



El conocimiento didáctico y la visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva.

Juan Pablo Orozco García

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación énfasis Educación Matemática

Modalidad investigación

2024



El conocimiento didáctico y la visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva.

Juan Pablo Orozco García

Tutor:

Evelio Bedoya Moreno, PhD.

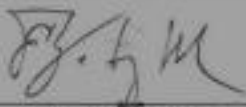
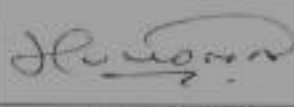
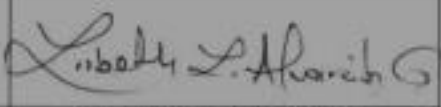
Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación énfasis Educación Matemática

Modalidad investigación

2024

 FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Dirección de Posgrados		ACTA DE SUSTENTACIÓN		
Programa Académico: Maestría en Educación - Énfasis en Educación Matemática				
Código del programa: 7412	Resolución del programa: 118	Día	Mes	Año
		11	10	2024
Título del Trabajo:				
"El conocimiento didáctico y la visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva"				
Se trata de:				
Tesis de Maestría				
Director				
Evelio Bedoya Moreno				
Evaluadores				
Nombres y Apellidos		Filiación Universitaria		
Humberto Mora Martínez		Universidad del Valle		
Lisbeth Lorena Alvarado Guzman		Universidad del Valle		
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	E-mail	Téfonos de contacto	
Juan Pablo Orozco Garcia	202000667	juan.orozco@correounivalle.edu.co	3214606497	
Evaluación				
Aprobado	☐	Meritorio	☒	Laureado
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador	Segundo Evaluador	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el _____.				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes, expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				
Firma				
				
Prof. Evelio Bedoya	Prof. Humberto Mora	Prof. Lisbeth Lorena Alvarado		
Director del Trabajo de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador		
				
Prof. Rocio del Socorro Gomez Zuñiga				
(En reemplazo del Director de Posgrados)				

AGRADECIMIENTOS

A mi abuela, Gloria Amparo García, gracias por inspirarme a luchar por lo que quiero. Estoy seguro de que todas las oraciones que hiciste para que mi proceso termine de forma satisfactoria, hicieron efecto.

A mi esposa Mayra, por motivarme a iniciar este camino y orientarme en la construcción de este trabajo. Gracias por ser esa mano de apoyo y por darme ese último aliento que necesitaba.

A mi mamá, hermano y abuelo por estar pendientes de todo el proceso. Su apoyo desde el día uno fueron un gran impulso.

Al profesor Evelio Bedoya Moreno por sus orientaciones y aportes tan valiosos para el desarrollo de este trabajo que permitieron enriquecerlo y aportaron a mi formación como docente.

A mis profesores y compañeros de la maestría por tantas experiencias compartidas que permitieron fortalecer mi formación.

A mis amigos y familiares que fueron conocedores de este proceso y que siempre me han rodeado con su cariño. ¡Gracias!

TABLA DE CONTENIDO

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	15
1.1. OBJETIVOS	18
1.2. HIPÓTESIS.....	19
1.3. ANTECEDENTES	19
1.3.1. Formación inicial de profesores de matemáticas	19
1.3.2. Visualización en Didáctica de las Matemáticas.....	21
2. MARCO CONCEPTUAL.....	24
2.1. Conocimiento didáctico & análisis didáctico en la formación de profesores de matemáticas.....	26
2.2. Modelos locales de los organizadores del currículo, análisis didáctico y las unidades didácticas.....	28
2.2.1. Análisis curricular.....	33
2.2.2. Análisis didáctico cognitivo.....	43
2.2.3. Análisis de instrucción.....	44
2.3. LA VISUALIZACIÓN: UN ORGANIZADOR DIDÁCTICO Y CURRICULAR PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.	45
3. METODOLOGÍA.....	51
3.1. MARCO METODOLÓGICO.....	51
3.1.1. Sistematización de experiencias	52
3.1.2. Análisis didáctico como metodología de investigación.....	53
3.1.3. Estudio de caso	56
3.1.4. Investigación evaluativa de programas de formación.....	57
3.2. DISEÑO METODOLÓGICO.....	58
3.2.1. Duración de la aplicación.....	60
3.2.2. Contexto y participantes	62
4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	63
4.1. LAS UNIDADES DIDÁCTICAS	63
4.1.1. La Unidad de Análisis Didáctico (UAD).....	64
4.1.2. La unidad didáctica guía (UDG).....	91

4.2. La visualización como organizador didáctico y curricular: programa de formación inicial de profesores de matemáticas.....	91
4.3.1. Pilotaje en curso virtual (Didáctica II: Desarrollo del pensamiento geométrico y métrico).....	96
4.3.2. Experimento Didáctico (Didáctica V: Tópicos de Didáctica de las Matemáticas)....	100
5. CONCLUSIONES	134
5.1. Conclusiones generales	134
5.2. Perspectivas para desarrollos futuros y recomendaciones	136
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	138
A. ANEXOS.....	143

