

FUERZA Y ENERGÍA DE CASIMIR EN AISLANTES TOPOLÓGICOS

Trabajo de Investigación

PRESENTADO POR:

JORGE LUIS HUILA PORTILLO

Código 1503504

Director:

PhD. JUAN CARLOS GRANADA ECHEVERRY

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

Febrero 2019

Resumen

Se obtienen expresiones que extienden la teoría de Lifshitz, la cual es una generalización del efecto que describió Casimir en 1947. Se estudiaron dos casos particulares: el caso isotrópico y el caso anisotrópico uniaxial [1]. Para el primer caso, se consideraron las características de la energía y la fuerza de Casimir para los aislantes topológicos haciendo uso del formalismo de la matriz de scattering, también conocida como matriz de dispersión [2]. Se encontró que, a través del efecto magnetoelectrico, los aislantes topológicos pueden mezclar los campos de inducción eléctrica, $\mathbf{E}$ y magnética, $\mathbf{B}$, y, por lo tanto, se encuentra que las polarizaciones TE y TM se mezclan en la reflexión (transmisión) a través de una interfaz de aislante topológico, es decir, que si tenemos un campo que incide con una polarización TE además de la onda reflejada (transmitida) con la misma polarización TE también tendremos una onda reflejada (transmitida) con polarización TM y viceversa, para una onda incidente con polarización TM tenemos ondas reflejadas (transmitidas) con polarización TM y TE . Esto conduce a nuevos patrones de campo cerca de la superficie de un aislante topológico.

Para el segundo caso, investigamos el carácter del torque y la fuerza de van der Waals (vdW) entre dos placas aislantes topológicas (TI) coplanares y dieléctricamente anisotrópicas separadas por una brecha de vacío en el límite de *no-retardo*, donde los ejes ópticos de las placas son perpendiculares a la dirección normal. Mediante el uso del Principio del Argumento, se expresó la energía del sistema con aislante topológico en forma de una integral de contorno que permite calcular la suma de los valores de la energía del sistema en todos los ceros y polos de la relación de dispersión que incluye el término topológico. Encontramos que además de la fuerza de acoplamiento magnetoelectrica, la anisotropía también puede influir en el signo de la fuerza de vdW, es decir, una fuerza vdW repulsiva puede volverse atractiva si la anisotropía y/o el término topológico aumentan lo suficiente. Además, la fuerza vdW oscila en función de la diferencia angular entre los ejes ópticos de las placas de TI, de tal forma que con una correcta elección de los parámetros podemos tener una fuerza que oscila entre fuerza repulsiva y atractiva. Encontramos dos configuraciones en las que es posible obtener fuerzas de carácter repulsivo: la primera consiste en 2 placas de aislante topológico de igual magnitud, pero signos opuestos y la segunda configuración consiste en una placa de material dieléctrico convencional que interactúa con una placa de aislante topológico con término topológico negativo;

en esta configuración también es posible obtener fuerzas tanto repulsivas como atractivas. Finalmente, encontramos que el torque de vdW para placas de TI es generalmente más débil que el de los materiales dieléctricos convencionales.

Contenido

1	Introducción	9
1.1	Las fuerzas de Van der Waals	10
1.2	El efecto Casimir	11
1.2.1	Interacciones Átomo-Placa	13
1.2.2	Interacciones Átomo-Átomo	14
1.3	La Fuerza repulsiva de Casimir (La teoría de Lifshitz)	15
1.4	Aislantes Topológicos	17
2	La Teoría de Lifshitz	23
2.1	Representación de la fórmula de Lifshitz en términos de frecuencias imaginarias	25
2.2	La fórmula de Lifshitz para pequeñas y grandes distancias	30
2.3	El caso Anisotrópico	31
3	El formalismo de la matriz de Scattering en TI	37
3.1	El experimento de dispersión	38
3.2	Amplitudes de reflexión y transmisión	40
3.3	Coefficientes de transmisión y reflexión para una Interfaz de Aislante Topológico	41
3.4	La matriz de Scattering para una interfaz de aislante Topológico . . .	45

3.5	Coficientes de Fresnel para ondas incidentes con polarización s (TE) .	46
3.5.1	Resultados	49
3.6	Coficientes de Fresnel para ondas incidentes con polarización p (TM)	50
3.6.1	Resultados	51
3.7	Coficientes de Reflexión para aislantes topológicos puros	53
3.8	Energía de Casimir para aislantes topológicos isotrópicos	56
3.8.1	Resultados	57
4	Fuerzas de Casimir para aislantes topológicos anisotrópicos	61
4.1	El factor de anisotropía γ	64
4.2	Condiciones de frontera.	65
4.3	Energía y fuerza de Van der Waals en aislantes topológicos anisotrópicos.	67
4.3.1	Resultados.	68
4.4	Torque de Van der Waals en aislantes topológicos.	74
4.4.1	Resultados.	74
5	Conclusiones y Perspectivas	79
5.1	Conclusiones	79
5.2	Perspectivas	81
A	Derivación de la fuerza de Casimir	83
A.1	Tratamiento convencional de la fuerza de Casimir	85
A.2	Regularización de la fuerza de Casimir con la función ζ	86
B	Principio del Argumento	89
B.1	Funciones Holomorfas	89

<i>Contenido</i>	7
B.1.1 Ceros de funciones holomorfas	90
B.1.2 Polos de funciones holomorfas	91
B.2 Funciones Meromorfas	91
B.3 Principio del argumento para una curva	92
B.4 La Teoría de Barash y Ginzburg	93
B.4.1 Energía libre del oscilador $g(\omega_\alpha)$	93
B.4.2 El principio del argumento en la teoría de Barash y Ginzburg	94
Bibliografía	97

Capítulo 1

Introducción

El efecto Casimir describe la atracción entre dos placas paralelas perfectamente conductoras y sin carga confinadas en el vacío. Fue el físico holandés Hendrik B. G. Casimir el primero que predijo este fenómeno en su artículo de 1948, que lo describió como la diferencia de presión en ambos lados de una placa causada por la diferencia en las fluctuaciones de vacío en el exterior y en medio de las placas [3, 4]. El efecto lo generalizaría luego Lifshitz al caso de 2 medios dieléctricos semi-infinitos que interactúan a través de una brecha dieléctricamente diferente a una temperatura finita. Durante mucho tiempo, la opinión predominante fue que las interacciones Casimir/van der Waals (vdW) entre cuerpos dieléctricamente similares son siempre atractivas, y de hecho constituyen un problema principal de fricción sin contacto y fricción en dispositivos micro-sísmicos [5]. Estos problemas han motivado la búsqueda de formas de hacer que las interacciones Casimir/vdW sean menos atractivas o incluso repulsivas. Y es que a pesar del desarrollo de útiles herramientas de cálculo, culminadas por el desarrollo del formalismo de dispersión [6, 7], la posibilidad de lograr la repulsión en vacío entre dos placas de material todavía es inalcanzable de forma experimental. En el aspecto teórico, se sabe que dos placas dieléctricas pueden repelerse cuando se sumergen en un medio con propiedades ópticas muy específicas [8, 9] y que ninguna situación simétrica de espejo puede dar lugar a repulsión [10]. Estas restricciones convierten la búsqueda del comportamiento repulsivo en el vacío en un desafío difícil que puede resolver problemas de fricción en aplicaciones de dispositivos [11, 12].

1.1 Las fuerzas de Van der Waals

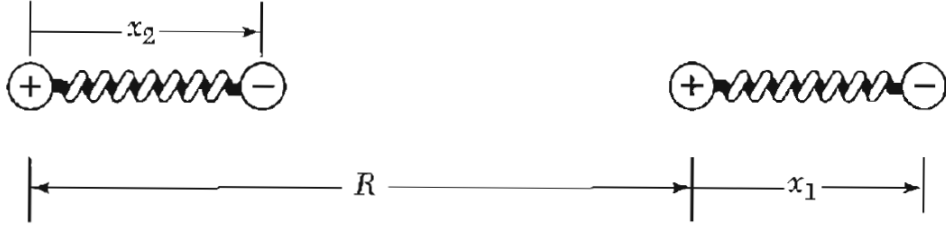


Figura 1.1: Descripción gráfica de las fuerzas de Van der Waals se posicionan los dos dipolos en el eje x para simplificar cálculos (figura sacada de [13]).

Aunque el efecto Casimir es la demostración más palpable de la existencia de ondas electromagnéticas en el vacío, existieron cálculos previos que guiaron a Casimir y a Polder a este resultado siendo el trabajo más antiguo el efectuado por Van der Waals [14]. En su modelo de 1873 Van der Waals consideró que la interacción entre 2 átomos se podía ver como 2 osciladores armónicos separados a una distancia R (donde R es mucho mayor que radio de los átomos).

Cada oscilador consta de cargas $\pm e$ con separación x_1 y x_2 , como se ve en la figura [1.1]. Entonces el hamiltoniano $\mathcal{H}_0$ para el sistema sin perturbar viene dado por

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2, \quad (1.1)$$

donde C es la constante de fuerza de cada oscilador. Por otro lado, el resultado clásico para la energía de interacción $\mathcal{H}_1$ de dos dipolos de momentos dipolares p_1 y p_2 separados una distancia R es

$$\mathcal{H}_1 = \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{R+x_1-x_2} - \frac{e^2}{R+x_1} - \frac{e^2}{R-x_2}; \quad (1.2)$$

dado que $|x_1|, |x_2| \ll R$, si expandimos la anterior ecuación obtenemos

$$\mathcal{H}_1 \cong -\frac{2e^2x_1x_2}{R^3}. \quad (1.3)$$

Podemos diagonalizar el hamiltoniano total $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ aplicando la siguiente

transformación

$$x_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2); \quad x_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s + x_a); \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s - x_a).$$

$$p_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2); \quad p_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s + p_a); \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_s - p_a).$$

Donde s y a denotan los modos simétrico y antisimétrico. Entonces, el hamiltoniano total $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ se transforma en

$$\mathcal{H} = \left[\frac{1}{2m} p_s^2 + \frac{1}{2} \left(C - \frac{2e^2}{R^3} \right) x_s^2 \right] + \left[\frac{1}{2m} p_a^2 + \frac{1}{2} \left(C + \frac{2e^2}{R^3} \right) x_a^2 \right], \quad (1.4)$$

de tal forma que las frecuencias de los osciladores vienen dadas por

$$\omega = \left(\frac{C}{m} \right)^{1/2} \left[1 \pm \frac{2e^2}{R^3} \right]^{1/2} = \omega_0 \left[1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{2e^2}{CR^3} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2e^2}{CR^3} \right)^2 + \dots \right]. \quad (1.5)$$

Entonces la energía del punto cero del sistema es $\frac{1}{2}\hbar(\omega_s + \omega_a)$, donde s y a denotan (como ya se señaló) los modos simétrico y antisimétrico, con $\omega_0 = (C/m)^{1/2}$. La energía de interacción entre los dipolos se puede escribir entonces como

$$\Delta U = \frac{1}{2}\hbar(\Delta\omega_s + \Delta\omega_a) = -\frac{\hbar\omega_0}{8} \left(\frac{2e^2}{CR^3} \right)^2 = -\frac{A}{R^6}. \quad (1.6)$$

Esta interacción atractiva es llamada como interacción de Van der Waals, interacción de London, o interacción inducida dipolo-dipolo [13]. Debido a la dependencia de R^{-6} , la interacción aumenta rápidamente a distancias cortas. Pero ¿qué sucedería si consideramos la distancia entre los dipolos lo suficientemente grande para incluir los efectos de retardo? Fue Casimir quien en 1947 en una investigación que llevaba a cabo para Philips, encontró que la interacción entre partículas decaía más rápidamente con la distancia (a distancias muy grandes), con la potencia de r^{-7} en lugar de la r^{-6} de la que se deriva la ecuación de Van der Waals.

1.2 El efecto Casimir

Como ya se mencionó el efecto Casimir describe la atracción entre dos placas paralelas perfectamente conductoras y sin carga confinadas en el vacío. Casimir propuso comparar dos situaciones: la energía de las fluctuaciones del vacío entre

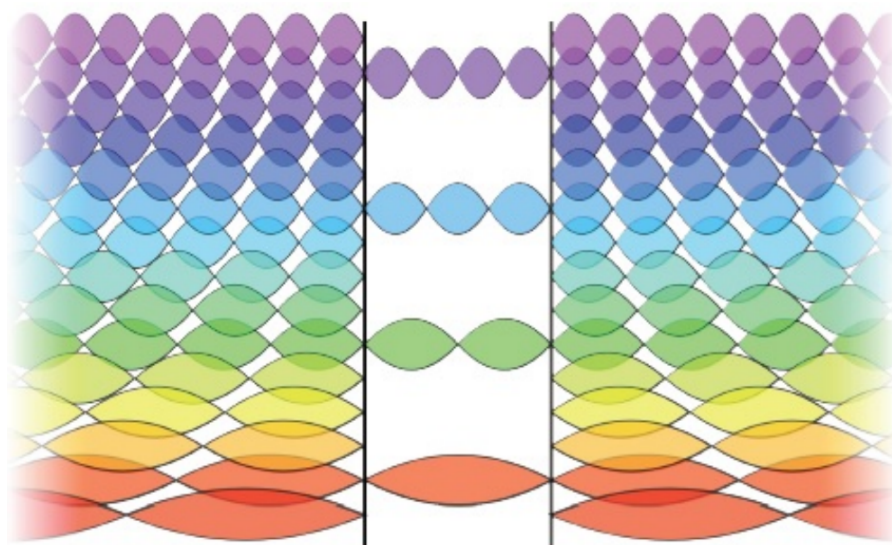


Figura 1.2: Descripción física del efecto de Casimir: El vacío que interacciona con las placas acercará las dos placas paralelas que estén muy próximos entre sí (figura sacada de [15]).

una placa metálica y un gas de electrones y la correspondiente a las fluctuaciones del vacío en presencia de unas “condiciones de contorno”, es decir, cuando el vacío está sometido a ciertos límites, donde las magnitudes físicas han de tomar valores determinados. La diferencia entre ambas energías tiene un valor intrínseco, independiente de donde hayamos colocado el origen de energías [Apéndice A].

Para ilustrar el ejemplo más básico del efecto Casimir, consideraremos el mismo sistema que Casimir demostró en su segundo documento de 1948: la energía del vacío de dos placas conductoras paralelas muy juntas (figura [1.2]) [3]. En este caso (que corresponde al efecto que lleva su nombre) Casimir consideró dos placas ideales, perfectamente conductoras y de extensión infinita (todo en aras de simplificar los cálculos) colocadas en el vacío del campo electromagnético (es decir, en ausencia de un campo ordinario, generado por algún sistema material). Todo campo, incluso en su estado vacío, ejerce una presión de radiación que es proporcional a la derivada de la energía con respecto a la distancia $\frac{\partial E}{\partial L}$ de los distintos modos de vibración. Resultó, en el caso de las dos placas, que los modos que contribuyen a la fuerza atractiva dominan ligeramente sobre los modos resonantes que tienden a separar las placas. Por consiguiente, sumando todos los efectos, las placas tienden a juntarse. Esa fuerza F_c es inversamente proporcional a la separación entre las placas L elevada a la cuarta potencia, con una constante de proporcionalidad en la que intervienen solamente constantes fundamentales, como la de Planck $\hbar$ y la velocidad de la luz c .

Así,

$$F_c = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 L^4}. \quad (1.7)$$

La magnitud F_c se denomina fuerza de Casimir. Para una separación de $10nm$, (equivalente a cien veces el tamaño característico de un átomo) el efecto Casimir produce el equivalente a una presión de una atmósfera.

1.2.1 Interacciones Átomo-Placa

En la década de 1940, Verwey y Overbeek, al investigar soluciones coloidales [16], desarrollaron una teoría de la cohesión de coloides (soluciones líquidas que contienen una suspensión de partículas) en la cual las fuerzas de London-van der Waals mantenían las partículas de dicho líquido juntas. Sin embargo, sus predicciones para los coloides compuestos de partículas más grandes no fueron confirmadas experimentalmente: la fuerza de atracción cayó más rápido que el r^{-7} predicho por su modelo. Overbeek sugirió que las predicciones de su modelo podrían volverse inexactas a medida que aumentaba la distancia entre las partículas. Para distancias mayores que las longitudes de onda de transición atómica, la velocidad finita de la luz perturbará significativamente la energía de interacción electromagnética entre partículas, dando lugar a una fuerza de atracción reducida [16]. Las consecuencias de la propagación de la luz finita, conocidas como "efectos de retardo", podrían ser modeladas por la teoría recientemente desarrollada de la electrodinámica cuántica. En 1948, Casimir y Polder extrapolaron esta línea de pensamiento [3, 4] a dos placas conductoras paralelas muy juntas, un argumento que finalmente condujo a la obtención de la fuerza entre dichas placas paralelas. Sin embargo, su primer artículo ignoró el contexto coloidal aunque, consideró la interacción directa de dos casos: un átomo cerca de una placa conductora y dos átomos cercanos.

El primer caso consiste en un átomo neutro que se coloca muy cerca del centro de una placa de una gran cavidad conductora. Casimir comenzó por encontrar los modos normales para el campo electromagnético dentro de la cavidad, y calcular el operador $\hat{G}$ que describe la interacción átomo-campo. Como en el caso de placas paralelas, incluso la diferencia de energías entre el átomo cercano y el lejano son divergentes y requieren renormalización.

Por otro lado, el ignorar la variación del campo electromagnético dentro del átomo da lugar a una divergencia infinita en la energía de interacción. Así que en lugar de modelar rigurosamente la estructura atómica, Casimir y Polder multiplicaron la energía por un regulador $e^{-\gamma z}$. También hay un polo simple en la expresión de

energía electrostática, que se elimina al integrarse muy cerca del polo. En ambos casos, las funciones se renormalizan tomando el límite cuando γ y z se acercan a cero. La energía finalmente toma la forma

$$\partial E = -\frac{2}{\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{k_n u^2 du}{u^2 + k_n^2} \frac{e^{2uR}}{2R} |q_n|^2 \left(1 + \frac{2}{2uR} + \frac{2}{4u^2 R^2} \right), \quad (1.8)$$

donde cada n corresponde a la contribución de un nivel de energía degenerado. Lo importante para extraer de esta expresión es que la fuerza entre un átomo y un plano conductor viene dada por R^{-3} para distancias cortas, pero cambia a R^{-4} a medida que aumenta la distancia. De hecho, la energía para R pequeña es exactamente la energía predicha clásicamente por London, mientras que la interacción a grandes distancias se modifica a medida que los efectos de retardo se vuelven significativos. La aparición de la energía de London en el límite de pequeñas distancias sugiere que el efecto Casimir reemplaza, la teoría existente de interacciones electromagnéticas que involucran partículas neutras. Este punto de vista también es sugerido por el segundo caso de Casimir y Polder: la interacción de dos átomos.

1.2.2 Interacciones Átomo-Átomo

Casimir y Polder también trataron la interacción entre dos átomos neutros, nuevamente usando la teoría de la perturbación pero a diferencia del caso anterior (en el que utilizaron teoría de perturbación de segundo orden) en este caso usaron la aproximación de cuarto orden. En calidad de estados no perturbados tomaron los estados atómicos (independientes del campo y entre sí) y el campo de radiación en el espacio vacío. El operador de la perturbación se calculó sumando las contribuciones de la interacción electrostática de los dos átomos, y sus respectivas interacciones con el campo electromagnético.

El cálculo (el cual no es trivial) subsiguiente revela nuevamente que en el límite de R pequeña, la interacción de campo da lugar a las mismas fuerzas del modelo de London, en el cual la fuerza decae con R^{-6} . Sin embargo, para R grande, los efectos de retardo comienzan a afianzarse, y la fuerza comienza a disminuir con R^{-7} .

Lo destacable de estas dos derivaciones es que al tomar en cuenta la velocidad finita de la luz, Casimir y Polder utilizaron todas las herramientas de la electrodinámica cuántica para abordar un problema que antes no se tenía en cuenta, y descubrieron un resultado inesperado que también podría interpretarse como un efecto del vacío cuántico.

1.3 La Fuerza repulsiva de Casimir (La teoría de Lifshitz)

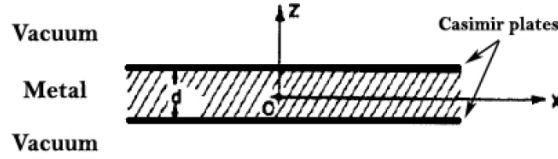


Figura 1.3: El efecto Casimir con un medio dieléctrico entre las placas (figura sacada de [17]).

En 1954 Lifshitz encontró una forma de agrupar todos los resultados obtenidos por Casimir en una sola teoría, considerando las placas como medios dieléctricos semi-infinitos, y el medio que separaba dichas placas con una permitividad dieléctrica diferente del vacío. Se encontró que el carácter de la fuerza podía ser repulsivo, lo cual fue comprobado experimentalmente muchos años después por Munday, Capasso y Parsegian [12], que usaron una esfera de oro y un plano de silicio rodeado de bromobenceno líquido para encontrar estas fuerzas repulsivas.

Para comprender este fenómeno, consideremos una sola placa metálica plana y delgada de espesor d . Se debe considerar que en la superficie se presentan plasmones [18]. De esta forma para calcular la presión asociada a los plasmones superficiales, se debe considerar una placa metálica con una constante dieléctrica

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.9)$$

La ausencia de cargas externas conduce a que la ecuación de continuidad para el desplazamiento eléctrico tome la forma [19]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. A continuación, se sabe que la componente normal de $\mathbf{D}$ es continua, a través de las fronteras y que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, excepto en los límites donde ϵ es discontinuo. Entonces al escribir el potencial escalar eléctrico, $\vec{E} = -\nabla \Phi$, obtenemos la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.11)$$

Debido a la simetría relativa al plano $z = 0$, existen soluciones tanto par como

impar, pero por simplicidad consideraremos solo los valores positivos de z

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) (e^{kz} \pm e^{-kz}), & 0 < z < d/2, \\ \Phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) e^{-kz} (e^{kd} \pm 1), & z > d/2, \end{cases} \quad (1.12)$$

donde $\vec{k}$ y $\vec{r}$ son vectores del plano $x - y$ y δ es una fase arbitraria. Ahora bien, derivando la componente normal del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en la frontera obtenemos

$$\mathbf{E}_z = \begin{cases} -k\Phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) (e^{kd/2} \mp e^{-kd/2}), & 0 < z < d/2 \\ k\Phi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) (e^{kd/2} \pm e^{-kd/2}), & z > d/2 \end{cases} \quad (1.13)$$

Sabiendo que la componente normal de $\mathbf{D}$ es continua en la frontera, la expresión para ϵ la podemos obtener de las referencias [20, 21]. Y por medio de estas condiciones de frontera

$$\epsilon(\omega) = - \left(\frac{e^{kd/2} \pm e^{-kd/2}}{e^{kd/2} \mp e^{-kd/2}} \right). \quad (1.14)$$

Calculando la relación de dispersión obtenemos

$$\omega_{\pm}(k) = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp e^{-kd}}, \quad (1.15)$$

la energía del punto cero para los plasmones es entonces

$$E_0(d) = \hbar \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int \left[\left(\omega_+(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \right) + \left(\omega_-(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \right) \right] d^2k \quad (1.16)$$

Al igual que en el caso de Casimir tomamos el límite $k \rightarrow \infty$. Finalmente, la fuerza por área se puede calcular como:

$$F(d) = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial E_0(d)}{\partial d} = 0.0078 \frac{\hbar \omega_p}{d^3} \quad (1.17)$$

La propiedad más significativa del resultado no es el número en sí sino su signo, un número positivo significa una fuerza repulsiva.

Recientemente [1], se encontró que dos placas dieléctricamente similares pueden repelerse entre sí en el vacío a través de las fuerzas de Casimir/vdW, si estas capas están hechas de aislante topológico (TI) [22, 23, 24, 25]. Estos TI se caracterizan por tener un parámetro topológico, que puede dar lugar a un comportamiento electrodinámico exótico como la inducción de un monopolo magnético por una carga eléctrica cerca de una superficie del TI [24]. Al ajustar este parámetro, se puede lograr la “repulsión de Casimir”, y físicamente dicha repulsión es una consecuencia

de la mezcla de polarización inducida por el acoplamiento magneto-eléctrico [26].

1.4 Aislantes Topológicos

En 2016, el Premio Nobel de física fue otorgado a D.J. Thouless, F.D. Haldane y J.M. Kosterlitz “por los descubrimientos teóricos de transiciones de fases topológicas y fases topológicas de la materia” en la década de 1980 [27]. El aspecto notable de las fases topológicas de la materia es que, a diferencia de la mayoría de las fases ordinarias de la materia, no pueden ser clasificadas por la teoría de las transiciones de fase de Landau. Esta teoría ha sido la base de las clasificaciones en la física de estado sólido, afirmando que cada transición de fase está acompañada por la ruptura repentina de una simetría distinta y continua. Estas transiciones de fase topológicas, también conocidas como transiciones de fase KT, deben su origen a los vórtices de Abrikosov, predichos en 1957 y premiados con el Premio Nobel de Física de 2003 (junto a Ginzburg y Leggett). Los vórtices cuánticos son defectos topológicos que se observan en superfluidos y superconductores. Onsager predijo en 1947 que, en superfluidos, estos vórtices cuánticos (en los que está cuantizado el momento angular) son claves en las transiciones de fase. Feynman en 1955 y Abrikosov en 1957 descubrieron que el campo magnético en un superconductor de tipo II también presenta este tipo de vórtices cuánticos (pero lo que está cuantizado es el flujo magnético) y similares transiciones de fase.

Kosterlitz y Thouless demostraron en 1972 (Berezinskii lo hizo en 1971, pero falleció en 1980) que podían existir transiciones de fase mediadas por vórtices cuánticos en materiales planos 2D, pero que eran transiciones de fase topológicas, en lugar de transiciones de fase con rotura de simetría, las llamadas transiciones de fase KT (también BKT). En estas transiciones de fase los vórtices se aparean (algo inspirado en el apareamiento de electrones en los pares de Cooper que explican la superconductividad) por debajo de una temperatura crítica.

Por otro lado, en presencia de un campo magnético externo, el campo electromagnético en un material bidimensional se describe por el llamado potencial de Berry. La aplicación de la simetría gauge local a dicho campo conduce a que su circulación esté cuantizada (en función del primer número de Chern); básicamente, el potencial de Berry sólo puede dar vueltas completas a un defecto y el número de vueltas completas debe ser un número entero (positivo o negativo según la dirección), la llamada carga topológica.

