

Los números reales de Weiss: un análisis histórico-epistemológico de su construcción con fines educativos en la formación docente.

John Eyder Marín Guevara

Luis Hernando Perea Sáenz

Universidad del Valle

Instituto de Educación Pedagógica

Licenciatura en Matemáticas y Física

2019



Los números reales de Weiss: Un análisis histórico-epistemológico de su construcción con fines educativos en la formación docente

John Eyder Marín Guevara

Luis Hernando Perea Sáenz

Directora:

PhD. Maribel Patricia Anacona

Universidad del Valle

Instituto de Educación Pedagógica

Licenciatura en Matemáticas y Física

2019

Agradecimientos:

Damos gracias a Dios por haber permitido en sus misteriosos caminos encontrarnos en tan encomiable proyecto. A nuestras familias por la paciencia y consejos en los momentos difíciles.

Agradecemos especialmente a nuestra Directora Maribel Anacona por su enorme paciencia y que a pesar de los más adversos momentos, nos dedicó mucho de su tiempo antes y durante la realización de este trabajo.

A nuestros evaluadores Guillermo Ortíz y Sergio Valencia, el ser parte de la culminación de este trabajo y el proponer sugerencias en aras de mejorar nuestro conocimiento.

Los números reales de Weiss: Un análisis histórico-epistemológico de su construcción con fines educativos en la formación docente

Resumen

Los números reales constituyen un tema crucial no sólo para el desarrollo histórico de las matemáticas, sino que siguen siendo un importante objeto de estudio en el ámbito educativo. La propiedad topológica de la completitud resulta de difícil comprensión para los estudiantes de los primeros años de Universidad. Por tanto, los estudios e indagaciones que se hagan con el propósito de tener una mejor aproximación a este concepto tienen plena vigencia en la actualidad. En virtud de lo anterior, nos proponemos hacer un estudio detallado de la construcción de los números reales por Weiss (2016), con el propósito de identificar las ventajas y limitaciones que ofrece en relación con la comprensión de la propiedad de completitud. Para tal efecto, se estudia en primera instancia, las técnicas, métodos y conceptos empleados previamente por Cantor (1872), Bachmann (1892) y Bourbaki (1942) para la construcción de los reales, como marco teórico de referencia.

Palabras claves: Números reales, completitud, filtros de Cauchy, Weiss.

Abstract

Real numbers are a crucial issue not only for the historical development of mathematics, but they are still an important object of study in the educational field. The topological property of completeness is difficult to understand for the students in the first years of University. Therefore, the studies and inquiries that are made with the purpose of having a better approximation to this concept, have full validity at present. In view of the above, we propose to make a detailed study of the construction of real numbers by Weiss (2016), with the purpose of identifying the advantages and limitations that it offers in relation to the comprehension of the property of completeness. For this purpose, the techniques, methods and concepts used previously by Cantor (1872), Bachmann (1892) and Bourbaki (1942) for the construction of real numbers, as a reference theoretical, framework is studied in the first instance.

Keywords: Real numbers, completeness, Cauchy filters, Weiss

Índice General

Introducción 1

1.Contextualización histórica acerca de la completitud 4

1.1. Génesis de los números reales: un acercamiento histórico al concepto de continuidad y completitud antes de Cauchy. 4

1.2. Génesis de los números reales: un acercamiento histórico al concepto de continuidad y completitud después de Cauchy. 9

1.3. Construcción de los reales por Georg Cantor. 13

1.3.1. La construcción de los irracionales 14

1.3.2. Orden en $\mathbb{R}$ 15

1.3.3. Operaciones aritméticas 16

1.3.4. El nuevo sistema $\boldsymbol{C}$ 17

1.3.5. Los reales como clases de equivalencia 18

1.4 Construcción de los reales por Bachmann (1892). 22

1.5. Construcción de los reales por Dedekind (1872) 24

2. Preliminares a la construcción de los reales por Weiss 27

2.1 Preliminares topológicos 27

2.1.1 La noción de filtro 28

2.1.2 Bases para un filtro 30

2.1.3 Convergencia de filtros 32

2.1.4 Filtros de Cauchy 35

2.1.5 Espacios completos 38

2.2. La construcción de los reales al estilo de Bourbaki. 38

3. Construcción de los reales por Weiss 41

3.1 Preliminares a la construcción 42

3.1.1 La geometría de intervalos. 42

3.1.2 Redondificación de intervalos 47

3.2 Los números reales por Weiss. 50

3.2.1 Definición 50

3.2.2 Orden en $\mathbb{R}$ 50

3.2.3 La incrustación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. 55

3.2.4 La noción de núcleo de filtro 57

3.2.5 Encajonamiento de un real entre dos reales racionales 58

3.3 Operaciones en $\mathbb{R}$ 63

3.4 Los reales como campo ordenado 68

3.5 La completitud de los reales 70

3.6 Consecuencias propuestos por Weiss. 72

Conclusiones 77

Referencias bibliográficas 85

Introducción

La construcción de los números reales es un acontecimiento importante en el desarrollo de las matemáticas: hace más de veinticinco siglos en la antigua Grecia se develaron las magnitudes inconmensurables hasta que matemáticos como Cantor, Dedekind, Weiestrass, Heine y Méray hicieron propuestas interesantes en el marco de dar una fundamentación teórica a la completitud los números reales. No obstante, esto no implicó que la propiedad de la completitud agotara las investigaciones de carácter histórico y epistemológico para la comunidad matemática. De hecho, a pesar de las diversas construcciones de los reales, siguen vigentes todos los estudios que nos acerquen a una mejor comprensión de la propiedad de la completitud.

Weiss en el 2016 presenta una propuesta de construcción de los números reales que tiene en cuenta elementos fundamentales extraídos de la completación de espacios uniformes de Bourbaki y de la propuesta hecha por Bachmann sobre intervalos encajados. El presente trabajo se instaura en el marco de una investigación histórico-epistemológica en la que se hace una descripción del modelo propuesto por Weiss, con el propósito de mostrar una construcción novedosa y práctica en la forma en que se construye el concepto de número real partiendo de los racionales y verificándose el orden de los reales sobre la recta real. Se busca de tal forma establecer condiciones epistemológicas que permitan una compresión global a cerca de los números reales y generar una reflexión pedagógica a nivel de la educación universitaria.

Los números reales tienen un nivel protagónico en gran parte de la formación matemática universitaria, pero generalmente se presentan bajo un modelo axiomático, en especial la propiedad de la completitud. Esto limita las posibilidades de comprender la naturaleza y esencia de esta propiedad que, como se sabe, es la permite hacer una distinción formal entre el número real racional y el real irracional. Por tanto, la propuesta de Weiss de construir los números reales con el uso propiedades de intervalos de racionales y conceptos básicos de filtros, permite un acercamiento alternativo y pedagógico para ampliar el abanico conceptual de los estudiantes universitarios, además de conocer las implicaciones de orden histórico que sustentan la existencia de los números reales bajo una estructura formal.

Los objetivos de este acercamiento pedagógico al concepto número real, mediante la propuesta de Weiss, se desarrollan en primera instancia a través de un breve recorrido histórico de algunas particularidades que han caracterizado el concepto de número real irracional. Esto con el fin de dar cuenta de la importancia que ha implicado en el desarrollo de las matemáticas el poder dar cuenta de una formalización de los irracionales, tal como afirma Anacona (2003, p. 9) *La historia es un indicador de la complejidad epistemológica de ciertos conceptos matemáticos y, por ende, de la posible dificultad en su aprendizaje.*

El acercamiento histórico de estos eventos representativos permite dar cuenta de la importancia de una fundamentación coherente en la construcción de los números reales, verificándose entre otros lo relevante de los aportes hechos por Cauchy en la fundamentación del análisis y cómo éste allanó el camino para el desarrollo de las primeras construcciones. Es en los conceptos aportados por Cauchy donde se fundamentan muchas de las herramientas utilizadas en las diferentes construcciones, y no está por demás observar que la construcción de Weiss, también hace un notable uso de un concepto tan importante como el de *sucesiones de Cauchy.*

Se presenta la construcción de Cantor, de una forma un poco más extensa en comparación con la de Bachmann, Dedekind y Bourbaki, ya que la construcción de Cantor es un preliminar histórico evidenciado en las otras construcciones: con excepción a la de Dedekind, la construcción de los reales de Cantor puede ser vista de forma general en las construcciones de Bachmann y Bourbaki. Se presenta de manera breve la propuesta hecha por Cantor originalmente en su artículo de 1872 *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* y se hace la presentación en términos más contemporáneos de dicha construcción como clases de equivalencia. Posteriormente se hace una presentación sintetizada de las construcciones de Bachmann, Dedekind y Bourbaki. Estas construcciones son de suma importancia para Weiss ya que representan varios de los referentes históricos y teóricos abordados en su modelo de construcción.

De forma consecuente se hace la presentación de los conceptos preliminares que emplea Weiss para su construcción de los reales. Entre los más relevantes se encuentran los conceptos de filtros y propiedades de los intervalos; lo cual incluye la suma y la multiplicación de intervalos, definición de filtro, convergencia de filtros, filtros de Cauchy y filtro redondo (*round*). Se hace la presentación de la metodología empelada para la construcción de los números reales por Weiss y se verifican de forma intuitiva, sobre la recta real, aquellos conceptos relevantes usados en las demostraciones

particulares. De esta forma se esclarecen los fundamentos esenciales, caracterizando las técnicas, conceptos y metodología usada.

Finalmente, es de carácter obligatorio evidenciar las condiciones señaladas por el autor en el desarrollo de su presentación en relación a metodología. Se trata de verificar si ella permite un acercamiento intuitivo a la propiedad de completitud y si dicha construcción puede llegar al nivel de elegancia como para competir con la de Cantor y Dedekind, sin perder su carácter formal. La propuesta de Weiss se presenta de la siguiente manera: definición de número real como filtro minimal de Cauchy, orden de $\mathbb{R}$, y se verifican las condiciones particulares que permiten comparar los números reales a partir de los elementos constitutivos de cada filtro, estableciéndose asín el orden total, el orden parcial y la igualdad. Se hace una caracterización de los reales racionales y de los reales irracionales mediante la noción de núcleo del filtro y se establece la equivalencia que permite encajar cualquier número real mediante dos números reales racionales. De igual forma, se estudia la operatividad de filtros minimales de Cauchy y se verifican los axiomas de cuerpo ordenado completo.

En la parte final del documento se presentan algunas reflexiones que permiten dar cuenta de los detalles más relevantes de la construcción de Weiss, entre los que se destacan el nivel geométrico instaurado en cada una de las demostraciones, lo que permite un mejor acercamiento al concepto de continuo, a través del uso de intervalos racionales sobre la recta real. Esto permite establecer un orden explicito entre los números reales como filtros minimales de Cauchy; de hecho, este argumento es de suma importancia en cada una de las demostraciones propuestas por Weiss en su construcción. También se presentan algunas reflexiones de orden histórico y epistemológico acerca de la importancia de estudiar las distintas construcciones de los reales en la formación matemática universitaria, como un elemento fundamental para adquirir una conceptualización adecuada y coherente de lo que son y el lugar que ocupan los números reales en el edificio matemático.

Capítulo 1

Contextualización histórica acerca de la completitud

Para el desarrollo del presente trabajo, es necesario conocer a grandes rasgos los aspectos más relevantes que hacen parte de la génesis y evolución de los conceptos de continuidad y completitud, claves en la caracterización de los números reales. Por tal motivo, presentamos a continuación algunos elementos históricos que permiten relacionar la continuidad geométrica de la recta con la completitud aritmética de los reales.

1.1. Génesis de los números reales: un acercamiento histórico al concepto de continuidad y completitud antes de Cauchy.

Desde los babilonios hay indicios de que hacían aplicaciones prácticas de los irracionales mediante aproximaciones finitas en su sistema sexagesimal, pero no eran conscientes de la importancia de ellas, como se evidencia en Kline (1972, p. 25). No fue sino hasta el siglo VI a.C., cuando los pitagóricos mostraron la existencia de magnitudes inconmensurables[1], lo cual condujo a una crisis en sus fundamentos teóricos. Un ejemplo típico de dos magnitudes inconmensurables lo constituyen el lado de un cuadrado y su diagonal, puesto que no se puede expresar la razón entre ellas mediante dos números naturales, los únicos existentes en su momento. El surgimiento de las magnitudes inconmensurables se tradujo en una separación muy fuerte entre número y magnitud, pues existían magnitudes que no se podían asociar a los números, lo cual hacia evidente que se trataba de dos dominios de naturaleza distinta. El problema de la relación entre lo continuo y lo discreto fue formulado, entre otros, por Zenón (490 - 430 a.C.) mediante sus cuatro famosas

[1] Se llama magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común. Libro X *los Elementos*. (Hawking S. 2005)

paradojas[2], que evidencian una separación entre lo numérico y lo geométrico privilegiándose las aplicaciones metodológicas en lo geométrico. Esto originó otros estudios por parte de la escuela platónica en donde se amplía notablemente el conjunto de los números.

Con Eudoxo (390 - 337 a.C.) se fortaleció dicha ruptura entre aritmética y geometría, dándosele prioridad más a la segunda "Lo que consiguió así Eudoxo fue evitar los números irracionales en tanto que números, es decir, evitó darles valores numéricos a las longitudes de segmentos, tamaños de ángulos y otras magnitudes, así como a las razones de magnitudes". Esto como consecuencia "forzó una nítida separación entre número y geometría, dado que únicamente la geometría podía manejar las razones inconmensurables, pero también hizo de los matemáticos geómetras, y la geometría iba a convertirse en la base de casi toda la matemática rigurosa durante los dos mil años siguientes" (Kline, 1972, p. 79).

Gracias a Eudoxo, Euclides (325-265 a.C.) pudo hacer grandes avances en la geometría pues ésta al estar divorciada de la aritmética y tomar a la recta como lo continuo se garantiza las distintas construcciones geométricas. Uno de los grandes aportes de Euclides fue "la compilación de los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de Teeteto y dando así mismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores solo habían probado con escaso rigor" (citado en Puertas, 1994, p. 10).

En los *Elementos* de Euclides, en la proposición I del libro I que dice: "construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada" (Puertas, 1991, p. 201), Euclides justifica dicha demostración a partir de las definiciones y postulados previamente formulados, salvo la existencia de un punto común entre ambos círculos. Este no podría ser justificado a partir de los precedentes, aunque esto es interpretado según la postura del historiador. "¿Por qué Euclides da por sentado la existencia de intersecciones sin plantearse la necesidad de ningún postulado que lo justifique?" (Bergé, 2003). Para poder justificar la existencia del punto de corte sería necesario la existencia de un postulado que explicase la continuidad de la recta.

> Ese atributo de la recta puede ser inherente a una imagen mental de ella, que se apoye en representaciones graficas u otro tipo de representación material. Euclides considera implícitamente estas propiedades como propiedades de la recta (Bergé, 2003, p. 171).

[2] La paradoja de la Dicotomía, La paradoja de Aquiles y la Tortuga, la paradoja de la flecha y la paradoja del Estadio

No obstante, Arquímedes (287-212 a. C.) mediante el método de exhaución logra inscribir y circunscribir figuras poligonales y calcula el perímetro de los mismos (Kline, 1972, p. 186), acercándose de forma intervalar al número π (García, 2017, p. 35). Es importante destacar que durante 15 siglos aproximadamente no se avanzó vigorosamente en la construcción de los números reales sin tener una dependencia geométrica, lo cual se puede evidenciar en Kline (1972, p. 276)

Según Kline (1972), después de las matemáticas griegas aparecen los aportes de los hindúes, entre los que se destacan la notación posicional en base diez y el uso del cero como un número, lo que permitió considerar una fracción con denominador cero como una cantidad infinita. También introdujeron los números negativos, aunque no reconocían la raíz cuadrada de un número negativo. De igual forma, propusieron ciertas propiedades para afrontar los números irracionales, sin embargo, esto no fue demostrado por ellos, por ejemplo, Bhaskara (1114-1185) propone de forma general para dar solución a la suma de dos irracionales:

$$\sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}} = \sqrt{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{ab}}} \qquad (1)$$

Para los hindúes los irracionales eran tratados con propiedades similares a los racionales. Esto ayudó a un progreso de la aritmética, al considerarse independiente de la geometría.

En los aportes atribuidos a Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido también como Fibonacci, está la observación de que existen ecuaciones como por ejemplo $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, cuyas raíces no pueden construirse con regla y compas, como la clasificación propuesta de las magnitudes de los *Elementos* de Euclides en el libro X. Ya en los siglos $XVI\ y\ XVII$ los matemáticos como Pacioli (1485-1514), Michael Stifel (1487-1567), Simón Stevin (1548-1620) y Cardano (1501-1576) utilizaban números irracionales en la tradición de hindúes y árabes, introduciendo cada vez más tipos de irracionales (Kline, 1972, p. 336).

El matemático francés François Vieta (1540-1603), uno de los principales precursores del álgebra, utilizó esta disciplina para tratar la igualdad y la proporción de magnitudes, sin tener en cuenta si estas magnitudes surgían de problemas geométricos. Por su parte, Rene Descartes (1596-1650) inicia su trabajo donde terminó Vieta e intenta poner el álgebra por encima de la geometría buscando un algebra independiente y sistemática. En este periodo histórico empieza a invertirse la

dependencia del algebra de la geometría. Es tanto así que en 1700 el álgebra alcanza una situación de completa independencia, pero su única dificultad era que carecía de una estructura en la cual sostenerse, puesto que el álgebra no tenía todavía el piso axiomático como el que había aportado Euclides a la geometría.

El álgebra adquirió tanta relevancia que, gracias a ello, Isaac Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716) y Euler (1707-1783) le dieron al concepto de continuidad un enfoque infinitesimal en el cálculo. Gracias a su contribución el cálculo se erige como un nuevo método generalizado aplicable a diferentes tipos de funciones. Por lo cual el cálculo se emancipa de la geometría griega transformándose en una ciencia independiente capaz de dar cuenta de una gran cantidad de problemas matemáticos de forma más eficiente que la geometría. Por ejemplo "Las series fueron consideradas en el siglo XVIII, una parte esencial del cálculo infinitesimal. Newton consideraba las series como inseparables de su método de fluxiones, ya que la única manera en que podía manejar las funciones algebraicas mínimamente complicadas y las funciones trascendentes era desarrollándolas en serie y derivando o integrando término a término" (Kline, 1972, p. 579). Las series se consideraban una extensión del algebra de polinomios, pero no se advirtió que se introducían de esta forma nuevos problemas al extender las sumas a un número infinito de términos.

Esta evolución en el conocimiento matemático fue acreedora de una reforma sustancial permitiendo la obtención de teoremas de un alto grado de aplicabilidad, aunque muchos de ellos presentaron un vacío conceptual debido a la falta de una fundamentación de la continuidad del conjunto de los números reales.

No es el objetivo del presente trabajo indagar la gran cantidad de aportes generados por la comunidad matemática del siglo XVIII, en especial a partir del año 1700 relacionado con la continuidad y el infinito, pero es de suma importancia traer a colación un matemático insigne por el nivel de relevancia de sus estudios en especial para la presentación y coherencia del análisis del cálculo.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) en 1805, a una edad temprana, ingresa a estudiar ingeniería en la *École Polytechnique*, pero debido a situaciones adversas referente a su salud tuvo que dedicarse al estudio de las matemáticas, debido a ello le fue posible combinar sus estudios de

ingeniería con sus investigaciones matemáticas, resultando en una amplia gama de resultados y propuestas que le permitieron entre otros dar un paso importante en el proceso de rigorización del análisis. Un primer acercamiento a la formalización de número real aparece en 1821 en su *Cours d'Analyse* "(…) un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él" (citado en Kline, 1972, p.1255). Esto se puede interpretar como la definición de número irracional a partir de la noción de limite, puesto que Cauchy usa el concepto de límite como la base sobre la que se construirá todo el análisis: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral.

El desarrollo del análisis y el álgebra durante los periodos anteriores a las primeras construcciones de los reales en 1872 requería una estructuración clara y precisa de lo significaba la noción de número real, para formalizar conceptos tales como límites y continuidad de funciones, en las que se requerían una comprensión de los números reales y sus propiedades para formalizar las demostraciones de algunos teoremas (Mora & Torres, 2004).

Los trabajos investigativos de Cauchy permitieron que el terreno de la matemática fuera fecundo para las primeras construcciones de los números reales, por lo tanto, se hace de igual manera necesario hacer una observación breve de los eventos matemáticos más importantes en el intento de dar un formalismo al concepto de número real a partir de los aportes realizados por Cauchy.

1.2. Génesis de los números reales: un acercamiento histórico al concepto de continuidad y completitud después de Cauchy.



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Hacia 1800, Augustin Louis Cauchy junto con varios matemáticos de la época, evidenciaron la falta de rigor en el tratamiento del análisis matemático y comenzaron a interesarse por precisar los conceptos y por un tratamiento riguroso en las demostraciones de vastas ramas del análisis (Kline1972, p. 1250). Cauchy empieza a trabajar en este tema y logra mejorar conceptos como la convergencia y divergencia (Kline, 1972, p. 1252). "Cauchy entendía que era necesario establecer sobre principios firmes el análisis y no motivado por necesidades pedagógicas, si no precisamente a pesar de ellas" (Pérez-Fernández 1999, p. 8).

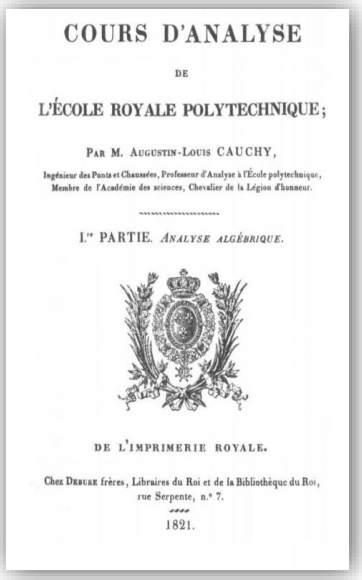
Cuando Cauchy era profesor de *la'École Polytechnique* quería un rigor matemático más fuerte, pensó en la necesidad de reformar los primeros cursos de análisis: así lo deja evidenciado en la introducción del *Cours d'Analyse* (Cauchy, 1821, p. 2,3). Los estudiantes de Cauchy que asistieron al curso de análisis presentaron un descontento, debido a que las clases se alejaban del enfoque práctico y de procedimientos más intuitivos[3], Al presentar los contenidos desde los conceptos, los estudiantes vieron el curso más complicado, además de esto sus colegas insistieron en dar sus clases con un enfoque más práctico, es decir, los otros cursos se caracterizaban por la

[3] El término intuición, cobra importancia en el desarrollo de todo el trabajo; sin embargo, es claro que de él se derivan diferentes interpretaciones, por ende, es preciso aclarar su significado. De acuerdo con la propuesta de López (SF), sobre la intuición y su relación con las matemáticas, apoyada en la propuesta de Fischbein (1987); por intuición se entiende a un tipo de conocimiento cuyas características son: ser autoevidente, su certeza intrínseca, la perseverancia, el carácter coercitivo, el estatus de teoría, el carácter extrapolable, la globalidad y el carácter implícito. En palabras textuales, López (SF) afirma que:

> En una intuición generalmente se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley - de un invariante- a través de una realidad particular. Una intuición, entonces, no es una pura teoría. Es una teoría expresada en una representación particular usando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama o una construcción. p. 32.

abundancia de ejercicios prácticos más que por la formalización de los contenidos (Suárez 2007, p. 36).

Lo anteriormente mencionado mas el descontento de los estudiantes y compañeros, ocasionó que Cauchy se viera obligado por la Dirección de *la'École* a desarrollar las obras que más han influido en la presentación del Análisis Matemático: *Cours d'Analyse* de *la'École Royale Polytechnique* (Cauchy, 1821), publicado en 1821; *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Cauchy, 1823) en 1823 y *Résumé des leçons sur le calcul différentiel* (Cauchy, 1829) en 1829 (Suárez, 2007, p. 37).


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Cauchy no realizó una construcción de los números reales como tal, pero sí efectúa, una aproximación a las propiedades definitorias de los números reales (Suárez, 2007, p. 84). Cauchy entiende los números reales como:

> Del mismo modo que se ve nacer la idea de número de la medida de magnitudes, igualmente se adquiere la idea de cantidad (positiva o negativa) cuando se considera cada magnitud de una especie dada como conducente a servir para el crecimiento o disminución de otra magnitud fija de la misma especie[4] (Cauchy, 1821, p. 403).

Consecutivamente, Cauchy introduce la regla de los signos, y efectúa las definiciones, defectuosas, para la suma, la diferencia, el producto y el cociente de números y cantidades. Para enunciar después, conjuntamente, la propiedad asociativa y conmutativa (Suárez, 2007, p. 84). También trabajó los conceptos de límites, funciones, continuidad, convergencias, ecuaciones algebraicas, derivadas e integrales, entre otros. Gracias a estos trabajos el Análisis Matemático logro tener una rigurosidad que no tenía antes, como se evidencia en Kline (1972, p. 1252):

[4]De même qu'on voit l'idée de nombre naître de la mesure des grandeurs, de même on acquiert l'idée de quantité (positive ou negative) lorsque l'on considère chaque grandeur d'une espèce donnée comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une autre grandeur fixe de même espèce.

> Cauchy es muy explícito en su introducción a la obra de 1821 en cuanto a que busca dar rigor al análisis. Señala que el uso libre para todas las funciones de las propiedades que se cumplen para las funciones algebraicas y el uso de series divergentes no están justificados. Aunque la obra de Cauchy no fue sino un paso en la dirección del rigor, él mismo creía y establece en su *Résumé* que había llegado a lo último en rigor dentro del análisis. Sí proporcionó los comienzos de demostraciones precisas de teoremas y limitó las afirmaciones adecuadamente, al menos para las funciones elementales.

