

Métodos de Regularización para el Procesamiento de Imágenes Ruidosas

Deissy Marcela Pizo Quirá



Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico Maestría en Ciencias Matemáticas
Santiago de Cali
2017

Métodos de Regularización para el Procesamiento de Imágenes Ruidosas

Deissy Marcela Pizo Quirá

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Matemáticas

Dirigido por:

Doris Hinestroza G. Ph. D.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico Maestría en Ciencias Matemáticas
Santiago de Cali
2017

Nota de Aceptación

El presente Trabajo de grado cumple con todos los requisitos exigidos por el programa académico de maestría en ciencias matemáticas para optar al título de Matemático y fue aprobado en sesión de sustentación el 15 de Diciembre del 2017. En constancia firman:

Director

Jurado

Jurado

Santiago de Cali, del 2017.

A Dios, por permitirme llegar a este momento tan especial en mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, por que creyeron en mi , por su apoyo, su comprensión y sus consejos. Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida. Agradezco a la profesora Doris Hinestroza por su gran ayuda, gran paciencia y motivación, también quiero dar gracias a todos los profesores y compañeros que aportaron de alguna manera a mi formación. Finalmente, pero no menos importante doy gracias a Dios y a la vida por estar haciendo lo que me gusta.

Deissy Marcela Pizo Quirá

Resumen

En este trabajo se hace una presentación del problema de restauración de imágenes ruidosas el cual es un problema inverso mal condicionado, se hace un análisis de dos métodos de regularización que se usan para encontrar buenas soluciones de dicho problema aun en presencia de errores. En el capítulo 1 se hace una introducción de nociones básicas de espacios de Hilbert, operadores compactos y valores singulares. En el capítulo 2 se hace una introducción a los problemas inversos y algunos ejemplos de interés. En el capítulo 3 se hace una breve introducción a la definición de imagen, formalización del problema en imágenes ruidosas y su correspondiente representación matemática. En el capítulo 4 se hace una presentación de los esquemas de regularización usados para la solución del problema y en el capítulo 5 el método general que es la combinación de dos métodos como es el truncamiento espectral y la regularización de Tikhonov.

Contents

Introducción	1
1 ELEMENTOS BÁSICOS	3
1.1 Análisis Básico	3
1.1.1 Espacios de Hilbert	3
1.1.2 Sistemas Ortonormales	9
1.1.3 Operadores Lineales	10
1.1.3.1 El espacio $B(V,W)$ y espacio dual.	11
1.1.3.2 Operador Adjunto	13
1.1.4 Inversa Generalizada	15
1.2 Operadores Compactos	18
1.2.1 Teoría Espectral de Operadores Compactos en Espacios de Hilbert	21
1.2.2 Valores Singulares de Operadores Compactos	22
1.3 Descomposición en Valores Singulares en dimensión finita	25
1.3.1 Valores Singulares de una Matriz	25
1.3.2 Teorema de Descomposición en valores singulares.	26
1.3.3 Propiedades de los valores singulares de una Matriz $A_{m \times n}$. . .	31
1.3.3.1 Teorema de aproximación en norma de Frobenius . . .	31
1.4 Transformada de Fourier	35
1.4.1 Propiedades de la transformada de fourier en 1 dimensión. . . .	35
1.4.2 Transformada de fourier Bidimensional	37
1.4.3 Propiedades de la Transformada de fourier bidimensional	38
2 PROBLEMAS INVERSOS	41
3 IMÁGENES	45
3.1 Definición de Imagen	45
3.1.1 Imagen Degradada (Borrosa)	46

3.1.2	Imagen ruidosa	47
3.1.2.1	Tipos de ruido	48
3.2	Formalización del problema en imágenes.	50
3.2.1	Formulación del problema.	51
3.3	Existencia de la solución	52
3.4	Optimización del problema	54
4	REGULARIZACIÓN	59
4.1	Métodos de regularización	63
4.1.1	Método valores singulares, truncamiento espectral aplicado a imágenes.	63
4.1.2	Método de Tikhonov aplicado a imágenes.	66
5	REGULARIZACIÓN GENERALIZADA .	80
5.1	Método generalizado usando valores singulares y regularización de Tikhonov.	80
5.2	Ejemplos numéricos usando el método generalizado	81
5.3	Algoritmos	88
	Conclusiones	91
	Bibliografía	92

Introducción

En las décadas de los 50 y 60 del pasado siglo, los estados unidos así como la antigua Unión Soviética iniciaron programas espaciales que significaron un gran avance científico. La misión principal de estos programas era la obtención de imágenes de la Tierra y del Sistema Solar para facilitar futuros viajes espaciales. Misiones tales como “Ranger”, “Lunar Orbiter” y “Mariner” proporcionaron una gran cantidad de fotografías sobre las diferentes superficies planetarias. Sin embargo, se comprobó que muchas de aquellas imágenes sufrían importantes degradaciones debido a las difíciles condiciones de adquisición de las sondas espaciales: vibración de la maquinaria, movimientos de rotación de la aeronave y velocidad de desplazamiento. Incluso en posteriores misiones tripuladas donde las fotografías eran tomadas por astronautas, las imágenes presentaban zonas borrosas ya que no podían mantenerse inmóviles en las condiciones de ingravidez. Todo esto significaba perder información muy valiosa por los efectos de degradación y, más aún, considerando la importante inversión que suponían estos programas espaciales. Esta situación motivó la aparición de un nuevo campo científico denominado restauración digital de imágenes.

La restauración de imágenes consiste en recuperar de la mejor manera posible la imagen original a partir de su correspondiente imagen degradada y del conocimiento a priori de las causas de la degradación. Esto implica el uso de métodos para deshacer la degradación impuesta, la cual no puede realizarse de manera perfecta, pero las mejoras son posibles en algunas circunstancias. El problema de restauración de imágenes borrosas y ruidosas es un problema inverso mal puesto, para el cual consideramos la ecuación:

$$Af = g$$

donde lo que se quiere es que dada una imagen g conocida encontrar la imagen f . En este trabajo nos proponemos resolver el problema de recuperar la f a partir de una imagen g con ruido, para ello se va a sugerir un método al cual le llamaremos método generalizado que consiste en la combinación de dos métodos como son el truncamiento

espectral y la regularización de Tikhonov. Analizar diferentes imágenes con diferentes tipos de ruido.

Chapter 1

ELEMENTOS BÁSICOS

1.1 Análisis Básico

A continuación, presentaremos elementos básicos del análisis funcional que necesitaremos en este trabajo. Trataremos temas que podemos ver[2,7].

1.1.1 Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un producto escalar o producto interno sobre V es una función.

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

que cumple las siguientes propiedades:

- i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in V$
- ii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$
- iii) $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in V$
- iv) $(x, x) \in \mathbb{R}$ y $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V$
- v) $(x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Teorema 1.1.2 Sea V un espacio vectorial donde se ha definido un producto interno. la función $\|\cdot\| : V \rightarrow K$ definida por

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, x \in V$$

Es una norma sobre V , que cumple las siguientes propiedades:

- i) $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \forall x, y \in V$
- ii) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(x, y) \forall x, y \in V$
- iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \forall x, y \in V$

Definición 1.1.3 Un espacio vectorial con un producto interno que es completo se llama **espacio de Hilbert**.

Definición 1.1.4 (complemento ortogonal) Sea V un espacio de Hilbert (sobre $K = R$ o $K = C$).

- i) Dos elementos x e y son llamados ortogonales si $(x, y) = 0$
- ii) Sea $M \subset V$ un subconjunto. El conjunto

$$M^\perp = \{x \in V : (x, y) = 0 \forall y \in M\}$$

es llamado el complemento ortogonal de M .

Teorema 1.1.5 (Teorema de la Proyección) Ver [7].

Sea H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado, cada $x \in H$ tiene una única descomposición de la forma $x = v + w$ donde $v \in M$ y $w \in M^\perp$. el operador $P_M : H \rightarrow M; x \rightarrow v$ es llamado la proyección ortogonal de H sobre M y tiene las siguientes propiedades:

- i) $P_M v = v, \forall v \in M$ esto es $P_M^2 = P_M$.
- ii) $\|P_M x - x\| \leq \|x - u\|, \forall u \in M$
- iii) $(P_M x, y) = (x, P_M y), \forall x, y \in H$

Esto significa que $P_M x \in M$ es la mejor aproximación de $x \in H$ en el subespacio lineal cerrado M .

Demostración. Para demostrar que $x \in H$, puede descomponerse de manera única como $x = v + w$ donde $v \in M$ y $w \in M^\perp$, primero supongamos $H \neq M$. Si $x \in M$, entonces $x = x + 0$, $x \in M$ y $0 \in M$ entonces podemos suponer que $x \notin M^\perp$. Puesto que M es un subespacio lineal cerrado

$$d = d(x, y) = \inf_{m \in M} \|x - m\| > 0$$

Sea $\{y_n\} \subset M$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = 0$. Mostremos que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2$ usando $\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2$, entonces

$$\begin{aligned} \|y_n + y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|(y_n - y_m) - 2x\|^2 \\ &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \left\| \frac{2}{2}(y_n + y_m) - 2x \right\|^2 \\ &= 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4 \left\| \frac{(y_n + y_m)}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \\ &\leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\|y_n + y_m\|^2 \leq 0$ cuando $m, n \rightarrow \infty$.

Puesto que H es un espacio de Hilbert existe $v \in H$ tal que $y_n \rightarrow v$, dado que H es completo, por tanto existe $v \in M$ tal que:

$$d = \|v - x\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|$$

Demostremos que v es único:

Sean $\|v_1 - x\| = d = \|v_2 - x\|$, $v_1, v_2 \in M$ entonces

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|^2 &= \|(v_1 - x) + (x - v_2)\|^2 \\ &= 2(\|v_1 - x\|^2 + \|x - v_2\|^2) - 4 \left\| \frac{(v_1 + v_2)}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ entonces $v_1 = v_2$.

sea $x = v + (x - v)$, $v \in M$ y llamemos $w = x - v$ por demostrar $w = x - v \in M^\perp$.

la prueba que usaremos a continuación es propia; Mostremos que $w \in M^\perp$ para $v' \in M$, $v \in M$ y $\alpha \in K$ entonces $v + \alpha v' \in M$, puesto que $d \leq \|x - m\|$, $\forall m \in M$ entonces:

$$d^2 \leq \|x - (v + \alpha v')\|^2$$

$$d^2 \leq \|x - v - \alpha v'\|^2$$

$$d^2 \leq \|(x - v) + \alpha v'\|^2$$

$$d^2 \leq \|w - \alpha v'\|^2 = \langle w - \alpha v', w - \alpha v' \rangle$$

$$d^2 \leq \langle w, w \rangle - \bar{\alpha} \langle w, v' \rangle - \alpha \langle v', w \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle v', v' \rangle$$

$$d^2 \leq \|w\|^2 - \bar{\alpha} \langle w, v' \rangle - \alpha \langle v', w \rangle + |\alpha|^2, \alpha = \langle w, v' \rangle$$

$$d^2 \leq d^2 - \overline{\langle w, v' \rangle} \langle w, v' \rangle - \langle w, v' \rangle \langle v', w \rangle + |\langle w, v' \rangle|^2$$

$$0 \leq -|\langle w, v' \rangle|^2 - |\langle w, v' \rangle|^2 + |\langle w, v' \rangle|^2$$

$$0 \leq -|\langle w, v' \rangle|^2, |\langle w, v' \rangle|^2 \leq 0$$

Entonces $\langle w, v' \rangle = 0$ y así concluimos que $w \in M^\perp$, por tanto $x \in H$ se escribe de manera única como $x = v + w, v \in M, w \in M^\perp$.

A continuación presentaremos las propiedades del operador proyección $P_M(x) = v$.

- i) El operador P_M es lineal. Sea $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in K$ tenemos que $x = m + n$, $y = m' + n'$, $m, m' \in M$, $n, n' \in M^\perp$ entonces :

$$\alpha x + \beta y = \alpha m + \alpha n + \beta m' + \beta n'$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha m + \beta m' + \alpha n + \beta n'$$

como $\alpha m + \beta m' \in M$, $\alpha n + \beta n' \in M^\perp$ tenemos entonces

$$P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha m + \beta m'$$

$$P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$$

Por tanto P_M es lineal.

Sea $m \in M$, entonces $m = m + 0$, $0 \in M^\perp$ por lo tanto $P_M m = m$, $\forall m \in M$, Si $n \in M^\perp$ entonces $n = 0 + n$, $0 \in M$ y $n \in M^\perp$ así $P_M n = 0 \forall n \in M^\perp$, Ahora si $x = m + n$, $m \in M$, $n \in M^\perp$ aplicando el operador proyección tenemos:

$$P_M x = P_M m + P_M n = m + 0 = m = P_M m$$

Puesto que $P_M m \in M$ tenemos que $P_M^2 x = P_M m = P_M x$, $\forall x \in H$ y así $P_M^2 = P_M$.

ii) Observemos que si $x = m + n$, $m \in M$ y $n \in M^\perp$, entonces $x = P_M x + n$ y $n = x - P_M x \in M^\perp$. Así para todo $u \in M$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x - u\|^2 &= \|P_M x - x - (P_M x - u)\|^2 \\ &= \langle (P_M x - x) - (P_M x - u), (P_M x - x) - (P_M x - u) \rangle \\ &= \langle (P_M x - x), (P_M x - x) \rangle - \langle (P_M x - x), (P_M x - u) \rangle - \\ &\quad \langle (P_M x - u), (P_M x - x) \rangle + \langle (P_M x - u), (P_M x - u) \rangle \\ &= \|P_M x - x\|^2 + \|P_M x - u\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto: $\|P_M x - x\|^2 \leq \|x - u\|^2$

$$\|P_M x - x\| \leq \|x - u\|, \forall u \in M.$$

iii) Sea

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_M y + P_{M^\perp} y) = (P_M x, P_M y)$$

por otro lado

$$(x, P_M y) = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y) = (P_M x, P_M y)$$

entonces: $(P_M x, y) = (x, P_M y)$.

Corolario 1.1.6 Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H , entonces $M = M^{\perp\perp}$.

Demostración. Por demostrar $M = M^{\perp\perp}$.

probemos lo siguiente; $M \subset M^{\perp\perp}$, sea $z \in M$ entonces $\exists y \in M^\perp$ tal que $\langle z, y \rangle = 0, \forall y \in M^\perp$ entonces $z \in M^{\perp\perp}$.

Ahora veamos; $M^{\perp\perp} \subset M$, sea $z \in M^{\perp\perp}$, puesto que $H = M \oplus M^\perp$ entonces $z = x + y$, $x \in M, y \in M^\perp$, dado que $z \in M^{\perp\perp}$ entonces:

$$(z, y) = (x + y, y) = (x, y) + (y, y) = \|y\|^2 = 0$$

Así $y = 0$, por tanto $(z, y) = 0 = (x, y) = (z, 0) = (x, 0)$ entonces $z = x \in M$.

A continuación presentaremos el teorema de Riesz, el cual nos da una idea de puntos casi ortogonales, en espacios normados donde no puede definirse el concepto de ortogonalidad.

Teorema 1.1.7 (Lema de Riez) Ver [7]. Supongamos que X es un espacio normado, Y un subespacio lineal cerrado de X tal que $Y \neq X$ y α es un número real tal que $0 < \alpha < 1$ entonces existe $x_\alpha \in X$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|x_\alpha - y\| > \alpha, \forall y \in Y$.

Demostración. Dado que $Y \neq X$ existe un punto $x \in X - Y$, dado que Y es cerrado.

$$d = \inf \|z - x\| : z \in Y > 0$$

Como $0 < \alpha < 1$ entonces $1 < \frac{1}{\alpha}$, $d < \frac{d}{\alpha} = d \cdot \alpha^{-1}$, entonces existe $z \in Y$ tal que $\|z - x\| < d \cdot \alpha^{-1}$. Sea $x_\alpha = \frac{x-z}{\|x-z\|}$ donde $\|x_\alpha\| = 1$ y para cualquier y ,

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - y\| &= \left\| \frac{x-z}{\|x-z\|} - y \right\| = \left\| \frac{x}{\|x-z\|} - \frac{z}{\|x-z\|} - \frac{\|x-z\| \cdot y}{\|x-z\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x-z\|} \cdot \|x - (z + \|x-z\| \cdot y)\| > \alpha \cdot d^{-1} \cdot d = \alpha \end{aligned}$$

Como $z \in Y, y \in Y, \|x-z\| \in \mathbb{R}$ entonces $z + \|x-z\| \cdot y \in Y$, $\|x - (z + \|x-z\| \cdot y)\| > d$ y $\frac{1}{\|x-z\|} > \frac{1}{d\alpha^{-1}} = \alpha \cdot d^{-1}$. Así $\|x_\alpha - y\| > \alpha, \forall y \in Y$.

Teorema 1.1.8 Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces ni el conjunto $B_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ni $\partial B_1(0) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ son compactos.

Demostración. Sea $x_1 \in \partial \overline{B_1(0)}$. Como V es infinito dimensional, $\langle x_1 \rangle = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R}\} \neq V$ y $\langle x_1 \rangle$ es cerrado por ser de dimensión finita. Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in \partial \overline{B_1(0)}$ tal que

$$\|x_2 - \alpha x_1\| \geq \frac{3}{4}$$

para todo $\alpha \in K$. Similarmente, $\langle x_1, x_2 \rangle$ es cerrado y $\langle x_1, x_2 \rangle \neq V$. Así, existe $x_3 \in \overline{\partial B_1(0)}$ tal que

$$\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \geq \frac{3}{4},$$

para todo $\alpha, \beta \in K$.

Continuando este proceso, obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ en V tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{3}{4}$, $n \neq m$. Así no podemos obtener una sucesión que sea convergente y por lo tanto ni $\overline{B_1(0)}$ ni $\partial B_1(0)$ pueden ser compactos.

1.1.2 Sistemas Ortonormales

H un espacio de Hilbert separable sobre $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{R}$. ver[7]

Definición 1.1.9 (Sistema Ortonormal)

Un conjunto contable de elementos $\{A = x_k : k = 1, 2, \dots\}$ es llamado un sistema ortonormal si:

$$i) (x_k, x_j) = 0, \forall k \neq j$$

$$ii) \|x_k\| = 1, \forall k$$

A es llamado un conjunto completo o sistema ortonormal si además no existe otro sistema ortonormal B con $A \subset B$ y $A \neq B$. Usando el lema de Zorn se verifica que cada conjunto de Hilbert separable posee un conjunto ortonormal maximal.

Cada conjunto contable de elementos linealmente independientes de H puede ser ortonormalizado para cualquier subconjunto $A \subset H$, sea:

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in K, x_k \in H, n \in \mathbb{N} \right\}$$

El subespacio de H generado por A .

Teorema 1.1.10 Sea $A = \{x_k : k = 1, 2, \dots\}$ un sistema ortonormal entonces:

i) Cada subconjunto finito de A es linealmente independiente.

ii) Si A es finito, esto es $A = \{x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ entonces para cada $x \in H$, existen coeficientes únicos $\alpha_k \in K$ tal que $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\| \leq \|x - a\|$ para todo $a \in \langle A \rangle$.

iii) Los coeficientes son dados α_k por $\alpha_k = (x, x_k)$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

iv) Para cada $x \in H$, se cumple la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

y la serie converge en H .

v) A es completo si y solo si para $\langle A \rangle$ es denso en H .

vi) A es completo si y solo si para todo $x \in H$, la identidad de Parseval se da:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 = \|x\|^2$$

vii) A es completo si y solo si para cada $x \in H$ tiene una expansión generalizada de Fourier en la forma:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k$$

Donde la convergencia es extendida en la forma de H . En este caso tenemos la identidad de Parseval en su forma mas general:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) \overline{(y, y_k)}$$

La demostración de estas propiedades se puede ver en [2] y [7].

1.1.3 Operadores Lineales

Sean V, W espacios normados y $A : V \rightarrow W$ un operador lineal. ver [2] y [7].

Definición 1.1.11 Un operador lineal A es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|Ax\| \leq C \|x\|, \forall x \in V$$

La más pequeña de estas constantes es llamada la norma de A .

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Teorema 1.1.12 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) A es acotado.
- ii) A es continuo en $x = 0$, esto es, $x_k \rightarrow 0$ implica que $Ax_k \rightarrow 0$.
- iii) A es continuo para cada $x \in V$.

Demostración. Por demostrar: $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (3)$

Por demostrar: Sea A acotado entonces A es continuo para cada $x \in V$.

Sean $x, x_0 \in V$ tal que $\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\|$ dado que A es un operador lineal y por hipótesis acotado entonces $\|A(x - x_0)\| \leq C\|(x - x_0)\|$, donde $\|(x - x_0)\| < \frac{\epsilon}{C}, \forall \epsilon > 0, \delta = \frac{\epsilon}{C}$. De aquí concluimos que $\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| < \epsilon$ y por tanto A continuo para cada $x \in V$.

$(3) \Rightarrow (2)$

Por demostrar: A es continuo $\forall x \in V$ entonces A es continua en cero.

Sea $x, x_0 \in V$ y A continuo $\forall x \in V$ entonces $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \epsilon$, si $x_0 = 0$ entonces, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \epsilon$ lo cual implica que A es continua en cero.

$(2) \Rightarrow (1)$

Supongamos que A no es acotado entonces $\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in V : \|Ax_k\| > k\|x\|$, si llamamos $y_k = \frac{x_k}{k\|x_k\|}$, tenemos que $\|y_k\| = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ de aquí resulta que $y_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, por la hipótesis continuidad en cero tenemos que $Ay_k \rightarrow A(0) = 0$, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, k > N, \|Ay_k\| < \epsilon$ si tomamos $\epsilon = 1$, tenemos que:

$$\|Ay_k\| = \left\| \frac{Ax_k}{k\|x_k\|} \right\| = \frac{\|Ax_k\|}{k\|x_k\|} > 1$$

Entonces $\|Ay_k\| > 1$, lo cual contradice el hecho de que $\|Ay_k\| \rightarrow 0$ (continuidad en cero).