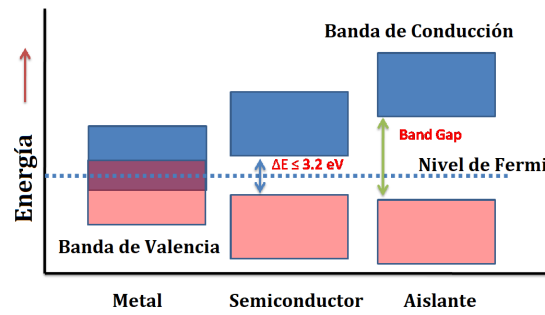


Figura 1.4: Descripción de la teoría de bandas para un material conductor, un semiconductor y un aislante (figura sacada de [23]).

Pero entonces ¿cómo se define un aislante topológico? para esto recordemos la diferencia entre conductores y aislantes. Un conductor, presenta una resistencia muy baja al movimiento de los electrones, los aislantes regularmente no conducen electricidad a menos que se rompa su constante dieléctrica. Para explicar estos dos comportamientos recurrimos al modelo de bandas. La banda de valencia es la región permitida de menor energía que pueden habitar los electrones, la banda de conducción, más energética, es en la que los electrones se pueden mover con libertad produciendo corrientes eléctricas. Descrito desde la teoría de bandas, si las bandas de conducción y de valencia se solapan o se tocan tenemos un conductor. Si están separadas por una banda prohibida estrecha tenemos un semiconductor, pero si la banda prohibida es ancha tenemos un aislante.

La diferencia entre un aislante topológico y uno convencional es el número de veces que las bandas asociadas a los estados de conducción superficial cruzan el nivel de Fermi en la semicelda unidad (la mitad de la zona de Brillouin). Si lo cruzan un número par de veces, tenemos un aislante convencional y estos estados no son robustos, ya que subiendo o bajando el nivel de Fermi (dopando el material) desaparecen. En un aislante topológico cruzan el nivel de Fermi un número impar de veces [28]. Por tanto, son robustos, no se pueden destruir subiendo o bajando el nivel de Fermi, es decir, tenemos estados topológicamente protegidos.

Esta cantidad que representa el número de veces que se cruza el nivel de Fermi es conocido como el parámetro de orden topológico Θ (término topológico para abreviar), el cual si lo extendemos a la electrodinámica de Maxwell da lugar a un

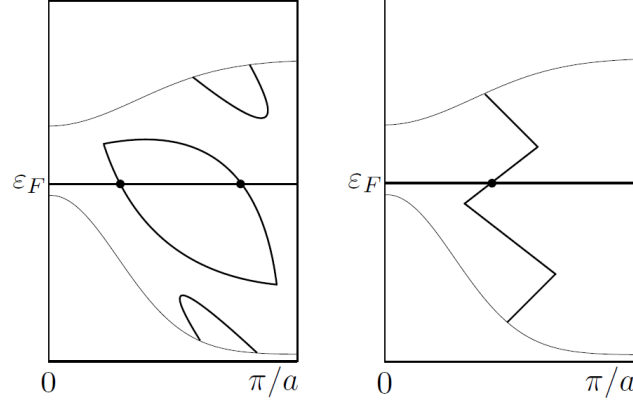


Figura 1.5: Diferencia entre los aislantes convencionales y los aislantes topológicos. Dos posibles conectividades, (a) tiene un número par de cruces que no están topológicamente protegidos, (b) tiene un número impar de cruces, que corresponde a que está topológicamente protegido (figura sacada de [28]).

Lagrangiano de Axión de la forma

$$\Delta\mathcal{L}_\Theta = \Theta(\alpha/4\pi^2)\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\Theta}{4}(\alpha/4\pi^2)\mathbf{F}_{\mu\nu}\hat{\mathbf{F}}^{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

donde $\hat{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el simbolo de Levi-Civita. En general, Θ puede ser un campo dinámico, sin embargo, en este trabajo lo tomaremos como un escalar constante, haciendo la Ec. (1.18) un pseudo-escalar. Además, definido en una variedad en la que hay dos dominios definidos por sus diferentes valores constantes de Θ que están separados por una interfaz común o límite Σ el término se puede considerar como un parámetro efectivo que caracteriza las propiedades de un nuevo vacío electromagnético que posiblemente surja de una teoría más fundamental o, como se aplica a los medios materiales, como un parámetro macroscópico efectivo para describir nuevos grados cuánticos de libertad de materia aparte de la permitividad habitual ϵ y la permeabilidad μ [29].

De esta forma nuestro modelo que se basa en la electrodinámica de Maxwell acoplada a un término Θ de gauge invariable describe una acción de la forma [29]

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[-\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\Theta\frac{\alpha}{4\pi^2}\mathbf{F}_{\mu\nu}\hat{\mathbf{F}}^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right], \quad (1.19)$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$ es la constante de estructura fina y j^μ es una corriente externa. La constante de acoplamiento para el término Θ , $\frac{\alpha}{4\pi^2}$, se elige de tal forma que la

carga eléctrica total $q_e = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}$ tiene que ser un múltiplo entero de la carga del electrón e , mientras que la carga magnética $q_m = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ debe ser un múltiplo entero de $g = e/2\alpha$ por la condición de cuantización de Dirac [30].

Hacemos una partición del espacio en dos regiones: $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de tal manera que

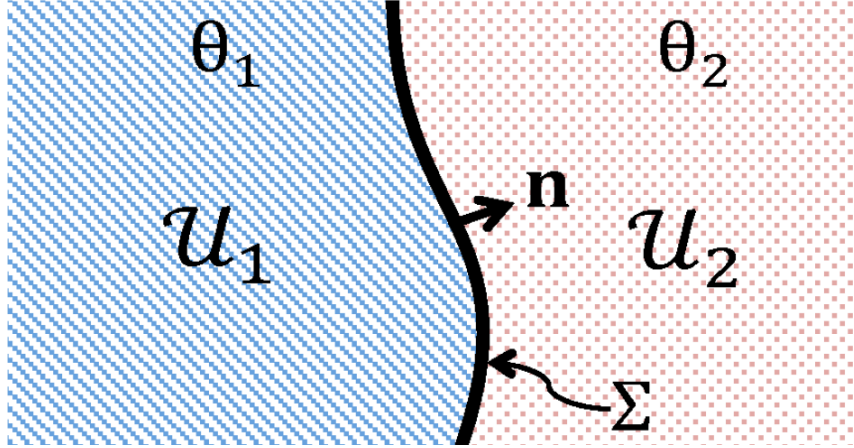


Figura 1.6: Región sobre la cual se define la teoría del campo electromagnético para los aislantes topológicos (figura sacada de [29]).

los medios $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ se cruzan a lo largo de un límite bidimensional común Σ , que llamaremos el límite Θ , de modo que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\Sigma = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, como se muestra en la Figura (1.6). También suponemos que el campo Θ es constante por tramos de tal manera que toma el valor constante $\Theta = \theta_1$ en la región $\mathcal{U}_1$ y el valor constante $\Theta = \theta_2$ en la región $\mathcal{U}_2$. Esta situación se expresa en la función característica

$$\Theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \theta_1, & \mathbf{x} \in \mathcal{U}_1 \\ \theta_2, & \mathbf{x} \in \mathcal{U}_2. \end{cases} \quad (1.20)$$

En este escenario, el término Θ en la acción no es un invariante topológico global porque se define en una región con el límite Σ . Al variar la acción, se genera un conjunto de ecuaciones de Maxwell con una corriente adicional efectiva

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu} = \bar{\alpha} \delta(\Sigma) n_\mu \hat{\mathbf{F}}^{\mu\nu} + 4\pi j^\nu, \quad (1.21)$$

donde n_μ es la normal hacia fuera de Σ , y $\bar{\alpha} = \alpha(\theta_1 - \theta_2)/\pi$, impone la invariancia de la dinámica clásica bajo los cambios de Θ por cualquier constante, $\Theta \rightarrow \Theta + C$. De echo la conservación se puede verificar directamente tomando la divergencia en ambos lados de la ecuación (1.21) y usando propiedades de simetría. Entonces el

conjunto de Ecs. (1.21) para $\bar{\alpha}$ se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \bar{\alpha} \delta(\Sigma) \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + 4\pi\rho, \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \bar{\alpha} \delta(\Sigma) \mathbf{E} \times \mathbf{n} + 4\pi\mathbf{J}, \quad (1.23)$$

aquí $\mathbf{n}$ es la normal a Σ que se muestra en la Figura (1.6). Adicionalmente en este trabajo consideramos una geometría simple correspondiente a una superficie Σ tomada como el plano $z = a$.

Como vemos en las Ecs. (1.22-1.23) el comportamiento de Θ en las regiones $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ es el mismo que en la electrodinámica estándar. El término Θ modifica las ecuaciones de Maxwell solo en la superficie de Σ . Aquí $\mathbf{F}^{i0} = E^i$, $\mathbf{F}^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$, y $\hat{\mathbf{F}}^{i0} = B^i$, $\hat{\mathbf{F}}^{ij} = -\epsilon^{ijk} E^k$. Las ecuaciones (1.22-1.23) también sugieren que la respuesta electromagnética de un sistema en presencia de un término Θ se puede describir en términos de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}, \quad (1.24)$$

de esta forma las relaciones constitutivas son

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{\alpha}{\pi} \theta(z) \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\alpha}{\pi} \theta(z) \mathbf{E}, \quad (1.25)$$

donde $\theta(z)$ viene dado por la ecuación (1.20). Volviendo al problema de los valores permitidos de Θ para describir los aislantes topológicos. La simetría de reajuste antes mencionada $\Theta \rightarrow \Theta + C$ permitiría establecer Θ igual a cero en el caso clásico. Sin embargo, desde el punto de vista cuántico, dado que para flujos eléctricos y magnéticos adecuadamente cuantizados, $\mathcal{S}_\theta/\hbar$ es un múltiplo entero de Θ , solo $C = 2\pi n$ para valores enteros de n es una simetría permitida, de lo contrario resultarían contribuciones no triviales a la integral de trayectoria [31]. Además, dado que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ es impar bajo transformaciones $t \rightarrow -t$, solo $\Theta = 0$ y $\Theta = \pi$ dan una teoría simétrica de inversión de tiempo. Por lo tanto, la inversión de tiempo toma Θ en $-\Theta$, entonces $\Theta = 0$ es invariante de inversión temporal per se, mientras que $\Theta = \pi$ es invariante después del cambio $\Theta \rightarrow \Theta + 2\pi n$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 2

La Teoría de Lifshitz

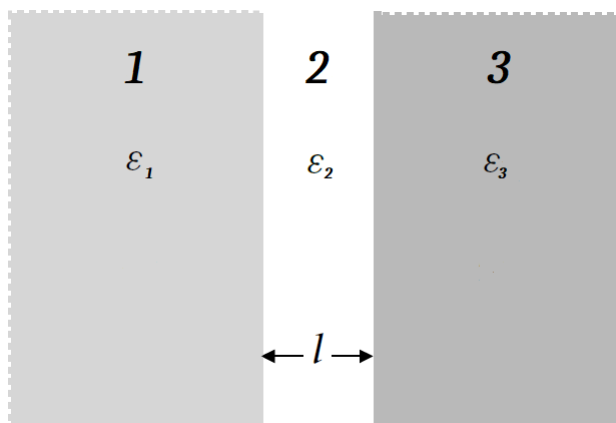


Figura 2.1: geometría considerada por Lifshitz.

La teoría básica que proporciona una descripción unificada de la interacción de van der Waals y la interacción de Casimir entre dieléctricos planos fue propuesta por Lifshitz en 1956 [20]. La derivación original de Lifshitz se basó en la suposición de que los materiales dieléctricos en el estado de equilibrio térmico se caracterizan por ser fuentes de fluctuaciones aleatorias de campos electromagnéticos de longitud de onda larga. Formalmente, la suma de dichas fluctuaciones aleatorias en cualquier conjunto de espacios puede ser descrita como una suma de Fourier de los modos oscilatorios que se extienden a través del espacio. El “paso inestable” en esta derivación, es que tratamos los modos que se extienden sobre los medios disipativos como si fueran oscilaciones sinusoidales puras. Implícitamente, este tratamiento filtra todas las fluctuaciones y disipaciones para imaginar oscilaciones puras; solo entonces la derivación transforma estas oscilaciones en perturbaciones suavizadas. Consideremos la geometría original de Lifshitz de dos medios dieléctricos

semi-infinitos separados por un medio de ancho l . Por simplicidad supondremos que los dieléctricos se encuentran en el vacío a temperatura $T = 0$, los materiales son no magnéticos. En ausencia de carga y densidades de corriente, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} &= 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Las frecuencias de oscilación del campo EM entre los dieléctricos deben encontrarse a partir de la solución de la ecuación (2.1), complementada por las condiciones de frontera de la electrodinámica clásica impuestas en los planos $z = \pm l/2$ [32, 33].

$$\begin{aligned}E_{1,T}(t, \mathbf{r}) &= E_{2,T}(t, \mathbf{r}) \quad , \quad D_{1,n}(t, \mathbf{r}) = D_{2,n}(t, \mathbf{r}), \\ B_{1,n}(t, \mathbf{r}) &= B_{2,n}(t, \mathbf{r}) \quad , \quad B_{1,T}(t, \mathbf{r}) = B_{2,T}(t, \mathbf{r}),\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde los subíndices "n" y "T" hacen referencia a las componentes normal y tangencial, respectivamente (el subíndice 1 se refiere al vacío y el subíndice 2 al medio dieléctrico). La teoría de Lifshitz ignora la dispersión espacial. En este caso, la ecuación que conecta $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ toma la forma

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - t', \mathbf{r}) \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt',\tag{2.3}$$

donde el kernel del operador integral es $\varepsilon(\tau, \mathbf{r})$ (aquí consideramos un dieléctrico isotrópico con propiedades independientes del tiempo). De acuerdo con la ecuación (2.3), el desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ en la posición $\mathbf{r}$ y el tiempo t está determinado por el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el mismo punto $\mathbf{r}$ pero en diferentes momentos $t' \leq t$. Esto indica la presencia de la dispersión temporal. Aplicando transformadas de Fourier,

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad , \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega,\tag{2.4}$$

y sustituyendo en la ecuación (2.3), finalmente obtenemos

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}),\tag{2.5}$$

donde, la permitividad dieléctrica dependiente de ω es,

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \varepsilon(\tau, \mathbf{r}) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.6)$$

Para el caso de dos medios dieléctricos semi-infinitos idénticos en el vacío separados por una brecha de ancho l

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon(\omega), & |z| \geq l/2, \\ 1, & |z| < l/2, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde $\varepsilon(\omega)$ viene dado por [34]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{g_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}, \quad (2.8)$$

siendo $\omega_j \neq 0$ las frecuencias del oscilador. Las magnitudes g_j son las fuerzas del oscilador y expresan la probabilidad de absorción o emisión de radiación electromagnética en las transiciones entre los niveles de energía de un átomo o molécula, γ_j es el parámetro de frenado, y N es el número de osciladores. Usualmente, $\gamma_j \ll \omega_j$. De la ecuación (2.8), la permitividad dieléctrica para $\omega = 0$ toma la forma [35]

$$\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(0) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{g_j}{\omega_j^2} < \infty. \quad (2.9)$$

Para dieléctricos polares que consisten en moléculas que tienen un momento dipolar intrínseco, se debe agregar un término adicional en el lado derecho de la ecuación (2.8).

2.1 Representación de la fórmula de Lifshitz en términos de frecuencias imaginarias

Consideremos un campo electromagnético monocromático [14]

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.10)$$

Substituyendo en las ecuaciones de Maxwell (2.1) y usando las ecuaciones (2.5) y (2.7), obtenemos que las ecuaciones dentro de los medios dieléctricos toman la forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + i\varepsilon(\omega)\frac{\omega}{c}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Entonces las ecuaciones de onda para los campos son

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.12)$$

El conjunto ortonormal completo de soluciones de la ecuación (2.12) es

$$\mathbf{E}_{(p),\mathbf{k}_\perp,\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{(p)}(z, k_\perp)\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) \quad , \quad \mathbf{B}_{(p),\mathbf{k}_\perp,\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}_{(p)}(z, k_\perp)\exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp), \quad (2.13)$$

donde, $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\mathbf{r}_\perp, z)$, $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ y el subíndice $p = \text{TM, TE}$ representa cada una de las posibles polarizaciones del campo (transversal magnético y transversal eléctrico, respectivamente). Substituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12), obtenemos las ecuaciones de onda para las funciones $\mathbf{e}_{(p)}$ y $\mathbf{b}_{(p)}$:

$$\mathbf{e}_{(p)}''(z, k_\perp) - k^2 \mathbf{e}_{(p)}(z, k_\perp) = 0 \quad , \quad \mathbf{b}_{(p)}''(z, k_\perp) - k^2 \mathbf{b}_{(p)}(z, k_\perp) = 0, \quad (2.14)$$

donde

$$k^2 = k^2(\omega, k_\perp) = k_\perp^2 - \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}; \quad (2.15)$$

para el vacío k^2 debe ser reemplazado con

$$q^2 = q^2(\omega, k_\perp) = k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.16)$$

De manera similar, la primera y cuarta ecuaciones de Maxwell conducen a ecuaciones para las proyecciones de los vectores $\mathbf{e}_{(p)}$ y $\mathbf{b}_{(p)}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{(p),z}'(z, k_\perp) + ik_y \mathbf{e}_{(p),y}(z, k_\perp) + ik_x \mathbf{e}_{(p),x}(z, k_\perp) &= 0, \\ \mathbf{b}_{(p),z}'(z, k_\perp) + ik_y \mathbf{b}_{(p),y}(z, k_\perp) + ik_x \mathbf{b}_{(p),x}(z, k_\perp) &= 0.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Ahora vamos a satisfacer las condiciones de continuidad (2.2). Comenzaremos considerando el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico. Hay que tener en cuenta que $\mathbf{e}_{(p),z}$ no es igual a cero solo para $p = \text{TM}$, por lo que ahora consideramos el modo transversal magnético. Al usar las soluciones del campo eléctrico, la primera

ecuación en la ecuación (2.14) la podemos representar $\mathfrak{e}_{(TM),z}$ de la forma

$$\mathfrak{e}_{(TM),z}(z, k_{\perp}) = \begin{cases} A \exp(kz), & z < -l/2, \\ B \exp(qz) + C \exp(-qz), & |z| < l/2, \\ D \exp(-kz), & z > l/2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Entonces las condiciones de continuidad para el campo eléctrico $\mathfrak{e}_{(TM),z}$ implica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Ak \exp(-kl/2) &= Bq \exp(-ql/2) - Cq \exp(ql/2), \\ -Dk \exp(-kl/2) &= Bq \exp(ql/2) - Cq \exp(-ql/2), \\ A\varepsilon \exp(-kl/2) &= Bq \exp(-ql/2) + C \exp(ql/2), \\ D\varepsilon \exp(-kl/2) &= Bq \exp(ql/2) + C \exp(-ql/2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Este es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones algebraicas con cantidades desconocidas A , B , C y D . Tiene una solución no trivial bajo la condición de que el determinante de sus coeficientes sea igual a cero,

$$\Delta^{(TM)}(\omega, k_{\perp}) \equiv e^{-kl}[(\varepsilon q + k)^2 e^{ql} - (\varepsilon q - k)^2 e^{-ql}] = 0. \quad (2.20)$$

De manera similar, podemos obtener las condiciones de continuidad (2.2), para la inducción magnética. La componente $\mathfrak{b}_{(p),z}$ no es igual a cero para el modo transversal eléctrico $p = \text{TE}$. Entonces, la solución no trivial bajo la condición de que el determinante de sus coeficientes (E , F , G y H) sea igual a cero es

$$\Delta^{(TE)}(\omega, k_{\perp}) \equiv e^{-kl}[(q + k)^2 e^{ql} - (q - k)^2 e^{-ql}] = 0. \quad (2.21)$$

Las soluciones de las ecuaciones trascendentales (2.20) y (2.21) son las frecuencias propias del fotón $\omega_{k_{\perp},n}^{(TM)}$, n y $\omega_{k_{\perp},n}^{(TE)}$ para la configuración de dieléctricos semi-infinitos separados por un espacio de vacío. Por lo tanto, $\Delta^{(TM)}$ y $\Delta^{(TE)}$ son las funciones de generación de modo. Además, hay que tener en cuenta que estas frecuencias propias son complejas (porque la permitividad dieléctrica en (2.8) es compleja), con partes imaginarias positivas que son mucho más pequeñas que las partes reales [21].

En términos de las frecuencias propias de los fotones todavía desconocidas, la energía del vacío del campo electromagnético en equilibrio térmico con las placas dieléctricas

a temperatura cero viene dada por

$$E_0(l) = \frac{S\hbar}{4\pi} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \sum_n (\omega_{k_\perp, n}^{(\text{TM})} + \omega_{k_\perp, n}^{(\text{TE})}). \quad (2.22)$$

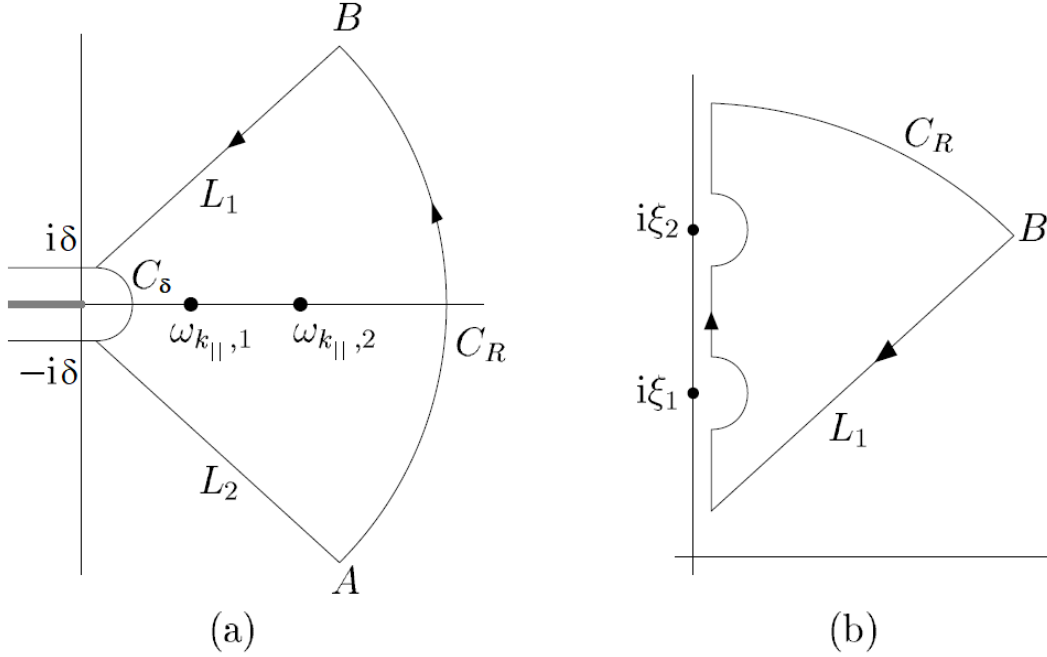


Figura 2.2: Trayectorias de integración (a) en el plano C_1 y (b) C_2 en el plano de la frecuencia compleja. Las frecuencias de Matsubara son ξ_n y las frecuencias propias del fotón son ω_α [36].

Las sumas sobre las soluciones de las ecuaciones (2.20) y (2.21) se pueden calcular usando el principio del argumento [Apendice B]. Consideramos un contorno cerrado que consiste en un semicírculo C_+ de radio infinito en la mitad derecha del plano complejo ω con su centro en el origen, y el eje imaginario $[-i\infty, i\infty]$ omitido en sentido contrario a las agujas del reloj (figura [2.2]). Dado que las funciones $\Delta^{(\text{TM})}$ y $\Delta^{(\text{TE})}$ no tienen polos dentro de este contorno, obtenemos

$$\sum_n \omega_{k_\perp, n}^{(\text{TM}, \text{TE})} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega \ln \Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}(\omega, k_\perp) + \int_{C_+} d\omega \ln \Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}(\omega, k_\perp) \right]. \quad (2.23)$$

La segunda integral en el lado derecho de la ecuación (2.23) se calcula facilmente, bajo la suposición

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = 1 \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} = 0. \quad (2.24)$$

El resultado es infinito y no depende de l :

$$\int_{C_+} d\omega \ln \Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}(\omega, k_\perp) = 4 \int_{C_+} d\omega. \quad (2.25)$$

Introduciendo una nueva variable $\xi = -i\omega$, reorganizamos la ecuación (2.23) a la forma

$$\sum_n \omega_{k_\perp, n}^{(\text{TM}, \text{TE})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ln \Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}(\omega, k_\perp) + \frac{2}{\pi} \int_{C_+} d\xi. \quad (2.26)$$

La energía dada por las ecuaciones (2.22) y (2.26) es infinita. La energía de Casimir finita por unidad de área se obtiene mediante la resta de $E_0(l)$ de la energía del sistema [apendice A]:

$$E(l) = \frac{E_0(l)}{S} - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{E_0(l)}{S}. \quad (2.27)$$

Esto es equivalente a despreciar la integral a lo largo de C_+ y la sustitución de $\Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}(i\xi, k_\perp)$ con $\Delta^{(\text{TM}, \text{TE})}/\Delta_\infty^{(\text{TM}, \text{TE})}$, donde

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^{(\text{TM})}(i\xi, k_\perp) &= e^{(q-k)l} (\varepsilon q + k)^2, & \Delta_\infty^{(\text{TE})}(i\xi, k_\perp) &= e^{(q-k)l} (q + k)^2 \\ q^2 = q^2(i\xi, k_\perp) &= k_\perp^2 + \frac{\xi^2}{c^2}, & k^2 = k^2(i\xi, k_\perp) &= k_\perp^2 + \varepsilon(i\xi) \frac{\xi^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Entonces el resultado finalmente es

$$E(l) = \frac{\hbar}{8\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_{-\infty}^\infty d\xi \left[\ln \frac{\Delta^{(\text{TM})}(i\xi, k_\perp)}{\Delta_\infty^{(\text{TM})}(i\xi, k_\perp)} + \ln \frac{\Delta^{(\text{TE})}(i\xi, k_\perp)}{\Delta_\infty^{(\text{TE})}(i\xi, k_\perp)} \right]. \quad (2.29)$$

Integrando la ecuación (2.29) por partes y usando las expresiones explícitas (2.20), (2.21) y (2.28), llegamos a **la fórmula de Lifshitz a temperatura cero**,

$$E(l) = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_{-\infty}^\infty d\xi [\ln[1 - R_{\text{TM}}^2(i\xi, k_\perp)e^{-2ql}] + \ln[1 - R_{\text{TE}}^2(i\xi, k_\perp)e^{-2ql}]], \quad (2.30)$$

donde las cantidades R_{TM} y R_{TE} son los coeficientes de Fresnel para las ondas transversal magnética y eléctrica respectivamente y vienen dadas como:

$$R_{\text{TM}}(i\xi, k_\perp) = \frac{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, k_\perp) - k(i\xi, k_\perp)}{\varepsilon(i\xi)q(i\xi, k_\perp) + k(i\xi, k_\perp)}, \quad R_{\text{TE}}(i\xi, k_\perp) = \frac{q(i\xi, k_\perp) - k(i\xi, k_\perp)}{q(i\xi, k_\perp) + k(i\xi, k_\perp)}, \quad (2.31)$$

$$R_{\text{TM}}(\psi_0) = \frac{\varepsilon \cos \psi_0 - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \psi_0}}{\varepsilon \cos \psi_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \psi_0}}, \quad R_{\text{TE}}(\psi_0) = \frac{\cos \psi_0 - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \psi_0}}{\cos \psi_0 + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \psi_0}}. \quad (2.32)$$

En las anteriores expresiones ψ_0 es el ángulo de incidencia desde la brecha del vacío hacia el dieléctrico. Considerando que para ondas electromagnéticas reales en el vacío, $\sin \psi_0 = k_\perp c / \omega$, vemos que $R_{\text{TM}}(\psi_0)$ y $R_{\text{TE}}(\psi_0)$ coinciden con $R_{\text{TM}}(\omega, k_\perp)$ y $R_{\text{TE}}(\omega, k_\perp)$, respectivamente. Sin embargo, una propiedad importante de los coeficientes (2.31) es que se calculan a lo largo del eje de frecuencia imaginario y dependen de las dos variables *independientes* ξ y $k_\perp$. No hay restricciones como $k_\perp c \leq \xi$ en las dos integraciones con respecto a ξ y $k_\perp$ en la fórmula de Lifshitz (2.30). Usando la ecuación $P(l) = -\frac{\partial E(l)}{\partial l}$, se obtiene la fórmula de Lifshitz para la presión de Casimir:

$$P(l) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_{-\infty}^\infty d\xi q \left[[R_{\text{TM}}^{-2}(i\xi, k_\perp) e^{2ql} - 1]^{-1} + [R_{\text{TE}}^{-2}(i\xi, k_\perp) e^{2ql} - 1]^{-1} \right]. \quad (2.33)$$

En la derivación anterior, se despreciaron las pequeñas partes imaginarias de las frecuencias propias del fotón [36].