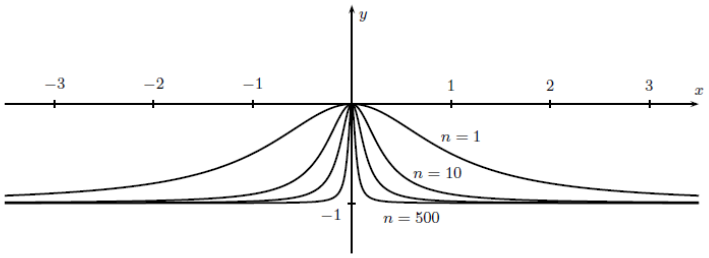
Las obras de Cauchy tienen dos teoremas falsos. Se expondrá el primer teorema falso.

Primer teorema falso: Si la sucesión $f_n: [a, b] \subseteq R \to R$ converge, donde cada f_n es continua entonces la función límite es continua.

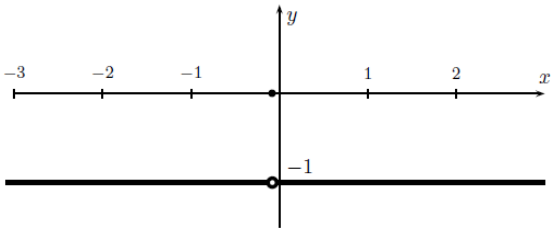
Sin embargo, se pueden exhibir varios contraejemplos: Sea la sucesión

$$f_n(x) = -\frac{nx^2}{nx^2 + 1}$$

Se presenta a continuación las gráficas de las funciones que toma la sucesión para $n = 1, 10, 50, 500$:



La serie converge a:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

A pesar de que f_n es continua para cada $n \in N$, esta sucesión converge a una función discontinua, particularmente en $x = 0$.

Debido a éste y a otros contraejemplos detectados, el anterior teorema fue conocido como primer teorema falso de Cauchy.

Aun así, Cauchy dejó muchas herramientas conceptuales que posteriormente fueron utilizadas por distintos matemáticos. Nuevamente, referente a la construcción de los números reales en el año 1821, Cauchy mediante límites de sucesiones de racionales da las pautas para la formalización de los números irracionales, lo que permite un acercamiento entre geometría y aritmética o número y magnitud. En el *Cours d'analyse* (1821, p. 4), Cauchy dice:

> Cuando los valores sucesivos asignados a una variable se acercan indefinidamente a un valor fijo de modo que terminan por diferir de él por tan poco como se desee, este último es llamado el límite de los otros. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él [...] una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de modo tal que converge al límite cero (Cauchy, 1821, p. 4).

Cerca de 1830, Bernhard Bolzano a partir de límites de sucesiones de racionales intenta axiomatizar los números reales. En este caso logró demostrar la existencia de la cota superior mínima de un conjunto acotado, pero no se definió la existencia del irracional como cota mínima del mismo, aun así "figuras prominentes como Bolzano y Weierstrass intentaron construir los números reales, con solo un éxito parcial" (Weiss, 2015, p. 4).

Fueron Dedekind (1872) y Cantor (1872) quienes dieron los primeros modelos correctos, y también las construcciones más comúnmente presentadas en los libros de texto modernos, utilizando cortaduras de números racionales y sucesiones de Cauchy de números racionales, respectivamente. Una construcción menos conocida es la de Bachmann, que emplea intervalos encajados de racionales, se dio alrededor de la misma época (1892) (Weiss, 2015, p. 4).

A continuación, se presentan los aspectos más relevantes de estas construcciones, puesto que ellas constituyen el marco de referencia para la construcción de los reales hecha por Weiss. La construcción de Bourbaki, otro referente de suma importancia para Weiss, será objeto de estudio al final del capítulo 2, una vez se haya presentado las nociones de filtro y filtro de Cauchy, esenciales en la construcción bourbakista.

1.3. Construcción de los reales por Georg Cantor.

La construcción de los reales de Cantor (1845-1918) en 1872 es el resultado de un engranaje matemático que fue fecundo a la luz de los aportes de sus antecesores. A pesar de que se habían logrado considerables avances y propuestas en la rigorización del análisis y se había logrado obtener un nivel de relevancia en la solución de problemas matemáticos, aún se carecía de un fundamento estructural que diera cuenta de la continuidad de los números en recta real. Esta construcción (una de las primeras junto a la construcción de Dedekind) es un referente histórico de primera línea relacionada directamente con la construcción de Weiss, en el sentido de que se desea llevar la construcción de Weiss a un nivel jerárquico *á la* Cantor. Además, se pueden observar rasgos implícitos de la construcción de Cantor en las construcciones reales de Bachmann y Bourbaki, estos últimos insumos primordiales para Weiss.

Georg Cantor nació en Rusia de familia judeo-danesa. En Alemania comenzó sus estudios como ingeniero en 1863, pero por influencia de Weierstrass se volcó al estudio de la matemática pura. Sostuvo una correspondencia muy célebre con Dedekind y en 1891 le planteó la cuestión de si el conjunto de los números reales podría ponerse en correspondencia uno a uno con los enteros, de lo cual se plantean dos demostraciones, entre ellas famosa diagonalización de Cantor para demostrar la no numerabilidad de los reales.

La construcción de los reales de Cantor para una persona que conozca teoría de conjuntos, relaciones, clases de equivalencia y sucesiones fundamentales, se presenta de forma asequible ya que esta construcción en particular está fundamentada por clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy cuya génesis metodológica se puede constatar en el *Cours d'Analyse* de Cauchy de 1821 (Pérez-Fernández & Aizpuru, 1998, p. 24). Con excepción a la construcción de los reales de Dedekind, las otras construcciones de la época presentan la misma línea de construcción que la de Cantor.

Ferreirós (1999) afirma que la construcción de Cantor está muy relacionada con la de Weierstrass, incluida la terminología empleada. El propósito de Cantor era definir lo que para él

era entendido como *Zahlgrosse* (número grande). Esta inquietud era latente desde que Cantor era estudiante de Weierstrass, por ello la notable influencia de este último sobre la teoría de Cantor. Pero Cantor mejoró en diferentes sentidos las teorías de su profesor, obteniendo un mayor éxito con ello. Weierstrass usó series convergentes mientras que Cantor hace uso de sucesiones de Cauchy de números racionales: cada serie infinita puede ser asociada a la sucesión de sus sumas parciales, para que una sucesión de Cauchy corresponda a una sucesión convergente.

La publicación de este escrito se llevó a cabo en 1872 con el nombre de *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques*[5]. Cantor estudió en detalle distribuciones complejas de puntos sobre la línea real, por lo cual vio necesidad de clarificar la noción de número real para poder hacer la presentación de su trabajo.

1.3.1. La construcción de los reales

Cantor parte del dominio de los números racionales, denotados por $\boldsymbol{A}$, con el fin de definir el dominio de los números reales $\boldsymbol{B}$, hace uso de la herramienta que él llamaría posteriormente como "sucesiones fundamentales". Algunos años más tarde ('*Fundamentalreihen*,' [Cantor 1883, 1886]); Aquí él todavía habla de magnitudes numéricas. (Ferreirós, 1999, p.127). Cantor establece los números racionales como fundamento para llegar a la noción más extensa de una gran magnitud (*Zahlgrosse)*; designándolos bajo el nombre del sistema $\boldsymbol{A}$, incluido el cero (Cantor, 1872)[6]:

> "Cuando hablo de una magnitud numérica en general, sucede sobre todo en el caso de que esté presente una serie infinita[7], dada por medio de una ley, de números racionales.

[5] La versión en francés es de 1883, pero la original en alemán es de 1872

[6] " "Wenn ich von einer Zahlengrosse im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem FaIle, dass eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen:

$$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3} \ldots \qquad (1)$$

... vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, dass die Differenz $\boldsymbol{a_{n+m} - a_n}$ mit wachsendem $\boldsymbol{n}$ unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl $\boldsymbol{m}$ sei, oder mit anderen. Worten, dass bei beliebig angenommenem (positiven, rationalen) $\boldsymbol{I}$: eine ganze Zahl $\boldsymbol{n_I}$ vorhanden ist, so dass $|\boldsymbol{a_{n+m} - a_n}| < \boldsymbol{I}$:, wenn $\boldsymbol{n \geq n_I}$ und wenn $\boldsymbol{m}$ eine beliebige positive ganze Zahl ist. /Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: *"Die Reihe* (1) *hat eine bestimmte Grenze* $\boldsymbol{b}$*."*" [Cantor 1872, 92-93]:

[7] En texto original de Cantor al referiste a una "serie" será tomado en términos de "sucesión".

$$a_1, a_2, a_3 \ldots \qquad (1)$$

Que tiene la propiedad que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ se vuelve infinitamente pequeña con el aumento de n, cualquiera que sea el entero positivo m; o en otras palabras, que dado un arbitrario (positivo, racional) ε uno puede encontrar un entero n_I tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n \geq n_I$ y m es un entero positivo arbitrario. Esta propiedad de la serie (1) yo la expresaré por medio de palabras: *la serie (1) tiene un cierto límite b"*. (traducción libre, tomado de Ferreirós, p. 127-128)

Los símbolos b serán los *zahlengrossen* que constituyen el dominio B de los números reales, término matemático que para esa fecha aún no se había determinado. A cada sucesión se le asocia un símbolo diferente b, b', b'' ... y cuando esto se ha hecho, se procede a determinar la igualdad de dichos símbolos (*zahlengrossen*). Esto se hace considerando el comportamiento de las sucesiones correspondientes $(a_n), (a_n')$. Así, $b = b'$ cuando $lim(a_n - a_n') \to o$ cuando $n \to \infty$ (Cantor nunca empleó clases de equivalencia en relación con la teoría de $\mathbb{R}$).

1.3.2. Orden en $\mathbb{R}$

Cantor, define las relaciones de orden de los símbolos b, b', b'' del domino de B, las relaciones de orden entre los números de B y los números racionales. El límite b' está relacionado con la sucesión $(a_n') = a_1', a_2', \ldots . . a_n' \ldots$ y el límite b con la sucesión $(a_n) = a_1, a_2 \ldots . . a_n \ldots$ Estas dos sucesiones tienen solo una de tres relaciones excluyentes entre ellas: $a_n - a_n'$ se vuelve infinitamente pequeño a medida que n crece; o bien: $a_n - a_n'$ a partir de cierto n siempre permanece más grande que una magnitud positiva (racional) ε; y finalmente $a_n - a_n'$ a partir de un cierto n permanece siempre menor que una cantidad negativa (racional) $-\varepsilon$. Esto implica que, en el primer caso $b = b'$, en el segundo caso $b > b'$ y en el tercero $b < b'$

También se encuentra que en la serie $(a_n) = a_1, a_2 \ldots . . a_n \ldots$, que tiene un límite b, no tiene con un número racional a sino una de las tres relaciones siguientes: $a_n - a$ se vuelve infinitamente pequeño a medida que n crece, o $a_n - a$ a partir de cierto n, siempre permanece

más grande que una cantidad positiva (racional) $\boldsymbol{\varepsilon}$, o: $\boldsymbol{a_n - a}$ a partir de cierto $\boldsymbol{n}$, siempre permanece más pequeño que una cantidad negativa (racional) $\boldsymbol{-\varepsilon}$. Lo que implica respectivamente que: $\boldsymbol{b = a},\ \boldsymbol{b > a},\ \boldsymbol{b < a}$

Cantor en su escrito *Extension d'un théorème de da théorie des déries trigonométriques***,** deduce de las definiciones planteadas que siendo $\boldsymbol{b}$ el límite de la sucesión $(\boldsymbol{a_n})$, $\boldsymbol{b - a_n}$ se vuelve infinitamente pequeño a medida que $\boldsymbol{n}$ aumenta, lo que justifica la designación de $\boldsymbol{b}$ como "límite de la serie $(\boldsymbol{a_n}) = \boldsymbol{a_1, a_2}$ ..... $\boldsymbol{a_n}$ ...." y determina que el conjunto $\boldsymbol{B}$ está compuesto de cantidades numéricas $\boldsymbol{b}$. Según las convenciones establecidas es posible extender las operaciones elementales de los racionales a los dos sistemas $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ combinados.

1.3.3. Operaciones aritméticas

Cantor, define las operaciones aritméticas básicas entre ellos, de la siguiente manera:

> Sean $\boldsymbol{b, b'b''}$ tres magnitudes numéricas del sistema $\boldsymbol{B}$, las fórmulas:
>
> $$\boldsymbol{b \pm b' = b''}, \quad \boldsymbol{bb' = b''}, \boldsymbol{\frac{b}{b'} = b''}$$
>
> Se utilizan para expresar que entre las series correspondientes a los números $\boldsymbol{b, b', b''}$:
>
> $$\boldsymbol{a_1, a_2, \dots}, \qquad \boldsymbol{a'_1, a'_2, \dots}, \qquad \boldsymbol{a''_1, a''_2, \dots}$$
>
> Se verifican respectivamente las relaciones:
>
> $$\boldsymbol{lim(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0},\ \boldsymbol{lim(a_n a'_n - a''_n) = 0},\ \boldsymbol{lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0}$$
>
> (Cantor 1872, 338-339)

Cantor afirma que las definiciones son similares en el caso de que uno o dos de los tres números pertenezcan al sistema $\boldsymbol{A}$**.**

1.3.4. El nuevo sistema C

El sistema A dio lugar al sistema B; incluso a ambos. Los sistemas B y A juntos, darán lugar, por el mismo método, a un nuevo sistema C. Eso es de hecho una serie infinita:

$$b_1, b_2 \ldots\ldots b_n, \ldots. \qquad (2)$$

Los números elegidos en los sistemas A y B, no todos pertenecen al sistema A, y esta serie está constituida de tal manera que $b_{n+m} - b_n$ se vuelve infinitamente pequeño como n crece, Cantor dice, que esta serie tiene un límite determinado c.

Las magnitudes numéricas c constituyen el sistema C. Las definiciones de equivalencia, desigualdad y las de operaciones elementales entre las cantidades c, ya sea entre estas magnitudes y las de los sistemas B y A, son análogas a las definiciones dadas anteriormente.

Mientras que los sistemas B y A son tales que podemos igualar cada una de los a con un b, pero no cada una de las b con un a, podemos por el contrario igualar no solo cada uno de los b a un c, sino también a cada uno de los c a un b.

Aunque los sistemas B y C pueden considerarse en cierta medida como idénticos, es esencial mantener la distinción abstracta entre los dos sistemas; la equivalencia de dos cantidades numéricas b, b' prestadas del sistema B no implica su identidad, sino que expresa solo una relación definida entre las series a las que se refieren.

El sistema C y aquellos que lo preceden producen de manera similar un sistema D, estos a su vez, otro sistema E, y así sucesivamente; por λ de estas operaciones (considerando la operación por la cual pasamos de A hacia B como la primera) llegamos a un sistema L de magnitudes numéricas. (Cantor, 1872)

Para Cantor, los números reales, son límites de sucesiones de racionales. Como ya se ha mencionado Cantor mejora notablemente las teorías de Weierstrass, y aunque pareciese que la formalización buscada por Cantor en *Extension d'un Théorème de la théorie des séries*

trigonométriques no implicara una formalización como tal, la necesidad de dar un sustento teórico adecuado a su escrito llevó al desarrollo propuesto tal como es conocido (Ferreirós, 1999, p.127).

En Torres & Mora (2007, p. 100) se hace una interpretación más moderna de la construcción de Cantor, en la que se define el número real a partir de clases de equivalencia de intervalos encajados, de números racionales, así: un par de sucesiones monótonas contiguas de números racionales definen un número real $\boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a'_n}\}$, con la condición de que $\{\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a'_n}\} = \{\boldsymbol{b_m}, \boldsymbol{b'_m}\}$, si $\boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{b'_m}$, $\boldsymbol{b_m} \leq \boldsymbol{a'_n}$ para cualquier par de subíndices ***n, m.***

Dos sucesiones son monótonas contiguas si para un par de sucesiones cualquiera de números racionales, se cumple que:

1. Una de las sucesiones es monótona creciente $\{\boldsymbol{a_n}\}$, y la otra es monótona decreciente $\{\boldsymbol{a'_n}\}$
2. para todo $\boldsymbol{a_n}$, se tiene que $\boldsymbol{a_n} \leq \boldsymbol{a'_n}$
3. $\boldsymbol{a'_n} - \boldsymbol{a_n} < \boldsymbol{\varepsilon}$, para cualquier número positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$, a partir de algún $\boldsymbol{n}$.

Estas condiciones determinan los intervalos encajados en cada una de las sucesiones correspondientes, $\boldsymbol{I_n} = \{\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a'_n}\}$ tal que su amplitud puede ser tan pequeña como se desee para algún $\boldsymbol{n}$ suficientemente grande. Por lo cual existe un número $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{a_n}$ y a su vez $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{a'_n}$, de cada uno de los intervalos encajados definidos por las sucesiones, este número $\boldsymbol{\alpha}$ puede ser racional o no, lo cual llevó a Cantor a la creación de número irracional, y por ende a la definición de número real. Por lo cual se determina el postulado de la continuidad de la recta: "dada una sucesión de intervalos encajados $\boldsymbol{I_n} = \{\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a'_n}\}$, existe siempre un punto $\boldsymbol{\alpha}$ perteneciente a todos ellos*"* (Mora &Torres, 2007, p.105) (Tovar, 2011, p.27). Esta interpretación de la construcción de Cantor se acerca notablemente a la construcción hecha por Bachmann (1892) la cual se presentará posteriormente.

1.3.5. Los reales como clases de equivalencia

Con el fin de tener un mejor acercamiento a la construcción de Cantor se hace necesario recordar lo que son las sucesiones de Cauchy. Para una descripción general de los elementos constitutivos

de la construcción de Cantor, se toma como referencia a Hernández (2003), Ferreirós (1999) y García (2017)

Sucesiones de Cauchy de números racionales. (Hernández, 2003, P. 132)

- **Sucesiones de racionales:** Una sucesión de racionales es una función $\boldsymbol{a}$: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Denotado como $\boldsymbol{a}_n$ que es el *n-simo* término de la sucesión.
- **Sucesión convergente:** Una sucesión de números racionales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ***l,*** si para todo $\mathcal{E} \in \mathbb{Q}^+$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$, es decir $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

- **Sucesiones de Cauchy:** Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, si y solo si para cualquier valor racional positivo ε, existe un entero ***N,*** tal que si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

- **Lema:** Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $\delta \in \mathbb{Q}^+$ tal que $|a_n| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Definición:** Sean $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números racionales, se definen las sucesiones $x + y = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $xy = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

  $$x_n + y_n = u_n \qquad x_n y_n = v_n$$

- **Lema:** Si *x, y* son sucesiones de Cauchy, entonces también lo son las sucesiones suma $x + y$, y la multiplicación xy.

  La suma y la multiplicación son operaciones binarias en el conjunto $\boldsymbol{C}$ de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales.

- **Definición:** Sean $x, y \in C$, se define la relación ~ en *C* como $x \sim y$ si y sólo si para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

- **Lema:** La relación ~ es una relación de equivalencia en *C*

- **Definición:** Una sucesión de Cauchy $x \in C$ se dice positiva si existe un $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \geq \varepsilon$.

- **Lema:** Si $x, y, u, v \in C$ son tales que $x \sim u$ y $y \sim v$ entonces $x + y \sim u + v$ y y $xy \sim uv$; además si *x* es positiva entonces *u* es positiva.

- **Lema:** La suma y multiplicación de dos sucesiones de Cauchy positivas son sucesiones de Cauchy positivas. Además, si $x \in C$, entonces una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera; *x* es positiva, $x \sim 0$ o $-x$ es positiva.
- **Lema:** Si $x \in C$ no es equivalente a cero modulo$\sim$, entonces existe $y \in C$ tal que, $xy \sim 1$

Una interpretación moderna de la construcción de los reales por Cantor **Los números reales** (Hernández, 2003, pp138)

- **Definición:** un *número real* se define como una clase de equivalencia modulo $\sim$ de sucesiones de Cauchy de números racionales. El número real determinado por la sucesión de Cauchy $\boldsymbol{x}$ se denota como $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{r}}$

El conjunto de los números reales $\mathbb{R} = \boldsymbol{C/\sim}$**.** Un número real es positivo si y sólo si contiene una sucesión de Cauchy positiva. Si $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{r}}$ es positivo, entonces cada uno de sus miembros es positivo. El conjunto de los números reales positivos se denota como $\mathbb{R}^+$.
Se definen las operaciones de suma y multiplicación de los números reales como:

$$[x]_r + [y]_r = [x + y]_r \qquad [x]_r . [y]_r = [xy]_r$$

También se define un orden para $\mathbb{R}$ como:

$$x <_r y \; si \; y \; sólo \; si \;\; y - x \in \;\; \mathbb{R}^+$$

- **Teorema:** el sistema $\langle \mathbb{R}, +, ., 0_r, 1_r, \mathbb{R}^+ \rangle$ conserva las propiedades de los racionales tanto para la suma para la multiplicación. Para una mayor referencia de las propiedades ver teorema 6.19 de Hernández (2003, p. 138).

- **Teorema:** entre dos números reales distintos hay un número racional

- **Lema:** si $x, y \in C$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$, entonces $[x]_r \leq [y]_r$

- **Teorema (propiedad Arquimediana):** si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$

- **Teorema:** Todo subconjunto no vacío de números reales que tiene cota superior tiene una mínima cota superior

- **Definición:** El número real ***y*** es límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales si y sólo si para todo número real ε existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - y| < \varepsilon$$

  Para todo $n \geq n_0$.

- **Lema:** El límite de una sucesión de números reales es único: $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

  Toda sucesión de números reales decreciente que está acotada inferiormente, es decir, tal existe $M \in \mathbb{R}$ con $M \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene límite (de forma análoga se cumple para la sucesión creciente).

- **Lema:** Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números racionales y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = [(a_n)_{n=0}^{\infty}]_r$ es el número real correspondiente a a_n. Entonces ***x*** es una sucesión de Cauchy de números reales si y sólo si ***a*** es una sucesión de Cauchy de números racionales. Además, si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números racionales y ***z*** es el número real que ella define, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

- **Teorema:** Una sucesión de números reales tiene límite si y sólo si es una sucesión de Cauchy de números reales.

1.4 Construcción de los reales por Bachmann (1892).

Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837-1920) matemático alemán, propone un modelo de construcción de los números reales en 1892 a partir de intervalos encajados de racionales, esto desde la perspectiva didactica de Weiss. Esta construcción es de suma importancia para la propuesta por Weiss, ya que él considera su construcción de los reales como una variante de la construcción hecha por Bachmann. La propuesta de Bachmann, en intervalos encajados de racionales, se expresa de la siguiente manera en: *Vorlesungen über die natur der Irrationalzahlen.*

> (...) Sin embargo, no debemos pasar por alto el hecho de que tal concepción tiene dos cosas en común: 1) el supuesto de que ambas series[8] tienen realmente un límite común; es decir que existe algo que puede imaginarse como el límite común de ambos, y 2) que ese fin de existencia puede considerarse como un número. El rigor de la aritmética, que es considerado por todas las partes de las matemáticas como el más "puro"[9] (Bachmann, 1892, p 7).

Ahora, sin más dilación, se presenta una síntesis de la construcción de los reales de Bachmann para tener el referente bajo el cual se origina la construcción de Weiss.

Una sucesión $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos $I_n = [a_n, c_n]$ en la recta real se dice que es una familia de intervalos encajados si $I_{k+1} \subseteq I_k$ para todo $k \geq 1$ y $c_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cada sucesión de intervalos encajonados, existe un único número real b, tal que $b \in I_k$ para todo $k \geq 1$.

Una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más fina que otra $\{J_n\}_{n\geq 1}$ si $I_n \subseteq J_n$, para todo $n \geq 1$. Decimos que dos sucesiones de intervalos encajados tienen un *refinamiento común*

---

[8] Entiéndase como sucesiones.

[9] Indessen dürfen wir nicht übersehen, dass solche Auffassung zweierlei in sich: 1) die annahme, dass beide Reihen thatsächlich eine gemeinsame Grenze haben, d. h. dass etwas existirt, was als gemeinsame Grenze beider vorgestellt werden kann, und 2) dass deis Existirende als eine Zahl betrachtet werden darf. Der Strenge der Arithmetik, welche von allen Theilen der Mathematik als die „reinste".

si hay una sucesión de intervalos encajados más fina que la intersección de ambos. Así pues, dos sucesiones de intervalos encajonados determinan el mismo número real, si y solo si, admiten un *refinamiento común*.

Debido a la densidad de los números racionales en los números reales, los intervalos anteriores se pueden reemplazar por intervalos racionales, es decir intervalos que constan solo de números racionales, al tiempo que conserva la correspondencia con los reales.

Los reales de Bachmann según Weiss. Considérense intervalos racionales de la forma $I = [a, c] = \{x \in \mathbb{Q}: a \leq x \leq c\}$, donde $a, c \in \mathbb{Q}$. Un *nido racional* es una familia $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos racionales $[a_n, c_n]$ que satisface $I_{k+1} \subseteq I_k$ para todo $k \geq 1$ y $c_n - a_n \to 0$. Un racional encajonado $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más fino que una sucesión del mismo tipo $\{J_n\}_{n\geq 1}$ *si* $I_n \subseteq J_n$, para todo $n \geq 1$. Sea *N* el conjunto de todos los racionales encajonados, luego en él se define la relación $\sim$ donde $\{I_n\}_{n\geq 1} \sim \{J_n\}_{n\geq 1}$ si existe un *refinamiento común* de $\{I_n\}_{n\geq 1}$ y $\{J_n\}_{n\geq 1}$. De ello se puede deducir que $\sim$ es una relación de equivalencia en N y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define por $N/\sim$, es decir el conjunto de clases de equivalencia de racionales encajonados.