1.1.3.1 El espacio $B(V, W)$ y espacio dual.

$B(V, W)$ el espacio de todos los operadores acotados de V en W . ver[7].

Corolario 1.1.13 Sea $B \in B(V, W)$ y $A \in B(W, Z)$ entonces $AB \in B(V, Z)$ y $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Demostración. Sea $x \in V$ y $AB \in B(V, Z)$ entonces: $\|ABx\| \leq C \|x\|$, si $x \in V$ entonces $\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$, $\|AB\| \leq \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|$.

En el caso que $W = \mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.14 Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{F}$, el espacio $B(V, \mathbb{F})$ es llamado el espacio dual de V y se denota por V' .

$$V' = \{f : f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$$

y f es un funcional lineal.

Teorema 1.1.15 (Representacion de Riesz) Ver [7]. Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H'$, entonces existe un único $y \in H$ con $f(x) = (x, y)$, para todo $x \in H$. Además $\|f\| = \|y\|$.

Demostración. (a) Existencia: Sea $N(K) = \{x \in H : f(x) = 0\}$ el nucleo de f si $N(K) = H$, tenemos que $f(x) = 0$, $\forall x \in H$ entonces $y = 0$ cumple las condiciones ($f(x) = (x, 0) = 0$, $\|f\| = \|0\| = \|y\|$) de otra manera $N(K) \neq H$ entonces $N(K)^\perp \neq \emptyset$ por lo tanto existe $z_0 \in N(K)^\perp$ e implica que $f(z_0) \neq 0$ y escogemos un $z = \frac{z_0}{f(z_0)} \in N(K)^\perp$ donde $f(z) = 1$. Puesto que $z \neq 0$ y f es lineal, tenemos

$$f(x - f(x)z) = f(x) - f(x)f(z) = 0.$$

Entonces, $x - f(x)z \in \text{Ker } f$. Puesto que $z \in N(K)^\perp$, tenemos

$$(f(x)z - x, z) = 0.$$

Esto implica que $f(x)(z, z) = (x, z) = f(x) \|z\|^2$. Por lo tanto

$$f(x) = (x, \frac{z}{\|z\|^2}) = (x, y),$$

donde $y = \frac{z}{\|z\|^2}$ cumple la condición. Mas aun, si $\|x\| \leq 1$, por la desigualdad de *Cauchy-Schwartz*,

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \leq \|y\|.$$

Así $\|f\| \leq \|y\|$. Por otro lado, si $x = \frac{y}{\|y\|}$, entonces $\|x\| = 1$ y así

$$\|f\| \geq |f(x)| = \|y\|.$$

Así $\|f\| = \|y\|$.

(b) (Unicidad).

Si y y w son tales que

$$f(x) = (x, y) = (x, w)$$

para todo $x \in H$, entonces $(x, y - w) = 0$ para todo $x \in H$. Esto implica que $y - w = 0$ y así $y = w$.

1.1.3.2 Operador Adjunto

Algunos de estos resultados se pueden encontrar en [2] y [7].

Teorema 1.1.16 (Operador adjunto) Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert complejos y $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Entonces existe un único operador $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tal que

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Demostración. Sea $y \in H_2$ y sea $f: H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x) = (Tx, y)$. Claramente, f es una transformación lineal y por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* y por ser T acotado

$$|f(x)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Así f es acotado y por el teorema de *Riesz*, existe un único $z \in H_1$ tal que $f(x) = (x, z)$. Esto nos permite definir $T^*y = z$, así T^* es una función de H_2 en H_1 tal que

$$(Tx, y) = (x, T^*y),$$

para todo $x \in H_1, y \in H_2$. Mostremos que T^* es lineal. Sea $y_1, y_2 \in H_2, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x \in H_1$,

$$\begin{aligned} (x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) &= (Tx, \alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \overline{\alpha}(Tx, y_1) + \overline{\beta}(Tx, y_2) \\ &= \overline{\alpha}(x, T^*y_1) + \overline{\beta}(x, T^*y_2) \\ &= (x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2). \end{aligned}$$

Así $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2$. Por lo tanto, T^* es lineal. Demostremos que T^* es acotado. Usando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* tenemos

$$\|T^*y\|^2 = (T^*y, T^*y) = (TT^*y, y) \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|.$$

Si $\|T^*y\| > 0$, tenemos que

$$\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|.$$

En el caso que $\|T^*y\| = 0$, entonces trivialmente se cumple que $\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$. Así para todo $y \in H_2$, tenemos

$$\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$$

y por lo tanto T^* es acotado y $\|T^*\| \leq \|T\|$. Finalmente mostremos que T^* es unico. Supongamos que existen $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tales que, para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$,

$$(Tx, y) = (x, S_1y) = (x, S_2y).$$

Por lo tanto, $S_1y = S_2y$, para todo $y \in H_2$. Así, $S_1 = S_2$. Por lo tanto T^* es unico.

El opeador T^* es llamado el operador adjunto de T . En el caso que $H = H_1 = H_2$, el operador T es llamado autoadjunto si $T = T^*$.

Las siguientes son propiedades de los operadores adjuntos.

Teorema 1.1.17 Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert complejos y $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T^*\| = \|T\|$.
3. La funcion $\varphi : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$ definida por $\varphi(T) = T^*$ es continua.
4. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
5. $N(T) = (ImT^*)^\perp$.
6. $N(T^*) = (ImT)^\perp$.
7. $N(T^*) = \{0\}$, si y sólo si, $H_2 = \overline{ImT}$.
8. En el caso que $H = H_1 = H_2$ y $T \in \mathcal{B}(H)$ es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Lema 1.1.18 Si V es un espacio normado y $T \in \mathcal{B}(V)$ es invertible, entonces para todo $x \in V$,

$$\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1} \|x\|$$

Lema 1.1.19 Si V es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(V)$ tiene la propiedad que existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$, para todo $x \in V$, entonces $Im(T)$ es cerrado.

1.1.4 Inversa Generalizada

Definición 1.1.20 Sea $T : V \longrightarrow W$ un operador lineal acotado.

(i) Diremos que $x \in V$ es una **solución de mínimos cuadrados** de $T(x) = y$ si

$$\|T(x) - y\| = \inf \{\|Tz - y\| : z \in X\},$$

denotemos por L el conjunto de soluciones de mínimos cuadrados de $T(x) = y$.

(ii) $\hat{x} \in X$ es llamada **solución generalizada** de $T(x) = y$, si $\hat{x}$ es una solución de mínimos cuadrados de $T(x) = y$ y

$$\|\hat{x}\| = \inf \{\|z\| : z \in L\}.$$

Definición 1.1.21 *La inversa generalizada de Moore-Penrose, ver[1].* $\mathbf{T}^\dagger$, es un operador lineal definido como la única extensión lineal de $\tilde{T}^{-1}$

$$\tilde{T} = T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \longrightarrow R(T),$$

con dominio de $\mathbf{T}^\dagger$, definido como

$$D(\mathbf{T}^\dagger) = R(T) + R(T)^\perp,$$

y

$$N(\mathbf{T}^\dagger) = R(T)^\perp$$

$\mathbf{T}^\dagger$ está bien definida. Puesto que $N(\tilde{T}) = \{0\}$ y $R(\tilde{T}) = R(T)$, entonces $\tilde{T}^{-1}$ existe.

Demostración. Además, dado que $\mathbf{T}^\dagger$ sea lineal y que cualquier $y \in D(\mathbf{T}^\dagger)$ tiene representación única $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$ y $y_2 \in R(T)^\perp$, $\mathbf{T}^\dagger(y)$ tiene que ser $\tilde{T}^{-1}(y_1)$, pues $\mathbf{T}^\dagger(y) = \mathbf{T}^\dagger(y_1) + \mathbf{T}^\dagger(y_2) = \mathbf{T}^\dagger(y_1) = \tilde{T}^{-1}(y_1)$.

Veamos que $N(\tilde{T}) = \{0\}$, porque si $x \in N(\tilde{T})$, entonces $x \in N(T)^\perp$ y $T(x) = 0$, así $x \in N(T)$. Por lo tanto, $N(T)^\perp \cap N(T) = \{0\}$, entonces $x = 0$ y por tanto $N(\tilde{T}) = \{0\}$. Luego $\tilde{T}$ es inyectiva y en consecuencia $\tilde{T}^{-1}$ existe.

Proposición 1.1.22 Sean P y Q proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{N}(T)$ y $\overline{R(T)}$, respectivamente. Entonces, $R(\mathbf{T}^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ y

$$TT^\dagger T = T$$

$$T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$$

$$T^\dagger T = I - P$$

$$TT^\dagger = Q|_{D(\mathbf{T}^\dagger)}.$$

Demostración.

Por la definición de $T^\dagger$, para todo $y \in D(T^\dagger)$, con $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in R(T)$ y $y_2 \in R(T)^\perp$,

$$T^\dagger y = T^\dagger y_1 + T^\dagger y_2 = T^\dagger y_1 = \tilde{T}^{-1} Qy.$$

Por lo tanto,

$$T^\dagger y \in R(\tilde{T}^{-1}) = \mathcal{N}(T)^\perp$$

Puesto que $T^\dagger y = \tilde{T}^{-1} Qy = T^\dagger Qy$, entonces $TT^\dagger y = T\tilde{T}^{-1} Qy = Qy$, así tenemos que $TT^\dagger = Q \mid_{D(T^\dagger)}$. Por definición de $T^\dagger$, tenemos que para todo $x \in V$:

$$\begin{aligned} T^\dagger Tx &= T^\dagger T(Px + (I - P)x) = T^\dagger TPx + T^\dagger T(I - P)x \\ &= T^\dagger T(I - P)x = \tilde{T}^{-1} T(I - P)x = (I - P)x, \end{aligned}$$

así tenemos que $T^\dagger T = I - P$. Esto implica que $TT^\dagger T = T(I - P) = T - TP = T$. Por último, mostraremos la segunda identidad. Puesto que para todo $y \in D(T^\dagger)$, $T^\dagger y = T^\dagger Qy$ y $TT^\dagger = Q \mid_{D(T^\dagger)}$, tenemos $T^\dagger TT^\dagger y = T^\dagger Qy = T^\dagger y$. Así $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$.

Proposición 1.1.23 La inversa generalizada de *Moore-Penrose* $T^\dagger$ tiene grafica, $\mathcal{G}r(T^\dagger)$, cerrada. Además, $T^\dagger$ es acotado (continuo), si y solo si, $R(T)$ es cerrado.

Demostración. Sea $y_1 \in R(T)$ y $x = \tilde{T}^{-1} y_1$, entonces $x \in N(T)^\perp$. Luego

$$Tx = TT^\dagger y_1 = y_1.$$

Así,

$$(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) = (Tx, x) \in Y \times N(T)^\perp.$$

Si $x \in N(T)^\perp$, entonces $y_1 = Tx$ (o sea $y_1 \in R(T)$), entonces $\tilde{T}^{-1} y_1 = T^\dagger Tx = x$. Tenemos que

$$(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) = (Tx, x).$$

Luego el conjunto de parejas,

$$\{(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) : y_1 \in R(T)\} = \{(Tx, x) : x \in V\} \cap (Y \times \mathcal{N}(T)^\perp)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}r(T^\dagger) &= \{(y, T^\dagger y) : y \in D(T^\dagger)\} \\ &= \{(y_1 + y_2, \tilde{T}^{-1} y_1) : y_1 \in R(T), y_2 \in R(T)^\perp\} \\ &= \{(y_1, \tilde{T}^{-1} y_1) : y_1 \in R(T)\} + (R(T)^\perp \times \{0\}) \end{aligned}$$

Como cada uno es cerrado y son ortogonales entre si, entonces la suma es cerrada. Ahora, supongamos $R(T)$ es cerrado, entonces $D(T^\dagger) = W$ y por el teorema del grafo cerrado, $T^\dagger$ es continua. Recíprocamente, consideremos que $T^\dagger$ es acotado, entonces $T^\dagger$ tiene una única extensión continua $\overline{T^\dagger}$ a todo Y . Como T es continua, $T\overline{T^\dagger} = Q$, luego para $y \in \overline{R(T)}$, $y = Qy = T\overline{T^\dagger}y \in R(T)$, por lo tanto $\overline{R(T)} \subset R(T)$. Es decir, $R(T)$ es cerrado.

Teorema 1.1.24 Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces, $Tx = y$ tiene **una solución generalizada única**, dada por

$$x^\dagger = T^\dagger y.$$

El conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados es $x^\dagger \oplus \mathcal{N}(T)$.

Demostración. Sea $S = \{z \in X : Tz = Qy\}$, donde Q es la proyección ortogonal sobre $R(T)$. Como $y \in D(T^\dagger) = R(T) + R(T)^\perp$ y $Qy \in R(T)$, entonces existe $x \in X$ tal que $Tx = Qy$, luego $S \neq \emptyset$.

Veamos que S es igual al conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados de $Tx = y$.

Dado que Q es el operador proyección ortogonal sobre $R(T)$, entonces para todo $z \in S$ y $x \in V$,

$$\|Tz - y\| = \|Qy - y\| \leq \|Tx - y\|.$$

De aquí que todos los elementos de S son soluciones de mínimos cuadrados de $Tx = y$. Recíprocamente, sea z una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$. Entonces,

$$\|Qy - y\| \leq \|Tz - y\| = \inf\{\|u - y\| : u \in R(T)\} = \|Qy - y\|.$$

Luego, Tz es el elemento más cercano a y en $R(T)$. Es decir, $Tz = Qy$. De donde tenemos que

$$S = \{x \in X : x \text{ es una solución de mínimos cuadrados de } Tx = y\} \neq \emptyset.$$

Ahora, sea $\bar{z}$ una solución de mínimos cuadrados, de mínima norma, en el conjunto $S = T^{-1}(\{Qy\})$. Entonces :

Como $S = \bar{z} + \mathcal{N}(T)$, es suficiente mostrar que $\bar{z} = T^\dagger y$. Pero como el elemento de mínima norma en $\bar{z} + \mathcal{N}(T)$, $\bar{z}$, es ortogonal a $\mathcal{N}(T)$, es decir, $\bar{z} \in \mathcal{N}(T)^\perp$, entonces

$$\bar{z} = (I - P)\bar{z} = T^\dagger T\bar{z} = T^\dagger Qy = T^\dagger T T^\dagger y = T^\dagger y.$$

Es decir, $\bar{z} = T^\dagger y$.

Teorema 1.1.25 Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $x \in X$ es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$, si y sólo si, x satisface la ecuación normal $T^*Tx = T^*y$.

Esta ecuación, es conocida como la ecuación normal.

Demostración. $x \in X$ es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$, si y sólo si, Tx es el elemento más cercano a y en $R(T)$, es decir, $Tx - y \in R(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$.

Luego $T^*(Tx - y) = 0$ y por tanto $T^*Tx = T^*y$.

1.2 Operadores Compactos

Estos resultados se pueden ver en [7].

Definición 1.2.1 (Operador Compacto) Sean V, W espacios normados y A un operador lineal $A : V \rightarrow W$. A es llamado un operador compacto, si dada cualquier sucesión $\{x_n\} \subset V$ acotada, entonces $\{Ax_n\}$ contiene una subsucesión convergente.

El conjunto de operadores compactos se denota por $K(X, Y)$.

Teorema 1.2.2 Propiedades de los operadores compactos:

1. Si A_1 y A_2 son operadores compactos de V en W , entonces también lo son $A_1 + A_2$, y αA_1 para $\alpha \in K$.
2. Si $A : V \rightarrow W$ es compacto, entonces $A \in \mathcal{B}(V, W)$.
3. Si $A : V \rightarrow W$ es un operador de rango finito, entonces A es compacto. Además, si $\dim(V) < \infty$ ó $\dim(W) < \infty$, entonces A es compacto.
4. Sea $A_n : V \rightarrow W$ una secuencia de operadores compactos entre espacios de Banach V y W y $A : V \rightarrow W$ un operador acotado. Si A_n converge a A en la norma de operadores, esto es

$$\|A_n - A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_n x - Ax\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces A es compacto. Así el conjunto de operadores compactos $K(V, W)$ es cerrado en el conjunto $\mathcal{B}(V, W)$.

5. Sea $A_n : V \rightarrow W$ una secuencia de operadores compactos de rango finito que converge a $A \in \mathcal{B}(V, W)$, entonces A es compacto.

6. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(H)$. A es compacto, si y sólo si, A^* es compacto.
7. Si $A \in \mathcal{B}(V, W)$ y $B \in \mathcal{B}(W, Z)$ y A ó B es compacto, entonces AB es compacto.
8. Sea $A_n \in \mathcal{B}(V, W)$ una sucesión de operadores que convergen puntualmente a algún operador $A \in \mathcal{B}(V, W)$, esto es $A_n x \rightarrow Ax$ para todo $x \in V$. Si $B : V \rightarrow W$ es compacto, entonces $\|A_n B - AB\| \rightarrow 0$.

La demostración de estas propiedades se puede ver en [7].

Teorema 1.2.3 Sea X un espacio normado de dimensión infinita entonces el operador identidad I en X no es compacto.

Teorema 1.2.4 Sea X un espacio normado de dimensión infinita y $T \in K(X)$ entonces T no es invertible.

Demostración. Supongamos que T es invertible, entonces el operador identidad se puede ver de la siguiente manera;

$$I = T^{-1}T$$

como T es compacto entonces el operador I es compacto como X es de dimensión infinita contradice el resultado anterior.

Definición 1.2.5 Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal $\{e_n\}$ y $T \in \mathcal{B}(H)$. Diremos que T es un operador Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Teorema 1.2.6 Sea H un espacio de Hilbert y sean $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ bases ortonormales para H . Si $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^*f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2$. (Esta condición para un operador Hilbert-Schmidt no depende de la escogencia de la base ortonormal).
2. T es un operador Hilbert-Schmidt, si y solo si, T^* es Hilbert-Schmidt.
3. Si T es un operador Hilbert-Schmidt, entonces T es compacto.
4. El conjunto de operadores Hilbert-Schmidt es un subespacio de $\mathcal{B}(H)$.

Teorema 1.2.7 Sea $k \in L^2[(a, b) \times (a, b)]$. El operador $K : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ lineal definido por

$$Kx(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad t \in (a, b), \quad x \in L^2(a, b)$$

es un operador compacto de $L^2(a, b)$

Demostración. Mostremos que K es un operador Hilbert-Schmidt. Por lo tanto, K sería compacto. Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de $L^2(a, b)$. Para cada $n \in N$,

$$Ke_n(t) = \int_a^b k(t, s)e_n(s)ds = (k_t, \bar{e}_n).$$

La sucesión $\{\bar{e}_n\}$ también es una base de $L^2(a, b)$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |(k_t, \bar{e}_n)|^2 dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |(k_t, \bar{e}_n)|^2 dt = \int_a^b \|k_t\|^2 dt < \infty.$$

Teorema 1.2.8 El operador adjunto del operador integral $Kx(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds$ dado en el teorema anterior es

$$K^*v(s) = \int_a^b \overline{k(t, s)}v(t)dt, \quad v \in L^2(a, b).$$

Para cualquier $u, v \in L^2(a, b)$,

$$\begin{aligned} (Ku, v) &= \int_a^b Ku(t)\overline{v(t)}dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b k(t, s)u(s)ds \right\} \overline{v(t)}dt \\ &= \int_a^b u(s) \left\{ \overline{\int_a^b k(t, s)v(t)dt} \right\} ds \\ &= (u, K^*v), \end{aligned}$$

donde $K^*v(s) = \int_a^b \overline{k(t, s)}v(t)dt$. Si definimos $k^*(s, t) = \overline{k(t, s)}$, tenemos que

$$K^*v(s) = \int_a^b k^*(s, t)v(t)dt.$$

1.2.1 Teoría Espectral de Operadores Compactos en Espacios de Hilbert

Definición 1.2.9 Sea V un espacio normado y $A : V \rightarrow V$ un operador lineal. Definimos el espectro de A como el conjunto

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

Diremos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un valor propio de A entonces los elementos $x \neq 0$ del núcleo $\mathcal{N}(A - \lambda I) = \{x \in V : Ax - \lambda x = 0\}$ son llamados vectores propios de A .

Si un operador compacto $A \in \mathcal{B}(V)$ es definido sobre un espacio vectorial de dimensión finita N , sabemos del álgebra lineal que el espectro de A coincide exactamente con N valores propios (con su respectiva multiplicidad). A continuación, consideraremos el caso interesante, cuando V es de dimensión infinita.

Teorema 1.2.10 Sea $A \in \mathcal{B}(V)$ un operador compacto sobre un espacio infinito dimensional V . Entonces $\lambda = 0$ pertenece a $\sigma(A)$ y $\sigma(A) - \{0\}$, a lo más es un conjunto contable de valores propios sin punto de acumulación, excepto, posiblemente $\lambda = 0$. Además, el subespacio propio de cada valor propio diferente de cero es de dimensión finita.

Observemos que si V es infinito dimensional, $\lambda = 0$ siempre pertenece a $\sigma(A)$, y el correspondiente subespacio propio debe ser de dimensión infinita.

Vamos a considerar ahora el caso donde A es un operador compacto y autoadjunto. Estos operadores tienen propiedades muy importantes, similares a aquellas de las matrices simétricas. Resumiremos en el siguiente teorema estas propiedades.

