



Análisis de las actitudes de los estudiantes frente al aprendizaje del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia, en Grado 9º, a partir de la escala de Likert articulada al modelo de Vann Hiele

Yineth Xiomara Trochez Velasco

Ronald Arles Valencia Lasso

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Programa de Licenciatura en Educación Básica Con Énfasis en Matemática – Sede Norte del

Cauca

Santander de Quilichao

2021



Análisis de las actitudes de los estudiantes frente al aprendizaje del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia, en Grado 9°, a partir de la escala de Likert articulada al modelo de Vann Hiele

Yineth Xiomara Trochez Velasco

Ronald Arles Valencia Lasso

Trabajo de Grado como requisito para optar al título de Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemática

Director

Luis Fernando Espinoza Sanclemente

Lic. En Matemáticas y Física de la Universidad del Valle

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Programa de Licenciatura en Educación Básica Con Énfasis en Matemática – Sede Norte del

Cauca

Santander de Quilichao

2021

Resumen

En esta investigación se abordó el aprendizaje del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, y las actitudes de un grupo de estudiantes frente a una propuesta de enseñanza, debido a que la falta de preparación y/o organización de los docentes al momento de enseñar temas geométricos, está afectando tanto la predisposición aprendida como el aprendizaje de los estudiantes, cabe aclarar, que una de las causas es atribuida a las dificultades que se presentan en las diferentes transformaciones y conversiones de las representaciones geométricas.

El objetivo principal de esta investigación fue el de analizar las actitudes de los estudiantes frente al aprendizaje del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia. Se plantea una metodología con enfoque cualitativo, guiada por la micro-ingeniería. El desarrollo de la investigación se basará en la preparación de una propuesta didáctica que permita el aprendizaje del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, la presentación de la propuesta, y el análisis de las actitudes encontradas en los estudiantes. De acuerdo con el análisis realizado, se concluye que el apoyo tecnológico propuesto en esta tesis, visto desde una estrategia gamificada en el proceso de enseñanza, promovió en los estudiantes, un estado de motivación, despertando un interés en el proceso de adquisición de elementos conceptuales, generando en ellos, una construcción actitudinal positiva, producto de la exploración de una nueva forma de conocer.

Palabras claves: Actitudes, Didáctica, Gamificación, enseñanza, aprendizaje, tecnología.

Summary

This research addressed the learning of the inscribed angles theorem in the circumference, and the attitudes of a group of students towards a teaching proposal, due to the fact that the lack of preparation and/or organization of teachers when teaching topics geometry, is affecting both the learned predisposition and the learning of students, it should be clarified that one of the causes is attributed to the difficulties that arise in the different transformations and conversions of geometric representations.

The main objective of this research was to analyze the attitudes of students towards learning the theorem of angles inscribed in the circumference. A methodology with a qualitative approach

guided by micro-engineering, is proposed. The development of the investigation will be based on the preparation of a didactic proposal that allows the learning of the theorem of angles inscribed in the circumference, the presentation of the proposal, and the analysis of the attitudes found in the students. According to the analysis carried out, it is concluded that the technological support proposed in this thesis, seen from a gamified strategy in the teaching process, promoted a state of motivation in the students, awakening an interest in the process of acquiring conceptual elements. generating in them, a positive attitudinal construction, product of the exploration of a new way of

Knowing.Keywords: Attitudes, didactics, Gamification, teaching, learning, technology.

Tabla de Contenidos

Introducción	8
Capítulo 1.....	10
Justificación	10
Antecedentes en relación al teorema de ángulo inscritos en la circunferencia	14
Planteamiento del Problema	18
Objetivo General	26
Objetivos Específicos.....	26
Capítulo 2. Marco Teórico.....	26
2.1. Referente Curricular.....	26
2.1.1. Coherencia Vertical y Coherencia Horizontal	27
2.2. Referente Matemático.....	30
2.3. Referente Didáctico	37
Capítulo 3. Metodología de la Investigación	47
3.1. Tipo de Investigación.....	47
3.2. Metodología	47
3.3. Avance de estudio	49
3.3.1. Niveles de razonamiento Geométrico de Van Hile.....	50
3.3.2. Fases del Modelo de Van Hiel	51
3.3.3. Fases Relacionadas al Nivel 1.....	52
3.3.3. Fases Relacionadas al Nivel 2.....	52
3.4. Contextualización	53
3.4.1. Historia del territorio Indígena.....	53
3.4.1. Contexto Poblacional	55
Capítulo 4. Análisis.....	60
4.1. Análisis A-Priori	61
4.1.1. Análisis de la primera parte	61
4.2. Análisis A-Priori del Nivel 1.	63
4.3. Análisis A-Posteriori.....	63
4.3.1. Contexto.....	78
4.3.2. Materiales y recurso	79
4.3.3. Estructura Organizativa del desarrollo de la situación didáctica	79
4.4. Análisis A-Posteriori de la primera parte	82
4.5. Análisis de la actividad II	85
4.6. Análisis de la actividad III	85
4.7. Análisis de la encuesta de Likert	86
Capítulo 5. Conclusiones	90
Lista de referencias	93
Anexo	93

Lista de tablas

Tabla 1. Misión y visión de la Institución Educativa Agropecuaria Kliichaw Sek	56
Tabla 2. Objetivos del colegio	56
Tabla 3. perfiles académicos	57
Tabla 4. perfil de los estudiantes y docentes	57
Tabla 5. Ubicación De La Institución Educativa Kliichaw Sek	58
Tabla 6. contexto local, regional, nacional e internacional	58
Tabla 7. modelo pedagógico	59
Tabla 8. análisis a-priori	63
Tabla 9. Estudiantes a analizar y análisis actitudinal 1	80
Tabla 10. análisis del curso en general 1	81
Tabla 11. estudiantes a analizar y análisis actitudinal 2	81
Tabla 12. análisis de curso en general 2	82
Tabla 13. preguntas abiertas de la primera construcción	83
Tabla 14. preguntas abiertas de la segunda construcción	84

Lista de figuras

Figura 1. Resultados nacionales en las pruebas saber noveno, área de matemáticas.....	13
Figura 2. Promedios Globales en Matemáticas, Octavo Grado, TIMSS 2007.....	14
Figura 3. Evolución de los Promedios de los Estudiantes Colombianos en Matemáticas, por Género, 1995-2007.	15
Figura 4. Coherencia vertical del objeto de estudio.....	19
Figura 5. Coherencia vertical.....	20
Figura 6. Demostración del teorema.....	21
Figura 7. Radio de una circunferencia	22
Figura 8. Cuerda en una circunferencia	23
Figura 9. Diámetro de una circunferencia.....	23
Figura 10. Ángulo inscrito en una circunferencia.....	24
Figura 11. Ángulo central de una circunferencia.....	24
Figura 12. Centro de la circunferencia al interior de la región del ángulo inscrito.....	25
Figura 13. Centro de la circunferencia en una de las cuerdas del ángulo inscrito.	26
Figura 14. Centro de la circunferencia en la región exterior del ángulo.....	26
Figura XV. Signos y su Relación con los Objetos, Según Pierce (1867).	30
Figura XVI. Esquema de la Transposición Didáctica.....	34
Figura XVII. Historia de la Gamificación	35
Figura XVII. Modelo de Van Hiele	37

Introducción

El presente trabajo de grado centra la atención en la línea de investigación propuestas por el Programa Académico de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas adscrito al área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP), de la Universidad del Valle, Sede Norte de Cauca; La línea de investigación Pedagogía y tecnología de la información y la comunicación (TIC).

A lo largo de la Historia, la congregación de matemáticos e investigadores, han despertado un gran interés por estudiar los Teoremas, propiedades y definiciones que atañen a groso modo a la geometría desde su importancia en la vida cotidiana, centrando la atención particularmente en los procesos de aprendizaje y enseñanza de la geometría formal, en consideración con las problemáticas relacionadas con la transposición didáctica y las representaciones semióticas que deben ser analizadas en el transcurso de su enseñanza y aprendizaje, dado que, al ejercer una vigilancia epistemológica de las transformaciones sufridas al objeto geométrico, se adquieren elementos conceptuales, donde se logra evidenciar dificultades de carácter semiótico en diferentes objetos geométricos, que propician un aporte al suministro actitudinal y de comprensión en los estudiantes. Sin embargo, es importante conocer la aceptación de los estudiantes al enfrentarse a la manera cómo se enseñan los objetos geométricos, considerando que actualmente se pueden observar nuevas formas de aprender y de interiorizar el conocimiento, donde los recurso de trabajo cada vez son más, producto de las ventajas que proporciona la tecnología, relacionadas en algunos casos con el sistema educativo en situaciones que representan en los estudiantes partes de su diario vivir, tal como la interacción con juegos, diseños, secuencias y demás, en pro de generar un ambiente atractivo y didáctico para el

estudiante, sin dejar de lado la autonomía de su aprendizaje al momento de enfrentarse con modelaciones que componen su realidad.

Ahora bien, el interés de este trabajo, centra la atención en un rediseño que de manera sucinta expone situaciones aterrizadas a contextos cotidianos vinculando a objetos geométricos formales, tales como el Teoremas de ángulos inscritos en la circunferencia, con el objetivo de determinar de qué manera influye la inclusión de esta herramienta, en el aprendizaje de los estudiantes, desde el análisis de sus actitudes. Para ello, se acude a la Gamificación como estrategia de apoyo teórico y al modelo de Vann Hiele en relación al objeto geométrico del Teorema de Ángulo Inscrito en la circunferencia, donde se pretende analizar las actitudes del estudiante en el proceso de aprendizaje en torno al teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, cuando se emplean medios didácticos.

En este orden de ideas, el documento está estructurado en 4 capítulos desarrollados en un tiempo de indagación. El **Primer Capítulo** consta de una justificación, antecedentes, planteamiento del problema, objetivo general y objetivos específicos. En el **Segundo capítulo**, se abordarán tres referentes que fundamentaron el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, en términos de referente curricular, referente matemático y referente Didáctico- Semiótico. El **Tercer Capítulo** aborda un marco metodológico, basado en la ingeniería didáctica como metodología de investigación cualitativa, derivando cuatro momentos:

El primero inicia con un análisis preliminar, dando paso a la concepción y análisis a priori, luego se habla de la experimentación y, por último, el análisis a posteriori.

Capítulo 1

Justificación

En la matemática y en especial en la geometría, es conveniente reflexionar, sobre el sentido de los aportes evidenciados a lo largo de la historia de la resolución de problemas en diferentes contextos y la manera en la que ha sido aceptada por los estudiantes, a razón de que, el surgimiento de la geometría en el ser humano, parte de la necesidad efímera, de querer gestionar soluciones en las múltiples problemáticas presentes en nuestro diario vivir, fomentando la enseñanza de la geometría en el intelecto de promover una gran variedad de elementos conceptuales, que fortalezcan su forma de interpretar, su pensamiento espacial y su forma de identificar las figuras abstractas en el espacio del mundo en el que vivimos. Sin embargo, uno de los grandes retos para la educación matemática, es lograr que los estudiantes reconozcan la utilidad de la geometría en cualquier contexto, sin que el objeto geométrico se vea afectado a nivel conceptual. Este aspecto se patentiza en la transposición didáctica (TD)¹ de los objetos geométricos, fundamentando que implícitamente, requieren de un cambio de registro semiótico del objeto geométrico que se desee trabajar, es decir, desde un cambio de registro de símbolos hasta un registro de figuras geométricas o espacial.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006, p. 47), plantean como uno de sus fines que “el conocimiento matemático es imprescindible y necesario en todo ciudadano, para desempeñarse en forma activa

¹ TD: Transposición Didáctica

y crítica en su vida social y política, y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones”.

La importancia de un mayor énfasis, en la solución de problemas en el currículo de matemática, ha sido ampliamente discutida, en la comunidad de Educación Matemática a nivel internacional. En la actualidad, esta preocupación se expresa en las nuevas propuestas curriculares, que surgen en el Ministerio de Educación en Colombia (MEN), permitiendo que el docente cumpla con las políticas educativas y cumpla con la tarea de crear, tal como lo plantea Fandiño & D’Amore (2009) en su libro “Área y Perímetro, aspectos conceptuales y didácticos”, donde un exceso de situaciones didácticas (entendidas como contextos que el docente propone a los estudiantes en forma explícita de acuerdo a las exigencias del programa), no promueven en el estudiante el aprendizaje de la geometría, pero sí les permite reconocer las expectativas del docente, las cuáles, en términos generales, posibilitará tener claridad sobre el conocimiento geométrico, estableciéndose como un papel fundamental en la solución de problemas cotidianos. En ese orden de ideas, se debe realizar un análisis de las situaciones que dan significado a la gran variedad de objetos geométricos.

Así mismo, la gran variedad de los objetos geométricos, es reflejada mediante geometría, la cual se considera una rama perteneciente a la matemática, con el propósito de representar los objetos matemáticos, en relación con un contexto cotidiano; de este modo, a lo largo del tiempo surgieron nuevos hallazgos de objetos geométricos, que fueron incluidos en la rama geométrica. Sin embargo, algunos de estos hallazgos no se profundizaron, denominándose como poco explorados. Esta situación, se define como una carencia de la geometría, que sirve como motivación para ciertos investigadores, que están interesados en explorar ese tipo de objetos geométricos, tales como, el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, el cual es pensado

desde lo abstracto del objeto geométrico, en términos del saber sabio, y también a partir de la movilización de elementos conceptuales, pertenecientes a los teoremas de ángulos inscritos en la circunferencia, todo esto, argumentado bajo la teoría de la transposición didáctica.

La transposición didáctica (TD), requiere de una variedad de acciones tales como, el manejo del concepto geométrico, procediendo desde el saber sabio, hasta la implementación de diferentes estrategias didácticas, en la movilización del objeto geométrico. En relación a lo anterior, un eje fundamental para la aprehensión y movilización de un objeto matemático, radica en la existencia de diferentes investigaciones en pro de retroalimentar y dar a conocer más elementos conceptuales en referencia al objeto. Sin embargo, con respecto al teorema del ángulo inscrito en la circunferencia, se determinó que la falta de información de este objeto, promueve que la movilización del objeto mismo desde un eje motivacional de aprendizaje para los estudiantes, sea algo complejo de realizar, entendiendo que la importancia radica en el conocimiento que adquiere el estudiante, por consiguiente, una de las maneras de contribuir a esta dificultad, es mediante la propuesta de un rediseño en correspondencia con el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, el cual integra cinco niveles ((Nivel 1 (reconocimiento), Nivel 2 (análisis), Nivel 3 (clasificación), Nivel 4 (deducción), Nivel 5 (rigor)), dentro de los cuales se consideran cinco fases dentro de cada nivel (Fase 1 (Información), Fase II (Orientación dirigida), Fase III (Explicitación), Fase IV (Orientación Libre), Fase V (Integración)), aclarando que este trabajo solo se enfocará en el segundo Nivel de razonamiento y las cinco fases pertenecientes a ese nivel, las cuales serán base del rediseño, permitiendo que no sólo logre explicar cómo ocurre la variación del razonamiento geométrico en los alumnos y cómo contribuir a la mejora de la calidad del razonamiento de los estudiantes, sino que también, pueda relacionar las habilidades geométricas con cada nivel de razonamiento geométrico.

Además, es importante que los estudiantes se familiaricen con el conocimiento impartido por el docente, permitiendo que logre un aprendizaje significativo, que le permita hacer uso de sus nuevos conocimientos en escenario familiares y no familiares, además, establezca relaciones con otros conocimientos y otros contextos. Es por ello que, es importante lograr que la enseñanza se familiarice con dinámicas y conocimientos que rodean día a día a los estudiantes, logrando despertar en ellos tanto motivación, como interés hacia el aprendizaje, debido a que estos dos factores, podrían facilitar y aumentar la participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza, abriendo las posibilidades de que el aprendizaje sea más significativo para ellos.

En este orden de ideas, se hace uso de la gamificación, como principal apoyo en el proceso de aprendizaje acompañado del modelo de razonamiento de Vann Hiele, intentando proporcionar una mejor participación, por parte de los estudiantes. Es importante mencionar que el interés por la gamificación nace debido a que:

En los últimos años se ha consolidado la tendencia de aprovechar los componentes motivadores propios de los escenarios de juegos, trasladándolos a contextos formales no lúdicos, fenómeno denominado gamificación-traducido literalmente del inglés gamificación-, con el fin de implicar a los usuarios el proceso complejo y predisponerlos favorablemente hacia la adquisición de aprendizaje de diversa índole. El fenómeno de la gamificación no está siendo ajeno al ámbito educativo, donde está encontrando múltiples beneficios en aspectos como la motivación, el compromiso o el rendimiento en el aprendizaje. (Morillas, 2016, p.51).

De esta manera, es importante considerar que la gamificación puede traer grandes beneficios al ambiente educativo, es por ello que su articulación con la didáctica suele resultar interesante, por el hecho de que sus aportes ayudan y facilitan el aprendizaje a través de la

motivación de estudiantes, y uno de los propósitos de la didáctica es estimular el conocimiento, para mejorar las prácticas educativas en pro de entender los procesos de aprendizaje donde se pretende que el estudiante no sea perjudicado por la trasposición didáctica de los docentes, libros de textos, o guías de aprendizaje.

Antecedentes en relación al teorema de ángulo inscritos en la circunferencia

En el marco de la realización de un bosquejo, entre trabajos académicos, revistas y artículos, que desarrollen un aporte hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en especial el aprendizaje de la geometría, se expondrán brevemente algunos documentos, en pro, de consolidar una base y acercamiento en cuanto a la construcción y aportes que se han hecho alrededor del conocimiento del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia.

Para dar inicio con este abordaje de investigación, es pertinente aclarar que el eje transversal en la búsqueda de esta información, fue influenciada por investigaciones internacionales, nacionales y locales.

Referente a las investigaciones internacionales, se destacan dos propuestas; la primera, planteada por Susana (2014), donde se realiza una propuesta didáctica para la enseñanza del teorema de ángulos en la circunferencia, debido a que, “las actividades que se proponen en el aula, no propician un trabajo geométrico de exploración, donde los alumnos deban recurrir a las propiedades de objetos geométricos que ya conocen, y que, por lo tanto, les permitan generar otras relaciones y propiedades como los teoremas de los ángulos en la circunferencia” (Susana, 2014, p.10). Además, reconoce que este problema también se presenta en los libros de texto, pues según este estudio, en el país de Chile, los textos no propician actividades que permitan que el estudiante se formule preguntas y recree conjeturas, negando la oportunidad de potencializar

estas actividades, relacionando aquellos conocimientos previos, con nuevos conceptos y estableciendo posibles relaciones que se pueden dar entre diferentes teoremas enmarcados dentro de la geometría. Ahora bien, desde otra perspectiva, investigadores como Susana (2014) argumentan que, “algunos contenidos de geometría como el teorema de Thales, y teoremas relativos a ángulos en la circunferencia, se reducen a un trabajo netamente algebraico, es decir, estos teoremas se transforman en fórmulas para la resolución de cuestiones algebraicas” (p.10).