Orden en $\mathbb{R}$. Dos números reales $x = [\{I_n\}]$ y $y = [\{J_n\}]$ satisface $x < y$, cuando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $I_{n_0} < J_{n_0}$ en el sentido de que $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in I_{n_0}$ y todo $\beta \in J_{n_0}$.

Aritmética en $\mathbb{R}$. La ampliación de las operaciones aritméticas de la suma y la multiplicación de números racionales a subconjuntos S y T de números racionales se da por medio de $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ y $ST = \{st : s \in S, t \in T\}$. Es fácil ver que las operaciones anteriores entre intervalos racionales son de nuevo intervalos racionales. Así pues, la suma y multiplicación de los números reales x, y dada por $x + y = [\{I_n + J_n\}]$ y $xy = [\{I_n J_n\}]$ está bien definida (Weiss, 2015, pp. 5-6 de su artículo *The Real Numbers - A Survey of constructions*).

La construcción de Weiss coincide con la desarrollada en el apartado anterior, en la cual los números reales son conjuntos de intervalos y se define una aritmética básica. Para entender un poco mejor, según Moore, Baker & Cloud (2009) (citado por García 2017), la aritmética intervalar se define mediante funciones que relacionan los intervalos y con el redondeo permiten que estos intervalos sean rigurosos, esto es muy similar a lo que Bachman denomina como un refinamiento común. De hecho, de ello se deriva que en computación se usen intervalos encajonados; por

ejemplo, con programas de informática es posible encontrar intervalos que son solución a muchos problemas matemáticos representables en la recta real. Luego, los algoritmos de intervalos están diseñados para proporcionar automáticamente límites rigurosos sobre los errores acumulados de redondeo, errores de aproximación y las incertidumbres que se propagan en los datos iniciales.

El desarrollo aritmético presentado en la teoría intervalar a partir de la propuesta de Moore, da cuenta de la definición hecha por Bachman en 1892. Es decir, en el centro de la teoría intervalar está una de las construcciones matemáticas propuestas para los números reales y la deja entrever como una teoría que sin duda brinda herramientas importantes para diseñar actividades para implementar en la educación media, que permitan desarrollar intuiciones y ganancias conceptuales que no estén alejadas de los desarrollos teóricos matemáticos.

La construcción de Bachmann se retoma recientemente en la propuesta hecha por Weiss (2015), en su artículo: *The Real Numbers - A Survey of constructions*, y también se apoya en la construcción de Bourbaki, quien usa esencialmente filtros y filtros de Cauchy.

1.5. Construcción de los reales de Dedekind (1872)

Para Weiss la construcción de Dedekind goza prestigio en el desarrollo histórico en la búsqueda de la formalización de los números reales, por lo cual es pertinente hacer una breve presentación de esta, tal como lo hace Weiss: “Quizás los dos enfoques más famosos son los de Cantor y Dedekind” (Weiss, 2016).

Richard Dedekind (1831-1916), estudiante de Gauss, dedicó cincuenta años de su vida a enseñar en un instituto técnico en Alemania (Kline 1972, p. 1085). Dedekind quien presenta su modelo de construcción de los números reales a partir de cortaduras de racionales en el mismo año que lo hace su homologo Georg Cantor, estos dos matemáticos sostuvieron algunos años correspondencia sobre algunos problemas matemáticos (Ferreirós, 2006). La construcción de Dedekind de una forma sintética se presenta de la siguiente manera:

Observación. Cualquier número real a determina una partición de $\mathbb{Q}$ en un par (A, B) donde $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < a\}$ y $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid a \leq q\}$. Obviamente, A no es vacío y está cerrado hacia

abajo, B no es vacío y está cerrado hacia arriba, y A no tiene el elemento más grande. Cualquier partición de $\mathbb{Q}$ que satisfaga estas propiedades se denomina *cortadura de Dedekind* y esta construcción es una biyección entre los números reales y el conjunto de todas las cortaduras.

***Los reales*.** El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales se define como el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind.

Orden. Dados los números reales $a_1 = (A_1, B_1)$ y $a_2 = (A_2, B_2)$, la relación $a_1 \leq a_2$ se mantiene precisamente cuando $A_1 \subseteq A_2$.

Aritmética*:* obviamente, para cualquier cortadura de Dedekind (A, B), cualquiera de los dos A o B determina al otro y si $A \subseteq \mathbb{Q}$ satisface las propiedades de la "mitad" izquierda de una cortadura de Dedekind, entonces $(A, \mathbb{Q} \setminus A)$ es una cortadura de Dedekind, Por lo tanto, basta con concentrarse en A. La adición de números reales dada por los cortes de Dedekind representados por los conjuntos A_1 y A_2 se define por:

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \}$$

Si A_1 y A_2 representan reales no negativos, entonces su producto está dado por:

$$A_1 A_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0 \} \cup \{a_1 a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \}.$$

La multiplicación se extiende entonces por los casos de signos como de costumbre.

(Weiss 2015, pp.5-6).

Capítulo 2
Preliminares a la construcción de los reales por Weiss

Para poder hacer un acercamiento a la construcción de los reales de Weiss es necesario tener presente algunos conceptos topológicos, tales como filtro y filtro de Cauchy. Precisamente estos conceptos constituyen el marco conceptual para la construcción de los reales por Bourbaki, que también es un referente muy importante en la propuesta de Weiss. Por tales motivos, en este capítulo hacemos un primer acercamiento a los conceptos de filtros y convergencia de filtros y luego presentaremos, a grandes rasgos, la propuesta de Bourbaki.

2.1 Preliminares topológicos

Entre los conceptos topológicos que consideramos relevante tener presente para lo que sigue del presente trabajo, está la noción de filtro. A continuación, se presentan las definiciones de filtro, base de filtro y algunos ejemplos que pueden aclarar muchas de las condiciones propias que se verán en gran manera evidenciadas cuando se desarrolle la construcción de los reales de Weiss en el capítulo siguiente.

Presentamos a continuación las definiciones básicas, que, aunque se encuentran en un texto de Topología, consideramos importante incluirlas en el documento con el propósito de que sea auto-contenido.

2.1.1 La noción de filtro

Los trabajos de Cartan (1937) sobre filtros dan cuenta de una generalización de la noción de sucesión y convergencia, importantes para comprender la sintaxis hecha por Weiss entre los conceptos básicos de filtros e intervalos de racionales.

> La noción de *filtro* fue introducida por primera vez por Henri Cartan, en el congreso realizado en Chançay en 1937. El propósito era liberarse de la propiedad de numerabilidad: se requería de nociones parecidas a las de sucesión y convergencia que se pudieran definir en espacios en los que no se verificara ningún axioma de numerabilidad y dónde la topología del espacio no hiciera referencia a ninguna métrica (Anacona 2017, p 188).

La definición formal es la siguiente (Bourbaki 1965, p.65):

Definición 2.1: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X, que posee las siguientes propiedades:

(F_I) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$ entonces $G \in \mathcal{F}$; y

(F_{II}) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(F_{III}) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

La noción de filtro permite pensarse como una generalización de las sucesiones convergentes, considerando el filtro como una familia de subconjuntos que cumplen la condición de que la intersección entre ellos siga siendo parte de dicha familia, podemos observar que un valor particular de una sucesión convergente y su inverso aditivo pueden considerarse como los extremos de un intervalo contenido en los anteriores y que contiene a su vez los siguientes elementos de la sucesión. De hecho, este tipo de presentación se relaciona con la propuesta de construcción de los reales de Bachmann mediante intervalos encajados. Se puede verificar en las sucesiones de Cauchy que dado cualquier $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que cualquier valor consecuente de la sucesión este dentro del intervalo delimitado por $(a_{n_0}, -a_{n_0})$. Como el n_0 depende del ε entonces cualquier par de valores consecuentes de la sucesión tienen longitud menor que ε. Si consideramos estas particularidades es posible verificar que esta condición es similar a

la definición de filtro de Cauchy en donde para todo ε es posible encontrar un intervalo que pertenece al filtro, esto podrá observarse de manera más clara en los preliminares del capítulo tres y en transcurso de la construcción de los reales de Weiss.

Ejemplos de filtros:

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. La colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que contienen a casi todos los términos de la sucesión es un filtro sobre X que se llama el filtro elemental asociado a la sucesión $\mathcal{F}_{\{a_n\}}$. Se tiene que $F \in \mathcal{F}_{\{a_n\}}$ si y solo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in F$, para cada $n \geq p$.

   Observación. Se puede verificar como caso particular en una sucesión convergente, que a partir de un elemento $p \in \mathbb{N}$ se establece un valor de la sucesión que determina el intervalo $[L,a_p)$, donde L es el límite de la sucesión, el cual va a contener todos los valores subsecuentes de la sucesión. El filtro generado por esta sucesión convergente es el filtro elemental asociado a la sucesión.

   Si consideramos $\lim_{n\to\infty}(2/n) = 0$, podemos establecer un intervalo $[0,\frac{2}{n})$ que va generar un filtro asociado a esta sucesión en particular.
2. Sea X un espacio topológico. El conjunto $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$ es un filtro sobre X.
3. Si A es un subconjunto no vacío de un conjunto X, $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ es un filtro sobre X. Es decir, es el filtro generado por A.
4. $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus F \; es \; finito\}$, es el filtro de Fréchet.
5. Si X es un conjunto infinito, $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \setminus F \; es \; finito\}$ es el filtro de complementarios finitos sobre X.
6. Si X es un espacio topológico, A es un subconjunto de X y a es adherente a A, entonces $\mathcal{F} = \{V \cap A \,; V \in \mathcal{V}(a)\}$ es un filtro sobre A.

Los ejemplos sobre filtros son infinitos, pero es de nuestro particular interés aquellos que involucran sucesiones convergentes donde se puedan verificar las condiciones iniciales planteadas en la construcción de los reales de Cantor con respecto a la propuesta hecha por Weiss.

Definición 2.2: dados dos filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sobre el mismo conjunto X, se dice que $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ (o que $\mathcal{F}_2$ es menos fino que $\mathcal{F}_1$) si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Ejemplos:

1. Si (y_n) es una subsucesión de una sucesión (x_n), el filtro elemental asociado a la subsucesión (y_n) es más fino que el filtro elemental asociado a (x_n).

   Observación. Si suponemos la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ y la subsucesión $a_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ notamos que ambas convergen a uno cuando $n \to \infty$, pero el intervalo $(a_{n_k}, 2) \subset (a_n, 2)$ con $n, k \in \mathbb{N}$, como ambos generan un filtro respectivamente, se notará que los elementos del filtro asociado al intervalo $(a_n, 2)$ están contenidos en el filtro generado por $(a_{n_k}, 2)$ de esta forma el filtro $\mathcal{F}_{(a_n,2)} \subseteq \mathcal{F}_{\left(a_{n_k},2\right)}$.
2. Si τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre X y τ_1 es más fina que τ_2, entonces para cada $x \in X$, el filtro $\mathcal{V}_1(x)$ de vecindades de x en la topología τ_1 es más fino que el filtro $\mathcal{V}_2(x)$ de vecindades de x en la topología τ_2.
3. Dada una familia de filtros $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ sobre un conjunto X, la intersección $\mathcal{F}$ de esta familia es también un filtro sobre X, menos fino que cada $\mathcal{F}_i$.

2.1.2 Bases para un filtro

Tal como sucede con una topología sobre un conjunto X, es posible generar un filtro sobre X si se conoce una base. La base de un filtro son subconjuntos que permiten observar de forma más intuitiva la estructura que fundamenta el filtro, si observamos la sucesión $(a_n) = \left(1/n\right)$ tiene un filtro asociado que da cuenta de un subconjunto de racionales que son verificables a partir de la sucesión, es de notar que la base es un subconjunto del filtro generado por ella, por lo cual sus elementos son de un nivel más primario permitiendo un acercamiento más intuitivo.

Definición 2.3. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X y $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{F}$, si para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$.

De forma equivalente se define la base de filtro como: una colección $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, tal que para todo $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ con $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Nota: se establece que cualquier filtro es una base de filtro, pero no su reciproco.

Ejemplos:

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. Para cada $p \in \mathbb{N}$, sea $A_p = \{a_n : n \geq p\}$, entonces $\mathcal{B} = \{A_p : p \in \mathbb{N}\}$ es una base del filtro elemental asociado a la sucesión.
   Observación. Si tomamos $p \geq 1$, obtenemos $A_p \subset A_{p-1} \subset \cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$ observamos que son subconjuntos de racionales, cada p genera una base de filtro donde cada subconjunto de racionales de la sucesión está incluido en el anterior.
2. $\mathcal{B} = \{A\}$ es una base de $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$.

Observación. Una base $\mathcal{B}$ de un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X satisface las siguientes propiedades:

i. La intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$.
ii. $\mathcal{B} \neq \phi$ y $\phi \notin \mathcal{B}$.

Recíprocamente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. Si $\mathcal{B}$ es una colección de subconjuntos de X que satisface i y ii entonces $\langle\mathcal{B}\rangle = \{F \subseteq X : B \subseteq F\ , B \in \mathcal{B}\}$. Es un filtro sobre X y $\mathcal{B}$ es una base de $\langle\mathcal{B}\rangle$.

Proposición 2.2.2. Sean $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X entonces se tiene que $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de filtro sobre Y.

Ejemplo:

Si $f : X \to Y$ es una función constante de valor c, entonces $f(\mathcal{B}) = \{\{c\}\}$, para cada base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X.

Proposición 2.2.3. Sean $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre Y tal que para cada $B \in \mathcal{B}, B \cap f(X) \neq \phi$, entonces $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de filtro sobre X.

Demostración. $f^{-1}(B_3) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, si $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, entonces se tiene que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ satisface i. La hipótesis $B \cap f(X) \neq \phi$, asegura que $f^{-1}(B) \neq \phi$, luego $f'(\mathcal{B})$ también satisface ii.

2.1.3 Convergencia de filtros

La noción de sucesión es una herramienta que se relaciona cuando se tratan los conceptos de continuidad y convergencia, como se sabe, es posible encontrar un filtro elemental asociado a una sucesión en particular es por tanto pertinente verificar la relación de la convergencia de una sucesión con su filtro asociado.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X, convergente a un punto $a \in X$. Dada una vecindad V de a en X, existe $N > 0$ tal que $a_n \in V$ para cada $n \geq N$. Esto significa que cada vecindad de a contiene a casi todos los elementos de la sucesión. En otras palabras, cada vecindad de a pertenece al filtro elemental asociado a la sucesión, o lo que es lo mismo, el filtro elemental asociado a la sucesión es más fino que el filtro de vecindades de a es decir $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{F}_{\{a_n\}}$. Diremos que el filtro elemental asociado a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

Sea por ejemplo la sucesión $a_n = \left(1/n\right)$ que converge a cero cuando $n \to \infty$, sabemos que los elementos de la sucesión me permiten obtener una base de filtro y generar el filtro asociado a esta sucesión, si consideramos el filtro de la vecindades de cero observamos que todo elemento del filtro asociado a la sucesión está contenido en algún subconjunto de la vecindad de 0, por lo cual $\forall \varepsilon > 0$, el intervalo $(0, \varepsilon)$ contiene la mayor parte de los elementos de la sucesión, y este a su vez es un subconjunto de las vecindades de cero. Seguidamente se define convergencia de filtro.

Definición 2.4. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$ (o x es un punto límite de $\mathcal{F}$) si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x denotado como $\mathcal{V}_x$.

Se dice que una base de filtro $\mathcal{B}$ converge al punto x, si el filtro $\langle\mathcal{B}\rangle$ generado por $\mathcal{B}$ converge a x. Una sucesión convergente está relacionada con un filtro elemental asociado a dicha sucesión

por lo cual el filtro es igualmente convergente, dado que los básicos del filtro dependen de las características de la sucesión, se puede partir de que si se tiene un filtro convergente a un valor x, es porque sus básicos son subconjuntos de las vecindades de x, esto implica que todos sus elementos deben contener a x. Ejemplo**:** Sean $X = \mathbb{R}, x_n = 1/n$ para cada $n \in N$ y $\mathcal{F}$ el filtro asociado a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En este caso particular el límite de convergencia es cero y es el único punto límite del filtro.

El siguiente resultado da un criterio para determinar cuándo una base de filtro converge a un punto.

Proposición 2.3.1. Sea X un espacio topólogico, $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, $\mathcal{B}$ una base del filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces $\mathcal{F} \to x$ si y solo si $\mathcal{B} \to x$.

Demostración: supongamos que $\mathcal{F} \to x$. Tenemos que para toda $V \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$. Luego por la definición de convergencia de filtro se tiene que $\mathcal{B} \to x$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B} \to x$. Para toda $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$, como $\mathcal{F}$ es filtro y $B \in \mathcal{F}$ con $V \in \mathcal{F}$. Luego $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \to x$ ■

El siguiente resultado caracteriza los espacios de Hausdorff en términos de la convergencia de filtros.

Proposición 2.3.2. Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff, si y solo si todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X converge a lo más a un punto.

Demostración. Supongamos que el filtro $\mathcal{F}$ converge a dos puntos distintos x y y en X. Si V y W son vecindades de x y y respectivamente, entonces, puesto que V y W son elementos de $\mathcal{F}$, $V \cap W \neq \phi$ Esto significa que X no es un espacio de Hausdorff.

De manera recíproca, si x y y son puntos de distintos de X tales que $V \cap W \neq \phi$ para cada par V, W de vecindades de x y y respectivamente, entonces:

$$\mathcal{F} = \{V \cap W : V \in \mathcal{V}(x) y\, W \in \mathcal{V}(y)\}$$

Es una base de filtro sobre X que converge simultáneamente a x y a y. ■

Definición 2.5. Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es adherente a una base de filtro $\mathcal{B}$, si x es adherente a cada elemento de $\mathcal{B}$.

Observación. Un punto x de un espacio topológico X, es adherente a una base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, la intersección de cada vecindad fundamental de x con cada elemento de $\mathcal{B}$ es no vacía.

Ejemplo: Todo punto límite de un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es también un punto adherente.

Sea la sucesión $1/n$ los elementos básicos que generan el filtro asociado a esta sucesión están determinados por el punto limite y cada valor particular de la sucesión, es decir, todos los básicos tiene como punto límite la convergencia de la sucesión, de allí que se pueda verificar la definición de punto adherente[10].

Definición 2.6. Sean $f : X \to Y$ una función de un conjunto X en un espacio topológico Y y sea $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X. Se dice que $y \in Y$ es un punto límite de f con respecto a la base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, y es un punto límite de la base de filtro $f(\mathcal{B})$. En este caso se escribe $lím_{\mathcal{B}} f = y$.

Proposición 2.3.3. Un punto $y \in Y$ es límite de f con respecto a la base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si, para cada vecindad V de y en Y, existe $F \in B$ tal que $f(F) \subset V$, esto es, $f^{-1}(V)$ pertenece al filtro generado por $\mathcal{B}$, para cada vecindad V de y.

Observación. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función de X en Y , $\mathcal{V}(c)$ el filtro de vecindades en X de un punto $c \in X$. En lugar de decir que $y \in Y$ es límite de f con respecto al filtro $\mathcal{V}(c)$, diremos que y es límite de f en el punto c, o bien que $f(x)$ tiende a y, cuando x tiende c y escribimos $lím_{x \to c} f(x) = y$. Si $\{c\}$ no es un conjunto abierto de X, i.e., si c no es un punto aislado de X, $\mathcal{B} = \{V \setminus \{c\} : V \in V(c)\}$ es una base de filtro sobre X. Si y es límite de f con respecto a $\mathcal{B}$, escribimos en este caso $lím_{x \to c, x \neq c} f(x) = y$.

Proposición 2.3.3. Una función $f : X \to Y$, de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, es continua en un punto $a \in X$, si y sólo si $lím_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demostración. Nótese que $lím_{x \to a} f(x) = f(a)$, si y sólo si, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ para cada vecindad $V \in \mathcal{V}(f(a))$ en Y , si y sólo si, f es continua en a.■

---

[10] Definición de punto adherente. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y sea x un punto de $\mathbb{R}^n$, no necesariamente de S. Entonces se dice que x es adherente a S si toda la bola $B(x)$ contiene un punto S, por lo menos (Apostol, 2006).

Hasta ahora se han presentado ejemplos y particularidades de la noción de filtro, pero es necesario mostrar algunas definiciones importantes en el marco de la construcción de Bourbaki que son utilizadas por Weiss en su modelo de construcción, para poder así verificar la abstracción que hace Weiss de estos conceptos y llevarlos a un modelo representativo e intuitivo de la recta real.

2.1.4 Filtros de Cauchy

La relevancia de los filtros de Cauchy en la construcción de los reales de Weiss es de primera línea, ya que este concepto característico permite definir las condiciones de lo que será un número real. En Anacona (2017, p. 258) se expresa la importancia de este concepto en el desarrollo del análisis, y que permite acceder a niveles estructurales más complejos.

> Los filtros de Cauchy se definen sobre espacios uniformes, los cuales son una generalización de espacios métricos y de grupos topológicos. A los espacios uniformes se pueden extender casi todos los resultados de los espacios métricos, en particular los relacionados con la noción de filtro y convergencia de filtros. Por tanto, constituyen una base importante para el desarrollo del análisis.

Los filtros de Cauchy en Bourbaki se definen sobre espacios uniformes. De ahí la importancia de definir en primera instancia estos espacios en los que se ha definido una estructura uniforme. Los detalles que presentan a continuación corresponden a la tesis doctoral de Anacona (2017), dado que son un referente principal en la propuesta de Weiss para la construcción de los números reales.

Se presenta a continuación la definición de estructura uniforme:

> **Definición 2.7**: Una *estructura uniforme* sobre un conjunto X está constituida por la dación de un conjunto $\mathfrak{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisface los axiomas siguientes:
>
> (F_I) Todo subconjunto de $X \times X$ que contiene un conjunto de $\mathfrak{U}$ pertenece a $\mathfrak{U}$
>
> (F_{II}) Toda intersección finita de conjuntos de $\mathfrak{U}$ pertenece a $\mathfrak{U}$
>
> (U_I) Todo conjunto de $\mathfrak{U}$ contiene la diagonal Δ.

(U_{II}) La relación $V \in \mathfrak{U}$ implica $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(U_{III}) Cualquiera que sea $V \in \mathfrak{U}$, existe $W \in \mathfrak{U}$ tal que $W \circ W \subseteq V$.

Los conjuntos de $\mathfrak{U}$ son los *entornos* de la estructura uniforme definida sobre X por $\mathfrak{U}$. Un *espacio uniforme* es un conjunto dotado de una *estructura uniforme*. Es importante tener presente que como los entornos son relaciones sobre X gozan de la siguiente estructura algebraica:

i) El conjunto $V^{-1} = \{(x, y) \in X \times X: (y, x) \in V\}$.

ii) El conjunto $V \circ W = VW = \{(x, y) \in X \times X: \exists z \in X$ tal que $(x, z) \in W$ y $(z, y) \in V\}$.

iii) En adelante se escribe V^2 en lugar de $V \circ V$. En términos generales, para todo $n > 1$ y todo conjunto V de X, se tiene que $V^n = V^{n-1} \circ V = V \circ V^{n-1}$.

Si V es un entorno de una estructura uniforme sobre X, decir que $(x, y) \in V$ equivale a decir que "x y y son vecinos de orden V". Efectivamente estas propiedades permiten caracterizar cuándo dos puntos x, y de X son "vecinos" o "cercanos" dos a dos.

La propiedad (F_I) afirma que si un conjunto U de $X \times X$ contiene un entorno, entonces U es un entorno. La propiedad (F_{II}) garantiza que si existen puntos U-cercanos y puntos V-cercanos, existen puntos U-cercanos y V-cercanos a la vez. Es decir, puntos $(U \cap V)$-cercanos. Las otras tres son cercanas a las propiedades de la noción de distancia. Es importante tener presente que la diagonal Δ está formada por todos los puntos $(x, x) \in X \times X$. Es decir, por la recta $y = x$.

Si $X \neq \emptyset$ entonces (U_I) garantiza que todo conjunto de U es distinto de vacío, porque al menos tiene la diagonal. Esto junto con (F_I) y (F_{II}) implica que el conjunto U constituye un filtro sobre $X \times X$. La propiedad (U_I) afirma que todos los puntos cercanos entre ellos, están cerca de la recta $y = x$. Es decir, que para cualquier entorno $V \in U$, todo punto x es V-cercano consigo mismo. En otras palabras, la relación de V-cercanía es *reflexiva*. (Esto generaliza la propiedad $d(x, x) = 0$, donde d es una métrica).

La propiedad (U_{II}) dice que si $(x, y) \in V$ entonces $(y, x) \in V$[11]. Es decir, si x es V-cercano de y entonces y es V-cercano de x. O sea que si x está cerca de y, y está cerca de x. Por tanto, la relación de V-cercanía es *simétrica*. (Esto generaliza la propiedad $d(x, y) = d(y, x)$ para cualquier métrica d).

La propiedad (U_{III}) garantiza que para todo entorno V existe un entorno W con la mitad de tamaño[12], de tal manera que al operar los puntos de W el resultado se encuentre en V. Obsérvese que de cierta manera se trata de la propiedad $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ aunque no se pueda expresar exactamente en términos de entornos; es un vestigio de la *desigualdad triangular*.