2.2 La fórmula de Lifshitz para pequeñas y grandes distancias

Aquí consideraremos el comportamiento característico de la presión $P(l)$ para pequeñas y grandes separaciones de l en comparación con la longitud de onda λ_0 de absorción característica del material dieléctrico. Para $l \ll \lambda_0$, la región $ql \sim 1$, en la integral con respecto a $k_\perp$ en la ecuación (2.33) corresponde a un valor bastante grande de q . Esta es la región de altas frecuencias ξ , donde $q \approx k$ y, por lo tanto $R_{\text{TE}} \ll R_{\text{TM}}$. Al introducir una nueva variable $y = 2ql$, y al cambiar el orden de integración con respecto a ξ y a $k_\perp$, obtenemos

$$P(l) = -\frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty d\xi \int_{\xi/\omega_c}^\infty y^2 dy \left[R_{\text{TM}}^{-2}(i\xi, y) e^y - 1 \right]^{-1}. \quad (2.34)$$

donde $\omega_c = c/2l$ es la frecuencia característica. Ahora, en la misma aproximación, es posible reemplazar el límite inferior de integración ξ/ω_c con cero y cancelar los q y k en el numerador y el denominador en la definición (2.31) del coeficiente de reflexión R_{TM} . Como resultado se obtiene [37]

$$P(l) = -\frac{\mathcal{H}}{6\pi l^3}, \quad \mathcal{H} = \frac{3\hbar}{8\pi} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty y^2 dy \left[\left(\frac{\varepsilon(i\xi) + 1}{\varepsilon(i\xi) - 1} \right)^2 e^y - 1 \right]^{-1}, \quad (2.35)$$

donde $\mathcal{H}$ es una constante denominada la constante de Hamaker. Esta es la presión de van der Waals sin efectos de retardo en la configuración de dos placas dieléctricas semi-infinitas. Es de carácter no relativista y, por lo tanto, no depende de la velocidad de la luz c .

Ahora consideramos el límite opuesto de grandes distancias, que satisface la condición $l \gg \lambda_0$. Al mismo tiempo, se supone que la separación es lo suficientemente pequeña como para despreciar los efectos térmicos. En este caso, las bajas frecuencias proporcionan la contribución dominante a la presión. Como resultado, la permitividad dieléctrica a lo largo del eje de frecuencia imaginario puede reemplazarse con ε_0 definido en la ecuación (2.9). Introduciendo variables adimensionales

$$y = 2ql \quad , \quad \zeta = \frac{\xi}{\omega_c}, \quad (2.36)$$

y utilizando la ecuación (2.31), representamos la presión para grandes distancias de la siguiente forma

$$P(l) = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \Psi(\varepsilon_0). \quad (2.37)$$

Aquí, la función $\Psi(\varepsilon_0)$ se define como [36]

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon_0) = \frac{15}{2\pi^4} \int_0^\infty d\zeta \int_\zeta^\infty y^2 dy \left\{ \left[\left(\frac{\varepsilon_0 y + \sqrt{y^2 + \zeta^2(\varepsilon_0 - 1)}}{\varepsilon_0 y - \sqrt{y^2 + \zeta^2(\varepsilon_0 - 1)}} \right)^2 e^y - 1 \right]^{-1} \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + \zeta^2(\varepsilon_0 - 1)}}{y - \sqrt{y^2 + \zeta^2(\varepsilon_0 - 1)}} \right)^2 e^y - 1 \right]^{-1} \right\}. \quad (2.38) \end{aligned}$$

La ecuación (2.38) incluye efectos de retardo, un factor esencial en separaciones grandes. El carácter relativista de la ecuación (2.37) se refleja en la dependencia explícita de la velocidad de la luz c . En el caso límite $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$, la función $\Psi(\varepsilon_0) \rightarrow 1$ se obtiene el caso de placas de metal ideal.

2.3 El caso Anisotrópico

Los sistemas considerados en la anterior discusión son isotrópicos. Sin embargo, los efectos de anisotropía sobre la energía y fuerza de Casimir pueden ser relevantes en sistemas con propiedades ópticas complejas. Un componente de la interacción entre partículas coloidales suspendidas en un fluido son las fuerzas de van der Waals

(vdW). En el límite de pequeñas separaciones (régimen de no retardo, distancias por debajo de aproximadamente $100nm$), las fuerzas de dispersión están mediadas por modos longitudinales similares a la materia localizados en las interfaces, mientras que en el límite de grandes distancias (efectos de retardo) están mediadas por modos transversales del tipo luz que se encuentran entre las interfaces [35]. El tratamiento cuántico-mecánico del régimen de no retardo fue iniciado por London y van der Waals y del régimen que incluye los efectos de retardo por Casimir y Polder [3, 4]. En estos trabajos se notó un elemento común: la fuerza tiene un signo negativo que indica que las fuerzas son exclusivamente de carácter atractivo. Lifshitz [20] introdujo un tratamiento macroscópico del problema donde las propiedades electromagnéticas de los cuerpos y el medio se caracterizaron a través de funciones de permitividad dieléctrica. Dzyaloshinskii y Pitaevskii generalizaron la teoría de Lifshitz a cuerpos no uniformes utilizando el formalismo de las funciones de Green [38]. Más tarde, van Kampen, Nijboer y Schram desarrollaron un método para calcular la interacción vdW basada en el conocimiento de los estados de superficie electromagnética, lo que simplificó el tratamiento de geometrías complejas [39]. Se encontró que las fluctuaciones de carga correlacionadas entre cuerpos anisotrópicos que actúan a través de un medio anisotrópico crean pares, así como fuerzas atractivas o repulsivas.

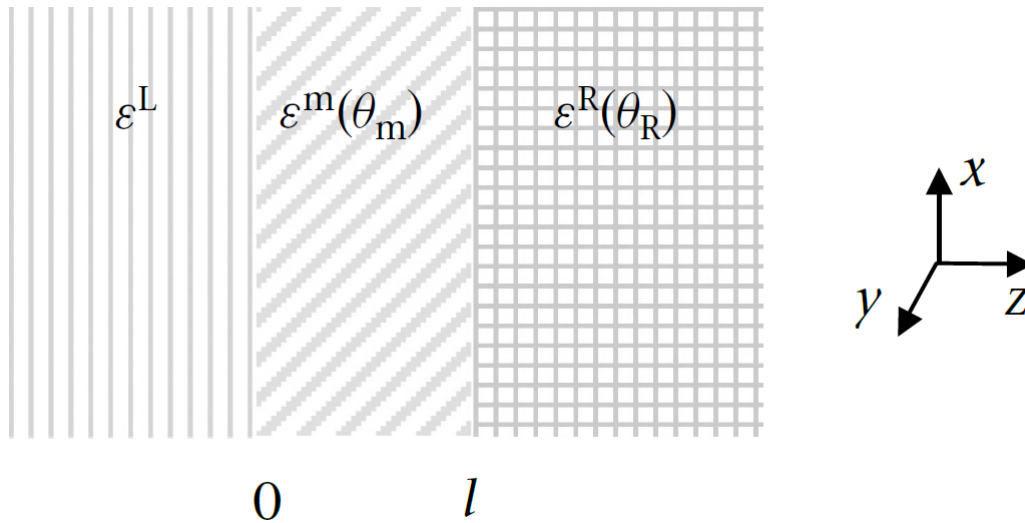


Figura 2.3: la teoría de Lifshitz para el caso anisotrópico [34].

Para el caso anisotrópico la permitividad dieléctrica ε es un tensor en lugar de un escalar. Cuando los ejes principales de cada material son perpendiculares, este tensor

se puede escribir como

$$\hat{\varepsilon}^{(i)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde $(i) = 1, 2, 3$ hace referencia al medio. Para mayor claridad, nos limitaremos al caso en el que el eje z para todos los materiales es perpendicular a las interfaces. Como se mostró previamente, cada una de las componentes $\varepsilon_x^{(i)}$, $\varepsilon_y^{(i)}$ y $\varepsilon_z^{(i)}$ depende de la frecuencia. Adicionalmente, estos materiales se pueden girar, uno respecto al otro, alrededor del eje z con $\theta_{(i)}$ como el ángulo de rotación. Manteniendo fijo $\theta_{(1)}$ se pueden escribir los tensores dieléctricos $\varepsilon^{(2)}(\theta_2)$ y $\varepsilon^{(3)}(\theta_3)$, $(j) = 2, 3$ [34]:

$$\hat{\varepsilon}^{(j)}(\theta_{(j)}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \cos^2 \theta_{(j)} + \varepsilon_y^{(j)} \sin^2 \theta_{(j)} & (\varepsilon_x^{(j)} - \varepsilon_y^{(j)}) \sin \theta_{(j)} \cos \theta_{(j)} & 0 \\ (\varepsilon_x^{(j)} - \varepsilon_y^{(j)}) \sin \theta_{(j)} \cos \theta_{(j)} & \varepsilon_y^{(j)} \cos^2 \theta_{(j)} + \varepsilon_x^{(j)} \sin^2 \theta_{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Al igual que en la derivación del resultado de Lifshitz, es necesario delimitar los modos electromagnéticos que dependen de la ubicación de las interfaces. Para el caso de no retardo, en el que se ignora la velocidad finita de la luz, las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico se pueden escribir como

$$\nabla \cdot (\hat{\varepsilon} \mathbf{E}) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.41)$$

Por la segunda de estas ecuaciones, sabemos que podemos introducir un potencial escalar Φ tal que $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. Esto nos permite convertir la primera ecuación en

$$\nabla \cdot (\hat{\varepsilon} \nabla \Phi) = 0 \quad (2.42)$$

que se resolverá sujeto a las condiciones usuales de que E_x , E_y y $(\hat{\varepsilon} E)_z$ sean continuos en las fronteras. En cada material, la función potencial $\Phi_{(i)}(x, y, z)$ tendrá la forma

$$\Phi_{(i)} = f_{(i)}(z) e^{i(q_x x + q_y y)}, \quad (i) = 1, 2, 3, \quad (2.43)$$

donde las amplitudes $f_{(i)}(z)$ satisfacen la ecuación

$$\varepsilon_z^{(i)} f_{(i)}''(z) - (\varepsilon_{11}^{(i)} q_x^2 + 2\varepsilon_{12}^{(i)} q_x q_y + \varepsilon_{22}^{(i)} q_y^2) f_{(i)}(z) = 0, \quad (2.44)$$

en las cuales $\varepsilon_{pq}^{(i)}$ es el elemento pq (fila/columna) de la matriz rotada dada en la

ecuación (2.40). Esta ecuación diferencial puede escribirse más sucintamente como

$$\varepsilon_z^{(i)} f_{(i)}''(z) - \beta_{(i)}^2(\theta_{(i)}) f_{(i)}(z) = 0, \quad (2.45)$$

con

$$\beta_{(i)}^2(\theta_{(i)}) = \frac{\varepsilon_x^{(i)}}{\varepsilon_z^{(i)}} (q_x \cos \theta_{(i)} + q_y \sin \theta_{(i)})^2 + \frac{\varepsilon_y^{(i)}}{\varepsilon_z^{(i)}} (q_y \cos \theta_{(i)} + q_x \sin \theta_{(i)})^2,$$

tal que

$$f_{(i)}(z) = A_{(i)} e^{\beta_{(i)} z} + B_{(i)} e^{-\beta_{(i)} z}. \quad (2.46)$$

Debido a que solo los modos de superficie tienen importancia, establecemos $B_1 = A_3 = 0$. Las condiciones de contorno en $z = 0$ y $z = l$ se convierten en

$$\begin{aligned} f_{(1)}(0) &= f_{(2)}(0), \\ \varepsilon_z^{(1)} f_{(1)}'(0) &= \varepsilon_z^{(2)} f_{(2)}'(0), \\ f_{(2)}(l) &= f_{(3)}(l), \\ \varepsilon_z^{(2)} f_{(2)}'(l) &= \varepsilon_z^{(3)} f_{(3)}'(l). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Entonces la relación de dispersión para las ondas superficiales en el sistema viene dada por [Apéndice B]:

$$\mathcal{D}(\xi, l, \theta) = 1 - \left[\frac{\varepsilon_z^{(1)} \beta_{(1)}(0) - \varepsilon_z^{(2)} \beta_{(2)}(\theta_{(2)})}{\varepsilon_z^{(1)} \beta_{(1)}(0) + \varepsilon_z^{(2)} \beta_{(2)}(\theta_{(2)})} \right] \left[\frac{\varepsilon_z^{(3)} \beta_{(3)}(\theta_{(3)}) - \varepsilon_z^{(2)} \beta_{(2)}(\theta_{(2)})}{\varepsilon_z^{(3)} \beta_{(3)}(\theta_{(3)}) + \varepsilon_z^{(2)} \beta_{(2)}(\theta_{(2)})} \right] e^{-2\beta_{(2)}(\theta_{(2)})l} = 0. \quad (2.48)$$

Análogamente, podemos repetir el mismo procedimiento para las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético. Finalmente nuestra **fórmula de Lifshitz para el caso Anisotrópico** queda [33],

$$E(l) = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_0^\infty d\xi \ln \left(\det[\mathbb{1} + \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2] e^{-2\beta_{(2)}(\theta_{(2)})l} \right) \quad (2.49)$$

donde ahora las cantidades $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_3$ son las matrices de los coeficientes de Fresnel para los medios 1 y 3 y se escriben como:

$$\mathbb{R}_i = \begin{pmatrix} R_{s,s} & R_{s,p} \\ R_{p,s} & R_{p,p} \end{pmatrix}.$$

donde s y p representan las polarizaciones TE y TM respectivamente. Además, el primer subíndice representa la polarización de la onda incidente mientras que

el segundo representa la polarización de la onda reflejada. De esta forma, para el segundo término $R_{s,p}$ tenemos una onda incidente con polarización s y una onda reflejada con polarización p . En los materiales convencionales se cumple que si la onda incidente tiene polarización s la onda reflejada tendrá la misma polarización y lo mismo aplica para la polarización p . De esta forma podemos simplificar la matriz como:

$$\mathbb{R}_i = \begin{pmatrix} R_{s,s} & 0 \\ 0 & R_{p,p} \end{pmatrix}.$$

En los capítulos siguientes observaremos que si las placas son de aislante topológicos es posible obtener coeficientes con una polarización diferente a la onda incidente, es decir, $R_{s,p}$ y $R_{p,s}$ diferentes de cero.

Capítulo 3

El formalismo de la matriz de Scattering en TI

Para describir la propagación de ondas y partículas a través de sistemas con diferentes propiedades, se pueden utilizar dos formalismos que permiten obtener las amplitudes de reflexión y transmisión. El primer formalismo se conoce como método de matriz de transferencia (MMT) y en él se relacionan las amplitudes de las ondas después de la transmisión con las amplitudes de las ondas antes de la transmisión [40]. En el segundo formalismo, conocido como método de matriz de dispersión (MMS) conocida también como Matriz “ S ” (por su abreviatura en ingles de Scattering Matrix) describe las ondas salientes en términos de las ondas entrantes. La invariancia de inversión temporal y la conservación de la densidad de corriente imponen condiciones fuertes en la forma de la matriz de transferencia “ M ”, independientemente de la forma específica del potencial [41].

Básicamente el método de la matriz S trabaja bajo los mismos principios que el MMT . El MMT transfiere un número infinito de amplitudes de campo a través de la estructura analizada. En realidad, cuando se realiza el cálculo numérico, el valor del vector de este conjunto de amplitudes es truncado para un número determinado de interfases [41]. Entonces, se puede decir que para un número elevado de cambio de interfases y profundidad (en el orden de centímetros) el MMT genera cálculos de amplitud erróneos, porque al no guardar la información necesaria de este conjunto infinito de amplitudes no cumple la conservación de energía. Conforme se incrementan las interfases en el punto donde se empieza a truncar el valor de las amplitudes, se puede afirmar que los cálculos de transmisión o reflexión presentan

inestabilidades numéricas¹. La matriz S permite el estudio de las amplitudes para cada modo de manera separada, lo que evita las inestabilidades numéricas presentes por el *MMT*. La matriz S realiza un producto de manera iterativa de tal manera que solo realiza el producto conociendo el valor de amplitud anterior.

3.1 El experimento de dispersión

Para ilustrar los principios básicos del formalismo a desarrollar, consideremos inicialmente el movimiento de una partícula cuántica de masa m en presencia de un potencial $V(x)$ en una dimensión se rige por la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + [V(x) - E] \Psi(x) = 0.$$

Aquí, $\Psi(x)$ es la función de onda y E la energía del electrón. Por simplicidad, suponemos que el potencial $V(x)$ es distinto de cero solamente dentro de una región finita,

$$V(x) = \begin{cases} V(x) & \text{para } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{para } 0 < x < l. \end{cases}$$

Se supone que las soluciones de la ecuación de Schrödinger fuera de la región potencial son conocidas y pueden escribirse como una superposición de ondas planas:

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) &= \Psi_L^+(x) + \Psi_L^-(x), \quad x \leq 0, \\ \Psi_R(x) &= \Psi_R^+(x) + \Psi_R^-(x), \quad x \geq l. \end{aligned}$$

Aquí, los subíndices L (izquierda) y R (derecha) indican la posición de la partícula con respecto a la región potencial, y los superíndices $+$ ($-$) determinan la dirección de propagación: $+$ significa que el electrón se propaga en la dirección positiva (de izquierda a derecha) y $-$ significa que el electrón se mueve de derecha a izquierda (figura [3.1]). Por lo tanto, llamamos a $\Psi_L^+(x)$ la onda incidente, en contraste con $\Psi_L^-(x)$, que es la función de onda del electrón que se propaga desde la muestra hacia el lado izquierdo.

¹Se define inestabilidad numérica como error de procesamiento en los datos de un algoritmo que se magnifica en el resultado.



Figura 3.1: Las ondas incidentes $\Psi_L^+(x)$ y $\Psi_R^-(x)$ son dispersadas por la muestra. Las ondas salientes $\Psi_L^-(x)$ y $\Psi_R^+(x)$ consisten en ondas transmitidas a través de la muestra, así como ondas reflejadas en la muestra. Fuera de la muestra, la función de onda se puede expresar como una superposición de ondas planas.

Las componentes de las funciones de ondas se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\Psi_L^+(x) &= Ae^{+iqx} & , & \quad \Psi_L^-(x) = Be^{-iqx}, \\ \Psi_R^+(x) &= Ce^{+iqx} & , & \quad \Psi_R^-(x) = De^{-iqx}.\end{aligned}$$

Aquí, q es el vector de onda relacionado con la energía E del electrón, a través de la *relación de dispersión*

$$E = E(q). \quad (3.1)$$

La relación de dispersión (3.1) determina las propiedades físicas del electrón en la región fuera de la muestra ($0 > x > l$). En particular, la condición de continuidad de la función de onda y su derivada nos generan relaciones lineales entre las ondas salientes y entrantes que se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} \Psi_L^-(x=0) \\ \Psi_R^+(x=l) \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \Psi_L^+(x=0) \\ \Psi_R^-(x=l) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

donde la matriz $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

se denomina *matriz de dispersión*. Por definición, la matriz $\mathbf{S}$ relaciona las ondas salientes con las ondas entrantes como se muestra en la figura [3.1]. Sus elementos caracterizan completamente las propiedades de dispersión y transmisión del potencial unidimensional $V(x)$.

3.2 Amplitudes de reflexión y transmisión

Para encontrar el significado físico de los elementos de la matriz de dispersión $\mathbf{S}$, volveremos al experimento de dispersión descrito en la figura [3.1], pero ahora considerando que solo se tiene una partícula que se acerca a la muestra de la derecha. Como ninguna partícula viene de la izquierda, tenemos

$$\Psi_L^+ = 0.$$

La condición de normalización para la función de onda entrante significa que

$$|\Psi_R^-|^2 = 1.$$

De la ecuación (3.2), obtenemos que la onda transmitida $\Psi_L^-(x)$ está dada por

$$\Psi_L^-(x=0) = S_{12}\Psi_R^-(x=l)$$

y la onda reflejada está dada por

$$\Psi_R^+(x=l) = S_{22}\Psi_R^-(x=l)$$

Llamaremos a S_{12} la amplitud de transmisión T y S_{22} a la amplitud de reflexión R :

$$T = S_{12}, \quad R = S_{22}.$$

De la misma manera, consideramos la dispersión de la partícula que viene del lado izquierdo del potencial. Obtenemos $R' = S_{11}$ como la amplitud de reflexión, y $T' = S_{21}$ como la amplitud de transmisión de izquierda a derecha. Finalmente, en términos de amplitudes de transmisión y reflexión, podemos escribir la matriz de dispersión $\mathbf{S}$ en la forma

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} R' & T \\ T' & R \end{pmatrix},$$

Los coeficientes de reflexión (transmisión) se definen, respectivamente, como la probabilidad de que la partícula se refleje (transmita). Además, por la conservación de la densidad de corriente [40], obtenemos

$$|T|^2 + |R|^2 = 1 \quad \text{y} \quad |T'|^2 + |R'|^2 = 1. \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.3) tienen una interpretación física simple. Cuando la muestra no contiene pérdidas ni fuentes, el electrón puede reflejarse o transmitirse a través de la muestra.

3.3 Coeficientes de transmisión y reflexión para una Interfaz de Aislante Topológico

Desarrollemos ahora el formalismo anterior en el contexto más complejo de la transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas en la superficie de división de aislantes topológicos.

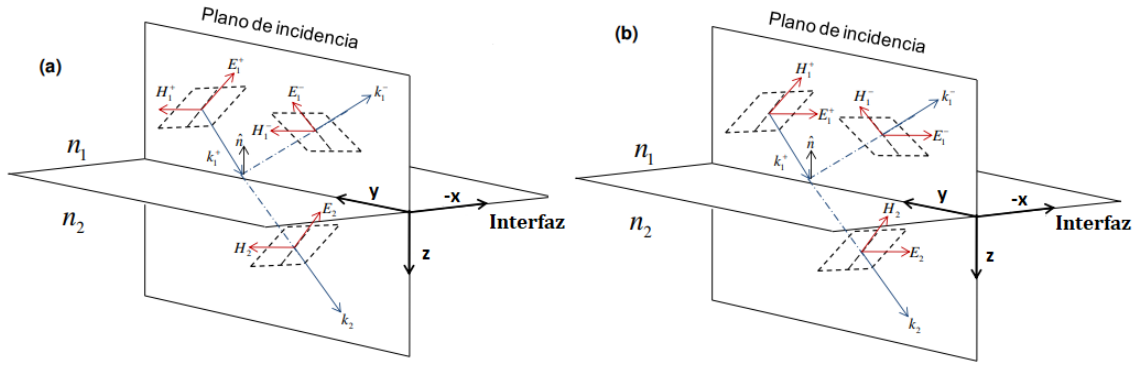


Figura 3.2: Geometrías de ondas planas incidentes con: (a) polarización p (o TM) y (b) polarización s (o TE).

Recordemos que la luz es una onda electromagnética que consta de una amplitud de campo eléctrico ($\mathbf{E}$), una amplitud de campo magnético ($\mathbf{H}$) y una dirección de propagación de onda plana ($\mathbf{k}$), donde los tres vectores son ortogonales entre sí, véase Figura [3.2]. Dependiendo de la posición en la que incidan dichos campos con respecto al plano incidente se dice que están polarizados de manera paralela (p) o perpendicular (s). El plano incidente se forma entre el vector $\mathbf{k}$ y el vector normal a la interfase ($\hat{n}$). Se le llama polarización p cuando $\mathbf{E}$ es paralelo al plano de incidencia. Nótese que mientras $\mathbf{H}$ es perpendicular al plano de incidencia, $\mathbf{E}$ es transversal a la interfase por lo cual también se conoce como transversal magnético o polarización TM . Por otro lado, la polarización s se forma cuando $\mathbf{E}$ es perpendicular al plano de incidencia y $\mathbf{H}$ esta sobre el plano de incidencia. A la polarización s también se le conoce como transversal eléctrico o polarización TE .