En consecuencia a lo dicho anteriormente, se diseñan actividades a modo de propuesta didáctica, bajo la dirección de la teoría de situaciones didácticas propuestas por Brousseau (2007), con la intención de que se creen escenarios, donde este autor indica que el estudiante, debe tener la oportunidad de ser protagonista de su propio aprendizaje, es decir, que pueda conjeturar y cuestionarse sobre algunas actividades, que posibiliten direccionar aquellos elementos que le propicia el profesor, pues según esta teoría, deben generarse situaciones a-didácticas dentro del aula de clase, donde el profesor, le permita al estudiante interactuar con el medio, aclarando que esto no quiere decir, que el docente no estará presente, sino que su participación, no será de forma directa en este espacio, porque su tarea es desarrollar espacios, donde el estudiante no tenga la necesidad de acudir al docente, para validar las actividades que se estén desarrollando.

En vista de todos estos elementos que se deben tener en cuenta, la propuesta es radicada en la consideración de actividades, partiendo del uso de papel, lápiz y transportador en su primera y segunda sección, pues se reconoce, que estos elementos le permiten al estudiante construir diferentes objetos geométricos, además, se implementa el uso del software GeoGebra, el cual se lleva a cabo en la última sesión, permitiendo que se potencien aspectos que no se logran alcanzar

con los primeros instrumentos, lo que propicia, que la comprensión de la geometría sea de forma más dinámica y más precisa.

Uno de los resultados que se obtuvieron en este estudio, va direccionado a que los estudiantes, a pesar de presentar dificultades en las actividades de acción, se reconoce que se lograron generar espacios de protagonismo, donde ellos pudieron cuestionarse sobre las construcciones, que ellos mismos estaban desarrollando con ayuda de las directrices que les proporcionaba el profesor.

El segundo trabajo de investigación es planteado por Muruaga, Y., & Rosa, A. (2015), en el que se realiza la presentación de los resultados que corresponden al diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación, por medio de la cual, se pretende estudiar el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia y cuadriláteros cíclicos, situando esta actividad en la escuela secundaria. Algo importante que se reconoce en este trabajo de investigación, es la riqueza que proporciona la tecnología, en particular los SGD², ya que facilita, que el estudiante pueda reconocer propiedades invariantes, dentro de los objetos geométricos con más rapidez. “En este sentido, Marrades y Gutierrez (2000, 119-120) afirman que “el modo de arrastre es una de las características únicas de los SGD y que hace entornos mucho más poderosos que el aprendizaje tradicional con lápiz y papel. El modo de arrastre permite a los estudiantes ver tantos ejemplos como sea necesario en unos pocos segundos, y les proporciona un inmediato feedback que no puede ser obtenido en la enseñanza con lápiz y papel”. Esta característica facilita, trabajar con demostraciones en ambientes dinámicos, en los que los estudiantes pueden investigar y conjeturar, más de lo que pueden realizar con actividades en lápiz y papel (Paulek, Días, 2013).” (Muruaga, Y., & Rosa, A., 2015).

Con base en lo dicho anteriormente, se hace uso del software Geogebra, para llevar a cabo el desarrollo de esta actividad de estudio e investigación, la cual es sustentada bajo la teoría antropológica de lo didáctico propuesta por (Chevallard, 1999). En este estudio, se considera que la praxeología u organización matemática son parte fundamental en esta teoría.

En concordancia con el modelo pedagógico abordado, se desarrollan seis momentos didácticos: el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; el momento exploratorio del tipo de tareas; el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la elaboración nuevas técnicas; el momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas; el momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos que conforman la organización matemática construida; el momento de la evaluación de la praxeología construida. (Muruaga & Rosa, 2015, p.52).

En cuanto a los resultados obtenidos en este estudio, se encontró que el software de geometría dinámica, establece múltiples ventajas que no se privilegian con el uso del método tradicional de lápiz y papel, logrando que a través de herramientas como el arrastre, se puedan visualizar muchas características de las construcciones geométricas y por ende de las actividades presentadas, pues se puede observar que los estudiantes fueron capaces de utilizar propiedades, deducir y establecer relaciones que no se presentaban de manera explícita. Además, se comprobó que los estudiantes en muchos de los casos, establecen como tarea, sólo aquello que el docente le indica que debe resolver, llevando esto a depender siempre de las orientaciones del docente y no de ellos mismos, considerando así, que todo esto se asume como consecuencia de las costumbres y metodologías, por las cuales ha pasado este grupo de estudiantes.

Continuando con la construcción de este marco de investigación, existe un documento que, si bien no fue desarrollado en Colombia, si fue publicado por una revista colombiana, lo cual se implanta en las consideraciones nacionales.

Por consiguiente, el documento publicado por la revista Aibi, es planteado por Fernández-Nieto, (2018), el cual se caracteriza por tratarse de una monografía referente a la geometría y sus múltiples usos para la vida del ser humano y su enseñanza.

En esta monografía, se establece como objetivo general, valorar la importancia que recae sobre la enseñanza de la geometría, abordando esta investigación, desde la evolución histórica del mismo y partiendo de ello, para dar significado e importancia que posteriormente, permitirán identificar su aplicación en diferentes áreas de la ciencia, entre ellas, la medicina, la arquitectura, ingeniería civil, entre otras. (Fernández-Nieto, 2018).

Entre los aportes que proporciona este documento, se destacan los modelos de enseñanza ya mencionados. Luego de la descripción del modelo de Duval y los cinco niveles que establece Van Hiele para el desarrollo del razonamiento geométrico, se concluye que: “La enseñanza de la geometría es indispensable para la construcción, explicación y comprensión del espacio, y se incluye en los currículos del mundo en los diferentes niveles educativos como una de las áreas de las matemáticas. La enseñanza de la geometría, debe ir encaminada a la resolución de problemas y poseer relación con el entorno físico, para la construcción de aprendizaje significativo.”. (Fernández-Nieto, 2018, p.33).

Planteamiento del Problema

Desde un panorama histórico, la matemática es un medio que permite representar situaciones de la vida diaria, procediendo de algunos transmisores como la utilización de la geometría. Es por ello, que Según los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación

Nacional (1998), se establece que la evolución obtenida por la matemática y la educación matemática, son reconocidas en el campo escolar, como una forma de interpretar el mundo, desde la visualización que ofrece la geometría y la construcción de conceptos matemáticos pensados desde un punto de vista social. Específicamente la educación matemática puede ser considerada de la siguiente manera:

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy, como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual. (MEN, 1998, p. 14).

Ahora bien, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la geometría es vista, como un área de gran importancia pedagógica y didáctica, debido a que está compuesta de múltiples herramientas, que ayudan a que cada individuo cree y explore nuevas habilidades, para la interpretación de acciones, creadas por tradiciones culturales ya estipuladas en la sociedad, valorando el hecho, de que estructuralmente el mundo está denominado como geométrico. De esta manera, los seres humanos utilizan las herramientas proporcionadas por la geometría para interpretar, analizar, razonar, conjeturar y solucionar problemas, sin importar su origen, lugar, cultura, entorno o el contexto social al que pertenezca.

Es por ello, que el papel de la actividad geométrica, es fundamental en el ciclo escolar, en vista de que es en este ciclo donde se logra fomentar los pensamientos (numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional), ligado a los procesos generales (formulación y resolución de problemas; modelación, comunicación y razonamiento; comparación y ejercitación de procedimientos) y contextos (El de la misma ciencia, el de otras ciencias y el de la vida diaria), establecidos en el currículo colombiano. Sin embargo, existen diferentes problemáticas, en el

aprendizaje de los contenidos implícitos en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Una de estas problemáticas, es aterrizada en la didáctica, dado que el propósito primordial de esta, es la de ejercer una vigilancia epistemológica, que garantice que las transformaciones sufridas por el saber sabio (Objetos geométricos desde la naturaleza y su lenguaje formal) no hayan alterado su esencia y sentido, dicho de otra manera, el contenido que se desea enseñar, debe resultar accesible y pertinente a la estructura mental del estudiante. Así, la TD que se realiza en el aula de clase del mundo formal de la geometría (axiomas, teoremas, definiciones, etc.), en muchas ocasiones no es en su totalidad acertada y en algunos casos ni siquiera se considera la existencia de diferentes cambios de registros de representación, pues son omitidos por los docentes en el aula de clase, excluyendo así, el papel que constituye cualquier actividad geométrica, que es evidenciado por Sandoval (2008), como:

En toda actividad geométrica es indiscutible el papel que han tenido y siguen teniendo las representaciones geométricas como apoyo a la intuición, ya que son fundamentales en la comprensión de enunciados, en los procesos de exploración y conjetura, en la resolución de problemas y en la búsqueda de demostraciones, pues dejan "ver" lo que oculta el enunciado. (Sandoval, 2008, p.2)

En este sentido, la claridad que ejerce esta afirmación, constata que definitivamente el papel de la representación geométrica, suministra elementos conceptuales que contribuyen a la comprensión del objeto geométrico desde la intuición, pero también desde la motivación. Es por ello, que cuando el paso del saber formal de un objeto matemático, a un objeto de enseñanza no es significativo, ya sea desde el docente, recurso virtual o los mismos libros de texto, se genera una falta de elementos conceptuales, que pueden dificultar a que los estudiantes logren comprender y/o conocer el objeto matemático que se desea abordar. Esta falta de estímulos en las

redes conceptuales, puede ser producto de una falta de incentivos que motiven al estudiante a querer aprender del objeto de estudio, algo similar ocurre con la dificultad existente en los diferentes cambios de registro semióticos, inmersos en la transición de estos saberes, sin dejar de lado, que la enseñanza tradicional también es un factor que se está viendo fuertemente criticado, por la decadencia en cuanto a la participación por parte de los estudiantes, pues hay que entender que en el cambio de la sociedad, ellos se han visto fuertemente involucrados, y esto los obliga a exigir un modelos de enseñanza acorde a los avances de esa sociedad, por la que ellos se han visto afectados.

La educación colombiana ha sufrido transformaciones emblemáticas a través del tiempo desde una matemática moderna generadora de consecuencias vistas en la manera como los estudiantes empezaron a manipular mecánicamente las definiciones que se mostraban de la matemática, logrando que los alumnos dejaran de construir conjeturas e imaginaran las posibles soluciones que podrían presentar cualquier ejercicio matemático. También se dice que la forma en la que se presentaba la matemática contenía un exceso de formalidad o generalidad imposibilitando al estudiante en el proceso de relacionar la matemática con otras ciencias, incluso relacionarse con conceptos de la misma matemática.

Después de la implementación de la matemática moderna, surgen secuelas en la manera como se considera la matemática. Pues con el tiempo los individuos han presentado una predisposición actitudinal categorizarlas desde el rechazo, temor, prejuicios, etc.

Estas categorías se enfocan en las creencias que tradicionalmente pasan de generación a generación, permitiendo que actualmente se evidencie esa predisposición por parte de cualquier individuo hacia las matemáticas.

De esta manera, las personas que vivenciaron la matemática moderna adoptaron una postura acorde a la mala experiencia que obtuvieron en su proceso escolar, particularmente en esta área, propiciando que se optara por actitudes negativas que generaron un desinterés en aquellos estudiantes, forzándolos a la deserción académica que a largo plazo forjó un problema conceptual, actitudinal y académico.

A pesar de que ya no se utiliza esta matemática moderna en las aulas escolares, se sigue evidenciando las predisposiciones encaminadas por la actitud negativa que algunos estudiantes adoptaron de sus antepasados.

Es importante conocer estas problemáticas, por el hecho de que la adquisición de conocimientos en las matemáticas, es diferente de otras disciplinas, por estar compuesta de objetos más abstractos, motivo que lleva a que uno de los medios para acceder a esos objetos matemáticos sea las representaciones, al igual que la participación de la motivación. Cabe anotar que la complejidad de estos es ambigua, pues las representaciones requieren más atención y detalle que la motivación, además de generar un problema cognitivo en la realización de los cambios de registro tales como, gráfico, lenguaje simbólico, lenguaje natural, algebraico y las figuras geométricas, etc.

En este aspecto, las representaciones también hacen referencia a asociaciones y signos complejos, que se producen de acuerdo a unas reglas, que posibilitan la descripción de un sistema, un proceso y/o un conjunto de fenómenos. Allí, las representaciones semióticas, parecen como herramientas comunes, para producir un nuevo conocimiento y no sólo, para comunicar cualquier representación mental particular. (Duval & Sáenz, 2015).

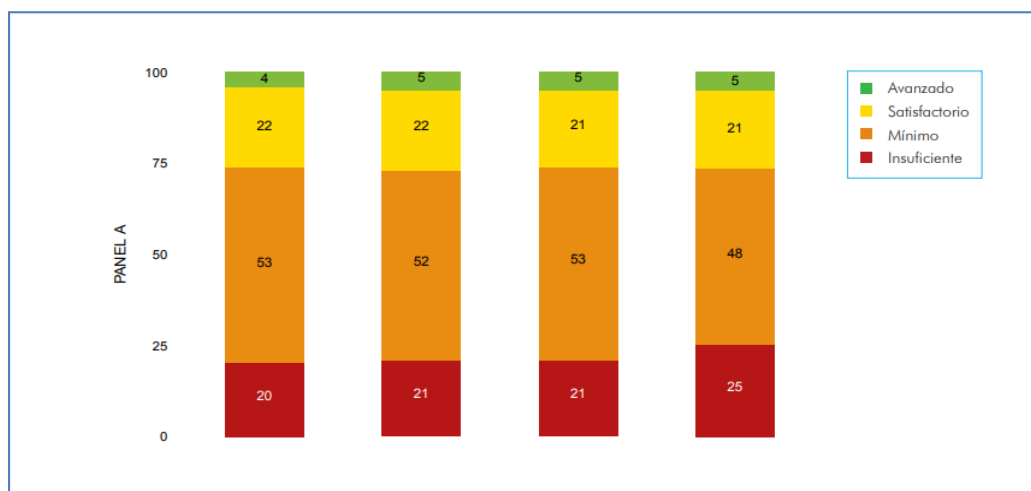
Con base en lo dicho anteriormente, y en relación con los conocimientos en matemáticas que se espera que tengan los estudiantes de noveno grado, se observa, que no están logrando

alcanzar una buena comprensión, ya que, para lograr entender un objeto matemático, éste se debe diferenciar de sus múltiples representaciones, además, debe ser capaz de reconocerlo en diferentes registros de representación (Duval, 2017).

La baja comprensión en matemáticas, en las pruebas Icfes Saber Noveno, se refleja en los bajos resultados para esta área, pues se puede evidenciar que, en los resultados de los años 2009-2014, son muy pocos los estudiantes, que logran alcanzar el promedio avanzado y muchos los que tienen resultados en un nivel mínimo, pues en estos años no se logra una mejora con base a los promedios establecidos. (Ver figura 1).

Figura 1

Resultados nacionales en las pruebas saber noveno área de matemáticas.



Nota: Resultados nacionales en las pruebas saber noveno área de matemáticas Fuente:

ICFES, 2006, p.25

Las mala comprensión de estudiantes colombianos, en relación con los objetos matemáticos y en particular los geométricos, también se pueden evidenciar en los resultados de las pruebas Timss, en donde la participación de Colombia en los años 1995 y 2007, nos permite patentar el bajo rendimiento, comparado con los demás países participantes, debido a que esta prueba, busca obtener información de calidad, sobre los logros alcanzados en cada uno de los diferentes contextos y en las culturas de los evaluados. (Ver figura 2).

Figura 2

Promedios Globales en Matemáticas, Octavo grado, TIMSS 2007.



Nota: Promedios Globales en Matemáticas, Octavo grado, TIMSS 2007. Fuente: ICFES2021,

p.18

Cabe recalcar que Colombia tuvo una mejora en las pruebas del año 2007, con respecto a los resultados obtenidos en el año 1995, y si bien se logró una evolución, aún sigue estando muy por debajo del porcentaje promedio establecido por las pruebas, mostrando que los resultados en geometría están entre los más bajos a nivel internacional. (Ver figura 3).

Figura 3

Evolución de los Promedios de los estudiantes colombianos en Matemáticas, Por Género, 1995-2007.



Fuente: ICFES, 2010, p.354

Los resultados de las pruebas Timss de Colombia, arrojados por las estadísticas ya anunciadas, contribuyen a la motivación por profundizar acerca de estudios que aporten a la construcción y mejoría de los saberes propios de esta área. Es por ello, que en este proyecto se abordará un tema poco investigado y trabajado por los docentes, así como el caso del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia.

De esta manera, la revisión de literatura alrededor del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, permite visualizar la relación existente de la misma, en concordancia con las problemáticas ya abordadas. A tal efecto, una de las dificultades más preponderantes en el aprendizaje matemático, es la falta de motivación y actividades que impulsen al estudiante a participar, y cambiar su actitud ante la enseñanza de este objeto geométrico.

Los ángulos inscritos en la circunferencia, facilitan la representación de situaciones en nuestro diario vivir, partiendo de algunas aproximaciones, tales como, las asociadas a estructuras semejantes a figuras geométricas (el marco de una ventana, una puerta, un reloj, etc.), que vistas desde un plano tridimensional, contribuyen también en el contexto escolar, ayudando a los estudiantes en el desarrollo de sus capacidades, para así afrontar las situaciones que se le presenten en la vida cotidiana.

En vista de todas las problemáticas enunciadas anteriormente, y la gran importancia que representa ante la sociedad, se formula la siguiente pregunta problematizadora:

¿Qué actitudes presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje, cuando se estructura una actividad, en función del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia, en Grado 9°, a partir de la gamificación, desde una perspectiva del modelo de Vann Hiele?

Objetivo General

Analizar las actitudes de los estudiantes mediante la escala de Likert, cuando se integran el modelo de Vann Hiele en un rediseño orientado en el Teorema de Ángulo Inscrito en la Circunferencia, en grado 9°.

Objetivos Específicos

- Abordar desde una perspectiva curricular, matemático y Didáctico-Semiótico, el aprendizaje del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia.
- Rediseñar una propuesta, que propicie el aprendizaje del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia, a través del modelo de Van Hiele.
- Diseñar una encuesta tipo Likert, para medir las actitudes de los estudiantes con respecto a la secuencia Aprendiendo a calcular ángulos en la circunferencia.
- Caracterizar las actitudes del aprendizaje de los estudiantes en torno al teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, cuando se emplean medios tecnológicos.

Capítulo 2

Marco Teorico

En este marco, se abordarán las teorías que sustentarán el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, (cuerda, diámetro y radio) en términos de referente curricular, referente matemático y referente Didáctico- Semiótico.

2.1. Referente Curricular

El desarrollo de la investigación, se realiza considerando las directrices, que ofrece el Ministerio de Educación, en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006). El objeto matemático de interés, se ubica en el ciclo de octavo-noveno, dentro del pensamiento espacial y sistemas geométricos, para el cual, se asocia el siguiente estándar: "Uso

representaciones geométricas, para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

2.1.1. Coherencia Vertical y Coherencia Horizontal

Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), mencionan, la complejidad que exige el desarrollo del aprendizaje, estableciendo una serie de relaciones, entre cada uno de los diferentes pensamientos de un mismo ciclo escolar (coherencia horizontal), o entre, cada uno de los niveles o ciclos escolares en el mismo pensamiento (coherencia vertical). Ver figura 4 y 5.