Teorema 1.2.11 Sea $T : H \rightarrow H$ un operador lineal compacto y autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H . Entonces, H tiene una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ consistente de vectores propios de T . Si H es de dimensión infinita, los correspondientes valores propios diferentes de cero son reales y pueden ser arreglados como una sucesión no creciente $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$ donde $|\lambda_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Cada vector $x \in H$ puede escribirse como

$$x = \sum_{n \in L} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n + Qx,$$

donde $Q : H \rightarrow N(T)$ es el operador proyección ortogonal sobre el núcleo de T y tenemos que

$$Tx = \sum_{n \in L} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

donde $L = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, si la dimensión del rango es finita N ó $L = \mathbb{N}$ (los números naturales) si la dimensión del rango es infinita.

Algunos aspectos importantes para resaltar de este teorema son los siguientes:

$$|\lambda_1| = \|T\| = \max\{ |(Tx, x)| : x \in H, \|x\| = 1 \},$$

donde $|\lambda_1|$ es el valor propio en valor absoluto más grande de T . Sea φ_1 el correspondiente vector propio. Si definimos $Q_1 = \{\varphi_1\}^\perp$, podemos considerar el operador T sobre este nuevo espacio de Hilbert. Y por lo tanto, debe existir el valor propio más grande en este subespacio. En general

$$|\lambda_n| = \|T\| = \max\{ |(Tv, v)| : v \in Q_n, \|v\| = 1 \}$$

$$Q_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}^\perp$$

Si H es de dimensión finita, este proceso parará cuando H sea generado por los vectores propios. De otra manera, continuará infinitamente mientras $\lambda_n \rightarrow 0$.

1.2.2 Valores Singulares de Operadores Compactos

Los valores singulares son una herramienta importante para analizar operadores compactos. Estos están basados en el hecho que el operador K^*K es compacto y autoadjunto.

Definición 1.2.12 Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ un operador compacto. Las raíces cuadradas de los valores propios no negativos de $K^*K : H_1 \rightarrow H_1$, $\{\mu_n\}$ son llamados los valores singulares de K .

Observemos que el núcleo de K y K^*K son los mismos. Si $x \in N(K)$, claramente $x \in N(K^*K)$. Si $x \in N(K^*K)$, entonces $0 = (K^*Kx, x) = (Kx, Kx) = \|Kx\|^2$, entonces $Kx = 0 \Leftrightarrow x \in N(K)$. De esto, se sigue que

$$N(K) = N(K^*K).$$

Teorema 1.2.13 Sea $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, donde L el conjunto de los índices de todos los valores singulares diferentes de cero, una sucesión de valores singulares distintos de cero de un operador compacto $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces, existe una sucesión ortonormal $\{v_n\} \subset H_1$ y $\{u_n\} \subset H_2$ tal que

$$\begin{aligned} K v_n &= \mu_n u_n \\ K^* u_n &= \mu_n v_n, \end{aligned}$$

para todo $n \in L$. Para cada $x \in H_1$, tenemos

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, v_n \rangle v_n + Qx,$$

donde $Q : H_1 \rightarrow N(K)$ el operador proyección ortogonal sobre el núcleo de K . Por lo tanto, tenemos que

$$Kx = \sum_{n \in L} \mu_n \langle x, v_n \rangle u_n.$$

Demostración. Sea $\{v_n\}$ una sucesión ortonormal de vectores propios de K^*K tal que $K^*K v_n = \mu_n^2 v_n$ para todo $n \in L$. Definamos una segunda sucesión por

$$u_n = \frac{1}{\mu_n} K v_n, \quad n \in L.$$

Esta sucesión es ortonormal puesto que

$$\begin{aligned} (u_i, u_j) &= \left(\frac{1}{\mu_i} K v_i, \frac{1}{\mu_j} K v_j \right) = \frac{1}{\mu_i \mu_j} (K v_i, K v_j) = \frac{1}{\mu_i \mu_j} (K^* K v_i, v_j) \\ &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} (\mu_i^2 v_i, v_j) = \frac{\mu_i}{\mu_j} (v_i, v_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$x = \sum_{n \in L} \langle x, v_n \rangle v_n + Qx,$$

donde $Q : H_1 \rightarrow N(K^*K)$ el operador proyección ortogonal sobre el núcleo de K^*K . Puesto que $N(K) = N(K^*K)$, tenemos el resultado para $x \in H_1$. Igualmente, tenemos que

$$Kx = \sum_{n \in L} \mu_n \langle x, v_n \rangle u_n.$$

Esta última ecuación es denominada Descomposición Singular del Operador K .

Si el operador inverso K^{-1} existe y es compacto, tenemos que H_1 tiene dimensión finita (de otra manera la inversa sería no acotada) y tenemos que $N(K) = \{0\}$. Claramente,

$$K^{-1}g = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu_n} \langle g, u_n \rangle v_n.$$

Definamos el número de condición de un operador K como

$$k(K) = \|K\| \|K^{-1}\| = \frac{\mu_1}{\mu_N}.$$

El número de condición es muy utilizado en álgebra lineal numérica para ilustrar el mal planteamiento de ciertos problemas inversos.

Vamos a hallar el operador adjunto de K en términos de los valores singulares. Observemos que

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n \in 1}^{\infty} \langle f, v_n \rangle v_n + Qf \\ g &= \sum_{m \in 1}^{\infty} \langle g, u_m \rangle u_m + Pg \\ Kf &= \sum_{n \in 1}^{\infty} \mu_n \langle f, v_n \rangle u_n \end{aligned}$$

donde Q y P son operadores proyección ortogonal sobre $N(K)$ y $\{u_1, u_2, \dots\}^\perp$, respectivamente. Ahora

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \left(\sum_{n \in 1}^{\infty} \mu_n \langle f, v_n \rangle u_n + Qf, \sum_{m \in 1}^{\infty} \langle g, u_m \rangle u_m + Pg \right) \\ &= \sum_{n \in 1}^{\infty} \mu_n (f, v_n) \left[\overline{(g, u_n)} + (u_n, Pg) \right] \\ &= \sum_{n \in 1}^{\infty} \mu_n \overline{(g, u_n)} [(f, v_n) + (Qf, v_n)] \\ &= \left(\sum_{n \in 1}^{\infty} (f, v_n) v_n + Qf, \sum_{m \in 1}^{\infty} \langle g, u_m \rangle v_m \right) = (f, K^*g). \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, definimos

$$K^*g = \sum_{n \in 1}^{\infty} \langle g, u_n \rangle v_n.$$

En esta prueba, hemos usado que $(u_n, Pg) = 0$ de acuerdo a la definición de P y del hecho que $(Qf, \frac{1}{\mu_n} K^*u_n) = (KQf, \frac{1}{\mu_n} u_n) = 0$.

1.3 Descomposición en Valores Singulares en dimensión finita

En esta sección estudiaremos la descomposición en valores singulares de una matriz $A_{m \times n}$. ver [6].

Iniciemos estudiando las matrices simétricas, como ya sabemos una matriz A es simétrica si es una matriz cuadrada tal que $A = A^T$, así la descomposición de A esta dada de la siguiente manera $A = PDP^T$ donde P es una matriz ortogonal ($P^T = P^{-1}$) y D es una matriz diagonal.

Cuando A no es simétrica, pero si cuadrada, si A es diagonalizable existe una descomposición de $A = SDS^{-1}$ siendo S una matriz no singular aunque no necesariamente ortogonal.

Ahora veremos que toda matriz $A_{m \times n}$, $m \geq n$ cuadrada o no, simétrica o no, tiene una factorización de la forma:

$$A = UDV^T$$

Donde U es una matriz $m \times m$ con columnas ortogonales, V es una matriz $n \times n$ y D es una matriz diagonal $m \times n$.

1.3.1 Valores Singulares de una Matriz

Para cualquier matriz $A_{m \times n}$, la matriz $A^T A$ es simétrica dado que $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, y por tanto puede ser diagonalizada ortogonalmente. Los valores propios de $A^T A$ son reales y no negativos. Dado que para cualquier valor propio u , se tiene:

$$A^T A u = \lambda u$$

Miremos que los valores propios λ son no negativos:

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = \langle A^T A u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda \|u\|^2$$

Por tanto $\lambda \geq 0$.

Definición 1.3.1 Si $A_{m \times n}$, los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^T A$ y se denotan mediante $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Es una convención acomodar los valores singulares de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

1.3.2 Teorema de Descomposición en valores singulares.

Algunos de estos resultados se puede encontrar en [6].

Teorema 1.3.2 Sea $A_{m \times n}$ una matriz con $(m \geq n)$, se puede factorizar como

$$A = U \Sigma V^T$$

Donde $U_{m \times m}$ es una matriz con columnas ortogonales, $V_{n \times n}$ es una matriz ortogonal, y $\Sigma_{m \times n}$ una matriz diagonal. Si los valores singulares no nulos de A son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, con $r \leq n$. Y el rango de A es $r < n$ entonces $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$. $\Sigma_{m \times n}$ en una matriz diagonal, de la siguiente forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0,$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ son los valores singulares de A . Las columnas u_i de U son llamados vectores singulares por izquierda, mientras que las columnas v_i de V son llamados vectores singulares por derecha. La relación es llamada descomposición en valores singulares de A .

Demostración.

La matriz cuyas columnas son los vectores propios de $A^T A$ es ortogonal. Sean

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

los valores propios de $A^T A$. Se definen los valores singulares de A como los valores

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Sea r el rango de A ($\dim(R(A)) = r$).

La matriz $A^T A$ tendría el mismo rango. Además, como $A^T A$ es simétrica, su rango es igual al numero de valores propios diferentes de cero. Así,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0.$$

La misma relación se obtiene para los valores singulares

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Sean $V_1 = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ y $V_2 = (v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n)$ las matrices formadas por los vectores propios correspondientes. Las dimensiones de V_1 y V_2 son $n \times r$ y $n \times (n - r)$ respectivamente. Sea

$$D_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

una matriz diagonal $r \times r$. Las entradas de la diagonal son los valores singulares distintos de cero. Definamos la matriz $\Sigma_{m \times n}$ por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D_1 & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

Observemos que los vectores columna de V_2 son vectores propios de $A^T A$ correspondientes $\lambda = 0$. Así $A^T A v_j = 0$ para todo $j = r + 1, r + 2, \dots, n$.

Por lo tanto los vectores columna de V_2 forman una base ortonormal de $N(A^T A) = N(A)$.

Puesto que $V = [V_1, V_2]$ es una matriz ortogonal, entonces $V^T = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$$I = VV^T = V_1 V_1^T + V_2 V_2^T,$$

entonces

$$A = AI = AVV^T = AV_1 V_1^T + AV_2 V_2^T = AV_1 V_1^T.$$

Hasta ahora hemos construido dos matrices V y Σ . Vamos a hallar una matriz ortogonal $U_{m \times m}$ tal que podamos descomponer A como

$$A = U \Sigma V^T,$$

o equivalentemente

$$AV = U \Sigma. \quad (1.1)$$

Si definimos $U = [u_1 u_2 \dots u_m]$ y comparamos las primera r columnas de (1) tenemos que

$$A v_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

y así podemos definir

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Definamos

$$U_1 = (u_1, u_2, \dots, u_r),$$

claramente

$$AV_1 = U_1 D_1.$$

Las columnas de U_1 forman una base ortonormal puesto que

$$u_i^T u_j = \frac{(Av_i)^T}{\sigma_i} \frac{Av_j}{\sigma_j} = \frac{v_i^T A^T Av_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{v_i^T \lambda_j v_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_j v_i^T v_j}{\sigma_i} = \delta_{ij}.$$

Se sigue que u_j , $j = 1, \dots, r$ es el espacio columna de A , puesto que si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n,$$

luego

$$Ax = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \dots + \alpha_r Av_r = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r,$$

por lo tanto $Ax \in \{u_1, \dots, u_r\}$

Así, $u_1, u_2, \dots, u_r$ es una base ortonormal de $R(A)$. Puesto que $R(A)^T = N(A^T)$ y

$$\dim(R(A)^T) + \dim(R(A)) = m,$$

entonces $\dim(N(A^T)) = m - r$. Sea $u_{r+1}, \dots, u_m$ una base ortonormal del $N(A^T)$ y sea $U_2 = [u_{r+1}, \dots, u_m]$.

Definamos

$$U = [U_1 U_2],$$

entonces

$$\begin{aligned} U \Sigma V^T &= (U_1 U_2) \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \\ &= (U_1 U_2) \begin{pmatrix} D_1 V_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= U_1 D_1 V_1^T = AV_1 V_1^T = A. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que A se puede descomponer en la forma

$$A = U \Sigma V^T.$$

Ejemplo 1.3.3 Encontrar la descomposición en valores singulares de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\text{Sea } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

como $P(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I)$ polinomio característico.

$$A^T A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = (2 - \lambda)^2 - 1 = ((2 - \lambda) - 1)((2 - \lambda) + 1) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

De aquí tenemos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ son los valores propios y $\sigma_1 = \sqrt{1}$, $\sigma_2 = \sqrt{3}$ los valores singulares correspondientes.

Halleemos los vectores propios correspondientes a los valores propios.

Sea $A^T A V_1 = \lambda_1 V_1$, para $\lambda_1 = 1$ tenemos, $(A^T A - I_1) V_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 = 0$. por tanto el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ tomemos } V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Continuando con el proceso pero para $\lambda_2 = 3$ tenemos, $(A^T A - 3I_2) V_2 = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces: $-a_2 + b_2 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$. por tanto el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \text{ tomemos } V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto la matriz } V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz U calculamos las columnas de la siguiente manera:

$$u_1 = \frac{AV_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{AV_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$u_3 \in N(A^T)$ entonces $A^T u_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ de donde } S = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix} \text{ y así } u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3.4 Sea $A = U\Sigma V^T$ una descomposición de valores singulares de una matriz A de $m \times n$. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, $r < n$ todos los valores singulares NO NULOS de A . Entonces:

- i) El rango de A es r .
- ii) $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ es una base ortonormal de $R(A)$
- iii) $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de $N(A^T)$.
- iv) $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es una base ortonormal de $R(A^T)$
- v) Si $r < n$, $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de $N(A)$.

1.3.3 Propiedades de los valores singulares de una Matriz $A_{m \times n}$

1.3.3.1 Teorema de aproximación en norma de Frobenius

Una norma matricial que se puede relacionar con la descomposición en valores singulares de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es la conocida como norma de Frobenius que viene dada por:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

si a_i representa la i -ésima fila de A , entonces

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m \|a_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea A una matriz $m \times n$ de rango r y $0 < k < r$. Sea M el conjunto de todas las matrices $m \times n$ de rango menor o igual a k . Se puede mostrar que existe una matriz $X \in M$ tal que

$$\|A - X\|_F = \min_{S \in M} \|A - S\|_F$$

Teorema 1.3.5 Si A es una matriz $m \times n$ y Q es una matriz ortogonal $m \times m$ entonces

$$\|QA\|_F = \|A\|_F \cdot (*)$$

De lo que se sigue, que si $A = U\Sigma V^T$, entonces

$$\|A\|_F = \|\Sigma V^T\|_F = \|V \Sigma^T\|_F = \|\Sigma^T\|_F.$$

Así

$$\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración.

Para mostrar $(*)$ veamos primero que $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^T A)$, notemos que el elemento diagonal i -ésimo de $A^T A$ viene dado por:

$$(A^T A)_{ii} = \left(\sum_{k=1}^m a_{ki}^2 \right)$$

Donde la ultima igualdad es cierta por ser A real, y por tanto,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ki}^2 = \|A\|_F^2$$

veamos ahora que si Q es ortogonal $\|QA\|_F = \|A\|_F$;

$$\|QA\|_F = \sqrt{\text{tr}(QA)^T (QA)} = \sqrt{\text{tr}(A^T Q^T Q A)} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F$$

Si $A = U\Sigma V^T$, dado que U es una matriz ortogonal aplicando lo demostrado anteriormente tenemos:

$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^T\|_F = \|\Sigma V^T\|_F = \|(\Sigma V^T)^T\|_F = \|V\Sigma^T\|_F = \|\Sigma^T\|_F = \|\Sigma\|_F$$

Así:

$$\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 1.3.6 Sea $A = U\Sigma V^T$ una matriz $m \times n$ de rango $r > 0$. Definimos para $k = 1, \dots, r-1$, $A_k = U\Sigma_k V^T$ donde Σ_k esta dada por:

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \sigma_k & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Se verifica entonces que:

$$\|A - A_k\|_F = \min \{ \|A - B\|_F : \text{rango}(B) = k \} = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

Teorema 1.3.7 Si A es una matriz $m \times n$ con descomposición en valores singulares $U\Sigma V^T$, entonces

$$\|A\|_2 = \sigma_1,$$

donde σ_1 es el valor singular más grande.

Demostración.

Puesto que las matrices U y V son ortogonales,

$$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^T\|_2 = \|\Sigma\|_2.$$

Por definición

$$\|\Sigma\|_2 = \max_{\|x\|=1, x \neq 0} \|\Sigma x\|_2 = \max_{\|x\|=1, x \neq 0} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_1$$

Si $x = (1, 0, \dots, 0)^*$, entonces

$$\|\Sigma x\|_2 = \sigma_1,$$

y por tanto

$$\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1.$$

Teorema 1.3.8 Si A es una matriz invertible $n \times n$ con descomposición en valores singulares $U\Sigma V^T$, con sus valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, entonces el número de condición de A está dado por:

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1 \sigma_n,$$

donde σ_1 es el valor singular más grande.

Demostración.

Puesto que la matriz A^{-1} tiene descomposición en valores singulares $V\Sigma^{-1}U^T$, entonces los valores singulares en orden decreciente están dados por

$$\frac{1}{\sigma_n} \geq \frac{1}{\sigma_{n-1}} \geq \dots \geq \frac{1}{\sigma_1}; \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

Por lo tanto

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n} \quad y \quad \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Teorema 1.3.9 Si A es una matriz $n \times n$ con descomposición en valores singulares $U\Sigma V^T$, entonces

$$\det(A) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Demostración.

Puesto que las matrices U y V son ortogonales,

$$\det(A) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V^T) = \det(\Sigma) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Teorema 1.3.10 Sea A una matriz $m \times n$ con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r \geq \dots \sigma_n$, y r el rango de la matriz A . Sean $u_1, \dots, u_r$ vectores singulares por la izquierda y $v_1, \dots, v_r$ vectores singulares por la derecha de A correspondientes a esos valores singulares entonces:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T \cdots \sigma_r u_r v_r^T,$$

Demostración. Sea $A = U\Sigma V^T$ donde $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$, son los valores singulares positivos de A . La matriz Σ puede descomponerse en la siguiente forma $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_r$ donde

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \text{Diag}(0, \dots, \sigma_i, \dots, 0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\text{Diag}(0, \dots, \sigma_i, \dots, 0)$ es una matriz diagonal $r \times r$ con el valor singular σ_i en la i -ésima posición. Por lo tanto, la matriz A se puede descomponer como $A = \sum_{i=1}^r U \Sigma_i V^*$, donde $U \Sigma_i V^* = \sigma_i u_i v_i^*$ es una matriz de rango uno. Así, A se puede descomponer como

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* \cdots \sigma_r u_r v_r^*.$$

Teniendo en cuenta este teorema, tenemos que la matriz más cercana de rango k es obtenida por truncamiento de esta suma después de los primeros k términos:

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* \cdots \sigma_k u_k v_k^*.$$

Ejemplo 1.3.11 A continuación tenemos la imagen original de saturno, la cual es una imagen digital de tamaño 400×500 que corresponde a $K = 400$ valores singulares. Donde necesitaríamos almacenamiento para 200.000 números de posición.

Imagen original con 400 valores singulares.



Si aproximamos la imagen original que corresponde a la matriz A de tamaño 400×500 por una matriz de rango $K = 60$ necesitaríamos un almacenamiento de $60(400 + 500 + 1) = 54.060$ lo cual equivale aproximadamente al 27% del almacenamiento total y su imagen esta dada a continuación:



1.4 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformarse en cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce. Ver,[1] y [5].

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define su transformada de Fourier como :

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \langle e^{-iwt}, f(t) \rangle. \quad (1.2)$$

Su transformada inversa esta dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt} dw = \langle e^{iwt}, \hat{f}(w) \rangle \quad (1.3)$$

1.4.1 Propiedades de la transformada de fourier en 1 dimensión.

i) Linealidad

Sea $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = \alpha \widehat{f}(w) + \beta \widehat{g}(w) \quad (1.4)$$

Demostración:

$$\widehat{h}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-iwt} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \alpha \widehat{f}(w) + \beta \widehat{g}(w)$$

ii) **Simetría**

Sea $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = \alpha \widehat{f}(w) + \beta \widehat{g}(w) \quad (1.5)$$

Demostración:

$$\widehat{h}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-iwt} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \alpha \widehat{f}(w) + \beta \widehat{g}(w)$$

iii) **Traslación**

Sea $h(t) = f(t - t_0)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = e^{-iwt_0} \widehat{f}(w) \quad (1.6)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-iwt} dt \\ t - t_0 &= \tau, t = \tau + t_0, dt = d\tau \\ \widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w(\tau + t_0)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w \tau} e^{-i w t_0} d\tau = e^{-i w t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w \tau} d\tau = e^{-i w t_0} \widehat{f}(w) \end{aligned}$$

iv) **Cambio de escala en el dominio t.**

Sea $h(t) = f(at)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right) \quad (1.7)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt \\ at &= \tau, t = \frac{\tau}{a}, dt = \left(\frac{1}{a}\right) d\tau \\ \widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w(\frac{\tau}{a})} \left(\frac{1}{a}\right) d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w(\frac{\tau}{a})} d\tau = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right) \end{aligned}$$

v) **Convolución en el dominio t.**

Sea $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = f(t) * g(t)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) \quad (1.8)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] e^{-iwt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-iwt}dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\widehat{g}(w)d\tau \\ &= \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) \end{aligned}$$

Teorema 1.4.1 Formula de Parseval

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle \quad (1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w)dw \quad (1.10)$$

Para el caso en el que $f(t) = g(t)$ tenemos:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|^2 \quad (1.11)$$

1.4.2 Transformada de fourier Bidimensional

Representación bidimensional de imágenes en un dominio de fourier. ver[1].