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Matriz metodológica.	60
Tabla 2. Duración de la aplicación.	61
Tabla 3. Información general institución educativa y participantes de la investigación.	62
Tabla 4. Referentes curriculares de la derivada.	66
Tabla 5. Algunos materiales para la enseñanza de la derivada.	91
Tabla 6. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 3.	112
Tabla 7. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 4.	114
Tabla 8. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 5.	118
Tabla 9. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 6.	120

LISTA DE GRÁFICAS

Figura 1. Categorías teóricas del trabajo de investigación.	25
Figura 2. Esquema del análisis curricular normativo nacional.	38
Figura 3. Esquema del análisis curricular normativo institucional.	41
Figura 4. Estructura metodológica general del trabajo.	55
Figura 5. Estructura metodológica específica del trabajo.	56
Figura 6. Método de Barrow para el cálculo de tangentes.	69
Figura 7. Cálculo de tangentes de Newton, basado en el triángulo característico de Barrow.	71
Figura 8. Línea de tiempo con los matemáticos de mayor contribución a la evolución del concepto de derivada.	74
Figura 9. Dibujo posición respecto al tiempo del movimiento del ciclista.	76
Figura 10. Representación gráfica de la posición respecto al tiempo del movimiento del ciclista.	76
Figura 11. Gráfica posición contra tiempo del movimiento del ciclista cuando su velocidad es variable.	77
Figura 12. Acercamiento del punto (x_2, t_2) al punto (x_1, t_1)	78
Figura 13. Representación gráfica en el plano cartesiano de la derivada de la función f en el punto P	81
Figura 14. Representación gráfica en el plano cartesiano del paso de recta secante a recta tangente a una curva.	82
Figura 15. Estructura didáctico conceptual de la derivada.	83
Figura 16. Esquema de representación en apoyo a nuestra definición de la derivada.	84
Figura 17. UAD de la derivada, versión 1.	98
Figura 18. Tabla de contenido del trabajo final de un grupo de estudiantes.	99
Figura 19. Parte del póster presentado en simposio MEM 2022.	100
Figura 20. Ficha de caracterización de los EPP.	101
Figura 21. Artículo presentado a los EPP.	102
Figura 22. Gráfica de una curva y un punto P en ella.	104
Figura 23. Acercamiento de dos puntos sobre una curva con el finde hallar la recta tangente.	104

Figura 24. Gráfica de distintas curvas y posibles rectas tangentes.	110
Figura 25. Gráfica de la función $y=1/x$	110
Figura 26. Applet montaña rusa.	111
Figura 27. Certificado de participación EIEM6.	122

RESUMEN

La formación de profesores de matemáticas es un tema actual en las distintas investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, de aquí que diversos autores muestran como la manera para mejorar progresivamente la comprensión de la labor docente y perfeccionar su enseñanza ideal, viene de la mano con la investigación y desarrollo del currículo bien fundado, los cuales han de estar fundamentados en estudios realizados en clases escolares y diversas experiencias de los profesores. De aquí que el profesor como investigador debe preocuparse por entender su práctica, para asimismo poder mejorarla (Rico et al, 2013; Bedoya 2002, 2020).

Por lo anterior, la presente investigación da cuenta de un proyecto de Sistematización de una Experiencia Docente de un profesor-investigador, sobre una propuesta de programa de formación inicial de profesores de matemáticas, alrededor de una estructura matemática conceptual relacionada a recta tangente a una curva y su pendiente. Con base en los referentes teóricos se propone caracterizar a la *visualización como un organizador didáctico y curricular para la formación de profesores de matemáticas*.

Palabras claves: Formación de profesores de matemáticas, análisis didáctico, conocimiento didáctico, visualización, recta tangente a una curva y su pendiente.

ABSTRAC

The training of mathematics teachers is a current topic in various research studies in the field of Mathematics Education. Hence, several authors argue that the progressive improvement of teaching understanding and the enhancement of ideal teaching go hand in hand with well-founded curriculum research and development. These endeavors should be grounded in studies conducted in school classrooms and diverse teacher experiences. Consequently, teachers, as researchers, must strive to understand their practice in order to improve it (Rico et al, 2013; Bedoya 2002, 2020).

Therefore, this research project presents a Systematization of a Teaching Experience carried out by a teacher-researcher concerning a proposed program for the initial training of mathematics teachers. This program revolves around a conceptual mathematical structure related to the tangent line to a curve and its slope. Based on theoretical references, the visualization is proposed as a didactic and curricular organizer for the training of mathematics teachers.

Keywords: Training of mathematics teachers, didactical analysis, didactical knowledge, visualization, tangent line to a curve and its slope.