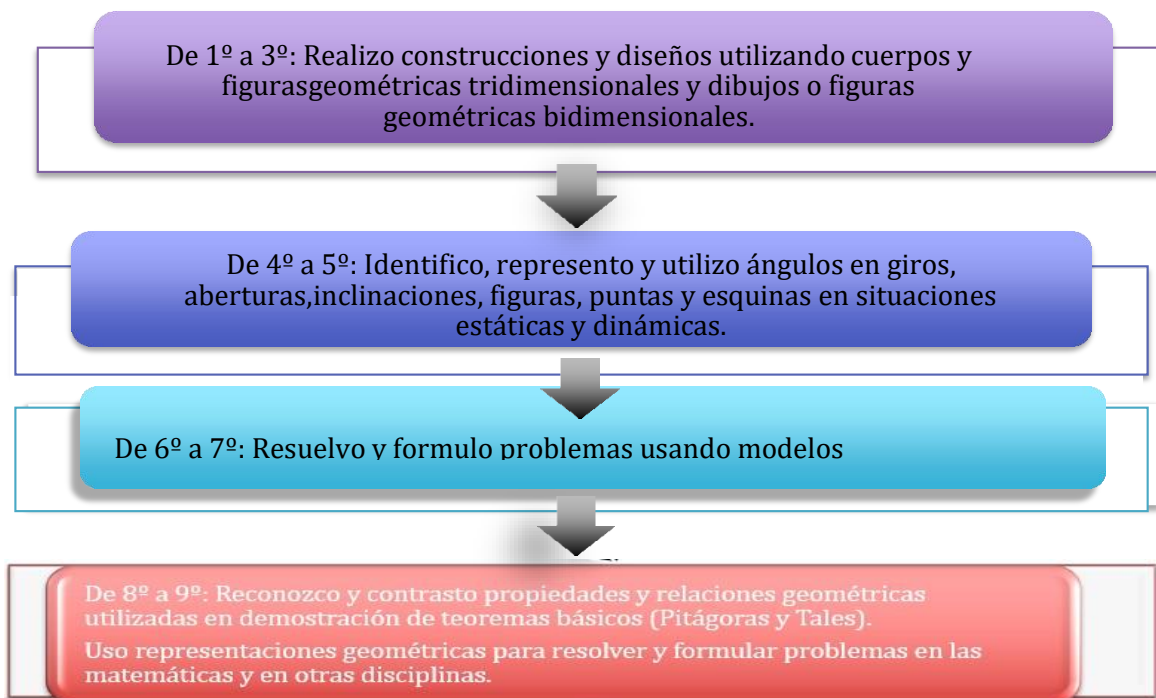
Tomando como referencia el objeto matemático que interesa en esta propuesta, y considerando que su presentación en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006), es de manera implícita, es importante reconocer su importancia dentro del desarrollo del conocimiento geométrico, pues permite comprender situaciones de la vida cotidiana, tal como lo es la construcción de las ruedas de los vehículos.

En relación a los conocimientos básicos de aprendizaje, presentados en los lineamientos curriculares de matemáticas en 1998, y retomados en los Estándares básicos de competencia matemática en 2006, y en particular en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, donde el ministerio de educación, propone los estándares que servirán de guía para la enseñanza de las matemáticas, se propone como primer estándar, “realizar construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales”, donde se espera que el estudiante empiece a construir aquellos objetos geométricos que componen el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia.

Luego de aprender a construir estos objetos, se da paso a que los estudiantes, puedan utilizar esos objetos, y primordialmente, se hace referencia al ángulo, es decir, que el estudiante, pueda aprender a identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas, en particular se resalta el trabajo de ángulos en figuras, para luego continuar resolviendo y formulando problemas usando modelos geométricos básicos, para posteriormente reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos, como el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia. Esta relación de elementos, permiten que el estudiante desarrolle habilidades para poder afrontar la enseñanza del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, además de usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas, puesto que el interés de este estudio es mostrar lo importante y aplicable que es el objeto matemático.

Figura 4

Coherencia vertical del objeto de estudio



Fuente: Elaboración propia

De 1° a 3°, los estudiantes construyen y diseñan bajo la noción de figuras tridimensionales y bidimensionales, que se relacionan con algunos objetos implícitos del teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, tales como el círculo y triángulo.

De 4° a 5°, los estudiantes logran identificar, representar y utilizar, los ángulos, desde un acercamiento al concepto de ángulo, brindando elementos conceptuales al estudiante, que permitirán fomentar la aprehensión en el momento de abordar el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia.

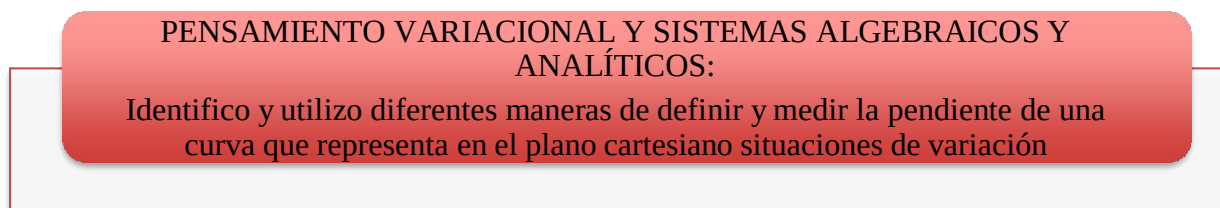
De 6° a 7°, los estudiantes realizan un trabajo importante, en cuanto a la resolución y el planteamiento de problemas relacionados con teoremas que comparten elementos con el tema de interés de esta investigación.

De 8° a 9°, los estudiantes, no solo se enfocan en el reconocimiento de las nociones o conceptos de los objetos matemáticos, que implícitamente componen a los teoremas de ángulos inscritos en la circunferencia, sino que puntualmente se abordan las propiedades y las relaciones geométricas, desde la formulación y resolución de problemas en la matemática y en otras disciplinas.

En la coherencia horizontal el pensamiento que se articula con pensamiento espacial y sistemas geométricos en el ciclo 8° y 9°, pensamiento variacional y sistema algebraico y analítico, ya que permite identificar la medida de segmentos y ángulos, los cuales son los elementos centrales en la realización y puesta en escena de la secuencia, a continuación, se presenta el estándar que hace trazabilidad.

Figura 5

Coherencia horizontal.



Fuente: Elaboración propia.

2.2. Referente Matemático

El libro tercero de los Elementos de Euclides, da un acercamiento al concepto de círculo y sus propiedades, además de abordar todos los elementos que se relacionan, y hacen parte de la construcción de este objeto matemático, tales como cuerda, radio, diámetro, centro, entre otros. Además de los elementos mencionados anteriormente, se describe que, las definiciones, pasan a ser teoremas demostrables, para los cuales se identifica el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia y su demostración, debido a que este teorema es el que interesa en esta investigación.

Las siguientes demostraciones, son tomadas del tercer libro de los Elementos de Euclides, y las definiciones de los conceptos a tener en cuenta para entender estas demostraciones, fueron consultadas, del libro que titula Geometría con aplicaciones y solución de problemas, escrito por Addison Wesley Longman, para el cual se toma la reimpresión hecha en 1998.

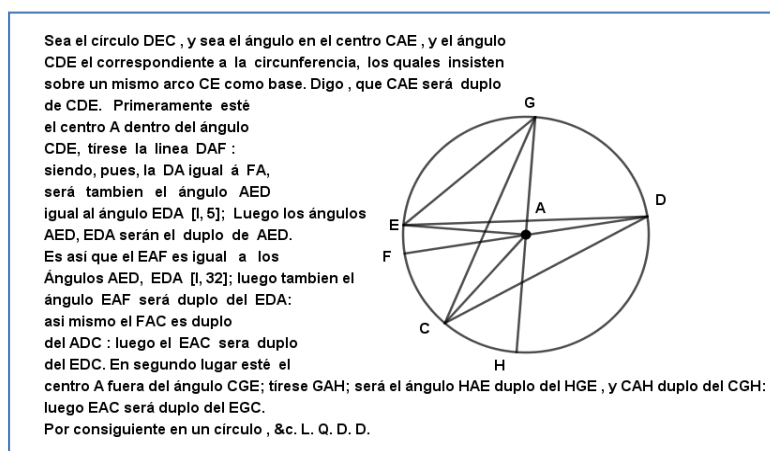
Tercer libro de los Elementos de Euclides, **Proposición 20:** En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

Para desarrollar la demostración de la proposición 20 del tercer libro de los elementos de Euclides, es necesario conocer y tener en cuenta las siguientes proposiciones.

- Proposición 5 del I libro (I,5) En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongados las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.
- Proposición 32 del I libro (I, 32) En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.
- Demostración:

Figura 6

Demostración del teorema



Fuente: Susana, G. (2014).

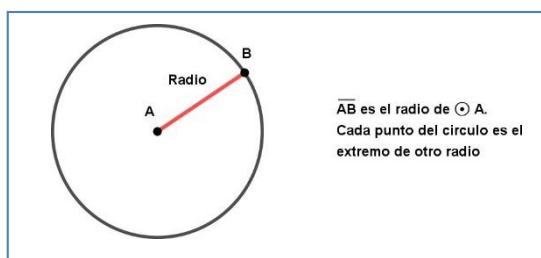
En la primera parte del teorema, se considera el caso, en que el centro de la circunferencia, se encuentra dentro de la región determinada por el ángulo inscrito en una circunferencia. Luego, en la segunda parte, se utiliza el mismo mecanismo de demostración para demostrar que el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, para los casos: El centro de la circunferencia se encuentra sobre una de las cuerdas que forma el ángulo inscrito. El centro de la circunferencia se encuentra en la región exterior del ángulo inscrito.

Es importante conocer, cada uno de los tres casos correspondientes al teorema de ángulos inscrito en la circunferencia y para proceder a demostrar cada uno de los 3 casos expuestos, se deben tener en cuenta cada una de las siguientes definiciones.

Definición 10.1. Un radio de un círculo, es un segmento, cuyos extremos son el centro del círculo y un punto del círculo. Ver figura 7.

Figura 7

Radio de una circunferencia

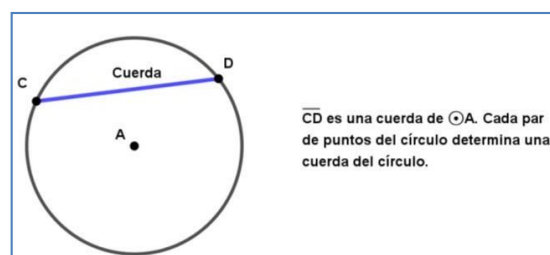


Fuente: Clemens, S., O'daffer, P., & Coona, T. (1984)

Definición 10.2. Una cuerda de círculo, es un segmento cuyos extremos son dos puntos del círculo. (Ver figura 8).

Figura 8

Cuerda en una circunferencia.

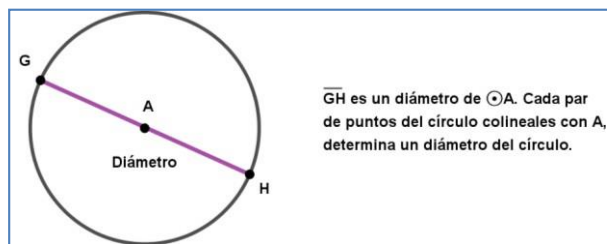


Fuente: Clemens, S., O'daffer, P., & Cooney, T. (1984)

Definición 10.3. Un diámetro de un círculo, es una cuerda que contiene el centro del punto (ver figura 9).

Figura 9

Diámetro de una circunferencia.

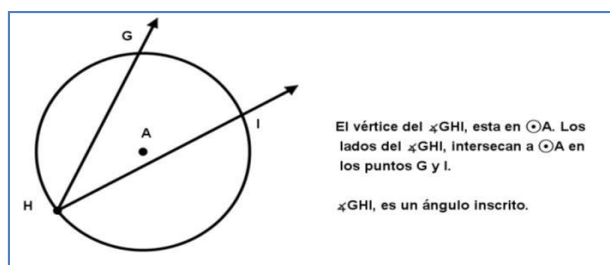


Fuente: Clemens, S., O'daffer, P., & Cooney, T. (1984)

Definición 10.6. Un ángulo inscrito, es un ángulo con vértice en el círculo y con lados que contienen cuerdas del círculo. (ver figura 10).

Figura 10

Ángulo inscrito en una circunferencia.

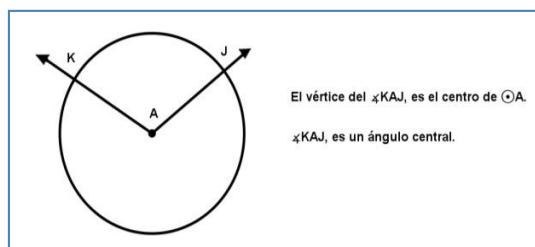


Fuente: Clemens, S., O'daffer, P., & Cooney, T. (1984).

Definición 10.7. Un ángulo central, es un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo. (ver figura 11).

Figura 11

Ángulo central de una circunferencia.



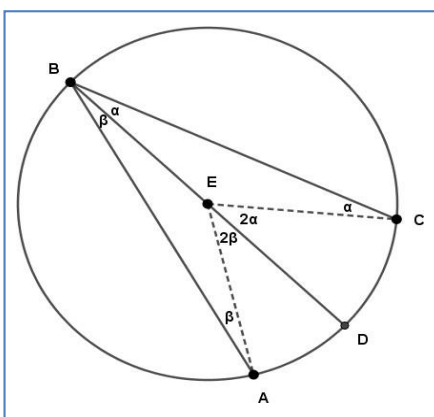
Fuente: Clemens, S., O'daffer, P., & Cooney, T. (1984)

Para la demostración del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, debemos considerar 3 casos: **1° caso:** El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región determinada por el ángulo inscrito. (ver figura 12).

Hipótesis: Sea $\angle ABC$ ángulo inscrito y $\angle AEC$ ángulo del centro, de la circunferencia de centro E.

Figura 12

Centro de la circunferencia al interior de la región del ángulo inscrito.



Fuente: Susana, G. (2014).

Tesis: $m(\angle ABC) = 1/2 m(\angle AEC)$

Demostración:

Se traza una recta BD.

Dado que $BE = AE = CE$ por ser radios, el triángulo BAE y BCE son isósceles, por lo tanto se tiene que:

$$m(\angle ABE) = m(\angle EAB) = \beta$$

$$m(\angle EBC) = m(\angle BCE) = \alpha$$

Así se tiene que:

$$m(\angle AED) = m(\angle ABE) + m(\angle EAB) = \beta + \beta = 2\beta \text{ (Por ser ángulo exterior al triángulo ABE)}$$

$$m(\angle CED) = m(\angle EBC) + m(\angle BCE) = \alpha + \alpha = 2\alpha \text{ (Por ser ángulo exterior al triángulo CED)}$$

Además, $m(\angle ABC) = \beta +$

α , Por lo tanto:

$$m(\angle AEC) = m(\angle AED) + m(\angle CED) = 2\beta + 2\alpha = 2(\beta + \alpha) = 2 \cdot m(\angle ABC)$$

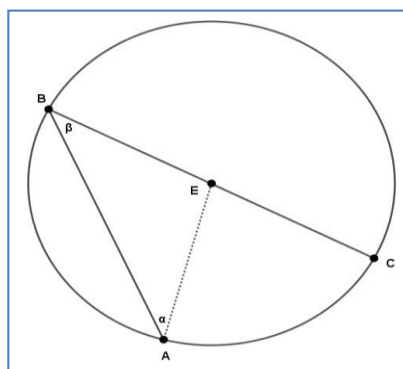
En consecuencia: $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle AEC)$

2° caso: El centro de la circunferencia se encuentra sobre una de las cuerdas que forman el ángulo inscrito. (ver figura 13)

Hipótesis: Sea $\angle ABC$ ángulo inscrito y el ángulo del centro $\angle AEC$, de la circunferencia de centro E.

Figura 13

Centro de la circunferencia en una de las cuerdas del ángulo inscrito.



Fuente: Susana, G. (2014).

Tesis: $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle AEC)$

Dado que: $BE = EA$ por ser radios, el triángulo ABE, es isósceles, por lo tanto, se tiene que:

$$m(\angle ABE) = m(\angle EAB) = \beta$$

Por ende, se tiene que:

$$m(\angle AEC) = m(\angle ABE) + m(\angle EAB) = \beta + \beta = 2\beta \text{ (Por ser ángulo exterior al triángulo ABE).}$$

Así se tiene que: $m(\angle AEC) = 2 \cdot m(\angle ABC)$

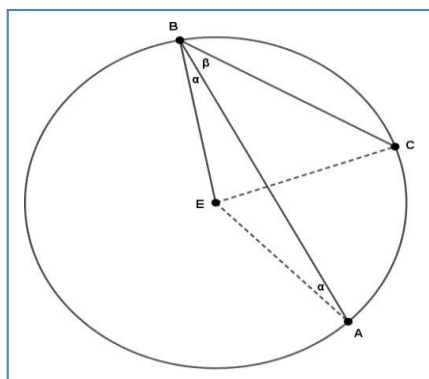
En consecuencia: $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle AEC)$.

3° caso: El centro de la circunferencia se encuentra en el exterior de la región determinada por el ángulo inscrito. (ver figura 14).

Hipótesis: Sea $\angle ABC$ ángulo inscrito y $\angle AEC$ el ángulo del centro, de la circunferencia de centro E.

Figura 14

Centro de la circunferencia en la región exterior del ángulo inscrito



Fuente: Susana, G. (2014).

Tesis: $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle AEC)$

Demostración:

Se traza el segmento BE.

Puesto que $m(AE) = m(EC) = m(BE)$, por ser radios, por ende, el triángulo ABE y CBE son isósceles.

Por lo tanto, se tiene que $m(\angle ABE) = m(\angle EAB) = \alpha$

También, se considera que $m(\angle ABC) = \beta$

En consecuencia, $m(\angle EBC) = \alpha + \beta$

De este modo:

$$m(\angle CEB) = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$$

$$m(\angle AEB) = 180^\circ - 2\alpha$$

De lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} m(\angle AEC) &= m(\angle AEB) - m(\angle CEB) = 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 2(\alpha + \beta)) \\ &= 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 2\alpha - 2\beta) \\ &= 180^\circ - 2\alpha - 180^\circ + 2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

$$m(\angle AEC) = 2\beta = 2 \cdot m(\angle ABC)$$

Por lo tanto: $m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle AEC)$.

Estos tres casos, representan las tres formas posibles, en las cuales se puede presentar el mismo teorema, en relación con la posición del centro de la circunferencia en la cual se encuentre

inscrito los ángulos, considerando que es menester que los estudiantes al conozcan el teorema, puedan identificar que cualquiera de los tres casos, está haciendo referencia al mismo teorema.

2.3. Referente Didáctico

En el proceso de aprendizaje de la geometría, se reconocen diferentes actividades cognitivas, como la conceptualización, razonamiento y resolución de problemas. Estas actividades, permiten adquirir ciertos conceptos, a través de diferentes tipos de representación, aportando a la distinción entre el objeto matemático y sus múltiples representaciones, que fortalecen la comprensión de la geometría en términos de su aprendizaje.

Los objetos geométricos, según lo expuesto por Duval (1999), pueden verse a través de representaciones mentales (imágenes y concepciones del individuo), que son exteriorizadas por medio de producciones constituidas por el empleo de signos (lenguaje natural, gráfico y algebraico) y permite la realización de un análisis a las representaciones, denominando a estos sistemas, como Semiosis y Noesis.