Una vez que se tienen los conceptos de luz incidente y polarización, las ecuaciones de Maxwell en forma puntual dan información detallada de la propagación de una onda electromagnética. En este estudio, se supone un medio homogéneo, es decir, sin cambios en la magnitud de la permitividad, permeabilidad y conductividad hacia cualquier dirección. Adicionalmente en este capítulo se asumirá que el medio es isotrópico, donde la onda electromagnética tendrá las mismas propiedades físicas a lo largo del eje de propagación. Así las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}$$

Estas ecuaciones deben ser complementadas con las relaciones constitutivas tal como se mostró en capítulos anteriores,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega)}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega)}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega),\end{aligned}\tag{3.4}$$

Siendo $\bar{\alpha}$ el término que hace alusión a la topología del sistema y viene dado como $\bar{\alpha} = \alpha \Theta / \pi$, donde α es el coeficiente de estructura fina y Θ es el parametro de orden topológico.

Ahora bien, el sistema a considerar está formado por dos medios isotrópicos semi-infinitos polarizables separados por una interface en $z = 0$. El medio en $z < 0$ posee una permitividad dieléctrica ε_1 , permeabilidad magnética μ_1 y un parámetro topológico Θ_1 ; El medio en $z > 0$ tiene permitividad dieléctrica ε_2 , permeabilidad magnética μ_2 y parámetro topológico Θ_2 . Una onda electromagnética con vector de onda $k_1^+ = (k_y, k_{1z}^+)$ se aproxima desde la izquierda de la interface, parte de esta onda es reflejada con un vector de onda $k_1^- = (k_y, k_{1z}^-)$. Otra onda electromagnética con vector de onda $k_2^- = (k_y, k_{2z}^-)$ se aproxima desde la derecha de la interface y parte de ella es reflejada con un vector de onda $k_2^+ = (k_y, k_{2z}^+)$. El sistema en consideración se muestra en la figura [3.3]. La estructura de los campos eléctricos e intensidad magnética tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} E_{(1)x} \\ H_{(1)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x}^+ \\ H_{1x}^+ \end{bmatrix} e^{-ik_{1z}z} e^{i(k_y y - \omega t)} + \begin{bmatrix} E_{1x}^- \\ H_{1x}^- \end{bmatrix} e^{ik_{1z}z} e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad z < 0, \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} E_{(2)x} \\ H_{(2)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2x}^+ \\ H_{2x}^+ \end{bmatrix} e^{-ik_{2z}z} e^{i(k_y y - \omega t)} + \begin{bmatrix} E_{2x}^- \\ H_{2x}^- \end{bmatrix} e^{ik_{2z}z} e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad z > 0, \quad (3.6)$$

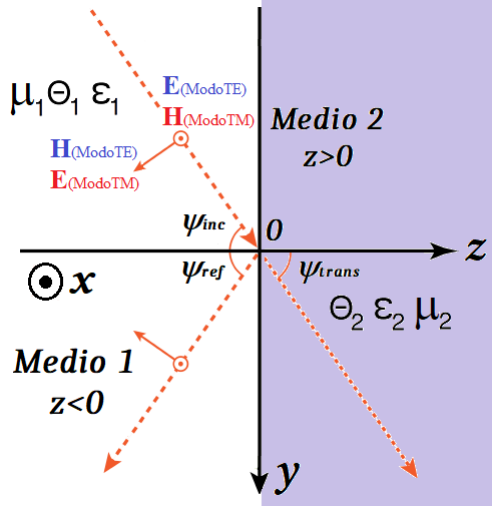


Figura 3.3: Interface entre dos aislantes topológicos.

donde $k_{(i)z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{(i)} \mu_{(i)} - k_y^2}$, $i = 1, 2$. Los signos (+) y (-) en los campos indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia la izquierda. Las ecuaciones de Maxwell pueden utilizarse para obtener la forma vectorial de la ecuación de onda para un aislante topológico, la cual en términos del potencial vectorial $\mathbf{A}$ toma la forma

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\alpha} + \nabla^2 \delta_{\alpha\lambda} \right] \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}, \omega) + i \frac{\omega}{c} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} \frac{\partial \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial x_\beta} \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}, \omega) = 0.$$

En términos del potencial vectorial $\mathbf{A}$ las relaciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= i\omega \varepsilon \mathbf{A} + \frac{\bar{\alpha}}{c} \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} - i \frac{\bar{\alpha}}{c} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De aquí se tiene

$$\begin{aligned} H_y^\pm &= \epsilon_{yjk} \nabla_j A_k^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_y^\pm \\ &= \epsilon_{yzx} \nabla_z A_x^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_y^\pm \\ &= \epsilon_{yzx} (\pm i k_z) A_x^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_y^\pm, \\ H_x^\pm &= \mp i k_z A_x^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_y^\pm. \end{aligned}$$

Analogamente, para $H_x^\pm$ se tiene

$$\begin{aligned} H_x^\pm &= \epsilon_{xjk} \nabla_j A_k^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_x^\pm \\ &= (\epsilon_{xyz} \nabla_y A_z^\pm + \epsilon_{xzy} \nabla_z A_y^\pm) - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_x^\pm \\ H_x^\pm &= -(\nabla_y A_z^\pm - \nabla_z A_y^\pm) - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_x^\pm \end{aligned}$$

De la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ se tiene $\nabla_y D_y^\pm + \nabla_z D_z^\pm = 0$, es decir, $k_y D_y^\pm \pm k_z D_z^\pm = 0$ y por lo tanto

$$D_z^\pm = \mp \frac{k_y}{k_z} D_y^\pm.$$

De la relación constitutiva para el campo eléctrico $\mathbf{D} = i\omega\epsilon\mathbf{A} + \frac{\bar{\alpha}}{c}\nabla \times \mathbf{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} D_y^\pm &= i\omega\epsilon A_y^\pm \mp i \frac{k_z}{c} A_x^\pm, \\ D_z^\pm &= i\omega\epsilon A_z^\pm + i \frac{k_y}{c} A_x^\pm. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} D_z^\pm &= \mp \frac{k_y}{k_z} D_y^\pm, \\ i\omega\epsilon A_z^\pm + i \frac{k_y}{c} A_x^\pm &= \mp \frac{k_y}{k_z} \left[i\omega\epsilon A_y^\pm \mp i \frac{k_z}{c} A_x^\pm \right], \\ A_z^\pm &= \mp \frac{k_y}{k_z} A_y^\pm. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \nabla_y A_z^\pm - \nabla_z A_y^\pm &= i k_y \left(\mp \frac{k_y}{k_z} A_y^\pm \right) \mp i k_z A_y^\pm \\ \nabla_y A_z^\pm - \nabla_z A_y^\pm &= \mp i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{k_z} A_y^\pm \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$H_x^\pm = \pm i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{k_z} A_y^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_x^\pm, \quad H_y^\pm = \mp i \frac{k_z}{\mu} A_x^\pm - i \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) A_y^\pm.$$

3.4 La matriz de Scattering para una interfaz de aislante Topológico

Con base en los resultados del punto anterior, se pueden obtener los elementos de la matriz de dispersión $\mathbf{S}$.

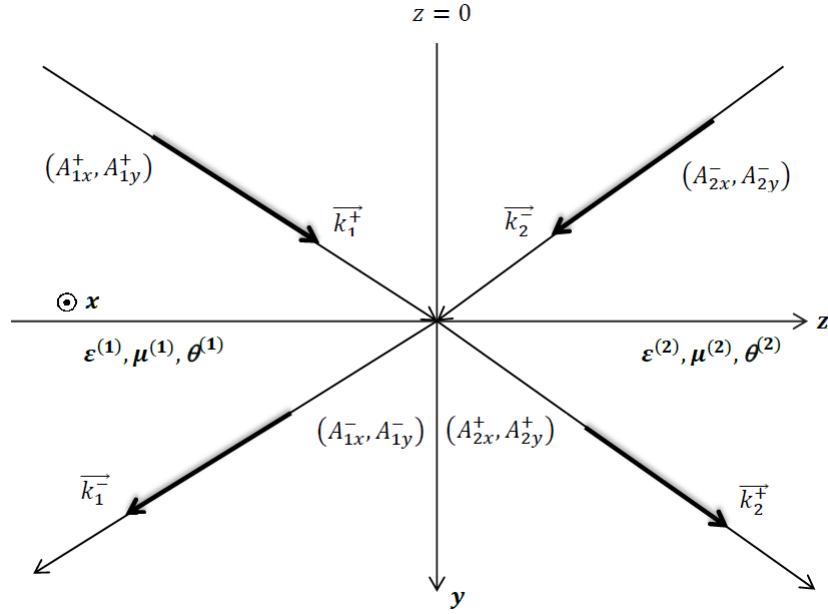


Figura 3.4: Sistema considerado para hallar la matriz de scattering.

Se parte del siguiente sistema de ecuaciones, obtenidos para hallar la matriz de transferencia:

$$A_{1y0}^+ + A_{1y0}^- = A_{2y0}^+ + A_{2y0}^-, \quad (3.8)$$

$$\frac{\epsilon_1}{k_{1z}} A_{1y0}^+ - \frac{\epsilon_1}{k_{1z}} A_{1y0}^- + \frac{c}{\omega} \bar{\alpha}_{12} A_{1x0}^+ + \frac{c}{\omega} \bar{\alpha}_{12} A_{1x0}^- = \frac{\epsilon_2}{k_{2z}} A_{2y0}^+ - \frac{\epsilon_2}{k_{2z}} A_{2y0}^-, \quad (3.9)$$

$$A_{1x0}^+ + A_{1x0}^- = A_{2x0}^+ + A_{2x0}^-, \quad (3.10)$$

$$-\frac{k_{1z}}{\mu_1} A_{1x0}^+ + \frac{k_{1z}}{\mu_1} A_{1x0}^- + \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}_{12} A_{1y0}^+ + \frac{\omega}{c} \bar{\alpha}_{12} A_{1y0}^- = -\frac{k_{2z}}{\mu_2} A_{2x0}^+ + \frac{k_{2z}}{\mu_2} A_{2x0}^-, \quad (3.11)$$

donde $\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1$ y el subíndice 0 hace referencia al potencial $\mathbf{A}$ evaluado en $z = 0$. Ordenando de acuerdo al modelo de la matriz de Scattering

$$\begin{pmatrix} |\Psi_1^-\rangle \\ |\Psi_2^+\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} |\Psi_1^+\rangle \\ |\Psi_2^-\rangle \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad |\Psi_1^\pm\rangle = \begin{pmatrix} A_{1y0}^\pm \\ A_{1x0}^\pm \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |\Psi_2^\pm\rangle = \begin{pmatrix} A_{2y0}^\pm \\ A_{2x0}^\pm \end{pmatrix},$$

finalmente se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A_{1y0}^- + 0A_{1x0}^- - A_{2y0}^+ + 0A_{2x0}^+ &= -A_{1y0}^+ + 0A_{1x0}^+ + A_{2y0}^- + 0A_{2x0}^-, \\
-\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}}A_{1y0}^- + \frac{c}{\omega}\bar{\alpha}_{12}A_{1x0}^- - \frac{\varepsilon_2}{k_{2z}}A_{2y0}^+ + 0A_{2x0}^+ &= -\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}}A_{1y0}^+ - \frac{c}{\omega}\bar{\alpha}_{12}A_{1x0}^+ - \frac{\varepsilon_2}{k_{2z}}A_{2y0}^- + 0A_{2x0}^-, \\
0A_{1y0}^- + A_{1x0}^- + 0A_{2y0}^+ - A_{2x0}^+ &= -A_{1y0}^+ + 0A_{1x0}^+ + A_{2y0}^- + 0A_{2x0}^-, \\
\frac{\omega}{c}\bar{\alpha}_{12}A_{1y0}^- + \frac{k_{1z}}{\mu_1}A_{1x0}^- + 0A_{2y0}^+ + \frac{k_{2z}}{\mu_2}A_{2x0}^+ &= -\frac{\omega}{c}\bar{\alpha}_{12}A_{1y0}^+ + \frac{k_{1z}}{\mu_1}A_{1x0}^+ + 0A_{2y0}^- + \frac{k_{2z}}{\mu_2}A_{2x0}^-.
\end{aligned}$$

Escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}} & \frac{c}{\omega}\bar{\alpha}_{12} & -\frac{\varepsilon_2}{k_{2z}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{\omega}{c}\bar{\alpha}_{12} & \frac{k_{1z}}{\mu_1} & 0 & \frac{k_{2z}}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1y0}^- \\ A_{1x0}^- \\ A_{2y0}^+ \\ A_{2x0}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}} & -\frac{c}{\omega}\bar{\alpha}_{12} & -\frac{\varepsilon_2}{k_{2z}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{\omega}{c}\bar{\alpha}_{12} & \frac{k_{1z}}{\mu_1} & 0 & \frac{k_{2z}}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1y0}^+ \\ A_{1x0}^+ \\ A_{2y0}^- \\ A_{2x0}^- \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

multiplicando a ambos lados por la inversa de la matriz de la izquierda, nuestra matriz $\mathbf{S}$ queda como

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{(-1+p_{12})(1+s_{21}) - \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{1z}}{\mu_1}\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2(1+s_{21})}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{2z}}{\mu_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \\ \frac{-2\frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}}\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{(1+p_{12})(-1+s_{21}) - \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{-2\frac{\omega}{c}\frac{\mu_2}{k_{2z}}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2(1+p_{12})}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \\ \frac{2p_{12}(1+s_{21})}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{1z}}{\mu_1}\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{(-1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{2z}}{\mu_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \\ \frac{-2\frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_1}{k_{1z}}\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{2s_{21}(1+p_{12})}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{-2\frac{\omega}{c}\frac{\mu_2}{k_{2z}}\bar{\alpha}_{12}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} & \frac{(1+p_{12})(1-s_{21}) - \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde $s_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_{1z}}{k_{2z}}$ y $p_{12} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_{2z}}{k_{1z}}$ son las impedancias para las polarizaciones s (TE) y p (TM) respectivamente. Por otra parte, el parámetro topológico ocasiona la presencia de nuevos términos en la matriz de dispersión, los cuales dependen directamente del término $\bar{\alpha}_{12}$. De tal forma que si hacemos a $\bar{\alpha}_{12} = 0$ nuestra matriz $\mathbf{S}$ se reduce a la mostrada en el libro de Costas Soukoulis [40] para materiales convencionales.

3.5 Coeficientes de Fresnel para ondas incidentes con polarización s (TE)

Consideremos el sistema mostrado en la figura [3.5], donde tenemos una onda incidente con polarización s con amplitud E_{1y}^+ . De esta forma las componentes

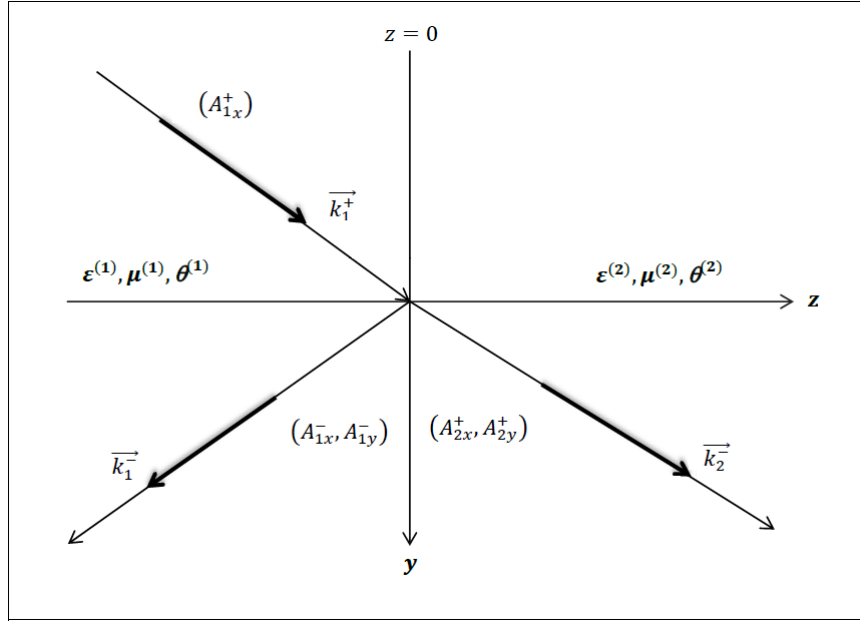


Figura 3.5: Sistema considerado para una onda incidente s polarizada con amplitud E_{1y}^+

cartesianas del potencial vectorial $A_{1y0}^+ = A_{2x0}^- = A_{2y0}^- = 0$ se anulan y queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} A_{1y0}^- \\ A_{1x0}^- \\ A_{2y0}^+ \\ A_{2x0}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & S_{2,4} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & S_{3,4} \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & S_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{1x0}^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} A_{1y0}^- &= S_{1,2} A_{1x0}^+ \quad , \quad A_{1x0}^- = S_{2,2} A_{1x0}^+, \\ A_{2y0}^+ &= S_{3,2} A_{1x0}^+ \quad , \quad A_{2x0}^+ = S_{4,2} A_{1x0}^+. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Recordando que en el gauge elegido se tiene $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$, entre las amplitudes de las componentes tangenciales de los campos obtenemos

$$E_{1y0}^- = S_{1,2} E_{1x0}^+ \quad \Rightarrow \quad E_{1y0}^- = R_{s,p} E_{1x0}^+,$$

donde $R_{s,p}$ es la amplitud de reflexión de una onda con polarización s en la onda incidente y polarización p en la onda reflejada. De manera análoga podemos obtener:

$$E_{1x0}^- = S_{2,2}E_{1x0}^+ \Rightarrow E_{1x0}^- = R_{s,s}E_{1x0}^+.$$

De esta forma

$$R_{s,s} = -\frac{(1+p_{12})(1-s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}, \quad R_{s,p} = \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}s_{21}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}\bar{\alpha}_{12}. \quad (3.16)$$

De manera análoga obtenemos las amplitudes de transmisión

$$\begin{aligned} E_{2x0}^+ &= S_{4,2}E_{1x0}^+ \Rightarrow E_{2x0}^+ = T_{s,s}E_{1x0}^+, \\ E_{2y0}^+ &= S_{3,2}E_{1x0}^+ \Rightarrow E_{2y0}^+ = T_{s,p}E_{1x0}^+. \end{aligned}$$

Así

$$T_{s,s} = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1+p_{12})s_{21}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \right], \quad T_{s,p} = \frac{2\frac{c}{\omega}\frac{k_{2z}}{\varepsilon_2}s_{21}}{(1+p_{12})(1+s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}\bar{\alpha}_{12}.$$

Al igual que con el caso de la reflexión el primer subíndice indica la polarización de la onda incidente y el segundo el de la onda transmitida. Como se puede apreciar la introducción del termino topológico produce un acople del campo eléctrico con el campo magnético en los elementos de la matriz de dispersión. Adicionalmente, el acople de los campos da lugar a la rotación del plano de polarización de las ondas reflejadas. Este fenómeno es conocido como *efecto Kerr*. De forma similar, la presencia del término topológico ocasiona una rotación del plano de polarización de la onda transmitida, este efecto es conocido como rotación de Faraday o *efecto Faraday*. Los coeficientes de Fresnel para el flujo de energía se pueden encontrar al comparar la componente z del vector de Poynting, $\vec{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, en cada lado de la interfaz. Los respectivos coeficientes de reflexión y transmisión son

$$\mathcal{R}_{i,j} = |R_{i,j}|^2, \quad \mathcal{T}_{i,j} = \frac{1}{s_{21}}|T_{i,j}|^2,$$

donde $i, j \in TE, TM$ y el prefactor en el coeficiente de transmisión hace referencia al cambio del flujo de área cuando los campos pasan a través de la interfaz.

3.5.1 Resultados

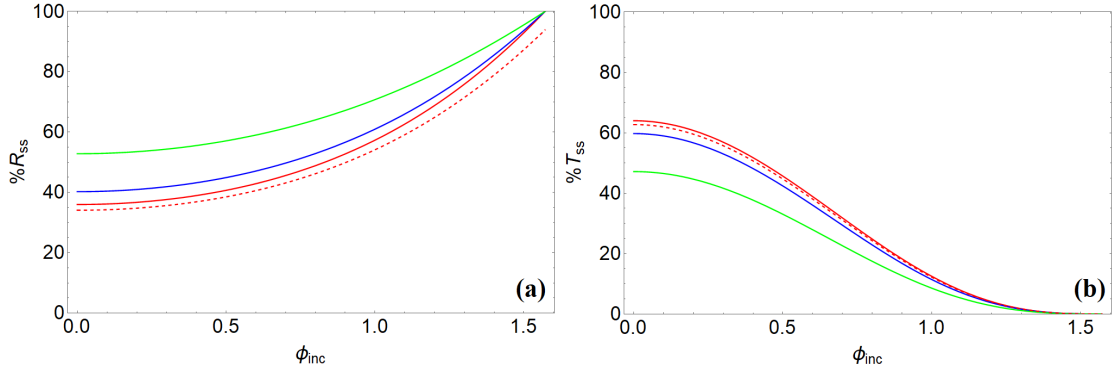


Figura 3.6: Comportamiento de la reflectancia $\% \mathcal{R}_{s,s}$ (a) y transmitancia $\% \mathcal{T}_{s,s}$ (b) con respecto al ángulo de incidencia para una onda que incide con polarización s y se refleja (transmite) con polarización s ; el grafico nos muestra el comportamiento para 3 valores diferentes de ε_2 : $\bar{\alpha}_{12} = 1/137$, $\varepsilon_2 = 16$, $\varepsilon_2 = 20$ y $\varepsilon_2 = 40$ (líneas solidas); $\bar{\alpha}_{12} = 69/137$, $\varepsilon_2 = 16$ (línea punteada). Donde los parámetros constantes para los tres gráficos son $\varepsilon_1 = 1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

En la figura [3.6(a)] se muestra como crece el porcentaje de reflexión $\% \mathcal{R}_{s,s}$ cuando el ángulo varía desde cero hasta alcanzar la reflexión total en $\pi/2$. Por otro lado, en la figura [3.6(b)], la transmitancia $\% \mathcal{T}_{s,s}$ decrece desde su valor máximo en $\phi_{\text{inc}} = 0$ hasta llegar a cero en $\phi_{\text{inc}} = \pi/2$, el comportamiento para $\% \mathcal{T}_{s,s}$ es inverso al de $\mathcal{R}_{s,s}$. En la figura [3.6] vemos también como el incremento de la permitividad en el segundo medio afecta la cantidad de energía reflejada y transmitida. La cantidad de energía reflejada en forma de ondas ss en la figura [3.6(a)], se incrementa cuando la permitividad ε_2 crece. Por el contrario, la cantidad de energía transmitida en forma ondas ss en la figura [3.6(b)], disminuye cuando ε_2 se hace más grande. Adicionalmente, si hacemos grandes incrementos en el término topológico, disminuye muy poco el porcentaje de energía reflejada, en el caso de la transmitancia los grandes incrementos en $\bar{\alpha}_{12}$ aumentan muy poco porcentaje de energía transmitida. Esto se debe a que los coeficientes $\mathcal{R}_{s,s}$ y $\mathcal{T}_{s,s}$ en materiales con aislantes topológicos, describen el mismo comportamiento presentado para dieléctricos convencionales con una ligera corrección, dada por $(\bar{\alpha}_{12})^2$. Ahora bien, en dieléctricos convencionales se espera que las ondas reflejadas y transmitidas lleven la misma polarización de la onda incidente, es decir, si hacemos incidir una onda con polarización s (o modo TE), parte de esta onda se refleja en forma de una onda tipo s , otra parte se transmite en forma de una onda tipo s y en ciertos casos, cuando el material es disipativo parte de esta onda es absorbida [40]. De igual forma sucede para ondas incidentes tipo p (o modo TM). Sin embargo, con la presencia del término topológico, puede aparecer

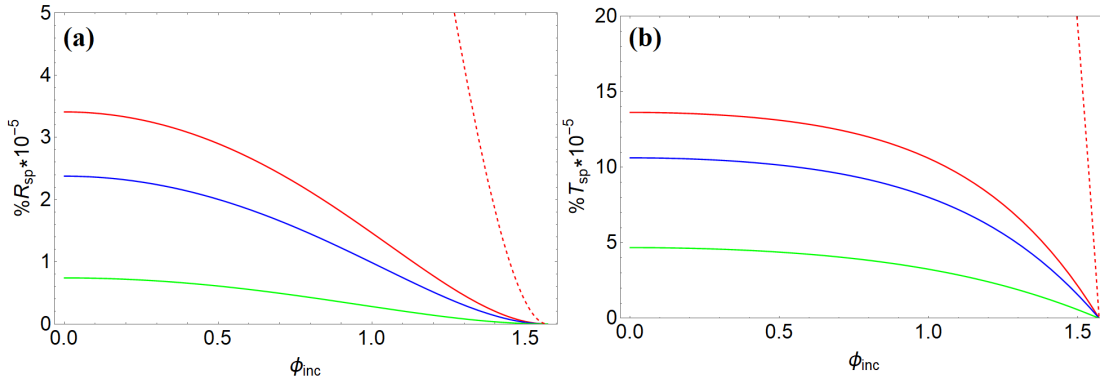


Figura 3.7: Comportamiento de la reflectancia $\% \mathcal{R}_{s,p}$ (a) y transmitancia $\% \mathcal{T}_{s,p}$ (b) con respecto al ángulo de incidencia para una onda que incide con polarización s y se refleja (transmite) con polarización p ; el gráfico nos muestra el comportamiento para 3 valores diferentes de ε_2 : $\varepsilon_2 = 16$, $\bar{\alpha}_{12} = 1/137$ (línea solida); $\varepsilon_2 = 16$, $\bar{\alpha}_{12} = 3/137$ (línea punteada); $\varepsilon_2 = 20$ y $\varepsilon_2 = 40$. Donde los parámetros constantes para los tres gráficos son $\varepsilon_1 = 1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

una onda p reflejada y una onda p transmitida como resultado de una s incidente ($\mathcal{R}_{s,p}$ y $\mathcal{T}_{s,p}$ respectivamente). En la figura [3.7] se presenta la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas con polarización s incidente y onda reflejada (transmitida) con polarización p con respecto al ángulo de incidencia. Estos coeficientes se hacen cero cuando el ángulo de incidencia es $\pi/2$. Esto es, si la onda incide con la normal a la interface, toda la energía se refleja en forma de ondas s , es decir, si incide una onda tipo s (TE) normal a la interface solo se refleja una onda tipo s . Note que en ausencia de aislante topológico, $\bar{\alpha}_{12} = 0$, $\mathcal{R}_{s,p} = \mathcal{T}_{s,p} = 0$ se anulan, además, en este caso pequeños cambios en el término topológico aumenta significativamente los coeficientes $\mathcal{R}_{s,p}$ y $\mathcal{T}_{s,p}$.

