemáticas que empieza con la aparición de los números naturales; números de vital importancia para nuestros antepasados, dado que servían de instrumento para suplir algunas necesidades de su diario vivir. Seguidamente con la aparición de los números enteros se logró realizar operaciones matemáticas imposibles de hacer con los números naturales, después se da paso a los números racionales, para finalmente construir los números reales. Este resultado se logró gracias a un proceso evolutivo ocurrido durante más de 2000 años, en el que participaron diferentes civilizaciones y culturas. Este trabajo de grado quiere mostrar una construcción alternativa de los números reales, destacando un personaje que hizo un gran aporte al inmenso edificio de las Matemáticas. Eudoxo de Cnido (408 – 355 a. C aprox.) y su teoría de la proporción, la cual se encuentra expuesta en el libro V de los *Elementos* de Euclides; capítulo que goza de la opinión de ser una de las exposiciones científicas más brillantes, que motiva a profundizar sobre sus temas por la relación que guarda con los números reales. “La teoría expuesta en el libro V de los Elementos es, en ciertos aspectos, una teoría de los números reales, pero fuertemente vinculada a la geometría” (Martíñon, 1992, p 332)

A esta obra que se desarrolla en el libro V de los *Elementos* se le han realizado numerosas traducciones, que confunden a muchos y que enamoran a otros. “Pero es opinión unánime que

esta teoría no fue bien comprendida por la comunidad matemática hasta el siglo XIX” (Martiñon, 1992, p 311)

Mora, Torres (2004, p. 95). Dice:

A finales del siglo XIX, específicamente en 1872, aparecen las teorías formales sobre los números reales, desarrolladas y publicadas por el francés Charles Meray (1835–1911) y los alemanes Karl Weierstrass (1815–1897), Eduard Heine (1821–1881), Georg Cantor (1845–1897) y Richard Dedekind (1831–1916), presuponiendo, para ello, una comprensión del significado y propiedades de los números racionales, a partir de los cuales caracterizaron los números irracionales, los que realmente suponían la principal dificultad en la estructuración formal del número real.

Así impone la tradición que los números reales se construyen a partir de los racionales. Pero, en los primeros años de la década de los 80 Schanuel comentó una construcción muy interesante de los números reales la cual fue abordada como objeto de estudio por parte de Arthan, Street, Mejía, entre otros; a quienes les interesó seguramente por su forma particular de demostrar que los números reales pueden ser contruidos partiendo de los números enteros, sin hacer uso explícito de los números racionales. Luego es casi natural preguntarse:

¿Cómo puede influir en la enseñanza de las matemáticas en la educación media, si los docentes conocen una construcción alternativa de los números reales, la cual se lleva a cabo desde los números enteros sin hacer uso explícito de los números racionales a partir de lo histórico-epistemológico?

La forma alternativa de construir los números reales por parte de Schanuel es el objeto de estudio de esta investigación la cual se llevará a cabo a partir de un estudio histórico - epistemológico.

Inicialmente se hará un recorrido historiográfico, considerando la proporcionalidad en la antigüedad griega como punto de partida, donde los pitagóricos tenían la absoluta certeza de

la conmensurabilidad de segmentos. Pero, fueron precisamente ellos mismos quienes encontraron una contradicción en su teoría, cuando descubrieron que no todos los procesos de relación entre segmentos eran finitos, descubriendo así las magnitudes inconmensurables.

Martiñon (1992, p. 319) dice:

La existencia de parejas de magnitudes inconmensurables provocó una situación de crisis, ya que la teoría de la semejanza obligaba a tener en cuenta razones de magnitudes que no eran expresables como razones de números enteros. La teoría del libro V de los *Elementos* viene a dar respuesta a este problema, considerando cocientes o razones de cualquier par de magnitudes homogéneas; es decir, no distingue entre razones de pares de magnitudes conmensurables y razones de pares de magnitudes inconmensurables.

Para la problemática de la escuela pitagórica se realizará un estudio de las proporciones de Eudoxo la cual constituye una respuesta al problema de los inconmensurables. Esta teoría se incluye en el libro V de los *Elementos* de Euclides. La teoría de la proporción de Eudoxo estaba escrita en lenguaje retórico, que dificultó su comprensión a muchos matemáticos e historiadores, lo cual ha dado lugar a múltiples interpretaciones, logrando una mejor comprensión con la ayuda de lenguajes simbólicos y/o gráficos

Taton 1971 (citado en Martiñon 1992, p. 314) afirma que:

En el libro V nos encontramos ante una de las cimas del pensamiento matemático ... muy difícil por muy hermosa ... y puede afirmarse que este libro fue en verdad asimilado y superado tan sólo hace un siglo, poco más o menos ... Es una teoría que ni un Galileo ni un Torricelli han conseguido comprender, a pesar de sus esfuerzos

Se centrará la atención en la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides; cuya “mejor defensa y explicación de la definición que he visto es la dada por De Morgan.” (Heath,

1908, p. 122). En la interpretación de De Morgan sobre la proporcionalidad de Eudoxo, Arthan (2004) busca una intuición a fin de formalizar las ideas de Schanuel, es así que se refiere a esta construcción de los números reales como los reales de Eudoxo. Él afirma que en la interpretación que realiza De Morgan está implícita la definición de cuasi – homomorfismo entre los números enteros y es precisamente de esta definición de cuasi – homomorfismo con la cual parte la construcción que expone Mejía (2004) en el capítulo 2 en su tesis de maestría, para hacer una reconstrucción detallada de los números reales de Schanuel.

Finalmente se pretende mostrar a docentes en servicio y en formación algunas reflexiones sobre la importancia de conocer esta construcción alternativa de los números reales desde lo histórico - epistemológico para la enseñanza de las matemáticas en la educación media.

“hay que conocer el pasado para comprender el presente”

CAPÍTULO I

CONTEXTUALIZACIÓN HISTÓRICA

Las matemáticas son muy antiguas, Calderón (2014, p.8) dice que:

Algunos hechos permiten pensar que el hombre primitivo tenía una vaga idea del número, ya que en 1960 el belga Jean de Heinzelin de Braucourt encontró un hueso con unas marcas de conteo que data más o menos 20.000 años a.C.

Siempre ha existido la necesidad de contar, los babilonios y los egipcios mostraron grandes avances matemáticos que utilizaban para realizar conteo en sus negociaciones. “Los documentos más antiguos que nos quedan sobre la matemática de los egipcios y los babilonios nos muestran que estaban ya en posesión de un sistema completo de reglas de cálculo para los enteros naturales > 0 ” (Bourbaki, 1972, p.74). Sin embargo, estos documentos no muestran la más mínima preocupación por justificar las reglas empleadas y dar definiciones de las operaciones que aparecen. Por el contrario, los griegos tomaron las matemáticas como algo más allá de un conteo para negociaciones “se trata de un cuerpo teórico cimentado en la necesidad de demostrar” (Recalde, 2017, p. 1)

Entre los griegos se encuentran especialmente los llamados pitagóricos, escuela fundada por Pitágoras, a quienes les interesaba una matemática libre, estos tenían como principio de las cosas “el número”. Según esta teoría, todo se podía relacionar con los números y “sustentaban la idea de que para medir son suficientes los números de contar (Arbeláez y Recalde, 2011, p.40)

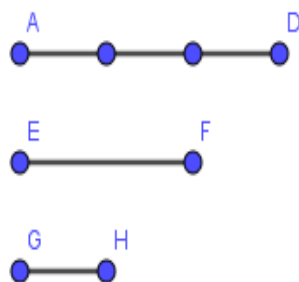
Se considera importante realizar un seguimiento historiográfico del concepto matemático de los números reales partiendo de la escuela pitagórica y sus magnitudes conmensurables e inconmensurables, pasar por la teoría de proporciones de Eudoxo como salida a la problemática de los inconmensurables, reconocer la importancia de la interpretación de De Morgan a la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides de la cual intuye Arthan la definición de cuasi- homomorfismo, hasta llegar a Mejía que hace uso de la definición de cuasi – homomorfismo para demostrar la forma alternativa de construir los reales. El seguimiento historiográfico permite conocer los procesos individuales y colectivos que suministran una buena información a la construcción de la noción de número real de acuerdo con cada momento histórico

1.1 Magnitudes conmensurables

Los pitagóricos sustentaban que para medir eran suficientes los números de contar, lo que les daba la absoluta certeza de la conmensurabilidad de segmentos. El proceso para determinar si dos magnitudes son conmensurables consistía en determinar las veces que la más pequeña está contenida en la grande sin sobrepasarla. Ahora, si queda un excedente se repite el paso anterior, determinando el número de veces que el excedente cabe en la menor de las magnitudes y así sucesivamente hasta hallar una magnitud con la cual se pueda encontrar una relación entre las dos originales.

Ejemplo 1.1 Si se desea comparar la magnitud AD con la magnitud EF, se puede ver en la gráfica 1.1 que $3GH = AD$ y $2GH = EF$, logrando así establecer una relación entre AD y EF, porque se logró hallar una magnitud capaz de medir a ambas.

Grafica 1.1



Magnitudes conmensurables

Este sería el caso más simple de comparar dos magnitudes, en este caso segmentos. Se puede dar el caso en que el proceso deba repetirse varias veces.

Ejemplo 1.2 Se tiene los segmentos AB y CD como se muestra en la gráfica 1.2

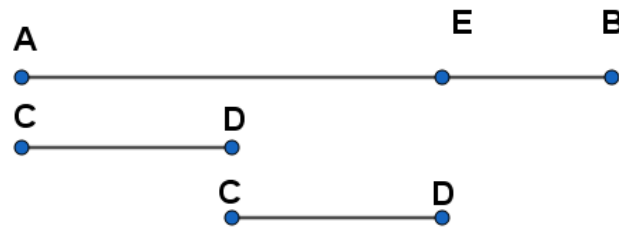
Gráfica 1.2



Conmensurabilidad de segmentos

Se pretende hallar la relación que existe entre los dos segmentos; es decir si existe una medida común entre AB y CD. Se coloca a CD en un extremo y a lo largo de AB las veces que sea posible, sin sobrepasar a AB (ver grafica 1.3)

Gráfica 1.3



Conmensurabilidad paso 1

Como ha quedado un resto EB, se entabla la relación entre este y CD como se hizo en el paso 1 (ver gráfica 1.4)

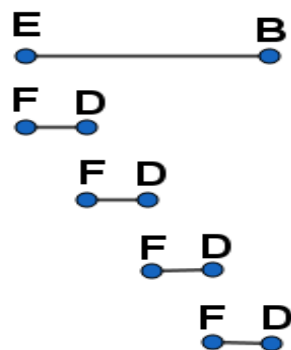
Gráfica 1.4



Conmensurabilidad paso 2

Nuevamente ha quedado un residuo FD, se debe repetir el proceso entre FD y EB

Gráfica 2.5



Conmensurabilidad de segmentos

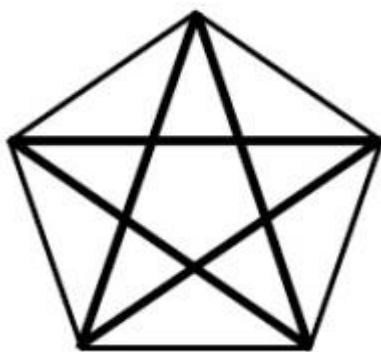
Finalmente se encontró un segmento que relaciona los dos segmentos originales porque ya no ha quedado un resto, de haber sido así, el proceso debe continuar hasta encontrarlo. Este arduo trabajo realizaba los pitagóricos para relacionar las cosas con los números.

En general se puede decir que dos magnitudes A y B son conmensurables si existen dos números n y m , tales que $nA = mB$.

1.2 Magnitudes inconmensurables

Los pitagóricos que disfrutaban de una matemática perfecta tenían su propio símbolo que los representaba como comunidad matemática, el emblema resulta al trazar las cinco diagonales en un pentágono regular. El cual se muestra a continuación.