Estas tres propiedades constituyen una generalización de la noción de *métrica*. Esta relación de cercanía, al igual que en espacios topológicos, se establece en términos de conjuntos. Sólo existen conjuntos y sus propiedades. Esto es lo que permite el grado de generalidad requerido.

Ahora sí es posible definir formalmente los filtros de Cauchy. Para la convergencia uniforme es necesario determinar cuándo los puntos de un espacio están "muy cercanos" dos a dos. Esto se resuelve a través de la noción de conjunto "pequeño" de X: Un subconjunto A de X es un conjunto V-pequeño (V un entorno cualquiera de X) cuando dos puntos cualesquiera de A "son vecinos de orden V" es decir, cuando $A \times A \subseteq V$. Una vez tenemos los conjuntos V-pequeños, estamos en condiciones de definir un filtro de Cauchy.

Definición 2.8. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio uniforme X es un *filtro de Cauchy*, si para todo entorno V de X, existe un conjunto V-pequeño que pertenece a $\mathcal{F}$.

Es decir, un filtro de Cauchy es un filtro que contiene conjuntos arbitrariamente pequeños. Es importante notar que la definicion presentada por Weiss en las nociones preliminares sobre filtro de Cauchy es igual a la usada por Bourbaki sobre espacios uniformes; pero en vez de utilizar espacios uniformes, Weiss lleva la definición a la recta real. Los filtros de Cauchy que convergen al mismo límite se pueden bien ordenar por la relación de inclusión, en una cadena ascendente. El elemento mínimal de este conjunto se denomina *filtro mínimal de Cauchy*. Por tanto, el filtro minimal de Cauchy es el filtro menos fino de todos los filtros de Cauchy en la cadena de inclusión.

---

[11] Recuérdese que si V es un subconjunto de X × X, entonces $V^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}$

[12] Dados U, V en $X \times X$ se tiene que $U \circ V = \{(x, z) \in X \times X : \exists\, y \in X \text{ tal que } (x, y) \in V \wedge (y, z) \in U\}$.

Las consideraciones sobre filtros son más que suficientes para abordar el recorrido pedagógico en el que se desarrolla la construcción de los reales por Weiss.

2.1.5 Espacios completos

Como es ampliamente conocido, sobre un espacio uniforme X, un filtro de Cauchy no necesariamente tiene punto límite. De ahí la siguiente definición, que es central en nuestro estudio.

Definición 2.9: Se llama *espacio completo* a un espacio uniforme tal que todo filtro de Cauchy sobre este espacio converge.

Bourbaki, en el segundo capítulo de su libro de Topología completa un espacio uniforme cualquiera. Si en particular, ese espacio es un espacio formado por los números racionales, al completarse se obtienen los números reales. Eso es precisamente lo que hace la profesora Anacona en su tesis doctoral, la cual es una guía para la siguiente síntesis de dicha construcción.

2.2. La construcción de los reales al estilo de Bourbaki.

La construcción de Weiss tiene como uno de sus referentes principales la construcción de los reales realizada por Bourbaki. En sus propias palabras:

> (…) Bourbaki también proporciona una construcción general de dicha completación en términos de filtros minimales de Cauchy. Por lo tanto, siguiendo a Bourbaki y al mismo tiempo contra el espíritu de Bourbaki de no construir los reales, construimos los reales como filtros minimales de Cauchy de números racionales[13]. (Weiss 2016, p 1).

[13] (…) Bourbaki also provides a general construction of such a completion in terms of minimal Cauchy filters. Thus, following Bourbaki and at the same time going against Bourbaki's spirit of not constructing the reals, we do construct the reals as minimal Cauchy filters of rational numbers.

La construcción de los reales presentada por Bourbaki es la completación de espacios uniformes y de forma particular es la completación de $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme a través de filtros de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$. A continuación, se presenta una síntesis de la construcción, siguiendo la tesis de Anacona (2017).

En la construcción se parte de $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme; donde la convergencia se estudia a través de filtros de Cauchy y filtros minimales de Cauchy. Recuérdese que un filtro minimal de Cauchy es el filtro menos fino de todos los filtros de Cauchy que convergen al mismo límite. Puesto que para todo filtro de Cauchy existe un único filtro minimal menos fino, entonces el filtro minimal de Cauchy es *el* menos fino *para cada* uno de los filtros de Cauchy de la cadena ascendente. Por tanto, el filtro minimal de Cauchy "representa" a todos los filtros de Cauchy que tienen el mismo límite, independientemente de que el límite sea o no, un punto de $\mathbb{Q}$. De ahí que surja la consideración de formar el nuevo espacio con los filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, el cual se identifica con $\widehat{\mathbb{Q}}$ (Anacona 2017, p. 271).

Lo que sigue es demostrar que $\widehat{\mathbb{Q}}$ así constituido es un espacio completo. Para tal efecto, se debe verificar que todo filtro de Cauchy en $\widehat{\mathbb{Q}}$ converge en dicho espacio. Como en el nuevo espacio sólo hay filtros, lo primero que se requiere es definir una uniformidad para establecer lo que se entiende por filtros "cercanos" dos a dos. A partir de los entornos de la estructura uniforme de $\mathbb{Q}$ se establecen los entornos de $\widehat{\mathbb{Q}}$, del tal forma que dos filtros minimales de Cauchy son "cercanos" en $\widehat{\mathbb{Q}}$ si los límites a los cuales ellos convergen son "cercanos" en $\mathbb{Q}$.

Ahora, la estructura uniforme de $\widehat{\mathbb{Q}}$ induce una estructura topológica sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$ y se define una vecindad alrededor de un filtro minimal de Cauchy, como aquella formada por todos los filtros de Cauchy que están "cerca" del filtro minimal escogido. El conjunto de todas las vecindades constituye el filtro de vecindades alrededor del filtro minimal en esta topología.

La estrecha relación que existe entre $\mathbb{Q}$ y $\widehat{\mathbb{Q}}$ se formaliza a través de una función i: $\mathbb{Q} \to \widehat{\mathbb{Q}}$ que envía cada racional r en el filtro de vecindades alrededor de r. De esta forma, $i(\mathbb{Q})$ es el conjunto formado por los filtros de vecindades alrededor de cada número racional. Puesto que los filtros de vecindades alrededor de un punto son filtros minimales de Cauchy, se tiene que $i(\mathbb{Q}) \subseteq \widehat{\mathbb{Q}}$.

A través de esta función $i(\mathbb{Q})$ queda densamente distribuido en todo $\widehat{\mathbb{Q}}$. Esto significa que alrededor de cualquier filtro minimal de Cauchy en $\widehat{\mathbb{Q}}$ siempre se encontraran filtros de vecindades alrededor de racionales. En otras palabras, toda vecindad alrededor de un filtro minimal de Cauchy al intersectarse con $i(\mathbb{Q})$ es diferente de vacío.

Para demostrar que $\widehat{\mathbb{Q}}$ es completo, se debe demostrar que todo filtro de Cauchy converge en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Se trata de un ir y venir entre $\widehat{\mathbb{Q}}$ e $i(\mathbb{Q})$. Se parte de un filtro de Cauchy sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$. La traza del filtro sobre $i(\mathbb{Q})$, que es la intersección de cada uno de los conjuntos del filtro con $i(\mathbb{Q})$, es también un filtro sobre $\mathbb{Q}$, por ser $i(\mathbb{Q})$ es denso en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Este filtro es a su vez un filtro de Cauchy, por ser $i(\mathbb{Q})$ un espacio uniforme; y a través de ciertas propiedades de los filtros se prueba que este filtro converge en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Además, este filtro genera un filtro (extendido) sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$ que es más fino que el filtro inicial de Cauchy y también converge en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Pero si este nuevo filtro converge, el filtro inicial que es menos fino también converge. Por tanto, $\widehat{\mathbb{Q}}$ es completo (Anacona 2017, p. 272).

Capítulo 3
Construcción de los reales por Weiss

Desde el principio del artículo *The reals as rational Cauchy filters* bajo el cual se hace este trabajo investigativo, Weiss hace un énfasis en cuanto a la importancia de su modelo de construcción de los reales, como un competidor en trascendencia histórica y pedagógica con las construcciones de los números reales de Cantor y Dedekind, llamando la atención notablemente en la importancia que representa la construcción de Bachmann para la presentación de su enfoque y cómo ésta construcción no ha gozado de la popularidad de las anteriores mencionadas.

En la sección introductoria del artículo, Weiss se inspira en dos formas de construir los números reales en las cuales estará basada su construcción, uno de los cuales parte del hecho de que Bourbaki, al completar un espacio uniforme de forma general evita, el uso del tecnicismo de una construcción en particular. En su lugar se usan propiedades universales de completación, Weiss propone presentar la consistencia de los axiomas de campo ordenado completo desde la perspectiva de Bourbaki haciendo uso de los filtros minimales de Cauchy.

La otra construcción que se tiene en cuenta es la construcción de Bachmann, en la cual él presenta notables ventajas técnicas que se evidencian en ambas construcciones y aquellas dificultades técnicas asociadas a la suma y el producto en la construcción de Bachmann, los cuales son abordadas mediante la presentación del lema 3.26 (Weiss 2016, p.24). Weiss aporta una definición explícita de orden entre filtros minimales de Cauchy, es decir, entre números reales definidos por filtros de Cauchy. La variante de Weiss busca que la construcción de Bachmann adquiera un nivel de popularidad y elegancia, igual a la de Cantor y Dedekind[14].

[14] We thus hope to place Bachmann's construction, through the variant we present, as a competitor of potentially equal popularity as either Cantor's construction or Dedekind's construction (Weiss 2016, p.2).

3.1 Preliminares a la construcción

Para hacer la respectiva construcción de los reales, Weiss propone un grupo de elementos básicos bajo los cuales va a erigir su estructura conceptual, se recopilan algunos datos de fondo sobre intervalos y filtros que se utilizan en la construcción de los números reales en la siguiente sección. Se establece la convención para el resto de este trabajo de que los símbolos $\delta, \eta, \varepsilon$ (como en $\varepsilon > 0$) representan números racionales.

Observación: como se ha visto las sucesiones pueden ser representadas sobre la recta real y las sucesiones están asociadas a un filtro elemental, por tanto, tener presente algunas propiedades básicas de la operatividad entre intervalos es imperativo en todas las demostraciones propuestas por Weiss.

3.1.1 La geometría de intervalos.

Se enumeran las propiedades geométricas elementales y verificables de los intervalos de $\mathbb{Q}$ (que también se aplican a los intervalos en $\mathbb{R}$). Por intervalo I se refiere a un subconjunto de $\mathbb{Q}$ de la forma $(a, b) = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$. La longitud del intervalo $I = (a, b)$ es $b - a$. Dado $p \in \mathbb{Q}$ y un racional $\varepsilon > 0$ se denota el intervalo $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ por p_ε. Las operaciones de suma y multiplicación de los números racionales se extienden a las operaciones de suma y multiplicación de intervalos. Más detalladamente, dados los intervalos I y J se define que (Weiss 2016, p.16):

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

y

$$I \cdot J = IJ = \{xy \mid x \in I, y \in J\}$$

Nos interesa el efecto geométrico de estas operaciones, algunas de las cuales se enumeran, sin prueba, a continuación.

Proposición 3.1 *Las siguientes proposiciones son de fácil verificación*

i. La suma de dos intervalos es de nuevo un intervalo. De hecho, $p_\varepsilon + q_\delta = (p+q)_{\varepsilon+\delta}$, para todo $p, q \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ y $\delta > 0$.

ii. El producto entre dos intervalos es de nuevo otro intervalo

iii. Dado cualquier $p \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que $p_\varepsilon \subseteq y_{2\varepsilon}$ para todo $y \in p_\varepsilon$.

iv. Dado un intervalo q_ε con $q - \varepsilon > 0$ (respectivamente $q + \varepsilon < 0$) el conjunto $\frac{1}{q_\varepsilon} = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in q_\varepsilon\right\}$ es de nuevo un intervalo cuya longitud es $\frac{2\varepsilon}{q^2-\varepsilon^2}$ (Weiss 2016, p.17).

Si consideramos al intervalo:

$I = (a,b) = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ y $J = (c,d) = \{y \in \mathbb{Q} \mid c < y < d\}$ donde:

$$a, b, c, d \in \mathbb{Q} \text{ con } a < b \text{ y } c < d.$$

El intervalo resultante de la suma $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ es:

$$(min\{a+c, a+d, b+c, b+d\}, max\{a+c, a+d, b+c, b+d\})$$

De manera similar en la multiplicación $I \cdot J = IJ = \{xy \mid x \in I, y \in J\}$ el intervalo resultante es $(min\{ac, ad, bc, bd\}, max\{ac, ad, bc, bd\})$.

A continuación, se va a verificar mediante una gráfica (*figura 1*) las condiciones que se observan en la tercera proposición de los intervalos, donde dado un p_ε éste es subconjunto propio de $y_{2\varepsilon}$, en donde y es cualquier elemento que pertenece a p_ε[15].

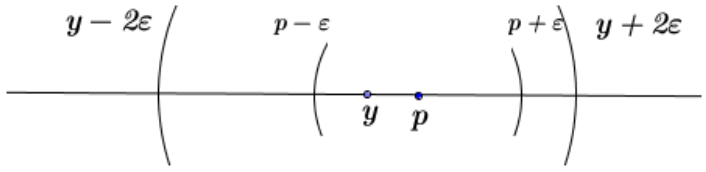


Figura 1

[15] Un registro puede permitir efectuar ciertos tratamientos de una manera mucho más económica y más potente que otro registro (…) De manera más general, el cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación (Duval 2004, p. 62)

Si observamos la cuarta proposición, se establece como primera medida la operatividad del intervalo en los segmentos positivos, q_ε con $q-\varepsilon>0$. El conjunto resultante $\frac{1}{q_\varepsilon}=\left\{\frac{1}{x}\mid x\in q_\varepsilon\right\}$ es un intervalo cuyos valores están $0<y\leq 1$, se puede observar que los extremos del intervalo original $(q-\varepsilon,q+\varepsilon)$ se invierten al aplicar la división a cada elemento de q_ε por lo cual la longitud del nuevo intervalo $\left(\frac{1}{q+\varepsilon},\frac{1}{q-\varepsilon}\right)$ está dado por $\frac{2\varepsilon}{q^2-\varepsilon^2}$, de forma análoga se obtienen los resultados para q_ε con $q+\varepsilon<0$.

Se hace énfasis en reconocer intuitivamente algunas propiedades de los intervalos, dado el enfoque que el autor da a su construcción. Esto se verá de forma más detallada cuando se aborde el análisis del orden dado por Weiss sobre los números reales como filtros minimales de Cauchy y los conjuntos que componen estos mismos. Otros conceptos primarios relacionados con los filtros, son aquellos de una base de filtro, filtro de Cauchy, filtro generado por una base, filtro redondo (*round*) y filtro mínimal de Cauchy. Se debe establecer que en la presente construcción trabaja continuamente con el concepto de filtro *propio,* es decir, aquel que no contiene al conjunto vacío.

Se planteará de manera sintética algunas definiciones y proposiciones enmarcadas en el enfoque de Weiss. Algunas definiciones presentadas en el capítulo 2 serán omitidas:

- Filtro de Cauchy: para todo racional $\varepsilon>0$ existe un número racional $q\in\mathbb{Q}$ con $q_\varepsilon\in\mathcal{F}$. Otra alternativa de formulación de esta definición es la siguiente: Para todo racional $\varepsilon>0$ existe un intervalo racional $I\in\mathcal{F}$ cuya longitud no excede ε.

Observación: se considera la sucesión $1/n$ cuyo límite de convergencia es 0, a partir de la definición dada por Weiss de filtro Cauchy es posible encontrar para todo $\varepsilon>0$ un q_ε que contiene a 0, por tanto éste intervalo pertenece a las vecindades de 0 y a su vez contiene la mayor parte de los elementos de la sucesión, los cuales generan un filtro asociado, que a su vez refina el filtro de las vecindades de 0. por lo tanto $q_\varepsilon\in\mathcal{F}_{\{1/n\}}$.

- Base de Filtro de Cauchy: $\mathfrak{B}$ es una base que satisface la condición de Cauchy si para cada racional $\varepsilon>0$ existe $q\in\mathbb{Q}$ y $B\in\mathfrak{B}$ con $B\subseteq q_\varepsilon$. Si $\mathfrak{B}$ es *una* base de filtro Cauchy, entonces $\langle\mathfrak{B}\rangle$ es un filtro Cauchy.

- Filtro Redondo (*Round*): si para $(\forall F \in \mathcal{F})$ $(\exists \varepsilon > 0)$ con $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que para $\forall q \in \mathbb{Q}$ si $q_\varepsilon \in \mathcal{F}$, entonces $q_\varepsilon \subseteq F$. De manera equivalente, $\mathcal{F}$ es redondo si para cada $F \in \mathcal{F}$, existe un número racional $\varepsilon > 0$ tal que cualquier intervalo $I \in \mathcal{F}$ de longitud que no exceda ε satisface $I \subseteq F$ [16]

Observación: si $\langle X, \tau \rangle$ las vecindades $\mathcal{V}_x$ de un punto x es un filtro redondo, es de fácil verificación mediante las propiedades de vecindades que para todo conjunto $V \in \mathcal{V}_x$ es posible encontrar $U \in \mathcal{V}_x$ con $U \subseteq V$.

- Base de *Filtro Redondo*: si $(\forall B \in \mathfrak{B})$ $(\exists \varepsilon > 0)$ tal que si $B' \subseteq q_\varepsilon$ para algún $B' \in \mathfrak{B}$, entonces $q_\varepsilon \subseteq B$.

- Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, se dice que $\mathcal{G}$ *refina* $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Es una observación trivial de que si $\mathcal{G}$ refina $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es Cauchy, entonces $\mathcal{G}$ es de Cauchy también.

- Filtro *mínimal de Cauchy*: Es un filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ tal que si $\mathcal{G}$ es cualquier otro filtro de Cauchy que cumple $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

- Si $\mathfrak{B}$ es una *Base de Filtro redondo*, entonces $\langle \mathfrak{B} \rangle$ es redondo.

Ejemplo 1: El filtro impropio $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ es un filtro de Cauchy, mas no es redondo ya que, obviamente, la condición de redondez para $F = \emptyset$ no se cumple. Además, si se toma un número racional $q \in \mathbb{Q}$ y se considera la colección $\{F \subseteq \mathbb{Q} \mid q \in F\}$ (que es el filtro generado por la base de filtro $\{\{q\}\}$) y la colección $\{F \subseteq \mathbb{Q} \mid q_\varepsilon \subseteq F, \varepsilon > 0\}$ (que es el filtro generado por la base del filtro $\{q_\varepsilon \mid \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$). Ambos filtros son filtros de Cauchy, pero al aplicar la definición expuesta por Weiss, se puede verificar que este último es redondo. Mientras que el primero no lo es. De hecho, el segundo es el único filtro mínimal de Cauchy contenido en el primero[17].

---

[16] A filter $\mathcal{F}$ is round if for every $F \in \mathcal{F}$ there exists a rational number $\varepsilon > 0$ such that for all $q \in \mathbb{Q}$ if $q_\varepsilon \in \mathcal{F}$, then $q_\varepsilon \subseteq F$. Equivalently, $\mathcal{F}$ is round if for every $F \in \mathcal{F}$ there exists a rational number $\varepsilon > 0$ such that any interval $I \in \mathcal{F}$ of length not exceeding ε satisfies$I \subseteq F$ (Weiss 2016, p. 18).

The concept that has proved itself most useful in uniform space theory is that of *round* filter (equivalently, in that context, minimal Cauchy filter) (D. Harris 1971, p.7)

[17] Lemma: (a) every round filter is S-open. (b) if δ is a round filter and γ is a Cauchy filter, then either $\delta \subset \gamma$, or else δ and γ contain disjoint S-open members (Harris 1971, p.9).

Para hacer un acercamiento adecuado a los conceptos antes mencionados observemos estos dos casos particulares propuestos por el mismo Weiss. Sea el filtro $\mathcal{F}_1 = \{F \subseteq \mathbb{Q} \mid q \in F\}$ es el filtro de los todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que contienen el elemento q, es de Cauchy ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal $q_\varepsilon \in \mathcal{F}_1$, ya que q_ε en particular contiene a q y así $q_\varepsilon \in \mathcal{F}_1$; ahora este filtro no es redondo, por definición de filtro redondo se entiende que $(\forall F \in \mathcal{F})\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall q \in \mathbb{Q})$ si $(q_\varepsilon \in \mathcal{F})$ entonces $(q_\varepsilon \subseteq F)$. Si se considera a q en la frontera de un conjunto F, tal como se muestra en la figura 2, no existe ε adecuado que garantice la contenencia de q_ε a todo $F \in \mathcal{F}_1$, ya que existirían elementos entre $q - \varepsilon < q$ o $q + \varepsilon > q$ que no pertenecerían a algún $F \in \mathcal{F}_1$, lo cual verifica que el filtro $\mathcal{F}_1$ no es redondo. Obsérvese además que si $F = \{q\}$, no existe ningún $q_\varepsilon \subseteq F$.

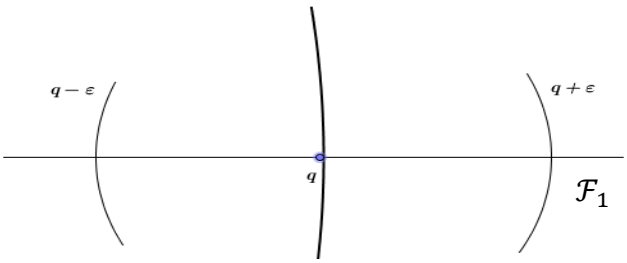


Figura 2.

Ahora si observamos otro filtro $\mathcal{F}_2 = \{F \subseteq \mathbb{Q} \mid q_\varepsilon \subseteq F, \varepsilon > 0\}$, que es el filtro generado por la familia de conjuntos de todos los intervalos formados por los diferentes $\varepsilon > 0$ centrados en q como se muestra en la figura 3, se notará que este filtro en particular es de Cauchy ya que $\forall \varepsilon > 0$ de manera obvia $q_\varepsilon \in \mathcal{F}_2$ de manera similar se verifica que este filtro es redondo ya que $\forall F \in \mathcal{F}_2$ como $q_\varepsilon \in \mathcal{F}_2$ entonces $q_\varepsilon \subseteq F$. Es decir $(\exists \varepsilon > 0)$ tal que q_ε es subconjunto de todos los $F \in \mathcal{F}_2$. Obsérvese la figura correspondiente a una base de filtro redondo $\mathcal{F}_2$.

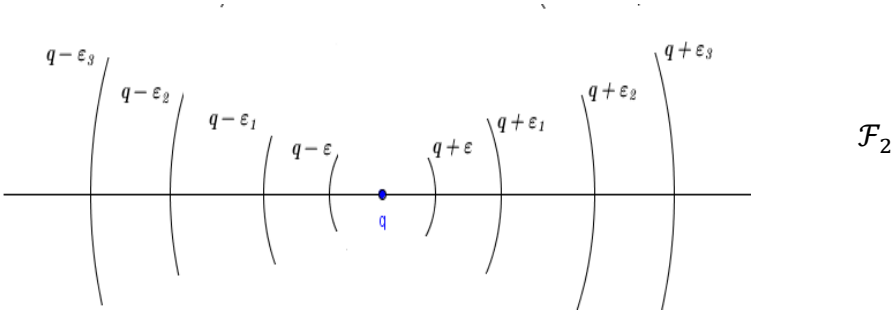


Figura 3.

Veremos que no es una coincidencia que la conjunción de las condiciones Cauchy y de redondez equivalgan a un filtro mínimal de Cauchy. De hecho, podemos obtener inmediatamente el siguiente resultado (Weiss 2016, p.18).

Proposición 3.2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy y redondo, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro mínimal de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, es decir $\mathcal{F}$ refina a $\mathcal{G}$. Necesitamos mostrar que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, por lo tanto, sea $F \in \mathcal{F}$ arbitrario. Como $\mathcal{F}$ es redondo, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $q_\varepsilon \in \mathcal{F}$, entonces $q_\varepsilon \subseteq F$. Ahora, ya que $\mathcal{G}$ es Cauchy, existe $q \in \mathbb{Q}$ con $q_\varepsilon \in \mathcal{G}$, y así $q_\varepsilon \in \mathcal{F}$. Concluimos que $q_\varepsilon \subseteq F$ y así, por la segunda condición que define un filtro, se tiene que $F \in \mathcal{G}$. ■ *(Weiss 2016,* P. *18).*

3.1.2 Redondificación de intervalos

Un filtro propio que no sea redondo puede producir un filtro redondo mediante un proceso que amplifica la frontera de los intervalos. Los detalles son los siguientes: dado $\varepsilon > 0$ racional y un subconjunto $F \subseteq \mathbb{Q}$, sea $F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x - y| < \varepsilon, y \in F\}$. En la figura 4 se muestra el resultado geométrico de este proceso.

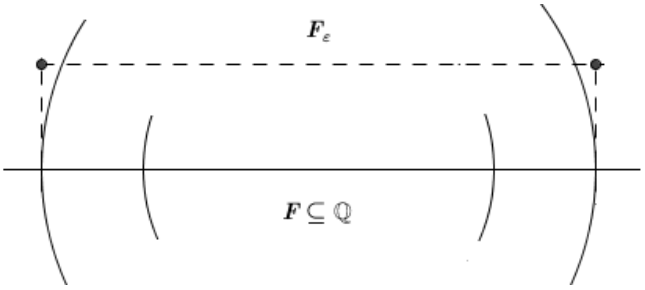


Figura 4.