3.6 Coeficientes de Fresnel para ondas incidentes con polarización p (TM)

De forma similar, supongamos ahora una onda electromagnética con polarización TM con amplitud H_{1y}^+ , la cual incide desde la región $z < 0$. De esta forma las componentes cartesianas del potencial vectorial $A_{1x0}^+ = A_{2x0}^- = A_{2y0}^- = 0$ se anulan

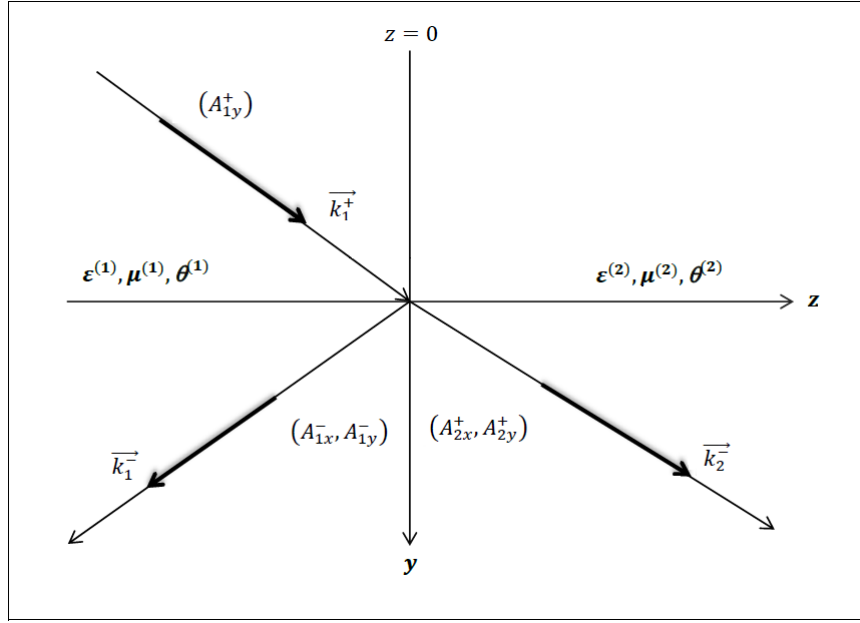


Figura 3.8: Sistema considerado para una onda incidente p polarizada con amplitud H_{1y}^+

y queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} A_{1y0}^- \\ A_{1x0}^- \\ A_{2y0}^+ \\ A_{2x0}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & S_{2,4} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & S_{3,4} \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & S_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1y0}^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

De manera análoga al caso anterior podemos obtener las amplitudes de reflexión y transmisión las cuales vienen dadas de la siguiente forma

$$R_{p,p} = \frac{(1 - p_{12})(1 + s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}{(1 + p_{12})(1 + s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2}, \quad R_{p,s} = \frac{2 \frac{c}{\omega} \frac{k_{2z}}{\varepsilon_2} s_{21}}{(1 + p_{12})(1 + s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \bar{\alpha}_{12}.$$

$$T_{p,p} = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1 + s_{21})p_{12}}{(1 + p_{12})(1 + s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \right], \quad T_{p,s} = \frac{2 \frac{\omega}{c} \frac{\mu_2}{k_{2z}} p_{12}}{(1 + p_{12})(1 + s_{21}) + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}(\bar{\alpha}_{12})^2} \bar{\alpha}_{12}. \quad (3.18)$$

3.6.1 Resultados

En la figura [3.9(a)] se observa como los coeficientes de reflexión $\mathcal{R}_{p,p}$ primero disminuyen y luego crecen rápidamente a medida que el ángulo se aproxima a $\pi/2$ mientras los coeficientes de transmisión $\mathcal{T}_{p,p}$ en la figura [3.9(b)] se hacen cero bajo el

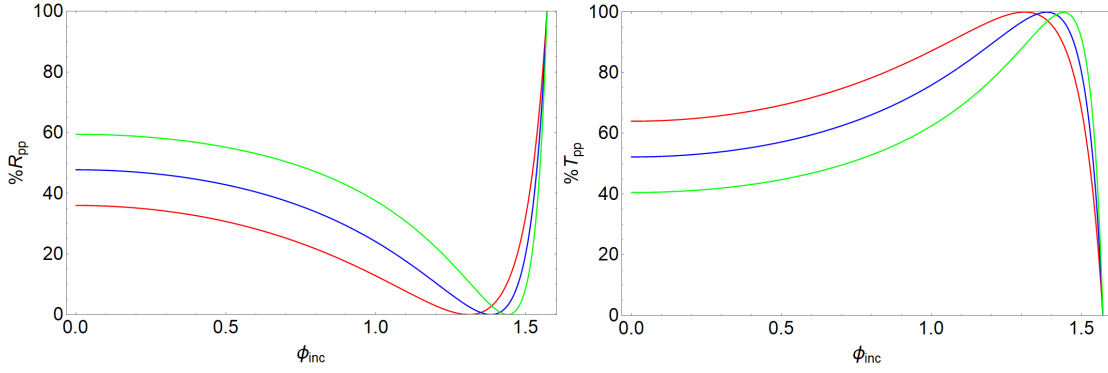


Figura 3.9: Comportamiento de la reflectancia $\% \mathcal{R}_{p,p}$ (a) y transmitancia $\% \mathcal{T}_{p,p}$ (b) con respecto al ángulo de incidencia para una onda que incide con polarización p y se refleja (transmite) con polarización p ; el gráfico nos muestra el comportamiento para 3 valores diferentes de ε_2 : $\varepsilon_2 = 16$, $\varepsilon_2 = 30$ y $\varepsilon_2 = 60$. Donde los parámetros constantes para los tres gráficos son $\bar{\alpha}_{12} = 1/137$, $\varepsilon_1 = 1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

ángulo de incidencia normal a la interface. Los comportamientos que presentan los coeficientes con respecto al ángulo de incidencia son similares a los mostrados en un dieléctrico convencional. Sin embargo la inclusión del término topológico introduce una pequeña corrección del orden de $(\bar{\alpha}_{12})^2$. Un resultado importante de este caso, es cuando el coeficiente $\mathcal{R}_{p,p}$ se aproxima a cero en la figura [3.9(a)] y el coeficiente de transmisión $\mathcal{T}_{p,p}$ alcanza su valor máximo en la figura [3.9(b)]. Este ángulo en el cual se presenta transmisión total es conocido como ángulo de Brewster θ_B [42], el cual lo podemos obtener despreciando los términos de orden superior a $(\bar{\alpha}_{12})^2$. De esta forma:

$$\tan^2 \theta_B \approx \left[1 - 2 \left(\frac{n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2 (\bar{\alpha}_{12})^2 \right] \left[\frac{n_2}{n_1} \right]^2, \quad (3.19)$$

donde el ángulo de transmisión viene dado como $\phi_{\text{trans}} = \sin^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_B \right)$, entonces finalmente obtenemos

$$\phi_{\text{trans}} = \frac{\pi}{2} - \theta_B + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{n_1}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2 (\bar{\alpha}_{12})^2, \quad (3.20)$$

donde $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ y $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$. Este resultado indica que para el ángulo de incidencia θ_B , el vector de propagación de la onda reflejada ya no es perpendicular al de la onda transmitida, lo que concuerda con los resultados presentados en [12].

Adicionalmente, en la figura [3.9] se presenta el comportamiento de los coeficientes de reflexión $\mathcal{R}_{p,p}$ y transmisión $\mathcal{T}_{p,p}$ respecto al ángulo de incidencia para diferentes valores de permitividad dieléctrica. Para un ángulo de incidencia determinado,

(para ángulos de incidencia por debajo de los cuales el coeficiente alcanza su valor mínimo) la cantidad de energía reflejada en forma de ondas pp (ondas TM reflejadas a partir de ondas TM incidentes) se incrementa a medida que la permitividad ε_2 aumenta, tal y como se observa en la figura [3.9(a)]. El coeficiente $\mathcal{T}_{p,p}$ en la figura [3.9(b)], presenta el comportamiento inverso al mostrado por el coeficiente $\mathcal{R}_{p,p}$, es decir, a mayor reflexión de ondas pp menor será la transmisión de las mismas y además, cuanto mayor sea el índice de refracción del medio 2, menor será la cantidad de ondas pp transmitidas a este (para ángulos de incidencia por debajo de los cuales el coeficiente alcanza su valor máximo). Cabe resaltar que, aunque el pico de transmisión se alcanza para diferentes valores del ángulo incidente, (según sea la permitividad del medio 2) el máximo siempre es el 100%.

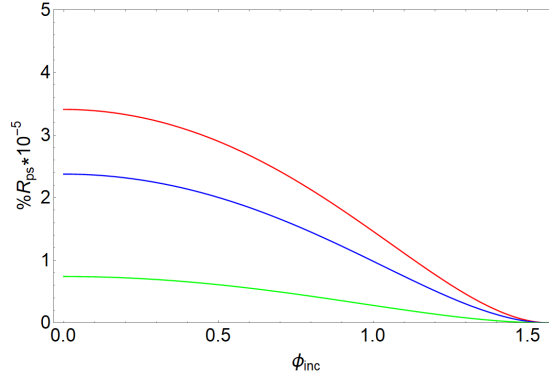


Figura 3.10: Comportamiento de la reflectancia $\%R_{p,s}$ con respecto al ángulo de incidencia para una onda que incide con polarización p y se refleja con polarización s ; el gráfico nos muestra el comportamiento para 3 valores diferentes de ε_2 : $\varepsilon_2 = 16$, $\varepsilon_2 = 20$ y $\varepsilon_2 = 40$. Donde los parámetros constantes para los tres gráficos son $\bar{\alpha}_{12} = 1/137$, $\varepsilon_1 = 1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Por otro lado, como se mostró anteriormente, el término topológico ocasiona que los términos cruzados no se anulen es decir, que $\mathcal{R}_{p,s}$ y $\mathcal{T}_{p,s}$ son diferentes de cero.

3.7 Coficientes de Reflexión para aislantes topológicos puros

Para comprender mejor los coeficientes de mezcla (es decir, los coeficientes donde la polarización de la onda incidente es diferente a la polarización de la onda reflejada/transmitida), es relevante observar el caso de un aislante topológico puro en el que la permitividad y la permeabilidad son las del vacío y solo el término

topológico cambia en la interfaz. Esto permite eliminar los efectos magnetoelectricos del sistema y aislar el efecto del acoplamiento del axión. Tomando, $k_{1z} = k_{2z}$ los coeficientes de reflexión y transmisión se reducen a

$$R_{s,s} = -R_{p,p} = \frac{-(\bar{\alpha}_{12})^2}{4 + (\bar{\alpha}_{12})^2}, \quad (3.21)$$

$$T_{s,s} = T_{p,p} = \frac{4}{4 + (\bar{\alpha}_{12})^2}, \quad (3.22)$$

$$R_{s,p} = R_{p,s} = -T_{s,p} = T_{p,s} = \frac{-2\bar{\alpha}_{12}}{4 + (\bar{\alpha}_{12})^2}. \quad (3.23)$$

Se puede ver que, en el límite de un TI puro, los coeficientes de reflexión y transmisión ya no son una función del ángulo incidente y, por lo tanto, la dependencia angular de los coeficientes es el resultado de las propiedades magnetoelectricas del material en lugar de las propiedades axiónicas. Como $\bar{\alpha}_{12} \approx \alpha$, el flujo de energía de los coeficientes de reflexión y transmisión son $\mathcal{R}_{i,i} \approx \alpha^4/16 \approx 10^{-10}$ y $\mathcal{T}_{i,i} \approx 1$ respectivamente. De este modo se ve que tenemos casi una transmisión perfecta. Sin embargo, dado que el acoplamiento del axión cambia en la interfaz, uno todavía tiene términos combinados, cuya magnitud es igual en transmisión y reflexión $\mathcal{R}_{i,j} = \mathcal{T}_{i,j} \approx \alpha^2/4 \approx 10^{-5}$ [43].

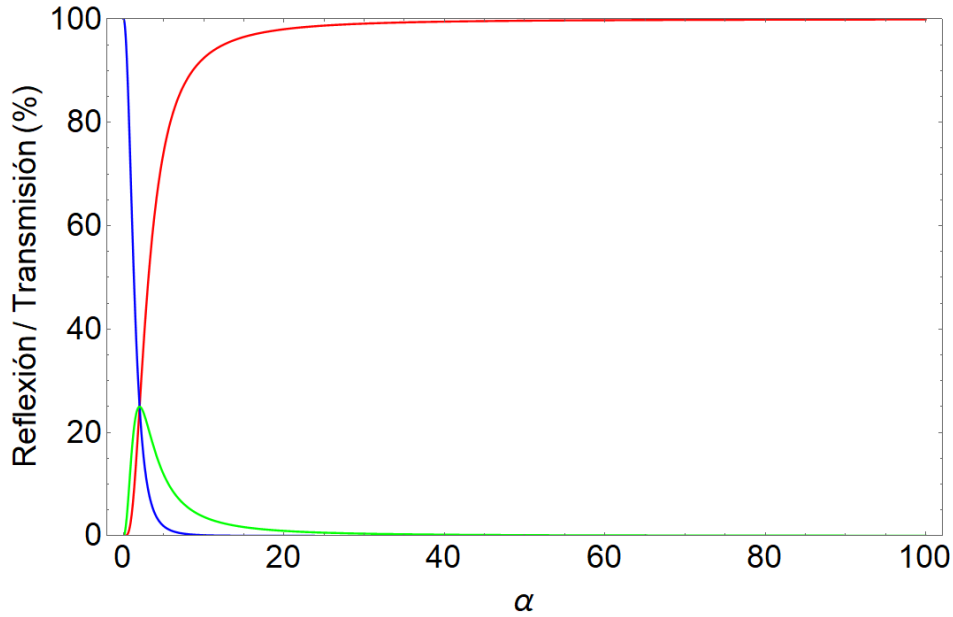


Figura 3.11: Comportamiento de la reflectancia $\% \mathcal{R}_{ii}$ (rojo), la transmitancia $\% \mathcal{T}_{ii}$ y mezcla $\% \mathcal{R}_{ij}/\% \mathcal{T}_{ij}$ (verde) como una función de $\bar{\alpha}_{12}$ para un TI puro, con $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

De esta forma, consideraremos la reflectancia y transmitancia de modos ss y pp , y

la mezcla de modos sp y ps para valores grandes de $\bar{\alpha}_{12}$ (figura [3.11]). Y aunque probablemente no se puedan encontrar valores tan grandes de $\bar{\alpha}_{12}$ en un aislante topológico, este límite es útil para comprender el efecto del acoplamiento del axión y puede tener cierta relación con los tratamientos del acoplamiento del axión como un campo fundamental.

La figura [3.11] nos muestra el porcentaje de reflexión $\mathcal{R}_{ii}$ (rojo), transmisión $\mathcal{T}_{ii}$, y mezcla $\mathcal{R}_{ij}/\mathcal{T}_{ij}$ (verde), para las ecuaciones (3.21-3.23) como funciones de $\bar{\alpha}_{12}$. Para $\bar{\alpha}_{12} \rightarrow 0$ se ve que los coeficientes de reflexión y mezcla se desvanecen mientras que tenemos transmisión perfecta. Para $\bar{\alpha}_{12} \rightarrow \infty$, los coeficientes de transmisión y mezcla se desvanecen mientras la reflexión se acerca a la de un espejo perfecto. Por lo tanto, para grandes cambios en el acoplamiento del axión, la interfaz se vuelve puramente reflectiva y no se produce mezcla. Además, uno ve que la mezcla máxima ocurre cuando los coeficientes de reflexión y transmisión son iguales.

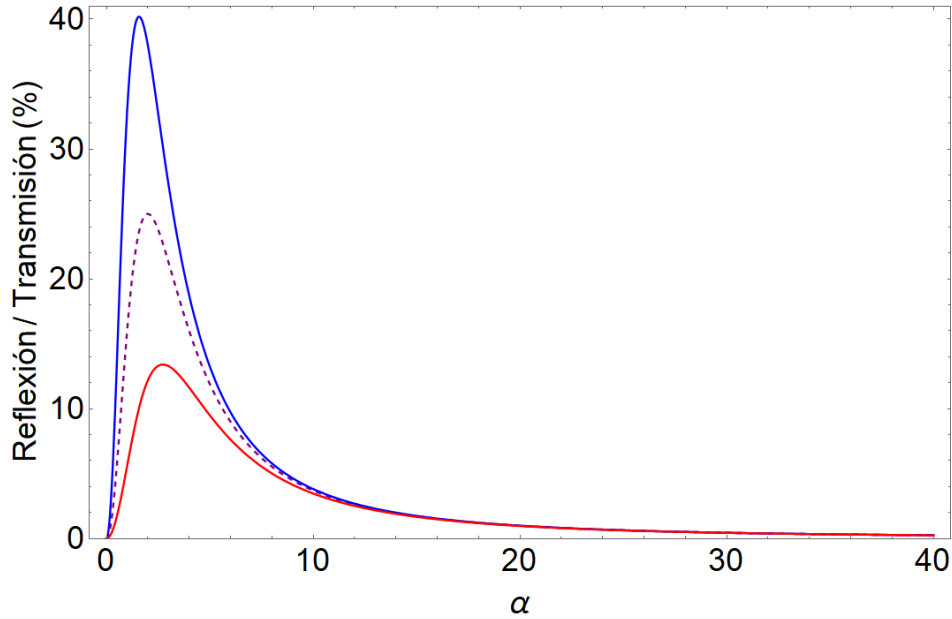


Figura 3.12: Comportamiento de la reflectancia $\% \mathcal{R}_{ij}$ y la transmitancia $\% \mathcal{T}_{ij}$ para modos mezclados como una función de $\bar{\alpha}_{12}$ para un TI puro, con $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ (línea punteada purpura); $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 3$ (línea sólida roja) y $\mu_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \mu_2 = 3$ (línea sólida azul).

Sin embargo, si uno cambia las impedancias relativas de los medios, este máximo se modifica. Disminuir la impedancia p_{12} (es decir, aumentar ε_2 con respecto a μ_2) desplaza el pico a valores más bajos que el punto de cruce de reflexión-transmisión (figura [3.12]), mientras que aumentar la impedancia s_{21} (aumentar μ_2 con respecto a ε_2) desplaza el pico a valores más grandes que el punto de cruce de

reflexión-transmisión (figura [3.12]). Por lo tanto, vemos que la mezcla es mejorada por la respuesta magnética del material y suprimida por la respuesta eléctrica.

Finalmente, será conveniente para el resto de este estudio escribir los coeficientes de Fresnel en forma de matriz

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R_{s,s} & R_{p,s} \\ R_{s,p} & R_{p,p} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

donde hemos escrito solo la matriz de reflexión ya que es la que nos interesa para los cálculos de Casimir.

3.8 Energía de Casimir para aislantes topológicos isotrópicos

Las expresiones obtenidas para los coeficientes de reflexión permiten obtener la energía de Casimir entre aislantes topológicos isotrópicos.

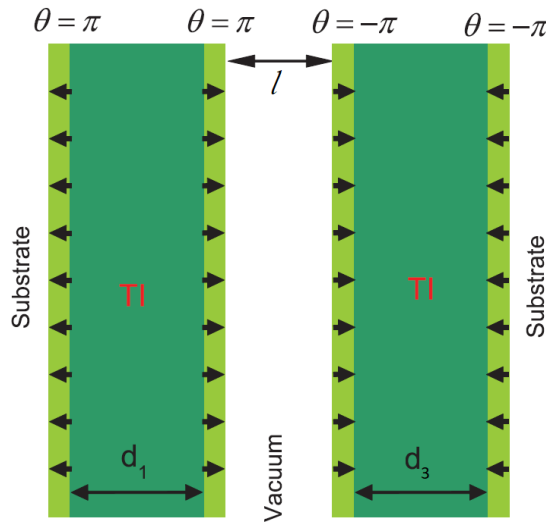


Figura 3.13: Configuración de las placas TI con un recubrimiento magnético de espesor $\delta \ll d_m$ ($m = 1, 3$) [44].

Para lograr la fuerza repulsiva de Casimir entre dos TI, se debe aplicar un recubrimiento magnético (espesor δ) en la superficie de la TI para eliminar la degeneración de los estados de superficie, como se muestra en la Figura [3.13]. Este recubrimiento conduce a un $\bar{\alpha}$ positivo cuando la magnetización en la superficie es normal a la placa y negativo cuando la magnetización se invierte [33,34,52]. Enfatizando que el espesor δ del recubrimiento magnético en ambas superficies de

cada placa de TI debe ser mucho menor que los espesores de cada placa.

Ahora bien, entre dos placas dieléctricas paralelas caracterizadas por funciones dieléctricas dependientes de la frecuencia $\varepsilon_1(\omega)$ y $\varepsilon_3(\omega)$, la densidad de energía de Casimir a temperatura cero se puede escribir como (Ecuación B.6)

$$\frac{G(l)}{A} = \hbar \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \ln \det(\mathbb{I} - \mathbb{R}_1 \cdot \mathbb{R}_3 e^{-2K_0 l}), \quad (3.25)$$

donde l y A es la separación y el área de las placas respectivamente, $\mathbf{k}_\parallel$ es el vector de onda paralelo al plano de propagación y $K_0 = \sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + \xi^2/c^2}$ siendo c la velocidad de la luz en el vacío. En el límite de *no-retardo* y tomando las condiciones iniciales $k_{1z} = k_{2z}$, $\mu_1 = \mu_3 = 1$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \epsilon$ tenemos que nuestras matrices de reflexión quedan definidas como ($i = 1, 3$)

$$\mathbb{R}_i = \frac{1}{\bar{\alpha}_i^2 + 2\epsilon + 2} \begin{pmatrix} -\bar{\alpha}_i^2 & 2\bar{\alpha}_i \\ 2\bar{\alpha}_i & \bar{\alpha}_i^2 + 2\epsilon - 2 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Evaluando el determinante, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{G(l)}{A} = \hbar \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \ln \left(1 - \frac{u_1 u_3 + 8\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3^2}{v_1 v_3} e^{-2ql} \right. \\ \left. + \frac{\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3^2}{v_1^2 v_3^2} [u_1 u_3 + 4(u_1 + u_3) + 16] e^{-4ql} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde $u_i = \bar{\alpha}_i^2 + 2\epsilon - 2$ y $v_i = \bar{\alpha}_i^2 + 2\epsilon + 2$. Es fácil probar la identidad algebraica

$$v_1 v_3 = u_1 u_3 + 4(u_1 + u_3) + 16.$$

Entonces la energía libre para dos placas de aislante topológico separadas una distancia l en el vacío es

$$\frac{G(l)}{A} = \hbar \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \ln \left(1 - \frac{u_1 u_3 + 8\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3^2}{v_1 v_3} e^{-2ql} + \frac{\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3^2}{v_1 v_3} e^{-4ql} \right). \quad (3.28)$$

3.8.1 Resultados

En la figura [3.14] se presenta el comportamiento de la energía libre por unidad de área $G(l)/A$ con respecto al término topológico $\bar{\alpha}$ para diferentes valores de permitividad dieléctrica: $\epsilon = 1$ (naranja), $\epsilon = 1.5$ (azul), $\epsilon = 2$ (verde), $\epsilon = 2.5$

(purpura), $\epsilon = 5$ (negro), $\epsilon = 6$ (rojo), $\epsilon = 7$ (gris) y $\epsilon = 10$ (magenta).

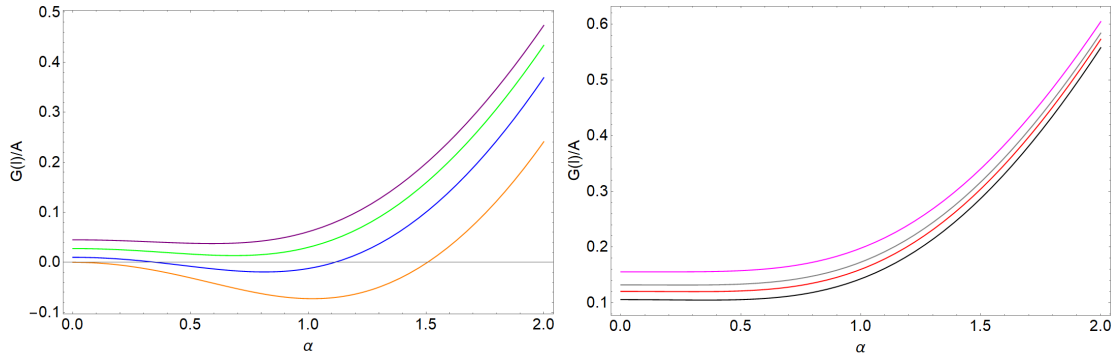


Figura 3.14: Comportamiento de la energía libre por unidad de área $G(l)/A$ con respecto al término topológico $\bar{\alpha}$.

En estos gráficos se puede observar que hasta ciertos valores de la permitividad dieléctrica ϵ la energía decrece lentamente para luego crecer rápidamente, pero luego, para valores por encima de $\epsilon = 5$ la función solo crece.

Capítulo 4

Fuerzas de Casimir para aislantes topológicos anisotrópicos

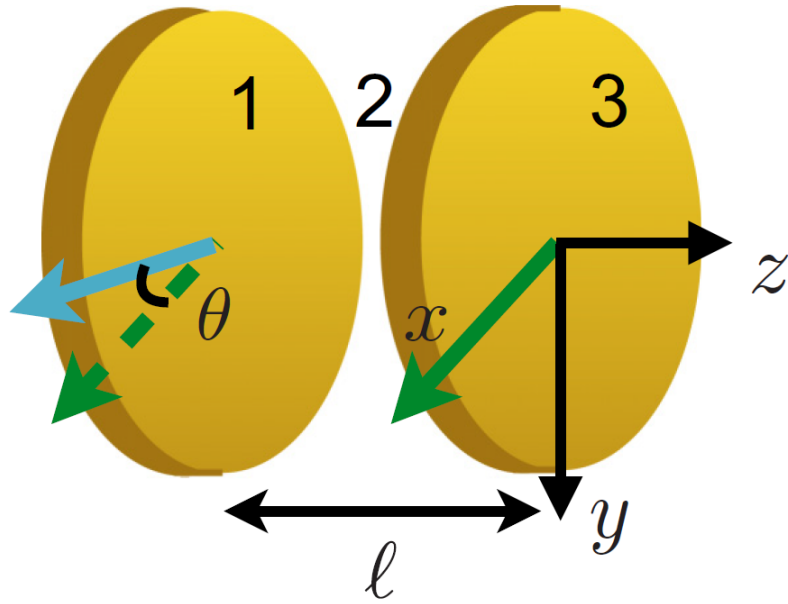


Figura 4.1: Un par de placas de aislantes topológicos planas y coplanares (rotuladas 1 y 3) separadas por un espacio de vacío (rotulado como 2) de ancho ℓ . El eje óptico de las placas 1 y 3 son de color cian y verde respectivamente, y la diferencia angular entre las orientaciones de los ejes ópticos es θ (figura sacada de [1]).