Gráfica 1.6



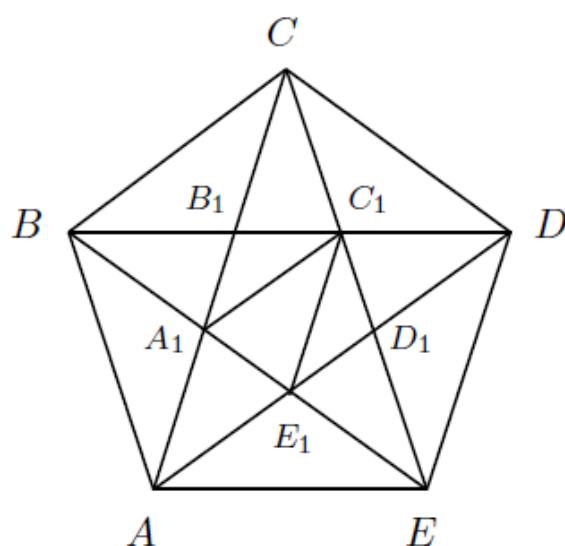
Símbolo de los pitagóricos

Se menciona una matemática perfecta de los pitagóricos por la seguridad que tenían, cuando al relacionar dos segmentos cualesquiera, estos siempre se rendirían a una medida común. Sin

embargo, siempre hay una controversia. Se cree que Hippasus de Metapontun miembro de la escuela pitagórica en el siglo V a de C, probó la existencia de magnitudes no conmensurables; es decir de aquellas que no cumplían el planteamiento según el cual para medir era suficiente con los números de contar. “el descubrimiento hecho por Hippasus ponía en evidencia que muchas de las suposiciones y demostraciones de la geometría hechas por ellos estarían incompletas; parece ser que esta revelación habría ocasionado su expulsión de la escuela pitagórica. (Calderón, 2014, p. 10)

A las magnitudes no conmensurables se les llamarían magnitudes inconmensurables, una relación de magnitudes de ese tipo se halló precisamente en el símbolo de los pitagóricos, cuando se intentó comparar el lado y la diagonal del pentágono regular el cual se verá a continuación.

Gráfica 1.7



Inconmensurabilidad en el pentágono

Se tiene en el símbolo de los pitagóricos el pentágono regular de vértices ABCDE (ver gráfica 1.7) y se desea comparar la diagonal AD con uno de sus lados, en este caso BC y determinar las veces que el más pequeño está contenido en el grande. Como $ABCD_1$ es un paralelogramo, $BC = AD_1$, lo que significa que BC cabe una vez en AD_1 y queda un resto D_1D . El siguiente paso es entablar la relación entre el sobrante y el lado BC, que ya se había dicho que era igual a AD_1 , haciendo uso de la congruencia de triángulos se tiene que $AE_1 = D_1D$, luego D_1D cabe una vez en AD_1 y queda un residuo E_1D_1 . Continuando con el proceso se debe determinar la relación que hay entre E_1D_1 y AE_1 que es lo mismo que determinar la relación entre E_1D_1 y A_1C_1 . Teniendo en cuenta que $A_1C_1E_1A$ es un paralelogramo y que $A_1B_1C_1D_1E_1$ es un pentágono regular, se debe comparar su diagonal A_1C_1 con su lado E_1D_1 , lo cual corresponde al problema inicial, así este proceso continua indefinidamente sin poder hallar una magnitud con la cual entablar una relación entre las dos magnitudes originales. “vale la pena destacar la tremenda paradoja histórica que significó el que los símbolos pitagóricos más destacados... fueran los instrumentos de demolición de su creencia más sagrada: la inexcelcional conmensurabilidad de los segmentos.” (Jiménez, 2006, p.95)

Otro ejemplo de inconmensurabilidad de segmentos se puede ver, cuando se trata de establecer la relación entre la diagonal y un lado de un cuadrado; que al seguir la teoría de los pitagóricos, también se llega a un proceso que no termina y se verifica que no se puede encontrar un segmento que los relacione.

1.3 La teoría que admite inconmensurables

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, “echó por tierra los planteamientos pitagóricos respecto a la posibilidad de expresar los fenómenos del universo mediante números (naturales)” (Mora y Torres, 2004, p.58). Con ese descubrimiento, ocurre la necesidad de

cambiar el pensamiento matemático de los griegos; es decir, había que cambiar el concepto que se tenía de razón, base de la proporción. El nuevo concepto tendría que abarcar magnitudes conmensurables como magnitudes inconmensurables.

Una posible solución al problema de la inconmensurabilidad es planteada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C aprox.) discípulo de Platón, quien consideró razones de cualquier par de magnitudes, conmensurables o inconmensurables siempre y cuando estas sean homogéneas; es decir, no pueden ser de distinta naturaleza, “no se puede establecer una razón entre el tamaño de un segmento y el tamaño de una superficie, así como tampoco entre el tamaño de un ángulo y el tamaño de un volumen, entre otros” (Guacaneme, 2012, p.117). De la misma manera, Eudoxo planteó proporciones de magnitudes homogéneas dos a dos “que, de paso, aportaría los elementos necesarios para formalizar los números reales, aunque la sutileza y profundidad de sus planteamientos sólo fue comprendida por Dedekind en el siglo XIX” (Mora y Torres, 2004, p. 62)

Eudoxo encontró la salida a este problema sin emplear números, quedando esta teoría vinculada únicamente a la geometría. Luego, las razones y proporciones eran relaciones entre magnitudes y solo en algunos casos entre números.

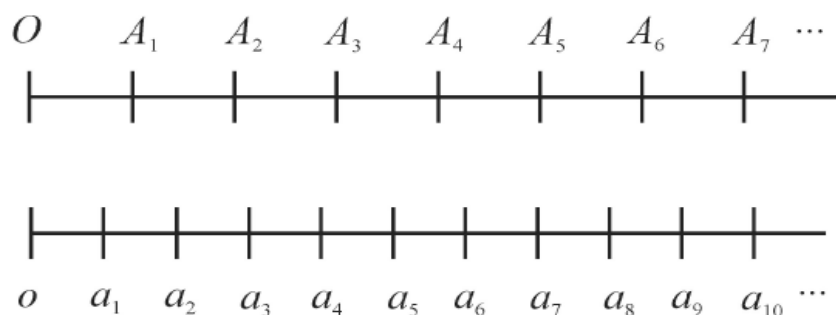
1.4 Proporcionalidad de Eudoxo-Euclides

La teoría de la proporción que se encuentra en el libro V de los *Elementos* de Euclides “que generalmente se atribuye a Eudoxo” (Martíñon, 1992, p. 313) fue quien dio la salida al problema de la inconmensurabilidad. Pero, para poder hablar de proporcionalidad es necesario primero hablar de lo que es una razón; una razón donde se pueda relacionar tanto magnitudes conmensurables como inconmensurables.

En la definición 3 del libro V de los *Elementos* se habla de razón como sigue: “Una razón es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo con respecto a su tamaño” (Kline, 1992, p. 104) “La Definición introduce la idea de razón de dos magnitudes, pero no es propiamente una definición, sino más bien se trata de una llamada a la intuición acerca de lo que es una razón.” (Martíñon, 1992, p. 320). Según Jiménez (2006) ya Eudoxo antes que Euclides había previsto este problema y anticipado la solución. Se tratará de aclarar con un ejemplo¹.

Ejemplo 1.3 Se tienen dos segmentos D y L y a partir de un punto **O** marquemos en una recta cualquiera una serie de puntos consecutivos A_1, A_2, A_3 , etc. cada uno separado de su antecesor por la longitud de D. En otra recta paralela a la anterior y a partir de un punto **o** situado en la perpendicular a ambas que pasa por **O**, marquemos una serie de puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, etc. Separados por una distancia L, tal como se muestra en la figura 1.8.

Figura 1.8



Construcción del concepto de razón

¹ Ejemplo tomado de Jiménez (2006, p. 96)

Se supone en principio que D y L son conmensurables; en este caso, cada $5D$ se tiene una coincidencia con alguna $7L$, es decir, coincidirán A_5 con α_7 , A_{10} con α_{14} , A_{15} con α_{21} , etc. (ver figura 1.8) Recíprocamente, si encontramos una coincidencia entre alguna de las A con alguna de las α , supongamos A_m con α_n , es claro entonces que cada mD se corresponde con una nL , de donde se sigue que los segmentos en cuestión serían conmensurables.

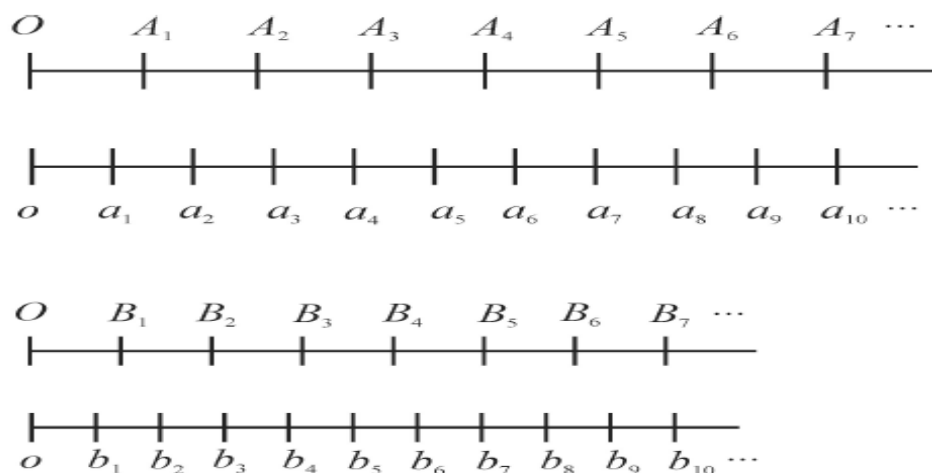
Ahora si D y L son segmentos inconmensurables, entonces es imposible que coincida alguna A con alguna α ; se presentará uno de los dos casos, siempre existirá una A que sobrepase a alguna α escogida y, viceversa. En términos de D y L , se puede afirmar que algún múltiplo de L será mayor que cualquier múltiplo particular de D o viceversa. “Esta es la clave de la observación de Eudoxo que sería recogida por Euclides en la Def. V. 4²: *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.*” (Jiménez, 2006, p. 97)

Teniendo un poco más claro la definición de razón que plantean Eudoxo-Euclides ya se puede hablar de la definición de proporción cuando las magnitudes que intervienen son inconmensurables; es decir, se puede entablar la igualdad de razones, teniendo en cuenta una vez más, que no es un razón entre números y mucho menos una igualdad entre razones de números. Luego, se podría comparar la diagonal y un lado de un cuadrado con la diagonal y un lado de otro cuadrado que como ya se mencionó son inconmensurables. “Pero esta es una labor que, en sí misma, significa nada menos que la propia reelaboración del concepto de proporción. Es aquí donde Euclides arranca los mejores frutos del árbol que sembró Eudoxo.” (Jiménez, 2006, p. 97). Se intentará aclarar la definición de proporción con un ejemplo³

² Se refiere a la definición 4 del libro V de los *Elementos* de Euclides.

³ Tomado de (Jiménez, 2006, p.97)

Gráfica 1.9



Concepto general de proporción

Ejemplo 1.4 Suponiendo que a la construcción mostrada en la gráfica 1.8 se acompaña con una construcción similar, en la que se identifican puntos B separados por segmentos congruentes d y puntos b separados por segmentos congruentes l , tal como se muestra en la gráfica 1.9, suponiendo también que los pares D, L y d, l son, diagonales y lados respectivos de dos cuadrados distintos; de manera que las dos líneas identificadas con los puntos B, b representan un modelo a escala de las dos identificadas con los puntos A, a . Esto no puede significar otra cosa que el hecho de esperar que las posiciones relativas entre cualquier par A, a se correspondan en idéntica forma con el par similar B, b . Así, del hecho de que A_3 esté entre A_4 y A_5 , se espera que B_3 esté entre b_4 y b_5 . En resumen, las posiciones relativas de dos múltiplos distintos de D y L se corresponden a las posiciones relativas de los mismos múltiplos de d y l . Incluso esto sería verdadero en el caso de que D y L (y, por supuesto, d y l) fueran conmensurables, con la ventaja adicional en este caso de que las posiciones relativas pueden incluir la coincidencia.

1.5 Los Elementos de Euclides

“La obra de Euclides goza de la opinión de ser una de las exposiciones científicas más brillantes, lúcidas y didácticas” (Martíñon, 1992, p 311). En esta obra Euclides recopila la matemática de sus antepasados.

Babini y Rey (2000, p.71) dicen:

Los *Elementos* no contienen toda la geometría griega de la época, ni constituyen un resumen de toda ella; sin duda contiene una buena parte de la matemática elaborada por los matemáticos griegos anteriores a Euclides y por Euclides mismo, pero esa parte no fue tomada al azar, sino seleccionada de acuerdo con un criterio prefijado que convirtió a ese conjunto de conocimientos en un sistema estructurado según un método

Ese sistema y ese método resultaron tan fecundos que no solo la obra de Euclides eclipsó otros *Elementos* redactados anteriormente sino que no se poseen obras análogas posteriores a las de Euclides.