Por otra parte, D'Amore & Godino, (2006) mencionan que los objetos matemáticos, deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos, ligados a la resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas, es decir, que los objetos matemáticos deben estar relacionados a una serie construcciones culturales, que los individuos asocian directamente con situaciones o experiencias ya vividas para poder dar solución al problema que se haya planteado. En ese sentido, según lo expuesto por Duval (1999), hablar de Semiósisis denota una relación con la aprehensión o representación semiótica, donde se hace necesario la utilización de signos, ya sea de forma natural, gráfica o algebraica, la cual se emplean en aras de exteriorizar representaciones mentales.

Seguidamente, tomando la postura de Duval (1999), si se habla de Noesis se refiere a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto; es decir, la capacidad que se tiene para entender algo detectando las particularidades que tiene dicho objeto y poder inferir sus diferencias, cabe resaltar que la Noesis, podría verse como independiente de la Semiosis o que la comanda, pues no se puede entender un concepto, sino se hace a través de una representación, dicho esto se puede ver un gran vínculo entre la Noesis y la Semiósisis.

Ahora bien, el papel de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva, según Duval (1999), se relacionan con el contenido representado, los símbolos matemáticos, la variedad de formas de representar un mismo objeto matemático y la importancia de un cambio de forma de la representación. Sin embargo, las representaciones semióticas cumplen la función de tratamiento de la información y de objetivación o toma de conciencia; Además, cumple la función de comunicación y permite ver a las representaciones semióticas, como un soporte para las representaciones mentales.

En cambio, el papel de la Semiosis en el funcionamiento del pensamiento, consiste en emplear una variedad de signos que pueden ser utilizados, no tomando un signo u otro como referencia de un todo, pues la Semiosis es inseparable de una diversidad de signos disponibles, a los cuales Pierce (1867), clasifica como: Iconos, símbolos e índices. La representación Semiótica se puede decir qué es ese margen de libertad, que tiene el individuo para objetivar él mismo, una idea confusa. Además, se debe tener en cuenta que cumpla las tres actividades cognitivas fundamentales de la Semiosis. (Ver figura 15).

Figura 15

Signos y su Relación con los Objetos, Según Pierce (1867).



Fuente: Pierce (1867).

Debido a esto, se logra determinar la relación existente entre Semiosis (estudio de los signos) y Noesis (aprehensión conceptual de algo), pues las conexiones de estos elementos conciernen únicamente, a los sistemas que permiten las tres actividades de representación y no a todos los sistemas semióticos, desarrollando tres fenómenos, a raíz de los diferentes obstáculos que se presentan en el aprendizaje relativos a diferentes campos matemáticos.

La diversificación de los registros de representación semiótica, es el primer fenómeno, el cual, no establece una limitación con el lenguaje natural, sino que también existen otro tipo de representaciones semióticas que se aproxima a un objeto matemático. Puede que estos sistemas de representación sean diferentes entre sí, pero cada uno, plantea unas preguntas específicas sobre el aprendizaje.

El segundo fenómeno nos muestra la diferenciación entre representante y representado, siendo este una diferenciación en lo que ya está representado, formando una representación, que garantice relacionar otras representaciones e integrarlas en los procesos de tratamiento. Las coordinaciones entre los diferentes registros se anclaban a la existencia de dos sistemas en una misma representación que a su vez generan una coordinación. (Ver tabla 1).

Tabla 1

Clasificación Actual de los Tipos de Diferentes Registros en la Actividad Matemática Fuente: (Díaz, 2010, p.14)

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONALES Los tratamientos no son algorítmicos	Lengua natural Asociaciones verbales (conceptual) Formas de razonar Argumentación a partir de observaciones, de creencias. Deducción válida a partir de definiciones o de teoremas.	Figuras Geométricas planas o en perspectivas (configuraciones en dimensiones 1, 2, o 3) Aprensión operativa y no solo perceptiva. Construcción con instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONALES Los tratamientos son algorítmicos	Sistemas de escritura: Numéricas (binarias, decimal, fraccionaria) Algebraica Simbólicas (lenguaje formal) Cálculo.	Gráficos Cartesianos: Cambios en el sistema de coordenadas. Interpolación extrapolación

Las tres actividades cognitivas de representación inherentes a la Semiosis se encuentran definidas de la siguiente manera: la primera se relaciona con la formación de representaciones (los signos); ya sea para expresar una representación mental o evocar un objeto real. La segunda actividad cognitiva se denomina “tratamiento” y se refiere a la transformación de la representación dentro del mismo registro. Por último, tenemos la “conversión”, que hace alusión al cambio de un registro a otro.

La noción de representación es tan esencial como la de comportamiento. Es por ello, que se plantea una clasificación considerada como representaciones, permitiendo así una comprensión de las relaciones existentes entre representaciones mentales, representaciones computacionales y representaciones semióticas, generando una contingencia de una clasificación de estos diferentes

tipos de representación. De acuerdo con Duval (1999), surge la oposición interna y externa, y la oposición consciente y no consciente, como consecuencia del estudio de las representaciones.

La oposición consciente y no consciente consiste en una observación que se permite acatar de manera consciente, dada una situación y lo que no se logra percibir en la situación es lo que se determina como no consciente.

La oposición externa, es la encargada de comunicar lo que está directamente visible y observable cumpliendo, dos funciones cognitivas, la función de objetivación, como todas las representaciones conscientes, la función del tratamiento y la interna son las representaciones que son propias del sujeto y que no se comunican a través de representaciones externas.

Los tipos y funciones de representación se relacionan de la siguiente manera:

- Lo consciente en relación con la interna es un tipo de representación mental que cumple una función de objetivación.
- La externa en relación con lo consciente es de tipo de representación semiótica que cumple tres funciones: la de objetivación, expresión y tratamiento intencional.
- La no consciente se relaciona con la interna, mediante un tipo de representación Computacional y una función de tratamiento automático.

Los distintos registros de representación se diferencian no solo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de menciones en que puede efectuarse esta asociación (Duval, 1999).

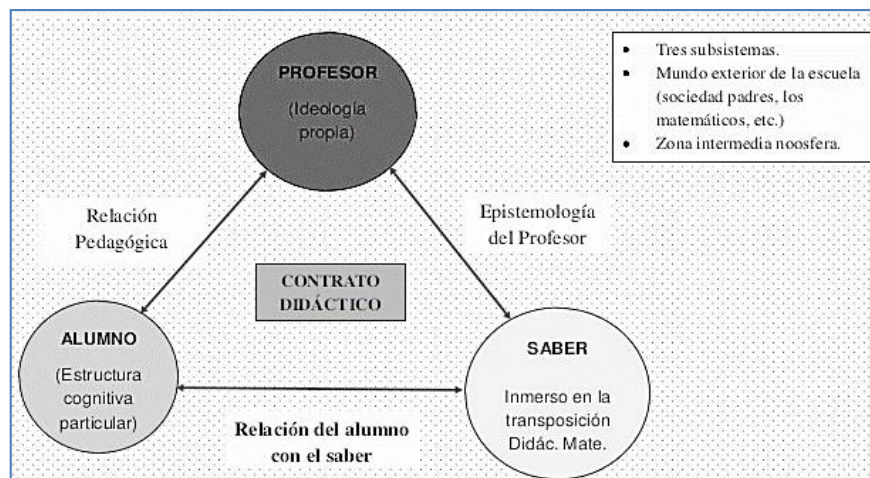
Es por ello que, para el docente abordar estos fenómenos en la movilización del teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, se requiere de un lente teórico como lo es la didáctica.

La didáctica de una disciplina, es la ciencia que estudia, para un dominio particular (en nuestro caso las ciencias y las matemáticas), los fenómenos de las enseñanzas, las

condiciones de la transmisión de la “cultura” propia a una institución (específicamente, las instituciones científicas) y las condiciones de la adquisición de conocimientos por parte de un aprendiz. (Joshua & Dupin, 2005, p.188).

De esta aproximación podemos mencionar, que la didáctica gira alrededor de un propósito práctico; su preocupación, es la elaboración de estrategias, que permitan la construcción de intervenciones adecuadas del objeto matemático que se desee abordar (los teoremas de ángulos inscritos en la circunferencia), desde la realidad que proporciona el aula; sin embargo, al considerar abordar el objeto de estudio (actividades de enseñanza y aprendizaje) la didáctica, necesariamente va más allá del aula, debido a que los fenómenos de las enseñanzas no son perceptibles inmediatamente por la conciencia, de esta manera, las actividades que se planteen en el aula, deben pensarse desde una perspectiva analítica.

Una de las tareas de la didáctica, es la de ejercer una vigilancia epistemológica, que garantice que las transformaciones sufridas por el saber sabio, no lo han convertido en algo irreconocible, matemáticamente hablando, y desprovisto de sentido, viendo qué elementos mínimos son necesario respetar para que las transposiciones realizadas conserven el sentido del concepto y no lo desvirtúen. (Chevallard, 1998) En este orden de ideas, la tarea de la didáctica, da paso a el papel que juega la TD, en términos de hacer del saber sabio, un saber enseñable, aplicando diferentes estrategias metodológicas, donde el docente es capaz de movilizar un objeto matemático. (Ver figura 16).

Figura 16*Esquema de la Transposición Didáctica*

Fuente: Chevallard y Joshua, 1982.

En la perspectiva constructivista, los niños comparan, clasifican y ordenan, en el espacio y en el tiempo, logrando retroalimentar sus conocimientos, a través de la experiencia que proporciona, la interacción de los niños con los objetos matemáticos.

En este sentido, aprender matemáticas implica ver el mundo desde un punto de vista matemático, y enseñarlas, debe brindarle al estudiante un ambiente propicio, donde tenga la oportunidad de manipular objetos, activar la capacidad mental propia, ejercitar su creatividad, divertirse con su propia actividad mental, reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, adquirir confianza en sí mismo al verse capaz de resolver, y comunicar de manera verbal y escrita los resultados encontrados en un lenguaje común que se convierte precisamente en matemático. Para lograr lo anterior, se manifiesta una mecánica conocida como Gamificación.

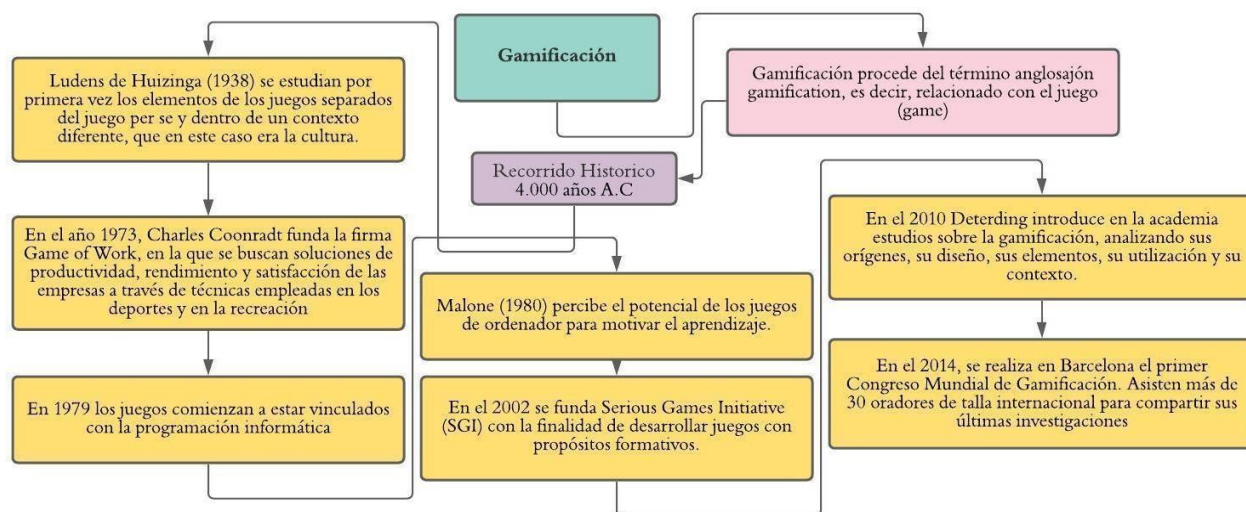
En el marco de la estructuración de este orden de ideas, la Gamificación es un conjunto de herramientas y estrategias, relacionadas con los videojuegos y software o anglicismo, que es visto como flamante en las regiones lingüísticas más grandes y culturalmente más cohesionadas del mundo en los territorios americanos, siendo que este término proviene de lo determinado como Game (Juego) o distracción y entretenimiento, según el inglés antiguo, esta declaración permite

derivar ciertas evoluciones que a lo largo de la historia de la Gamificación se logran evidenciar.

(Ver figura 17).

Figura 17

Historia de la Gamificación.



Fuente: (Torres, A. (2016))

La Gamificación busca utilizar elementos del juego para atraer al alumno, aumentar su motivación y su interés, por tanto, puede aplicarse a cualquier asignatura para llamar la atención de los niños y que participen de una manera activa. (Alonso & Hidalgo, s.f.).

De esta manera, la Gamificación contribuye en el mejoramiento de la educación y facilita al estudiante el aprendizaje de las matemáticas, haciendo el trabajo del docente más llamativo para el siglo XXI. También, proporcionan sistemas interactivos que contribuyen a ampliar las representaciones de un concepto e interactuar con diversos sistemas de representación.

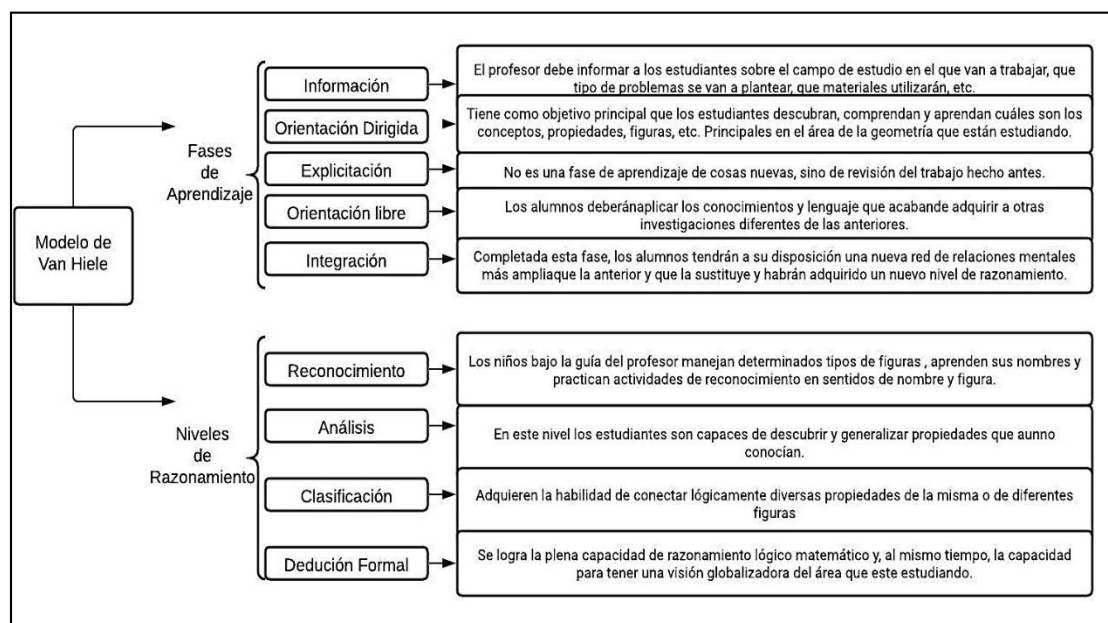
La finalidad de la Gamificación es lograr que las personas se incluyan en cada una de las actividades a realizar, produciendo un armazón que contribuya a la alianza que se espera alcanzar en los procesos educativos, fomentando el comportamiento colaborativo y competitivo entre los estudiantes. (Gonzales, 2014).

Ahora bien, uno de los objetivos es rediseñar una propuesta, que propicie el aprendizaje del teorema de ángulo inscrito en la circunferencia, a través, del modelo de Van Hiele utilizando Gamificación, pero también considerando que la educación va más allá de tener una visión, en el cómo llamar la atención del estudiante, en términos de su estado anímico, el agotamiento mental y físico que puede proporcionar la comprensión de un objeto matemático. “La Gamificación utiliza la predisposición natural del ser humano hacia la competición y el juego para hacer menos aburridas determinadas tareas que, gracias a estos métodos, pasan a ser realizadas de forma más dinámica y efectiva.” (Prieto Andreu, 2018, P.83).

En este sentido, el docente debe considerar que un método no podrá lograr que todos sus alumnos logren comprender el conocimiento que se desee movilizar y que a su vez tampoco logrará darle solución a los diferentes problemas que se le presenten.

El modelo de Van Hiele, es un modelo bastante acertado para lo que en este proyecto se desea abordar, pues la orientación que establece ayuda al docente a reconocer elementos que lo llevarán a entender cómo debe ser su participación en la movilización de este objeto matemático. Por otra parte, la inclusión de un modelo que tenga una buena fundamentación como lo es el modelo de Van Hiele, gestiona una manera reflexiva de trabajar.

Puede decirse que alguien lía alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza, pero, aun así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance un nivel superior de pensamiento. (Van Hiele (1955), p. 289)

Figura 18*Modelo de Van Hiele*

Fuente:(Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990))

La articulación de la Teoría de la TD, relacionada directamente con el campo semiótico, permite centrar la atención en el estudio de las representaciones, desde la movilización de un objeto de estudio, que parte de un saber sabio a un saber enseñable. En este orden de ideas, es importante considerar que el modelo de Vann Hiele esclarece elementos que serán considerados en la transición del conocimiento perteneciente al objeto de estudio influenciado por una estrategia motivacional conocida como gamificación, que contribuirá a que la enseñanza sea más atractiva para el estudiante, fortaleciendo sus actitudes en la visualización del objeto de estudio.

Capítulo 3.

Metodología de la Investigación

En esta sección, se presenta una propuesta de aula como un rediseño de una secuencia didáctica y se describen las actividades y momentos involucrados en la formulación de la propuesta.

3.1. Tipo de Investigación

La investigación es de tipo cualitativa, la cual permite deliberar la naturaleza profunda del fenómeno y asimismo posibilita la observación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren internamente de dichos fenómenos.

3.2. Metodología

La ingeniería didáctica como metodología de investigación surge a principios de la década de los ochenta, y sus nacimientos se da en la didáctica de la matemática, se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue,1995, p.36).

Las cuatro fases corresponden a lo siguiente: Primero, un comienzo con análisis preliminares, en esta fase se investigan los antecedentes, que permitieron la construcción de la secuencia de actividades a-didácticas para el aprendizaje por parte de los alumnos de los teoremas de ángulos inscrito en la circunferencia y ángulo central.

Segundo, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, en este momento, se desarrolla un análisis detallado del diseño de la situación que se desea presentar.

El tercer momento, se considera como la experimentación, corresponde a la puesta en práctica de la situación didáctica, es decir el diseño. En este momento, la observación y recolección de la información juega un papel bien importante, porque ayuda a analizar comparativamente, lo que se esperaba lograr y lo que actualmente se está construyendo. El cuarto momento es el de análisis a posteriori, el cual consiste en la confrontación de las hipótesis establecidas en el análisis a priori y los resultados del momento de experimentación. Además, una de las características de la metodología de ingeniería didáctica es que su modo de validación es interno, es decir, desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última” (Artigue, 1995, p.44).