En este capítulo estudiaremos el carácter de la fuerza y el torque de Casimir entre dos placas de aislante topológico (TI) coplanares y dieléctricamente anisotrópicas separadas por una brecha de vacío (figura [4.1]) en el límite de no retardo, donde los ejes ópticos de las placas son perpendiculares a la dirección normal y a la interfaz

placa-brecha y también orientados de manera diferente entre sí. En la figura solo se muestra una sección finita de las placas, pero asumiremos que tienen espesores y áreas de sección transversal infinitamente grandes [1].

En el límite de no retardo (donde $c \rightarrow \infty$), las ecuaciones de Maxwell modificadas para un aislante topológico, no magnetizable y homogéneo vienen dadas por [30, 45, 46]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = \nabla \bar{\alpha} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \bar{\alpha} \times \mathbf{E}, \quad (4.4)$$

donde al ser placas dieléctricamente anisotrópicas la permitividad dieléctrica es un tensor $\hat{\epsilon}$, que viene dado como:

$$\hat{\epsilon}_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \epsilon_{(i)x} \cos^2 \theta_i + \epsilon_{(i)y} \sin^2 \theta_i & (\epsilon_{(i)x} - \epsilon_{(i)y}) \sin \theta_i \cos \theta_i & 0 \\ (\epsilon_{(i)x} - \epsilon_{(i)y}) \sin \theta_i \cos \theta_i & \epsilon_{(i)y} \cos^2 \theta_i + \epsilon_{(i)x} \sin^2 \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{(i)z} \end{pmatrix}.$$

El subíndice $(i) = 1, 2, 3$ representa el medio en el que se está considerando, y θ_i (que no debe confundirse con el término Θ en el acoplamiento topológico magnetoeléctrico) denota la orientación del eje óptico de la placa i con respecto a un eje de referencia. Los símbolos $\epsilon_{(i)x}$, $\epsilon_{(i)y}$ e $\epsilon_{(i)z}$ denotan los valores de las permitividades dieléctricas a lo largo de las tres direcciones principales del TI.

Por otro lado, $\bar{\alpha}$ denota el término de acoplamiento topológico [47, 48], cuyo valor es constante en cada región, pero que cambia de forma discontinua a través de una interfaz dieléctrica y viene dado como $\bar{\alpha} = (2n + 1)\alpha/\pi$ donde α es el coeficiente de estructura fina. Para nuestro sistema (Figura [4.1]), donde el medio 1 se define como la región $z \leq 0$, el medio 2 (la brecha de vacío) como la región entre $0 < z < l$, y el medio 3 como la región $z \geq l$, $\bar{\alpha}_2 = 0$ y $\bar{\alpha}_1$ y $\bar{\alpha}_3$ tienen valores distintos de cero. Debido a la rotura de la simetría traslacional a lo largo de la dirección z , podemos ver que $\bar{\alpha}$ tiene una dependencia espacial solo en z . Suponiendo que $\bar{\alpha}$ se cuantifica (remitimos a una discusión de la validez de este supuesto en la sección 1.4), podemos escribir $\bar{\alpha}_i = (2n + 1)\Theta_i/\pi$ ($i = 1, 3$ son los etiquetas para los medios

de TI), y haciendo uso del hecho de que la derivada de una función Heaviside es una función delta de Dirac, tenemos que

$$\partial_z \bar{\alpha}(z) = (2n + 1)\Theta\delta(z). \quad (4.5)$$

Retomando nuestro sistema, las dos últimas ecuaciones de Maxwell modificadas implican que podemos expresar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en términos de los potenciales escalares y vectoriales,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.7)$$

Por conveniencia, escogeremos el gauge de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Sustituyendo las anteriores ecuaciones en el segundo par de ecuaciones de Maxwell modificadas, obtenemos

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = \nabla \bar{\alpha} \cdot \nabla \times \mathbf{A}, \quad (a) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \bar{\alpha} \times \nabla \Phi \quad (b). \quad (4.8)$$

En el bulk, $\partial_z \bar{\alpha} = 0$, las ecuaciones para Φ y $\mathbf{A}$ se desacoplan y se vuelven ecuaciones de onda homogéneas de la forma [49]:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} f_i(z) e^{i(q_x x + q_y y)} & \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \mathbf{h}_i(z) e^{i(q_x x + q_y y)} \\ f_1(z) &= a_1 e^{\rho_1 z} & \mathbf{h}_1(z) &= \mathbf{c}_1 e^{qz} \quad (z \leq 0), \\ f_2(z) &= a_2 e^{\rho_2 z} + b_2 e^{-\rho_2 z} & \mathbf{h}_2(z) &= \mathbf{c}_2 e^{qz} + \mathbf{d}_2 e^{-qz} \quad (0 < z < l), \\ f_3(z) &= b_3 e^{-\rho_3 z} & \mathbf{h}_3(z) &= \mathbf{d}_3 e^{-qz} \quad (z \geq l), \end{aligned}$$

donde la solución de la ecuación de onda para el potencial $\mathbf{A}$ resulta de resolver la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mathbf{A}_i &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} [\partial_z^2 \mathbf{h}_i(z)] e^{i(q_x x + q_y y)} \\ &+ \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (-q_x^2) \partial_z^2 \mathbf{h}_i(z) e^{i(q_x x + q_y y)} + \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (-q_y^2) \partial_z^2 \mathbf{h}_i(z) e^{i(q_x x + q_y y)}. \end{aligned}$$

En conclusión, obtenemos

$$\partial_z^2 \mathbf{h}_i(z) - \mathbf{q}^2 \mathbf{h}_i(z) = 0, \quad (4.9)$$

donde $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$.

4.1 El factor de anisotropía γ .

Mientras que la solución para el potencial $\mathbf{A}$ es la trivial para un sistema de ecuaciones diferenciales donde q viene definido como $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$, la inclusión del tensor $\hat{\epsilon}$ complica los resultados para el potencial Φ . Partiendo de la ecuación diferencial

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = 0,$$

la cual se anula por la elección del gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\epsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\epsilon_{ix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \epsilon_{iy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \epsilon_{iz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_{xz} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{yx} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_{yz} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{zx} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{zy} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Reemplazando junto a los valores del tensor $\hat{\epsilon}(\phi)$ en el *ansatz* para el potencial escalar Φ , obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{(i)z} \partial_z^2 f_i(z) + [2q_x q_y (\epsilon_{(i)x} - \epsilon_{(i)y}) \sin \theta_i \cos \theta_i \\ - q_x^2 (\epsilon_{(i)x} \cos^2 \theta_i + \epsilon_{(i)y} \sin^2 \theta_i) - q_y^2 (\epsilon_{(i)y} \cos^2 \theta_i + \epsilon_{(i)x} \sin^2 \theta_i)] f_i(z) = 0. \end{aligned}$$

Ordenando un poco y sacando factor común $\epsilon_{(i)z}$, se obtiene

$$\partial_z^2 f_i(z) - \rho_i^2(\theta) f_i(z) = 0, \quad (4.10)$$

donde

$$\rho_i^2(\theta) \equiv \frac{\epsilon_{(i)x}}{\epsilon_{(i)z}} (q_x \cos \theta_i + q_y \sin \theta_i)^2 + \frac{\epsilon_{(i)y}}{\epsilon_{(i)z}} (q_y \cos \theta_i - q_x \sin \theta_i)^2. \quad (4.11)$$

Al utilizar simetría circular, podemos expresar q_x y q_y en términos de una nueva variable angular ψ (que no debe confundirse con la orientación del eje óptico θ), es decir, $q_x = q \cos \psi$, $q_y = q \sin \psi$, donde también obtenemos una relación entre los

limites de integración correspondientes $\int d\psi dq$ [49]. Por lo tanto, podemos expresar ρ_i en la forma [50]

$$\rho_i(\theta) = qg_i(\theta_i - \psi) \quad \text{donde} \quad g_i(\theta - \psi) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_{(i)y}}{\epsilon_{(i)z}} + \frac{\epsilon_{(i)x} - \epsilon_{(i)y}}{\epsilon_{(i)z}} \cos^2(\theta - \psi)}.$$

Consideraremos el caso donde $\epsilon_{(i)y} = \epsilon_{(i)z}$.

$$\gamma_i \equiv \frac{\epsilon_{(i)x}}{\epsilon_{(i)z}} - 1 \quad \Rightarrow \quad g_i = \sqrt{1 + \gamma_i \cos^2(\theta - \psi)}.$$

Podemos verificar fácilmente que para una placa dieléctricamente isotrópica, $g_i \rightarrow 1$ y $\rho_i \rightarrow q \equiv (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$.

4.2 Condiciones de frontera.

Para obtener la fuerza de Casimir, nuestra siguiente tarea será obtener el determinante secular de las condiciones de frontera. Las condiciones de frontera para Φ pueden derivarse integrando la ecuación (4.8a) sobre los límites dieléctricos de cada interfaz, y se requiere que Φ sea continuo a través de cada límite. Tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= \Phi_2(0), \\ \Phi_2(l) &= \Phi_3(l), \\ [\epsilon_{(1)z} \partial_z \Phi_1 - \epsilon_{(2)z} \partial_z \Phi_2]_{z=0} &= -[\bar{\alpha}_1(\partial_x A_{1y} - \partial_y A_{1x})]_{z=0}, \\ [\epsilon_{(2)z} \partial_z \Phi_2 - \epsilon_{(3)z} \partial_z \Phi_3]_{z=l} &= [\bar{\alpha}_3(\partial_x A_{3y} - \partial_y A_{3x})]_{z=l}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podemos derivar las condiciones de contorno para $\mathbf{A}$ por un método análogo,

$$\begin{aligned} A_{1x}(0) &= A_{2x}(0), \\ A_{1y}(0) &= A_{2y}(0), \\ A_{2x}(l) &= A_{3x}(l), \\ A_{2y}(l) &= A_{3y}(l). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mediante la integración de la ecuación (4.8b) que requiere la continuidad de $\mathbf{A}$ a través de cada límite dieléctrico. En términos de cada componente, la ecuación

(4.8b) se convierte en

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x &= \bar{\alpha} \delta(z - z_m) \partial_y \Phi, \\ \nabla^2 A_y &= \bar{\alpha} \delta(z - z_m) \partial_x \Phi,\end{aligned}\quad (4.14)$$

donde z_m ($m = L, R$) denota la posición de las interfaces dieléctricas, es decir, $z_L = 0$ y $z_R = l$. La integración a través del límite en $z = 0$ conduce a

$$\begin{aligned}[\partial_z A_{2x} - \partial_z A_{1x}]_{z=0} &= -\bar{\alpha}_1 \partial_y \Phi_1(0), \\ [\partial_z A_{2y} - \partial_z A_{1y}]_{z=0} &= \bar{\alpha}_1 \partial_x \Phi_1(0).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Integrando a través de $z = l$ obtenemos

$$\begin{aligned}[\partial_z A_{3x} - \partial_z A_{2x}]_{z=l} &= -\bar{\alpha}_3 \partial_y \Phi_3(l), \\ [\partial_z A_{3y} - \partial_z A_{2y}]_{z=l} &= \bar{\alpha}_3 \partial_x \Phi_3(l).\end{aligned}\quad (4.16)$$

Las ecuaciones (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) y (4.16) se pueden expresar en términos de los coeficientes a_1 , a_2 , b_2 , b_3 , c_{1x} , c_{2x} , d_{2x} , d_{3x} , c_{1y} , c_{2y} , d_{2y} y d_{3y} usando las soluciones para los potenciales. De esta forma se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 l} & e^{-\rho_2 l} & -e^{\rho_3 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{ql} & e^{-ql} & -e^{-ql} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{ql} & e^{-ql} & -e^{-ql} \\ \epsilon_{1z} \rho_1 & -\epsilon_{2z} \rho_2 & \epsilon_{2z} \rho_2 & 0 & -i\bar{\alpha}_1 q_y & 0 & 0 & 0 & i\bar{\alpha}_1 q_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{2z} \rho_2 e^{\rho_2 l} & -\epsilon_{2z} \rho_2 e^{-\rho_2 l} & \epsilon_{3z} \rho_3 e^{-\rho_3 l} & 0 & 0 & 0 & i\bar{\alpha}_3 q_y e^{-ql} & 0 & 0 & 0 & -i\bar{\alpha}_3 q_x e^{-ql} \\ \frac{i\bar{\alpha}_1 q_y}{q} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\bar{\alpha}_3 \frac{q_y}{q} e^{-\rho_3 l} & 0 & -e^{ql} & e^{-ql} & -e^{-ql} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i\bar{\alpha}_1 q_x}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\bar{\alpha}_3 \frac{q_x}{q} e^{-\rho_3 l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{ql} & e^{-ql} & -e^{-ql} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_{1x} \\ c_{2x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \\ c_{1y} \\ c_{2y} \\ d_{2y} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene una solución no trivial si el determinante de la matriz se anula, es decir, $\det[\mathbf{M}] = 0$. Un cálculo directo muestra que el determinante es proporcional a $\mathcal{D}(\omega, ql)$, donde

$$\mathcal{D}(\omega, \xi) = 1 - \frac{8\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_3 \epsilon_{2z} g_2}{v_1 v_3} e^{-(1+g_2)\xi} - \frac{u_1 u_3}{v_1 v_3} e^{-2g_2 \xi} - \frac{\bar{\alpha}_1^2 \bar{\alpha}_3^2}{v_1 v_3} (e^{-2\xi} - e^{-2(1+g_2)\xi}). \quad (4.17)$$

donde los ceros de la función $\mathcal{D}(\omega, \xi)$ determinan la ley de dispersión de nuestro sistema. La forma de $\mathcal{D}$ es tal que $\ln \mathcal{D} \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Aquí $\xi = ql$ la cual es una variable adimensional, que no debe confundirse con las frecuencias de

Matsubara, y donde hemos definido (para $i = 1, 3$)

$$u_i = \bar{\alpha}_i^2 + 2[\epsilon_{(i)z}g_i(\theta_i) - \epsilon_{(2)z}g_2(\theta_2)], \quad (4.18)$$

$$v_i = \bar{\alpha}_i^2 + 2[\epsilon_{(i)z}g_i(\theta_i) + \epsilon_{(2)z}g_2(\theta_2)]. \quad (4.19)$$

Para $\gamma = 0$ las expresiones para u_i , v_i y $\mathcal{D}$ se reducen a las obtenidas para el caso isotrópico, obtenidas en el capítulo 3.

4.3 Energía y fuerza de Van der Waals en aislantes topológicos anisotrópicos.

Por el principio del argumento [Apendice B], la suma sobre las frecuencias permitidas de las fluctuaciones electromagnéticas entre las placas en la energía libre (que da lugar a la interacción de van der Waals) se puede expresar en forma de una integral de contorno sobre otra función cuyos ceros aparecen en los valores de las frecuencias permitidas. Esto conduce a la siguiente forma de la energía libre de interacción de Van der Waals [Ecuación (B.6)]

$$\mathcal{E}(l) = \frac{A\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\xi_n \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} q \ln \mathcal{D}(i\xi_n, ql), \quad (4.20)$$

donde A es el área de las placas y ξ_n son las frecuencias de Matsubara, definidas por $\xi_n \equiv 2\pi n K_B T / \hbar$, dado que los aislantes topológicos existen a temperaturas de orden de los nK y el primer término en la suma sobre las frecuencias de Matsubara es $n = 0$ le dice a uno que el primer término debe ser multiplicado por un factor adicional de $1/2$. Además, en la práctica, la aproximación de *no-retardo* funciona bien si la distancia de separación es menor que todas las longitudes de onda resonantes del material de la placa [34]. Si consideramos que el material es un aislante topológico de TlBiSe_2 , hay dos resonancias posibles, es decir, una resonancia de fonón cerca de 56 cm^{-1} (que corresponde a una longitud de onda de absorción de $180 \text{ }\mu\text{m}$), así como una resonancia de plasma cerca de los 800 cm^{-1} (que corresponde a una longitud de onda de absorción de $12.5 \text{ }\mu\text{m}$) [51]. Por lo tanto, nuestra aproximación de *no-retardo* debería funcionar bien para $l \leq 12.5 \text{ }\mu\text{m}$.

De la expresión de energía libre, ec. (4.19), podemos derivar la fuerza de Van der

Waals (vdW) por unidad de área F_{vdW} a partir de la fórmula $\mathcal{F}_{\text{vdW}} = -\partial\mathcal{E}/\partial l$, queda

$$\mathcal{F}_{\text{vdW}} = \frac{\hbar}{2\pi l^3} \int_0^\infty d\xi_n \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty d\xi \xi \ln \mathcal{D}(i\xi_n, \xi), \quad (4.21)$$

centrándonos solo en el comportamiento de la integral finalmente obtenemos

$$F_{\text{vdW}} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty d\xi \xi \ln \mathcal{D}(i\xi_n, \xi). \quad (4.22)$$

Como ya se mencionó en esta sección, estudiaremos el carácter de la fuerza de vdW entre losas de TI que interactúan a través de una brecha de vacío ($g_2 = 1, \epsilon_{2z} = 1$) en el límite $T \rightarrow 0$. Esto significa que podemos aproximar la interacción de vdW por la contribución de la frecuencia Matsubara $n = 0$, y reemplazar ϵ , γ y $\bar{\alpha}$, por sus valores estáticos.

4.3.1 Resultados.

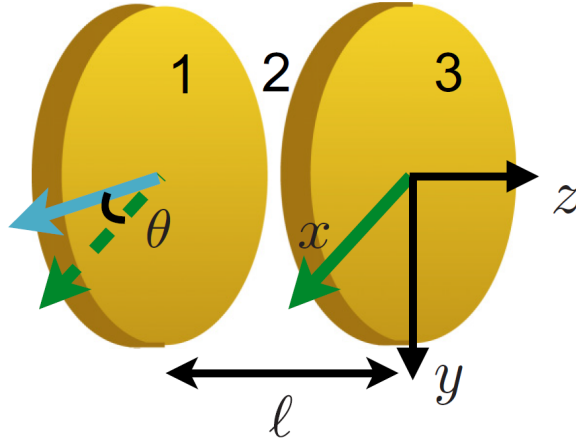


Figura 4.2: Un par de placas de aislantes topológicos planas y coplanares (rotuladas 1 y 3) separadas por un espacio de vacío (rotulado como 2) de ancho l . El eje óptico de las placas 1 y 3 son de color cyan y verde respectivamente, y la diferencia angular entre las orientaciones de los ejes ópticos es θ . El color gris en la placa 3 hace referencia a que esta es la que gira con respecto a la placa 1 que permanece estática (figura sacada de [1]).

Pasaremos a analizar la variación de la fuerza en función del ángulo de desalineación θ_3 entre los ejes ópticos primero para dos placas de aislante topológico con diferente signo en sus términos topológicos los cuales se representa en las Figuras [4.3]-[4.5],

luego para una placa de dieléctrico convencional y una placa de TI representada en las figuras [4.6] y [4.7] y finalmente un caso particular de dos placas de TI de igual signo en sus términos topológicos. En todos los casos consideraremos que la placa 1 está fija con respecto a la placa 3, que es la que gira; es decir, $\theta_1 = 0$.

Dos placas de aislante topológicos con diferentes valores de γ

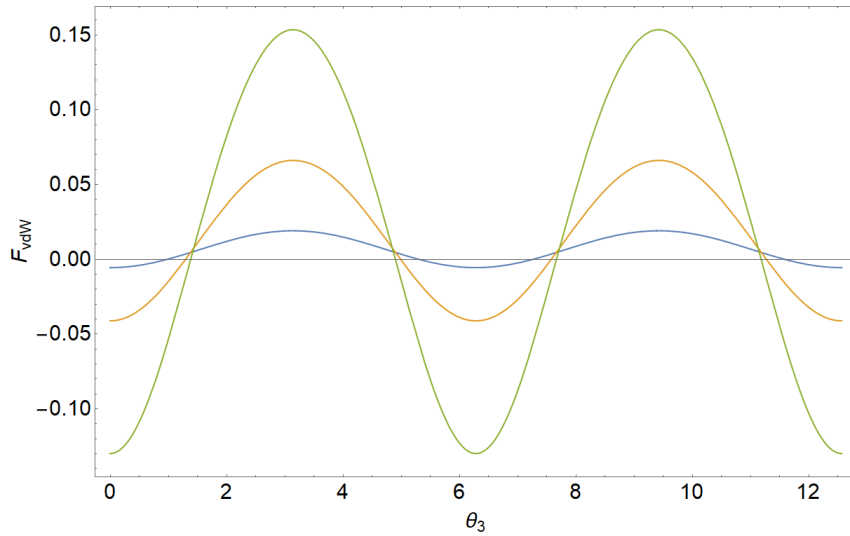


Figura 4.3: Comportamiento del módulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes valores del término de anisotropía: $\gamma = 0.5$, $\gamma = 1$ y $\gamma = 1.5$

La figura [4.3] muestra el comportamiento de dos placas de TI con una permitividad dieléctrica constante $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz} = 1.2$ (para $i = 1, 3$ que representan la etiqueta de cada placa), un término topológico constante $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 21/137$ y diferentes valores de anisotropía γ . La elección de los signos para los términos topológicos está motivada por el hallazgo en la referencia [26] que nos dice que la repulsión de vdW es posible si las placas de TI poseen acoplamientos magnetoeléctricos de la misma magnitud pero signos opuestos, y el factor entero en $\bar{\alpha}$ cuenta el número de estados de superficie en el TI. En todos los casos, vemos que aumentar la anisotropía por medio del ángulo θ_3 tiene el efecto de hacer que la fuerza de vdW sea más atractiva/menos repulsiva. En la figura [4.3] también podemos notar que a medida que se aumenta el término de anisotropía γ aumenta la amplitud del resultado.

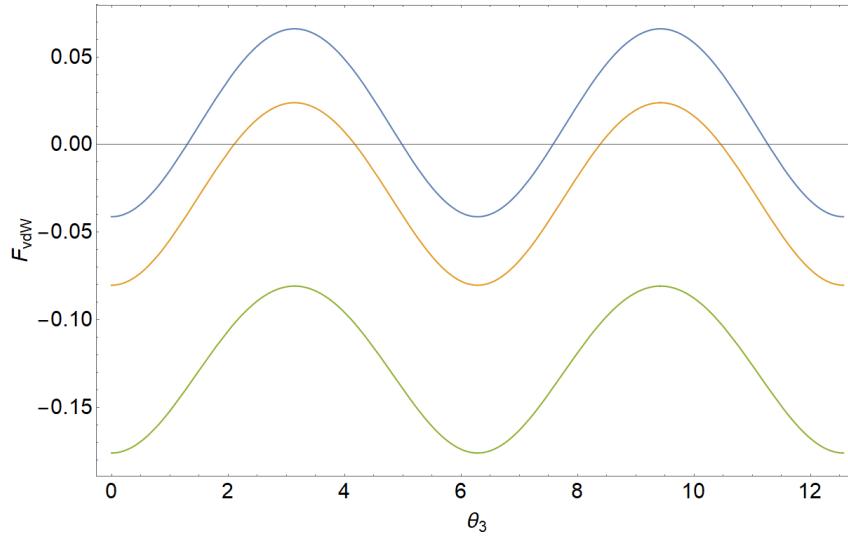


Figura 4.4: Comportamiento del modulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes valores de permitividad dieléctrica: $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz} = 1.2$, $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz} = 1.5$ y $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz} = 2$

Dos placas de aislante topológicos con diferentes valores de $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz}$

La figura [4.4] muestra el comportamiento correspondiente para un término de anisotropía constante $\gamma = 1$, un término topológico constante $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 21/137$ y diferentes valores de permitividad $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz}$. En el caso de la figura [4.4] podemos notar que a medida que se aumenta la permitividad dieléctrica $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz}$, la fuerza se desplaza hacia abajo pasando de esta forma de tener una fuerza que oscila entre fuerza atractiva y repulsiva a ser una fuerza de carácter estrictamente atractiva.

Dos placas de aislante topológicos con diferentes valores de $\bar{\alpha}$

La figura [4.5] muestra el comportamiento correspondiente para un término de anisotropía constante $\gamma = 1$, una permitividad dieléctrica constante $\epsilon_{iy} = \epsilon_{iz} = 1.2$ y diferentes valores del término topológico $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3$. En el caso de la figura [4.4] podemos notar que a medida que se aumenta el acoplamiento magnetoelectrico $\bar{\alpha}$ la fuerza se desplaza hacia arriba pasando de esta forma de tener una fuerza que oscila entre fuerza atractiva y repulsiva a ser una fuerza con un comportamiento estrictamente repulsivo. Algo adicional a tener en cuenta es que a diferencia del caso anterior que la función bajaba rápidamente para pequeños cambios en la permitividad ϵ , aquí la función sube muy lentamente para cambios en el término $\bar{\alpha}$ hasta $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 21/137$; luego de este valor, los cambios se vuelven más

perceptibles.

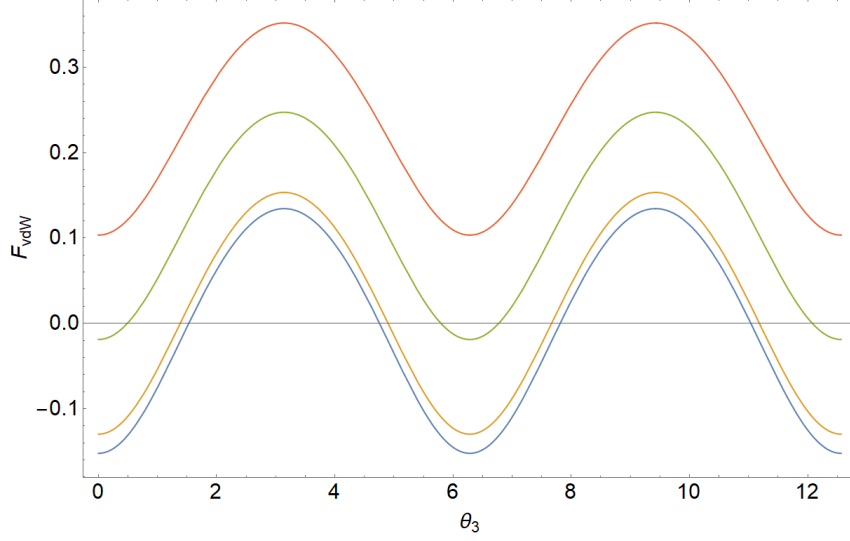


Figura 4.5: Comportamiento del módulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes valores del término topológico: $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 3/137$, $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 21/137$, $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 51/137$ y $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 71/137$

Como aumentar la anisotropía tiene el efecto de hacer que la fuerza vdW sea más atractiva (en este tipo de configuración donde el medio que separa las placas es el vacío), no debemos esperar ver la repulsión de vdW para ningún valor de la anisotropía γ si la permitividad dieléctrica estática es mayor que 2. Por otro lado, estos resultados son consistentes con los presentados en la referencia [26], pero en este trabajo, hemos querido ahondar más en esta condición observando si es posible obtener fuerzas de carácter repulsivo entre una placa de un material convencional (es decir $\bar{\alpha}_1 = 0$) y una de TI si el signo del término topológico $\bar{\alpha}_3$ es negativo.