En esta obra de los *Elementos*, Euclides empieza exponiendo una serie de definiciones y nociones comunes las cuales utiliza para demostrar las proposiciones.

De los 13 libros de la obra de Euclides se prestará total atención al libro V “basado en los trabajos de Eudoxo, está considerado como el mayor logro de la geometría euclídea; su contenido y significado se han debatido más extensa e intensamente que cualquier otra porción de los *Elementos*” (Kline, 1992, p.103) por la dificultad que le encuentra al interpretar algunas definiciones escritas en lenguaje retorico lo que dificultó a muchos matemáticos e historiadores comprender por falta de un lenguaje simbólico o gráfico que lo acompañe.

Taton 1971 (citado en Martiñon 1992, p. 314) afirma que:

En el libro V nos encontramos ante una de las cimas del pensamiento matemático... muy difícil por muy hermosa... y puede afirmarse que este libro fue en verdad asimilado y superado tan sólo hace un siglo, poco más o menos.

En este libro se llevan a cabo las relaciones de magnitudes sin importar si son o no conmensurables y se pondrá la lupa especialmente a la definición 5 la cual es considerada una de las más importantes por la relación que guarda con los números reales

1.6 Definición 5 del libro V de los *Elementos*

La definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides según (Kline, 1992, p.104) dice:

Se dice que ciertas magnitudes están a la misma razón, la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, cuando al tomar cualesquier equimúltiplo de la primera y la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Según algunos autores esta definición de los *Elementos* de Euclides (300 a. C.) que se atribuye a Eudoxo (408 a.C.) tiene una gran relación con los números reales cuyas teorías formales aparecen en el siglo XIX específicamente en 1872 como lo dice (Mora, Torres, 2004, p. 95) luego, se necesitaron más de 20 siglos para entender lo que los *Elementos* de Euclides nos han estado hablando desde siempre y no se habían captado sus mensajes.

Cuesta, 1981 (citado en Martiñon 1992, p. 314) sostiene que:

La primera definición rigurosa de los números reales, tan rigurosa, sino más que cualquiera de las modernas, se contiene en las admirables definiciones 5 y 7 del libro V... durante siglos, su precisión tan escueta, la hizo inteligible.

Cuántas traducciones se tienen de esta definición 5 que confunde a muchos y que enamora a otros, será que las maravillas de sus frases no había encontrado receptor capaz de descubrir lo que lleva dentro; emisiones que no había encontrado receptor que cumpliera la intención que este libro se propone con su discurso escrito. La definición 5 menciona magnitudes y Euclides no da una definición de lo que significa magnitud “pero engloba en ese concepto a las longitudes, las áreas y los volúmenes” (Martiñon, 1992, p.316)

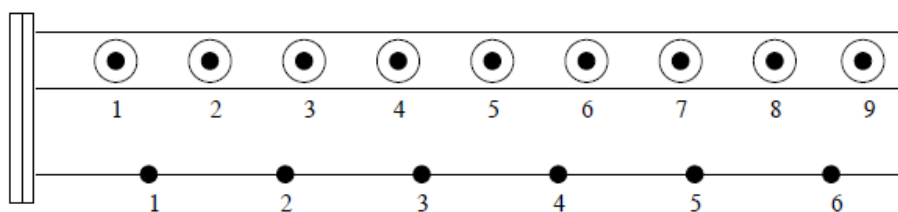
1.7 Intuición de Arthan de cuasi – homomorfismo en la definición 5 del libro V de los *Elementos*

A continuación se van a mostrar una traducción libre que se hace a las páginas 122 y 123 de Heath (1908), en la cual se nombra a De Morgan dando una explicación a la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides y una traducción libre que se le hace a la introducción de un artículo de Arthan (2004) llamado “Los números reales de Eudoxo”; en el cual describe como llega a la definición de cuasi – homomorfismo teniendo en cuenta la interpretación dada por De Morgan.

De Morgan da la siguiente interpretación teniendo en cuenta la gráfica 1.10⁴

⁴ La gráfica fue tomada de (Arthan, 2007, p.2)

Gráfica 1.10



Columnas y valladas de De Morgan

Se supone que hay una columna recta compuesta de columnas equidistantes (que entenderemos que significa las líneas verticales que forman los ejes de la columna, respectivamente), el primero de los cuales está a una distancia de un muro delimitador a igual distancia entre columnas consecutivas. En frente de la columna que haya una fila recta de barandillas equidistantes, el primero está a una distancia del muro delimitador igual a la distancia entre barandillas consecutivas. Deje que las columnas se enumeren desde la pared, y también las barandas. Se parte del supuesto de que la distancia de la columna (por ejemplo, C) y la distancia de la barandilla (por ejemplo, R) son diferentes y que pueden llevar el uno al otro cualquier razón, conmensurable o inconmensurable.

Si la construcción se lleva a cabo con cualquier medida, un espectador puede, por inspección, y sin medición, comparar C con R con cualquier grado de precisión.

Por ejemplo⁵, dado que la 6ª barandilla se encuentra entre la 8ª y la 9ª columna, de modo que $6R$ es mayor que $8C$ y menor que $9C$ (ver gráfica 1.10), lo que significa que R / C se encuentra entre $4/3$ y $3/2$.

⁵ Ejemplo tomado de (Arthan, 2007, p.2)

Luego: $\frac{4}{3} < \frac{R}{C} < \frac{3}{2}$ de igual manera $1,33 < \frac{R}{C} < 1,5$

Para obtener una noción más precisa, el observador podría continuar contando y encontrar que la 25ª barandilla se encuentra entre las columnas 35 y 36. Por lo tanto, R/C se encuentra entre $7/5$ y $36/25$.

Luego: $\frac{7}{5} < \frac{R}{C} < \frac{36}{25}$ de igual manera $1,4 < \frac{R}{C} < 1,44$

No hay límite en el grado de precisión así obtenible.

Cualquier alteración que se haga, por pequeña que sea en la primera barandilla afecta el orden de distribución; es decir, si la primera barandilla es movida de la pared, la segunda barandilla también será movida y la tercera y así sucesivamente. Luego, el orden de las barandillas con respecto a las columnas está desordenado.

Ahora si se realiza un modelo de la gráfica 1.10 de De Morgan con una pequeña alteración como se mencionó anteriormente en la cual c será la distancia de la columna y r la distancia de la barandilla.

Para asegurar que C debe tener para R la misma proporción que c a r , la distribución de las barandillas entre las columnas del modelo debe ser igual que la distribución de las barandillas entre las columnas del original. Por ejemplo, el modelo sería desproporcionado si su 37 barandilla cayera entre las columnas 18 y 19, mientras que las 37 barandillas del original cayeran entre las columnas 17 y 18.

Para que exista una relación entre el modelo y la construcción original de deben cumplir algunas condiciones. De acuerdo con Euclides, siempre que mC exceda, iguale o no llegue a nR , entonces mc debe ser mayor, igual o inferior a nr . Cualquier alteración en la distancia de la barandilla, aunque levemente, daría una distribución diferente.

Según Arthan 2004 la gráfica con la cual De Morgan interpreta la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides, sugiere una forma de representar los números reales. Si se construye la columna tal que la distancia C entre las columnas sea 1 y represente R por la secuencia de enteros en la cual el m -ésimo término, sea R_m , da el número de columnas a la izquierda o en línea con la m -ésima barandilla en la gráfica. Esta secuencia R_m representará R . En el ejemplo de la gráfica 1.10, las primeras R_m son 1, 2, 4, 5, 7, 8...

Se puede permitir una cantidad limitada de error en el cálculo de R_m sin afectar el número representado. Por ejemplo, si constantemente se olvidara de contar la primera columna, la secuencia resultante $R'_m = R_m - 1$ aún debe representar a R , dado que para m grande la diferencia entre R'_m / m y R_m / m será insignificante.

Si R pasa a ser un entero positivo, entonces la secuencia $R_m = mR$ será un homomorfismo⁶ aditivo, es decir, la ecuación $R_{m+n} = R_m + R_n$ se mantendrá para todo m y n . Ahora para un R arbitrario, esta ecuación debe ser "aproximadamente verdadera", lo cual lleva a la definición de Cuasi – Homomorfismo.

Luego Arthan (2004) intuye la definición de cuasi – homomorfismo gracias a la interpretación que realiza De Morgan de la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides que se le atribuye a Eudoxo, definición de cuasi – homomorfismo con la que trabaja Mejía (2004) para demostrar la construcción de forma alternativa de los números reales de Stephen Schanuel, los cuales parten de los números enteros sin hacer uso explícito de los números racionales; que ilustra en el capítulo 2 de su Maestría que lleva por nombre “los reales efectivos de Schanuel” de la cual se tomarán los apartes técnicos formales en el presente trabajo de grado.

⁶ Se puede leer los preliminares pág. 44 para recordar lo que es un homomorfismo

CAPÍTULO II

PRELIMINARES

El eje central del presente trabajo de grado es mostrar una construcción de los números reales de forma alternativa, partiendo de los enteros sin tocar explícitamente los racionales y como puede influir en docentes de matemáticas que se encuentran en formación y en servicio. Para una mejor comprensión de la demostración que realiza Mejía (2004), se empezara dando algunos preliminares que serán útiles para que se vaya identificando de lo que se hablara más adelante. Se realizaran algunas demostraciones con el fin de que el lector recuerde como se hacen, ya que en el análisis de la construcción de los reales de Schanuel se verán muchas demostraciones, algunas un poco más fáciles que otras.

Los preliminares se nombraran según la posición en la que se necesiten en la demostración principal. Se empezara con algunos axiomas de los números enteros porque es desde donde parte la demostración principal; recordando que la demostración nos cuenta como se construyeron los números reales a partir de los números enteros (por eso se empieza con los números enteros) y se llegara a los números reales como anillo completo para lo que se va a necesitar recordar definiciones como: relaciones, grupos, subgrupos, homomorfismos; entre otros.

2.1 Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Como ya se mencionó la construcción de los números reales de Schanuel, empieza desde los números enteros, por esa razón se quiere mostrar las propiedades de estos números como punto de partida en los preliminares y algunas demostraciones que se consideraron pertinentes que docentes en formación y en servicio conozcan o recuerden.

A continuación se presentaran algunos axiomas tomados de Suárez, (1994, p. 9) al cual se le añadió el nombre de la propiedad y se tomó por separado la adición y la multiplicación.

Axiomas fundamentales:

- 0) Existen dos funciones $s, p: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ llamadas, respectivamente, adición y multiplicación. Si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $s(a, b)$ y $p(a, b)$ se simbolizan respectivamente $a + b$, ab y se llaman la suma y el producto de a y b . Se suele decir que $\mathbb{Z}$ es cerrado con respecto a las operaciones adición y multiplicación. Estas operaciones son únicas, lo cual significa que son operaciones bien definidas.

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $(a, c) = (b, d)$ y por tanto $a + c = b + d$; es decir se puede sumar un mismo número entero a ambos lados de una igualdad.

Axiomas de la suma en los números enteros.

- 1) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$. (Propiedad asociativa)
- 2) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b = b + a$. (Propiedad conmutativa)
- 3) Existe un único entero 0 (cero) tal que $a + 0 = a$. para todo $a \in \mathbb{Z}$. (0 se le llama el neutro para la adición) (Propiedad modulativa)
- 4) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces existe un único $-a \in \mathbb{Z}$ (el opuesto de a) tal que $a + (-a) = 0$ (Inverso aditivo)

Axiomas del producto en los números enteros.

- 1) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a (b c) = (a b) c$ (Propiedad asociativa)
- 2) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a b = b a$ (Propiedad conmutativa)
- 3) Existe un único entero $1 \neq 0$ tal que $a 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. (1 se llama el neutro para la multiplicación) (Propiedad modulativa)
- 4) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Si $ab = ac$ entonces $b = c$. (Propiedad cancelativa)
- 5) Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a (b + c) = ab + ac$. (Propiedad distributiva del producto respecto a la suma por izquierda)

Haciendo uso de estos axiomas se pueden realizar demostraciones de teoremas como:

Teorema 2.1: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, y $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

Demostración:

Operación	Propiedad
$a + b = a + c$	Hipótesis
$\exists (-a)$ tal que $a + (-a) = 0$	Inverso aditivo
$(-a) + a = 0$	Conmutativa para la suma
$(-a) + a + b = (-a) + a + c$	Axioma 0
$(-a + a) + b = (-a + a) + c$	Asociativa de la suma
$0 + b = 0 + c$	Inverso aditivo
$b = c$	Modulo de la suma ■

Teorema 2.2: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a \cdot 0 = 0$

Demostración:

Operación	Propiedad
$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	Modulativa para la suma
$= a \cdot 0 + [a + (-a)]$	Inverso aditivo
$= a \cdot 0 + [a \cdot 1 + (-a)]$	Modulativa para el producto
$= [a \cdot 0 + a \cdot 1] + (-a)$	Asociativa para la suma
$= a(0 + 1) + (-a)$	Distributiva del producto con respecto a la suma por la derecha
$= a \cdot 1 + (-a)$	Modulativa para la suma
$= a + (-a)$	Modulativa para el producto
$a \cdot 0 = 0$	Inverso aditivo ■

Teorema 2.3: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $-(-a) = a$

Demostración:

Operación	Propiedad
$(-a) + a = 0 \quad (1)$	Inverso aditivo
$(-a) + [-(-a)] = 0 \quad (2)$	Inverso aditivo
$(-a) + [-(-a)] = (-a) + a$	Igualando (1) y (2)
$[-(-a)] = a$	Por teorema 2.1 ■

Se realizaron algunas demostraciones formales de algunos teoremas porque en este documento se van a encontrar con muchas demostraciones y esta será la forma para que el lector se familiarice con ellas.