Por consiguiente, se emplea la micro ingeniería como instrumento metodológico que permitirá responder al objetivo de determinar de qué manera influye en la enseñanza, la inclusión del rediseño, a partir del modelo de razonamiento geométrico de Vann Hiele y la Gamificación, en la enseñanza de el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, considerando los diferentes registros de representación semiótica, en el grado 9º, en una Institución Educación, en el año 2020.

La ingeniería como método de investigación se orienta en un esquema basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencia de enseñanza (macro- ingeniería). Pero a su vez también se caracteriza por el registro de los estudios de caso y por validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre análisis a priori y a posteriori. (Micro- ingeniería). (Artigue et al., 1995, p. 36)

3.3. Avance de estudio

La Configuración del diseño conlleva 4 ejes transversales, lo tecnológico, lo didáctico, lo curricular y lo matemático, considerando el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia como objeto de análisis para el cual se pretende lograr reconocer las propiedades y características del objeto.

Este proyecto articula parte del modelo de razonamiento de Van Hiele, abordando el primer y segundo nivel de razonamiento y las cinco fases que componen a cada uno de estos niveles, siendo que uno de los propósitos de este proyecto, es que los estudiantes logren reconocer explícitamente el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, a través de, Estrategias motivacionales, Complementando así, que objetivamente, el rediseño también, estará ceñido a los referentes legales (lineamientos curriculares, desde las propuestas del ministerio, procesos y pensamientos, los estándares básicos de competencias, una perspectiva didáctica desde el modelo de Van Hiele), además se articular momentos gamificados, en pro de establecer una estrategia que motive al estudiante en su aprendizaje. Estas estrategias se presentarán al terminar cada tarea, pues el principal objetivo de la gamificación, es precisamente dar incentivos, y/o presentar el conocimiento por niveles, entre otros, de manera que cada estudiante tenga la motivación por querer participar en cada actividad y ser partícipes de conocimientos que se consideran importantes para su desarrollo cognitivo, cabe recalcar, que al final de toda la presentación de actividades, también se presentarán premios o incentivos a los estudiantes que desarrollen todas las tareas, permitiendo que se establezca una articulación entre la teoría didáctica de Vann Hiele, y la gamificación.

En este sentido, se considerarán como ejes de orientación a los niveles de razonamiento de Van Hiele, en el análisis a priori de las actividades y tareas. Este modelo, proporciona dos

posturas que pueden ser abarcadas en el proceso de razonamiento geométrico, en términos de la enseñanza y aprendizaje; la primera, se relaciona con el estudiante, pues delimita la evolución del razonamiento de los estudiantes y posibilita reconocer la diversidad de razonamientos de los educandos; La segunda, se enmarca en el docente, siendo que orienta desde niveles y fases, algunas pautas que permiten el reconocimiento de elementos fundamentales de la diversidad de razonamientos por parte de los estudiantes, contribuyendo a que el docente pueda pensarse la evolución que podrían tener los estudiantes, y así lograr en ellos un aprendizaje significativo. En relación con esto, esta investigación está más relacionada con la primera postura, debido a que el interés es determinar las actitudes de los estudiantes en relación con el objeto de estudio.

3.3.1. Niveles de razonamiento Geométrico de Van Hiele

Los niveles que componen al modelo de razonamiento Geométrico de Van Hiele, están definidos como, Nivel 1: Reconocimiento o visualización, Nivel 2: Análisis Nivel, 3: Deducción informal u orden, Nivel 4: Deducción y Nivel 5: Rigor. Estos niveles constituyen, la evolución que gradualmente logran posiblemente los estudiantes, aclarando, que el nivel mínimo es el nivel 1 y el máximo es el nivel 5.

En el Nivel 1 se pretende que el individuo logre reconocer, algunos objetos matemáticos que permiten la construcción del teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, tales como, el concepto de circunferencia, ángulo, cuerda, etc. Sin embargo, en este primer nivel, no se pretende que expliquen las propiedades o componentes que atañen a estos objetos matemáticos, pues el objetivo primordial es la visualización y comparación de los objetos con entornos cotidianos.

En el Nivel 2 lo que se espera tener en cuenta para el análisis a priori, es que el individuo pueda reconocer y analizar los diferentes objetos matemáticos que constituyen al teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, agregando también, al reconocimiento de las propiedades

particulares de este teorema. Puede que, en el reconocimiento de estas distinciones y representaciones, el individuo, recree unas posibles clasificaciones o relaciones entre los objetos matemáticos implícitos que hacen parte del Teorema, con lo cual, a través de la manipulación y experimentación con el medio se fomentarán no de manera directa. propiedades que rigen al teorema.

3.3.2. Fases del Modelo de Van Hiel

Las fases del modelo de Van Hiele, brinda unas orientaciones conceptuales que se tendrán en cuenta en la elaboración de un rediseño, en pro de establecer un seguimiento de los estudiantes desde el proceso que puedan tener en los Niveles de Razonamiento geométrico, es decir, Nivel 1 y Nivel 2, cabe aclarar que, para cada uno de estos Niveles ya mencionados, se incluirán las todas las fases de razonamiento. En este sentido, las fases se estructuran de la siguiente manera, Fase 1: Información, Fase 2: Orientación dirigida, Fase 3: Explicitación, Fase 4: Orientación libre y Fase 5: Integración.

A Continuación, se proyectarán las fases del modelo de van hiele, en relación con el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia.

En la Fase 1, se espera que el docente logre recopilar una serie de información, a manera de seguimiento, con respecto a la evolución y trayectoria académica de sus estudiantes, pues es importante conocer qué elementos han sido abordados y que objetos matemáticos en relación a el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, han tenido un aprendizaje significativo. En ese orden de ideas, el conocimiento que estos estudiantes tengan, contribuirá a la aprehensión del objeto matemático, para posteriormente pasar a la Fase 2. Esta fase 1, será abordará solo en el primer Nivel dado que esta será la base para la construcción de otros Niveles. La información se recaudará con una actividad de diagnóstico, en la que se formularán preguntas, originarias de los

posibles conocimientos que los estudiantes deberían tener acorde a los Estándares Básicos de Competencia, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional.

3.3.3. Fases Relacionadas al Nivel 1

La Fase 2, es una de las fases más fundamentales, en la sucesión del proceso de enseñanza. La configuración del diseño partirá con la realización de actividades exploratorias, relacionadas a los objetos matemáticos que constituyen al Teorema de ángulos Inscrito en la circunferencia, tales como lo son los ángulos, la circunferencia, la cuerda, diámetro y radio, desde situaciones aterrizadas a un contexto cotidiano, con el objetivo de direccionar al estudiante a la consideración de partes del Teorema.

En la fase 3, se estructura un espacio de reflexión y ponderación, donde se entablará un afianzamiento de conocimientos, permitiendo generar una discusión entre los estudiantes y el docente, acerca de las consideraciones que han sido visualizadas alrededor de los objetos matemáticos pertenecientes al Teorema.

La Fase 4, origina la consolidación y garantía de los objetos matemáticos, que constituyen al teorema, llevando a cabo la resolución de problemas en contextos cotidianos, utilizando como herramienta fundamental a los conocimientos obtenidos a lo largo del transcurso del Nivel 1.

La Fase 5, se encargará de establecer una serie de recopilaciones generales, sin generar nuevos conocimientos. Dirigiendo los diferentes sumarios de información, a ser un apoyo para la integración de estos conocimientos en el estudiante.

3.3.3. Fases Relacionadas al Nivel 2

Fase 2, en esta se proponen particularidades de conceptos que definen a los ángulos, desde actividades que consideren la medida de ángulos y la longitud del arco de circunferencia, centrado en el vértice. También se espera abordar el diámetro como segmento de recta que pasa

por el centro, uniendo dos puntos opuestos de una circunferencia. Otro elemento que se propondrá será la cuerda como segmento con sus extremos sobre una curva.

Fase 3, en esta los individuos podrán expresarse mediante el mecanismo de respuestas abiertas. Estas respuestas, serán el producto de una serie de formulaciones acorde a los objetos matemáticos anunciados en la fase anterior que se le presentarán al individuo al momento de enfrentarse al diseño.

Fase 4, en esta se proponen actividades que pretenderá mostrar situaciones con preguntas puntuales de ángulo, longitud, diámetro, etc. Que serán el prerrequisito para pasar a la siguiente situación.

Fase 5, en esta se muestran de manera global todos los conceptos expuestos a lo largo del diseño. No se pretende generar nuevos conocimientos, sino recopilar la información desarrollada a lo largo de este nivel.

3.4. Contextualización

3.4.1. Historia del territorio Indígena

Kliichaw ciudad construida en otro tiempo por el pueblo nasa, dicha en ese tiempo: kla kshaw perteneciente al gran cacicazgo de Pitayo. Cuando llegó el invasor había plantaciones de plátano y frutas en abundancia, sembrado por el pueblo NASA.

El territorio donde está asentada la comunidad indígena de Guadualito del municipio de Santander de Quilichao hacía parte del gran cacicazgo de Pitayó bajo la autoridad del gran cacique Sa't Tama de la estrella existen huellas como los petroglifos en piedra, nombres de sitios en idioma nasa yuwe. Con la llegada de los españoles estas tierras fueron arrebatadas por los colonos, pero basándose en luchas hoy existe el cabildo de indígenas. El cabildo es una entidad

pública de carácter espacial y dentro de su territorio tiene autonomía, previa consulta con la Asamblea quien es la máxima autoridad.

En el ámbito organizativo hace fuimos fundadores de la ACIN (Asociación de Cabildos Indígenas del Norte del Cauca), CXAB WALA KIWE, por ende, hacemos parte del (Concejo Regional Indígena del Cauca) CRIC, y ONIC, (Organización Indígena de Colombia).

Actualmente estamos en un proceso de construcción del proyecto de vida Sa't Fxi'ñy kiwe. Tierra escrita por los caciques o sea a Sa't Tama. Algunos comuneros son nativos, hay muchos vestigios que demuestran que antes y después de la llegada de los españoles han existido nasas, por ejemplo, la cueva del indio en el Barrio El Porvenir, en la vereda Jagüito, los petroglifos en Lomitas, Alto Paraíso, la Agustina... últimamente el profanado cementerio de los llamados por algunos científicos caratoes, ubicado en una de las muchas empresas ubicadas en el municipio de Santander que llegaron como producto de la Ley Páez. Además, el nombre Quilichao (Kliichaw en idioma nasa yuwe), es una palabra en algunos casos compuesta y tiene varios significados como:

Algunos historiadores dicen que Quilichao significa “tierra de oro” en idioma quechua, - será verdad -por qué no se menciona a las nasas, o al pueblo Pipshaw. Según el mayor Luis Rivera Ramos (q.p.d.), en estas tierras hubo un cacique llamado Klichi razón por la cual se optó por colocarle el nombre a esta región en honor al Sa't.

La historia del régimen oficial ennoblece las masacres del invasor y condena a los legítimos, legendarios, mártires y héroes como Atahulpa, Tupac Amaru, Kintin Lame, Juantama, La Gaitana, Payan, Jamundí. Álvaro Ulcue y muchos otros que derramaron su sangre, presentes en nuestra memoria y que desde el infinito nos guían; en las ciudades donde vivía y gobernaba hoy existen estatuas de bandidos y ladrones como Sebastián de Benalcázar, Balboa. A pesar de

las grandes masacres que ocurrieron en ese entonces contra los indígenas, quedaron semillas de esos pueblos; por eso es que hoy por hoy en Cali, Bogotá, Popayán, Medellín las raíces han vuelto a retoñar, naciendo nuevas cabildos y organizaciones indígenas entre ellos los llamados cabildos urbanos.

Antes de la llegada de los españoles había ciudades, pero existía una relación armónica con el campo. Cristóbal Colón no descubrió América, Simón Bolívar tampoco libertó cinco naciones; si lo hizo, lo realizó para las minorías con privilegios no para nosotros.

Como amerindios pretendemos desarrollar un modelo educativo propio pagado por el estado, de acuerdo a nuestro plan de vida, que desde que llegó el invasor fue interrumpido, luego intervenido, a lo largo de una penosa y dolorosa imposición; primero en nombre de Dios que creemos que es justo y que jamás atacaría, maltrataría, explotaría, engañaría al pueblo; después por medio de leyes hechas por gobernantes y legisladores del régimen estatal, a su amaño que sólo buscan fortalecer sus intereses entre ellos el capitalismo salvaje.

3.4.1. Contexto Poblacional

Institución Educativa Agropecuaria Kliichaw Sek

Figura 19

Escudo y Colegio Kliichaw Sek



Fuente: PEC, *Kliichaw Sek*, (2021).

Tabla 1

Misión y visión de la Institución Educativa Agropecuaria Kliichaw Sek

Misión.	Visión.
Brindar educación preescolar, básica primaria, básica secundaria y media en las sedes de la I.E Kliichaw Sek, con modalidades que contribuyan a mejorar los usos y costumbres de los pueblos, para ello podrá hacer convenios, articulaciones, mingas, con instituciones, universidades a nivel local, municipal, departamental e internacional siempre y cuando contribuya a fortalecer los planes de vida dentro del territorio nasa, en Colombia.	Estudiantes íntegros, que contribuyan a mejorar los planes de vida de su entorno. Que los docentes sean en lo posible licenciados, especialistas pertenecientes al pueblo nasa que difundan los usos y costumbres de los pueblos. Que la comunidad educativa tome conciencia de la importancia de la educación de acuerdo a su entorno, usos y costumbres.

Nota: Elaboración propia

Tabla 2

Objetivos del colegio

Objetivos del colegio	
Objetivo General	Objetivo Específico
Impulsar y consolidar procesos de educación de acuerdo a los usos y costumbres del pueblo nasa escolarizada y no escolarizada que fortalezcan el plan de vida del pueblo nasa	n calidad la educación con cobertura total a vientes. Tener una comunidad capacitada. la identidad cultural y los planes de vida.

Tabla 1

Perfiles Académicos

Tabla 4

Perfil del estudiante	Perfil del docente
Estudiantes integrales como personas identificadas con los principios y valores de los Proyectos de Vida de los pueblos y comprometidas con el proceso organizativo, cultural, ambiental y productivo de la comunidad	El desarrollo del PEN implica un docente que tenga una concepción y práctica que se identifiquen críticamente con la cosmovisión Nasa pero respetar al otro y trabaje en la construcción y reconstrucción de haberes y prácticas comunitarios para ello no debe escudarse en ideas foráneas que a lo largo de la historia han contribuido a acabar con los planes de vida de los pueblos originarios por lo tanto su labor es más en el sentido de orientar, de acompañar de motivar los procesos de los estudiantes comunidad antes que de conducir e impartir. Todo lo cual implica por lo menos los siguientes elementos de perfil: SER: Identidad y compromiso con su oficio, con las comunidades y con los principios y valores propios de la cosmovisión nasa para ello debe dejar atrás paradigmas implementadas por más de 500 años. SABER: conocimiento de los fundamentos de las ciencias y de la vida de las comunidades a nivel de pensamiento pre categorial y fundamentación en pedagogía del aprendizaje. SABER HACER: dominio de trabajo a partir de la actividad de aprendizaje propio de los estudiantes, altos niveles de lectura y escritura, dominio de trabajo por proyectos, liderazgo participativo en los diversos procesos con los estudiantes y la comunidad,

	capacitación de gestión y administración, aplicación apropiada del método científico. SABER: trabajo comunitario, manejo del tiempo, entusiasmo por lo que hace, capacidad de asombro y autoaprendizaje.
--	---

Tabla 5

Ubicación De La Institución Educativa Kliichaw Sek
Territorio Ancestral Indígena De Guadualito: El resguardo indígena de guadualito, está localizado en el municipio de Santander de Quilichao, en la zona norte del departamento del Cauca.

Tabla 6

Contexto local.	Contexto Regional, Nacional e Internacional.
La sede central y “principal” se encuentra localizada en la vereda los Pinos Resguardo Indígena Guadualito, con una población en su mayoría indígena nasa por ello es que el proyecto educativo comunitario se le ha llamado P.E.N. Proyecto educativo nasa, (Gente comunidad). La institución brinda el servicio de preescolar y primaria a los niños de la vereda los Pinos, la básica secundaria y media a las veredas vecinas como: Alto San Francisco, Alto Paraíso, Alto El Palmar, Alto San José De Mandiva, Filadelfia. Mazamorrero, Bajo San Francisco, Guadualito, El Limón. Los niños caminan de 4 a 5 horas diarias para	Los indígenas tienen una manera particular de ver el mundo y responder a las diferentes situaciones de la cotidianidad, desarrollados de diferentes maneras y espacios (entre ellos los geográficos; nieves perpetuas de nevados, majestuosos valles a orillas de ríos Cauca y Magdalena, selvas del Amazonas y Pacífica, llanura de la Orinoquia) donde se han desarrollado diferentes conocimientos para responder a problemáticas sociales, geográficas, culturales, económicas, enmarcadas en las múltiples cosmovisiones pero un solo espíritu nasa entorno al gran cacique Sa't Tama y otros legados como la Gaitana, kintin lame. El surgimiento de escuelas, parroquias,

llegar a la sede principal, por la extensión y dispersión geográfica. La comunidad tiene muchas necesidades básicas insatisfechas, pero por medio de las autoridades tradicionales, planes de vida estamos buscando la reconstrucción cultural, social, política y económica para trascender de forma armónica y equilibrada con el entorno.



hospitales inspecciones de policía, partidos políticos y otros entes y factores como la emigración como eje cafetero, o a Cali, Popayán, Bogotá, Santander como empleadas del servicio; en los territorios indígenas se rompe con los espacios, tiempos y actores de los procesos de transmisión cultural, con consecuencias como el debilitamiento y posterior pérdida de la identidad cultural. Ante esta situación las diferentes autoridades indígenas, y sus organizaciones reflexionan acerca del impacto negativo de esta educación que choca con la educación que se venía gestando de generación en generación de una forma tradicional dando como resultado esta reflexión la puesta en marcha de una propuesta de alterna de educación que fortalezca la identidad cultural a partir de los conocimientos propios. Paralelamente a los desarrollos curriculares, pedagógicos y comunitarios ha sido necesario construir estructuras organizativas - administrativas en el ámbito de resguardos municipales, departamentos y pueblos indígenas; que responda a las particularidades que vienen desarrollando en base a tres ejes. Desarrollo pedagógico, autonomía educativa y producción teórica que propician la diversidad cultural a través del PEC. En el ámbito educativo se cuenta con comités educativos locales zonales articulados con los cabildos y asociaciones de cabildos en algunos municipios y resguardos se han nombrado, coordinadores, cabildos de educación, rectores unos con remuneración otros no. A nivel del Cauca en 1997 se formó el CETIC comité de educación para territorios indígena. A nivel nacional el SEIP.

Tabla 7

Modelo Pedagógico

IE. Kliichaw Sek es un proyecto educativo y cultural que busca ofrecer a los jóvenes de las comunidades indígenas y campesinas del norte del Cauca la posibilidad de validar y fortalecer sus saberes tradicionales, desarrollar competencias cognitivas y socioculturales que les permitan situarse a la altura de la época en que viven para lograr desempeños eficientes en el contexto local y en el marco de la cultura global.