Sea $f(x, y)$ función de dos variables independientes x, y, $\widehat{f}(u, v)$ transformada de fourier de $f(x, y)$.

Definimos la Transformada de fourier de la imagen $f(x, y)$ de la siguiente manera:

$$\widehat{f}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi i(u,v) \cdot (x,y)} dx dy \quad (1.12)$$

es decir,

$$\widehat{f}(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})e^{-2\pi i\vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \quad (1.13)$$

Y la transformada inversa se define de la siguiente forma:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u, v)e^{2\pi i(u,v) \cdot (x,y)} du dv \quad (1.14)$$

es decir,

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{w}) e^{2\pi i \vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{w} \quad (1.15)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{w}) e^{i \vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{w} \quad (1.16)$$

1.4.3 Propiedades de la Transformada de fourier bidimensional

Algunas de las propiedades de la transformada de fourier. ver[7].

i) Linealidad

Sea $h(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})$ se define la transformada de fourier de $h(\vec{x})$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \alpha \widehat{f}(\vec{w}) + \beta \widehat{g}(\vec{w}) \quad (1.17)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\vec{w}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})) e^{-2\pi i \vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{x} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{w} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \\ &= \alpha \widehat{f}(\vec{w}) + \beta \widehat{g}(\vec{w}) \end{aligned}$$

ii) Traslación

Sea $h(\vec{x}) = f(x - \alpha, y - \beta)$ se define la transformada de fourier de $h(\vec{x})$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (\alpha, \beta)} \widehat{f}(\vec{w}) \quad (1.18)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\vec{w}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha, y - \beta) e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (x, y)} dx dy \\ x - \alpha &= x', y - \beta = y' \\ x &= x' + \alpha, y = y' + \beta, J(x', y') = 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (x' + \alpha, y' + \beta)} dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (x', y')} e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (\alpha, \beta)} dx' dy' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (\alpha, \beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (x', y')} dx' dy' \\
&= e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (\alpha, \beta)} \widehat{f}(\vec{w})
\end{aligned}$$

iv) **Cambio de escala en el dominio t.**

Sea $h(\vec{x}) = f(\alpha x, \beta y)$ se define la transformada de fourier de $h(\vec{x})$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \frac{1}{|\alpha \cdot \beta|} \widehat{f}\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right) \quad (1.19)$$

Demostración:

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x, \beta y) e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (x, y)} dx dy$$

$$\alpha x = x', \beta y = y'$$

$$x = \frac{x'}{\alpha}, y = \frac{y'}{\beta}, J(x', y') = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-2\pi i \vec{w} \cdot (\frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\beta})} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} dx' dy'$$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \frac{1}{|\alpha \cdot \beta|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') e^{-2\pi i (\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}) \cdot (x', y')} \cdot dx' dy'$$

$$\widehat{h}(\vec{w}) = \frac{1}{|\alpha \cdot \beta|} \cdot \widehat{f}\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right)$$

v) **Convolución en el dominio t.**

Sea $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = f(t) * g(t)$ se define la transformada de fourier de $h(t)$

$$\widehat{h}(w) = \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) \quad (1.20)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-iwt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-iwt} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \widehat{g}(w) d\tau \\
&= \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w)
\end{aligned}$$

Teorema 1.4.2 Formula de Parseval

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle \quad (1.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w)dw \quad (1.22)$$

Para el caso en el que $f(t) = g(t)$ tenemos:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|^2 \quad (1.23)$$

A continuación algunos ejemplos de la transformada de fourier aplicada a una imagen bidimensional

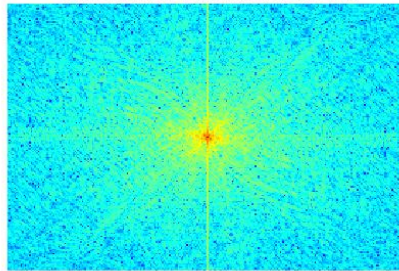
Imagen bidimensional.



Transformada de Fourier de la imagen.



Representacion de la imagen usando log.



Chapter 2

PROBLEMAS INVERSOS

La reconstrucción de imágenes es un campo de estudio dentro de la línea de los problemas inversos que ha tomado gran interés a lo largo del siglo XX . Matemáticamente un problema inverso es representado por medio de una función $K : X \rightarrow Y$ entre dos espacios normados X y Y la cuál define una ecuación de la forma. ver[3].

$$Kx = y \tag{2.1}$$

donde $y \in Y$ es conocido (medido con algun instrumento) y se desea conocer si existe un $x \in X$. Al problema de determinar y a partir de un x dado se le conoce como **problema directo**.

Un ejemplo de problema inverso, es el conocido como **Restauración de imágenes borrosas o ruidosas**, para el cual consideramos una ecuación de la forma.

$$Kf = g \tag{2.2}$$

donde g es la imagen libre de ruido, a f la consideramos como la imagen original. lo que se quiere es dada una g conocida encontrar f . ver [1].

Pero existe un gran inconveniente con los problemas inversos: muchos de ellos tienen ciertas dificultades en la parte teórica que luego, irremediamente se heredarán cuando se estudie el comportamiento numérico. Dichas condiciones fueron planteado en 1902 por el matemático Jacques Hadarmard, quien introdujo el concepto de problema bien puesto (o problema bueno) y que debería cumplir las siguientes tres condiciones. ver[3].:

1. **Existencia.** $\forall y \in Y$ existe (al menos) un $x \in X$ tal que $Kx = y$.

2. **Unicidad.** $\forall y \in Y$ existe (a lo más) un $x \in X$ tal que $Kx = y$.
3. **Estabilidad.** La solución de la ecuación depende continuamente de y , esto es para toda sucesión $x_n \subset X$ con $Kx_n \rightarrow Kx$ cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Los problemas que no cumplan al menos con una de estas propiedades son llamados problemas mal puestos (o problema malo). Las condiciones de existencia y unicidad dependen de las propiedades algebraicas de los espacios y del operador, esto es que el operador sea invertible. Sin embargo la estabilidad depende de las topologías de los espacios ya que es claro que necesitamos que la función inversa sea continua. Muchos de los problemas vienen definidos por operadores que son compactos y en el estudio del análisis funcional se demuestra que la inversa no es continua, por lo tanto estos problemas inversos son mal puestos.

Ejemplo 2.0.1 La diferenciación como un problema inverso, Consideremos el operador integral definido por

$$(Kf)(x) := \int_0^x f(t)dt \text{ para } x \in [0, 1], \quad f \in C([0, 1])$$

El problema inverso consiste en resolver la siguiente ecuación

$$Kf = g.$$

Si suponemos que tenemos un dato con ruido $g^\epsilon \in C([0, 1])$ para $g \in C^1([0, 1])$ tal que

$$\|g^\epsilon - g\|_\infty \leq \epsilon \text{ con } 0 < \epsilon < 1.$$

si definiéramos las funciones

$$g_n^\epsilon(x) := g(x) + \epsilon \sin\left(\frac{nx}{\epsilon}\right), \quad x \in [0, 1] \text{ y } n = 2, 3, 4, \dots$$

En particular, satisfacen

$$\|g_n^\epsilon - g\|_\infty = \epsilon$$

Sin embargo, las derivadas

$$(g_n^\epsilon)'(x) = g'(x) + n \cos\left(\frac{nx}{\epsilon}\right), \quad x \in [0, 1],$$

satisfacen

$$\|(g_n^\epsilon)' - g'\|_\infty = n.$$

Entonces, para un error en el dato arbitrariamente pequeño, el error en el cálculo de la derivada, es muy grande para un n dado. Así, la derivada es un problema inverso mal puesto.

Ejemplo 2.0.2 Un ejemplo clásico de problemas mal puestos es el estudio del problema de cauchy para la ecuación de laplace. ver[3].

Encontrar una solución u de la ecuación de laplace

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty]$$

que satisfice las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R};$$

y f y g dadas así:

$$f(x) = 0 \quad y \quad g(x) = \frac{1}{n} \sin(nx);$$

La única solución esta dada por:

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny) \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0.$$

por tanto tenemos lo siguiente

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

El error en los datos tiende a cero mientras el error en la solución tiende a infinito por tanto la solución no depende continuamente de los datos y así se considera como un problema mal puesto.

Sin embargo, durante la resolución del problema inverso puede ocurrir que una pequeña cantidad de ruido en las mediciones le proporcione un enorme error a lo estimado. Este fenómeno de inestabilidad de la solución es conocido como “mal condicionamiento o problema mal puesto” y resulta de gran inconveniencia dado que, en la práctica, todas las mediciones generadas poseerán algún tipo de error o ruido, muchas veces no cuantificable directamente.

Se han desarrollado técnicas matemáticas para la solución de problemas mal condicionados. Estas técnicas, basadas en la incorporación de propiedades conocidas de la solución x , mejoran el acondicionamiento del problema inverso y conducen a la obtención de mejores soluciones. Para ello usaremos algunas técnicas de regularización; que serán de ayuda para resolver el problema.

A continuación presentaremos el problema en imágenes y de los métodos de regularización que se van a usar en este trabajo, nuestro objetivo consiste en regularizar imágenes ruidosas usando la combinación de dos métodos como son el truncamiento espectral y la regularización de Tikhonov los cuales veremos mas adelante.

Chapter 3

IMÁGENES

Una imagen es una señal portadora de información sobre un objeto el cual no es directamente observable. En una escena real, los dispositivos ópticos de adquisición como las cámaras digitales, telescopios, microscopios, registran la luz que interactúan con los objetos físicos y la proyectan sobre una imagen bidimensional. Ahora bien, dado que los sistemas de adquisición no son perfectos y las condiciones de adquisición tampoco son ideales, el resultado es una imagen degradada básicamente por dos fenómenos la borrosidad y el ruido.

3.1 Definición de Imagen

Una imagen es una función bidimensional f que se puede representar como una colección de impulsos (delta de Dirac) de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s, t) \delta(x - s, y - t) ds dt$$

Dado que el proceso de degradación puede ser modelado como un operador o sistema A que opera sobre una imagen de entrada f y produce una imagen degradada es decir, que sigue el modelo del que ya se había hablado antes:

$$Af = g$$

donde g es considerada por el momento imagen libre de ruido es decir que $\eta(x, y) = 0$, y se puede ver de la siguiente forma:

$$g(x, y) = Af(x, y) = A \left[\int_{\mathbb{R}^2} f(s, t) \delta(x - s, y - t) ds dt \right]$$

Como A es un operador lineal, si aplicamos la propiedad aditiva a las integrales entonces

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} A[f(s, t) \delta(x - s, y - t)] ds dt$$

dado que $f(s, t)$ es independiente de x y y , entonces

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s, t) A[\delta(x - s, y - t)] ds dt$$

Así tenemos que el termino $A[\delta(x - s, y - t)] = k(x, s, y, t)$ es la denominada respuesta al impulso de A o conocida también con el nombre de función de propagación puntual (PSF).

Por tanto la imagen libre de ruido quedaría representada

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s, t) k(x, s, y, t) ds dt$$

La cual lleva el nombre de integral de superposición de primera clase o Fredholm.

Lo que sigue con respecto a imágenes es tomado de Ver[1].

3.1.1 Imagen Degradada (Borrosa)

Teniendo en cuenta que f es una función bidimensional como se planteo con anterioridad, por simplicidad del caso consideraremos de ahora en adelante a $f(x)$ como el objeto original o imagen original, $x = (x_1, x_2)$ y a $g(x)$ la imagen libre de ruido.

Basándonos en la sintetización que se hizo tenemos entonces

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, x') f(x') dx', \quad (3.1)$$

donde $K(x, x')$ con $x, x' \in \mathbb{R}^2$, es llamada función de propagación puntual (PSF) del sistema imagen la cual es una función de banda limitada es decir es decir que la transformada de fourier de K se anula por fuera de un compacto lo que indica que $\hat{K}$ que corresponde a la transformada de fourier de K es de soporte compacto. En efecto, la imagen libre de ruido $g(x)$ es llamada **versión degradada o borrosa** del objeto $f(x)$.

Si $K(x, x') = A[\delta(x - x')]$ donde K es la llamada respuesta impulso de A como ya se había mencionado y f se puede escribir como

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(x - x') f(x') dx', \quad (3.2)$$

En el caso que el operador o sistema A sea invariante a la posición es decir que $K(x - x') = A[\delta(x - x')]$, tenemos que la ecuación (3.1) se convierte en:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - x')f(x')dx', \quad (3.3)$$

La cual corresponde a una convolución integral y queda determinada de la siguiente manera,

$$g = K * f, \quad (3.4)$$

Veamos ahora como se modelan matemáticamente las imágenes con ruido en las cuales esta basado el presente trabajo.

3.1.2 Imagen ruidosa

Llamaremos imagen ruidosa a $g^\epsilon(x)$, la cual es producida por la asociación de un operador de tipo lineal A que junto con un termino ruido opera sobre una imagen de entrada f , donde el ruido es el término $w(x)$ $x \in \mathbb{R}^2$, se supone que el conocimiento del ruido se limita a información de naturaleza estadística como el valor medio, la varianza, etc. Una imagen con ruido $g^\epsilon(x)$ es modelada matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$g^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x, x')f(x')dx' + w(x), \quad (3.5)$$

Como se habia dicho antes en el caso de espacio invariante la ecuación (3.5) se convierte en:

$$g^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - x')f(x')dx' + w(x), \quad (3.6)$$

La cual es modelada mediante una convolución y queda determinada de la siguiente manera,

$$g^\epsilon = K * f + w, \quad (3.7)$$

Veamos ahora los tipos de ruido que se pueden presentar.

3.1.2.1 Tipos de ruido

El ruido lo podemos definir como todo aquello en un conjunto de datos, señal, imagen que en general, degrada o distorsiona la señal de interés, es decir, la contamina. ver[7]

En las imágenes típicas el ruido puede modelarse como una distribución gaussiana (normal), uniforme o sal y pimienta(impulso), en algunos casos el ruido no necesariamente es aditivo por lo cual hay ruido multiplicativo como lo veremos a continuación.

Ruido gaussiano

Es el más común ya que está presente en todas las imágenes generadas con cámaras y produce pequeñas variaciones en la imagen. Es debido, por ejemplo, a las diferentes ganancias en el sensor, ruido en los digitalizadores, perturbaciones en la transmisión, etc.

En el ruido de tipo gaussiano, todos y cada uno de los píxeles que componen la imagen cambian su valor, de acuerdo con una distribución normal o gaussiana. Se podrían aplicar otro tipo de distribuciones, pero la gaussiana o normal se toma como el modelo al que más se aproxima, este ruido puede considerarse como ruido aditivo con una distribución gaussiana, es decir que a cada pixel se le agrega ruido de la siguiente forma:

$$\hat{I}(i, j) = I(i, j) + \eta(i, j)$$

donde $I(i, j)$ el valor de cada pixel y $n(i, j)$ el ruido, La forma de distribución de este ruido como una función de nivel de gris se puede modelar como un histograma h , cuya descripción analítica es la siguiente,

$$h_G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(g-m)^2}{2\sigma^2}}$$

donde g es el nivel de gris del ruido, m el valor medio, σ la desviación estandar y σ^2 la varianza.

El siguiente ejemplo muestra la imagen original y la imagen original contaminada con un ruido de tipo gaussiano con $m = 0$, $\sigma = 0.02$.



Ruido impulsional (sal y pimienta)

En el tipo de ruido conocido como ruido sal y pimienta los píxeles de la imagen son muy diferentes en color o intensidad a los píxeles circundantes. El hecho que define este tipo de ruido es que el pixel ruidoso en cuestión no tiene relación alguna con los píxeles circundantes. Generalmente, este tipo de ruido, afectará a una pequeña cantidad de píxeles de la imagen. Al ver la imagen, encontraremos puntos blancos sobre puntos negros o puntos negros sobre puntos blancos, de ahí el término sal y pimienta. Defectos que contribuyen a este tipo de ruido son las manchas de polvo dentro de las ópticas de la cámara, o bien un CCD defectuoso, que realizará una captura errónea.

El ruido sal y pimienta puede generarse mediante la función dada por la siguiente ecuación

$$f_{sp}(t, y) = \begin{cases} f(t, y) & r < l \\ g_{min} + s(g_{max} - g_{min}) & r \geq l \end{cases}$$

donde $f(t, y)$ es la imagen original, $r, s \in [0, 1]$ son dos variables aleatorias distribuidas uniformemente, l es un parámetro que controla la cantidad de ruido a introducir y g_{min} y g_{max} la severidad del ruido. Estrictamente, el nombre sal y pimienta designa el caso en que cada valor de salida corresponde ya sea al valor máximo (saturación) o al valor mínimo, (máximo: blanco o sal, y mínimo: negro o pimienta).

El siguiente ejemplo muestra la imagen original y la imagen original contaminada con un ruido de tipo sal y pimienta con $\sigma = 0.01$.



Ruido multiplicativo

La imagen obtenida es fruto de la multiplicación de dos señales y Refleja la situación en que la iluminación no es uniforme. Este ruido sigue el siguiente modelo:

$$\hat{I}(i, j) = I(i, j) \eta(i, j)$$

Esta presente principalmente en tomografía foto-acústica y toda técnica donde el carácter ondulatorio de la energía es importante: reflexiones, superposición, interferencia y otras interacciones. El siguiente ejemplo muestra la imagen original y la imagen original contaminada con un ruido de tipo multiplicativo para $\sigma = 0.04$.



3.2 Formalización del problema en imágenes.

Los problemas mal puestos caracterizados como problemas inversos lineales y, en particular el problema de restauración de imágenes. Esto significa que la solución del problema podría no existir, cuando existe como en el caso de problemas discretos, esta completamente privado de sentido físico como una consecuencia del error de propagación y amplificación de los datos en la solución. Esto es esencialmente una consecuencia del hecho de que el sistema no transmite completamente la información acerca del objeto. por lo tanto, incluso en ausencia de ruido podrían encontrarse dificultades para resolver el problema.

3.2.1 Formulación del problema.

Consideramos el sistema imagen como un espacio invariante, tal que el modelo de la formación de la imagen esta dado por (3.3), donde A es un operador lineal de tipo convolución entonces;

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - x') f(x') dx' = K * f(x), \quad (3.8)$$

El conjunto de imágenes libres de ruido son todas las funciones cuadrado integrables dadas por:

$$g = Af;$$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x - x') f(x') dx' = Af(x);$$

donde f es una función cuadrado integrable arbitraria, y g^ϵ su imagen ruidosa con w el ruido, es decir la imagen ruidosa esta representada así:

$$g^\epsilon = Af + w = g + w. \quad (3.9)$$

El problema de restauración de imágenes podría ser visto como un problema de estimación del objeto desconocido f , dada la imagen ruidosa g^ϵ , además se asume que el (PSF) K es conocido y en la ecuación (3.9) f y w no son conocidos.

Podríamos formular como se dijo al inicio el problema de restauración de imágenes tratando de resolver el siguiente sistema;

$$Af^\epsilon = g^\epsilon; \quad (3.10)$$

Si aplicamos transformada de fourier en la ecuaciones (3.10) tenemos la siguiente ecuación;

$$\widehat{K}(w)\widehat{f}^\epsilon(w) = \widehat{g}^\epsilon(w) = \widehat{K}(w)\widehat{f}(w) + \widehat{w}(w) \quad (3.11)$$

Nuestro estudio lo centraremos en la ecuación (3.10), donde suponemos que g^ϵ es una función cuadrado integrable y por tanto el objetivo es buscar una solución f^ϵ cuadrado integrable que proporcione una buena aproximación del objeto desconocido f , lo mismo para el caso discreto. Dicho problema es considerado un ill-posed es decir un problema malo o mal puesto. Como se indico en el capitulo 2 un problema se dice

mal puesto si no satisface algunas de las condiciones introducidas por Hadamard quien introdujo el concepto de problema bueno o bien puesto.

Discutiremos primero la unicidad de la solución, esto implica que la unicidad o no unicidad puede ser establecida investigando las soluciones de la ecuación homogénea es decir, $Af^\epsilon = 0$ de donde diríamos que la solución de la ecuación (3.10) es única si y solo si la única solución de la homogénea es la solución trivial es decir $f^\epsilon = 0$, por tanto si el problema inicial no tiene única solución es por que van a existir soluciones no triviales de la ecuación homogénea correspondiente y constituyen el espacio nulo del operador A denotado así;

$$Nu(A) = \{f : Af^\epsilon = 0\}$$

llamado también espacio de los objetos invisibles es decir, objetos donde la imagen libre de ruido es cero.

Es decir; que si nuestro sistema homogéneo nos proporciona soluciones no triviales entonces existen objetos invisibles, consideremos la ecuación $Af^\epsilon = 0$ en términos de su transformada de fourier $\widehat{K}(w)\widehat{f}^\epsilon(w) = 0$ de aquí podemos ver que la existencia de la solución no trivial de esta ecuación esta relacionada con el soporte de $\widehat{K}(w)$; el cual tiene soporte compacto y suceden 2 casos, el primero seria si $\widehat{K}(w)$ coincide con todo el espacio de frecuencias entonces $\widehat{f}^\epsilon(w) = 0$ aquí no bria problema el sistema tendria unica solucion, y el otro caso seria que el soporte no coincide con todo el espacio de frecuencias, es decir que $\widehat{K}(w)$ es de soporte compacto B , por tanto $\widehat{K}(w) = 0$ si $w \notin B$ se anula por fuera del compacto y así f^ϵ seria un objeto invisible esto se tiene usando la formula de parseval.