2.2 Inducción matemática

La inducción matemática es una propiedad especial para los números enteros positivos, lo que aquí se va a mostrar fue tomado de Suárez (1994, p. 15), para que se recuerde como se hacen algunas demostraciones por este método, ya que en la demostración que realiza Mejía sobre los reales de Schanuel la utiliza.

Teorema 2.4: Si $p(n)$ es una proposición que se enuncia para enteros positivos n , y se cumple:

- I) $p(n)$ es verdadera
 - II) Siempre que $p(k)$ es verdadera ($k \in \mathbb{Z}^+$) se tiene la veracidad de $p(k+1)$
- entonces $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

La demostración de este teorema se puede ver en (Suárez, 1994, p. 15), aquí sólo se presentará un ejemplo.

Ejemplo 2.5: demostrar empleando el principio de inducción matemática que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

Tengo que: $p(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Para el caso base. Si $n = 1$ entonces

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1 \quad (\text{verdadero})$$

Se supone que se cumple para un $p(k)$ entonces

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{Hipótesis inductiva})$$

Queda demostrar que se cumple para $p(k+1)$

$$p(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{k+1(k+2)}{2} \quad (*)$$

Remplazando la hipótesis inductiva en $(*)$ se tiene:

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k+1(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k+1(k+2)}{2}$$

$$\frac{k+1(k+2)}{2} = \frac{k+1(k+2)}{2}$$

Entonces se cumple para $p(k+1)$

$$\text{Por lo tanto } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \blacksquare$$

2.3 Relaciones:

Se considera de mucha importancia esta parte de los preliminares porque en la demostración principal, se va a hablar sobre relación de equivalencia, conjunto cociente y la compatibilidad

de un conjunto con las operaciones. Se recomienda leer esta parte con mucho cuidado y si es el caso profundizar sobre ella para una mayor comprensión de la demostración de Schanuel.

Buena parte de las definiciones y ejemplos fueron tomados de (Muñoz, 2012, págs. 101-111), en algunos casos se hace uso del pie de página para ubicar exactamente la página de donde fue tomado o si fue tomado de otro libro.

Definición 2.6: Una relación (*binaria*) es un conjunto de parejas ordenadas

(El conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ se designa por (a, b) y se llama la *pareja ordenada* con primera componente a y segunda componente b .)

En lo que sigue se considera relaciones definidas en un conjunto A (es decir de A en A)

Definición 2.7: Una relación definida en A se llama **reflexiva** en A , si todo elemento de A está relacionado mediante ella consigo mismo.

R es reflexiva en $A \leftrightarrow (\forall x \in A) (x R x)$

Ejemplo 2.8: Sea $A = \{a, b, c\}$; las siguientes son relaciones reflexivas en A :

$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

Definición 2.9: Una relación definida en un conjunto se llama **simétrica** en dicho conjunto si cada vez que un elemento está relacionado (mediante ella) con otro, también el segundo lo está con el primero.

R es simétrica en $A \leftrightarrow (\forall x, y \in A) (x R y \rightarrow y R x)$

Ejemplo 2.10: Sea $A = \{a, b, c\}$; la siguiente es una relación simétrica en A :

$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

Definición 2.11: Una relación definida en un conjunto se llama **transitiva** en dicho conjunto, si cada vez que un elemento esté relacionado mediante ella con un segundo y éste a su vez lo esté con un tercero, entonces también el primero está relacionado con el tercero; más precisamente,

$$R \text{ es transitiva en } A \leftrightarrow (\forall x, y, z \in A) (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$$

Ejemplo 2.12: Sea $A = \{ a, b, c \}$; las siguientes relaciones son transitivas en A:

(R_1 y R_2 son los mismos de los ejemplos 2.7 y 2.9 respectivamente)

$$R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, b), (c, c) \}$$

$$R_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c) \}$$

Definición 2.13: Una relación se llama **de equivalencia** en un conjunto A si ella es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Ejemplo 2.14: Sea $A = \{ a, b, c \}$; la siguiente relación es de equivalencia en A:

$$R_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c) \}$$

Porque como se pudo ver en los ejemplos 2.7, 2.9 y 2.11 R_2 es reflexiva, simétrica y transitiva.

Para el siguiente ejemplo sobre relación de equivalencia se van a dar algunas definiciones y teoremas de congruencias⁷.

Definición 2.15: Sean a y b enteros cualesquiera y n un entero positivo. Si $n \mid (a - b)$ decimos que a y b son *congruentes modulo n* y escribimos $a \equiv b \pmod{n}$

⁷ Tomado de (Jiménez, Gordillo & Rubiano, 2004, p.98 - 100), $(n \mid (a - b))$ se lee n divide a $(a - b)$

Teorema 2.16: La congruencia módulo n es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Demostración.

1. *Reflexiva.* Para cualquier entero a , $n \mid (a - a) = 0$ es decir $a \equiv a \pmod{n}$.
2. *Simétrica.* Si $a \equiv b \pmod{n}$ entonces $n \mid (a - b)$ y por lo tanto $n \mid -(a - b) = b - a$, luego $b \equiv a \pmod{n}$.
3. *Transitiva.* Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$ entonces $n \mid (a - b)$ y $n \mid (b - c)$, por lo tanto $n \mid \{(a - b) + (b - c)\} = a - c$, es decir $a \equiv c \pmod{n}$.

Luego la congruencia módulo n es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Definición 2.17: Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto A no vacío y sea b un elemento cualquiera de A ; se llama **clase de equivalencia de b** (con respecto a la relación R) al conjunto constituido por todos los elementos de A que están relacionados mediante R con b .

Se nota $[b]_R$ o simplemente $[b]$ si no hay lugar a confusiones

Ejemplo 2.18: La relación $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ es de equivalencia en $A = \{a, b, c\}$; las clases de equivalencia determinadas por ella son:

$$[a]_{R_2} = \{a, b\} \quad \text{y} \quad [c]_{R_2} = \{c\}.$$

Ejemplo 2.19: Si se considera en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo 6

$$[1] = \{\dots - 11, -5, 1, 7, 13, 19, \dots\}$$

$$= \{1 + 6n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ejemplo 2.20: Si se considera $a \equiv b \pmod{3}$ en $\mathbb{Z}$ se hallara la clase de equivalencia de 5, 10, 11 y -4 . Se nota $[5]$, $[10]$, $[11]$, $[-4]$ respectivamente.

$$[5] = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, \mathbf{5}, 8, 11, 14, \dots \}$$

$$[10] = \{ \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \mathbf{10}, 13, 16, 19, \dots \}$$

Si se toman del conjunto $[5]$ dos elementos cualquiera, por ejemplo 11 y -4 y se hallan las $[11]$ y $[-4]$ tenemos:

$$[11] = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \mathbf{11}, 14, \dots \}$$

$$[-4] = \{ \dots, -7, -\mathbf{4}, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots \}$$

En este ejemplo se puede observar que $5 \in [5]$, $10 \in [10]$, $11 \in [11]$, $-4 \in [-4]$. Luego una clase de equivalencia nunca es vacía. También, se puede ver en el ejemplo que las clases de equivalencia de 5, 11, -4 son iguales. Luego $[5] = [11] = [-4]$

Con este ejemplo se puede entender el siguiente lema.

Lema 2.21⁸: Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A no vacío; si a, b son elementos cualesquiera de A , se tiene que:

- i) $a \in [a]$ (se lee a pertenece a la clase de equivalencia de a)
- ii) Las afirmaciones $a R b$, $a \in [b]$ y $[a] = [b]$ son equivalentes

La demostración de este lema se puede ver en (Muñoz, 2012, p 108)

Dada una relación de equivalencia R en A , como una clase de equivalencia de un elemento de A es un subconjunto de A , podemos formar el conjunto de todas las clases de equivalencia

⁸ Tomado de (Muñoz, 2012, p. 107 – 108)

con respecto a R de los elementos de A (notado A / R) con solo *separar* de $P(A)$ aquellos elementos que sean clases de equivalencia según R , es decir,

$$A / R = \{ Y \in P(A) \mid (\exists x \in A) (Y = [x]_R) \}$$

Se le acostumbra llamar el **conjunto cociente** de A por R . (R es una relación de equivalencia es decir: reflexiva, simétrica, transitiva y A es un conjunto no vacío)

Para el siguiente ejemplo sobre conjunto cociente se va a hacer uso de la relación R_2 de equivalencia del ejemplo 2.17.

$R_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c) \}$ es de equivalencia en $A = \{ a, b, c \}$; las clases de equivalencia determinadas por ella son:

$$[a]_{R_2} = \{ a, b \} \quad \text{y} \quad [c]_{R_2} = \{ c \}.$$

Ejemplo 2.22: $\{ a, b, c \} / R_2 = \{ \{ a, b \}, \{ c \} \}$

Ejemplo 2.23: Si se considera en la relación de congruencia módulo 3,

$$[5] = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots \}$$

$$[10] = \{ \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots \}$$

$$[-6] = \{ \dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \}$$

Se tiene:

$$\mathbf{Z} / \equiv = [5] \cup [10] \cup [-6]$$

Se observa además que los conjuntos $[5]$, $[10]$ y $[-6]$ son disyuntos dos a dos y que ninguno de ellos es vacío.

Teorema 2.24: A / R es una colección de conjuntos no vacíos, disyuntos dos a dos y cuya unión es todo A .

Con: A = conjunto no vacío

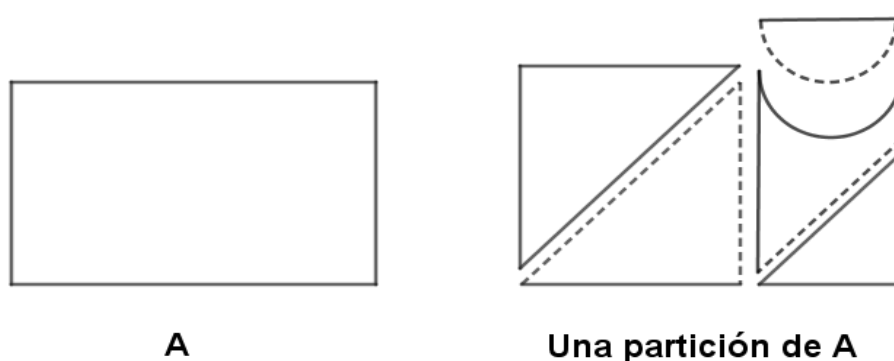
R = relación de equivalencia

A / R = conjunto cociente

La demostración de este teorema se puede ver en (Muñoz, 2012, p. 109)

Si se toma una hoja A de papel y con unas tijeras se corta en 5 pedazos, la colección de estos pedazos posee las mismas propiedades atribuidas a A / R en el teorema anterior:

Gráfica 4.1



Partición de un conjunto A

Los pedazos son no vacíos, disyuntos dos a dos y su unión es A ; a una colección tal se le llama una *partición* de A .

Definición 2.25: *Una partición de un conjunto no vacío A es una colección de subconjuntos no vacíos de A , disyuntos dos a dos y cuya unión es A .*

El teorema anterior nos dice que toda relación de equivalencia R en A determina una partición A / R del conjunto A ; el recíproco también es cierto.

Teorema 2.26: Toda partición de un conjunto no vacío determina una relación de equivalencia sobre dicho conjunto.

La demostración de este teorema se puede ver en (Muñoz, 2012, p. 110)

Ahora se puede pasar a un tema relacionado y de gran utilidad. Se supone que en un conjunto A se halla definida una operación $*$: $A \times A \rightarrow A$ y una relación de equivalencia R . Se quieren dar condiciones que permita usar la operación anterior para definir de una manera natural una operación en el **conjunto cociente** A / R ; se desea mediante una operación entre elementos de A , inducir una operación entre clases de equivalencia.