Como se observa el proceso de *redondificación* permite tomar un conjunto y amplificar de forma simétrica su frontera, esto es importante ya que permite generar una base de filtro redondo.

Ahora, a partir del filtro propio $\mathcal{F}$, se verifica que $\{F_\varepsilon \mid F \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0\}$ es una base de filtro, El filtro generado por esa base de filtro se denota por $\mathcal{F}_0$ y se denomina redondificación de $\mathcal{F}$. Se verifica que $F \subseteq F_\varepsilon$ y $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ *(Weiss, 2016,* p. 18*).*

Si consideramos un elemento $F \in \mathcal{F}$ tal que $q \in \mathbb{Q}$ sea frontera de F se puede verificar que no es posible encontrar algún δ adecuado que permita que $q_\delta \subseteq F$. Por lo cual al hacer el proceso de *Redondificación* se logra aumentar la frontera de todos los $F \in \mathcal{F}$ permitiendo generar una base de filtro redondo, y así el filtro generado por esta base es un filtro redondo, ya bajo esta modificación se logra cumplir que $q_\delta \subseteq F_\varepsilon$ para todo $F_\varepsilon \in \mathcal{F}_0$.

La relación entre el *filtro de Cauchy y filtro Redondo* es de carácter importantísimo ya que ella permite formular la definición de número real como *filtro mínimal de Cauchy*, desde el enfoque de Weiss. Además en los casos en los cuales se disponga de un filtro propio (que no contiene a $\emptyset$), que sea de Cauchy y no redondo, es posible aplicar el proceso de redondificación el cual permite obtener una base que genera un filtro redondo, terminando por obtener un *filtro mínimal de Cauchy*.

Proposición 3.3. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro propio, entonces $\mathcal{F}_0$ es un filtro redondo.*

Demostración. Sea $G \in \mathcal{F}_0$, es decir, $G \supseteq F_\varepsilon$ para algún $F \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$. Ahora es suficiente encontrar un $\delta > 0$ tal que si $q_\delta \in \mathcal{F}_0$, entonces $q_\delta \subseteq F_\varepsilon$. Considere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, y supongamos $q_\delta \in \mathcal{F}_0$, es decir, $q_\delta \supseteq F'$ para algún $F' \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es propio, se deduce que $F \cap F' \neq \emptyset$. Usando cualquier elemento $y \in F \cap F'$ ahora es elemental que $q_\delta \subseteq F_\varepsilon$. ■

Proposición 3.4. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, entonces $\mathcal{F}_0$ es también Cauchy.*

Demostración. Basta con demostrar que $\mathfrak{B} = \{F_\varepsilon \mid F \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0\}$ es una base de filtro Cauchy, y así se debe dar $\varepsilon > 0$. Dado que $\mathcal{F}$ es Cauchy, existe $q \in \mathbb{Q}$ con $q_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{F}$. Entonces $q_\varepsilon = \left(q_{\frac{\varepsilon}{2}}\right)_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathfrak{B}$ la prueba está completa (Weiss, 2016, p.18).■

Proposición 3.5. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro mínimal de Cauchy, entonces $\mathcal{F}$ es redondo y $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro mínimal de Cauchy y $\mathcal{F}$ es propio, por lo tanto, el filtro F_0 es redondo y de Cauchy. Pero $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, así que la minimalidad de $\mathcal{F}$ implica $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, es un filtro redondo.■

Enfatizamos así que acabamos de establecer que un filtro es mínimal de Cauchy si, y solo si, es Cauchy y redondo (Weiss, 2016, p.19).

Teorema 3.6. Si *$\mathcal{F}$ es un filtro propio de Cauchy, entonces $\mathcal{F}_0$ es el único filtro mínimal de Cauchy contenido en $\mathcal{F}$.*[18]

Demostración. Dado que $\mathcal{F}$ es filtro propio y de Cauchy se deduce que $\mathcal{F}_0$ es tanto Cauchy como redondo, y por lo tanto es un filtro mínimal de Cauchy. Supongamos ahora que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es algún filtro mínimal de Cauchy. La aplicación del proceso de redondeo, que preserva claramente la inclusión de conjuntos, produce $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{F}_0$. Pero $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ (dado que $\mathcal{G}$ ya es un filtro mínimal de Cauchy) y la condición de minimalidad ahora implica que $\mathcal{G} = \mathcal{F}_0$, y por lo tanto $\mathcal{F}_0$ es el único filtro Cauchy mínimo contenido en $\mathcal{F}$.■

Los preliminares hasta ahora son presentados de una forma sencilla y estándar, tal como lo menciona Weiss (2016, p. 19), para hacer una observación más detallada desde la perspectiva de categorías es oportuno ver el articulo informativo *Completion of continuity spaces with uniformly vanishing asymmetry* (Chand, Weiss, 2015) donde se pueden observar las sutilezas de estas nociones preliminares en la construcción de los reales de Weiss (Weiss, 2016, p.19).

---

[18] (…) it is a consequence of lemma that a filter γ can contain only one round Cauchy filter, its *round Cauchy kernel,* which will be written as $S(\gamma)$ (Harris 1971, p.10).

2.2 Los números reales por Weiss.

A continuación, se presenta la definición de Weiss de los números reales y los exhiben con detalle las características principales de este conjunto, entre ellas, el orden, la densidad y la completitud.

3.2.1 Definición

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los filtros racionales minimales de Cauchy. Los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman *números reales* y normalmente se denotan como a, b, c. En particular, cada número real a es una colección de subconjuntos no vacíos de números racionales, y normalmente nos referiremos a estos conjuntos escribiendo $A \in a$, mientras que los elementos típicos de A se denotarán por $\alpha \in A$.

Un número real a es necesariamente un filtro propio, y por lo tanto $\emptyset \notin a$ y por consiguiente $A \cap A' \neq \emptyset$ para todo $A, A' \in a$. Además, si $A \in a$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ y $\epsilon > 0$ con $q_\epsilon \in a$ y $q_\epsilon \subseteq A$. De hecho, como los filtros minimales de Cauchy coinciden con los filtros de Cauchy y con los redondos, a debe ser redondo y así existe $\epsilon > 0$ tal que $q_\epsilon \in a$ implica $q_\epsilon \subseteq A$, para todos $q \in \mathbb{Q}$. Dado que a también es de Cauchy, al menos existe un $q \in \mathbb{Q}$ con $q_\epsilon \in a$ (Weiss, 2016, p. 19).

3.2.2 Orden en $\mathbb{R}$

En la presentación de los números reales es vital establecer un acercamiento claro a las condiciones que van a regir el ordenamiento de las colecciones y conjuntos involucrados en cada una de las demostraciones posteriores, dado el enfoque geométrico que Weiss pretende mostrar en la construcción de los reales, se puede observar intuitivamente la relaciones entre los conjuntos (intervalos de racionales) representados en la recta real. El orden habitual de los racionales se extiende de dos formas al conjunto $\wp(\mathbb{Q})$ de todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}$, es decir, el orden se plantea con cuantificadores universales y existenciales:

Dados los subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ se tiene que:

$$A \leq_\forall B \quad \text{si} \quad \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B\colon\ \alpha \leq \beta, \text{ es decir:}$$

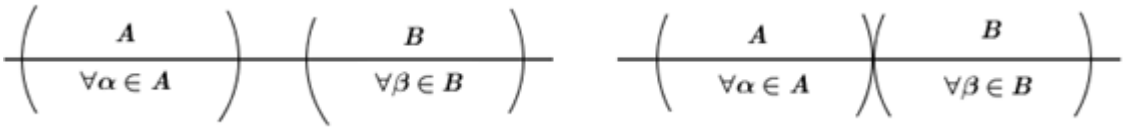


Figura 5.

A partir de la figura 5, se tienen dos intervalos A y B, se dice que $A \leq_{\forall} B$ si todos los elementos de A son menores que todos los elementos de B, a lo más podría existir un punto en la frontera que pertenecería a A y a la vez a B luego $\alpha = \beta$.

Análogamente, se escribe $A \leq_{\exists} B$ si $\exists \alpha \in A, \beta \in B$: $\alpha \leq \beta$, es decir:



Figura 6.

Se puede analizar de la figura 6 que al tener dos intervalos A y B, se dice que $A \leq_{\exists} B$ si existe un elemento de A que es menor que algún elemento de B, en este caso los intervalos pueden ser no disyuntos y aun así cumplir con dicha propiedad, por la definición de cuantificador existencial. Es claro que los elementos α y β si pertenecen a la intersección de los dos intervalos en dicha intersección es posible encontrar elementos que cumplan la condición $\alpha \leq \beta$.

Se conservan las propiedades y características usuales de las relaciones de orden y de los cuantificadores, por ejemplo, la negación de $A <_{\exists} B$ es $B \geq_{\forall} A$.

Cabe tener en cuenta que uno de los principales aportes de Weiss en su enfoque de la construcción de los reales es el de poder presentar un ordenamiento explícito sobre la recta real a partir de dos números reales dados, verificando las condiciones de filtro minimal de Cauchy y las

condiciones de orden entre los intervalos que compones los filtros. Esto se verá de forma más clara y sustancial a verificarse lema 3.8 sobre el orden parcial de filtros, teorema 3.9 igualdad de filtros y teorema 3.11 orden total de los filtros.

Proposición 3.7. *La relación* $<_\forall$ *es transitiva en* $\wp(\mathbb{Q})\backslash\{\emptyset\}$. *Más detalladamente,* $A <_\forall B <_\forall C$ *implica* $A <_\forall C$, *para todos los* $A, B, C \subseteq \mathbb{Q}$ *no vacíos.*

Cada una de las relaciones $\leq_\forall$ y $\leq_\exists$ se extiende de manera similar, tanto el universal como el existencial, a $\wp(\wp(\mathbb{Q}))$. Si se tienen dos colecciones $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \wp(\mathbb{Q})$ que satisfacen que: $\mathcal{G} \leq_{\forall\exists} \mathcal{H}$ Si $\forall G \in \mathcal{G}, \forall H \in \mathcal{H} : G \leq_\exists H$.

Esto implica que para todo par de conjuntos H y G que pertenecen a las colecciones $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ respectivamente se pueden encontrar elementos $g \in G$ y $h \in H$, tales que cumplan la condición de que $g \leq h$. Es de notar que los conjuntos involucrados pueden ser disjuntos o no *(figura 6).*

De manera similar si:

$\mathcal{G} \leq_{\exists\forall} \mathcal{H}$ Si $\exists G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}: G \leq_\forall H$.

En la colección $\mathcal{G}$ existen conjuntos que cumplen con la condición de ser disjuntos con algunos conjuntos de la colección $\mathcal{H}$, dichos conjuntos son los $G \in \mathcal{G}$ y $H \in \mathcal{H}$, luego todos los elementos que cumplen la condición anterior son todos los $g \in G$ y $h \in H$, tal que todos los elementos que pertenecen a G son menores a todos los elementos que pertenecen a H (*Figura 5).*

El ordenamiento evidentemente se puede extender aún más en los racionales a familias de racionales encajados cada vez más difíciles, en la presente construcción basta con este nivel dos de ordenamiento anteriormente indicado. Nótese que la intersección de los filtros es siempre un filtro, pero la intersección de los filtros de Cauchy no es necesariamente un filtro de Cauchy (Weiss 2016, p. 20).

Lema 3.8. *La relación* $\leq_{\forall\exists}$ *en* $\mathbb{R}$ *es antisimétrica.*

Demostración: Suponga que $a \leq_{\forall\exists} b$ y $b \leq_{\forall\exists} a$, y considere el filtro $a \cap b$. Se busca demostrar que $a \cap b$ es en realidad un filtro de Cauchy, como a y b son filtros minimales de

Cauchy, se seguirá que $a = a \cap b = b$, y con ello el resultado, dado que un filtro minimal de Cauchy es único. Dado que $\varepsilon > 0$ y como a y b son de Cauchy, existen $p, q \in \mathbb{Q}$, de manera que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \in a$ y $q_{\frac{\varepsilon}{2}} \in b$ para $a \leq_{\forall\exists} b$ se tiene que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq q_{\frac{\varepsilon}{2}}$ obsérvese la figura 7. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p < q$. Ahora desde $b \leq_{\forall\exists} a$ se deduce que $q_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq_{\exists} p_{\frac{\varepsilon}{2}}$ y así (recuérdese que $p < q$) como ambas desigualdades se cumplen implica que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap q_{\frac{\varepsilon}{2}} \neq \emptyset$, así podemos encontrar $r \in p_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap q_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Ahora se puede verificar como se muestra en la figura 7, que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq r_\varepsilon$ para todo $r \in p_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap q_{\frac{\varepsilon}{2}}$, y por lo tanto $r_\varepsilon \in a$. De manera similar, $r_\varepsilon \in b$ y podemos concluir, como se pretendía, que $a \cap b$ es de Cauchy (Weiss, 2016, p. 20). ■

La gráfica presenta las condiciones requeridas para hacer visualizar la demostración.

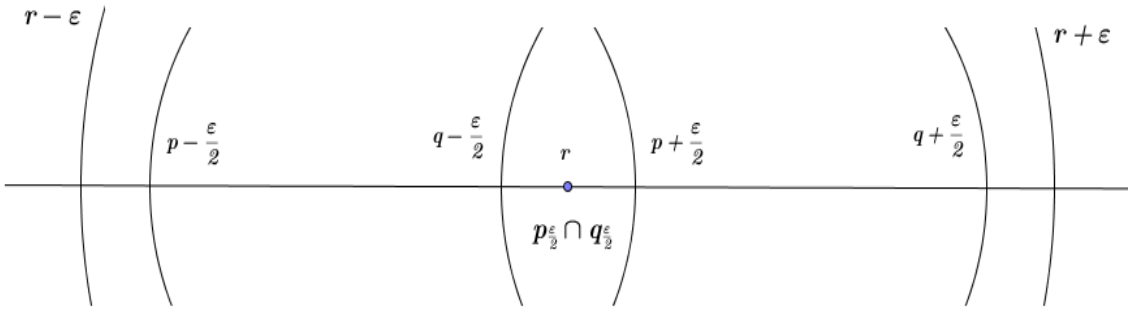


Figura 7.

Teorema 3.9. *Dos números reales a y b son iguales si, y solo si, $A \cap B \neq \emptyset$ para todos $A \in a$ y $B \in b$.*

Demostración. Si $a = b$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$ para todos $A, B \in a$ simplemente porque a es un filtro propio. Por otro lado, si $A \cap B \neq \emptyset$ para todos $A \in a$ y $B \in b$, entonces cualquier $x \in A \cap B$ demuestra que $A \leq_{\exists} B$ y $B \leq_{\exists} A$, ya que los conjuntos son los mismos en ambos números reales a y b, implica que la intersección $A \cap B$ es igual A o igual B por cual se puede establecer una relación de orden entre $x \in A \cap B$ encontrando elementos tal que cumplan simultáneamente $A \leq_{\exists} B$ y $B \leq_{\exists} A$. En consecuencia, $a \leq_{\forall\exists} b$ y $b \leq_{\forall\exists} a$ luego $a = b$ por lema 3.8 (Weiss 2016, p. 20). ■

Observación: es relevante notar que, si cualquier par de números reales permiten una comparación mediante una relación de orden, se verifica que si al menos un par de elementos de a y b correspondientemente son disjuntos entonces $a \neq b$ no cumpliéndose lo demostrado en el teorema 3.9 es decir no se cumple $a \leq_{\forall\exists} b$ y $b \leq_{\forall\exists} a$. El gran aporte de la construcción de Weiss, es exhibir un ordenamiento explícito de los reales, mediante las relaciones $a = b$, $a \leq_{\forall\exists} b$ y $b \leq_{\forall\exists} a$.

Definición 3.10. Para los números reales $a, b \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ si $x <_{\exists\forall} y$.

Aquí Weiss, establece un convencionalismo de notación, en adelante $x < y$ representa implícitamente $x <_{\exists\forall} y$ es de notar también que en los casos $x \leq y$ implica $x \leq_{\forall\exists} y$. Excepto que algún caso en particular se requiera hacer otra notación.

Teorema 3.11. $(\mathbb{R}, <)$ *Es un orden total.*

La *relación de orden* establece el cumplimiento de las siguientes propiedades (J. Munkres, 2002. p. 26) (excluida la asimetría)

1. No reflexividad, ningún $a \in \mathbb{R}$ verifica la relación $a < a$.
2. Asimetría, si $a < b$ entonces $b \not< a$.
3. Transitividad, si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
4. Comparabilidad, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq b$, $a < b$ o $b < a$.

1. Demostración asumimos $a <_{\exists\forall} a$ implica que $A <_{\forall} A'$, para algún $A, A' \in a$ como a es un filtro propio $A \cap A' \neq \emptyset$ esto contradice $A <_{\forall} A'$.

2. Suponemos $a <_{\exists\forall} b$ y $b <_{\exists\forall} a$ entonces $A <_{\forall} B$ y $B' <_{\forall} A'$ para algunos $A, A' \in a$ y $B, B' \in b$, así $A <_{\forall} B \cap B' <_{\forall} A'$ como los filtros son propios la intersección de los elementos es diferente de vacío, luego por transitividad se tiene $A <_{\forall} A'$ que implica $a <_{\exists\forall} a$ que ya sabemos que es imposible.

3. Supongamos $a <_{\exists\forall} b <_{\exists\forall} c$. Luego, $A <_{\forall} B'$ y $B'' <_{\forall} C$ para algunos $A \in a, B', B'' \in b$, y $C \in c$, que son necesariamente no vacíos. Tomando $B = B' \cap B''$, que de nuevo no está vacío, se deduce que $A <_{\forall} B <_{\forall} C$ y por lo tanto la transitividad de $<_{\forall}$ en $\wp(\mathbb{Q})\backslash\{\emptyset\}$ implica que $A <_{\forall} C$, y así $a <_{\exists\forall} c$.

4. Si $a \neq b$, entonces $a < b$ *o* $b < a$ si se niega la proposición. Se concluye que $a \geq_{\forall\exists} b$ y $b \geq_{\forall\exists} a$, y por tanto $a = b$ aplicando el *lema 3.8*. ■

3.2.3 La incrustación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Weiss afirma que cada $q \in \mathbb{Q}$ da lugar a dos filtros, el *filtro principal máximo* denotado por $\langle q\rangle = \{S \subseteq Q | q \in S\}$ y el *filtro principal mínimo* denotado por $\iota(q) = \{S \subseteq \mathbb{Q} | q_\varepsilon \subseteq S, \varepsilon > 0\}$, luego $\iota(\mathbb{Q}) \subseteq \langle q\rangle$ y cada uno de ellos es un filtro de Cauchy.

Observación: se establece una función $\iota(q$)que permite partir del dominio de los racionales y generar una imagen de filtros minimales de Cauchy, es decir números reales. Falta verificar que condiciones permiten establecer la diferencia entre número real racional y número real irracional. Esto se formulará posteriormente en el lema 3.16.

Lema 3.12. *Para todos los números racionales q el filtro* $\iota(q)$ *es un número real*.

Demostración. Una forma de proceder es mostrar que $\iota(q) = \langle q\rangle_o$, la redondificación del filtro máximo $\langle q\rangle$. Otra forma de proceder y llegar a la misma conclusión es mostrar directamente que $\iota(q)$ es un filtro mínimal de Cauchy. Supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \iota(q)$ es un filtro de Cauchy y que $S \in \iota(q)$, es decir $q_\varepsilon \subseteq S$, para algunos $\varepsilon > 0$ y recordemos que $\iota(q)$ es un filtro de Cauchy. Nuestro objetivo es mostrar que $S \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es Cauchy, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{F}$, y, además $\mathcal{F} \subseteq \iota(q)$ esto implica que algunos conjuntos que componen a $\iota(q)$ pertenezcan a $\mathcal{F}$, por lo tanto $q \in p_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathcal{F}$. Ahora se sigue que $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq q_\varepsilon \subseteq S$, y que, como $\mathcal{F}$ es un filtro, $S \in \mathcal{F}$, tal como se requería. ■

Así Weiss obtiene una función $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Proposición 3.13. *La función* $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *es una incrustación de orden.*

Esto implica que si se tiene a $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p < q$ y $\varepsilon = \frac{q-p}{2}$ se observa que $p_\varepsilon <_\forall q_\varepsilon$ y como $p_\varepsilon \in \iota(p)$ y $q_\varepsilon \in \iota(q)$ concluimos que $\iota(p) <_{\exists\forall} \iota(q)$, de forma sintética $\iota(p) < \iota(q)$. El ordenamiento de los racionales a los reales se conserva en la función $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$**.**

El siguiente lema permite establecer una relación entre el número real racional $\iota(q)$ y la contenencia del elemento q en $\{\{q\}\}$. Argumento necesario en algunas demostraciones posteriores.

Lema 3.14. *Para todos* $q \in \mathbb{Q}$ *y* $a \in \mathbb{R}$

(1) $a < \iota(q)$ *si, y solo si,* $a <_{\exists\forall} \{\{q\}\}$

(2) $\iota(q) < a$ *si, y solo si,* $\{\{q\}\} <_{\exists\forall} a$

Demostración. En la dirección $\Rightarrow$ para la condición (1), ambos argumentos siguen exactamente el mismo patrón, es decir, si $a <_{\exists\forall} \iota(q)$, entonces $A <_\forall S$ para algunos $A \in a$ y $S \in \iota(q)$, pero luego desde $q \in S$ sigue que $A <_\forall \{q\}$, y por lo tanto $a <_{\exists\forall} \{\{q\}\}$ y así $a < \iota(q) \to a <_{\exists\forall} \{\{q\}\}$. Los argumentos en la otra dirección (2) también son similares entre sí. Ahora para mostrar $\Leftarrow$ en la condición (1). Supongamos que se mantiene $a <_{\exists\forall} \{\{q\}\}$ pero no se da $a <_{\exists\forall} \iota(q)$, es decir, $a = \iota(q)$ o $a > \iota(q)$. De $a <_{\exists\forall} \{\{q\}\}$ se deduce que existe $A \in a$ con $A <_\forall \{q\}$. Supongamos que $a > \iota(q)$ contiene, es decir $a >_{\exists\forall} \{\{q\}\}$. Entonces existe $A' \in a$ tal que $\{q\} <_\forall A'$. Considerando $A \cap A'$, que no es vacío dado que a es un filtro propio, tenemos $\{q\} <_\forall A \cap A' <_\forall \{q\}$, que es un absurdo. Supongamos ahora que $a = \iota(q)$. Pero entonces $q \in A$ y por lo tanto $A <_\forall \{q\}$ es imposible. Concluimos que $a <_{\exists\forall} \{\{q\}\} \to a < \iota(q)$. (Weiss 2016, p. 21) ■

Se cierra este aparte con la definición de número racional y de número irracional.

Definición 3.15. Un número real a es un *número real racional* si existe $q \in \mathbb{Q}$ con $a = \iota(q)$. Un número real que no es un número real racional se llama un *número real irracional*.

3.2.4 La noción de núcleo de filtro

Se da una caracterización interna de los números reales racionales. Para un filtro $\mathcal{F}$, la intersección $C(\mathcal{F}) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ de todos sus elementos se denomina *el núcleo* de $\mathcal{F}$. Se dice que el filtro $\mathcal{F}$ está libre si su *núcleo* es vacío; es decir, la intersección de todos los elementos de $\mathcal{F}$ es vacío en $\mathbb{Q}$. Es importante ver que se establece una caracterización para definir lo que es un número racional y uno irracional, además se evita pensar en la relación $\iota(q)$ con q está enmarcada solo en el ámbito de los racionales.

Lema 3.16. *Sea a un número real.*

- *a es un número real racional si, y solo si, su núcleo es un conjunto de un único elemento, y en ese caso $a = \iota(q)$ si, y solo si $C(a) = \{q\}$.*
- *a es un número real irracional si, y solo si, es un filtro libre (su núcleo está vacío).*

Demostración. En primer lugar, establecemos que el núcleo de cualquier filtro $\mathcal{F}$ de Cauchy está vacío o es un conjunto de un solo elemento. De hecho, supongamos que $p, q \in C(\mathcal{F})$ y $p < q$, y sea $\varepsilon = \frac{q-p}{2}$ ver la figura 8. Dado que $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe una $x \in \mathbb{Q}$ con $x_\varepsilon \in \mathcal{F}$. Dado que p y q están en el núcleo de $\mathcal{F}$, es decir $p, q \in C(\mathcal{F})$ por cual se debe cumplir por la condición inicial que $p, q \in x_\varepsilon$ pero por la elección del ε esto es imposible ya que ε depende de la longitud de p y q, ver figura 8 para visualizar la contradicción. Por lo tanto el núcleo de $\mathcal{F}$ es único.

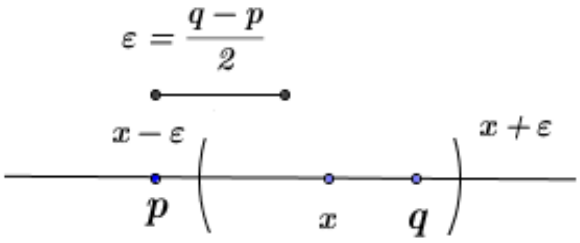


Figura 8.