De este modo podríamos decir que el caso de sistemas de banda limitada la solución del problema de restauración de imágenes no es única es decir el problema es mal puesto, falla la unicidad de la solución. De aqui decimos entonces que el operador inverso de A no existe cuando K es de banda limitada donde B es la banda y su inversa no es acotada como lo veremos más adelante.

3.3 Existencia de la solución

En esta sección investigaremos la existencia de la solución al problema de restauración de imágenes borrosas y ruidosas. Consideraremos la ecuación (3.10).

Si consideramos el $\text{supp } \widehat{K}(w) = \overline{\left\{w \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{K}(w) \neq 0\right\}}$ como el soporte de $\widehat{K}(w)$, de la ecuación (3.11) tenemos:

$$\widehat{f}^\epsilon(w) = \frac{\widehat{g}^\epsilon(w)}{\widehat{K}(w)}. \quad (3.12)$$

De aquí la solución de la ecuación (3.11) existe y es cuadrado integrable, si y sólo si $g^\epsilon(x)$ satisface la siguiente condición

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\widehat{g}^\epsilon(w)}{\widehat{K}(w)} \right|^2 dw < \infty \quad (3.13)$$

en este caso la solución, denotada por f^ϵ la cual es la solución generalizada esta dada por

$$f^\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{g}^\epsilon(w)}{\widehat{K}(w)} e^{ixw} dw \quad (3.14)$$

Como la condición (3.13) no se satisface para funciones cuadrado integrables arbitrarias $\widehat{g}^\epsilon(w)$ y como en general, las imágenes ruidosas no satisfacen esta condición, la solución de la ecuación (3.10) puede no existir. De este modo podemos concluir que la solución f^ϵ existe si y sólo si g^ϵ es una imagen libre de ruido y satisface (3.10).

Como g^ϵ es una imagen con ruido definida en (3.9) y su transformada de fourier definida en (3.11) tenemos lo siguiente;

$$\widehat{f}^\epsilon(w) = \widehat{f}(w) + \frac{\widehat{w}(w)}{\widehat{K}(w)}. \quad (3.15)$$

De aquí podemos ver que el termino que depende de la contribución de ruido es el responsable de la no existencia de la solución dado que los valores de $\widehat{K}(w)$ son valores que tienden a cero cuando $|w| \rightarrow \infty$ suponiendo aun que $\widehat{k}(w) \neq 0$ dado que la proporción $\frac{\widehat{w}(w)}{\widehat{K}(w)}$ no tiende a cero, esta situación nos lleva a que la inversa de la transformada de fourier de esta proporción no exista y por tanto la no existencia de la solución.

Ya vimos que si $\widehat{K}(w) \neq 0$ el problema (3.10) no tiene solución, veamos entonces que sucede cuando $\widehat{K}(w) = 0$ el cual esta asociado con que la función (PSF) es de banda limitada dado que el sistema imagen es de banda limitada con banda B , de donde ya habíamos mostrado que si esto sucedía entonces el problema (3.10) no tenia única solución por la aparición del espacio de los objetos invisibles, a continuación revisaremos la existencia de la solución en este caso y plantearemos una forma de remediar el problema

en dicho caso.

Si consideramos de nuevo la ecuación (3.10) y su correspondiente transformada de fourier (3.11) vemos que si $w \notin B$ entonces $\widehat{K}(w) = 0$ y por tanto de un lado de la ecuación (3.11) tenemos $\widehat{g}^\epsilon(w) = 0$ y del otro lado tenemos que $\widehat{g}^\epsilon(w) = \widehat{w}(w)$ de este modo tendríamos entonces que $\widehat{w}(w) = 0$ lo cual no puede ser por tanto la solución de (3.10) no existe. Podríamos pensar entonces que si la solución del problema no existe debido a la existencia del ruido por fuera de B definido

$$\widehat{w}_{B^c}(w) = \begin{cases} 0 & w \in B \\ \widehat{w}(w) & w \notin B \end{cases}$$

dicho ruido es siempre ortogonal al espacio de las imágenes libres de ruido es decir imágenes que están en el rango de A esto se tiene dado que $\widehat{w}_{B^c}(w)\widehat{g}(w) = 0$ y así el producto interno definido $(w_{B^c}, g) = 0$ esto se tiene usando de nuevo parseval.

Podríamos definir entonces el operador proyección llamado también operador de banda limitada denotado así:

$$(P_{(B)}g^\epsilon)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \chi_B(w)\widehat{g}^\epsilon(w)e^{ixw}dw$$

De aquí sería conveniente entonces cambiar (3.10) por:

$$Af^\epsilon = P_{(B)}g^\epsilon \tag{3.16}$$

Podríamos decir ahora que la solución de la ecuación (3.16) existe si y solo si se satisface:

$$\int_B \left| \frac{\widehat{g}^\epsilon(w)}{\widehat{K}(w)} \right|^2 dw < \infty$$

lo cual es similar a lo hecho anteriormente solo que ahora esta restringido a la banda del sistema de imágenes. Y de igual forma que en caso anterior no se satisface para imágenes ruidosas.

A continuación se introduce un teorema de gran importancia que contribuye a la solución del sistema requerido en la ecuación (3.1) y lo inestable que es el problema cuando hay ruido, de aquí se introducen técnicas de regularización que contribuyen a la solución de dicho problema.

3.4 Optimización del problema

Como ya hemos visto el problema de restauración de imágenes borrosas y ruidosas es un problema inverso mal puesto, dado que el modelo matemático que sigue este

problema es identificado con la ecuación (3.10) donde A es un operador compacto y por tanto en espacios de dimensión infinita tendríamos que A no es invertible es decir que A^{-1} no es continuo. En las secciones anteriores mostramos los problemas que se presentan a la hora de resolver dicho problema para el caso continuo, pero en la practica trabajaremos con el caso discreto en imágenes digitales cuyo problema es modelado por la ecuación (3.10) versión discreta con A una matriz, donde el problema discreto hereda la propiedad de discontinuidad del operador inverso en su discretización lo que hace que el problema numérico sea altamente inestable es decir que la solución es altamente sensible a pequeñas perturbaciones de la función g los cuales siempre están presentes como los errores de almacenaje digital.

Ejemplo 3.4.1 Si quisiéramos resolver el problema (3.10) discreto de una manera sencilla considerando A invertible sera:

$$\begin{aligned} Af^\epsilon &= g^\epsilon \\ f^\epsilon &= A^{-1}(g + \epsilon) \\ f^\epsilon &= A^{-1}g + A^{-1}\epsilon \\ f^\epsilon &= f + A^{-1}\epsilon \end{aligned}$$

Lo cual indica que la imagen restaurada es la suma de la imagen original mas un error causado por $A^{-1}\epsilon$, si la imagen restaurada es visiblemente inaceptable sera por que el termino de error contamina dicha imagen. De aquí podemos decir también que si A es un operador compacto entonces A^{-1} no es continua y por tanto la imagen no se puede recuperar.

Ejemplo 3.4.2 Otra forma de resolver el problema (3.10) caso discreto es usando la descomposición en valores singulares (sección 1.3) el cual nos permite solucionar de manera indirecta dicho problema y aun mas ver el mal condicionamiento de A , considerando A invertible.

Supongamos que los valores singulares de A son estrictamente positivos, entonces

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (U\Sigma V^T)^{-1} \\ A^{-1} &= (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ A^{-1} &= V\Sigma^{-1}U^T \end{aligned}$$

Puesto que Σ es diagonal, su inversa Σ^{-1} también es diagonal, con entradas $\frac{1}{\sigma_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Otra representación de A y A^{-1} es

$$\begin{aligned}
 A &= U\Sigma V^T \\
 A &= \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
 A &= u_1\sigma_1v_1^T + \dots + u_n\sigma_nv_n^T \\
 A &= \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T
 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T.$$

Usando lo anterior, podemos solucionar el sistema $Af^\epsilon = g^\epsilon$, donde $g^\epsilon = g + \epsilon$, de la siguiente manera;

$$\begin{aligned}
 f^\epsilon &= A^{-1}g^\epsilon \\
 f^\epsilon &= V\Sigma^{-1}U^T g^\epsilon \\
 f^\epsilon &= V\Sigma^{-1}U^T(g + \epsilon) \\
 f^\epsilon &= V\Sigma^{-1}U^T g + V\Sigma^{-1}U^T \epsilon \\
 f^\epsilon &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T g + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T \epsilon \\
 f^\epsilon &= \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T g}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T \epsilon}{\sigma_i} v_i
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

De la ecuación (3.17) podemos ver que la imagen restaurada es la suma de la imagen original mas una contribución de error a la solución el cual es generado por el ruido ϵ . Podemos ver a continuacion cómo el término de error contamina la solución en problemas de restauración de imágenes borrosas y ruidosas:

- Las componentes $|u_i^T \epsilon|$ son pequeñas y aproximadamente del mismo orden para $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los valores singulares σ_i decaen hasta ser valores muy cercanos a cero. Esto implica que el número de condición $\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ sea muy grande, confirmando que la solución es muy sensible a perturbaciones y errores de redondeo.

- Los vectores singulares v_i correspondientes a los valores singulares pequeños típicamente representan altas frecuencias de información. Es decir, cuando se incrementa i , los vectores v_i tienden a tener más cambios de signos.

Por lo tanto podemos decir que mientras i aumenta, los valores $\frac{u_i^T \epsilon}{\sigma_i}$ se incrementan, magnificando la contribución de altas frecuencias de información a la solución, podemos decir entonces que el uso de métodos clásicos en la solución de sistemas (3.10) caso discreto produce resultados insatisfactorios.

El *teorema de Picard* nos permite expresar la solución de la ecuación (3.10) en términos de los valores y vectores singulares de un operador compacto A , donde veremos que lo mal condicionado del problema esta determinado por la velocidad de decaimiento de los valores singulares y por tanto seria conveniente controlar la solución proporcionada por Picard.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Picard) Ver [3].

Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto con sistema singular (μ_n, u_n, v_n) . La ecuación

$$Af = g$$

es soluble si y sólo si

$$g \in N(A^*)^\perp \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(g, v_n)|^2 < \infty \quad (3.18)$$

En este caso, la solución esta dada por $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (g, v_n) u_n$.

El *teorema de Picard* muestra el carácter inestable de la ecuación $Af = g$. Si realizamos una perturbación a g dada por $g^\varepsilon = g + \varepsilon v_m$, al aplicar el teorema (3.4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} f^\varepsilon &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (g^\varepsilon, v_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (g, v_n) u_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (\varepsilon v_m, v_n) u_n \\ &= f + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (\varepsilon v_m, v_n) u_n \\ &= f + \frac{\varepsilon}{\mu_m} u_m. \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que

$$\frac{\|f - f^\varepsilon\|}{\|g - g^\varepsilon\|} = \frac{\left\| f - \left(f + \frac{\varepsilon}{\mu_m} u_m \right) \right\|}{\|g - (g + \varepsilon v_m)\|} = \frac{\left\| \frac{\varepsilon}{\mu_m} u_m \right\|}{\|\varepsilon v_m\|} = \frac{1}{\mu_m} \frac{\|u_m\|}{\|v_m\|} = \frac{1}{\mu_m},$$

y por lo tanto,

$$\|f - f^\varepsilon\| = \frac{1}{\mu_m} \|g - g^\varepsilon\|$$

Esta ecuación nos muestra que la influencia del ruido de g en la solución es determinada por la velocidad de decaimiento de los valores singulares. En particular, podemos decir que el problema es levemente mal propuesto si los valores singulares decaen lentamente hacia 0 ó que es severamente mal propuesto si los valores singulares decaen rápidamente hacia 0, así vemos que a pesar que el teorema de picard nos arroja una solución del sistema (3.10) la solución que nos da no es una buena aproximación de la imagen original debido a los errores es decir el problema es inestable por tanto tenemos que recurrir a otras técnicas que nos ayuden a tratar la inestabilidad del problema.

A continuación definiremos en que consiste las técnicas de regularización que se tendrán en cuenta para este trabajo; La regularización es una técnica matemática que proporciona estabilidad numérica a un problema mal condicionado mediante la adición de un funcional penalizador en su formulación. Se presenta aquí un panorama general sobre las metodologías de regularización que se van a trabajar , con especial énfasis en los métodos directos, tales como la regularización de Tikhonov, la descomposición en valores singulares trunca los cuales difieren entre sí según la forma matemática que dicho funcional tiene.

Chapter 4

REGULARIZACIÓN

Como vimos anteriormente el problema de restauración de imágenes es un problema inverso mal puesto, en el cual una imagen puede ser modelada matemáticamente con ecuaciones de la forma

$$Af = g; \tag{4.1}$$

A es un operador lineal compacto entre espacios de Hilbert X y Y en el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En este capítulo nos dedicamos a un estudio de los métodos de regularización para la solución del problema (4.1), dichos métodos me pueden arrojar soluciones adecuadas aun en presencia de errores. En particular deseamos mostrar cual es el método que mejor reconstruye la imagen, para ello introducimos a continuación el concepto general de regularización, luego estudiaremos los métodos propuestos validandolos con ejemplos de interés.

Los métodos matemáticos que permiten solucionar problemas mal condicionados teniendo en cuenta la inestabilidad que conllevan, reciben el nombre de métodos de regularización. Los cuales son muy útiles y su objetivo es proporcionar la mejor aproximación a la solución de la ecuación $Af = g$, sabiendo que g puede ser una perturbación g^ϵ de g con un nivel de error conocido ϵ .

$$\|g - g^\epsilon\| \leq \epsilon$$

El propósito es construir una aproximación razonable f^ϵ de la solución f de la ecuación sin perturbar $Af = g$, nos interesa que esta aproximación sea estable, es decir que f^ϵ dependa continuamente de g^ϵ , así el objetivo principal de la regularización es encontrar un operador lineal acotado $R : Y \rightarrow X$ que aproxime al operador inverso no acotado A^{-1} .

Veamos ahora la teoría general de regularización. ver [3].

Definición 4.0.1 Sean X y Y espacios de Hilbert y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado e inyectivo, un esquema de regularización es una familia de operadores lineales y acotados

$$R_\alpha : Y \rightarrow X; \quad \alpha > 0$$

tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A f = f; \quad \forall f \in X \quad (4.2)$$

Un esquema de regularización aproxima la solución de $Af = g$ por la solución generalizada $f_\alpha^\epsilon = R_\alpha g^\epsilon$. es importante ver que la ecuación (4.2) es equivalente a decir $R_\alpha g \rightarrow A^{-1}g$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ para cualquier g en el rango del operador A .

Teorema 4.0.2 Sea R_α una esquema de regularización para un operador compacto $A : X \rightarrow Y$, donde $\dim X = \infty$. Entonces:

1. El operador R_α no es uniformemente acotado, es decir existe (α_j) con $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$, para $j \rightarrow \infty$.
2. La sucesión $(R_\alpha A x)$ no converge uniformemente sobre conjuntos acotados de X ; es decir, no existe convergencia de $R_\alpha A$ a la identidad I en la norma de operadores.

Demostración.

1. Supongamos lo contrario; es decir, existe $C > 0$ tal que $\|R_\alpha\| \leq C$ para todo $\alpha > 0$. Como $R_\alpha y \rightarrow A^{-1}y$ cuando $\alpha \rightarrow 0$, para todo $y \in R(A)$ y $\|R_\alpha y\| \leq C \|y\|$ para todo $\alpha > 0$, concluimos que $\|A^{-1}y\| \leq C \|y\|$ para todo $y \in R(A)$, así el operador A^{-1} es acotado. Lo que implica que el operador identidad $I = A^{-1}A : X \rightarrow X$ es compacto lo cual es una contradicción dado que $\dim X = \infty$.
2. Supongamos que $R_\alpha A$ converge al operador identidad en la norma de los operadores; como $R_\alpha A$ es compacto, entonces I sería compacto, lo que nos lleva a una contradicción dado que $\dim X = \infty$.

Teniendo en cuenta el teorema de Picard, nos permite observar el mal condicionamiento del problema $Af = g$, con A operador compacto, depende de la rapidez de convergencia de los valores singulares a 0. Esto sugiere intentar regularizar la ecuación por amortiguamiento o filtramiento de los factores $1/\mu_n$ grandes en la solución de Picard (Teorema 3.4.3), manteniendo la solución f lejos de la influencia de éstos.

Teorema 4.0.3 Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador compacto con sistema singular (μ_n, u_n, v_n) y sea $q : (0, \infty) \times (0, \|A\|] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:

1. $|q(\alpha, \mu)| \leq 1$ para todo $\alpha > 0$ y $0 < \mu \leq \|A\|$.
2. Para todo $\alpha > 0$, existe $c(\alpha)$ tal que

$$|q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha)\mu \text{ para todo } 0 < \mu \leq \|A\|.$$

3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1$ para todo $0 < \mu \leq \|A\|$.

Entonces, el operador $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, definido por

$$R_\alpha g := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (g, v_j) u_j, \quad g \in Y,$$

es una estrategia de regularización con $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$.

Demostración. La prueba se encuentra en [3].

Teorema 4.0.4 Supongamos que se tienen las propiedades (1) y (2) del teorema anterior

1. Sea la propiedad (3) reemplazada por una suposición mas fuerte entonces existe $c_1 > 0$ con $|q(\alpha, \mu) - 1| \leq c_1 \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu}$ para todo $\alpha > 0$ y $0 < \mu \leq \|A\|$.
2. Sea la propiedad (3) reemplazada por una suposición mas fuerte entonces existe $c_2 > 0$ con $|q(\alpha, \mu) - 1| \leq c_2 \frac{\alpha}{\mu^2}$ para todo $\alpha > 0$ y $0 < \mu \leq \|A\|$.

Ejemplo 4.0.5 A continuación presentamos algunas funciones que cumplen las condiciones de los teoremas anteriores.

1. $q(\alpha, \mu) = \mu^2 / (\alpha + \mu^2)$. esta elección satisface (2) del teorema 4.06 con $c(\alpha) = 1/(2\sqrt{\alpha})$ y (1), (2) del teorema 4.07 con $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 1$.
2. $q(\alpha, \mu) = 1 - (1 - a\mu^2)^{\frac{1}{2}}$, para algún $0 < a < 1/\|K\|^2$. En este caso satisface (2) del teorema 4.06 con $c(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{\alpha}}$ y (1), (2) del teorema 4.07 con $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ y $c_2 = \frac{1}{a}$.

3. Sea q definida por

$$q(\alpha, \mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu^2 \geq \alpha \\ 0 & \text{si } \mu^2 < \alpha \end{cases}$$

En este caso satisface (2) del teorema 4.06 con $c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ y (1),(2) del teorema 4.07 con $c_1 = c_2 = 1$. Esta última escogencia de q es llamada el espectral truncado.

Todas las funciones q definidas anteriormente son filtros de regularización que conducen a esquemas de regularización optimos.

El método de Tikhonov es un método de regularización, en dimension finita el problema de resolver la ecuación $Af = g$ se obtiene minimizando el funcional $\|Ax - y\|$. Si el espacio es de dimensión infinita y A es compacto el problema de minimizar el funcional es un problema mal puesto o mal condicionado.

Lema 4.0.6 Sean X y Y espacios de Hilbert $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Entonces existe $\hat{f} \in X$ con $\|A\hat{f} - g\| \leq \|Af - g\| \forall f \in X$ si y solo si $\hat{f} \in X$ resuelve la ecuación normal $A^*A\hat{f} = A^*g$, donde $A^* : Y \rightarrow X$ es el adjunto de A .

Sea $A : X \rightarrow Y$ y $g \in Y$, quedaría por determinar $f^\alpha \in X$ que minimiza el funcional cuadrático

$$J_\alpha(f) = \|Af - g\|^2 + \alpha \|f\|^2$$

Este funcional es conocido como funcional de Tikhonov, para resolver este problema tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.0.7 Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador compacto entre espacios de Hilbert y $\alpha > 0$. Entonces, el funcional de Tikhonov J_α tiene un único minimizador $f^\alpha \in X$, que es la solución única de la ecuación normal

$$A^*Af^\alpha + \alpha f^\alpha = A^*g$$

Demostración. La prueba se encuentra en [3].

Para el operador compacto A con sistema singular (μ_j, u_n, v_n) podemos escribir la solución de la ecuación como:

$$f^\alpha = R_\alpha g$$

donde;

$$Af = g$$

$$A^*Af = A^*g$$

para f^α solución de la ecuación normal tenemos:

$$(A^*A + \alpha I)f^\alpha = A^*g$$

entonces

$$R_\alpha := (A^*A + \alpha I)^{-1}A^* : Y \rightarrow X$$

Así la solución tiene la siguiente representación:

$$R_\alpha g = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (g, v_n) u_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (g, v_n) u_n \quad (4.3)$$

donde $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ es la función de la que se hablo en el ejemplo 4.0.8 (1). estudiada antes.

Teorema 4.0.8 Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto. Entonces para cada $\alpha > 0$ el operador $I_\alpha + A^*A$ tiene una inversa acotada para cada α .

$$R_\alpha = (I_\alpha + A^*A)^{-1} A^*$$

describe un esquema de regularización con $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. Este es llamado el método de regularización de Tikhonov. Donde $R_\alpha g_\alpha^\epsilon$ es determinada como la única solución $f_\alpha^\epsilon \in X$ de la ecuación;

$$A^*Af_\alpha^\epsilon + \alpha f_\alpha^\epsilon = A^*g_\alpha^\epsilon$$

4.1 Métodos de regularización

4.1.1 Método valores singulares, truncamiento espectral aplicado a imágenes.

si el problema es que los valores singulares se incrementan magnificando la contribución de ruido a la solución, podríamos pensar entonces en truncar la suma, es decir considerarla hasta cierto k ; lo cual se puede definir de la siguiente manera:

$$q(k, \sigma_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1, \dots, k \\ 0 & \text{si } i=k+1, \dots, N \end{cases}$$

El parámetro k es llamado parámetro de truncamiento y éste determina el número de términos que se mantienen en la solución regularizada. Esta idea es formalizada en el siguiente teorema por medio de un esquema de regularización, llamado **truncamiento espectral**.