Conscientes de la necesidad de consolidar una educación pertinente optó por la construcción de un Modelo Pedagógico Flexible que garantiza a los estudiantes una formación como hijos de la aldea y ciudadanos del mundo.

El Modelo Pedagógico Flexible es un dispositivo para la transmisión de la cultura y la socialización que responde a las necesidades educativas de los pueblos, fortaleciendo su identidad y potenciando a sus jóvenes para participar desde su especificidad étnica en la cultura global.

El carácter flexible del modelo garantiza una educación de calidad, integral, integrada y personalizada, mediante la articulación del saber tradicional con el saber académico, la teoría con la práctica, la escuela con la comunidad.

La articulación de estos componentes del Modelo se produce en el marco de una educación intercultural y pertinente que respeta las diferencias étnicas, las diferencias individuales, los ritmos y estilos de aprendizaje de los estudiantes.

Capítulo 4

Análisis

4.1. Análisis A-Priori

La secuencia didáctica presentada, está compuesta por cuatro niveles que a su vez tienen una relación con cada una de las tareas propuestas, con el objetivo de fortalecer y proporcionar un afianzamiento de conocimientos en los estudiantes, además, se presentan algunas propiedades y descripciones de objetos geométricos, para los cuales se considera importante su conocimiento para el desarrollo y comprensión de la actividad.

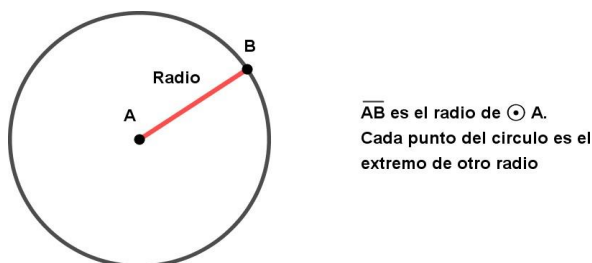
4.1.1. Análisis de la primera parte

En esta parte, se presenta el concepto de algunas definiciones de objetos geométricos, para poder abordar el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, contribuyendo al desarrollo y comprensión de la secuencia didáctica, entre ellos el radio, cuerda, diámetro, y circunferencia, además se presenta la propiedad de ángulo externo de un triángulo isósceles.

Conceptos básicos

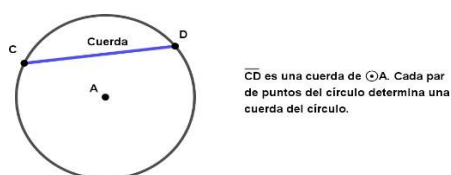
- ¿Qué es un radio?

Un radio de un círculo, es un segmento, cuyos extremos son el centro del círculo y un punto del círculo.



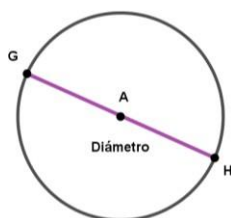
- ¿Qué es una cuerda?

Una cuerda de círculo, es un segmento cuyos extremos son dos puntos del círculo.



- ¿Qué es un diámetro?

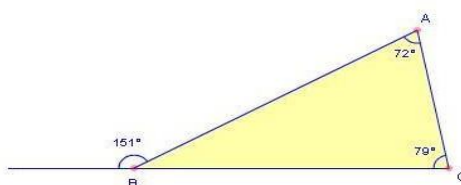
Un diámetro de un círculo, es una cuerda que contiene el centro del punto.



$\overline{GH}$ es un diámetro de $\odot A$. Cada par de puntos del círculo colineales con A, determina un diámetro del círculo.

- *Propiedades de ángulo exterior de un triángulo.*

$$151^\circ = 72^\circ + 79^\circ$$



Fase I. Identificación.

El objetivo de estas descripciones y propiedad, es brindar al estudiante unas bases que proporcionan una visión del tema que se enseñará, o sobre el cual se trabajará en esta secuencia. La propuesta didáctica plantea inicialmente un feedback compuesto de definiciones matemáticas que serán necesarias para poder definir finalmente el Teorema de Ángulos Inscrito en la Circunferencia.

Esta introducción en la secuencia didáctica, se considera importante, debido a que, al ser un tema que abarca diversos objetos matemáticos para su consolidación, es necesario conocer de manera general unas bases, que brinden elementos conceptuales al estudiante, para el desarrollo

de la secuencia didáctica. La secuencia se ubica en el nivel dos de la teoría de Vann Hiele, por lo que se requiere la descripción de elementos que pertenezcan al primer nivel, tomando como referencia esta teoría, para efectivamente cumplir con el ciclo propuesto por Hiele.

En esta parte, se pretende que el estudiante identifique, o cree ideas acerca del Teorema de Ángulos inscrito en la Circunferencia, además, pueda relacionar los elementos conceptuales propuestos como un feedback en construcciones que se le presentarán más adelante, permitiéndole reconocer y entender construcciones con más facilidad.

4.2. Análisis A-Priori del Nivel 1

Tabla 8

Análisis a-priori	
Descripción de la actividad. El primer nivel, está compuesto por 5 tareas, de las cuales 2 son de construcción, y 3 son de respuestas abiertas, donde la quinta tarea, requiere de llenar una tabla de equivalencia entre diferentes ángulos que subtienden el mismo arco de circunferencia. El segundo nivel está compuesto por 7 tareas, de las cuales 4 son preguntas abiertas y 3 son de construcción, entre ellas llenar una tabla de comparación entre ángulos de centro y ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.	
Título del recurso:	Aprendiendo a calcular ángulos en las circunferencias
Palabras Claves:	Gamificación, Ambientes escolares, didáctico.

Objetivo de la primera actividad (Nivel I)	Direccionar al estudiante a la consideración de partes del Teorema.
Sugerencias Metodológicas	Esta actividad ha sido diseñada para estudiantes de grado 9°, Lo que se quiere es que el estudiante interactúe con los diferentes recursos, permitiendo que mediante la exploración y la interpretación de las diversas representaciones, se logre movilizar el concepto de Teorema de ángulos inscrito en la circunferencia.
Logros a alcanzar:	Actividad 1 En esta construcción se espera que el docente encargado de la sesión, sea quien guíe esta primera construcción con los estudiantes, permitiendo que esta sea una fase donde los estudiantes se empiezan a introducir en el tema que se les desea enseñar, para lo cual cabe recalcar, que en el transcurso de esta secuencia se pretende que los alumnos logren identificar o reconocer el teorema de ángulo inscrito en una circunferencia, a partir de propiedades que le caracterizan particularmente.
Conocimientos previos	● Construcción de ángulos con un transportador, dada la medida de éste. ● Construcción de circunferencias con compás dado la medida de su radio.

	● Elementos de la circunferencia como arcos, radios, cuerdas, diámetro, ángulos del centro y ángulos inscritos. Para lo cual es necesario conocer sus características. ● Propiedades de un triángulo isósceles en relación a la medida de sus lados y medida de sus ángulos interiores. ● Teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo ● Teorema del ángulo exterior de un triángulo ● Ángulos adyacentes y sus propiedades. ● Resolución de ecuaciones de primer grado.
Posibles dificultades y errores.	● Se pueden presentar dificultades en el proceso de construcción de los ángulos dada su medida utilizando el transportador, por ejemplo, no saber dónde ubicar el centro del transportador y hacia dónde girar el objeto de rotación.
Intervención del docente:	El docente primero debe asesorarse de la existencia de estudiantes dentro del aula, que presenten este tipo de dificultad, de ser así, este debe explicarle que la ubicación del transportador, debe ser con el centro en el vértice del ángulo, y la base debe estar sobre el segmento existente del ángulo, posteriormente debe ubicar la posición de 0°, para proceder a marcar el ángulo que se está pidiendo. ● No visualizar los triángulos isósceles, que permiten el desarrollo de reconocimiento de medidas de los diferentes ángulos de centro e inscritos que subtienden el mismo arco de circunferencia. ● No reconocer que es un ángulo de centro y un ángulo inscrito. ● No saber usar el software GeoGebra. ● Errores de cálculo.

Solución de la primera actividad Nivel 1

NIVEL I

Primera actividad del Nivel I.

Puntuación máxima: 1.0

- **Construye y resuelve**

Realiza la siguiente construcción en tu cuaderno, y responde cada pregunta, luego tómale una foto a la construcción con las respuestas a cada pregunta, y súbelas a classroom.

- 1) En el espacio designado, traza con un color de tu elección, una circunferencia de centro O y un radio de 3cm. Una vez terminado, realiza las siguientes construcciones:
 - a) traza el diámetro $\overline{AB}$
 - b) determina un punto C en el arco AB, de tal forma que el ángulo del centro $\angle AOC$ mida 40°
 - c) traza la cuerda $\overline{BC}$
- 2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle ABC$? Explica tu respuesta.
- 3) En la circunferencia construida determina con otro color diferente al de la construcción inicial, un punto D en el arco BA, de tal forma que el ángulo inscrito $\angle DBC$ mida 50° .
- 4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro $\angle DOC$? Explica tu respuesta.
- 5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla: Arco de circunferencia, Medida ángulo del centro que subtiende el arco, y Medida ángulo inscrito que subtiende el arco.

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco?

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AC		
CD		

Respuesta a la tarea 1.

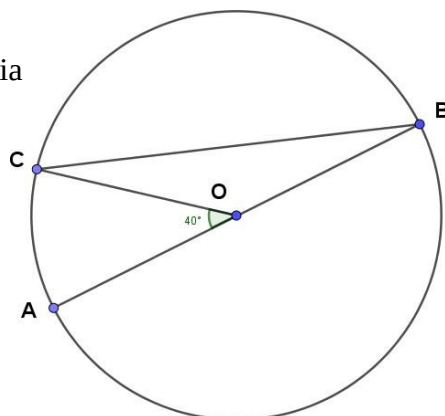
1). En el espacio designado, traza con un color de tu elección, una circunferencia de centro O y un radio de 3cm. Una vez terminado, realiza las siguientes construcciones:

- a) traza el diámetro $\overline{AB}$
- b) determina un punto C en el arco AB, de tal forma que el ángulo del centro $\angle AOC$ mida 40° .
- c) Traza el radio CO.
- d) Traza la cuerda $\overline{BC}$

A Continuación, se presenta una construcción como referencia de respuesta, aunque cabe aclarar, que estas construcciones podrían variar en cuanto a su posición u orientación, pero siempre y cuando cumpla con las características descritas en las instrucciones, será válida, debido a lo dicho anteriormente, se espera que cada estudiante desarrolle una construcción diferente en cuanto la ubicación de objetos como puntos y diámetro.

Respuesta actividad I. Tarea 1.

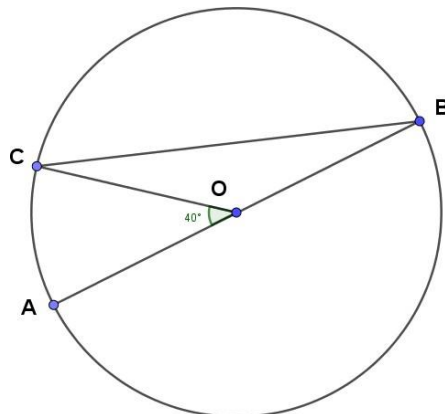
Figura 14
Elaboración propia



Respuesta a la tarea 2.

2). Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle ABC$? Explica tu respuesta.

Figura 15
Elaboración propia.



A esta pregunta se esperan dos posibles respuestas.

Primera respuesta

Siendo el triángulo isósceles $\triangle COB$, por ser CO y BO radios en una misma circunferencia, se tiene que el $\angle OCB \cong \angle OBC$, posteriormente, se considera que el $\angle COA$, por ser parte de ángulos basales al triángulo isósceles, su medida será igual a la suma de los ángulos $\angle ACB + \angle OBC = 40^\circ$, y posteriormente por ser estos ángulos de igual medida, se tiene que el $\angle ABC = 20^\circ$.

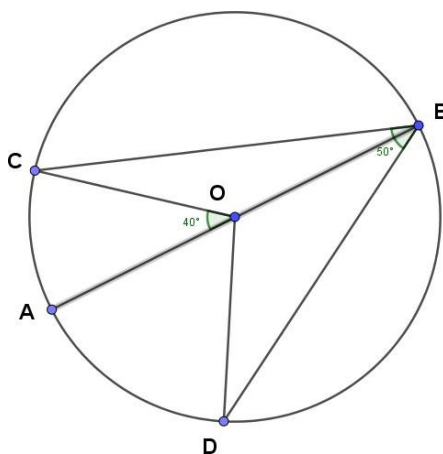
Segunda Respuesta

Considerando que el ángulo $\angle AOB = 180^\circ$, se tiene que el $\angle COB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, considerando que las sumas de los ángulos internos de un triángulo suman 180° , se puede deducir que en el triángulo isósceles $\triangle COB$, la medida de los ángulos $m\angle OCB = m\angle OBC = 20^\circ$, y posteriormente decir que $\angle ABC = 20^\circ$.

Respuesta a la tarea 3.

3). En la circunferencia construida determina con otro color diferente al de la construcción inicial, un punto D en el arco BA , de tal forma que el ángulo inscrito $\angle DBC$ mida 50° .

Figura 16
Elaboración propia.



Respuesta a la tarea 4.

4). Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro $\angle DOC$? Explica tu respuesta.

Respuesta.

Siendo el triángulo isósceles $\triangle ODB$, por ser $OD \cong OB$ segmentos de una misma circunferencia, se puede afirmar que $\angle ODB \cong \angle OBD$, además podemos decir que $m\angle ODB = m\angle OBD = 30^\circ$, por $\angle OBD = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$, posteriormente se podría afirmar que al $\angle AOD = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Luego $\angle COA + \angle AOD = \angle DOC$, entonces $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ = \angle DOC$.

Respuesta a la tarea 5.

5). Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla: Arco de circunferencia, Medida ángulo del centro que subtiende el arco, y Medida ángulo inscrito que subtiende el arco.

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AC	40°	20°
CD	100°	50°

Respuesta a la tarea 6.

6). ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco?

Al relacionar un ángulo central con un ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de circunferencia, se puede decir que el ángulo central es de doble medida del ángulo inscrito.

Solución de la Segunda actividad Nivel 1

- 1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4 cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
 - a) un ángulo del centro $\angle AOB$ de 50°
 - b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro $\angle AOC$ mida 90° y el punto B esté en el arco que subtiende este ángulo.
 - c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.
- 2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle ACB$? **Explica tu respuesta.**
- 3) En la circunferencia construida:
 - a) determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro $\angle BOD$ mida 100° y el punto C esté en el arco que subtiende este ángulo.

b) traza la cuerda DB y la cuerda DC

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle BDC$? **Explica tu respuesta.**

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AB		
BC		

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco?

7) ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro no subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito? Explica tu respuesta.

Esta segunda construcción está propuesta para que los estudiantes la desarrollen, sin la participación directa del docente, es decir que éste sólo responderá las preguntas que cada estudiante le hagan.

Es importante reconocer que, en esta construcción, la ubicación de los ángulos de centro, en relación con el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de circunferencia, está en diferente posición en relación con la primera construcción, causando cambios en el proceso de cálculos de ángulos con respecto a la información descrita.

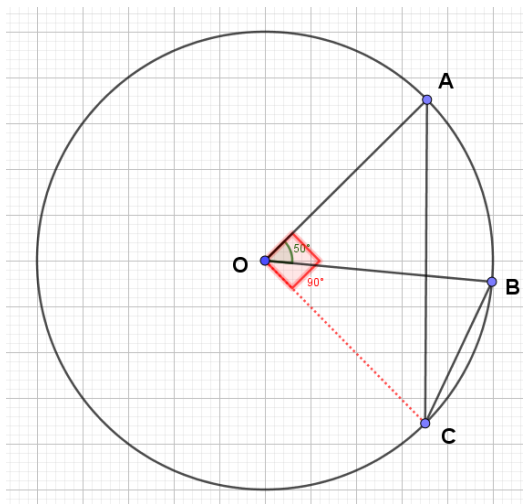
Respuesta experta a la actividad II.

- 1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4 cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
 - a) un ángulo del centro $\angle AOB$ de 50°
 - b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro $\angle AOC$ mida 90° y el punto B esté en el arco que subtiende este ángulo.
 - c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.

Respuesta a tarea 1.

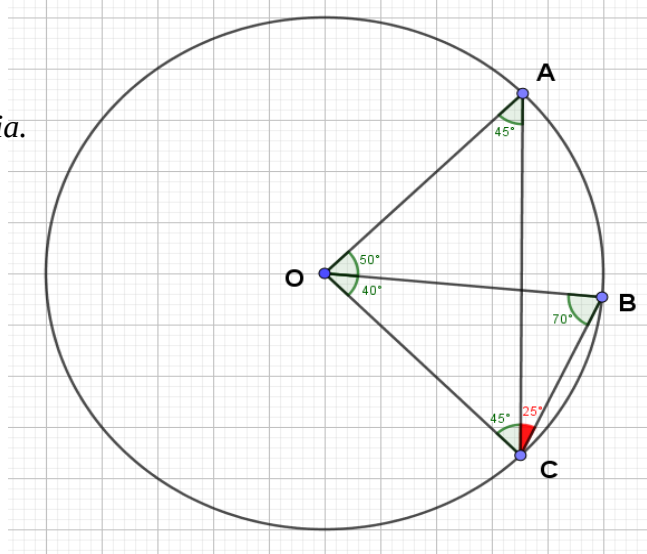
Figura 17

Elaboración propia.



- 2). Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle ACB$? **Explica tu respuesta.**

Respuesta a tarea 2.

Figura 18*Elaboración propia.*

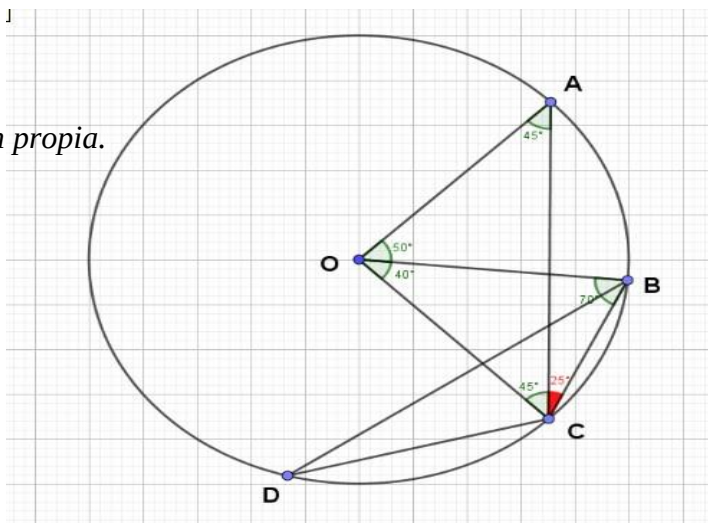
A esta pregunta, se espera la siguiente respuesta.

Teniendo en cuenta que la medida del ángulo $\angle AOB = 50^\circ$, además la medida del ángulo $\angle AOC = 90^\circ$, podemos decir que $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$, reemplazando los valores, $\angle BOC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Considerando que el triángulo BOC es isósceles, por ser OC y OB, radios de la misma circunferencia, se puede deducir que el $\angle OCB = \angle OBC = 70^\circ$, por ser ángulos basales del mismo triángulo, luego $m\angle OCA + m\angle ACB = 70^\circ$, considerando que el triángulo AOC es isósceles, por ser OC y OA, radio de una misma circunferencia, con $\angle AOC = 90^\circ$ podemos decir que $\angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$, por lo cual podemos concluir que $\angle ACB = 25^\circ$.