Placa de dieléctrico convencional y una de aislante topológico con diferentes valores de $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z}$

La figura [4.6] muestra el comportamiento correspondiente para una placa de material dieléctrico (medio 1) interactuando con una placa de aislante topológico (medio 3), para un término de anisotropía constante $\gamma = 1.5$, término topológico constante $\bar{\alpha}_3 = -21/137$, una permitividad dieléctrica constante en la placa de TI $\epsilon_{3y} = \epsilon_{3z} = 1.2$ y diferentes valores de la permitividad dieléctrica $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z}$. Los resultados para esta configuración 2 son muy interesantes: primero observamos que a medida que aumentamos ϵ_1 la fuerza se vuelve mas repulsiva en lugar de

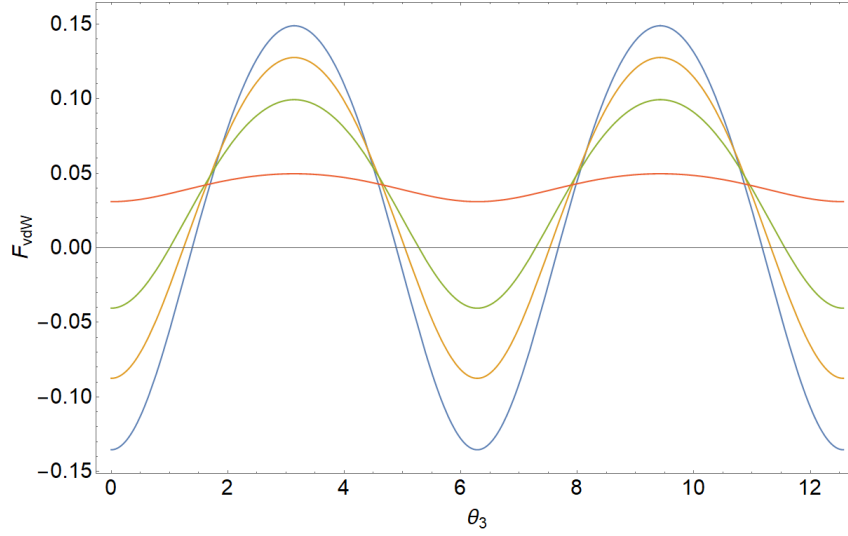


Figura 4.6: Comportamiento del módulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ en una configuración *material dieléctrico-vacío-TI*, para diferentes valores de la permitividad dieléctrica en el medio convencional: $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z} = 2.5$, $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z} = 5$, $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z} = 10$ y $\epsilon_{1y} = \epsilon_{1z} = 100$.

atractiva en comparación con la configuración 1; Segundo podemos usar valores altos de permitividad para obtener fuerzas de vdW de carácter netamente repulsivo; por ultimo, el aumento de la permitividad también cambia la amplitud del resultado.

Placa de dieléctrico convencional y una de aislante topológico con diferentes valores de γ

La figura [4.7] muestra el comportamiento correspondiente para una placa de material dieléctrico (medio 1) interactuando con una placa de aislante topológico (medio 3), para permitividades dieléctricas constantes $\epsilon_1 = 2.5$ y $\epsilon_3 = 1.2$, término topológico constante $\bar{\alpha}_3 = -21/137$ y diferentes valores del término de anisotropía γ . En este resultado podemos notar que análogo a la configuración 1 a medida que se aumenta el término de anisotropía γ aumenta la amplitud de la oscilación con ligeros desplazamientos hacia arriba del gráfico.

Sistema formado por dos placas de TI pero con signos iguales en el término topológico

El último caso de esta sección busca comparar el comportamiento de la fuerza de vdW F_{vdW} en placas de TI con igual magnitud y signo en el término topológico

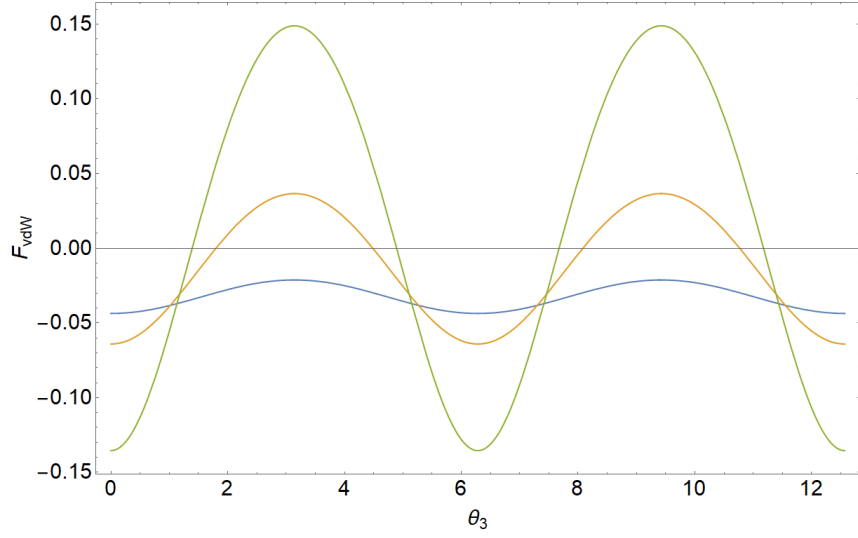


Figura 4.7: Comportamiento del módulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ en una configuración *material dieléctrico-vacío-TI*, para diferentes valores del término de anisotropía: $\gamma = 0.5$, $\gamma = 1$ y $\gamma = 1.5$

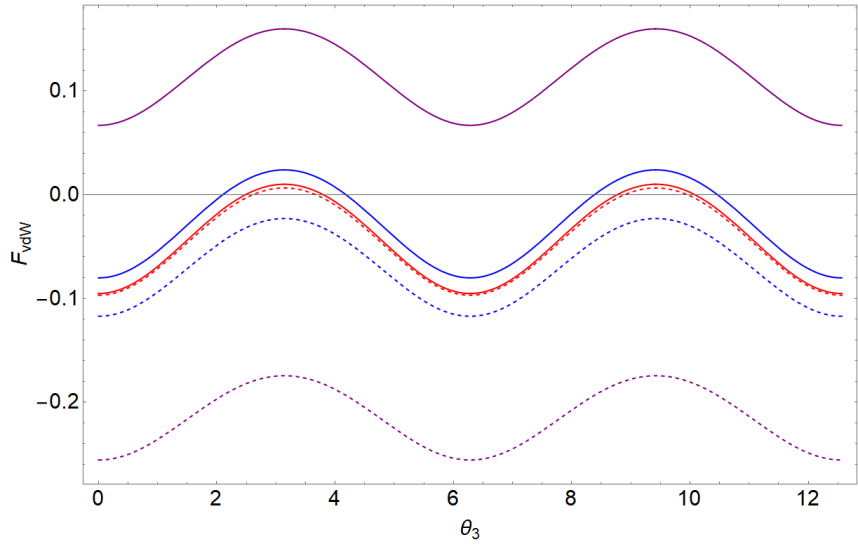


Figura 4.8: Comportamiento del módulo de la fuerza de vdW F_{vdW} en función del ángulo de desalineación óptica θ donde se compara el comportamiento de dos placas con signos iguales en el término topológico es decir $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3$ (línea punteada) y dos placas con signos opuestos $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3$ (línea sólida): $\bar{\alpha} = 3/137$, $\bar{\alpha} = 21/137$ y $\bar{\alpha} = 69/137$

($\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3$). Este caso contrasta con los casos anteriores, donde el signo de $\bar{\alpha}$ es diferente. En este caso, se trabajará con valores constantes de $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.5$ y $\gamma = 1$. En este resultado (figura [4.8]), los TI con igual magnitud y signo (línea punteada) la fuerza F_{vdW} se vuelve más atractiva a medida que aumenta el término topológico; a diferencia del caso de igual magnitud pero signos contrarios (línea

sólida), donde la fuerza se vuelve cada vez más repulsiva a medida que se aumenta el término topológico. Algo también a notar, es que la fuerza repulsiva en el caso de los signos iguales solo tiene lugar para una cierta elección de los parámetros constantes y esta fuerza repulsiva solo toma lugar para pequeños intervalos de θ tomando valores pequeños a comparación de la fuerza atractiva que experimenta el sistema.

4.4 Torque de Van der Waals en aislantes topológicos.

Habiendo explorado el comportamiento de la fuerza de vdW, pasamos ahora a analizar el comportamiento del torque de vdW experimentado por las placas de TI, que viene dado por

$$\tau(\theta, l) = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}. \quad (4.23)$$

Consideremos un tipo de sistema similar al que se acaba de analizar para determinar la fuerza, donde dos placas de TI del mismo material están separadas por un espacio de vacío. Al igual que en nuestro análisis de la fuerza de vdW, nos centraremos en el límite $T \rightarrow 0$. Para hacer que nuestros cálculos sean analíticamente manejables, expandiremos $\ln \mathcal{D}$ de la ecuación (4.17) en potencias de γ y e^{-2ql} en orden cuadrático, y realizaremos las integraciones para $\int d\psi$ y $\int q d\psi$. Para encontrar el torque aplicamos la ecuación (4.23). Obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \tau(\theta, l) \approx & -\frac{\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{4}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3\right) \sin 2\theta}{1024\pi \left(1 + \frac{1}{4}\bar{\alpha}_1^2\right)^3 \left(1 + \frac{1}{4}\bar{\alpha}_3^2\right)^3 l^2} \left(1 + \frac{1}{4}(\bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2) + \frac{3}{8}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3 \right. \\ & \left. + \frac{3}{16}\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3^2 + \frac{1}{32}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3(\bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2) + \frac{3}{128}\bar{\alpha}_1^3\bar{\alpha}_3^3\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podemos comprobar que en el límite de acoplamiento magnetoeléctrico es decir para $\bar{\alpha} = 0$, obtenemos el resultado conocido para un dieléctrico convencional [49].

4.4.1 Resultados.

Graficamos el comportamiento en la Figura [4.9] para placas de TI con igual valor de $\gamma = 0.2$ y diferentes valores de $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3$ donde el grafico punteado representa

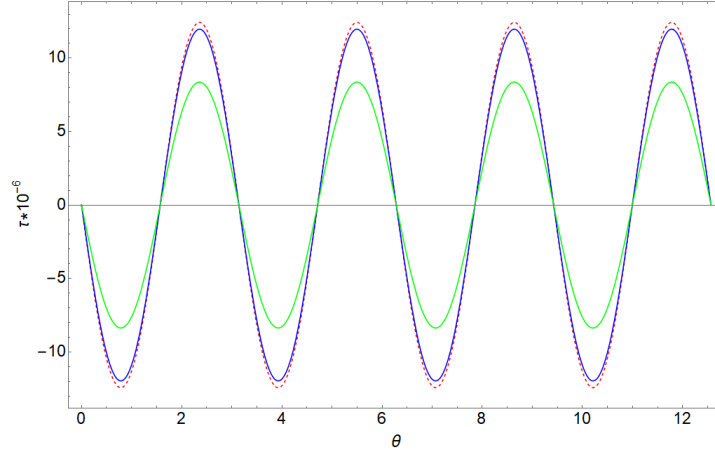


Figura 4.9: Comportamiento del torque τ en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes de $\bar{\alpha}$: $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 0$, $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 21/137$ y $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 69/137$.

2 placas de dieléctricos ordinarios. Encontramos que el torque de vdW para un par de placas TI tiene el mismo comportamiento que para un par de dieléctricos ordinarios; el signo es tal, que el torque se restaura cuando θ es una pequeña perturbación a partir de un múltiplo entero de π , y los valores semienteros de θ representan configuraciones inestables. Para las placas de TI, la magnitud del torque es generalmente más débil que la de los dieléctricos ordinarios, lo que podemos interpretar como una consecuencia del acoplamiento magnetoelectrico. Para los acoplamientos magnetoelectricos más débiles, el comportamiento del torque coincide prácticamente con el de los dieléctricos ordinarios, y las diferencias en el comportamiento del torque entre las TI y los dieléctricos ordinarios se hacen notorias solo para los acoplamientos magnetoelectricos más grandes.

El par de torsión para placas TI con α de la misma magnitud pero signos opuestos es más débil que el de las placas TI con $\bar{\alpha}$ de la misma magnitud y signo. El mayor debilitamiento del torque para el caso donde $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3$ en comparación con el caso en el que $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3$ parece estar asociado con la aparición de una fuerza de vdW repulsiva en el primer caso (en comparación con una fuerza vdW atractiva que surge en el segundo caso). Físicamente, si las fuerzas fueran atractivas, las placas experimentarían un momento de fuerza más fuerte que busca restaurarlas al estado de equilibrio mecánico. De los graficos también podemos deducir que un aumento en la fuerza del acoplamiento magnetoelectrico $\bar{\alpha}$ tiene el efecto de disminuir la magnitud del torque de vdW.

En el último resultado a presentar, se puede notar que ligeros cambios en el término de anisotropía γ genera cambios más notorios en la amplitud del torque, esto se

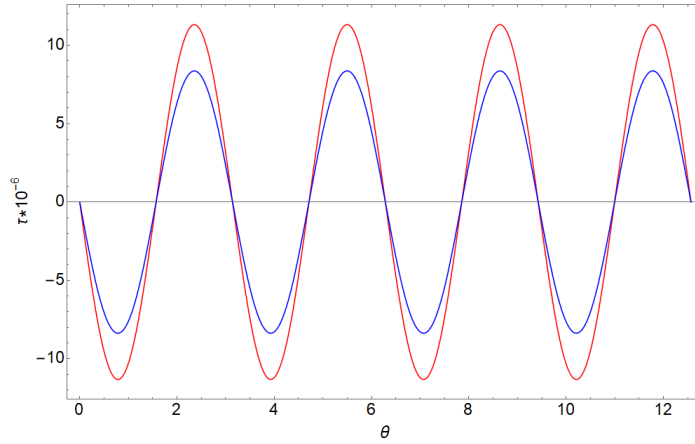


Figura 4.10: Comportamiento del torque τ en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes de $\bar{\alpha}$: $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_3 = 69/137$ y $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\alpha}_3 = 69/137$.

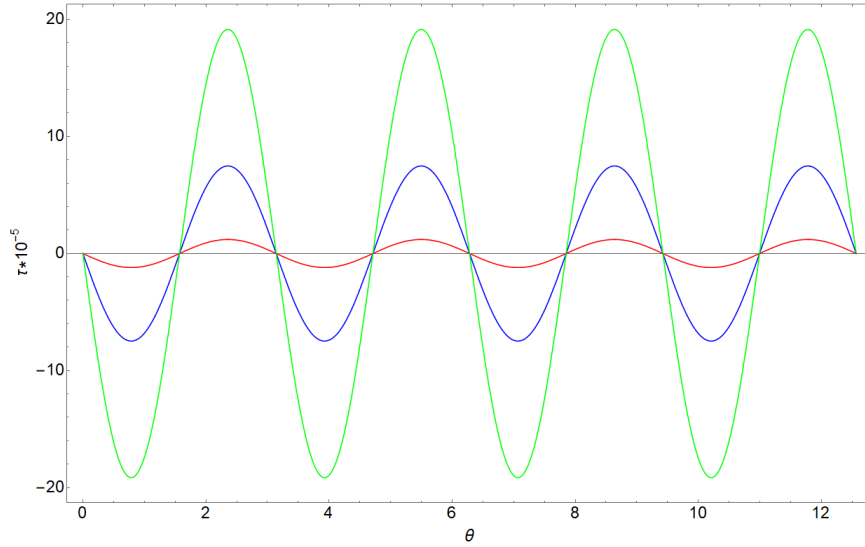


Figura 4.11: Comportamiento del torque τ en función del ángulo de desalineación óptica θ para diferentes de γ : $\gamma = 0.2$, $\gamma = 0.5$ y $\gamma = 0.8$.

debe al hecho que la existencia del torque está asociada a que haya un parámetro de anisotropía diferente de cero. La influencia de los demás parámetros (como, por ejemplo, el parámetro topológico) es más marginal, aunque medible.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

En este capítulo se presentan las conclusiones de los resultados analíticos del estudio realizado para los coeficientes de reflexión y transmisión para una interfaz de aislante topológico, los cuales se han obtenido en este proyecto de investigación mediante el método de la matriz de dispersión. Se presentan además las conclusiones de los resultados numéricos del estudio de los comportamientos de la energía y fuerza de Casimir para los casos isotrópico y anisotrópico respectivamente. Finalmente, se presentan las perspectivas, mencionando las preguntas que surgen de la investigación que se ha realizado; además, se indican los posibles estudios futuros que se pueden realizar con base en el presente trabajo.

5.1 Conclusiones

- Se encontró que si formulamos un formalismo de la matriz de dispersión (MMS) para sistemas cuya interfaz es un aislante topológico es posible obtener los coeficientes de reflexión y transmisión para dichos materiales.
- Se encontró que si el medio sobre el cual incide un campo electromagnético es un aislante topológico, en las amplitudes de reflexión se obtienen términos con una polarización diferente a la del campo incidente.
- Uno de los resultados más novedosos de este trabajo se obtuvo al analizar los coeficientes de reflexión y transmisión para aislantes topológicos puros.

Se observó que, en el límite de un TI puro, los coeficientes de reflexión y transmisión ya no dependen del ángulo incidente y pasan a depender de las propiedades magnéticas y dieléctricas del material.

- Al considerar las placas del efecto Casimir como aislantes topológicos, obtenemos una expresión más generalizada de la fórmula de Lifshitz que toma en cuenta la dependencia con la topología del sistema.
- Si se consideran las placas de aislante topológico anisotrópicas, con una correcta elección de los parámetros se puede lograr una modulación entre fuerza atractiva y repulsiva.
- En dieléctricos convencionales es necesario que el medio que separa las placas sea anisotrópico si queremos obtener fuerzas de carácter repulsivo, pero en este trabajo se mostró que, aunque se considere el vacío, es posible obtener fuerzas repulsivas si el material de las placas tiene términos topológico diferentes de cero de igual magnitud, pero signo opuesto.
- Se demostró que en la configuración consiste de una placa de material dieléctrico convencional que interactúa con una placa de aislante topológico con término topológico negativo, es posible obtener fuerzas tanto repulsivas como atractivas, siendo este uno de los aportes relevantes de este trabajo
- Se encontró que el torque de vdW para un par de placas de aislante topológico tiene el mismo comportamiento que para un par de dieléctricos convencionales. Adicionalmente, para las placas de aislante topológico, la magnitud del torque es generalmente menor que la de los dieléctricos convencionales.
- Finalmente el torque para placas de TI con $\bar{\alpha}$ de la misma magnitud pero signos opuestos es más débil que el de las placas de TI con $\bar{\alpha}$ de la misma magnitud y signo.

5.2 Perspectivas

- Extender el formalismo de la matriz de dispersión en aislantes topológicos para medios anisotrópicos.
- Incluir los efectos de retardo en la energía y fuerza de Casimir en aislantes topológicos.
- observar si es posible obtener fuerzas de carácter repulsivo en nuestro sistema si agregamos un medio anisotrópico en el medio que separa las placas de TI.

Apéndice A

Derivación de la fuerza de Casimir

Sean las ecuaciones de Maxwell para un medio sin fuentes

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

Podemos expresar los campos en términos de los potenciales de la siguiente forma

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Entonces, usando las anteriores expresiones, podemos reescribir el primer par de las ecuaciones de Maxwell como:

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

El hamiltoniano para el campo electromagnético es entonces

$$\mathcal{H}_{\text{EM}} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3r.$$

asumiendo el gauge $\phi = 0$ finalmente obtenemos

$$\mathcal{H}_{\text{EM}} = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] d^3r.$$

Tomamos la cuantización de los modos del campo [52]

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} c \sqrt{\frac{w\pi\hbar}{\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \eta(\mathbf{k}, \lambda) \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} + \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \eta(\mathbf{k}, \lambda) \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{\sqrt{V}} \right) \quad (\text{A.1})$$

Aquí, $\mathbf{k}$ es un vector de onda en la dirección de propagación cuya magnitud determina la frecuencia de la onda. λ es un término de polarización, ω es la frecuencia angular, η es una función que garantiza que los términos tengan el signo y la magnitud correcta, y $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}$ son los operadores de creación y aniquilación que satisfacen

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}.$$

Estos operadores actúan sobre el estado del campo electromagnético en la frecuencia y el espín correspondiente a sus $\mathbf{k}$ y λ . Cuando $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ actúa sobre un estado, aumenta la energía del modo en $\hbar\omega$. $\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}$ invierte el proceso, reduciendo la energía del modo en $\hbar\omega$. Por lo tanto, conceptualizamos $\hat{a}^\dagger$ como un operador de creación que agrega un solo fotón al campo, y $\hat{a}$ como un operador de aniquilación que elimina un fotón. El enfoque de creación y aniquilación facilita el análisis del hamiltoniano; sustituyendo (A.1) en el $\mathcal{H}_{\text{EM}}$, encontramos

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega \left(\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

El estado fundamental de este hamiltoniano (escrito como $|0\rangle$) está definido por

$$\hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} |0\rangle = 0.$$

En otras palabras, el estado a partir del cual no se pueden aniquilar más fotones. Este es un campo electromagnético vacío: cada modo no tiene fotones presentes y se encuentra en su estado de energía más bajo posible. Debido a que los operadores de creación y aniquilación conmutan cada vez que $\mathbf{k}$ o λ son diferentes, podemos descomponer $|0\rangle$ en el producto de cada oscilador independiente para una $\mathbf{k}$ y λ dadas:

$$|0\rangle = |0_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}\rangle \otimes |0_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}\rangle \otimes |0_{\mathbf{k}_3, \lambda_3}\rangle \otimes \cdots$$

donde el producto tensorial $|\uparrow\rangle \otimes |x=0\rangle$ denota el estado en el que el sistema está tanto spin arriba como en $x=0$. De esta forma podemos calcular el valor esperado del Hamiltoniano actuando en $|0\rangle$

$$\langle E \rangle = \langle 0|H|0\rangle = \langle 0|\sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_k$$

Por lo tanto, la energía del campo EM en el estado fundamental es la suma de muchos osciladores armónicos no acoplados, cada uno con energía $\hbar\omega/2$.

Sorprendentemente, la energía de punto cero es infinita, siendo una suma sobre todas las frecuencias posibles. En condiciones normales, esto no es mensurable físicamente, ya que está presente en cada punto del espacio. Sin embargo, como se ha visto, la imposición de condiciones de contorno en el campo EM puede generar diferencias en la energía de punto cero, lo que conduce a resultados sorprendentes.

A.1 Tratamiento convencional de la fuerza de Casimir

La idea de una fuerza que actúa sobre átomos o moléculas neutrales no es nueva en el mundo de la física. La llamada *Interacción de Van der Waals (VdW)* es una fuerza que actúa entre dos átomos neutros. Uno puede hacer una derivada aproximada de la fuerza de Casimir basada en las interacciones VdW entre los átomos en dos espacios medios. Al sumar las interacciones entre todos los átomos y usar la relación de *Clausius y Mossotti*, se puede obtener la fuerza total:

$$F(l) = -\frac{23\hbar c N^2 \alpha^2}{40l^4} = -\frac{23}{40} \frac{\hbar c}{l^4} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2$$

Y al tomar el límite para un conductor perfecto ($\epsilon \rightarrow \infty$) se obtendrá:

$$F(l) = -\frac{23}{40} \frac{\hbar c}{l^4} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^2$$

Este resultado es de aproximadamente 20% exacta dentro de la fuerza de Casimir. Entonces, ¿por qué no conseguimos exactamente la fuerza de Casimir? La respuesta es que las fuerzas de VdW no son aditivas por pares debido a la dispersión múltiple. Teóricamente, es posible realizar el cálculo exacto utilizando el enfoque de VdW, sin embargo, el cálculo es muy complicado y se debe intentar encontrar una forma

alternativa. Afortunadamente, la solución se basa en los fenómenos de la mecánica cuántica conocidos como la energía de punto cero y la función Zeta de Riemman.

A.2 Regularización de la fuerza de Casimir con la función ζ

Mientras que la derivación de la “vieja escuela” hecha por Casimir en su artículo de 1948 estaba arraigada en la intuición física [3, 4], muchas derivaciones modernas del efecto Casimir hacen uso de una transformación matemática más avanzada conocida como “Regularización de la función Zeta”. Podemos escribir el promedio de los modos de energía entre dos placas como

$$\langle E|E \rangle = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \omega dk_x dk_y \quad (\text{A.2})$$

Aquí, los límites toma la consideración de ambos estados de polarización $k \neq 0$. En lugar de introducir una frecuencia de corte, forzamos que la suma sea convergente dividiendo por potencias s de ω . Después de evaluar la integral, volveremos a normalizar tomando el límite $s \rightarrow 0$, tomando efectivamente el término correctivo a la unidad. La expresión regularizada será:

$$\langle E(s)|E(s) \rangle = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \omega \omega^{-2s} dk_x dk_y \quad (\text{A.3})$$

Cambiando a coordenadas polares y sustituyendo $y = \frac{Lx}{n\pi}$ obtenemos

$$\langle E(s, L)|E(s, L) \rangle = \frac{\hbar c A}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} y(y^2 + 1)^{1/2-s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{3-2s} dy \quad (\text{A.4})$$

Esta expresión se vuelve divergente como $s \rightarrow 0$, pero converge para $s \geq 3/2$, por lo que se debe evaluar cada expresión en su dominio de convergencia y luego continuar analíticamente hasta $s = 0$. Podemos calcular para $s = 3/2$

$$\int_0^{\infty} y(y^2 + 1)^{1/2-s} dy = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3/2 - s} \right) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{3} \quad (\text{A.5})$$

Entonces nos queda

$$\langle E(s, L) | E(s, L) \rangle = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{6} \frac{1}{L^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n-3}} = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{6} \frac{1}{L^3} \zeta(2s-3) \Big|_{s=0} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente obtenemos que la energía es

$$\langle E(L) | E(L) \rangle = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{720} \frac{1}{L^3} \quad (\text{A.7})$$

Donde $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$. El análisis de la función zeta no es óptimo para los métodos computacionales, ya que la serie p es muy lenta para converger [11]. Sin embargo, nos permite aprovechar técnicas analíticas ya que en el caso clásico se necesita restar las energías entre placas mientras que aquí no, además, se ha aplicado con éxito a un amplio dominio de problemas en la electrodinámica cuántica. Por ejemplo, utilizando la continuación analítica de $s = 3/2 \rightarrow s = 0$ en algún sentido corresponde a restar contribuciones inherentes del campo EM a la energía del estado base.