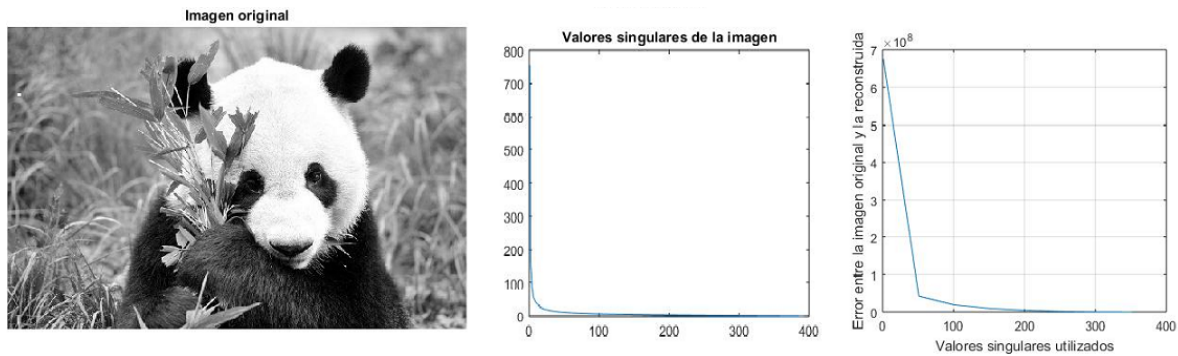
Teorema 4.1.1 Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal, inyectivo y compacto, con sistema singular (μ_n, u_n, v_n) , $n \in N$. Entonces, el truncamiento espectral

$$R_\alpha g := \sum_{\mu_n \geq \mu_\alpha} \frac{1}{\mu_n} (g, v_n) u_n \quad (4.4)$$

describe un esquema de regularización con $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Ejemplo 4.1.2 Vamos a considerar una aplicación del método de truncamiento espectral para una imagen fotográfica, que se ha digitalizado, donde cada valor mide los niveles de gris de cada celda. Está información se almacena en una matriz A de orden $m \times n$ y las entradas de la matriz son valores no negativos.

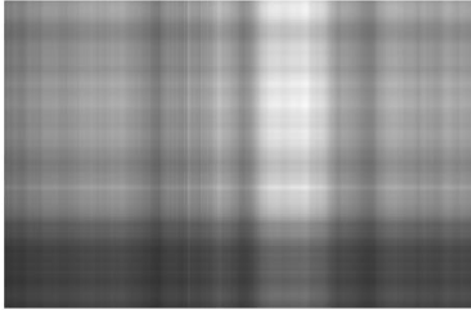
consideremos una matriz de orden 393×600 que representa la siguiente imagen la cual llamaremos imagen original en escala de grises, los gráficos siguientes muestran, uno la cantidad de valores singulares que tiene la imagen que son 393 y el otro el comportamiento del error a medida que se le agregan más valores singulares.



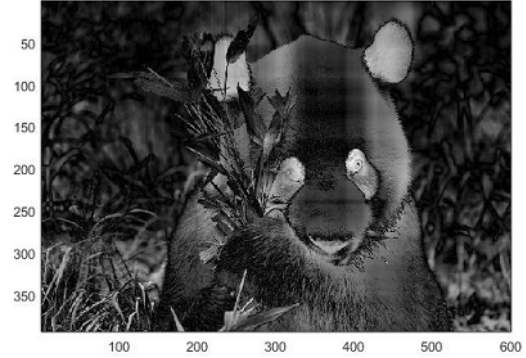
Como se habia discutido antes, la matriz 393×600 que representa la imagen anterior, se puede aproximar por matrices de rango k , es decir que la imagen la podemos aproximar por matrices de menor rango. Aquí presentamos la aproximación de la imagen y

su correspondiente error con respecto a la imagen original para distintos valores de k .

Reconstrucción de la Imagen con 1 valores singulares



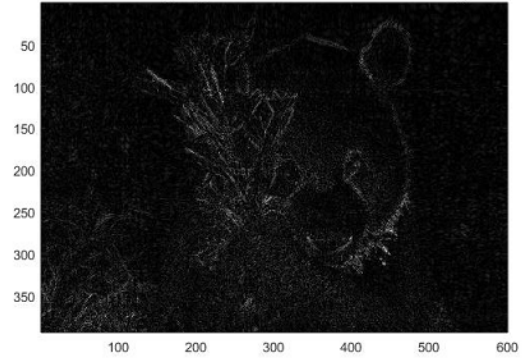
Error entre la Imagen y la reconstruida con 1 valores singulares



Reconstrucción de la Imagen con 51 valores singulares



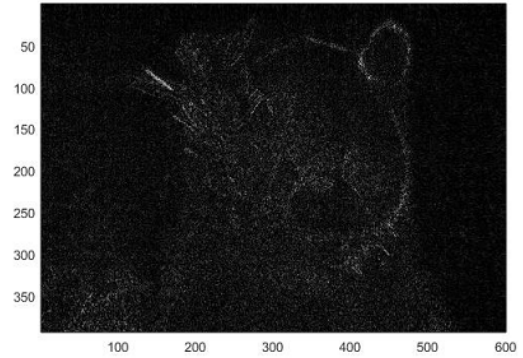
Error entre la Imagen y la reconstruida con 51 valores singulares



Reconstrucción de la Imagen con 151 valores singulares



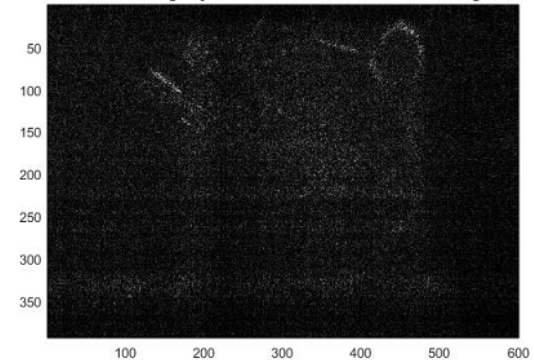
Error entre la Imagen y la reconstruida con 151 valores singulares

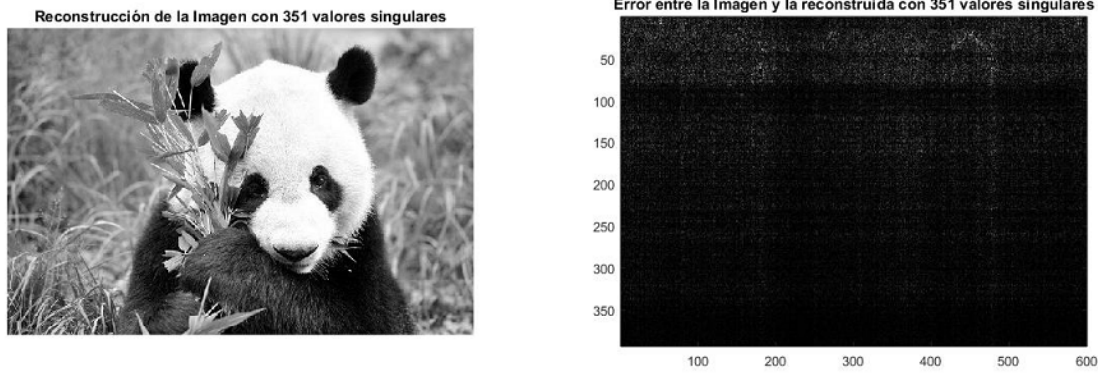


Reconstrucción de la Imagen con 251 valores singulares



Error entre la Imagen y la reconstruida con 251 valores singulares





El porcentaje de almacenamiento usado por cada una de las aproximaciones es 0.4%, 21%, 63%, 100%, 100%.

4.1.2 Método de Tikhonov aplicado a imágenes.

Teniendo en cuenta la ecuación matemática que modela la imagen libre de ruido y el problema mal puesto que genera encontrar la imagen original, aparecen diversos métodos de regularización los cuales son muy útiles dado que pueden arrojar buenas soluciones aun en presencia de errores en los datos.

El problema se centra en minimizar el funcional $\|Af - g\|^2$, problema que puede ser resuelto por medio del método multiplicadores de lagrange. De acuerdo con este método se introduce un funcional el cual es la combinación lineal del funcional a minimizar y el funcional que expresa la restricción, donde α es llamado multiplicador de lagrange.

$$\Phi_{\mu}(f; g) = \|Af - g\|^2 + \alpha \|f\|^2, \quad (4.5)$$

Este funcional es conocido como funcional de Tikhonov, La existencia y unicidad de la solución de este problema se sigue de lo siguiente, para cualquier $\alpha > 0$ existe una única función f_{α} la cual minimiza (4.5) y la existencia de un único $\alpha > 0$ tal que f_{α} sea de mínima norma.

Teniendo en cuenta lo dicho en secciones anteriores en el problema de restauración de imágenes asumimos que el sistema imagen es de banda limitada y por tanto el (PSF) es de también de banda limitada, donde B es la banda y B^c es el conjunto fuera de banda de frecuencias. Como un caso particular podemos ver que en un sistema en el cual no es de banda limitada B coincide con todo el espacio de frecuencias mientras que B^c es vacío.

Usando la ecuación de parseval (1.23) en imágenes (2- dimensionales) tenemos lo siguiente:

$$\Phi_\alpha(f; g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\| \widehat{K} \widehat{f} - \widehat{g} \right\|^2 + \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left\| \widehat{f} \right\|^2 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(f; g) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left| \widehat{K}(w) \widehat{f}(w) - \widehat{g}(w) \right|^2 dw \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{B^c} |\widehat{g}(w)|^2 dw + \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_B \left| \widehat{f}(w) \right|^2 dw + \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_{B^c} \left| \widehat{f}(w) \right|^2 dw \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\widehat{K}(w) = 0$ para $w \in B^c$. Observamos que el integrando

$$\left| \widehat{K}(w) \widehat{f}(w) - \widehat{g}(w) \right|^2 + \alpha \left| \widehat{f}(w) \right|^2$$

lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} &\left| \widehat{K}(w) \widehat{f}(w) - \widehat{g}(w) \right|^2 + \alpha \left| \widehat{f}(w) \right|^2 \\ &= \left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right) \left| \widehat{f}(w) \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \widehat{K}(w) \widehat{f}(w) \widehat{g}^*(w) \right\} + |\widehat{g}(w)|^2 \\ &= \left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right) \left(\left| \widehat{f}(w) \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \frac{\left\{ \widehat{K}(w) \widehat{f}(w) \widehat{g}^*(w) \right\}}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} + \left| \frac{\widehat{K}^*(w) \widehat{g}(w)}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} \right|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} |\widehat{g}(w)|^2 \\ &= \left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right) \left| \widehat{f}(w) - \frac{\widehat{K}^*(w) \widehat{g}(w)}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} \right|^2 + \frac{\alpha}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} |\widehat{g}(w)|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Reemplazando (4.8) en (4.7) tenemos;

$$\Phi_\alpha(f; g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right) \left| \widehat{f}(w) - \frac{\widehat{K}^*(w) \widehat{g}(w)}{\left(\left| \widehat{K}(w) \right|^2 + \alpha \right)} \right|^2 dw \quad (4.9)$$

$$+ \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_{B^c} |\hat{f}(w)|^2 dw + \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_B \frac{|\hat{g}(w)|^2}{\left(|\hat{K}(w)|^2 + \alpha\right)} dw + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{B^c} |\hat{g}(w)|^2 dw$$

Claramente, de la ecuación (4.9) tenemos que el mínimo ocurre cuando,

$$\hat{f}_\alpha(w) = \frac{\hat{K}^*(w)}{|\hat{K}(w)|^2 + \alpha} \hat{g}(w); \quad w \in B \quad (4.10)$$

Usando la Transformada inversa de fourier tenemos que

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\hat{K}^*(w)}{|\hat{K}(w)|^2 + \alpha} \hat{g}(w) e^{ixw} dw \quad (4.11)$$

$f_\alpha(x)$ es de banda limitada ya que el sistema imagen es de banda limitada. Si reemplazamos $f_\alpha(x)$ en el funcional $\Phi_\alpha(f; g)$, obtenemos que la ecuación (4.9) puede representarse de la siguiente manera;

$$\Phi_\alpha(f_\alpha; g) = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_B \frac{|\hat{g}(w)|^2}{\left(|\hat{K}(w)|^2 + \alpha\right)} dw \quad (4.12)$$

A continuación caracterizaremos la función $f_\alpha(x)$ que sera de gran ayuda para garantizar la solución de nuestro problema.

- $f_\alpha(x)$ es cuadrado integrable para cualquier g y $\alpha > 0$.
- $f_\alpha(x)$ depende continuamente de g .
- $f_\alpha(x)$ es ortogonal al subespacio de todos los objetos invisibles.

las dos primeras propiedades de $f_\alpha(x)$ se pueden deducir de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|^2 &= \int |f_\alpha(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \frac{|\hat{K}(w)|^2}{\left(|\hat{K}(w)|^2 + \alpha\right)^2} |\hat{g}(w)|^2 dw \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B |\hat{g}(w)|^2 dw \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde g es una función cuadrado integrable ; de aquí podemos concluir que el método de multiplicadores de lagrange nos garantiza que para cualquier $\alpha > 0$ existe una única función $f_\alpha(x)$ cuadrado integrable la cual minimiza el funcional (4.5), y la existencia de un único valor $\alpha > 0$ tal que $f_\alpha(x)$ sea el de mínima norma.

Veamos ahora la solución del problema desde La regularización de Tikhonov; la cual es una técnica de regularización clásica muy referenciada en el estado del arte, en el cual el problema de minimizar el funcional $\|Af - g\|^2$ puede ser resuelto por medio del método multiplicadores de Lagrange el cual es usado en problemas de minimización restringida.

Tikhonov, basado en la definición general de regularización busca minimizar el funcional (4.5) el cual lleva su nombre y usando el teorema (4.0.10) garantiza que dicho funcional tiene un único minimizador f_α que es la única solución de la ecuación normal:

$$(A^*A + \alpha I)f_\alpha = A^*g, \quad (4.14)$$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (4.14) tenemos;

$$(|\widehat{K}^*(w)|^2 + \alpha)\widehat{f}_\alpha(w) = \widehat{K}^*(w)\widehat{g}(w), \quad (4.15)$$

$$\widehat{f}_\alpha(w) = \frac{\widehat{K}^*(w)}{(|\widehat{K}^*(w)|^2 + \alpha)}\widehat{g}(w), \quad (4.16)$$

podemos ver que La función (4.16) coincide con la función (4.10) y que se usaron diferentes formas para llegar a ellas.

De la ecuación (4.14) se obtiene que f_α lo podemos escribir de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} f_\alpha &= R_\alpha g \\ R_\alpha &= (A^*A + \alpha I)^{-1}A^* \\ R_\alpha g &= K_\alpha^\dagger * g = A^\dagger g. \end{aligned}$$

El parámetro α es llamado parámetro de regularización y la función $f_\alpha = R_\alpha g$ es llamada solución generalizada.

De la ecuación (4.16) tenemos que:

$$\widehat{K}^\dagger(w) = \frac{\widehat{K}^*(w)}{(\left|\widehat{K}^*(w)\right|^2 + \alpha)}, \quad (4.17)$$

y su Transformada inversa de Fourier está dada por:

$$K_\alpha^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\widehat{K}^*(w)}{\left|\widehat{K}(w)\right|^2 + \alpha} e^{ixw} dw, \quad (4.18)$$

para $\alpha > 0$, $K_\alpha^\dagger(x)$ esta bien definido y asi R_α es acotado dado que de la ecuación (4.13) obtenemos que;

$$\|f_\alpha\| = \|R_\alpha g\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|g\| \quad (4.19)$$

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.20)$$

Podemos concluir entonces que la familia de operadores lineales R_α describen un esquema de regularización (Teorema 4.0.6), conocida como regularización de Tikhonov. La familia R_α cumple las siguientes propiedades:

- $\alpha > 0$, R_α es un operador lineal y continuo.
- Para alguna imagen libre de ruido $g = Af$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha g = P^{(B)} f = A^\dagger g \quad (4.21)$$

De la propiedad (2) se obtiene como R_α es una aproximación de $A^\dagger$, cuando R_α es aplicado a una imagen libre de ruido g entonces obtenemos una aproximación de la solución generalizada $f^\dagger = A^\dagger g$ y el error de aproximación tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow 0$.

Según Tikhonov, cualquier familia $\{R_\alpha\}$ de operadores lineales, que dependen de un parámetro $\alpha > 0$ es llamado algoritmo de regularización lineal para la solución de problemas mal puestos $Af = g$ si satisfacen las dos condiciones anteriores. α es llamado parámetro de regularización y el funcional $f_\alpha = R_\alpha g$ es llamado solución regularizada. Podríamos decir entonces que el problema de restauración de imágenes para imágenes libres de ruido la solución regularizada proporciona la mejor aproximación de la verdadera solución.

Es importante revisar ahora el caso en que la imagen sea ruidosa es decir; como se había mencionado antes es de la forma,

$$g^\epsilon = Af + w = g + w \quad (4.22)$$

$$R_\alpha g^\epsilon = R_\alpha Af + R_\alpha w \quad (4.23)$$

De lo hecho anteriormente para imágenes conocemos que podemos restaurar a lo sumo la imagen $P^{(B)}$ cuando el ruido es cero y $\alpha \rightarrow 0$, cuando la imagen es ruidosa y α no es cero, el error que cometemos en la restauración de $P^{(B)}$ es el siguiente:

$$R_\alpha g^\epsilon - P^{(B)}f = R_\alpha Af - P^{(B)}f + R_\alpha w$$

donde $R_\alpha Af - P^{(B)}f$ es conocido como error de aproximación y proviene de la aproximación de $A^\dagger$ por medio de R_α este error solo depende de α y no depende del ruido, el término $R_\alpha w$ es el error debido al ruido y suele llamarse error de propagación del ruido, ya que cuantifica la propagación del ruido de la imagen g^ϵ a la solución regularizada f_α^ϵ y depende de α y w .

$$\|R_\alpha g^\epsilon - P^{(B)}f\| \leq \|R_\alpha Af - P^{(B)}f\| + \|R_\alpha w\| \quad (4.24)$$

Usando parseval tenemos;

$$\begin{aligned} \|R_\alpha Af - P^{(B)}f\|^2 &= \int_B |R_\alpha Af(x) - P^{(B)}f(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left| \frac{\widehat{k}^*(w)}{|\widehat{k}(w)|^2 + \alpha} \widehat{k}(w) \widehat{f}(w) - \widehat{f}(w) \right|^2 dw \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left| \frac{|\widehat{k}(w)|^2}{|\widehat{k}(w)|^2 + \alpha} \widehat{f}(w) - \widehat{f}(w) \right|^2 dw \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B |\widehat{f}(w)|^2 \left| \frac{|\widehat{k}(w)|^2}{|\widehat{k}(w)|^2 + \alpha} - 1 \right|^2 dw \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left| \frac{-\alpha}{|\widehat{k}(w)|^2 + \alpha} \right|^2 |\widehat{f}(w)|^2 dw \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \frac{\alpha^2}{\left(\left|\widehat{k}(w)\right|^2 + \alpha\right)^2} \left|\widehat{f}(w)\right|^2 dw$$

De lo anterior podemos decir que esta norma es cero si $\alpha = 0$ y tiende a $\|P^{(B)}f\|$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$. La norma del error de propagación esta dada de la siguiente forma;

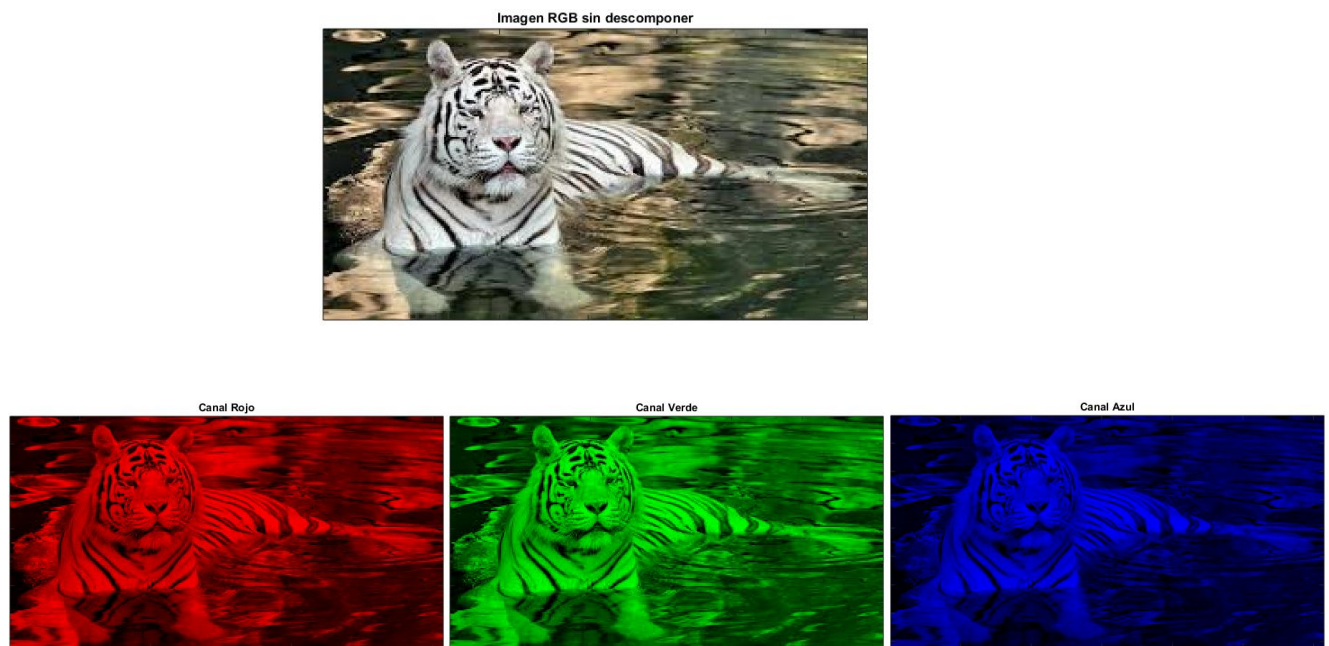
$$\begin{aligned} \|R_\alpha w\|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^q} \left\| \widehat{R}_\alpha(w) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \left| \frac{\widehat{k}^*(w)}{\left|\widehat{k}(w)\right|^2 + \alpha} \widehat{w}(w) \right|^2 dw \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B \frac{\left|\widehat{k}^*(w)\right|^2}{\left(\left|\widehat{k}(w)\right|^2 + \alpha\right)^2} |\widehat{w}(w)|^2 dw \end{aligned} \tag{4.26}$$