Supongamos ahora que a es racional, es decir, $a = \iota(q)$ para algún $q \in \mathbb{Q}$. Es obvio a partir de la definición de $\iota(q)$ que $q \in C(\iota(q))$, y por lo tanto se cumple necesariamente $C(\iota(\ q)) = \{q\}$. A la inversa, si $C(a) = \{q\}$ para algún $q \in \mathbb{Q}$, entonces $q \in A \cap B$ para todo $A \in a$ y $B \in \iota(q)$. Del teorema 3.9 se deduce que $a = \iota(q)$ (Weiss 2016, p. 22). ■

La segunda condición del lema 3.16 es crucial para lograr identificar los números irracionales. Ya que si se consideran las intersecciones son arbitrarias de los elementos de un filtro mínimal de Cauchy, las intersecciones de intervalos de racionales deberían satisfacerse y dar un numero racional como en la primera condición del lema 3.16, pero si al hacer las intersecciones infinitas se encuentra que no hay elementos racionales, dicha intersección está vacía, luego su núcleo está vacío, por lo tanto es un filtro libre ya que no hay racionales que satisfagan la intersección, y no queda más que decir que dicho número es un número real irracional. Esto se entenderá o se hará más explícito mediante el establecimiento de la equivalencia, densidad, la propiedad Arquimediana y algunos resultados técnicos.

3.2.5 Encajonamiento de un real entre dos reales racionales

Para mostrar que siempre es posible encajonar un número real entre dos reales racionales, Weiss requiere de la siguiente proposición:

Proposición 3.17. *La equivalencia* $q_\varepsilon \in a \iff \iota(q\ -\varepsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$ *Se mantiene para todos los números reales a y los números racionales q y* $\varepsilon > 0$.

Demostración. Para demostrar que $q_\varepsilon \in a \implies \iota(q\ -\varepsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$. Si $q_{_\varepsilon} \in a$ entonces se sigue del Lema 3.16, el núcleo de un número real racional es un conjunto de un único elemento, y las desigualdades evidentes $\{q-\varepsilon\} <_\forall q_\varepsilon <_\forall \{q+\varepsilon\}$ se sigue que $\iota(q-\epsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$. A la inversa $q_\varepsilon \in a \Leftarrow \iota(q\ -\varepsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$, suponemos que $\iota(q-\varepsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$. Luego, nuevamente por el Lema 3.16, existen $A, A' \in a$ con $\{q-\varepsilon\} <_\forall A$ y $A' <_\forall \{q+\varepsilon\}$. Sea $A_0 = A \cap A'$ y luego $\{q-\varepsilon\} <_\forall A_0 <_\forall \{q+\varepsilon\}$, lo que implica que $A_0 \subseteq q_{_\varepsilon}$. Dado que $A_0 \in a$, se sigue que $q_{_\varepsilon} \in a$. ■

La formulación equivalente de este resultado, a tener en cuenta es que si $q_\varepsilon \notin a$ si, y solo si $a \leq \iota(q-\varepsilon)\ o\ a \geq \iota(q+\varepsilon)$ (Weiss 2016, p. 22).

Observación: En términos más intuitivos, Weiss afirma que es posible encajonar cualquier número real mediante la función $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es decir es posible encontrar racionales tan cercanos a cualquier número real tal que pueda ser encajonado por dos reales racionales.

Corolario 3.18. Para *todos* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$, *existe un número racional* q *y* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\iota(q-\varepsilon) < a < \iota\,(q+\varepsilon)$.

Demostración. Cada número real $a \in \mathbb{R}$ es un filtro de Cauchy, y por lo tanto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q_\varepsilon \in a$. ■

Nótese que se puede establecer a partir de un filtro de Cauchy la cercanía de un $q \in \mathbb{Q}$ con un número real a tanto como se quiera de tal manera que $|a-q| = 0$, además por medio de la función incrustación $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$**,** el $q_\varepsilon \in a$ adecuado y dado que a es un filtro de Cauchy, se puede encajonar un número real entre dos números reales racionales, dado que el núcleo los números $\iota(q-\varepsilon)$ y $\iota\,(q+\varepsilon)$ no está vacío (definición 3.15). Nótese la importancia que encierra la proposición 3.17 y el corolario 3.18, permite observar que a partir de un filtro de racionales se puede dar cuenta de la existencia de los números irracionales, esto evidencia una alta similitud con la construcción de Bachmann (Weiss, 2015, p. 5). El mismo Weiss llama la atención en el referente que es para su construcción la de Bachmann (Weiss, 2016, p. 2).

3.2.6 La densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Corolario 3.19. *Los números reales racionales son densos en* $\mathbb{R}$.

Demostración: Sea $a < b$, para $\forall a, b \in \mathbb{R}$, por la Definición 3.10 se tiene $a <_{\exists\forall} b$ lo que implica que $A <_\forall B$ (proposición 3.7) para algún $A \in a$ y $B \in b$. Como a y b son filtros minimales de Cauchy se puede encontrar $p_\varepsilon \in a$ con $p_\varepsilon \subseteq A$ y $q_\delta \in b$ con $q_\delta \subseteq B$ como se observa en la figura 9. Como $A <_\forall B$ implica que $p_\varepsilon <_\forall q_\delta$ ahora se presenta la siguiente desigualdad, $p-\varepsilon < p+\varepsilon \leq q-\delta < q+\varepsilon$ de la que se verifica que $\iota(p+\varepsilon) \leq \iota(q-\delta)$ por

la definición 3.15 y proposición 3.13 son dos números reales racionales, ahora por la proposición 3.17 tenemos que como $p_\varepsilon \in a$ entonces se cumple que $\iota(p-\varepsilon) < a < \iota(p+\varepsilon)$ y $q_\delta \in b$ entonces $\iota(q-\delta) < b < \iota(q+\delta)$. Así se observa que por las desigualdades presentadas se tiene $a < \iota(p+\varepsilon) \leq \iota(q-\delta) < b$, por lo que se concluye que entre a y b se encuentra al menos un número real racional. ■

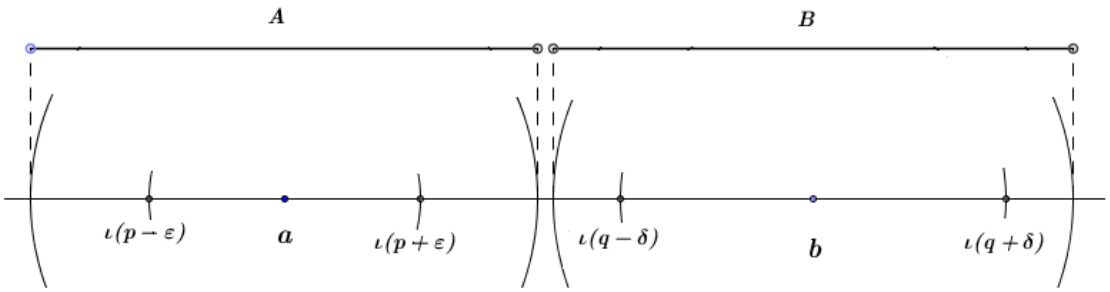


Figura 9.

Corolario 3.20. $\mathbb{R}$ *es un orden arquimediano, es decir para todos* $a \in \mathbb{R}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *con* $a < \iota(n)$.

Demostración: Se dado $a \in \mathbb{R}$ se puede encontrar por corolario 3.18 $q_\varepsilon \in a$ entonces se establece por proposición 3.17 que $\iota(q-\varepsilon) < a < \iota(q+\varepsilon)$, en particular como $(q+\varepsilon) \in \mathbb{Q}$ entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $(q+\varepsilon) < n$ entonces $\iota(q+\varepsilon) < \iota(n)$ y asi $a < \iota(n)$. ■

Observación. La función $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es una incrustación de orden denso (Weiss, 2016, p. 23).

Proposición 3.21. *Para cualquier número real a se cumple lo siguiente:*

• Existe un número racional $M > 0$ y $A \in a$ con $\{-M\} <_\forall A <_\forall \{M\}$.

• $a > 0$ si, y solo si, para cada $A \in a$ existe $A_+ \subseteq A$ con $A_+ >_\forall \{0\}$ y $A_+ \in a$.

• $a < 0$ si, y solo si, para cada $A \in a$ existe $A_- \subseteq A$ con $A_- <_\forall \{0\}$ y $A_- \in a$.

• $a = 0$ si, y solo si, $0 \in A$ para todos $A \in a$.

Demostración. Para la primera afirmación, existe $p \in \mathbb{Q}$ con $p_1 \in a$, por lo que la elección de M es clara. Por lo cual se establece la existencia de un racional positivo M que puede acotar un determinado $A \in a$ como se muestra en la figura 10, sea $A = p_1$, es decir $\forall \alpha \in A$ se puede encontrar un racional que cumpla la condición $-M < \alpha < M$.

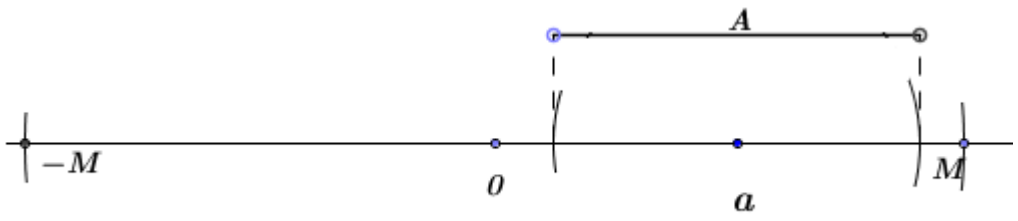


Figura 10.

Si $a > 0$, entonces por lema 3.14 $a >_{\exists\forall} \{\{0\}\}$, entonces hay algún de $A^+ \in a$ con $A^+ >_{\forall} \{0\}$. Dado cualquier $A \in a$, uno puede toma $A_+ = A \cap A^+$tal como se muestra en la figura 11, que cumple la condición requerida. A la inversa, la condición en A_+ implica inmediatamente que $a >_{\exists\forall} \{\{0\}\}$, y por lo tanto $a > 0$, esto afirma la condición de que sí a es un número real positivo siempre va a existir al menos un conjunto de a cuyos elementos son completamente positivos. La prueba para los números negativos es similar haciendo la respectiva elección de $A_- \in a$ que cumpla las condiciones requeridas, y la caracterización de $a = 0$ es solo una reafirmación de la caracterización de todos los Números reales racionales en términos de núcleos. ■

$a > 0$

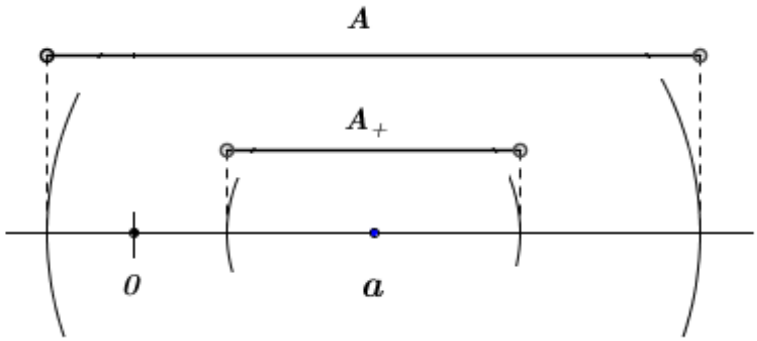


Figura 12

Como se evidencia en la figura para todo subconjunto del filtro minimal a siendo positivo, existen básicos que son completamente positivos.

Proposición 3.22 *Si* $a > 0$ *es un número real, entonces existe un número racional* $\eta > 0$ *y un número racional* $\delta > 0$ *tal que* $p_{\delta'} \in a$ *implica* $p_{\delta'} >_{\forall} \{\eta\}$*, para todos* $p \in \mathbb{Q}$ *y* $0 < \delta' \leq \delta$*. Un resultado similar es válido para los números reales negativos.*

Demostración. Sea $\eta > 0$ un número racional con $a > \iota(3\eta)$. Entonces existe $A \in a$ tal que $A >_{\forall} \{3\eta\}$. Sea $\delta = \eta$. Entonces, $si\ p_{\delta'} \in a$ con $0 < \delta' \leq \delta$, entonces $p_{\delta'} \cap A \neq \emptyset$ como se observa en la figura 12, lo que implica $x > 3\eta$ para algunos $x \in p_{\delta'}$ y como la longitud de $p_{\delta'}$ es $2\delta' < 2\eta$, se deduce que $p\delta' >_{\forall} \{\eta\}$ (Weiss, 2016, p. 23). ■

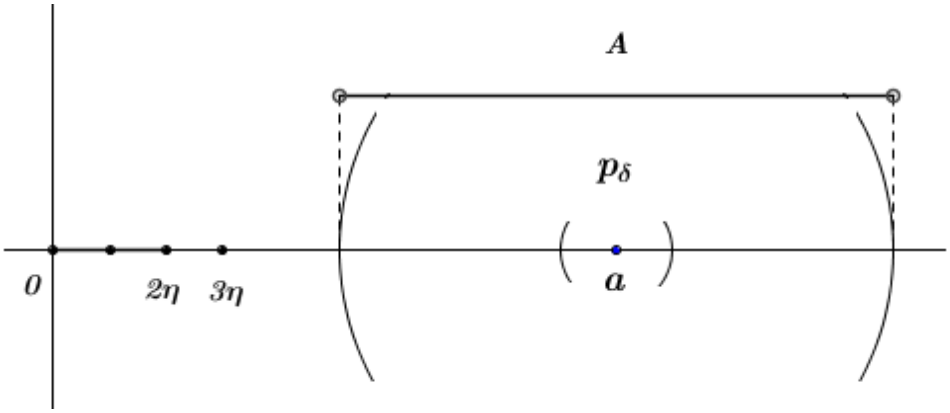


Figura 12.

Esta proposición a diferencia de la anterior asegura que el intervalo $p_\delta \in a$ que encierra a Ca no tome valores negativos, ya que η es un número real positivo y $p_\delta >_{\forall} \{\eta\}$ (y también los intervalos generados por los índices $0 < \delta' \leq \delta$), lo que también significa que $p - \delta$ no puede ser menor que η. Esto garantiza la existencia de un número racional positivo que es completamente menor a algunos intervalos racionales que pertenecen a a. Es decir, entre cero y uno de estos intervalos positivos existe al menos un racional, esto puede ser interpretado como una forma de ver que los racionales son densos en $\mathbb{R}$.

3.3 Operaciones en $\mathbb{R}$

Suma y multiplicación en $\mathbb{R}$**.** La operación suma de los números racionales se extiende de manera elemental a los conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, de la siguiente manera:

$$A + B = \{\alpha + \beta | \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Además, para colecciones arbitrarias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se subconjuntos de números racionales, se define la suma como: $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \{A + B | A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}$.

En particular, para los números reales $a, b \in \mathbb{R}$, la operación suma de filtros se define como la colección:

$$a \oplus b = \{A + B |\ A \in a, B \in b\}.$$

De manera similar, la multiplicación en los racionales también se extiende a los conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, así:

$$A \cdot B = AB = \{\alpha\beta | \alpha \in A, \beta \in B\}$$

Y para colecciones arbitrarias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se subconjuntos de números racionales, se define la multiplicación como: $\mathcal{F} \odot \mathcal{G} = \{A.B |\ A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\}$.

Entonces, de manera particular, para los números reales a, b, la operación multiplicación de filtros se define como:

$$a \odot b = \{AB | A \in a, B \in b\}$$

Para $p \in \mathbb{Q}$ y $B \subseteq \mathbb{Q}$ escribimos $p + B$ como abreviatura para $\{p\} + B$, y de manera similar $p \cdot B$ para $\{p\} \cdot B$.

Lo planteado anteriormente se puede encontrar en los preliminares del artículo de Weiss en sus primeras páginas o en las nociones preliminares del presente trabajo, donde se abordan las operaciones aritméticas con intervalos.

Proposición 3.23. *Para todos los números reales $a, b \in \mathbb{R}$, las colecciones $a \oplus b$ y $a \odot b$ son bases de filtros de Cauchy*.

Como a y b son filtros propios los subconjuntos que los componen son diferentes de $\emptyset$, para verificar que $a \oplus b$ es una base de filtro, tomamos $\forall A, A' \in a$ y $\forall B, B' \in b$ y recordando que $A \cap A' \in a$ y $B \cap B' \in b$ por la definición de filtro. Se pueden verificar algunas de las siguientes contenencias para la operación suma:

$$(A \cap A') + (B \cap B) \subseteq (A + B) \cap (A' + B')$$

$$(A \cap A') + (B) \subseteq (A + B) \cap (A' + B)$$

Es posible verificar esta afirmación, para el siguiente ejemplo:

$$a \oplus b = \{(A + B), (A' + B), (A + B'), (A' + B'), \big((A \cap A') + (B \cap B')\big), \big(A + (B \cap B')\big), \big(A' + (B \cap B')\big), \big((A \cap A') + B\big), ((A \cap A') + B')\}$$

Se notará que para cualquier par de elementos de $a \oplus b$ cumple con la definición de base de filtro, es decir existe un elemento que es subconjunto de la intersección de los dos primeros. Para la operación de multiplicación se puede hacer un acercamiento similar.

Para demostrar la condición de que $a \oplus b$ es una base de filtro Cauchy se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existen $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p_{\frac{\varepsilon}{2}} \in a$ y $q_{\frac{\varepsilon}{2}} \in q$, y luego $(p + q)_\varepsilon = p_{\frac{\varepsilon}{2}} + q_{\frac{\varepsilon}{2}} \in a \oplus b$. En el caso de $a \odot b$ se puede verificar que también es una base de filtro Cauchy, en la demostración que Weiss presenta en su artículo se parte de la condición de que como a y b son filtros minimales de Cauchy y en particular cumplen la condición de Cauchy entonces existen $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p_\delta \in a$ y $q_\delta \in b$. Ahora sea $M \in \mathbb{N}$ con $\varepsilon > 0$ y $A \in a$ y $B \in b$ se puede establecer $\{-M\} \leq_\forall A, B \leq_\forall \{M\}$, y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{M+2\varepsilon}$. Como existen $p_\delta \in a$ y $q_\delta \in b$ que están dentro de rango del siguiente intervalo $(-M - 2\varepsilon, M + 2\varepsilon)$ y ya que p_a se interseca con A, y p_b se intersecta con B, también contiene $p_\delta q_\delta$ cuya longitud está limitada por $\varepsilon = (M + 2\varepsilon)\frac{\varepsilon}{(M+2\varepsilon)}$. Esto garantiza la condición Cauchy ya que $\forall\varepsilon$ es posible encontrar δ adecuado tal que $p_\delta q_\delta \in a \odot b$ (Weiss, 2016, p. 24). ■

Definición 3.24. Dados los números reales $a, b \in \mathbb{R}$, su *suma* es $a + b = \langle a \oplus b \rangle$ y su *producto* es $ab = \langle a \odot b \rangle$. Con más detalle, un subconjunto de los racionales $C \subseteq \mathbb{Q}$ satisface

que $C \in a + b$ (respectivamente $C \in ab$) precisamente cuando existen $A \in a$ y $B \in b$ con $A + B \subseteq C$ (respectivamente $AB \subseteq C$).

Denotaremos $0 = \iota(0)$, a menos que hacerlo pueda causar confusión (Weiss 2016, p. 24)

Observación. El proceso de suma $a + b$ de dos números reales no es directamente un número real, se representa como el filtro generado por la base de filtro $a \oplus b$, lo cual implica que deba realizarse un proceso adicional para obtener el número real resultado de la operación suma. Recordemos que la base de un filtro es subconjunto del filtro, lo que indica que es posible que al efectuarse la operación suma (multiplicación) entre filtros mínimales de Cauchy el resultado no sea necesariamente un filtro, es decir no hay garantía que al sumarse dos filtros minimales de Cauchy su resultado sea otro filtro mínimal de Cauchy. Se puede garantizar que este resultado es una base de filtro mínimal de Cauchy por lo cual su generado si es un filtro mínimal de Cauchy. Esta condición será verificada con las proposiciones 3.23 y 3.26.

Proposición 3.25. Las igualdades $a \cdot \iota(0) = \iota(0) = \iota(0) \cdot a$ se mantienen para todos $a \in \mathbb{R}$.

Para demostrar esta proposición se supone un $B \in a \cdot \iota(0)$, luego $A \cdot 0_\varepsilon \subseteq B$ para algunos $A \in a$ y $\varepsilon > 0$. Además, $A \neq \emptyset$ y para cualquier $\alpha \in A$ tenemos $\alpha \cdot 0\varepsilon \subseteq B$ y $\alpha \cdot 0\varepsilon = 0_{\alpha\varepsilon}$, es decir $B \in \iota(0)$, el intervalo $0_{\alpha\varepsilon}$, garantiza la contenencia de α y al estar siempre centrado en cero, se concluye que $a \cdot \iota(0) \subseteq \iota(0)$, para una visualización geométrica de la demostración ver figura 13.

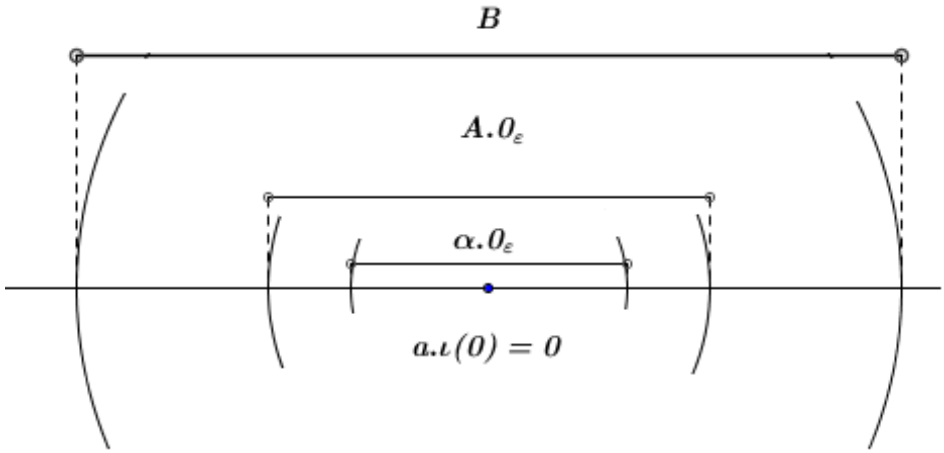


Figura 13

En la otra dirección $\iota(0) \subseteq \iota(0) \cdot a$, si $B \in \iota(0)$, entonces $0_\varepsilon \subseteq B$, con $\varepsilon > 0$. Sea ahora $A \in a$ y $M > 0$ con $\{-M\} <_\forall A <_\forall \{M\}$, y considere $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Se sigue fácilmente que $A \cdot 0_\delta \subseteq 0_\varepsilon$, y por lo tanto $0_\varepsilon \in a \cdot \iota(0)$. ■

La demostración de que $\iota(0) = \iota(0) \cdot a$ es similar.

Observación. Cualquier intervalo subconjunto de un número real a multiplicado por cualquier subconjunto del número real $\iota(0)$ da como resultado un intervalo centrado en 0ε, es decir pertenece a $\iota(0)$ y su núcleo es 0.

Lema 3.26. *La suma y el producto de cualquiera de los dos números reales a y b son números reales.*

Como $a + b = \langle a \oplus b \rangle$ y por proposición 3.23 sabemos que $a \oplus b$ es una base de filtro Cauchy por lo cual $a + b$ es de Cauchy, se requiere mostrar que es redondo. Por la definición 3.24 sea $C \in a + b$ entonces $\exists A \in a$ y $\exists B \in b$ tal que $A + B \subseteq C$. Como $a + b$ es de Cauchy, podemos tener $\delta > 0$ tal que $p_\delta \in a + b$ para algún $p \in \mathbb{Q}$ (ver figura 14 para observar las inclusiones presentadas en la demostración), es decir $\exists A' \in a$ y $\exists B' \in b$ tal que $A' + B' \subseteq p_\delta$. Se puede verificar que $p_\delta \subseteq y_{2\delta}$ para cualquier $y \in p_\delta$, por lo cual se debe encontrar $y \in A' + B'$ que cumpla que $y_{2\delta} \subseteq A + B$. Ahora para todos $\alpha' \in A'$ y $\beta' \in B'$ se cumple que (suma de intervalos) $(\alpha' + \beta')_{2\delta} = \alpha'_\delta + \beta'_\delta \subseteq \alpha'_{\varepsilon_1} + \beta'_{\varepsilon_2}$, si se logra obtener $\alpha' \in A'$ y $\beta' \in B'$ con $\alpha'_{\varepsilon_1} \subseteq A$ y $\beta'_{\varepsilon_2} \subseteq B$ lo que logra garantizar $y_{2\delta} \subseteq A + B$ y así $p_\delta \subseteq C$. Esto se logra a partir de un $\alpha' \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$ con $\alpha'_r \in a$ y $\alpha'_r \subseteq A'$ (esto es posible ya a es redondo). Y por lo tanto si $r \leq \delta$ sabemos que $\alpha'_r \subseteq \alpha'_\delta \subseteq \alpha'_\varepsilon$, y por lo tanto que $\alpha'_\varepsilon \in a$, y de la elección de un adecuado ε' se puede concluir que $\alpha'_{\varepsilon'} \subseteq A$. La existencia de $\beta' \in B'$ con $\beta'_{\varepsilon'} \subseteq B$ se obtiene de manera similar (Weiss, 2016, p. 24).
■

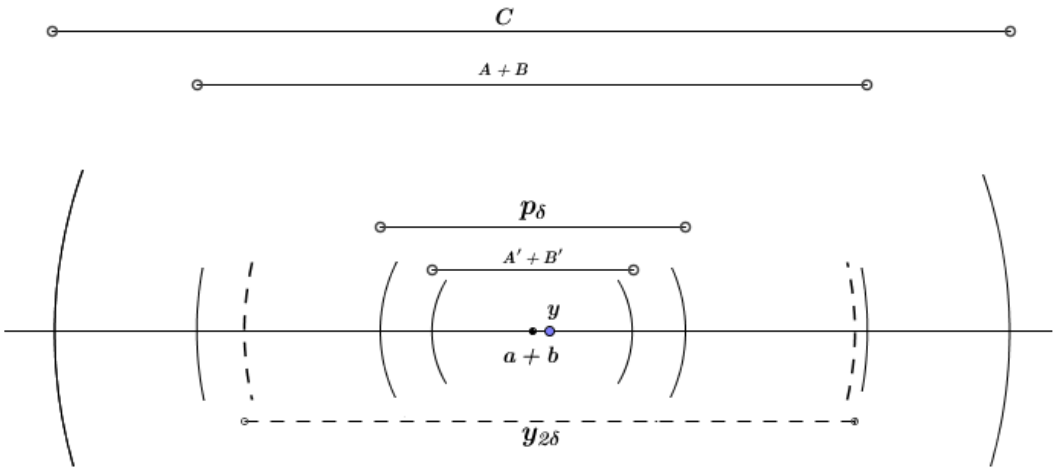


Figura 14

Proposición3.27. Si $a = \iota(p)$ *es un número real racional y* b *es cualquier número real, entonces* $\iota(p) + b = \{p + B | B \in b\}$ y $\iota(p) \cdot b = \{p \cdot B | B \in b\}$.