Apéndice B

Principio del Argumento

B.1 Funciones Holomorfas

También denominadas funciones analíticas (aunque este último es un concepto más general) se caracterizan por ser infinitamente diferenciables en cada punto, y coincidir con su propia serie de Taylor; esta serie a su vez convergerá sobre cada abierto que se encuentre dentro del dominio de Ω . La serie de Taylor puede converger en un abierto más grande; por ejemplo, la serie de Taylor para el logaritmo converge sobre cada abierto que no contenga al 0, incluso en las cercanías de la línea real negativa.

En una definición mas estricta. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es *holomorfa* en z_0 (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En caso de que exista, se llama al valor de este límite la derivada (compleja) de f en z_0 , y se denota

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

diremos que la función f es holomorfa en Ω si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. En el caso de una función holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, diremos también que g es entera.

Algunos ejemplos de funciones holomorfas: la función $f(z) = z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$,

con $f'(z) = 1$. Toda función constante $z \rightarrow c_0$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con derivada nula. La función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $f'(z) = -1/z^2$, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(z+h) - 1/z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

Como ejemplo básico de función que no es holomorfa tenemos la conjugación $C(z) = \bar{z}$: se cumple que

$$\frac{C(z+h) - C(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h},$$

y esta expresión no tiene límite cuando $h \rightarrow 0$ (ya que a lo largo de la recta $h = t \in \mathbb{R}$ la función es idénticamente 1, mientras que a lo largo de la recta $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, es constantemente -1). Sin embargo, obsérvese que $C(z)$ es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, de hecho es incluso $\mathbb{R}$ -lineal.

B.1.1 Ceros de funciones holomorfas

La función $f(z) = z^5 - 2z^4 + 3z^2 - 3z + 1$ tiene un cero en $z = 1$, es decir, $f(1) = 0$, y se puede descomponer como

$$f(z) = (z-1)^2 h(z) \quad \text{donde} \quad h(z) = z^3 - z + 1 \quad \text{y} \quad h(1) \neq 0.$$

Por ello se dice que 1 es un cero de multiplicidad 2 de f .

En general, un número complejo a es un *cero de multiplicidad n* de una función f holomorfa en un entorno abierto de a , si f puede descomponerse como

$$f(z) = (z-a)^n h(z)$$

donde h es una función holomorfa y $h(a) \neq 0$. Denotaremos por $\mathcal{Z}(f)$ el conjunto de ceros de la función f y si a es un cero de f , entonces su multiplicidad será denotada por $\mathcal{N}(f, a)$.

B.1.2 Polos de funciones holomorfas

La función $f(z) = \frac{z^5-3z+1}{z^3-3iz^2-z-i}$ se puede descomponer como

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^3} \quad \text{donde} \quad h(z) = z^5 - 3z + 1 \quad \text{y} \quad h(i) \neq 0.$$

Por ello se dice que i es un polo de multiplicidad 3 de f .

En general, sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un entorno abierto de b y $f : \Omega \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. El número complejo b es un *polo de multiplicidad n* de la función f , si f puede descomponerse como

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-b)^n},$$

donde h es una función holomorfa en todo Ω y $h(a) \neq 0$. Denotaremos por $\mathcal{P}(f)$ el conjunto de polos de la función f y si b es un polo de f , entonces su multiplicidad será denotada por $\mathcal{N}(f, b)$.

B.2 Funciones Meromorfas

Se dice que una función es meromorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ si f es holomorfa en Ω excepto quizás en un conjunto aislado de singularidades, en cada una de las cuales f tiene un polo.

Por ejemplo, todo cociente de polinomios (lo que se llama una función racional) es meromorfa en $\mathbb{C}$, ya que tiene un número finito de singularidades (los ceros del denominador, si la fracción es irreducible) que son polos. La función $f(z) = 1/\sin z$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, ya que sus singularidades son los puntos $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, donde f tiene polos simples, ya que $\sin z$ tiene ceros de orden uno en dichos puntos. Por otro lado, la función $e^{1/z}$ no es meromorfa en todo el plano complejo, ya que $z = 0$ es una singularidad esencial, es decir, no existe ni $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ ni $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)}$.

La suma de funciones meromorfas es meromorfa. Lo mismo ocurre con el producto, y también con el cociente si el denominador no es idénticamente nulo. Por otra parte, si f es meromorfa en Ω y denotamos $S_f = \{w \in \Omega : f \text{ tiene una singularidad}$

esencial en $w\}$, entonces S_f es a lo sumo numerable y, en caso de ser infinito, sus puntos de acumulación están en $\partial\Omega$.

B.3 Principio del argumento para una curva

Sea f una función meromorfa definida en un abierto que contenga a $C = \{z \in \mathbb{C}\}$ y que no tenga polos ni ceros en C .

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P),$$

donde N y P denotan respectivamente el número de ceros y polos de $f(z)$ en el abierto limitado por el camino C , contando cada cero y polo tantas veces como indique su **multiplicidad** y **orden** respectivamente.

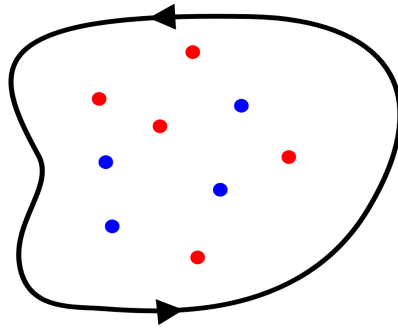


Figura B.1: Abierto delimitado por la curva C , donde los puntos azules representan los ceros del conjunto y los rojos los polos.

De manera más general, considérese una curva C , orientada en sentido antihorario, que se pueda deformar hasta un punto en el interior de un conjunto abierto Ω del plano complejo. Entonces el principio del argumento nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_a \mathcal{N}(C, a) - \sum_b \mathcal{N}(C, b) \right), \quad (\text{B.1})$$

donde la primera suma recorre todos los ceros a de f , contados tantas veces como indiquen sus multiplicidades, y la segunda suma recorre los polos b de f , contados tantas veces como indiquen sus órdenes.

B.4 La Teoría de Barash y Ginzburg

Vamos a considerar la geometría original del Lifshitz de 2 medios dieléctricos semi-infinitos separados por un medio de ancho l . La ley de dispersión $\mathcal{D}$ para las ondas superficiales de dicho sistema viene dada por:

$$\mathcal{D}(\mathbf{k}_{\parallel}, \omega) = 1 - \frac{[\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2(\omega)][\varepsilon_3(\omega) - \varepsilon_2(\omega)]}{[\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)][\varepsilon_3(\omega) + \varepsilon_2(\omega)]} e^{-2ql} = 0 \quad (\text{B.2})$$

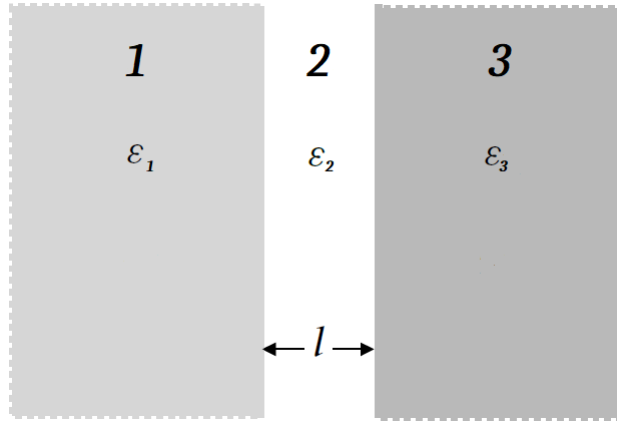


Figura B.2: Geometría considerada por Barash y Ginzburg.

Las raíces de esta ecuación son las frecuencias $\omega_{\alpha}(l)$, las cuales se producen debido a los “modos de superficie”, entre los diferentes medios. Podemos determinar estos modos mediante la solución directa de las ecuaciones de Maxwell. Este conjunto $\{\omega_{\alpha}\}$ depende de las propiedades dieléctricas de cada material, así como de la separación l . Cada oscilación tiene una energía libre $g(\omega_{\alpha})$; estas energías se suman para una energía libre total,

$$G(l) = \sum_{\{\omega_{\alpha}\}} g(\omega_{\alpha}),$$

G depende de la separación porque $\omega_{\alpha}(l)$ es una función de la separación l , $\omega_{\alpha} = \omega_{\alpha}(l)$. El primer paso de la derivación es encontrar la forma para $g(\omega_{\alpha})$.

B.4.1 Energía libre del oscilador $g(\omega_{\alpha})$

A menudo pensamos que existen dos características cuánticas separadas de los osciladores no clásicos, el cambio en los niveles de energía en las unidades cuánticas

$\frac{1}{2}\hbar\omega$ y la energía finita de punto cero del oscilador en su estado más bajo. De hecho, los dos están conectados. La fluctuación del punto de observación es una consecuencia inmediata del principio de incertidumbre. Observado por un tiempo inverso a su frecuencia, un modo electromagnético o grado de libertad tiene una incertidumbre en su energía correspondiente, una incertidumbre proporcional al tiempo de observación. La energía de punto cero es también una consecuencia inevitable del hecho de que la energía entra y sale en múltiplos de $\hbar\omega$. Si el estado de energía más bajo no tuviera energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$, la energía del oscilador no iría al límite clásico de $K_B T$ a alta temperatura [34].

La energía libre $g(\omega_\alpha)$ de un oscilador con niveles de energía

$$\mathcal{E}_\eta = \left(\eta + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_\alpha, \quad \eta = 0, 1, 2, \dots,$$

nos da la función de partición

$$Z(\omega_\alpha) = \sum_{\eta=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega_\alpha}{K_B T} \left(\eta + \frac{1}{2}\right)},$$

donde, finalmente la energía libre del sistema es [34]

$$\begin{aligned} g(\omega_\alpha) &= -K_B T \ln[Z(\omega_\alpha)] = -K_B T \ln \left(e^{-\hbar\omega_\alpha/2K_B T} \sum_{\eta=0}^{\infty} e^{-\eta\hbar\omega_\alpha/K_B T} \right) \\ g(\omega_\alpha) &= K_B T \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\hbar\omega_\alpha}{2K_B T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B.4.2 El principio del argumento en la teoría de Barash y Ginzburg

Empezaremos usando la definición del principio del argumento

$$\sum_{\alpha} \omega(a_\alpha) - \sum_{\beta} \omega(b_\beta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} g(\omega) \frac{d}{d\omega} \ln \Delta(\omega) d\omega, \quad (\text{B.4})$$

donde $g(\omega)$ es una función analítica y $\Delta(\omega)$ es una función meromorfa dentro de un contorno cerrado C_1 , donde a_n y b_m son los ceros y polos respectivamente de $\Delta(\omega)$ ubicados dentro de C_1 (Asumimos que $\Delta(\omega)$ es analítica en C_1). Tomando $g(\omega)$ como en la ecuación (B.3). Y en la medida en que la suma en (B.3) se realiza sobre las frecuencias positivas ω , elegimos el contorno de integración C_1 a lo largo del eje

imaginario y lo cerramos con un semicírculo (en el infinito) en el lado derecho del plano complejo de las frecuencias, para rodear los polos en sentido contrario a las agujas del reloj, como se muestra en la Figura [B.3(a)]. Aquí, los dos arcos tienen un radio infinitamente pequeño δ y un radio infinitamente grande R , y las dos líneas rectas L_1 , L_2 están inclinadas en ángulos de $\pm 45^\circ$ con respecto al eje real [36].

Por ultimo, ya que la contribución debida a los polos no dependen de l , entonces

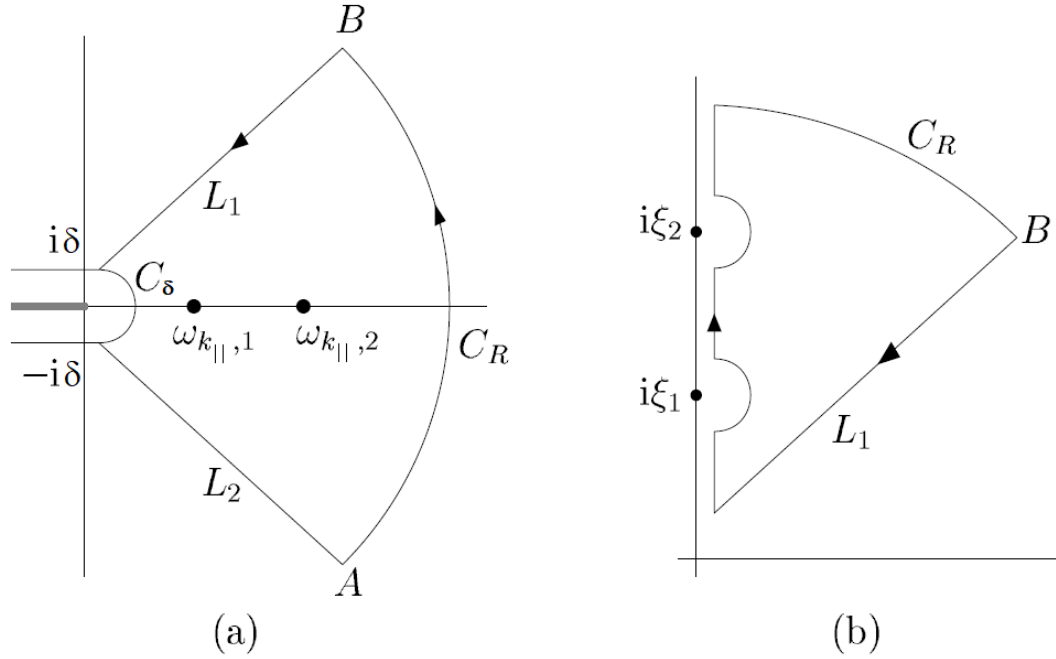


Figura B.3: Trayectorias de integración (a) en el plano C_1 y (b) C_2 en el plano de la frecuencia compleja. Las frecuencias de Matsubara son ξ_n y las frecuencias propias del fotón son ω_α [36].

esta se puede omitir, en consecuencia, $\Delta(\omega) = \mathcal{D}(\mathbf{k}_\parallel, \omega)$. De esta forma, usando las ecuaciones (B.2) - (B.4), llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(l) &= \sum_{\alpha} \frac{\hbar \omega_{\alpha}(l)}{2} \\ \mathcal{E}(l) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \int_{C_1} d\omega \frac{\hbar \omega}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left[1 - \frac{[\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2(\omega)][\varepsilon_3(\omega) - \varepsilon_2(\omega)]}{[\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)][\varepsilon_3(\omega) + \varepsilon_2(\omega)]} e^{-2ql} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Donde $k_\parallel^2 = k_x^2 + k_y^2$, y sea $\xi = i\omega$, entonces

$$\mathcal{E}(l) = \frac{A\hbar}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\xi \int d\mathbf{k}_\parallel \ln \mathcal{D}(\mathbf{k}_\parallel, \xi). \quad (\text{B.6})$$

Hay que tener en cuenta que la función $g(\omega)$ en la ecuación (B.3) tiene puntos de derivación en frecuencias imaginarias $\omega_\alpha = i\xi_n$, donde $\xi_n \equiv 2\pi n K_B T / \hbar$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ son las frecuencias de Matsubara. El contorno C_1 en la Figura [B.3(a)] se elige para evitar todos los puntos de ramificación y para encerrar todas las frecuencias de oscilación $\omega_{k_\parallel, n}$ con $n \geq 1$. Para calcular la integral de contorno en la ecuación (7.62), lo representamos como una suma de cuatro integrales a lo largo de los contornos C_R , L_1 , C_δ y L_2 . Es fácil verificar que la integral a lo largo de C_R se desvanece cuando $R \rightarrow \infty$. Luego integramos las tres integrales restantes por partes. Se ve que todos los términos, excepto las integrales obtenidas después de la integración por partes, se cancelan entre sí o son iguales a cero (como en los puntos A y B en la Figura [B.3(a)]). La integral a lo largo de L_1 se puede calcular utilizando el teorema de Cauchy aplicado al contorno cerrado C_2 Figura [B.3(b)], dentro del cual la función bajo consideración es analítica [36].

Bibliografía

- [1] B. S. Lu, “van der waals torque between anisotropic topological insulator slabs,” *Physical Review B*, **97**, 045427 (2018).
- [2] J. Granada and D. Rojas, “Transfer matrix method in systems with topological insulators,” *J. Phys.: Conf. Ser.*, **850**, 012024 (2017).
- [3] H. B. G. Casimir, “On the attraction between two perfectly conducting plates,” *Proc. K. Ned. Akad.*, **51**, 793 (1948).
- [4] H. B. G. Casimir and D. Polder, “The influence of retardation on the london-van der waals forces,” *Physical Review*, **4**, 360 (1948).
- [5] J. J. Allen, *Micro Electro Mechanical System Design*. 2005.
- [6] S. J. Rahi, T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe, and M. Kardar, “Scattering theory approach to electrodynamic casimir forces,” *Phys. Rev. D*, **80**, 085021 (2009).
- [7] A. Lambrecht, P. A. M. Neto, and S. Reynaud, “The casimir effect within scattering theory,” *quant-ph*, 061103v1 (2006).
- [8] I. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *The general theory of van der Waals forces*. 2006.
- [9] S. J. Rahi, T. Emig, and M. Kardar, “Constraints on stable equilibria with fluctuation-induced (casimir) forces,” *Phys. Rev. Letters*, **105**, 070404 (2010).
- [10] O. Kenneth and I. Klich, “Opposites attract: A theorem about the casimir force,” *Phys. Rev. Letters*, **97**, 160401(2006).
- [11] M. Bordag, G. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. Mostepanenko, “Advances in the casimir effect,” *Oxford University Press*, 2009.
- [12] J. Munday, F. Capasso, and V. A. Parsegian, “Measured long-range repulsive casimir–lifshitz forces,” *Nature*, **457**, 170(2009).

- [13] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics (8th Edition)*. 2005.
- [14] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, “The casimir force between real materials: Experiment and theory,” *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 1827 (2009).
- [15] K. Kingsbury, “The casimir effect,” *Class notes*, v3 (2009).
- [16] E. J. W. Verwey and J. T. G. Overbeek, “Theory of the stability of lyophobic colloids,” *Elsevier Amsterdam*, **4**, 3453 (1948).
- [17] A. Szulc, “The casimir effect,” *Notes by Asaf Szulc*, (2010).
- [18] Y. Imry, “The casimir zero-point radiation pressure,” *Phys. Rev. Letters*, **95**, 080404(2005).
- [19] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*. 2000.
- [20] E. Lifshitz, “The theory of molecular attractive forces between solids,” *Sov. Phys. JETP*, **2**, 73 (1956).
- [21] Y. S. Barash and V. L. Ginzburg, “Electromagnetic fluctuations in matter and molecular (van-der-waals) forces between them,” *Sov. Phys. Usp*, **18**, 305 (1975).
- [22] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators,” *Reviews of modern Physics*, **82**, (2010).
- [23] X. L. Qi and S. C. Zhang, “Topological insulators and superconductors,” *Rev. Mod. Phys.*, **83**, 1057 (2011).
- [24] X. L. Qi, R. Li, J. Zang, and S. C. Zhang, “Seeing the magnetic monopole through the mirror of topological surface states,” *Science*, **323**, 1184 (2009).
- [25] X. L. Qi and S. C. Zhang, “The quantum spin hall effect and topological insulators,” *Phys. Today*, **63**, 33 (2010).
- [26] A. G. Grushin, P. R. Lopez, and A. Cortijo, “Effect of finite temperature and uniaxial anisotropy on the casimir effect with three dimensional topological insulators,” *Physics Review B*, **84**, 045119 (2011).
- [27] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, and F. D. Haldane, “Topological phase transitions and topological phases of matter,” *Royal Swedish Academy of Sciences*, 1604 (2016).

- [28] B. S. Nasir, *Topological Insulators: Classification and Green's Function Formalism*. PhD thesis, Frankfurt Institute for Advanced Studies, 2016.
- [29] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia, “A green's function approach to the casimir effect on topological insulators with planar symmetry,” *Cond-mat.mess-hall*, 1604.00534v1 (2016).
- [30] F. Wilczek, “Two applications of axion electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1799 (1987).
- [31] A. Karch, “Electric-magnetic duality and topological insulators,” *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 171601 (2009).
- [32] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics (3rd edition)*. 1999.
- [33] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*. 1984.
- [34] V. A. Parsegian, *Van der Waals Forces*. 2006.
- [35] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*. 2009.
- [36] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya, and V. M. Mostepanenko, “Surface impedance approach solves problems with the thermal casimir force between real metals,” *Phys. Rev. A*, **67**, 062102 (2003).
- [37] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics: Part II*. 1980.
- [38] A. Abrikosov, L. Gorkov, and I. Dzyaloshinskii, “On the application of quantum-field-theory methods to problems of quantum statistics at finite temperatures,” *Sov. Phys. JETP*, **9**, 36 (1959).
- [39] N. van Kampen, B. Nijboer, and K. Schram, “On the macroscopic theory of van der waals forces,” *Physics Letters A*, **26**, No. 7 (1968) 307-308.
- [40] P. Markos and C. M. Soukoulis, *Wave Propagation*. 2008.
- [41] D. M. Whittaker and I. S. Culshaw, “Scattering matrix treatment of patterned multilayer photonic structures,” *Physics Review B*, **60**, 2610 (1999).
- [42] D. B. Brewster, “On the laws which regulate the polarization of light by reflection from transparent bodies,” *Philos. Trans. R. Soc. London*, **105**, 105 (1815).

- [43] J. A. Crosse, S. Fuchs, and S. Y. Buhmann, “The electromagnetic green’s function for layered topological insulators,” *physics.optics*, 1509.03012v1 (2015).
- [44] W. Nie, R. Zeng, Y. Lan, and S. Zhu, “Casimir force between topological insulator slabs,” *Phys. Rev. B*, **88**, 085421 (2013).
- [45] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia, “Green’s function approach to chern-simons extended electrodynamics: an effective theory describing topological insulators,” *Cond-mat.mess-hall*, 1511.01170v1 (2015).
- [46] L. Huerta, “Optical properties of chern-simons $(3 + 1)d$ θ -systems,” *Phys. Rev. D.*, **90**, 105026 (2014).
- [47] X. L. Qi, T. L. Hughes, and S. C. Zhang, “Topological field theory of time-reversal invariant insulators,” *Physical Review B*, **78**, 195424 (2008).
- [48] A. M. Essin, J. E. Moore, and D. Vanderbilt, “Magnetoelectric polarizability and axion electrodynamics in crystalline insulators,” *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 146805 (2009).
- [49] V. A. Parsegian and G. H. Weiss, “Dielectric anisotropy and the van der waals interaction between bulk media,” *J. Adhes*, **3**, 259 (1972).
- [50] B. S. Lu and R. Podgornik, “Van der waals torque and force between dielectrically anisotropic layered media,” *J. Chem. Phys*, **145**, 044707 (2016).
- [51] C. L. Mitsas, D. I. Siapkias, and J. Luo, “Phonon and electronic properties of TlBiSe₂ thin films,” *Solid State Commun*, **83**, 857 (1992).
- [52] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *A Modern Approach to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. 2012.
- [53] J. Granada and D. Rojas, “Local excitations in thin metal films bounded by topological insulators,” *Physica B*, **455**, 82-84 (2014).
- [54] E. Elizalde and A. Romeo, “Essentials of the casimir effect and its computation,” *American Journal of Physics*, **59**, 711 (1991).
- [55] R. Zeng, L. Chen, W. Nie, and et all, “Enhancing casimir repulsion via topological insulator multilayers,” *Physics Letters A*, **380**, 2861-2869 (2016).
- [56] A. A. Maradudin and D. Mills, “Scattering and absorption of electromagnetic radiation by a semi-infinite medium in the presence of surface roughness,” *Physical Review B*, **11**, 01392 (1974).

- [57] L. Wu, M. Salehi, J. Moon, S. Oh, and P. Armitage, “Quantized faraday and kerr rotation and axion electrodynamics of a 3d topological insulator,” *Cond-mat.mess-hall*, 1603.04317v4 (2016).
- [58] M. Sammon and H. Mathur, “Electrodynamics of topological insulators,” *Case Western Reserve University Cleveland*, 2014.
- [59] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Topological insulators,” *Cond-mat.mess-hall*, 1002.3895v2 (2010).
- [60] C. Genet, F. Intravaia, A. Lambrecht, and S. Reynaud, “Electromagnetic vacuum fluctuations: Casimir and van der waals forces,” *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **29**, (2004).
- [61] M. A. Makeev, “Effect of surface roughness on van der waals and casimir polder: Casimir attraction energies,” *Surface Science*, **663**, 88-99 (2017).
- [62] J. H. Wilson, *OPTICAL AND CASIMIR EFFECTS IN TOPOLOGICAL MATERIALS*. PhD thesis, University of Maryland, 2015.
- [63] M. Fiebig, “Revival of the magnetoelectric effect,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **38**, R123 (2005).
- [64] N. A. Spaldin and M. Fiebig, “The renaissance of magnetoelectric multiferroics,” *Science*, **309**, 391 (2005).
- [65] E. Burstein, A. H. MacDonald, and P. J. Stiles, *Contemporary Concepts of Condensed Matter Science: Topological Insulators*. 2013.
- [66] S. Q. Shen, *Topological Insulators: Dirac Equation in CondensedMatters*. 2012.
- [67] J. K. Asboth, L. Oroszlany, and A. Palyi, *A Short Course on Topological Insulators*. 2013.
- [68] E. Prodan, *A Computational Non-commutative Geometry Program for Disordered Topological Insulators*. 2017.
- [69] B. A. Bernevig and T. L. Hughes, *Topological Insulators and Topological Superconductors*. 2013.
- [70] F. Ortman, S. Roche, and S. O. Valenzuela, *Topological Insulators: Fundamentals and Perspectives*. 2015.