Podemos decir entonces que esta norma es muy grande cuando $\alpha \rightarrow 0$ y tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

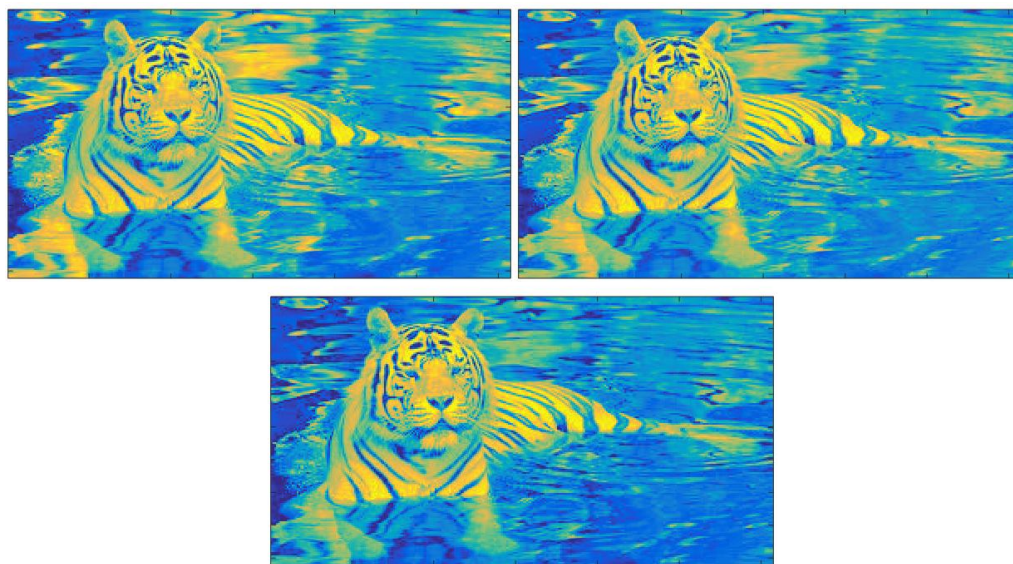
Es decir; si queremos reducir el error de aproximación debemos elegir un α pequeño, pero si deseamos reducir el error de propagación de ruido debemos elegir un α grande, por tanto el valor de α que minimiza el error de restauración corresponde a la solución regularizada, la cual proporciona la mejor aproximación de $P^{(B)}f$.

Según Tikhonov esto implica que para valores decrecientes de α , la solución regularizada primero se acerca al objeto y luego se aleja. Lo cual se identifica como semiconvergencia; de este modo tenemos convergencia para imágenes sin ruido y semiconvergencia para imágenes con ruido.

Antes de validar los ejemplos, veamos como se definen las imágenes RGB con las cuales validaremos los métodos, dichas imágenes se definen como un arreglo de $3 \times m \times n$ pixeles donde cada pixel corresponde a los componentes rojo, verde y azul de una imagen de color (R-red, G-green, B-blue), los cuales corresponde a los colores primarios y la combinación de estos en diferentes intensidades produce los colores del espectro humano visible. Veamos la siguiente imagen que representa la imagen sin descomponer y la imagen representada en sus tres canales.



Una imagen de color RGB se representa por tres matrices bidimensionales, correspondientes a los planos R, G y B con cada uno de estos planos es que haremos el procesamiento es decir para regularizar nuestras imágenes trataremos cada plano de la imagen a color, veamos la representación de los tres planos de la imagen anterior



Todas el procesamiento que se le va hacer a las imágenes para reducir el ruido de ahora en adelante se va hacer regularizando cada plano bidimensional de la imagen a color para luego concatenar los planos regularizados y obtener la imagen regularizada.

Nuestro interés es aplicar el método de regularización de Tikhonov desde el punto de vista discreto a imágenes ruidosas y tratar de reconstruir una buena aproximación de la imagen original. A continuación validaremos algunos ejemplos aplicados a imágenes con diferentes tipos de ruido.

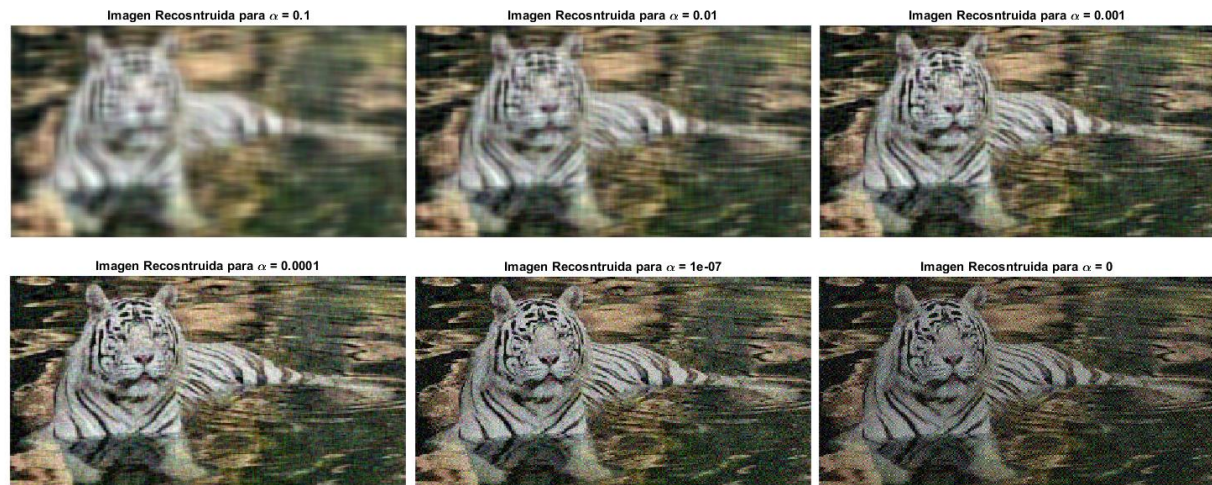
Ejemplo 4.1.3 En este ejemplo tenemos una imagen digital de tamaño 164×307 , la cual corresponde a la imagen a color que se muestra en la siguiente figura y a su lado la imagen con ruido de tipo **gaussiano** con $m = 0$ e $\sigma = 0.01$.

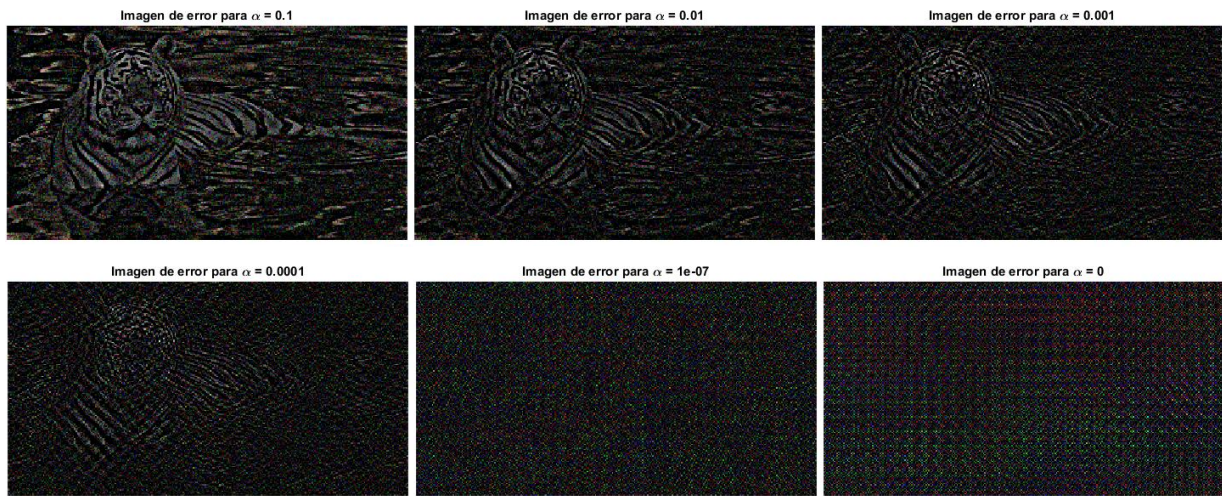


Imagen difusa con ruido de 0.05%



A continuación, mostramos las imágenes obtenidas al aplicar el método de Tikhonov, usando distintos valores para α donde α es el parámetro de regularización.





De aquí podemos observar que en la restauración de imágenes ruidosas para valores de α muy pequeños aumenta el ruido en la imagen. Es decir, que el ruido de propagación decrece cuando α crece y para ciertos valores de α la restauración es satisfactoria ahora si los valores de α incrementan es decir la imagen restaurada se vuelve más borrosa y en efecto se incrementaría el error de aproximación.

Ejemplo 4.1.4 La siguiente imagen es una fotografía en color verdadero de Saturno y la realizó la sonda espacial Voyager 2 de la NASA, el 4 de Agosto de 1998 a una distancia de 21 millones de kilómetros del planeta. Es una imagen digital de tamaño 400×500 , la cual corresponde a la imagen a color que se muestra en la siguiente figura y a su lado la imagen con ruido de tipo **sal y pimienta** con $\sigma = 0.03$.

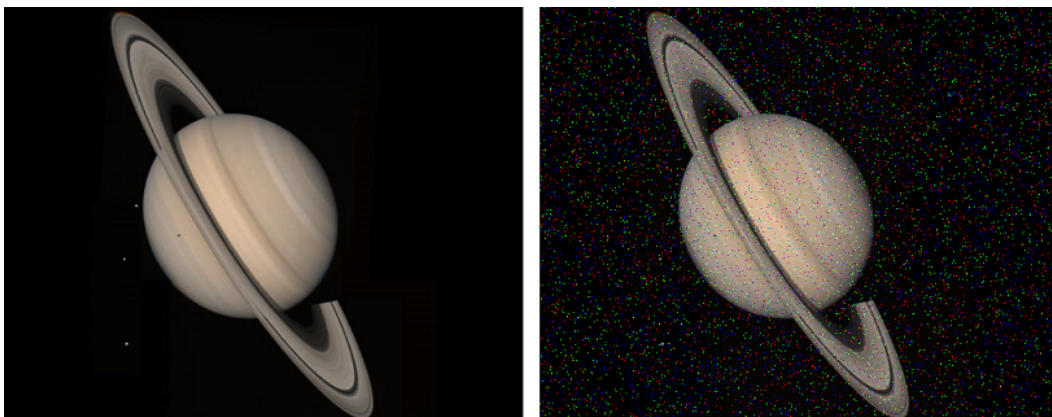
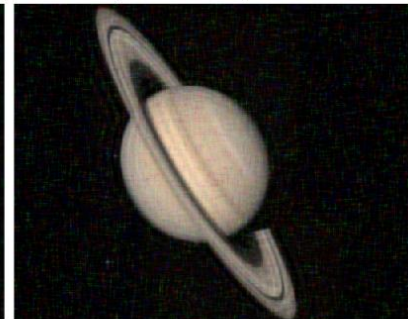
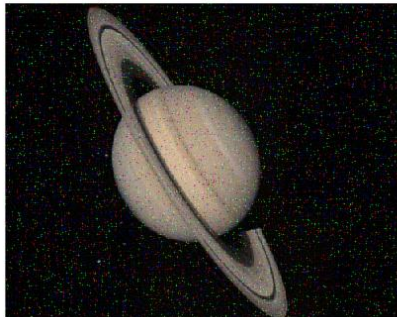
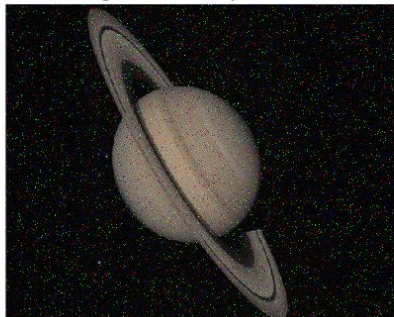
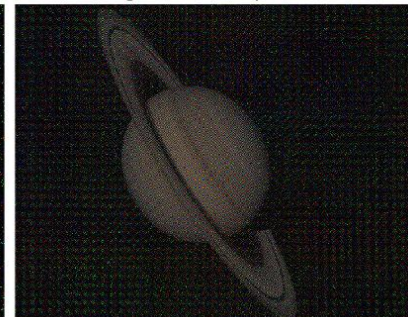


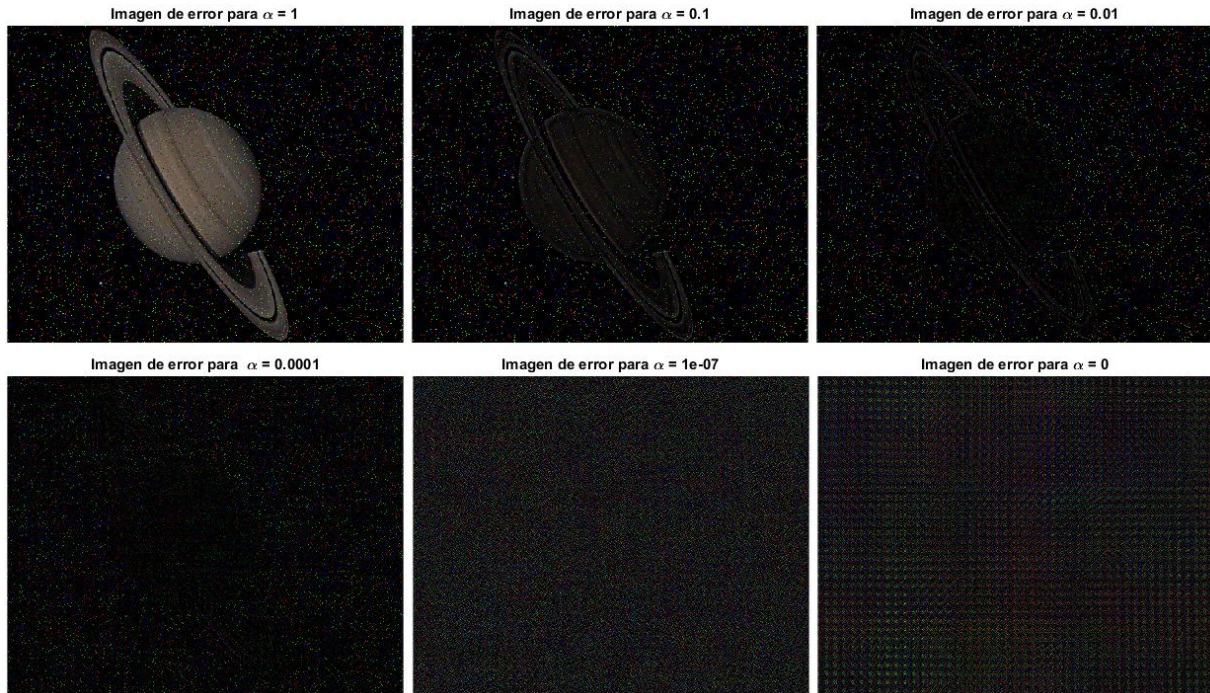
Imagen difusa con ruido de 0.05%



A continuación, mostramos las imágenes obtenidas al aplicar el método de Tikhonov, usando distintos valores para α donde α es el parámetro de regularización.

Imagen Reconstruida para $\alpha = 1$ Imagen Reconstruida para $\alpha = 0.1$ Imagen Reconstruida para $\alpha = 0.01$ Imagen Reconstruida para $\alpha = 0.0001$ Imagen Reconstruida para $\alpha = 1e-07$ Imagen Reconstruida para $\alpha = 0$ 

Ahora mostramos el error con respecto a la reconstrucción para diferentes valores de α , es decir las imágenes muestran lo que le falta a la imagen reconstruida para ser igual a la imagen completamente ruidosa.



Observando detalladamente las imágenes reconstruidas para distintos valores de α y las imágenes de error, se puede ver que a medida que los α decrecen a cero la imagen recupera todos los detalles pero el ruido no se reduce tal como se ve en las imágenes de error, pero si los α crecen el ruido desaparece pero también se pierden detalles de la imagen se obtiene en la imagen de errores podemos ver que para $\alpha = 1$ la imagen se aleja de la imagen original y a pesar que el ruido se redujo no es una buena aproximación para la imagen original, partiendo de la observación podríamos decir que la imagen que mas se aproxima a la original estaría dada para $\alpha = 0.01$ en la cual se puede ver que el ruido redujo y que casi no se pierden detalles como se ve en la imagen de error para dicho α .

Ejemplo 4.1.5 A continuación haremos la reconstrucción de la imagen del oso panda, la cual es una imagen en el que cada plano es de dimensión 393×600 , la figura que se muestra de manera seguida es la imagen original a color y su imagen ruidosa a color con un ruido gaussiano de $m = 0$ y $\sigma = 0.03$.

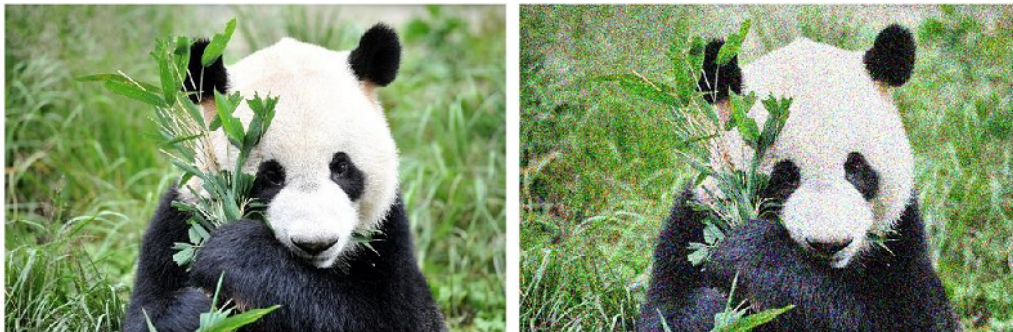
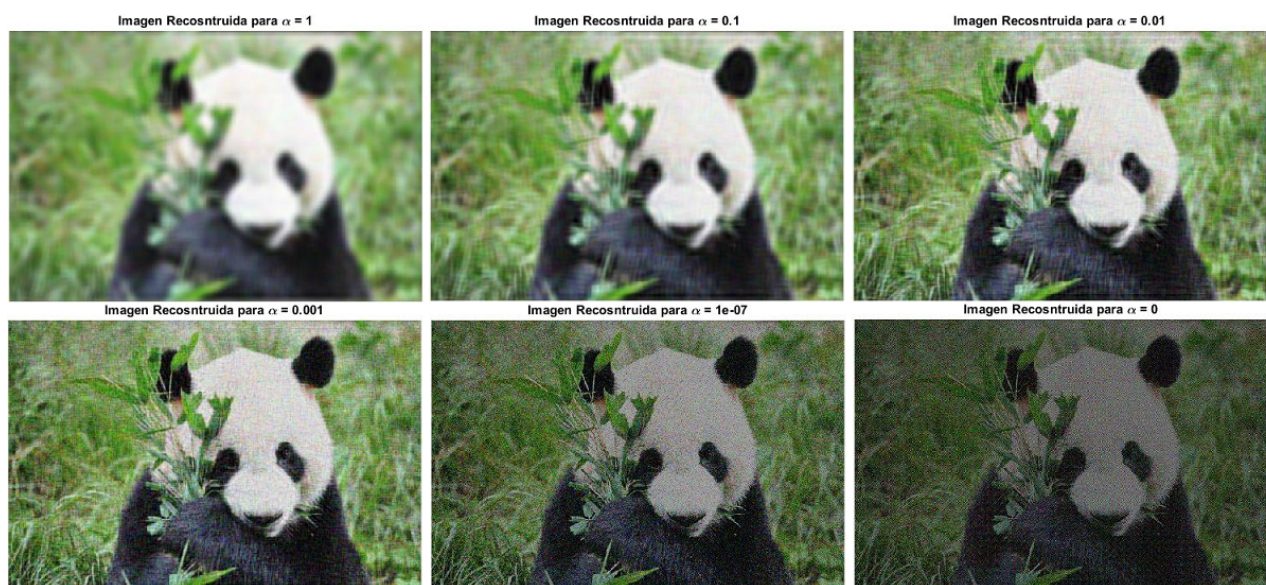
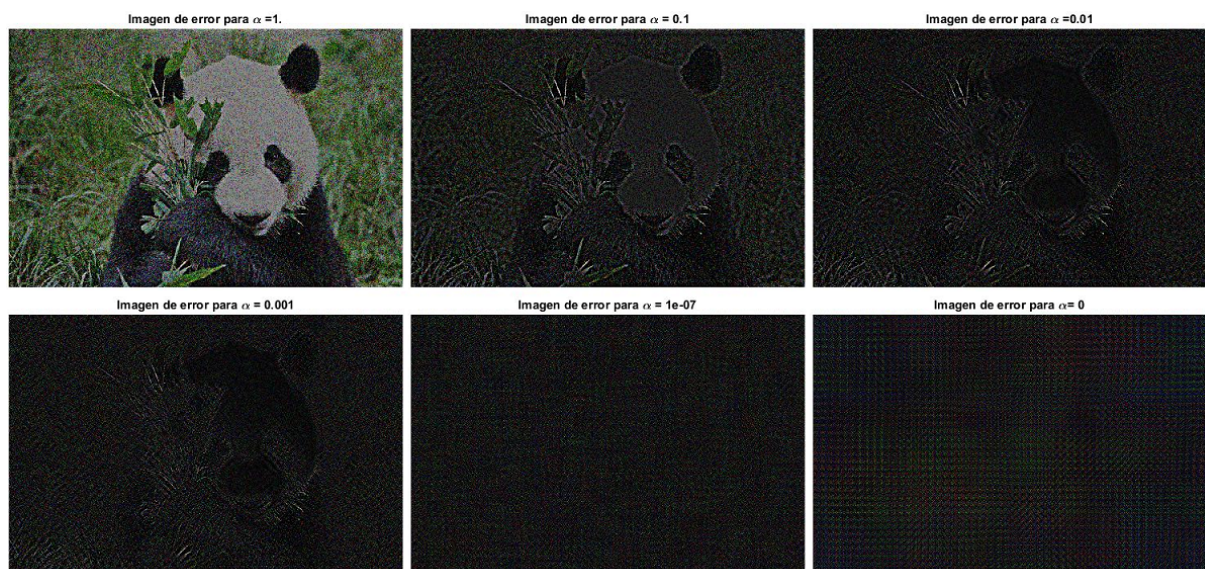


Imagen difusa con ruido de 0.05%



Ahora mostramos las imágenes obtenidas al aplicar el método de Tikhonov, usando distintos valores para α donde α es el parámetro de regularización.