Definición 2.27: Se dice que **una relación de equivalencia** R sobre un conjunto A es **compatible con una operación** $*$ definida en A , si se tiene que para a, a', b, b' cualesquiera de A ,

$$a R a' \wedge b R b' \rightarrow (a * b) R (a' * b').$$

Nótese que la compatibilidad significa que si se cambian los operandos a y b por otros a' y b' respectivamente equivalentes, también los resultados de $a * b$ y $a' * b'$ son equivalentes. Si se tiene en cuenta el lema 2.21 y se toman clases de equivalencia, la implicación anterior se transforma en

$$([a] = [a'] \wedge [b] = [b']) \rightarrow ([a * b] = [a' * b']).$$

Analizando esta expresión se deduce que cuando hay compatibilidad, es posible definir una operación (notada $[*]$) entre clases de equivalencia de la forma siguiente:

$$[a] [*] [b] = [a * b]$$

La última implicación dice que $[*]$ está bien definida, que no hay ambigüedad y que realmente $[*]$ es una función de $A / R \times A / R$ en A / R .

Se dice que $[*]$ es la operación obtenida por *paso al cociente* de $*$.

Ejemplo 2.28: Si se considera el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros con la adición; se sabe que la congruencia módulo 3 es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Se supone que $a \equiv a' (3) \wedge b \equiv b' (3)$

Existen enteros r, s tales que: $(a - a' = 3r) \wedge (b - b' = 3s)$

Sumando miembro a miembro estas igualdades se tiene:

$$(a - a') + (b - b') = 3r + 3s$$

$$(a + b) - (a' + b') = 3(r + s) \quad \text{es decir}$$

$$a + b \equiv a' + b' (3)$$

Quedando comprobada la compatibilidad; se puede entonces pasar al cociente la adición

$$[m] [+] [n] = [m + n]$$

Esta es una “adición” entre clases de equivalencia módulo tres, o sea en el conjunto $\mathbb{Z} / (3)$, notación que se usa para la colección de estas clases de equivalencia.

En $\mathbb{Z}$ la congruencia módulo 3 también es compatible con la multiplicación de enteros.

$$\text{Luego: } [m] [\cdot] [n] = [m \cdot n]$$

2.4 La función parte entera: se considera importante tenerlo en los preliminares porque más adelante se hablara sobre esta función, en especial de la parte entera superior.

Definición 2.29⁹: Sea x un número real. Existe un único entero que representamos por $[x]$ que satisface la desigualdad

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

En otras palabras $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x . al entero $[x]$ lo denominamos *la parte entera de x* .

⁹ Tomado de (Jiménez, Gordillo & Rubiano, 2004, p. 64)

Definición 2.30: Función parte entera superior: a cada número real asigna el número entero más próximo por exceso, es decir, el menor número entero igual o mayor que ese número real.

$$\lceil x \rceil = \min \{ K \in \mathbb{Z} \mid x \leq K \}$$

- Si $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\lceil x \rceil \geq x$

Ejemplo: $\lceil 2.4 \rceil = \min \{ K \in \mathbb{Z} \mid 2.4 \leq K \} = 3$

- Si $x \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\lceil x \rceil = x$

Ejemplo: $\lceil 2 \rceil = \min \{ K \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq K \} = 2$

2.5 Valor absoluto:

Se recomienda en esta parte poner atención a la demostración de desigualdad triangular inversa porque se utilizara en algunas demostraciones más adelante

Geoméricamente, el valor absoluto de un número es la distancia del número al cero y esta idea se puede extender a distancia entre dos números. Veamos esto formalmente:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Considerando los enteros a, b, c entonces:

Teorema 2.31: $|a| = |-a|$

Demostración: se van a considerar tres casos; cuando $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$.

- Si $a = 0$ se tiene que: $|0| = 0 = |-0|$

- Si $a < 0$ se tiene que: $|a| = -a$. Luego como $a > 0$ entonces $-a > 0$, de esta manera

$$|-a| = -a = |a|$$

- Si $a > 0$ se tiene que: $|a| = a$. Luego como $a > 0$ entonces $-a < 0$, de esta manera

$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$

Por lo tanto. $|a| = |-a|$ ■

Teorema 2.32: $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

Teorema 2.33: $|a| - |b| \leq |a - b|$ (desigualdad triangular inversa)

Demostración:

$|a| = |a + 0| = |a + b - b| = |a - b + b|$. Ahora por la desigualdad triangular se tiene que:

$$|a - b + b| \leq |a - b| + |b| \text{ y así}$$

$$|a| \leq |a - b| + |b|$$

Por lo tanto $|a| - |b| \leq |a - b|$ ■

Que es lo mismo que tener: $|a - b| \geq |a| - |b|$

Teorema 2.34: $|a - b| = |b - a|$

Demostración:

$$|a - b| = |-(b - a)| \text{ por el teorema 4.1.5.1 } |-(b - a)| = |b - a|$$

Por lo tanto: $|a - b| = |b - a|$ ■

Se realizaron algunas demostraciones con valor absoluto porque en la demostración principal de este documento que se encuentra en el siguiente capítulo llamado análisis de la

construcción de los números reales de Schanuel realizada por Mejía; se trabajara mucho con el valor absoluto.

2.6 Grupos:

En esta parte de los preliminares se quiso hablar de grupo y dar un ejemplo porque es necesario conocer esta definición, para hablar de homomorfismos. Esta parte fue tomada de (Herstein, 1988, p.40)

Se dice que un conjunto no vacío G es un grupo si en él hay definida una operación $*$ tal que:

- (a) $a, b \in G$ implica que $a * b \in G$. (Esto se describe diciendo que G es cerrado respecto a $*$.)
- (b) Dados $a, b, c \in G$, se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Esto se describe diciendo que es válida la ley asociativa en G .)
- (c) Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$ (e se llama elemento identidad o unidad de G .)
- (d) Para todo $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$. (Este elemento b se escribe como a^{-1} y se llama inverso de a en G .)

Ejemplo 2.35: El conjunto de los enteros con la operación suma es decir $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo, cumple con las propiedades clausurativa y asociativa como ya se mencionó, el elemento identidad es el 0 luego $e = 0$ y el inverso de a será $-a$ luego $a^{-1} = -a$.

Se dice que un grupo G es abeliano si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.

2.7 Subgrupo: Tomado de (Jiménez, Gordillo & Rubiano, 2004, p.181).

Un subconjunto H de un grupo G se llama un *subgrupo* de G si H es a la vez un grupo, con la misma operación que hay en G

Ejemplo 2.36: Si consideramos el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ de los números enteros con la adición y llamamos P al conjunto de los enteros pares e I al conjunto de los enteros impares, entonces $(P, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ pero $(I, +)$ no es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

2.8 Anillos: Tomado de (Suárez, 1994, p. 59)

Definición 2.37: Un anillo es un conjunto $R \neq \emptyset$ con las siguientes propiedades (axiomas):

A_0 : Existen dos funciones $s, p : R \times R \rightarrow R$ llamadas respectivamente *adición y multiplicación*.

Si $(a, b) \in R \times R$ $s(a, b)$ y $p(a, b)$ se simbolizan $a + b$ y ab y se llaman respectivamente *la suma y producto* de a y b .

A_1 : $(a + b) + c = a + (b + c)$ para a, b, c arbitrarios de R *Asociativa de la adición*.

A_2 : $a + b = b + a$ para todos $a, b \in R$ *conmutativa*

A_3 : R contiene un elemento, que se simboliza 0 , con la propiedad $a + 0 = a$, para todo $a \in R$ (0 se llama el *neutro* aditivo)

A_4 : para todo $a \in R$ existe un elemento $-a$ (opuesto de a) tal que $a + (-a) = 0$

P_1 : para todo a, b, c en R $(ab)c = a(bc)$ (*Asociativa de la multiplicación*)

P_2 : $a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$ para todos $a, b, c \in R$.

Siempre que se pretenda dar un ejemplo de un anillo R , debe especificarse los elementos de R y las funciones (u operaciones) que combinan sus elementos, y se debe proceder a verificar las propiedades anteriores para los elementos de R . Estrictamente hablando este anillo se simboliza $(R, +, \cdot)$

Ejemplo 2.38: un ejemplo de anillo es el conjunto de los números enteros con las funciones (u operaciones) de suma y producto y se simboliza: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

2.9 Homomorfismo:

Arthan menciona los homomorfismos, antes de llegar a la definición de cuasi – homomorfismos y después de analizar la interpretación de De Morgan sobre la definición 5 del libro V de Euclides. Esta parte fue Tomado de (Suárez, 1994, p. 115, 116)

Definición 2.39: Una función $f: G \rightarrow H$ donde G y H son grupos, tal que $f(ab) = f(a) f(b)$ para todos $a, b \in G$ es un *homomorfismo de grupos*.

Intuitivamente hablando, esta propiedad de f dice que la imagen de un producto en G es el producto de las respectivas imágenes en H .

Ejemplo 2.40: $G = \mathbb{R}$ con la adición, $H = \mathbb{R} - \{ 0 \}$ con la multiplicación; definimos $\phi(x) = 3^x$. la propiedad que hace de ϕ un homomorfismo es la de la función exponencial $3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y$

Definición 2.41: Un homomorfismo inyectivo se llama un *monomorfismo*, un epiyectivo es un *epimorfismo* y un biyectivo es un *isomorfismo*, y en este caso los grupos G y H se dicen *isomorfos*, en símbolos $G \cong H$

Definición 2.42: Una función $f: R \rightarrow R'$, R y R' anillos, es un *homomorfismo de anillos* si:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b), \text{ para todos } a, b \in R.$$

Observemos que un homomorfismo de anillos es homomorfismo de grupos aditivos y además preserva la segunda operación.

Las nociones de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo son similares a las correspondientes para grupos.

Cuando dos grupos, o anillos, son isomorfos, tanto sus elementos como sus operaciones se corresponden; en cierta forma ellos sólo difieren en que sus elementos se simbolizan de manera diferente. Más aún, el hecho de conocer un cómputo en uno de los grupos (anillos), permite realizar el cómputo con los elementos correspondientes en el otro.

Si dos grupos finito son isomorfos, la existencia de una biyección entre ellos implica que tienen el mismo orden.

2.10 Sucesiones: esta parte se considera de gran interés para la demostración que realiza Mejía sobre los números reales de Schanuel en especial la sucesión de Cauchy.

Definición 2.43: Una sucesión es una función cuyo dominio son los enteros positivos y codominio son los números reales. Una sucesión de denota como: $\{ X_n \}$

Ejemplo 2.44: La sucesión $2, 4, 6, 8, \dots \rightarrow \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$ puede ser representada como: $\{ 2n \}$

Definición 2.45: Sea $\{ X_n \}$ una sucesión, se dice que $\{ X_n \}$ converge al número L , si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, tal que $| X_n - L | < \varepsilon$, para todo $n \geq N(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

En este caso se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ X_n \} = L \quad \text{ó} \quad \{ X_n \} \rightarrow L$$

Definición 2.46: Sucesión de Cauchy. Tomado de (Kirkwood, J. R. 1995, p. 46).

La sucesión $\{ X_n \}$ es llamada sucesión de Cauchy si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, tal que $| X_n - X_m | < \varepsilon$, para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Teorema 2.47: $\{ X_n \}$ converge en $\mathbb{R}$ si y sólo, si $\{ X_n \}$ es de Cauchy.

Las anteriores definiciones, teoremas, demostraciones se consideran de gran ayuda para el presente trabajo ya que de una u otra manera muestra el camino a seguir en la demostración de los números reales de Schanuel. La idea de los preliminares es que sirvan de ayuda a medida que se estudia la demostración, para que llegado el caso y no se recuerde algo se pueda hacer con tan sólo devolver un par de páginas.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE SCHANUEL REALIZADA POR MEJÍA

Stephen Schanuel (1933-2014) realizó en los años 1980 una construcción de los números reales que no publicó, por ende es poco conocida, pero es interesante porque la construye a partir de los números enteros sin tomar explícitamente los números racionales; los cuales han sido de utilidad para la mayoría de las construcciones que se conocen de los números reales. Arthan se interesó en esta construcción a la cual llamó “Los reales de Eudoxo” y la lleva a cabo teniendo en cuenta la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides. En este trabajo de grado es de gran interés mostrar la construcción, por su forma alternativa de construir los números reales; para mostrar a docentes de matemáticas lo útil que puede llegar a ser para su formación profesional; se ha tomado como referente principal a Mejía (2004) quien trabajó con la construcción de los números reales de Schanuel en su tesis de maestría, para mostrar que la construcción es efectiva computacionalmente a los cuales llamó “Los reales efectivos de Schanuel”.