3). En la circunferencia construida:

- determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro $\angle BOD$ mida 100° y el punto C esté en el arco que subtiende este ángulo.
- traza la cuerda DB y la cuerda DC

Respuesta a la tarea 3.

Figura 19*Elaboración propia.*

4). Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle BDC$? **Explica tu respuesta.**

Respuesta a la tarea 4.

Respuesta a la tarea 5.

5). Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AB	50°	25°
BC	40°	20°

7) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco?

Respuesta a la tarea 6.

La medida del ángulo de centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de circunferencia.

7). ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro no subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito? Explica tu respuesta.

Respuesta a la tarea 7.

La relación anterior sólo es válida para los casos en que el ángulo de centro, y el ángulo inscrito tengan el mismo arco de circunferencia.

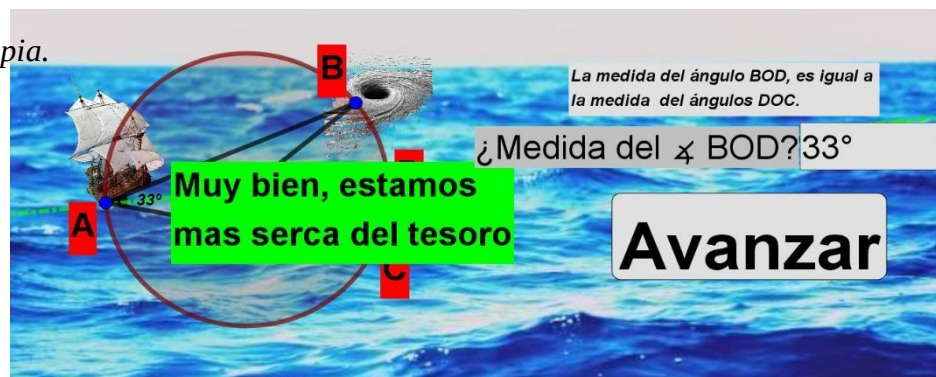
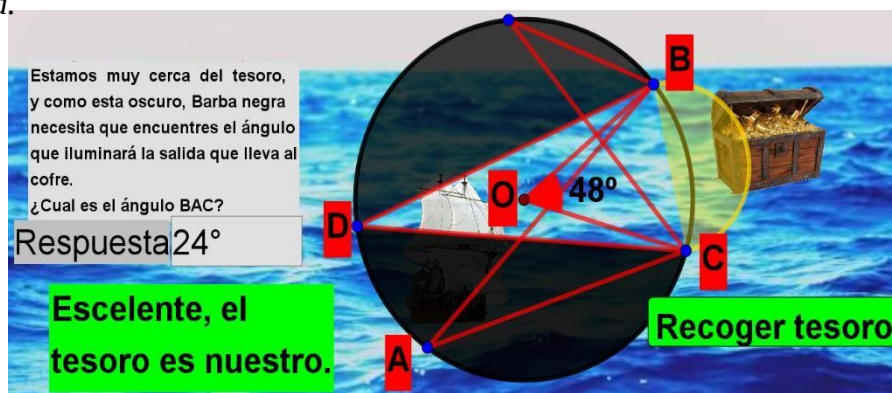
Solución del Nivel III

A continuación, se mostrará las respuestas a cada tarea de la construcción de Geogebra, donde se presentan las tres posibles variaciones de la posición de un ángulo de centro en relación con un ángulo inscrito que subtiende el mismo arco de circunferencia.

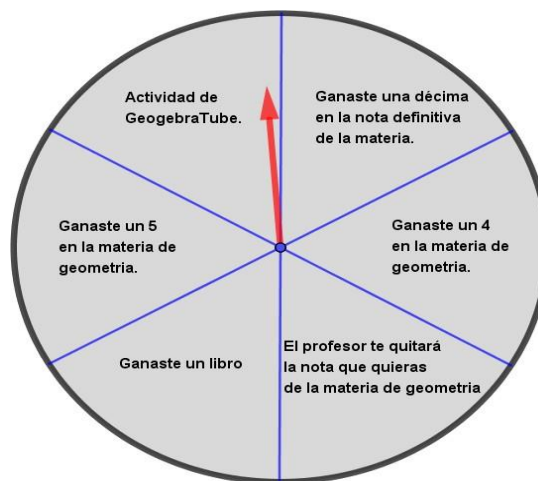
Figura 20

Elaboración propia.



Figura 21*Elaboración propia.***Figura 22***Elaboración propia.***Análisis de premiación.**

Cada estudiante que haya participado en toda la actividad o secuencia, pasará y girará la ruleta, donde tendrá la oportunidad de ganar uno de los premios que están escritos.

Figura 23*Elaboración propia.***Análisis de escala de Likert**

Se espera que cada estudiante responda con honestidad, las preguntas planteadas acorde a su experiencia vivida en la secuencia didáctica, donde podremos ver las actitudes de los estudiantes con respecto a clases gamificados.

4.3. Análisis A-Posteriori.**4.3.1. Contexto**

La aplicación de la secuencia didáctica se realizó en la Institución Educativa Kliichaw Sek, ubicada en la vereda alto paraíso, perteneciente al municipio de Santander de Quilichao, Cauca - Colombia.

La actividad se presentó a un grupo de 25 estudiantes pertenecientes al noveno grado (9°) de escolaridad.

4.3.2. *Materiales y recurso*

- 8 Computadores portátiles
- 1 tablero
- 1 video beam
- 8 transportadores
- Guías de trabajo

4.3.3. *Estructura Organizativa del desarrollo de la situación didáctica*

Tabla 9

Nota: La implementación de la Secuencia Didáctica fue realizada en dos días consecutivos, es decir, dos clases, donde se requirió por clase un total de 2 horas.

Otra situación a considerar es que observando la escasez de recursos que puedan presentar los estudiantes, se decidió obsequiar a cada estudiante un kit escolar, que contenía:

1. Lápiz
2. Borrador
3. Sacapuntas
4. Regla
5. Transportador

Se dio inicio a la primera presentación de la secuencia didáctica el día 27 de mayo del año 2021, en el grado noveno de bachillerato, en el horario de 2:00 P.m. hasta las 4:00 P.m. con la disposición de recursos tecnológicos, tales como el video beam y un computador portátil.

- El aula contaba con un espacio abierto a los lados, un tablero y 13 pupitres.
- El Grado noveno cuenta con 25 estudiantes, que comparten en parejas cada uno de los pupitres.

En este orden de ideas, en el proceso de implementación se reconocen 5 estudiantes, que nombraremos como P1, P2, P3, P4, P5, que serán analizados desde sus gestos actitudinales, a partir de la interacción con sus compañeros y con la secuencia didáctica presentada.

Tabla 10

Estudiantes a analizar	Análisis actitudinal
P1	● Se encuentra distraída por los ruidos exteriores al aula. ● Menciona constantemente que no sabe cómo resolver las Actividades propuestas. ● No muestra interés, prefiere jugar con sus implementos escolares.
P2	● No muestra interés por la clase, habla constantemente con P1. ● Juega con P1
P3	● No observa la guía y no presta atención a la clase. ● No responde cuando se le pregunta ● Físicamente se ve avergonzado ● Espera a que P2 termine de resolver su actividad, para escribir la misma respuesta.
P4	● Se emociona al entender la propiedad. ● Se encuentra Motivado ● Participa constantemente
P5	● Muestra Interés y responde asertivamente a la primera actividad

En el proceso de análisis actitudinal de los estudiantes se recogen elementos obtenidos desde una persuasión visual, considerando la medición actitudinal indirecta, que tiene como objetivo analizar a los estudiantes mediante una observación de los elementos verbales. Sin embargo, estos estudiantes no conocen el objeto de análisis de este trabajo, con el propósito de no alterar las posibles respuestas obtenidas.

Tabla 1

Análisis del curso en general
● A nivel General los estudiantes manifiestan sentirse avergonzados ● El aula de clase es abierta, por ende, los estudiantes se distraen con facilidad. ● Reconocen no haber tenido cercanía con el objeto matemático de estudio ● Se sorprenden al saber que tendrán nota ● Llegan estudiantes de otros grados a observar la implementación y a hablar con los estudiantes del grado 9 ● Los estudiantes no saben usar el transportador ● No reconocen los triángulos Básicos

La segunda presentación de la secuencia didáctica el día 28 de mayo del año 2021, en el grado noveno de bachillerato, en el horario de 2:00 P.m. hasta las 4:00 P.m. con la disposición de recursos tecnológicos, tales como el video beam y 13 computadores.

Tabla 2

Estudiantes a analizar	Análisis actitudinal
P1	● No entiende la actividad, y busca la manera de copiarle las respuestas a P2, para ganar los premios.
P2	● Muestra interés por la actividad. ● Le pasa las respuestas a P1. ● Desarrolla todas las actividades de manera individual.
P3	● Busca la manera de copiarle a P1.
P4	● Intenta resolver las actividades. ● Pregunta al profesor repetidamente sobre el procedimiento.
P5	● Resuelve algunas actividades.

Tabla 1

Análisis del curso en general
• De manera general, los estudiantes se interesan por resolver la tercera actividad. • Entran niños y niñas al salón a mirar las actividades. • Se ríen y hablan al momento de repartición de premios, mostrando satisfacción al obtener cada uno de ellos.

El análisis a posteriori de la secuencia de actividades didácticas se desarrolla considerando los objetivos planteados, las respuestas correctas que permiten el desarrollo de cada actividad, los posibles obstáculos y errores que se pueden presentar, incluyendo también las participaciones del docente encargado, y, por último, las actitudes que presentan los estudiantes ante cada actividad con respecto a las estrategias implementadas.

4.4. Análisis A-Posteriori de la primera parte

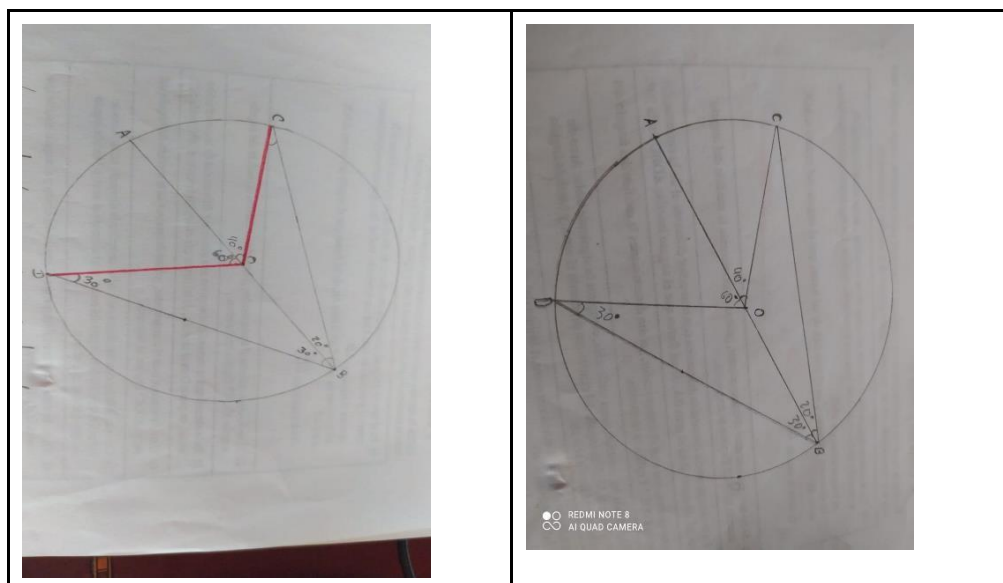
Análisis del nivel I

Tarea I y III

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y un radio de 3cm. Una vez terminado, realiza las siguientes construcciones: a) Traza el diámetro $\overline{AB}$ b) Determina un punto C en el arco AB, de tal forma que el ángulo del centro $\angle AOC$ mida 40° c) Traza el radio $\overline{CO}$. d) Traza la cuerda $\overline{BC}$
--

3) En la circunferencia construida, determina un punto D en el arco BA, de tal forma que el ángulo inscrito $\angle DBC$ mida 50°.
--

Respuestas:



En la tarea uno y tres, se puede apreciar cómo los estudiantes lograron desarrollar de manera correcta esta construcción geométrica, cabe decir que, en estos primeros trazos de los estudiantes, fue el docente quien estuvo dirigiéndolos a través de software geogebra con ayuda del dispositivo de video beam.

En este espacio el profesor encargado, motiva continuamente a los estudiantes a que las respuestas de cada tarea fueran producto de sus esfuerzos, para lo cual brindó ayuda a los estudiantes, respondiendo sus preguntas en Geogebra de manera indirecta.

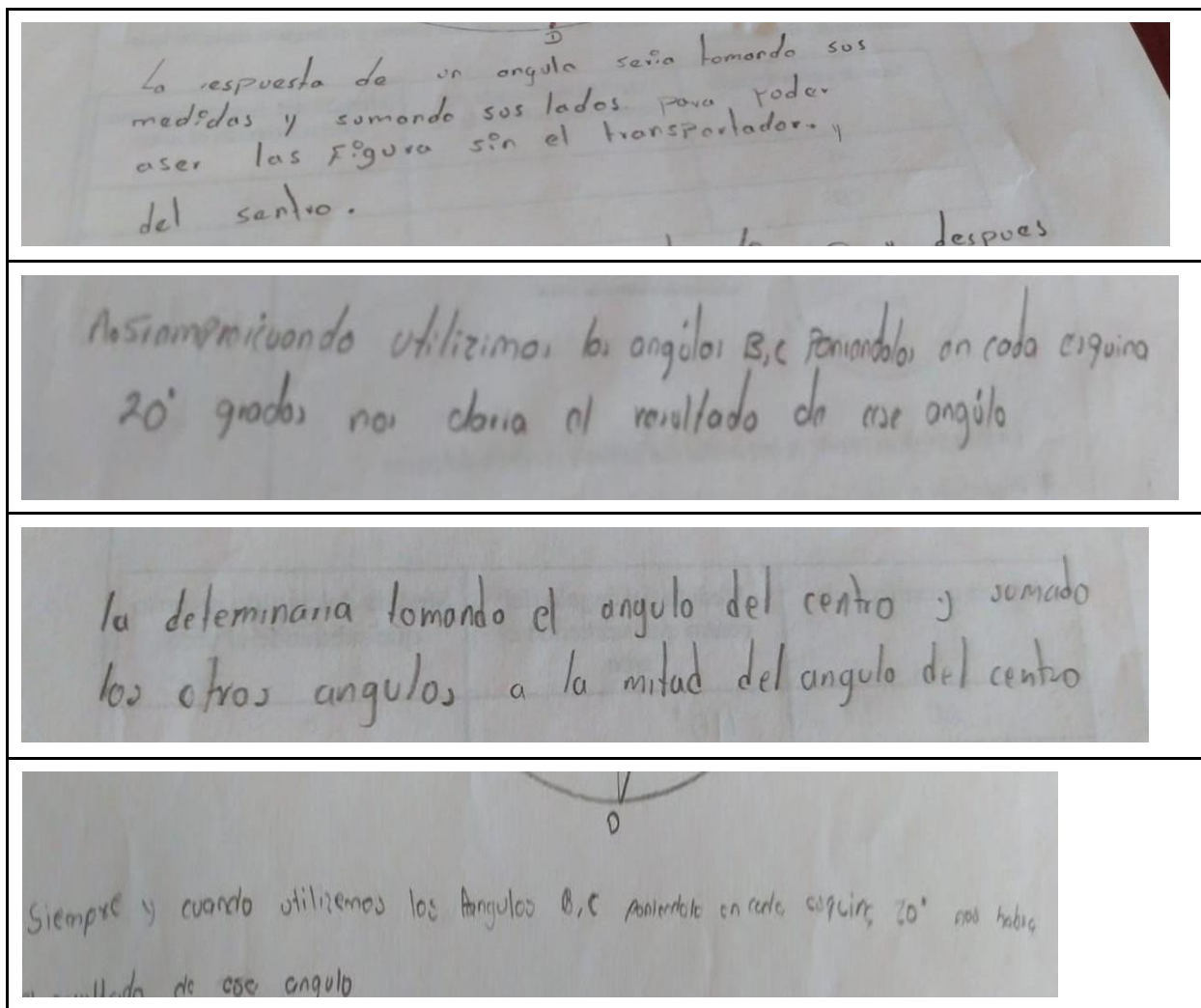
Tarea II y IV.

Tabla 44

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito $\angle ABC$? Explica tu respuesta.

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro $\angle DOC$? Explica tu respuesta.

Respuestas:



La respuesta de un ángulo sería tomando sus medidas y sumando sus lados para poder hacer las figuras sin el transportador y del sentido.

Así mismo cuando utilizamos los ángulos B, C poniéndolos en cada esquina 20° grados nos da el resultado de ese ángulo

la determinaría tomando el ángulo del centro y sumado los otros ángulos a la mitad del ángulo del centro

Siempre y cuando utilizemos los ángulos B, C poniéndolos en cada esquina 20° nos da el resultado de ese ángulo

Tarea V

Tabla 55

- 1) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla: Arco de circunferencia, Medida ángulo del centro que subtiende el arco, y Medida ángulo inscrito que subtiende el arco.

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AC		
CD		

Respuestas:

Arco de circunferencia	Medida del ángulo del centro que subtiende el arco	Medida del ángulo inscrito que subtiende el arco
AC	40°	20°
CD	100°	50°

Segunda actividad del Nivel I.

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA

En correspondencia con la tabla de comparaciones, todos los estudiantes respondieron de manera correcta llenando la tabla con las medidas de los ángulos solicitados.

4.5. Análisis de la actividad II

La siguiente actividad, se propuso a los estudiantes, con la intención de que cada uno intentara resolverlo con la menor ayuda posible, debido a que tiene una estructura muy parecida a la primera actividad.

4.6. Análisis de la actividad III

Análisis de premiación.

Luego de terminar el desarrollo de las actividades, se procedió a organizar el espacio para premiar a todos los estudiantes que tuvieron una participación constante en el transcurso de toda la actividad, en este momento el profesor encargado decide modificar la idea, ubicando la ruleta de premios en el piso y midiendo una distancia considerable, desde donde los estudiantes deberán

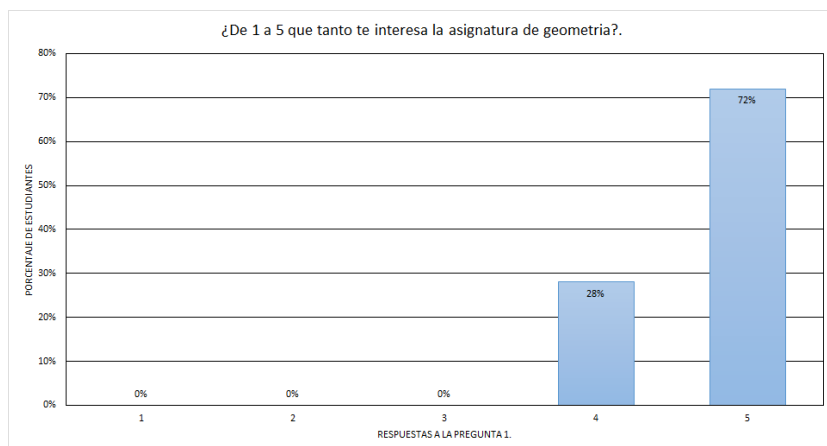
lanzar un objeto, explicando que donde cayera este objeto señalaría el premio correspondiente a cada tirador.