Ya se sabe que la suma y la multiplicación de dos números reales es un real (proposición 3.26) para mostrar que $\{p + B | B \in b\} = \iota(p) + b$ se hace uso del teorema 3.9, (*Dos números reales* a *y* b *son iguales si, y solo si,* $A \cap B \neq \emptyset$ *para todos* $A \in a$ *y* $B \in b$*).* Dado un $p + B$ arbitrario y un $x \in \iota(p) + b$ arbitrario, a saber, $A + B' \subseteq x$ con $A \in \iota(p)$ y $B' \in b$, se debe mostrar que $(p + B) \cap (A + B') \neq \emptyset$. Como $p \in A$ para todos $A \in \iota(p)$ y como $B \cap B' \neq \emptyset$, por lo cual se concluye que $(p + B) \cap (A + B') \neq \emptyset$ y así $\{p + B | B \in b\} = \iota(p) + b$. En la multiplicación el método es el mismo, la particularidad de $p = 0$ está representada en la proposición 3.25 (Weiss 2016, p. 25). ■

Teorema 3.28. *Con la suma y multiplicación de números reales,* $\mathbb{R}$ *es un anillo conmutativo con unidad.*

- $\langle a \oplus (b + c) \rangle = \langle a \oplus (b \oplus c) \rangle$
- $\langle (a + b) \oplus c \rangle = \langle (a \oplus b) \oplus c \rangle$
- $\langle a \odot (bc) \rangle = \langle a \odot (b \odot c) \rangle$
- $\langle (ab) \odot c \rangle = \langle (a \odot b) \odot c \rangle$
- $\langle a \odot (b + c) \rangle = \langle a \odot (b \oplus c) \rangle$

Weiss establece que las anteriores igualdades se resuelven bajo el mismo argumento, en el caso de $\langle a \oplus (b + c) \rangle = \langle a \oplus (b \oplus c) \rangle$ la primera inclusión se obtiene de forma sencilla ya que $(b \oplus c) \subseteq (b + c)$ por la razón de las bases de un filtro son subconjuntos del filtro por lo cual se obtiene que $\langle a \oplus (b \oplus c) \rangle \subseteq \langle a \oplus (b + c) \rangle$. Para la otra inclusión se requiere tomar un elemento $X \subseteq \mathbb{Q}$ y $X \in \langle a \oplus (b + c) \rangle$ tal que $A + Y \subseteq X$ para algunos elementos $A \in a$ y $Y \in b + c$, y Y en sí mismo contiene un conjunto de la forma $B + C$ para $B \in b$ y $C \in c$. Por lo cual $A + (B + C) \subseteq X$, por lo tanto X está en $a \oplus (b \oplus c)$, llegamos así a que $\langle a \oplus (b + c) \rangle = a \oplus (b \oplus c) \subseteq \langle a \oplus (b \oplus c) \rangle$. Para una mayor compresión de los argumentos utilizados en la demostración es necesario hacer uso de la definición 3.24.

En este punto del desarrollo propuesto por Weiss para la construcción de los números reales es posible verificar que la suma y la multiplicación son conmutativas, asociativas y la ley distributiva, por la proposición 3.27 es posible demostrar la neutralidad $0 = \iota(0)$ y que $1 = \iota(1)$ es un elemento de identidad multiplicativo. Para el inverso aditivo se considera un número real a y otro número real $b = \{-A | A \in a\}$, donde $-A = \{-\alpha \mid \alpha \in A\}$. Obviamente, mostramos que $a + b = 0$. Por el Lema 3.16, es suficiente mostrar que $0 \in C$ para todos $C \in a + b$. De hecho, para tal C existe $A, A' \in a$ con $C \supseteq A + (-A') \supseteq (A \cap A') + (-(A \cap A'))$, un conjunto que ciertamente contiene 0 desde $A \cap A' \neq \emptyset$.

3.4 Los reales como campo ordenado

Teorema 3.29. $\mathbb{R}$ *Con la suma y la multiplicación es un campo*

Demostración. Se fija un número real $a > 0$, para el cual presentaremos un inverso a^{-1}. Para un arbitrario $A \subseteq \mathbb{Q}$ se toma $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{\alpha} | \alpha \in A, \alpha \neq 0\}$. Notando que $\frac{1}{A} \cap \frac{1}{A'} = \frac{1}{A \cap A'}$, de inmediato se sigue que $\mathcal{B} = \{\frac{1}{A} | A \in a\}$ es una base de filtro. Procedemos a mostrar que se trata de Cauchy, así que fijemos un $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 3.22 existe $\eta > 0$ y $\delta > 0$, de manera que $p_{\delta'} \in a$ implica $p_{\delta'} >_{\forall} \{\eta\}$, para todos $p \in \mathbb{Q}$ y $0 < \delta' \leq \delta$. Luego sigue que $\frac{1}{p_{\delta'}}$ es un intervalo cuya longitud es

$\frac{2\delta\prime}{(p-\delta')(p+\delta')} \leq \frac{2\delta\prime}{\eta^2} < \varepsilon$, para un suficientemente pequeño $\delta' > 0$. La existencia de algunos $p_{\delta\prime} \in a$ está garantizada ya que a es de Cauchy.

Ahora podemos definir $a^{-1} = \langle \frac{1}{A} | A \in a \rangle$, al filtro generado (con un ligero abuso de notación), que por lo tanto es Cauchy. Es un poco tedioso mostrar directamente que $\mathcal{B}$ también es una base de filtro redondo. Para evitar estos detalles, y dado que solo nos interesa la existencia de un inverso multiplicativo, consideremos $a^{-1} = \langle B \rangle_o$, la redondificación del filtro generado, que es tanto Cauchy como redondo, y por lo tanto un número real. Para mostrar que $a \cdot a^{-1} = 1 = \iota(1)$ es suficiente para calcular el núcleo y apelar al Lema3.16. De hecho, dado que $\langle B \rangle_o \subseteq \langle B \rangle$ dado que $C \in a \cdot a^{-1}$ existe $A, A' \in a$ tal que $C \supseteq A \cdot \frac{1}{A\prime}$ que contiene $(A \cap A') \cdot \frac{1}{A \cap A\prime}$, que a su vez claramente contiene 1 ya que $A \cap A' \neq \emptyset$, y de hecho contiene al menos dos elementos, uno de los cuales no es 0. La prueba para $a < 0$ es similar (Weiss, 2016, p. 25). ■

Teorema 3.30. $\mathbb{R}$ *Con la suma y multiplicación es un campo ordenado.*

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, mostrar que $a + c \leq b + c$ y, con $c > 0$, como y sabemos que cada lado de la igualdad es número real se tiene que por 3.24 que $D \in a + c$ y $D' \in b + c$ arbitrarios existen $A \in a$, $B \in b$ y $C, C' \in c$ con $D \supseteq A + C$ y $D' \supseteq B + C'$. Ahora como $a \leq_{\forall\exists} b$ es antisimétrica (lema 3.8) se tiene que $A \leq_{\exists} B$ de tal forma que se cumple $\alpha \leq \beta$ para algunos $\alpha \in A$ y $\beta \in B$. Dado que los filtros son propios las intersecciones finitas son no vacías, así tenemos $\gamma \in \mathrm{C} \cap \mathrm{C}'$ y podemos establecer $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ que al aplicar un proceso inverso se obtiene $a + c \leq_{\forall\exists} b + c$. El proceso para la multiplicación es similar obteniendo como resultado $ac \leq_{\forall\exists} bc$, con las mismas consideraciones aplicadas a la suma (Weiss, 2016, p. 26).

Corolario 3.31. *La incrustación canónica* $\iota: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *es un homomorfismo de campo.*

Demostración. Se debe demostrar que $\iota(p + q) = \iota(p) + \iota(q)$ y que $\iota(pq) = \iota(p)\iota(q)$, para todo $p, q \in \mathbb{Q}$. De hecho, ya que $C(\iota(p)) = \{p\}$ y $C(\iota(q)) = \{q\}$ de inmediato se sigue que $p + q \in C(\iota(p) + \iota(q))$ y que $pq \in C(\iota(p)\iota(q))$. La afirmación ahora sigue por Lema 3.16 (Weiss, 2016, p. 26). ■

3.5 La completitud de los reales

A partir de la fundamentación teórica propuesta por Weiss en la construcción de los números reales es posible presentar la propiedad de completitud de los reales. Se toma como primera medida un conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ de números reales y se supone acotado superiormente por un número $c \in \mathbb{R}$. La colección $\mathbb{A} = \{p_\varepsilon \mid p_\varepsilon \in a_0,\ a_0 \in \mathcal{A}\}$ representa un intento de recopilar todos los $\mathcal{A}$ en un solo número real. Es importante recordar que $p_\varepsilon \in a_0 \iff \iota(p - \varepsilon) < a_0 < \iota(p + \varepsilon)$ (proposición 3.17); por lo tanto, $\mathbb{A}$ representa la familia de todos ε que cumplen la proposición 3.17 con $p \in \mathbb{Q}$. Además, se observa que este conjunto se deriva de un elemento particular $a_0 \in \mathcal{A}$, por lo cual se debe hacer un refinamiento mediante $\mathfrak{B} = \{p_\varepsilon \in \mathbb{A} \mid a < \iota(p + \varepsilon), \forall a \in \mathcal{A}\}$, que es una colección no vacía porque $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y está acotado superiormente por c. Esta condición permite eliminar los elementos en $\mathbb{A}$ que se encuentran demasiado abajo en $\mathcal{A}$.

La demostración de la completitud se desarrolla en dos pasos:

1. Establecer que $\mathfrak{B}$ es un filtro de Cauchy
2. Demostrar que $b = \langle\mathfrak{B}\rangle_o$ es la mínima cota superior de $\mathcal{A}$

Para demostrar la condición (2) se parte del supuesto de que $\mathfrak{B}$ es una base de filtro de Cauchy (condición que será demostrada al hacer (1)) por lo cual se deduce que $\langle\mathfrak{B}\rangle$ es un filtro de Cauchy y $\langle\mathfrak{B}\rangle_o = b$ es redondo y de Cauchy, por lo tanto, un número real. Ahora para $\forall B \in b$ existe $q \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $q_\varepsilon \in \mathfrak{B}$ y $q_\varepsilon \subseteq B$. Llamamos a cualquiera de estos q_ε un *intervalo testigo (witnessing interval)* para B.

Como lo que se busca es establecer que el número real b es cota superior de $\mathcal{A}$, se toma un elemento arbitrario $a_0 \in \mathcal{A}$ y se debe mostrar que $a_0 \leq_{\forall\exists} b$, por tanto, sea $A \in a_0$ y $B \in b$, y debemos establecer que $A \leq_\exists B$. Ahora sea q_ε un *intervalo testigo* para B; es decir, $q_\varepsilon \in \mathfrak{B}$ y $q_\varepsilon \subseteq B$ para $\forall B \in b$. Dado que $q_\varepsilon \in \mathfrak{B}$ se sigue que $a_0 < \iota(q + \varepsilon)$ por definición de $\mathfrak{B}$. Ahora se sigue que existe $A' \in a_0$ con $A' <_\forall \{q + \varepsilon\}$, y que $A_0 = A \cap A'$, el cual está en a_0 y por tanto es no vacío. Basta con mostrar que $A_0 \leq_\exists q_\varepsilon$. Pero para cualquier $\alpha \in A_0$ se deduce que $\alpha < q + \varepsilon$, y por lo tanto $\alpha \leq y$ para algún $y \in q_\varepsilon$, así $A_0 \leq_\exists q_\varepsilon$ como $q_\varepsilon \subseteq B$ se tiene que $A_0 \leq_\exists B$ y consecuentemente $a_0 \leq_{\forall\exists} b$ por lo cual b es un límite superior de $\mathcal{A}$. Para terminar con la demostración de la condición (2) falta verificar que b es el mínimo límite superior existente, por

lo cual se supone otro límite superior con la particularidad de que $c < b$. Por tanto, existen $C \in c$ y $B \in b$ con $C <_\forall B$. Tomando un intervalo testigo q_ε para B tenemos que $C <_\forall q_\varepsilon$ y $q_\varepsilon \in a_0$ para algunos $a_0 \in \mathcal{A}$. Sin embargo, c es un límite superior de $\mathcal{A}$ y, por tanto, $c \geq a_0$ es decir $c \geq_{\forall\exists} a_0$. De ello se deduce que $C \geq_\exists q_\varepsilon$, contradiciendo claramente a $C <_\forall q_\varepsilon$.

Para demostrar la condición (1) se parte de que $\mathfrak{B}$ es una base filtro que está dada de la siguiente manera: se supone que $p_\varepsilon, q_\delta \in \mathfrak{B}$, con $p_\varepsilon \in a'$ y $q_\delta \in a''$, con $a' \leq a''$. Dado que a' y a'' son números reales, por lo cual son filtros propios, lo que indica que ninguno de sus elementos es $\emptyset$. si se considera $p_\varepsilon \cap q_\delta$ se notará que si este intervalo no es vacío (ver figura 16 para una visualización geométrica), se permite encontrar un intervalo s_η donde el límite superior de este intervalo resultante es $s + \eta$ que está dado por $p + \varepsilon$ o $q + \delta$ según sea el caso, observemos que $s + \eta = q + \delta$ si $q_\delta \subseteq p_\varepsilon$; de lo contrario, su límite superior estará dado por $p + \varepsilon$. A partir de la definición de $\mathfrak{B}$, debemos considerar los elementos que se encuentran en los intervalos dados $a' < \iota(p + \varepsilon)$ y $a'' < \iota(q + \delta)$ ya que $p_\varepsilon, q_\delta \in \mathfrak{B}$, por lo tanto como estos elementos que se encuentran en ambas regiones son las que determinan la existencia de s_η.

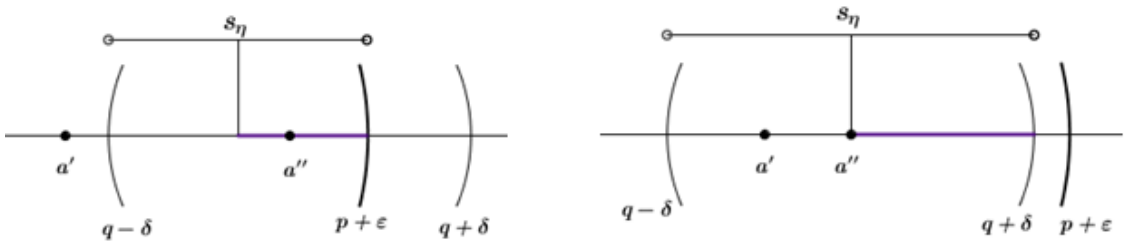


Figura 16

Como el objetivo es mostrar que $\mathfrak{B}$ es una base de filtro, se debe probar que $s_\eta \in \mathfrak{B}$. Es suficiente mostrar que $p_\varepsilon \in a''$, es decir $\iota(p - \varepsilon) < a'' < \iota(p + \varepsilon)$ por proposición 3.17. Ahora, si existe $p_\varepsilon \cap q_\delta$ entonces según la condición particular de la base $\mathfrak{B}$ se tiene que $p_\varepsilon \cap q_\delta \in a''$. Como $s + \eta$ es igual a $p + \varepsilon$ o $q + \delta$ entonces en particular, si se cumple $p + \varepsilon < q + \delta$ se observa que $s + \eta = p + \varepsilon$ y por lo tanto $a'' < \iota(p + \varepsilon)$. Si $q + \delta < p + \varepsilon$, es trivial observar que si $s + \eta = q + \delta$ entonces $a'' < \iota(p + \varepsilon)$. Así se concluye que $\iota(p - \varepsilon) < a' < a'' < \iota(p + \varepsilon)$.

Hasta esta instancia se mostrado la particularidad de la base de filtro que Weiss usa para mostrar la condición (1).

Aun se requiere mostrar que $\mathfrak{B}$ es de Cauchy, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. La propuesta es que para $\forall a \in \mathcal{A}$ se puede encontrar $p(a) \in \mathbb{Q}$ tal que $p(a)_\delta \in a$, con $a < \iota(p(a) + \delta)$, en donde la función p genera un racional a partir de cualquier número real que pertenezca a $\mathcal{A}$. Ahora, es suficiente mostrar un único $a_0 \in \mathcal{A}$ para el que $a < \iota(p(a_0) + \varepsilon)$, para todo $a \in \mathcal{A}$, es observable que $p(a_0)_\delta \subseteq p(a_0)_\varepsilon$. Como $p(a_0)_\delta \in a_0$ y cumple $a_0 < \iota(p(a_0) + \delta)$ y así $p(a_0)_\delta \in \mathfrak{B}$, por lo tanto se puede concluir que $p(a_0)_\varepsilon \in a_0$ y, por lo tanto $p(a_0)_\varepsilon \in \mathfrak{B}$. Para $\forall \varepsilon > 0$ se puede verificar lo anterior, así $\mathfrak{B}$ es de Cauchy.

Supongamos, al contrario, que para todo $a \in \mathcal{A}$ existe $a' \in \mathcal{A}$ que cumple la siguiente condición $a' \geq \iota(p(a) + \varepsilon)$. En particular, se tiene que $a' \geq \iota(p(a) + 2\delta) > a$, obsérvese que $\iota(p(a) + 2\delta) > \iota(p(a) + \delta) > a$, y sabemos que haciendo uso del lema 3.16, se tiene que $p(a) + 2\delta > p(a) + \delta > Ca$ y así $p(a) + 2\delta > Ca + \delta$ nuevamente obtenemos el siguiente resultado $a' \geq \iota(p(a) + 2\delta) > a + \iota(\delta)$ que el autor quiere usar más adelante.

Comenzando con un $a_0 \in \mathcal{A}$ arbitrario, y haciendo uso de un argumento inductivo luego muestra que para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y un elemento $a \in \mathcal{A}$ existe un $a > a_0 + \iota(n\delta)$. Pero como b es un límite superior de $\mathcal{A}$, se deduce que $b \geq a_0 + \iota(n\delta)$, para todos $n \geq 1$, contradice el hecho de que $\mathbb{R}$ es arquimediano. ■

De esta forma se puede verificar que la base de filtro de Cauchy $\mathfrak{B}$ al ser redondificado genera el filtro minimal de Cauchy $\langle \mathfrak{B} \rangle_o = b$, que es el mínimo límite superior de $\mathcal{A}$ lo cual permite verificar la existencia de todos los números reales de $\mathcal{A}$ a partir de cualquier $a_0 \in \mathcal{A}$ arbitrario (Weiss, 2016, p. 27).

3.6 Consecuencias de lo propuesto por Weiss.

Weiss hace mención la importancia del desarrollo de la construcción de los números, y lo que representa para los mismos la prueba de la no-numerabilidad de $\mathbb{R}$ y la definición de límite. Y cómo en desarrollo histórico de los reales las diferentes pruebas de estos conceptos han jugado un

papel relevante en las diferentes teorías propuestas: entre las mencionadas está la prueba de la diagonalización de Cantor y la aplicación del teorema de categorías de Baire.

La construcción de los reales por Weiss se presta directamente a otra prueba para la no numerabilidad de los reales y la definición de límite, que utiliza solo las propiedades básicas de los filtros y el criterio de igualdad (Teorema 3.9). Primero propone el siguiente resultado auxiliar trivial. Para intervalos racionales I y J tomamos $|I|$ que denota la longitud del intervalo, y escribimos $J \subseteq_d I$ si J está *profundamente (deeply) contenido* en I (ver figura 16), es decir, asumiendo que $I = (p, q)$, y que existe $\varepsilon > 0$ tal que $J \subseteq (p + \varepsilon, q - \varepsilon)$.

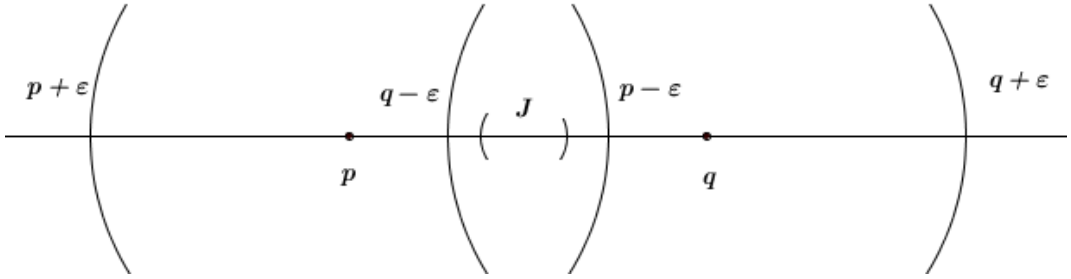


Figura 16

Luego, dado un número real a y un intervalo racional I, existe un intervalo racional $J \subseteq_d I$ con $|J| = |I|/5$, y $A \in a$ con $J \cap A = \emptyset$. De hecho, como a es Cauchy, existe cierto intervalo $A \in a$ con $|A| \leq |I|/5$. Subdividiendo I en cinco intervalos iguales, cualquiera de los tres intervalos centrales está profundamente contenido en I, y A no puede tener una intersección no vacía con todos tres, obsérvese esto en la figura 17 (Weiss 2016, p. 27). Es decir, existe al menos uno de los intervalos centrales cuya intersección con A es vacía, y como se debe cumplir $J \cap A = \emptyset$, por lo tanto, este intervalo sería el J buscado que cumple la condición propuesta.

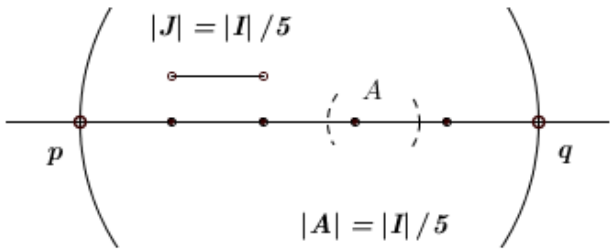


Figura 17

Este resultado auxiliar es el que le permite a Weiss hacer la demostración de la no numerabilidad de los reales, estableciendo una relación entre una sucesión de números reales $(a_n)_{n\geq 1}$ y este resultado. Es de observar que el intervalo $I \in a$ ya que $A \subseteq I$ (*ver figura 18*).

Teorema 3.32. *El conjunto* $\mathbb{R}$ *es no numerable.*

Demostración. Dada una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales, basta con construir un número real que no esté en la sucesión. Sea un intervalo racional arbitrario I_0. Supongamos que una sucesión $I_n \subseteq_d I_{n-1} \subseteq_d \ldots \subseteq_d I_0$ se construyó junto con $A_1, \ldots, A_n$, donde $A_k \in a_k$, $1 \leq k \leq n$ y con las propiedades de que $|I_{k+1}| = |I_k|/5$ para todos $0 \leq k < n$, y tal que $I_n \cap A_n = \emptyset$ para todos $1 \leq k \leq n$. Se recomienda hacer uso de la figura 18 para verificar las inclusiones de los intervalos.

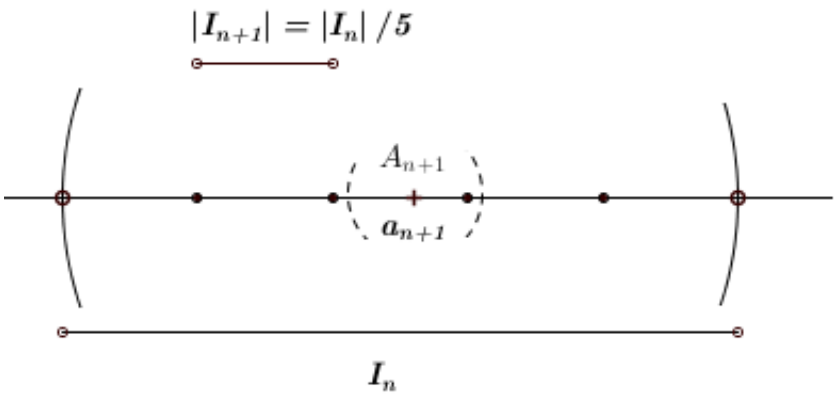


Figura 18

Teniendo en cuenta el número real a_{n+1} y el intervalo I_n (ver figura 18) podemos encontrar un intervalo racional $I_{n+1} \subseteq_d I_n$ con $|I_{n+1}| = |I_n|/5$ y $A_{n+1} \in a_{n+1}$ para que $I_{n+1} \cap A_{n+1} = \emptyset$. Continuando de esta manera, la sucesión $\{I_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy de intervalos racionales que forma una base de filtro de Cauchy redonda, generando así un número real a. Ya que $I_n \in a$ y $I_n \cap A_n = \emptyset$, concluimos que a $a \neq a_n$, para todos $n \geq 1$ (Weiss 2016, p. 28). ■

Lema 3.33 *Una sucesión* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de números reales converge a un número real b si, y solo si, para todos* $B \in b$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $B \in a_n$*, para todos* $n \geq n_0$.