Para este acercamiento a la construcción de los números reales de Schanuel, se estudió detenidamente la demostración que realizó Mejía (2004) en el capítulo 2 de su tesis de Maestría; la cual parte de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ llamadas cuasi – homomorfismos y se trae a colación con pequeños aportes en algunas de sus demostraciones con el ánimo de que profesores de matemáticas en formación y en servicio la conozcan y comprendan con mayor facilidad, ya que esta construcción alternativa de los números reales “no ha llegado a ser lo suficientemente conocida por la comunidad matemática” (Mejía y Montoya, 2007, p. 86)

Stephen Schanuel no publicó su novedosa construcción, por ende es complicado establecer lo que da origen a su demostración “aunque se sabe que este vislumbró la construcción después de estudiar cuidadosamente la teoría de las proporciones de Eudoxo” (Mejía y Montoya, 2007,

p. 86). La teoría de las proporciones de Eudoxo se encuentra expuesta en el libro V de los elementos de Euclides y de la definición 5 de este libro Arthan intuye la definición de cuasi – homomorfismo apoyado en la interpretación que hace De Morgan.

Con la definición de cuasi – homomorfismo Mejía (2004) inicia la demostración siguiendo la vía de Schanuel. De esta misma manera se inicia la construcción alternativa de los números reales en el presente trabajo para continuar con el recorrido que se había empezado en los antecedentes históricos (ver pág. 25)

Definición 3.1 Se dice que una función $f \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es un cuasi – homomorfismo si y solo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $n, m \in \mathbb{Z}$, $|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M$

El conjunto de cuasi-homomorfismos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ será denotado con el símbolo $qH(\mathbb{Z})$

En búsqueda de una analogía, como la suma de homomorfismos es un homomorfismo y la composición de homomorfismos es un homomorfismo se debe probar que para los cuasi – homomorfismos, también se cumple.

Luego:

Proposición 3.2 Si $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ entonces $f + g \in qH(\mathbb{Z})$

Demostración. Sean M_1 y $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{Z}$

$|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M_1$ y $|g(n + m) - g(n) - g(m)| < M_2$ se tiene:

$$|(f + g)(n + m) - (f + g)(n) - (f + g)(m)| =$$

$$|f(n + m) + g(n + m) - f(n) - g(n) - f(m) - g(m)| =$$

$$|(f(n + m) - f(n) - f(m)) + (g(n + m) - g(n) - g(m))| \leq$$

$$|f(n + m) - f(n) - f(m)| + |g(n + m) - g(n) - g(m)| < M_1 + M_2 \quad \blacksquare$$

De esta manera se ha demostrado que la suma de cuasi – homomorfismos es un cuasi – homomorfismo, resta probar que la para la composición también se cumple.

Proposición 3.3 Si $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ entonces $f \circ g \in qH(\mathbb{Z})$

Demostración. Sean M_1 y $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |(f \circ g)(n+m) - (f \circ g)(n) - (f \circ g)(m)| &= \\ |f(g(n+m)) - f(g(n)) - f(g(m)) + f(g(n) + g(m)) - f(g(n) + g(m))| &\leq \\ |f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))| + |f(g(n) + g(m)) - f(g(n)) - f(g(m))| &< \\ |f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))| + M_1 \end{aligned}$$

Acotando $|f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))|$ se tiene:

$$g(n) + g(m) = g(n+m) + i \quad \text{con } -M_2 < i < M_2.$$

$$\text{Sea } \alpha_0 = \max \{ f(-M_2), f(-M_2+1), \dots, f(0), \dots, f(M_2-1), f(M_2) \}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} |f(g(n+m)) - f(g(n) + g(m))| &= |f(g(n+m)) - f(g(n+m) + i)| = \\ |f(g(n+m)) - f(g(n+m) + i) + f(i) - f(i)| &\leq \\ |f(g(n+m)) - f(g(n+m) + i) - f(i)| + |f(i)| &< M_2 + \alpha_0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se ha demostrado que la composición de cuasi – homomorfismo es un cuasi – homomorfismo.

Luego toda la estructura algebraica de $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, +, \circ)$ la hereda $(qH, +, \circ)$ pero este último conjunto con propiedades adicionales, dando lugar al siguiente corolario.

Corolario 3.4 La estructura $(qH(\mathbb{Z}), +, \circ)$ es una subálgebra de $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, +, \circ)$.

Definición 3.5 Dadas $f, g \in qH(\mathbb{Z})$, $f \simeq g$ si y sólo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$|f(n) - g(n)| < M$$

La siguiente proposición para (Mejía, 2004, pág. 10) es una afirmación y (Mejía y Montoya, 2007, p. 88) la deja como ejercicio; en el presente trabajo se realiza la demostración porque es de vital importancia que se conozca su prueba.

Proposición 3.6: $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $qH(\mathbb{Z})$

Para que la relación sea de equivalencia, la relación debe ser: reflexiva, simétrica y transitiva.
(Ver preliminares. Ejemplo 2,13 págs. 32 y 33)

Demostración:

Reflexiva: $|f(n) - f(n)| = 0 < 1 = M$

Es decir existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(n) - f(n)| < M$ por lo tanto $f \simeq f$

Simétrica: supongamos que $f \simeq g$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$, tal que para todo n entero,
 $|f(n) - g(n)| < M$.

Ahora:

$$|g(n) - f(n)| = |-(f(n) - g(n))| = |f(n) - g(n)| < M \quad \text{luego } g \simeq f$$

Transitiva: supongamos que $f \simeq g$ y $g \simeq h$ entonces existen M_1 y M_2 tal que:
 $|f(n) - g(n)| < M_1 \in \mathbb{N}$ y $|g(n) - h(n)| < M_2 \in \mathbb{N}$ entonces por la desigualdad triangular se tiene que:

$$|f(n) - h(n)| = |f(n) - g(n) + g(n) - h(n)| < M_1 + M_2.$$

Tomando $M = M_1 + M_2$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(n) - h(n)| < M$, es decir $f \simeq h$.

Así $\simeq$ es reflexiva, simétrica y transitiva por lo tanto $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $qH(\mathbb{Z})$ ■

Proposición 3.7 La relación $\simeq$ es una congruencia sobre $(qH(\mathbb{Z}), +, \circ)$ es decir es compatible con las operaciones $+$, $\circ$

Demostración.

Dadas $f, g, f', g' \in qH(\mathbb{Z})$, si $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ entonces $f + g \simeq f' + g'$.

Como $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ existen M_1 y M_2 tales que $|f(n) - f'(n)| < M_1$ y $|g(n) - g'(n)| < M_2$, luego.

$$|(f + g)(n) - (f' + g')(n)| =$$

$$|f(n) + g(n) - f'(n) - g'(n)| =$$

$$|(f - f')(n) + (g - g')(n)| \leq$$

$$|f(n) - f'(n)| + |g(n) - g'(n)| < M_1 + M_2$$

Análogamente se cumple que:

$$f \circ g \simeq f' \circ g'. \quad \blacksquare$$

Ahora $\simeq$ no solamente es una relación de equivalencia, sino que además es compatible con las operaciones $+$, $\circ$. Luego $\simeq$ es una congruencia; recordando que una relación de equivalencia es una congruencia, si y solo si, es compatible con las operaciones de su estructura algebraica.

La relación de equivalencia define las clases de equivalencia y si además su relación resulta ser una congruencia, entonces se garantiza la buena definición de las operaciones entre las clases. Ahora como $\simeq$ es una congruencia sobre $(qH(\mathbb{Z}), +, \circ)$, se puede formar la siguiente estructura

$(qH(\mathbb{Z}) / \simeq, +, \circ)$ donde $+$ y $\circ$ se definen:

- $[f] + [g] = [f + g]$
- $[f] \circ [g] = [f \circ g]$

(los elementos de la anterior estructura son clases de equivalencia $[f]$, donde f es un Cuasi-homomorfismo de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$)

Al igual que en los preliminares (ver pág. 36. Ejemplo 2.22) gracias a las clases de equivalencia se pudo armar el conjunto de los enteros. $\mathbb{Z} / \equiv = [5] \cup [10] \cup [-6]$ en donde $[5], [10], [-6]$ son clases de equivalencia de 5, 10, -6 respectivamente. En esta oportunidad con la ayuda de la relación de equivalencia entre cuasi-homomorfismos y la compatibilidad de las operaciones $(+, \circ)$ se logró armar una estructura que Mejía llama el cociente de Schanuel y de esta manera se pudo construir el conjunto de los números reales.

$$Sh(\mathbb{Z}, +, \circ) \cong (\mathbb{R}, +, *).$$

Esto quiere decir que los reales de Schanuel son isomorfos con el conjunto de los números reales.

Lo que viene a continuación es la prueba de que los números reales de Schanuel son isomorfos con los números reales, la cual Mejía lo expone en el capítulo 2 y se va a mostrar con algunos comentarios para la comprensión del mismo. Para empezar con la demostración del teorema se hace uso de la función parte entera superior. Ver preliminares pág. 40.

(Mejía, 2004, p.11). Dice:

La idea tras la construcción es que toda recta con pendiente real y que pase por el origen puede ser aproximada por un cuasi – homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, además todo cuasi – homomorfismo aproxima a una de estas rectas, cumpliéndose adicionalmente que dos cuasi – homomorfismos son cuasi – iguales o congruentes si y sólo si aproximan a la misma recta. Estos tres hechos determinan una biyección de $qH(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{R}$.

Dado α un número real, se puede definir una función $f_\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como:

$$f_\alpha(n) = [\alpha * n] \quad (\text{donde } [x] \text{ es la parte entera superior } x)$$

Proposición 3.8 Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α es un cuasi – homomorfismo.

Demostración: Dados $n, m \in \mathbb{Z}$ y como $f_\alpha(n) = [\alpha * n]$

Recordando la definición de cuasi – homomorfismo: $f \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es un cuasi – homomorfismo si y solo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $n, m \in \mathbb{Z}$, $|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M$

Ahora:

$$|f_\alpha(n + m) - f_\alpha(n) - f_\alpha(m)| =$$

$$|[\alpha * (n + m)] - [\alpha * n] - [\alpha * m]| =$$

$$| [\alpha * (n + m)] - [\alpha * n] - [\alpha * m] + 0 | =$$

$$| [\alpha * (n + m)] - [\alpha * n] - [\alpha * m] + ((\alpha * n) + (\alpha * m) - \alpha * (n + m)) | =$$

$$| [\alpha * (n + m)] - \alpha * (n + m) + (\alpha * n) - [\alpha * n] + (\alpha * m) - [\alpha * m] | \leq$$

$$| [\alpha * (n + m)] - \alpha * (n + m) | + | (\alpha * n) - [\alpha * n] | + | (\alpha * m) - [\alpha * m] | <$$

$$1 + 1 + 1 = 3 = M \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

En la anterior demostración se usaron algunas propiedades de $\mathbb{R}$ como el módulo para la suma, inverso aditivo, propiedad conmutativa, propiedad asociativa y se aplicó la definición de parte entera y valor absoluto. Luego $f_\alpha(n) = [\alpha * n]$ es un cuasi – homomorfismo.

A continuación se va a nombrar una proposición que no se va a demostrar.

Proposición 3.9

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_\alpha(n)}{n} \right) = \alpha$$

$$2) \text{ Para todo } n \in \mathbb{Z}, |f_\alpha(n) - (\alpha n)| < 1$$

Se puede decir dado lo anterior, que si se tiene una recta L_α con pendiente α , la cual pase por el origen, entonces L_α es aproximada por un cuasi – homomorfismo f_α

Ahora se van a nombrar y demostrar algunos lemas de suma importancia para mostrar que la construcción realmente funciona

Lema 1 sean $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $M > 0$ tales que para todo n y $m \in \mathbb{Z}$

$$|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M.$$

Si existe $a \neq 0$ tal que $|f(a)| > 2M$ entonces $|f(|m|a)| > (|m| + 1)M$ para todo $|m| \in \mathbb{N}$ distinto de cero.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre $|m|$, para una mayor comprensión del Lema se puede ver los preliminares de inducción matemática página 30 y preliminares de valor absoluto página 40 (demostración de la desigualdad triangular inversa)

- Para $|m| = 1$

$$|f(|m|a)| > (|m| + 1)M$$

$$|f(|1|a)| > (|1| + 1)M$$

$$|f(a)| > (2)M \quad \text{luego se cumple para } |m| = 1 \text{ (ver hipótesis)}$$

- Se supone verdadera para $|m|$ es decir:

$$|f(|m|a)| > (|m| + 1)M \quad (\text{Hipótesis inductiva})$$

- luego para $|m| + 1$ se tiene:

$$|f((|m| + 1)a)| = |f(|m|a + a)|$$

Teniendo en cuenta que: $|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M$.