La imagen anterior muestra el error respectivo para cada valor de α con respecto a la imagen completamente ruidosa, es decir la diferencia entre la imagen reconstruida y la imagen ruidosa. De aquí podemos concluir que la mejor aproximación de la imagen se obtiene para $\alpha = 0.01$ dado que es la imagen que menos pierde detalles y la cual pierde ruido, también podemos ver que para $\alpha = 1$ la imagen obtenida se aleja y pierde detalles de la imagen es decir se aproxima mas a la imagen difusa y para α muy pequeño se aproxima a la imagen completamente ruidosa.

Chapter 5

REGULARIZACIÓN GENERALIZADA .

5.1 Método generalizado usando valores singulares y regularización de Tikhonov.

En este capítulo estudiaremos el objetivo principal de la tesis, formalizaremos el nuevo método a partir de la combinación del método de regularización de Tikhonov conjunto con el truncamiento espectral, el cual dependería de dos parámetros, los parámetros serían α el parámetro de la regularización de Tikhonov y el otro sería k e cual corresponde al número que trunca la suma para reducir el almacenamiento.

Este nuevo método, al que llamaremos método generalizado consiste en recuperar una imagen digital o fotografía con un ruido respectivo usando 2 parámetros, este método es más factible dado que recuperaremos una imagen con menos almacenamiento y se puede ver que la imagen que se reconstruye es muy buena.

Es importante comprimir imágenes digitales dado que la compresión de imagen consiste en reducir los datos redundantes e irrelevantes de la imagen con la menor pérdida posible para permitir su almacenamiento o transmisión de forma eficiente ya que hay imágenes que no se podrían procesar si no se comprimen primero.

Numéricamente nuestro método sigue el siguiente proceso, tomamos una imagen digital o fotografía con un ruido respectivo, comprimimos la imagen usando un parámetro k adecuado para reducir su almacenamiento luego procedemos a aplicar la regularización

de Tikhonov a la imagen comprimida para diferentes valores de α .

5.2 Ejemplos numéricos usando el método generalizado

A continuación mostraremos la reconstrucción de la imagen del ejemplo 4.1.2 con un ruido gaussiano de 0.03 pero truncada en $k=100$ es decir que la imagen tiene solo 100 valores singulares.

Ejemplo 5.2.1 Como se dijo anteriormente reconstruiremos la imagen del ejemplo 3.2.3 con ruido gaussiano de $\sigma = 0.03$ truncada en $k=100$.

Imagen original



Imagen ruidosa



Imagen reconstruida con K=100

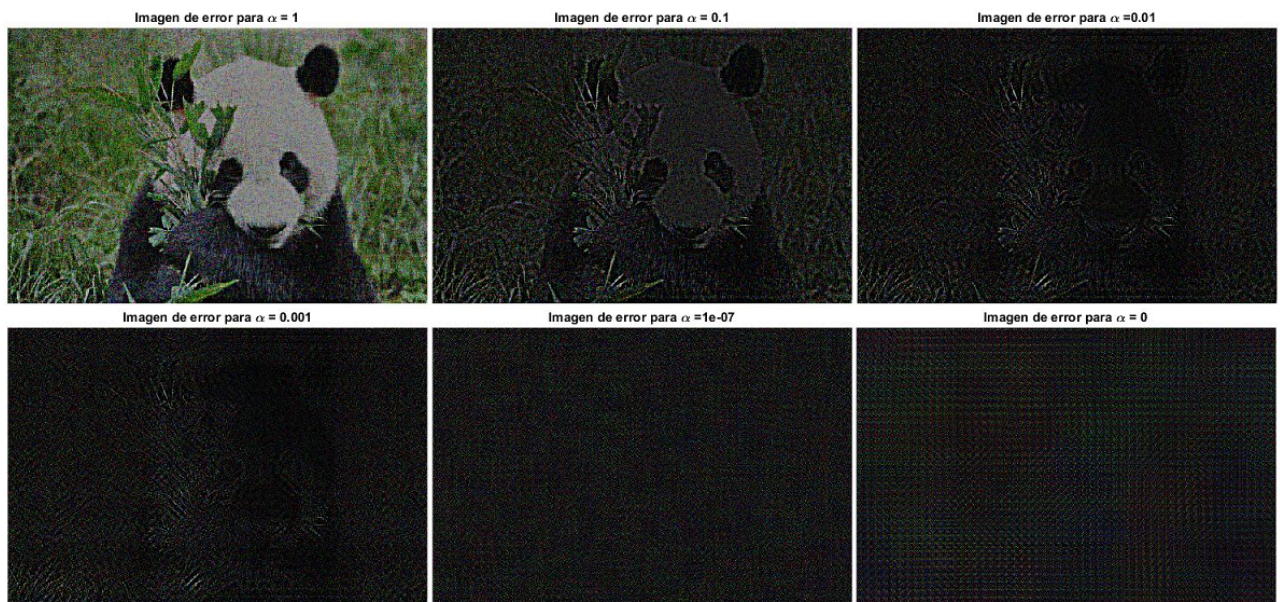


Imagen difusa de la imagen truncada con ruido de 0.05%



Aplicando el método de Tikhonov a la imagen truncada para diferentes valores de α obtenemos los siguientes imágenes reconstruidas, llamamos imagen de error a los detalles que le faltan a la imagen regularizada con respecto a la imagen con ruido.





Como vemos en ejemplo anterior y comparándolo con el ejemplo (4.1.5) tenemos en ambos casos buenas imágenes recuperadas usando 2 métodos diferentes, con la única ventaja que el método generalizado me proporciona una imagen con menos almacenamiento debido al truncamiento que se le realiza. Observando la tabla de imágenes de error se puede ver que a medida que los α crecen la imagen proporcionada se aleja de la imagen ruidosa pero no solo en cuanto a el ruido si no también en cuanto a los detalles completos de la imagen, por tanto no seria una buena aproximación con respecto a la imagen original, de otro modo si los α son muy pequeños la imagen no pierde detalles pero tampoco ruido es decir que no hay mejoría.

Presentamos una comparación de la imagen ruidosa a tratar y su correspondiente imagen regularizada usando el método generalizado para 100 valores singulares y $\alpha = 0.01$.



Ahora comparemos la imagen ruidosa con la imagen que se obtuvo en el ejemplo 3.2.3 usando solo regularización de Tikhonov para un $\alpha = 0.01$



Ejemplo 5.2.2 Ahora veremos un ejemplo de una imagen digital de tamaño 1500×1500 es decir cuenta con 1500 valores singulares, la cual corresponde a la imagen a color que se muestra en la siguiente figura las dos imágenes seguidas corresponden a la imagen con ruido de tipo **sal y pimienta** con $\sigma = 0.03$ y la otra la imagen truncada en $k=150$, es decir que la imagen solo cuenta con 150 valores singulares.

Imagen original



Imagen ruidosa

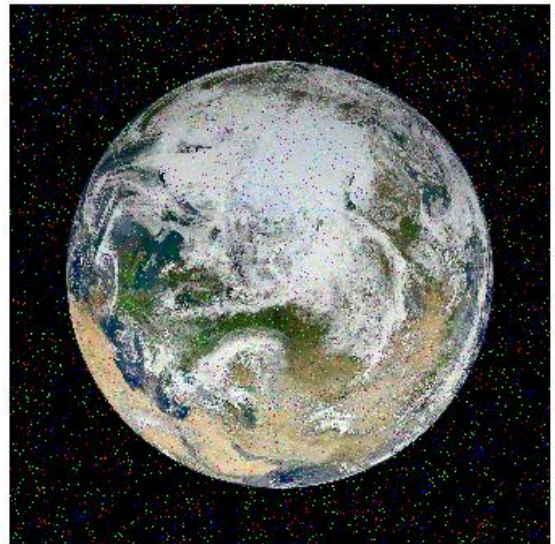
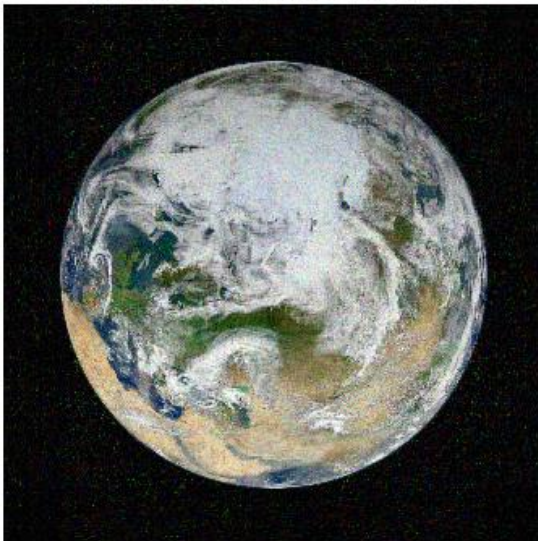
Imagen reconstruida con $k=150$ 

Imagen difusa de la imagen truncada con ruido de 0.05%



Aplicando el método de regularización de Tikhonov a la imagen truncada en $k=150$ valores singulares, para diferentes valores de α obtenemos las siguientes imágenes reconstruidas usando el método generalizado, llamamos imagen de error a la diferencia entre la imagen ruidosa y la regularizada con el nuevo método es decir, a los detalles que le faltan a la imagen regularizada con respecto a la imagen con ruido.

Imagen Reconstruida para $\alpha = 1$



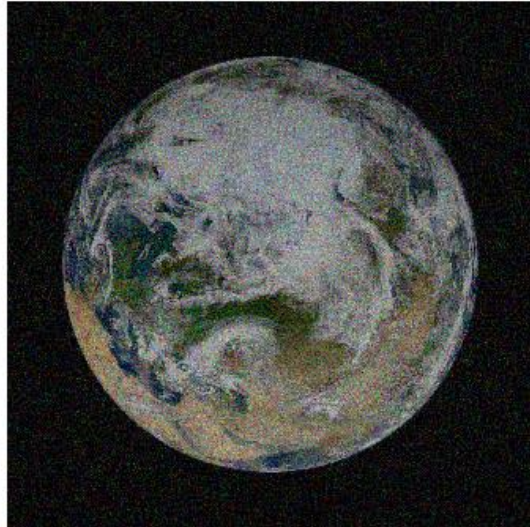
Imagen Reconstruida para $\alpha = 0.01$

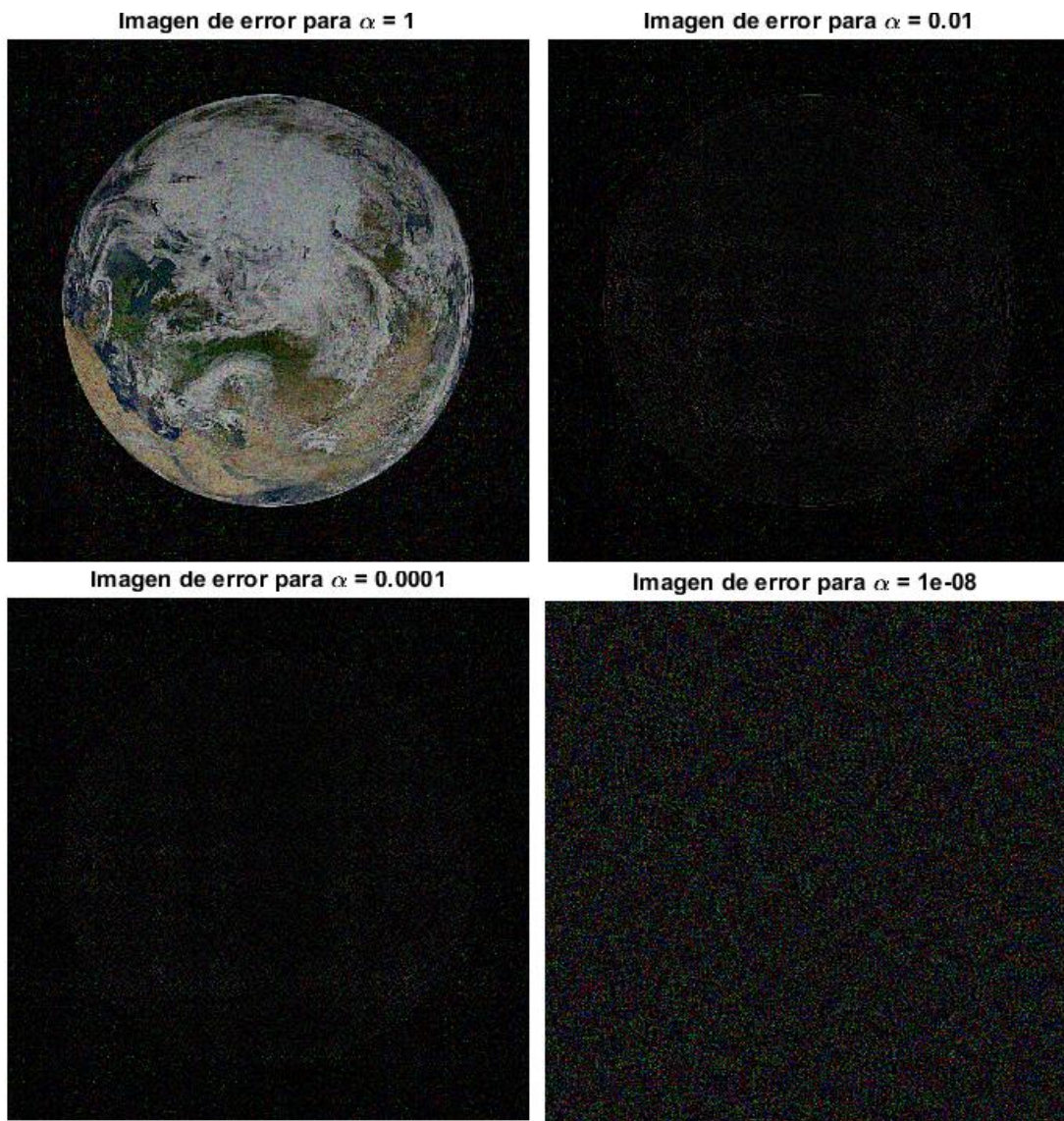


Imagen Reconstruida para $\alpha = 0.0001$



Imagen Reconstruida para $\alpha = 1e-08$





Como se puede observar en el ejemplo anterior es una imagen grande que se ha comprimido es decir que usamos solamente un 20% del almacenamiento total de la imagen, lo cual resulta muy rentable dado que las imágenes ruidosas que son muy grandes se podrían regularizar con mas facilidad. También podemos ver que para $\alpha = 0.01$ se obtiene una buena imagen a la cual se le redujo el ruido y no pierde los detalles de la misma, es decir que a partir de la observación el parámetro de regularización optimo seria $\alpha = 0.01$.

Para terminar con los ejemplos veamos lo siguiente:

Dada la siguiente imagen borrosa que corresponde a la imagen de lena de tamaño 256×256 , usando el método generalizado que se presento con anterioridad vamos a reconstruir

de la mejor manera la imagen de tal forma que se puedan reconocer mas detalles. Las imágenes que se presentan a continuación corresponden a la imagen borrosa que se quiere regularizar y la imagen borrosa con menos almacenamiento es decir que tiene solo 60 valores singulares de 256.



5.3 Algoritmos

A continuación un pequeño código de resumen de los procedimientos trabajados en MATLAB.

Veamos como incluir ruido a las imágenes;

```
D = 'C:\Users\marcela.p\Desktop\lena\';
T = 'tigre';
X = imread([D, T, '.jpg'])
X = imnoise(X, 'salt & pepper', 0.03);
```

```

X = imnoise(X, 'gaussian', 0, 0.01);
figure
imshow(X)

```

Ahora procedemos a separar la imagen con ruido a color en sus tres planos, para procesarlos por separado;

```

X= imread('imagen');
A1=X(:,:,1);
A2=X(:,:,2);
A3=X(:,:,3);
figure
imagesc(A1);

```

Para cada imagen que representa cada plano aplicamos SVD y procedemos a truncar la suma para representar la imagen con los valores singulares deseados;

```

[X,map]=imread('imagen');
X=sum(X,3,'double');
[U,S,V] = svd(X);
k=['valor'];
for i=1:length(k)
Xk = U(:,1:k(i))*S(1:k(i),1:k(i))*V(:,1:k(i));
imagesc(Xk)
imsave

```

Para terminar con el método después de truncar cada plano de la imagen a color procedemos a aplicar la regularización de tikhonov para diferentes valores de α

```

X= imread('imagen');
[m,n] = size(X);
X=double(X);
PSF = fspecial('gaussian',',,');
fPSF=fft2(fftshift(PSF),m,n);
fX=fft2(double(X));
epsilon=0.05;
g_eps1 = real(ifft2(fPSF.*fft2(X))) + epsilon*randn(m,n);
alpha=[0.01];
figure
for i=1:1

```

```

    subplot(1,1,i)
    f_hat=conj(fPSF).*fft2(g_eps1)./ (abs(fPSF).^2 + alpha(i));
    f_alpha1 = real(ifft2(f_hat));
    imagesc(f_alpha1);

```

```

hd = ['Imagen Recosntruida para \alpha = 0.01'];
title(hd)

```

Luego procedemos a concatenar los 3 planos regularizados y obtener la imagen requerida para el nuevo método.

Conclusiones

Con respecto al trabajo elaborado y observando los resultados que se referenciaron como ejemplos se puede ver que los métodos de regularización que se usaron son métodos que proporcionan buenas soluciones al problema que se presento al inicio usando imágenes ruidosas con diferentes tipos de ruido, vemos que el método que se quería usar al que llamamos método generalizado es un método que genero buenos resultados incluyendo como una ventaja la reducción de almacenamiento de las imágenes el cual es un problema cuando las imágenes son muy grandes y por ende se tendría un buen método para dichas imágenes.

Podemos ver también que tal como se dijo en la teoría y se mostró en los ejemplos numéricos usando el método generalizado y el método de Tikhonov, se valido que si queríamos reducir el error de aproximación debíamos elegir un parámetro α pequeño pero si deseábamos reducir el ruido debemos escoger un α grande.

Bibliografía

- [1] Bertero M., y Boccacci P., Introduction to inverse problems in imaging. IOP Publishing 1998.
- [2] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications, 1978.
- [3] Krisch A, An introduction to the mathematical theory of inverse problems. 2001.
- [4] Hinestroza D. Problemas inversos y técnicas de regularización, 2010.
- [5] Hsu H. Analisis de Fourier, Addison-Wesley Iberoamericana, 1973
- [6] Leon, Steven J. , Linear algebra with applications (8th ed.), Pearson Prentice Hall, 2010.
- [7] Pajares G., J. M. de la Cruz *Vision por Computador*. "Imágenes y aplicaciones", Alfaomega Grupo Editor S.A2002.
- [8] Youngson B. *P.Linear Functional Analysis*. , springer, 2000. —
- [9] Kontaxakis G., Vaquero J.J., Santos A., "*Reconstrucción de imagen en tomografía por emisión de positrones*." Vol. 96, N. 1-2, pp 45-57, 2002.
- [10] Molina juan jose, Trabajo de grado, *Regularización de problemas inversos mediante la técnica de Picard aplicadas a imágenes* 2014.
- [11] Montenegro Albert Ferney, *Trabajo de investigación, Regularización de problemas inversos e imágenes borrosas*. 2010.
- [12] Morales Carlos Alberto, Trabajo de grado, *Reconstrucción de imágenes mediante el método de regularización de Tikhonov* 2008.