El docente manifestó que esta modificación nombrada anteriormente, fue producto de la incidencia de este tipo de juegos entre niños de esta institución en sus espacios libres.

4.7. Análisis de la encuesta de Likert

Figura 24

Respuesta a pregunta 4



Fuente: Elaboración Propia

El interés hacia la asignatura de geometría es alto, debido a que el mayor porcentaje del 72%, muestra tener mucho interés por esta área, en cuanto al porcentaje restante, el cual corresponde al 28%, a pesar de no tener el máximo interés, representa un alto porcentaje de interés hacia el objeto de estudio.

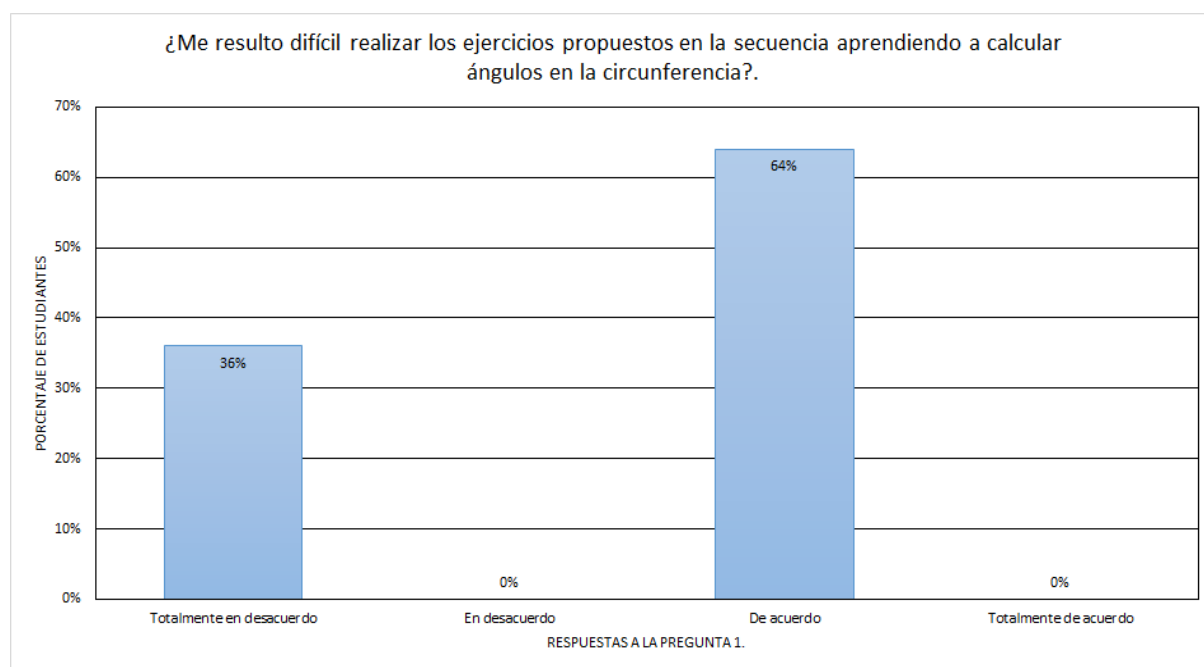
Este alto porcentaje de interés, o buena predisposición aprendida hacia la geometría, permite identificar el tipo de actitudes que tienen los estudiantes al momento de percibir de

manera general el objeto matemático, y posteriormente compararlo con la persuasión desarrollada a través de la secuencia de ángulos inscritos en la circunferencia.

El 60% de los estudiantes que participaron en la encuesta, manifestaron que están de acuerdo en que la enseñanza de la geometría se desarrolle a través de juegos o medios audiovisuales, y el 40% están totalmente de acuerdo en que esta sea la principal forma de enseñanza.

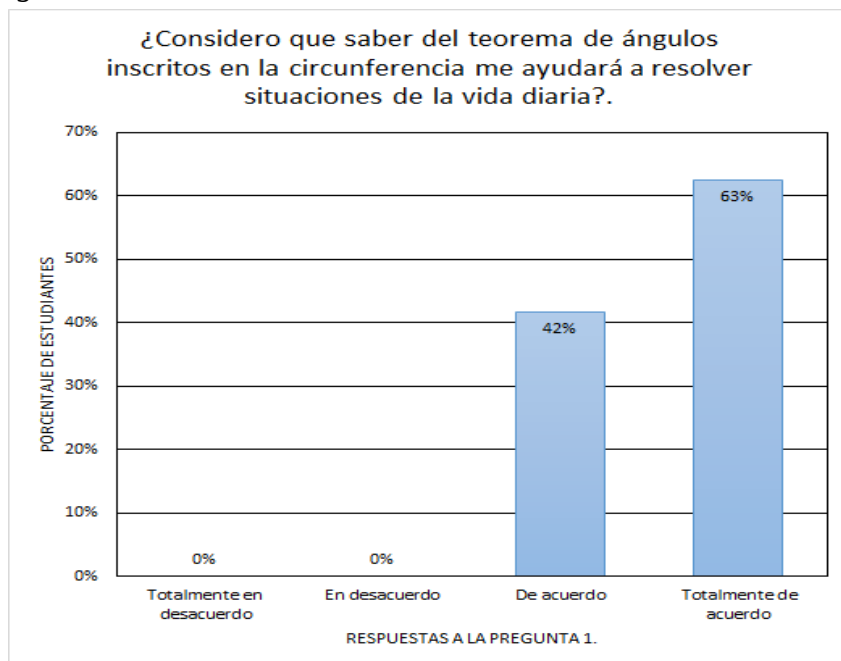
Figura 25

Respuesta a pregunta 1



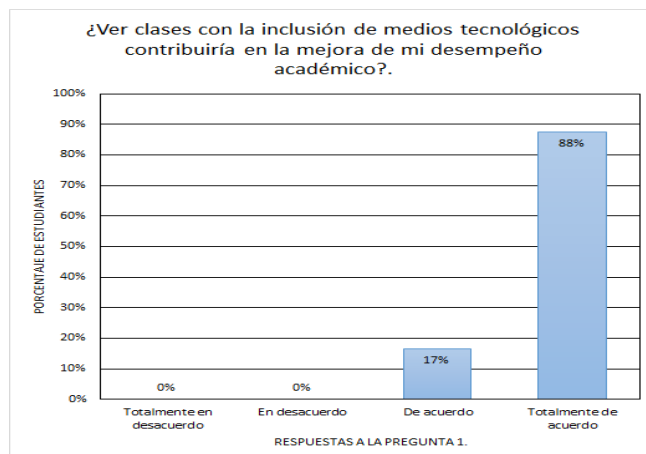
Fuente: Elaboración Propia

En relación con la actividad aprendiendo a calcular ángulos en la circunferencia, podemos apreciar que el 36%, lo cual corresponde a 09 estudiantes, expresan que el desarrollo de las tareas no les resultó para nada difícil, por lo cual están totalmente en desacuerdo con que estas se califican como difícil, por lo contrario, el 64% correspondiente a 16 estudiantes, si manifiestan estar de acuerdo en que las tareas presentadas en esta actividad, les parece difícil.

Figura 26*Respuesta a pregunta 2*

Fuente: Elaboración Propia

El mayor porcentaje que se muestra en la gráfica es de 63% y corresponde a la cantidad de estudiantes que califican el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia como algo útil para resolver situaciones de la vida cotidiana, mientras que el 42% expresa estar de acuerdo.

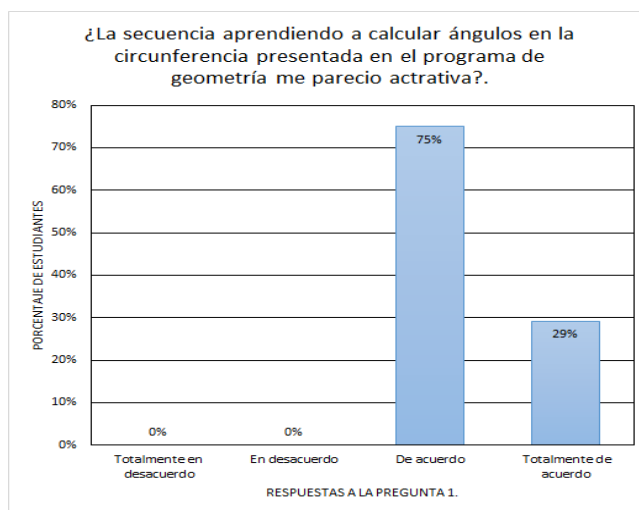
Figura 27*Respuesta a pregunta 3*

Fuente: Elaboración Propia

Esta gráfica permite ver cómo el 88% de los estudiantes de un aula de clases, están totalmente de acuerdo en que las clases se desarrollan haciendo uso de medios tecnológicos sin duda contribuirían a una mejora en el aprendizaje de la geometría, además el 17% correspondiente a los estudiantes restantes muestran estar de acuerdo, es importante nombrar el hecho de que hay un pequeño porcentaje de estudiantes que no tienen acceso a medios tecnológicos como celular, computador, entre otros, y esto representa una desventaja para ellos al momento de hablar o inclinarse positivamente hacia el uso de medios tecnológicos en la educación.

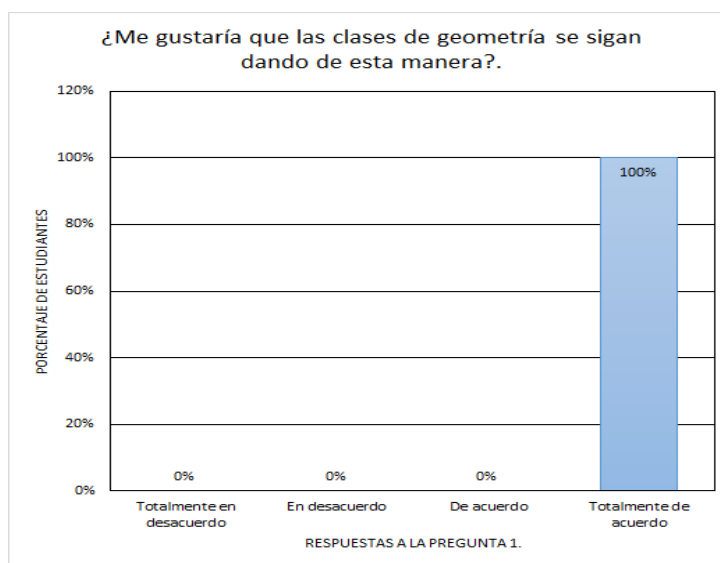
Figura 28

Respuesta a pregunta 4



Fuente: Elaboración Propia

El 75% de los estudiantes, están de acuerdo en que la actividad les resultó atractiva, es decir que les gusto la estructura y el uso de actividades presentadas, mientras que el 29% expresa estar totalmente de acuerdo en que esta sea atractiva.

Figura 29*Respuesta a pregunta 5*

Fuente: Elaboración Propia

El 100% de los estudiantes, están totalmente de acuerdo en que las clases de geometría se sigan dando con la misma dinámica que se usó para esta actividad.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se analizaron las actitudes de los estudiantes mediante la escala de Likert, cuando se integran el modelo de Vann Hiele en un rediseño orientado en el Teorema de Ángulo Inscrito en la Circunferencia, en grado 9°. Lo más importante de desarrollar este análisis fue establecer una relación entre la afección de las creencias y las entidades culturales (en particular la cultura indígena), con el comportamiento y cómo este comportamiento establece congruencia con las actitudes aprendidas o adquiridas por parte de cada uno de los estudiantes, además de ver el impacto que tiene la persuasión de la secuencia didáctica en el transcurso de la actividad,

porque este conjunto de actitudes puede definir el tipo de comportamiento de los estudiantes, así como la disposición o predisposición ante un escenario de enseñanza. Lo que más ayudó a desarrollar el análisis de las actitudes, fue la estructuración de la escala de Likert, pues ella permite reconocer en promedio la aceptación o rechazo de individuos ante un objeto o una situación.

Lo más difícil de este análisis fue interpretar la relación que se presentó entre el comportamiento y las actitudes, debido a que el entorno cultural suele ser de muy poco hablar y de pocas expresiones corporales, lo que dificulta diferenciar un comportamiento favorable, a un comportamiento desfavorable, y por ende establecer una relación actitud-comportamiento.

Más del 70% de los estudiantes que participaron de la actividad de Aprendiendo a calcular ángulos en la circunferencia, muestran una buena actitud ante la propuesta presentada, es decir que la predisposición aprendida a valorar el teorema de ángulos inscrito en la circunferencia, es favorable ante la situación.

El apoyo tecnológico propuesto en esta tesis, visto desde una estrategia gamificada en el proceso de enseñanza, promovió en los estudiantes, un estado de motivación, despertando un interés en el proceso de adquisición de elementos conceptuales, generando en ellos, una construcción actitudinal positiva, producto de la exploración de una nueva forma de conocer. Esto es posible de reconocer, entendiendo que la motivación está ligada a los intereses individuales de los estudiantes, de esta manera, las herramientas tecnológicas proporcionan un acercamiento de los objetos matemáticos intangibles con los intereses individuales de los estudiantes, favoreciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Reflexiones

El problema de la educación en Colombia es estructural, de presupuesto, la inmensa brecha entre lo privado y lo público, entre lo urbano y lo rural.

La calidad de la educación en Colombia es baja, esta ha sido demostrada en los resultados de las pruebas Icfes; la causa de esto no son más que la mala estructura en las instituciones, el mal financiamiento del estado, la falta de recursos digitales y el bajo acceso en zona rural.

Las grandes diferencias entre las instituciones urbanas y rurales, en cuanto a lo cultural debe considerarse como elementos claves, para la enseñanza.

Lista de referencias

- Alonso, G., & Hidalgo, R. (s. f.). *La gamificación como elemento motivador en la enseñanza de una segunda lengua en educación primaria*. 59.
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Serapio Rendón 125. Col. San Rafael, 06470 México, D.F.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. 148.
- Ascencio, N. (2016). Signos según Peirce. [PowerPoint slides]. Recuperado de: <https://es.slideshare.net/normaascencio/signos-segun-peirce>
- Castagnoli, R.; García, A.; Montecinos, O, & Quiroz, C. (2017). *Organización matemática propuesta por el docente y la señalada por el texto escolar del mineduc para un nivel de enseñanza media en el contenido ‘ángulos y segmentos de la circunferencia’*” (Seminario de Investigación para optar al Grado Académico de Licenciado en Educación). Universidad católica de la santísima concepción.
- Chevallard, Y. [1988, August] On didactic transposition theory: some introductory notes. Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslovakia.
- Clemens, S., O’daffer, P., & Cooney, T. (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Recuperado de: <http://www.colegiomanzanares.edu.co/archivos/jasonoro/Geometria-Clemens.pdf>
- Chevallard y Joshua. (1982). *Transposición didáctica*. [Imagen]. Recuperado de: <http://quienseatreva.blogspot.com/2016/05/transposicion-didactica-del-saber-sabio.html>

- Díaz, C. Álvarez, J. Torres, A. & Guacaneme, E. (1997). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia. Santafé de Bogotá: MEN.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in *Didattica della Matematica. La matematica e la sua didattica*, 1, 7-36.
- Del Carmen Ortego Maté, M., González, S. L., & Trigueros, M. L. Á. (s/f). *CIENCIAS PSICOSOCIALES I*. Unican.es. Recuperado el 29 de septiembre de 2021, de https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1420/course/section/1836/tema_04.pdf
- Douady R., (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre saberes programas y prácticas. (pp. 241- 246). Francia: Topiques éditions.
- Duval, R; Sáenz- Ludlow-A. (2015). “Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas”. Perspectivas semióticas seleccionados. DIE (Doctorado internacional en Educación). U. Distrital Francisco José De Caldas. B
- Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (trad. M. Vega Restrepo).
- Fandiño, M. I., & D'Amore, B. (2009). *Área y Perímetro, Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Fernandes, C., Lopera, O., y Cervantes, H., (2010). Resultados de Colombia en Timss 2007. [versión pdf]. Recuperdo de: <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/234215/Isabel%20Fernandes%20Carolina%20Lopera%20y%20Victor%20Cervantes%20-%20Resultados%20de%20Colombia%20en%20TIMMS%202007.pdf>

- Fernandez, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, Volumen 6, Número 1, Pág 33-61. Recuperado de: <https://revistas.udes.edu.co/aibi/article/view/475/pdf>
- Gonzáles, C. (2014). *Videojuegos para la transformación social. Aportaciones conceptuales y metodológicas*. (Tesis doctoral). Universidad de Deusto, España. Recuperado de: <http://www.carlosgonzalezardon.com/tesis/capitulos/4GamificacionVjsTransSocCarlosGTardon.pdf>
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Prof. En *mathematics teacher*, Enero 1981, 11-18. Traducción Ricardo Barroso Campos.
- ICFES, (2016), Resultados Nacionales, versión pdf. Recuperado de: <https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1323329/Resultados%20nacionales%20saber%203%205%209%202009%202014.pdf>
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en S. Linares, M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp.295-384 (fragmentos).
- Johsua, S. & Dupin, J. J. (2005). La transposición didáctica. *Cap.4. En: Introducción a la Didáctica de las Ciencias y la Matemática*, p.p. 185-214. Buenos Aires: Coihue.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Ciudadanas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

- MEN. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles349446_genera_dba.pdf
- Muruaga, Y. y Rosa, A. (2015). Estudio de ángulos inscritos en circunferencias con geogebra. *Revista de Didácticas Específicas*, n° 12, PP. 49-75. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/283181869_ESTUDIO_DE_ANGULOS_INSCRITOS_EN_CIRCUNFERENCIAS_CON_GEOGEBRA
- Prieto Andreu, J. M. (2018). Gamificación del aprendizaje y motivación en universitarios. Elaboración de una historia interactiva: MOTORIA-X. *EduTec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 66, 77-92. Recuperado de: <https://doi.org/10.21556/edutec.2018.66.108>
- Sandoval Cáceres, Ivonne Twiggy. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27. Recuperado en 22 de junio de 2020. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100002&lng=es&tlng=es.
- Shirmahaleh, S. M. (sin fecha). Iconicidad metafórica de Charles Peirce, aspectos teóricos y aplicaciones lingüísticas. Recuperado de: www.eltallerdigital.com. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/24459/1/Tesis_Shirmahaleh.pdf
- Susana, G. (2014). *Una propuesta didáctica para los teoremas ángulos en la circunferencia bajo la Teoría de Situaciones Didácticas*. (Trabajo final para optar al Grado de Magíster en

Didáctica de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas.

Torres, A. (2016) Evaluación de políticas públicas con técnicas de gamificación para la educación ciudadana. Recuperado de: [//www.doctorado-comunicacion.es/ficheros/doctorandos/H8.pdf](http://www.doctorado-comunicacion.es/ficheros/doctorandos/H8.pdf)

Morillas, C. (2016). Gamificación de las aulas mediante las TIC: Un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional (Tesis doctoral). Universidad Miguel Hernández, Elche.

Anexo