Para $|f(|m|a + a)|$ se tiene:

$$|f(|m|a + a) - f(|m|a) - f(a)| < M. \quad \text{Luego}$$

$$M > |f(|m|a + a) - f(|m|a) - f(a)|$$

$$M > |f(|m|a + a) - (f(|m|a) + f(a))|$$

$$M > |(f(|m|a) + f(a)) - f(|m|a + a)|$$

$$M > |(f(|m|a) + f(a))| - |f(|m|a + a)|$$

$$|f(|m|a + a)| > |f(|m|a) + f(a)| - M$$

$$|f(|m|a + a)| > |f(|m|a)| + |f(a)| - M$$

Teniendo en cuenta la hipótesis y la hipótesis inductiva se tiene:

$$|f(|m|a + a)| > (|m| + 1)M + 2M - M$$

$$|f(|m|a + a)| > (|m| + 1)M + M$$

$$|f(|m|a + a)| > (|m| + 1 + 1)M = (|m| + 2)M \quad \blacksquare$$

Luego se ha demostrado por inducción que, si existe $a \neq 0$ tal que $|f(a)| > 2M$ entonces

$|f(|m|a)| > (|m| + 1)M$ para todo $|m| \in \mathbb{N}$ distinto de cero. Un lema de suma importancia porque se volverá a utilizar su resultado para próximas demostraciones.

Proposición 3.10 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = 0$ y $|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M$, entonces f es acotada.

Demostración por contradicción:

Se supone que f no es acotada y sin pérdida de generalidad se puede suponer que:

Existe $a > 0$ tal que $|f(a)| > 2M$. Por el lema 1 se tiene que:

$$f(|m|a) > (|m| + 1)M$$

$$\text{Luego } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{f(|m|a)}{|m|a} \right) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{f(|m|+1)M}{|m|a} \right) = \frac{M}{a} > 0 \text{ y en consecuencia}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) \neq 0 \text{ lo cual es una contradicción.} \quad \blacksquare$$

Por lo anterior se puede decir que si f es acotada, luego $f \simeq 0$.

También se tiene que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = 0$, además f es un cuasi – homomorfismo entonces

$f \simeq 0$. ($\simeq$ Símbolo que indica que las funciones están relacionadas bajo la relación de equivalencia)

Para la demostración de algunas proposiciones o lemas, muchas veces se hace uso de otras proposiciones ya mencionadas u otros lemas ya demostrados. Un claro ejemplo de esto es la demostración del lema 2.

Lema 2: si $|f(n + m) - f(n) - f(m)| < M$ entonces

$$|nf(m) - mf(n)| < (|m| + |n| + 2)M.$$

Para su demostración, antes se probara por inducción sobre n que:

Proposición 3.11 $|f(m)n - f(mn)| < (|n| + 1)M$.

- Si $n = 0$, $|f(m)0 - f(0)| = |f(0)|$

$$|f(0)| = |f(0 + 0) - f(0) - f(0)| < M \leq (|0| + 1)M \text{ por el lema 1}$$

- Se supone verdadero para n , es decir:

$$|f(m)n - f(mn)| < (|n| + 1)M. \quad (\text{Hipótesis inductiva})$$

- luego para $n + 1$ se tiene:

$$|f(m)(n + 1) - f(m(n + 1))| = |f(m)n + f(m) - f(mn + m)|$$

$$= |f(m)n + f(m) - f(mn + m) + 0|$$

$$= |f(m)n + f(m) - f(mn + m) + (f(mn) - f(mn))|$$

$$= |f(m)n - f(mn) - (f(mn + m) - f(mn) - f(m))|$$

$$\leq |f(m)n - f(mn) + (f(mn + m) - f(mn) - f(m))|$$

$$\leq |f(m)n - f(mn)| + |(f(mn + m) - f(mn) - f(m))|$$

Teniendo en cuenta la hipótesis y la hipótesis inductiva se tiene que:

$$|f(m)n - f(mn)| + |(f(mn + m) - f(mn) - f(m))|$$

$$< (|n| + 1)M + M \leq (|n + 1| + 1)M \quad \text{luego:}$$

$$|f(m)n - f(mn)| < (|n| + 1)M.$$

Ahora se procede a demostrar el **lema 2**:

Se tiene que:

$$\begin{aligned} |nf(m) - mf(n)| &= |f(m)n - f(n)m| \\ &= |f(m)n - f(n)m + 0| \\ &= |f(m)n - f(n)m + (f(mn) - f(mn))| \\ &= |(f(m)n - f(mn)) + (f(mn) - f(n)m)| \\ &\leq |f(m)n - f(mn)| + |f(mn) - f(n)m| \end{aligned}$$

Por **Proposición 3.11** Se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(m)n - f(mn)| + |f(mn) - f(n)m| \\ < (|n| + 1)M + (|m| + 1)M = (|n| + |m| + 2)M \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora se cuenta con todas las herramientas para demostrar la parte central que explica el funcionamiento de la construcción.

Teorema 3.12 Si f es un cuasi-homomorfismo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha$

Demostración: es suficiente probar que la sucesión $\left(\frac{f(n)}{n} \right), n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de Cauchy. (Ver preliminares págs. 45, 46)

Sea $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que para todo $n, m \geq N_\varepsilon$ la expresión $\frac{(|n| + |m| + 2)M}{|nm|} < \varepsilon$. Ahora

dado $\varepsilon > 0$, N_ε como antes y $n, m \geq N_\varepsilon$ se tiene:

$$\left| \frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m} \right| = \left| \frac{f(n)m - f(m)n}{nm} \right| < \frac{(|n|+|m|+2)M}{|nm|} < \varepsilon$$

Es decir $\left(\frac{f(n)}{n} \right)$, es de Cauchy, por lo tanto es convergente en $\mathbb{R}$ luego:

Existe α tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha$ ■

Proposición 3.13: si f es un cuasi – homomorfismo y $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha$ entonces $f \simeq f\alpha$

($\simeq$ Símbolo que indica que las funciones están relacionadas bajo la relación de equivalencia)

Demostración: Sea $h = f - f\alpha$ se tiene que:

- h es un cuasi – homomorfismo
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h(n)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f - f\alpha)(n)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f\alpha)(n)}{n} \right) = 0$

Lo cual indica que $h \simeq 0$, es decir existe M tal que $|(f - f\alpha)(n)| = |h(n)| < M$ para todo n y por lo tanto $n, |f(n) - f\alpha(n)| < M$ ■

Luego, lo que se ha probado es:

- 1) Para todo número real α existe $f\alpha$ un cuasi – homomorfismo tal que $f\alpha$ aproxima la recta $L\alpha$.
- 2) Si f es un cuasi – homomorfismo existe α real tal que $f \simeq f\alpha$ y f aproxima la recta $L\alpha$.

Si se identifica a $\mathbb{R}$ con el conjunto $\{ L\alpha : \alpha \in \mathbb{R} \}$ se tiene una biyección H de $qH(\mathbb{Z}) / \simeq$ en $\mathbb{R}$ definida por $H[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right)$

Luego H es una biyección.

Proposición 3.14 Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f\alpha$ y $g \simeq g\beta$ entonces $f + g \simeq f\alpha + g\beta$.

Demostración:

ya se demostró que $f \simeq f\alpha$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha$ será suficiente probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f+g)(n)}{n} \right) = \alpha + \beta \text{ pero dado que } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g(n)}{n} \right) = \beta$$

Por ende:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f+g)(n)}{n} \right) = \alpha + \beta \quad \blacksquare$$

De igual manera. Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f\alpha$ y $g \simeq f\beta$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f \circ g)(n)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f\alpha \circ f\beta)(n)}{n} \right) \quad \blacksquare$$

Proposición 3.15 Dados $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ si $f \simeq f\alpha$ y $g \simeq f\beta$ entonces $f \circ g = f\alpha\beta$.

Demostración: por lo anterior se tiene: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f \circ g)(n)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f\alpha \circ f\beta)(n)}{n} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(f\alpha \circ f\beta)(n)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\alpha(f\beta(n))}{n} \right)$$

Recordando que: $f\alpha(n) = \lceil \alpha * n \rceil$ (parte entera superior) se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\alpha(f\beta(n))}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\alpha(\lceil \beta * n \rceil)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lceil \alpha * \lceil \beta * n \rceil \rceil}{n} \right) = \alpha\beta \quad \blacksquare$$

Corolario 3. 16 Para todo par de funciones $f, g \in qH(\mathbb{Z})$ se tiene que:

- $H(\lceil f \rceil + \lceil g \rceil) = H(\lceil f \rceil) + H(\lceil g \rceil)$
- $H(\lceil f \circ g \rceil) = H(\lceil f \rceil)H(\lceil g \rceil)$

Lo que se ha hecho es partir el conjunto de $qH(\mathbb{Z})$ en sus clases de equivalencia y definir las operaciones entre las clases para llegar a formar el conjunto de los números reales.

De esta manera, (**Schanuel**) $Sh(\mathbb{Z}, +, \circ) \cong (\mathbb{R}, +, *)$

Esto quiere decir que los reales de Schanuel son isomorfos con el conjunto de los números reales.

De esta manera es como Mejía (2004) describe la construcción de los números reales de Schanuel los cuales parten de los números enteros sin hacer uso de los números racionales a los cuales ella llama en su tesis de maestría los reales efectivos de Schanuel, haciendo uso de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ llamadas cuasi – homomorfismos y sus clases de equivalencia, las operaciones entre las clases para finalmente formar el conjunto cociente que es isomorfo con los números reales.

CAPITULO IV

ALGUNAS REFLEXIONES DE ORDEN EDUCATIVO A MANERA DE CONCLUSIÓN

La enseñanza de las matemáticas en la educación media es llevada a cabo por matemáticos, licenciados en matemáticas y por otros profesionales. Es muy común encontrar a ingenieros, administradores, contadores públicos entre otros profesionales trabajando como docentes de matemáticas porque la “ ley 115 de febrero de 1994” así lo permite, en su artículo 118 en el cual textualmente afirma:

ARTICULO 118. Ejercicio de la docencia por otros profesionales:

“Por necesidades del servicio, quienes posean título expedido por las instituciones de educación superior, distinto al de profesional en educación o licenciado, podrán ejercer la docencia en la educación por niveles y grados, en el área de su especialidad o en un área afín. Estos profesionales podrán también ser inscritos en el Escalafón Nacional Docente, siempre y cuando acrediten estudios pedagógicos en el país o en el extranjero, en una facultad de educación o en otra unidad académica responsable de la formación de educadores, con una duración no menor de un año.”

Y lo ratifica el decreto ley 1278 de 2002, cuando define:

“Son profesionales de la educación las personas que poseen título profesional de licenciado en educación expedido por una institución de educación superior; los profesionales con título diferente, legalmente habilitados para ejercer la función docente de acuerdo con lo dispuesto en este decreto; y los normalistas superiores”.

Como ya se ha mencionado, este trabajo de grado va dirigido a docentes en formación y en servicio; por ende, a los profesionales que trabajan como docentes y no son licenciados en matemáticas están obviamente incluidos. Ahora, se le llama docentes en formación a aquellos estudiantes que se están preparando para ejercer como docentes pero también está en formación

el que ya ejerce. No es un secreto que las matemáticas son una ciencia viva con la que se necesita caminar de la mano para que no se adelante con sus pasos de gigante. Luego, a todos se les puede llamar docentes en formación.

Algunos de estos profesionales nombrados anteriormente trabajan como docentes de matemáticas en la educación media, porque las conoce. Pero, también se debería conocer su historia para enseñarlas. La pregunta que se puede realizar es ¿Todos los profesionales que enseñan matemáticas en la educación media, hacen uso de la historia de las matemáticas? Sería lo mejor, pues al indagar la historia de las matemáticas como docentes en formación, se puede reflexionar sobre el tiempo que tardaron nuestros antepasados para comprender algunas definiciones, conceptos y objetos matemáticos. En el presente trabajo se tiene por ejemplo, la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides que se le atribuye a Eudoxo de Cnido (408 – 355 a. C aprox.) que ha sido objeto de muchas interpretaciones y entre ellas la que sirvió de base para la construcción de los números reales a finales del siglo XIX. Entonces, si se tiene en cuenta el recorrido que se hace para llegar a una definición, concepto u objeto matemático a través de la historia, de seguro el profesor podrá pensar en estrategias que aporten a superar las posibles trabas, errores y obstáculos que se presentan al comprender por parte del estudiante determinados temas en el aula de clase. “La Historia es un indicador de la complejidad epistemológica de ciertos conceptos matemáticos y, por ende, de la posible dificultad en su aprendizaje.” (Anacona, 2003, p 38).