Demostración. Supongamos que $\forall B \in b,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \in a_n$, para todo $n \geq n_0$ y se va a demostrar que $a_n \to b$. Dado $\varepsilon > 0$, considerese $q \in \mathbb{Q}$ con $q_{\varepsilon/2} \in b$, que es equivalente (proposición 3.17) a $\iota(q - \varepsilon/2) < b < \iota(q + \varepsilon/2)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ la condición supuesta. Luego, para $\forall n \geq n_0$, $q_{\varepsilon/2} \in a_n$ y así $\iota(q - \varepsilon/2) < a_n < \iota(q + \varepsilon/2)$. Ahora sabemos se cumple la desiguladad $\iota(q - \varepsilon/2) < b < \iota(q + \varepsilon/2)$ del cual por corolario 3.31 tenemos la siguiente desigualdad $q - \varepsilon/2 < Cb < q + \varepsilon/2$ de la cual se puede deducir $q + \varepsilon/2 < Cb + \varepsilon$ y así nuevamente por corolario 3.31 tenemos que $\iota(q + \varepsilon/2) < b + \iota(\varepsilon)$ concluyendo para las desigualdades dadas (para $\forall n \geq n_0$) que $a_n < \iota(q + \varepsilon/2) < b + \iota(\varepsilon)$. Haciendo un proceso similar para el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $b - \iota(\varepsilon) < a_n < b + \iota(\varepsilon)$, la formulación de convergencia típica.

A la inversa, supóngase que $a_n \to b$ en el sentido habitual, y con $B \in b$. Por redondeo y la condición de Cauchy podemos encontrar $q \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$ con $q_{\varepsilon/2} \in b$ y $q_\varepsilon \subseteq B$. En particular, $\iota(q - \varepsilon/2) < b < \iota(q + \varepsilon/2)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$, $b - \iota(\varepsilon/2) < a_n < b + \iota(\varepsilon/2)$ para todo $n \geq n_0$. Luego $b - \iota(\varepsilon) < a_n < b + \iota(\varepsilon)$, y así $q_\varepsilon \in a_n$, para $\forall n \geq n_0$. Como $q_\varepsilon \subseteq B$ se sigue que $B \in a_n$, para todos $n \geq n_0$. ■

Téngase en cuenta que ahora puede establecerse la singularidad de los límites de la siguiente manera. Si b, c son ambos límites de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, entonces, para todos $B \in b$ y $C \in c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con, en particular, $B, C \in a_n$. Como a_n es un filtro propio, se sigue que $B \cap C \neq \emptyset$, y por lo tanto b= c por el criterio de igualdad para números reales.

Considere una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reales. Sea $\hat{a}$ la colección de todos los subconjuntos $\hat{A} \subseteq \mathbb{Q}$ para los que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $\hat{A} \in a_n$, para todos $n \geq n_0$. Es un asunto trivial verificar que $\hat{a}$ es un filtro propio. Denotemos por $\mathcal{F}_\infty$ el filtro generado por $\{(q, \infty) \subseteq \mathbb{Q} \mid q \in \mathbb{Q}\}$, con $\mathcal{F}_{-\infty}$definido de manera similar. (Weiss, 2016, p. 28)

Teorema 5.3 sea $(a_n)_{n\geq 1}$ *y* $\hat{a}$ *como se presentaron anteriormente. Entonces*

1) $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\hat{a}$ *es un filtro de Cauchy* $\Leftrightarrow$ (a_n) *es una sucesión de Cauchy.*
2) *Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge, entonces este converge a* $(\hat{a})_o$.

3) $c \in \mathbb{R}$ *es un límite parcial de* $(an)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \hat{a} \subseteq c$.
4) ∞ *es un límite parcial de* $(an)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \hat{a} \subseteq \mathcal{F}_{\infty}$ *(y similarmente para* $-\infty$).

La construcción de Weiss se encuentra completada y se ha hecho la prueba de no numerabilidad de los números reales construyendo una estructura a partir de los conceptos básicos de filtros e intervalos y esto se ha hecho de tal manera que la sucesión, cuando $n \to \infty$, genera su vez un número real que no se encontraba en la sucesión, por cual los reales no son numerables. Y se define el límite de una sucesión en los términos tradicionales a la de construcción de los reales de Cantor, pero haciendo uso de la convergencia de filtros para determinar el límite. Estas condiciones se harán más visibles al verificar las conclusiones de este trabajo.

Conclusiones

- ***Importancia de la investigación historia en el desarrollo del pensamiento matemático en el docente.***

El desarrollo de los fundamentos matemáticos en diferentes períodos históricos ofrece sin lugar a dudas oportunidades que van ligadas a las condiciones precedentes del pensamiento humano y como éste no es estático, el conocimiento matemático emerge al corresponderse a este modelo evolutivo. El desarrollo de un concepto en particular siempre pretende dar solución a un problema establecido y reconocido por la comunidad matemática de cada época, pero este ofrece simultáneamente algún tipo de limitación en otros aspectos. La falta de fundamentación, antes de 1872, la definición de número real irracional presenta un obstáculo histórico-epistemológico que divorció la geometría de la aritmética. Se reconocía la existencia implícita de estos entes matemáticos pero los modelos o conceptos existentes eran inapropiados o no reconocidos correctamente como para pretender solucionar lo que representaba la existencia de los números irracionales. Se hicieron grandes avances en los conceptos matemáticos tomando este concepto de forma *a priori*. Por ejemplo, el caso de Newton y Leibniz en el desarrollo del cálculo con límites, funciones continuas, sumas infinitas, convergencia de sucesiones y series; pero hacía falta su fundamentación.

Desde los pitagóricos se planteó una problemática con el surgimiento de las magnitudes inconmensurables, evidenciándose una condición que desestabilizó los principios que regían el pensamiento matemático de la época en torno a la relación número y magnitud. El poder asignar a cada número una magnitud y viceversa, se logra formalmente por primera vez, a través de las construcciones de Cantor y Dedekind de los reales, que ofrecen una construcción del continuo a

partir de un tratamiento puramente aritmético, en contraposición al geométrico que se tenía en la antigüedad griega (Anacona, 2003, p.4).

El reconocimiento por parte del futuro docente o en ejercicio, de lo que ha representado para la humanidad fundamentar la existencia de este ente matemático, llamado número irracional incorporado en la estructura de $\mathbb{R}$, que es fundamental en teorías y aplicaciones que se usan en diferentes ciencias a las que el hombre accede en su entorno social. Aunque es imposible recrear del todo las condiciones que permitieron que algún concepto en particular emergiera, sí es posible hacer propuestas educativas que acerquen al estudiantado intuitivamente a la noción del objeto matemático (Calderón, 2014, Crespo 2009). Puesto que "Las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual" (Anacona, 2003, p. 3). Esto no implica caer solo en el ámbito de lo técnico y operatorio de los entes matemáticos, en particular los números reales, sino reconocer que los números irracionales son la razón por la cual existen niveles de pensamiento que en sus diversas formas dan cuenta de la existencia del continuo y el infinito: "Utilizar las construcciones del número real, (…) facilita el análisis de las características intrínsecas de los números reales en particular de los números irracionales" (Calderón, 2014, p. 79).

La propiedad de completitud, en los primeros años de la formación matemática universitaria, se ve generalmente instaurada desde un modelo de presentación axiomático, como se puede observar en Apóstol (2006, p. 11) "Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = \sup S$". La presentación axiomática no deja ver toda la conceptualización que subyace a los números reales. De igual forma, no permite ver un objeto matemático como el resultado de una construcción en la que se evidencia de manera más explícita la propiedad de la completitud. De ahí la importancia de estudiar diversas construcciones de los reales, entre ellas las de Cantor y Dedekind, a través de sucesiones fundamentales de racionales y cortaduras sobre $\mathbb{Q}$, respectivamente. En relación a estas construcciones de un corte más clásico, el enfoque propuesto por Weiss busca gozar de dicho reconocimiento y popularidad en la historia de las matemáticas. En sus propias palabras:

> (…) esperamos ubicar la construcción de Bachmann, a través de la variante que presentamos, como un competidor en popularidad potencialmente igual como la construcción de Cantor o la construcción de Dedekind[19] (Weiss, 2016, p. 2).

La construcción de Weiss ofrece una alternativa pedagógica en la enseñanza de la propiedad de completitud, ya que con ésta es posible evidenciar en la recta real la gran mayoría de propiedades y definiciones en torno a los números reales. Además, el estudio de la construcción de los reales por Weiss, implica un seguimiento histórico a otras construcciones que constituyen un referente importante para su desarrollo, tales como la construcción de Cantor, de Bachmann, de Dedekind y de Bourbaki. De esta forma, un docente que haga un acercamiento a la propiedad de la completitud de los reales, a través de la propuesta de Weiss, encontrará una síntesis moderna de construcciones clásicas de los reales.

- ***La construcción de Weiss, un enfoque geométrico mediante intervalos y filtros.***

La presentación de un modelo de construcción de los reales en particular, no establece que se usen directamente todas sus particularidades para realizar las operaciones y relaciones. Su propósito es el de garantizar la fundamentación del uso de un enfoque axiomático que es mucho más práctico y operativo, tal como lo menciona Weiss:

> El enfoque axiomático es lo suficientemente conveniente para desarrollar todo el cálculo y, por lo tanto, en un sentido, el único propósito de exhibir un modelo real de los axiomas es aliviar las sospechas (si las hay) de que tal vez una contradicción esté al acecho debajo de la superficie. Rara vez es el caso de que se utilicen las particularidades de cualquier modelo dado para probar realmente algo de interés. Una vez se verifican los axiomas, los detalles de la construcción han cumplido su propósito en el establecimiento de la consistencia relativa de los axiomas y se olvidan rápidamente[20] (Weiss, 2016, p. 5).

---

[19] We thus hope to place Bachmann's construction, through the variant we present, as a competitor of potentially equal popularity as either Cantor's construction or Dedekind's construction.

[20] The axiomatic approach is convenient enough to develop all of calculus and thus, in a sense, the sole purpose of exhibiting an actual model of the axioms is to ease one's suspicions (if any) that perhaps a contradiction is lurking underneath the surface. It is seldom the case that one uses the particularities of any given model in order to actually prove anything of interest. Once the axioms are verified, the details of the construction have served their purpose in establishing the relative consistency of the axioms, and are promptly forgotten.

Por lo cual las diferentes construcciones de los reales que dan cuenta de la fundamentación de la propiedad de la completitud, divergen en los métodos y técnicas empleadas para formular las definiciones, propiedades y teoremas que verifican el orden y la operatividad de los números reales, esta variabilidad del pensamiento humano tanto en sus concepciones como en la forma en que se abstraen los conceptos matemáticos, da cuenta de los diferentes matices interpretativos bajo el referente de un mismo ente matemático.

La construcción de Weiss define un número real como una la colección de subconjuntos de racionales, partiendo de intervalos de racionales ordenados sobre la recta, en donde cumplen las condiciones específicas de los filtros propios y se pueden verificar propiedades operativas entre intervalos. Este modelo presenta ventajas en el sentido que se pueden verificar las propiedades de orden que garantizan la existencia de los números reales en la recta geométrica. Es importante observar que la totalidad de las demostraciones en el proceso de la construcción son representables en la recta con su respectivo ordenamiento. Es decir, la construcción permite un acercamiento a la noción de número real tanto en lo aritmético como en lo geométrico. Este modelo de construcción desde un enfoque pedagógico ofrece al docente o futuro docente una herramienta encomiable en el sentido de que se permite un acercamiento geométrico e intuitivo a lo que representa un número real.

El orden de las colecciones, conjuntos y elementos es el principal aporte hecho por Weiss en su construcción. De hecho, él muestra un acercamiento detallado a la explicación de las relaciones de orden utilizadas, verificando su aplicabilidad mediante la operatividad de los intervalos. En comparación con las construcciones de Cantor y Bachmann, la de Weiss permite establecer una relación de orden a partir del posicionamiento de cualquier par de números reales sobre la recta, mientras que la de Cantor y Bachmann está supeditadas a las particularidades de las sucesiones de racionales que genera el límite que identifica al número real, lo cual dificulta establecer una relación de orden más evidente.

Los filtros utilizados por Weiss se generan por familias de intervalos de racionales, ésto permite hacer uso de las definiciones de *filtro de Cauchy* y *filtro redondo* para construir su definición de número real como *filtro mínimal de Cauchy*. Es de notar que las definiciones antes mencionadas, Weiss las presenta de forma muy sintética y comprensible ya que su idea es hacer una construcción asequible y autocontenida que permita hacer un acercamiento más sencillo al

análisis. Además de permitir al estudioso de esta construcción el familiarizarse con las particularidades del concepto de filtro, también le permite hacer de forma indirecta un acercamiento a conceptos topológicos referenciados en la construcción de Bourbaki, o sea que Weiss hace una transposición de los conceptos empleados por Bourbaki de manera más general (Chevallard 1998).

> Concluimos con la observación pedagógica de que las técnicas que uno aprende en el transcurso de la construcción (es decir, familiarizarse con los filtros) son útiles en topología y en análisis y no son herramientas exclusivas de esta construcción. Además, el criterio de convergencia bastante limpio obtenido en esta sección puede indicar que ésta construcción particular de los números reales puede servir como un puente firme hacia el estudio del análisis elemental en lugar de ser una marea de detalles complicados que uno nunca quiere volver a ver[21] (Weiss 2016, p. 29).

Weiss toma como principales argumentos para desarrollar su construcción las propiedades básicas de los intervalos, propiedades de orden total y parcial, la definición de filtro de Cauchy y la definición de filtro redondo. Este último es un concepto que le permite a Weiss caracterizar una clase particular de filtro con el cual define al número real como filtro minimal de Cauchy. Aunque es posible obtener esta definición mediante un proceso de contenencia de filtros, es importante notar que la propuesta de Weiss es práctica en el sentido de que facilita los procesos demostrativos en su construcción.

Esto permite que, a partir de cualquier filtro de Cauchy, se obtenga un filtro mínimo único que mantenga la condición de ser de Cauchy. Esta condición particular también se encuentra bajo los parámetros de las vecindades de un punto. Es de notar que a partir de un filtro de Cauchy convergente a un punto x, se puede obtener un filtro de vecindades $\mathcal{V}_x$, el cual cumple con la definición establecida para filtro redondo. La condición de filtro redondo en un espacio métrico sobre la recta real está representada por la noción de vecindad de un punto; lo cual implica que la construcción de Weiss permite encajonar un número real irracional mediante la vecindades de

[21] We conclude with the pedagogical remark that the techniques one learns in the course of the construction (namely getting acquainted with filters) are useful in topology and in analysis and are not ad-hoc tools just for this construction. Moreover, the rather clean convergence criterion obtained in this section may indicate that this particular construction of the real numbers can serve as a firm bridge toward the study of elementary analysis rather than being a swamp of convoluted details one never wants to see again (or ever).

racionales. Esto permite verificar la existencia de los irracionales, pero no da cuenta de su naturaleza de una forma explícita, aunque su condición de filtro minimal de Cauchy permite verificar el constructo propuesto por Weiss. Es decir el numero irracional no se toca, solo se puede aproximar mediante uso de racionales y las operaciones están ligadas a las propiedades de los racionales que los caracterizan.

Si se considera el filtro asociado a la sucesión $a_n = {}^{1}/_{n}$, es decir $\mathcal{F}_{\{{}^{1}/_{n}\}}$ donde sabemos que converge a 0, se verifica que la base de este filtro está dado por los intervalos $[0, a_n)$ de la sucesión convergente. Es importante notar que este filtro asociado es de Cauchy pero no es un filtro redondo, puesto que no es posible encontrar x_ε que sea subconjunto en especial de aquellos elementos del filtro en el que x es un punto frontera. Pero este filtro en particular contiene el filtro de vecindades de x , lo cual permite extraer un filtro que es de Cauchy y redondo (con las condiciones de vecindad), verificándose la definición de filtro mínimal de Cauchy, desde el enfoque propuesto por Weiss.

- ***La aritmética en la construcción de los reales de Weiss.***

Weiss propone de manera consecuente después del orden el uso de una función $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que es una incrustación (*embedding)* de orden, donde $\iota(q)$ es un número real racional. Se definen por lo tanto los reales racionales y los reales irracionales a partir de su núcleo (Lema 3.16); de esta forma se establece *la equivalencia (proposición 3.17)*, la cual permite acotar cualquier número real entre dos números racionales. Nótese que esto implica que se puede aproximar a un número real por ambos extremos tal que la diferencia entre el real y racional (según sea el extremo) tienda a cero. Este argumento es evidenciable tanto en la construcción de Cantor y Bachmann cuando se establece la definición del número real.

Una de las condiciones principales en la fundamentación para la construcción de los números reales es que al verificar la operatividad entre dos reales el resultado de ello debe ser de forma directa otro número real. En la construcción de Weiss la suma (y la multiplicación) de dos números reales no es directamente un número real, ya que $a + b = \langle a \oplus b \rangle$ es en realidad el generado por una base de filtro que es de Cauchy y redonda, esto opaca la elegancia de la construcción, pero de igual forma los recursos pedagógicos y didácticos que ofrece compensan sobremanera este paso

adicional en la operatividad, además ello no implica una contradicción en los argumentos matemáticos utilizados. Si se observa de forma similar, para que la condición de operatividad en la construcción de Cantor y Bachmann, su cumplimiento está ligado a un determinado $n \in \mathbb{N}$ que cumpla la condición de convergencia.

- ***Construcción de los reales: Cantor, Bourbaki y Weiss***

Las técnicas que usa Cantor están relacionadas con la definición de límite. Este concepto sirve como herramienta para hablar de convergencia y continuidad. Es así que con esta construcción se aproxima a un número real a partir de una sucesión de racionales que converge a otro racional o a un número irracional. Si observamos la construcción de Weiss, las técnicas que utiliza para hablar de convergencia de un filtro, están relacionadas con la existencia de intervalos de racionales que encajan a un número real en particular. Esto es evidenciable en el corolario 3.18 que permite encontrar dos números racionales de tal manera que encajan a un número real. Estos dos números están determinados por la existencia de un q particular quien determina el intervalo de racionales alrededor de él. Esto implica que por medio del corolario 3.19, de la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, es posible encontrar siempre otro racional p que genere un intervalo p_ε de tal manera que este contenido en q_ε y encajone el número real.

Para Cantor los reales son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales que convergen al mismo límite. Cada clase se podrá identificar una sucesión que converge o no a un número racional. Por su parte Weiss, en lugar de usar clases de equivalencia, define los números reales como filtros minimales de Cauchy tomado desde la propuesta de Bourbaki, los cuales pueden ser racionales o irracionales determinados por su *núcleo.*

Es importante destacar que la construcción de Weiss por medio de filtros es más intuitiva y topológica. Aunque se pierde operatividad algebraica, la construcción en su mayoría se puede entender desde la recta numérica mediante intervalos o vecindades, a diferencia de la construcción de Cantor que no es tan intuitiva ya que utiliza la noción de límite y de clases de equivalencia. Desde un contexto histórico la construcción de Cantor buscaba desprenderse de los argumentos geométricos como métodos demostrativos, porque a partir de los trabajos de Cauchy se quería separar las demostraciones de los argumentos geométricos al considerarse estos faltos de rigor.

Aun así, la construcción de Cantor ocupa un lugar de suma importancia en la historia, no sólo por ser la primera sino por la elegancia de dicha construcción, pero la construcción de Weiss goza de más herramientas pedagógicas si se busca modelos didácticos que permitan establecer la noción de número real a finales de la educación secundaria y principios de la universitaria. La construcción propuesta por Weiss reelaborada sobre la de Bourbaki, es una variante de la construcción de Cantor, puesto que los filtros son generalizaciones de las sucesiones.

Es posible establecer con un estudio investigativo más exhaustivo un desarrollo de la construcción de Cantor verificándose esta como *la piedra angular* de la construcción de Bachmann, pasando a la de Weiss y culminando con la Bourbaki esto en el sentido epistemológico ya que históricamente Weiss es más reciente que la construcción de Bourbaki . De esta forma, ubicaríamos la de Weiss en un posicionamiento entre Bachmann y Bourbaki. Es importante tener presente que, aunque Cantor, Bachmann, Bourbaki y Weiss parten del conjunto de los números racionales para establecer la propiedad de la completitud, recurren a métodos y técnicas distintas para abordar el asunto de la convergencia, el cual es transversal a todas las construcciones. La construcción de Weiss toma elementos propios de los espacios uniformes de Bourbaki, tales como los filtros de Cauchy y los filtros minimales de Cauchy y los desarrolla en términos de espacios métricos, esto en aras de presentar una propuesta alternativa que permita tener un mayor abanico de posibilidades en la compresión de la propiedad de completitud.

Si bien la construcción de Weiss es más reciente que la propuesta por Bourbaki, ella se puede ubicar epistemológicamente en un punto transitivo entre la construcción de Bachmann y la de Bourbaki. Más aún, resulta obvio reconocer que la base histórica y epistemológica de la construcción de Weiss está en la propuesta de Cantor de 1872, cuya expresión más alta de abstracción y generalidad se encuentra en la construcción de Bourbaki de 1940. Sin embargo, el aporte hecho por Weiss se constituye en una variante intermedia que presenta ventajas de carácter educativo que merecen ser consideradas en la formación matemática universitaria.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2017) *Los números reales en el estructuralismo Bourbakista: un análisis histórico-epistemológico con fines educativos.* Tesis doctorado en Matemáticas. Puerto Real, España: Universidad De Cádiz.

Anacona, M (2003) *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. REVISTA EMA, VOL. 8, Nº 1, 30-46.

Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático.* Editorial Reverté. Segunda edición.

Bachmann, P. (SF). Erste Vorlesung. *Definition der Irrationalzahlen*. Götinger Digitalisierungszentrum GDZ. No.37070. Goettingen, Germany. Recuperado de: *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN577766198*

Bergé, A. & Sessa, C. (2003). *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación Didáctica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 6, Núm. 3, pp. 163-197.

Bourbaki, N. (1965). Topologie générale. *Éléments de Mathématique*. Livre III. Hermann. Paris.

Calderón, N. (2014) *Diferentes construcciones del número real.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional De Colombia.

Cantor, G. (1872) : *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques.* Traduction d'un mém. Publ. de. l. annales math. De Leipsic t. V. p. 123. Acta mathematica 2, 1883, p. 336-348.

Cauchy, A (1821) *Cours D´Analyse.* Editorial Sociedad Andaluza De Educación Matemática Thales. Sevilla: España.

Chand A. (2014) *Axiomatic analysis via value quantales.* Tesis de maestría en ciencias matemáticas. The University of the South Pacific.

Chand A. & Weiss I. (2015) *Completion of continuity spaces with uniformly vanishing asymmetry*. Topology and its Applications, https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.01.006

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión significado de los números irracionales en el aula de matemáticas. *Premisa (41*), 21-30. Recuperado de: https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1K3MQNGDC-B1XP1R-1GZJ/Crespo,%20C.%20BIBLIOTECA%20CLASE%203.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE grupo editor. Tercera edición., Paris, La Pensée Sauvage.

Dedekind, R. (1872) *Continuidad y números irracionales.* Traducción y comentarios por J. Bares & J. Climent.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (1. Myriam Restrepo, Trad.) Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación matemática: Merlín I.D.

Ferreirós, J. (1999) *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*. Springer Basel AG.

Ferreirós, J. (2006). *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos: Escritos y Correspondencia Selecta*. Barcelona: Editorial Crítica.

García, A. (2017) *Los números reales como conjunto de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media.* Cali, Colombia: Universidad Del valle.

Hawking, S. (2005) *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Editorial Crítica, S.L. Barcelona

Harris, D. (1971) *Structures in topology.* En Memoirs of the American mathematical society number 115. Publicado por Memoirs of the American mathematical society providence, Rhode Island.

Hernández, F. (2003). *Teoría de Conjuntos*. Segunda edición. Sociedad Matemática Mexicana.

Hrbacek, K. & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*. New York: Marcel Dekker.

Kline, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid.

Moore, R., Kearfott, B. & Cloud, M (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.

Mora, L. & Torres, J. (2007). *Concepciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre los Números Reales*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Munkres, J. (2002) *Topología 2. ª Edición* editorial Pearson Educación, S.A., Madrid.

Pérez-Fernández, F., & Aizpuru, A. (1999). El Cours d'Analyse de Cauchy. *Suma* 30, 5-25.

Puertas, M (1994). *Elementos: libro V – IX*. Editorial Gredos, S.A. Madrid.

Puerto, Y. E. (2011). Unidad didáctica para la construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes de grado undécimo. Tesis de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, 137. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Scalia, Sara. (2000). "Dos conflictos al representar números reales en la recta". Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Suárez, C. (2007). *Aceptación en España de los criterios rigurosos del Análisis Matemático durante los siglos XIX y XX*. Tesis doctorado en Matemáticas. Puerto Real, España: Universidad De Cádiz.

Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vallejo, F. (2008). *La Semicontinuidad en el Surgimiento de la Teoría de Funciones*. Revista Sigma. Vol.8. pp. 15-27. Universidad de Nariño.

Weiss, I. (2015). The Real Numbers - A Survey of constructions. [*math. HO*]. Vol.1. pp. 1-18. Recuperado de: http://arxiv.org

Weiss, I. (2016). The Reals as Rational Cauchy Filter. *New Zealand Journal of Mathematics*, 46, 21-51.