Se considera importante que el docente de la educación media reconozca el recorrido histórico de un objeto matemático, en este caso el de los números reales desde sus inicios, para que proporcione experiencias en la perspectiva a sus estudiantes y no se muestren las matemáticas como una ciencia con ideas acabadas. “El lector que lee un libro bien escrito no reconoce cuales han sido las alegrías y sufrimientos de su autor. Puede ser instructivo develárselas”. Schwartz 1997, (citado en Arboleda 2011, p 23).

Tampoco se está diciendo que todo tema o contenido que se enseñe en el aula de clase se vea junto con su historia porque no se dispone de tiempo para hacerlo. Pero, de vez en cuando se debería hacer que los docentes reconozcan la historia como elemento constructor, como el caso de las matemáticas de los griegos y sus magnitudes conmensurables que sostuvieron por una gran temporada como perfecta, hasta descubrir que algo fallaba en su teoría y aceptar el error para poder empezar de nuevo, se considera que es así como el estudiante puede percibir las matemáticas como más humanas y accesibles porque tiene derecho a la duda y al error.

Luego, conocer la historia de las matemáticas, se hace importante en la enseñanza de las matemáticas. Pero, la pregunta que se hace Arboleda (2011) es: “¿Cuál es el tipo de historia susceptible de ser apropiada en la educación matemática y que contribuya efectivamente al diseño de estrategias didácticas para la formación de pensamiento matemático?”. Es una muy buena pregunta si se considera que en el aula de clase de matemática en la educación media no se hace suficiente historia de las matemáticas y lo mejor es que se le tiene una respuesta que es la siguiente: “Entre todas las historias practicables prefiero aquella que le permita al alumno vivir experiencia de reconstrucción de teorías” (Arboleda, 2011, p. 1). Luego repetir no es tan malo y como se dice que el que enseña aprende dos veces, este hermoso camino del recorrido histórico se pudo llevar a cabo entre el docente y el estudiante para sacarle todo el provecho posible “La historia es un medio para tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en matemáticas. Y esta característica suya bien puede ser utilizada a favor de la formación matemática de quienes enseñaran las matemáticas” (Arboleda, 1984, pág. 179).

De igual manera en ese volver hacia la historia, se pueden encontrar otras alternativas para construir objetos matemáticos, de vez en cuando sería interesante dar una vuelta al pasado, tocar algunos de los hitos históricos de las matemáticas para luego volver a caminar en el presente y lograr comprender ciertas definiciones, lograr conectar las ideas matemáticas del pasado con las matemáticas modernas como es el caso del presente trabajo; en el cual se

conectan temas de los cuales los docentes en formación han oído hablar como la proporcionalidad de segmentos con los que trabajaron los matemáticos de la antigüedad y se puedan relacionar con algunas definiciones nuevas para la comunidad matemática como lo es el cuasi – homomorfismo y dar vida a una construcción alternativa, pensando en poder trabajar con ellos computacionalmente y poder acercarse a los números reales haciendo aproximaciones tan buenas que se les da el nombre de efectivos.

Es de vital importancia comprender que las ideas matemáticas que se utilizan hoy, datan de mucho tiempo atrás. También es importante preguntarse de dónde preceden dichas ideas.

Por otro lado una construcción alternativa de los números reales llevada a cabo desde los números enteros sin hacer uso explícito de los números racionales como lo expone Mejía, dejándose llevar por las ideas de Schanuel. En el presente trabajo de grado que hizo acercarlo a través de lo histórico-epistemológico que contribuye a cuestionar y reflexionar sobre la creencia de que los números reales sólo se pueden ver como la unión de los números racionales y los números irracionales como lo menciona (Calderón, 2014, p. 5) “Los textos de pre cálculo como matemáticas previas al cálculo Louis Leithold 2007 para el primer semestre de universidad, presentan los números reales como la unión de los números racionales e irracionales” y los números reales van más allá de la unión de estos dos conjuntos, hablar de los números reales en la educación media es trabajar con la línea recta y poder decir con toda confianza que es continua.

En el presente trabajo de grado se menciona que en la construcción de los números reales de Schanuel no se hace uso de los números racionales porque hay quienes así lo afirman como: “la construcción procede directamente de los números enteros a los números reales eludiendo la construcción intermedia de los números racionales” (Arthan 2004, p.1)

“El campo $\mathbb{R}$ ordenado de los números reales se puede construir directamente desde el anillo $\mathbb{Z}$ de enteros sin fabricar primero el campo $\mathbb{Q}$ de racionales” (Street, 2004, p. 1)

“la construcción tiene virtudes formales, como lo es, el construir el campo de los reales, directamente desde la estructura de grupo abeliano de los enteros sin requerir la construcción previa del campo de los números racionales” (Mejía y Montoya, 2006, p.1)

Y Mejía 2004 en el resumen de su tesis de maestría dice:

“Una construcción poco conocida de los números reales original de Stephan Schanuel, quien parte del grupo de los enteros y, sin construir los racionales, construye los reales”

Haciendo una lectura detenida, sobre lo que expone Mejía en la construcción de los reales de Schanuel, se puede evidenciar en el teorema 3.12 cuando se demuestra que:

Si f es un cuasi – homomorfismo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{n} \right) = \alpha$, menciona que es suficiente probar que la sucesión $\left(\frac{f(n)}{n} \right), n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de Cauchy.

Luego, esta construcción de números reales está basada en sucesiones de Cauchy de números racionales, fundamentadas en la teoría de convergencia de sucesiones es decir $\left(\frac{f(n)}{n} \right)$, es de Cauchy, por lo tanto es convergente en $\mathbb{R}$. Luego, siendo un poco más explícitos lo que hace es tomar el cuasi – homomorfismo $f(n)$ de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ dividirlo por un n el cual pertenece a $\mathbb{N}$ y demuestra que converge. Recordando un poco, las sucesiones consideradas por Cauchy eran de números racionales; sin embargo, el número al cual convergen no es necesariamente un número racional. Además de apreciar estos métodos para determinar la convergencia, es importante tener en cuenta el uso implícito del axioma de

completitud de los números, con el cual Cantor realizó la construcción de la recta real, él empezó con los números naturales, pasando por los números enteros, luego construye los números racionales, para después definir los reales como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Entonces, es vital nombrar la importancia que tienen la convergencia de sucesiones y la propiedad de completitud con el cual se logra la construcción de los números reales de Schanuel.

En la demostración de los reales de Schanuel implícitamente se hace uso de los números racionales, números con los que trabajaron los pitagóricos mucho tiempo atrás y con los cuales se calcula y trabaja todo el tiempo.

Se considera importante que los docentes en formación conozcan diversas construcciones a lo largo de la historia porque sin temor a equivocaciones se puede decir que las matemáticas no paran de sorprender con sus hazañas y que siempre se va a encontrar algo que decir, algo que comentar y algo de lo cual se pueda nutrir el conocimiento para enseñar matemáticas en la educación media de una buena manera. Una construcción como la que se presenta en este trabajo de grado es importante porque hace a las matemáticas un poco más acogedoras porque se muestra las ideas matemáticas de nuestros antepasados y se conectan con las ideas de los matemáticos del presente, pues se construye un objeto matemático desde sus inicios haciéndolas más llamativas para el estudiante, aquí por ejemplo se muestra como se llegó a la definición de cuasi - homomorfismo gracias a la intuición de Arthan y la interpretación de De Morgan a la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides con ayuda de algunas representaciones gráficas, se muestra la manera como los pitagóricos trabajaban con magnitudes conmensurables y como se tuvo que cambiar parte de su teoría en el momento en que se descubrieron las magnitudes inconmensurables. Son ejemplos que se pueden mostrar en el aula de clase para comprender tanto docentes como estudiantes que la matemática se

construye con paciencia, con errores y aciertos. Porque es diferente el aprendizaje cuando el docente logra que el estudiante se involucre en ese camino que para muchos es el más complicado en su formación en la educación media.

Ahora, la intuición se utiliza mucho en matemáticas para dar salida a diferentes obstáculos que se presentan, un ejemplo de esto es la línea recta con la cual se ha trabajado desde siempre y que se usó la intuición para considerar que es continua y que “podemos decir, sin temor a exagerar, que la recta real existe en matemáticas solo después de las pruebas de Dedekind y de Cantor.” (Mejía, 2004, p. 2) sin negar que antes de su demostración formal se trabajaba con la línea recta de gran manera. Al igual que los hace Mejía para la construcción de los reales de Schanuel y decir que es isomorfo a los números reales.

Cuando se parte de los reales de Schanuel y se quiere llegar a los números reales, Mejía hace uso de un cuasi – homomorfismo $(f(n))$ que al dividirlo entre (n) demuestra que es una sucesión de Cauchy, la cual converge a un $\alpha \in \mathbb{R}$, para después tomar las clases de equivalencia del cuasi – homomorfismo el cual respeta las operaciones de la suma y de la composición. Así para cada cuasi – homomorfismo hay un número real que está cerca de él

Ahora, para llegar de los números reales a los reales de Schanuel, Mejía toma un α igual a un número real, el cual es la pendiente de una línea recta que pasa por el origen y que puede ser aproximado por un cuasi – homomorfismo. Así a cada número real se lo está aproximando por inclinaciones de recta que no es otra cosa que la pendiente de la misma; una vez más se hace referencia a los números racionales implícitamente si se recuerda cual es la definición de pendiente de una recta y es así como Mejía logra construir una biyección entre este par de estructuras.

La idea del presente trabajo es que se conozca y se indague sobre construcciones de este tipo; alternativa, poco conocidas y que logre llegar a oídos de muchos docentes en formación para que se reconozca que la matemática es una ciencia viva que se alimenta de la historia. Schanuel construye una nueva estructura haciendo algunas consideraciones y demuestra que los reales de Schanuel son isomorfos con los números reales y que aprovecha Mejía para hacerlos efectivos. Luego, lo que se construye es un modelo de los números reales con los que se puede trabajar computacionalmente logrando aproximaciones a $\mathbb{R}$ muy cercanos por medio de cuasi – homomorfismos.

Lo importante de este trabajo de grado es mostrar lo beneficioso que puede llegar a ser para los docentes en formación reconocer que en la historia de las matemáticas hay mucho material para enseñar diferentes temas y quizá se logre hacer las clases de matemáticas más divertidas, sin que se pierda su esencia. Cuando el profesor estudia una construcción diferente a las ya conocidas, tardará un tiempo en asimilarla porque eso implica reordenar lo que ya sabe para darle entrada al cambio, logrando al final una manera diferente de enseñar, recordando que quien se dedica a la enseñanza necesita estar constantemente actualizándose.

REFERENCIAS

- Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *EMA*, 8(1), 30-46.
- Arboleda, L. C. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 1(2), 167-194.
- Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica. Cali: Universidad del Valle.
- Arthan, R. D. (2004). The Eudoxus real numbers. arXiv preprint math/0405454.
- Calderón, N. O. (2014). Diferentes construcciones del número real. Tesis de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, 91. Bogotá, Colombia: Universidad de Bogotá.
- Guacaneme, E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis*, (31), pp. 113-131
- Heath, S. T. L. (1908). The thirteen books of Euclid's Elements: Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge: University Press.
- Herstein, I. N. (1988). *Algebra abstracta* (No. 512.8 H4Y).
- Jiménez, D. (2006) ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Divulgación Matemática*, XIII, 1.
- Jiménez, R, Gordillo, E y Rubiano, G. (2004). Teoría de números para principiantes. *Universidad Nacional de Colombia. Bogotá*.
- Kirkwood, J. R. (1995). *An Introduction to Analysis*.
- Suarez, M. F. (1994). Elementos de Álgebra. *Centro Editorial. Universidad del Valle*.
- Martiñon Cejas (1992) La teoría de las proporciones en los elementos de Euclides.
- Mejía, C. Reales Efectivos de Schanuel. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.

- Mora, L. y Torres, J. (2004) Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales. Tesis de Maestría en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.
- Recalde, Luis; Arbeláez, Gabriela Inés. (2011). Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Recalde, L. (2017). Lecturas de Historia de las Matemáticas (Segunda ed.). Cali, Colombia.