INTRODUCCIÓN

La presente memoria escrita es producto de una tesis de investigación en la cual se muestra la elaboración e implementación de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, por medio de una sistematización de experiencias docente, relacionada con *la visualización como un organizador didáctico y curricular*, basado en el contenido matemático escolar de la recta tangente a una curva y su pendiente.

Dicha investigación se desarrolló como requisito para aspirar al título de Magister en Educación con énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle. El interés surge de las dificultades de los docentes de educación media para enseñar contenidos relacionados al cálculo, específicamente la noción de derivadas, y la necesidad de buscar propuestas de formación alternativas, tanto para profesores en ejercicio, como para profesores en formación inicial.

En los grupos de investigación PNA (Pensamiento Numérico Algebraico) y GIFPME (Grupo De Investigación y Formación De Profesores En Torno Al Pensamiento Matemático Educativo) con Grupolac COL0036156, se sigue la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas, donde en la actualidad surge como una alternativa de investigación la formación inicial de profesores de matemáticas.

De lo anterior que, con la presente propuesta de investigación, se busca, a través de la investigación y la innovación curricular y desde la propia experiencia como docente-investigador, hacer un aporte significativo al campo de la Didáctica de las Matemáticas, que sirva de referencia a los profesores de matemáticas en ejercicio, y a los docentes en formación inicial.

Por otra parte, con miras a desarrollar sentido-comprensión, la Educación Matemática, específicamente la Didáctica de las Matemáticas, trata de observar e investigar la diversidad de dificultades en la enseñanza del cálculo, para así darle un tipo de tratamiento a estas. De aquí surgen diversas investigaciones que contemplan a la visualización como el proceso capaz de

mediar con dicha problemática de la enseñanza de las matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991; De Guzmán, 1996; Presmeg, 2006; Hitt, 1998, 2005; Llorens, 1999; Bedoya, 2002; 2020; entre otros). Y es de esta manera como Hitt (1998) menciona que algunos de los problemas que se tiene en la enseñanza del Cálculo, destacando que los profesores de matemática hacen poco uso de diferentes tipos de representación y se limitan a operaciones algebraicas dejando de un lado el contenido visual que puede ayudar en el momento de abordar distintos problemas en el aula de clase.

Es por ello, que el propósito general de la presente investigación va dirigida a la búsqueda o construcción de un modelo local de análisis didáctico, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos del contenido que sostienen el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente.

De acuerdo con esto, el documento está organizado en cinco capítulos. El primer capítulo hace una delimitación del problema de investigación, el cual se soporta desde tres puntos de vistas: la formación de profesores, la visualización en el campo de la Didáctica de las Matemáticas y el contenido matemático escolar. Además, se concreta el problema en una pregunta, se definen los objetivos, la hipótesis y se muestran algunos antecedentes de investigación que sustentan la problemática.

El segundo capítulo muestra el marco conceptual, el cual se basa en los aportes realizados por el grupo de investigación PNA, por lo que surgen tres categorías teóricas; Conocimiento didáctico & análisis didáctico en la formación profesional de profesores de matemáticas; Modelos locales de los organizadores del currículo, análisis didáctico de contenido y la unidad didáctica (unidad de análisis didáctico y unidad didáctica guía); La visualización: un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas (Rico, 2013; Bedoya, 2002).

Luego, el tercer capítulo presenta la metodología de investigación, teniendo en cuenta el marco metodológico, es decir, las distintas teorías con la que se desarrolla el trabajo, la cual se basa en cuatro aspectos; la investigación de diseño; la sistematización de experiencias; el análisis didáctico como metodología de investigación; la evaluación de programas de formación. Además, se describe el diseño metodológico, que define la duración, los participantes, las fases que se pusieron en marcha y permitieron la ejecución de este.

Posteriormente, el cuarto capítulo, presenta los resultados obtenidos al desarrollar el programa de formación y aplicar los instrumentos propuestos en el diseño metodológico con su respectivo análisis. Además, en el presente capítulo se muestra la UD (UAD y UDG) como un resultado de la investigación, ya que fue desarrollada teniendo en cuenta la recolección de información que el equipo investigador desarrolló durante la primera etapa de la investigación (revisión documental).

Finalmente, el quinto capítulo presenta las conclusiones, reflexiones y recomendaciones relacionadas con la información suministrada por los estudiantes para profesor del programa de formación y descrita en el capítulo anterior, en relación con la pregunta y los objetivos que orientan este trabajo de investigación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las reflexiones sistemáticas sobre problemáticas en las características, contenidos y sentidos de la formación, los conocimientos, saberes y competencias profesionales de los profesores de matemáticas, han llevado a constituir en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas el campo de Formación de Profesores de Matemáticas (FPM), el cual se ocupa, en términos generales, del desarrollo profesional, de los diferentes dominios de conocimiento y saberes sobre los procesos instruccionales, curriculares y educativos en torno a los distintos contenidos matemáticos escolares (Solano et al, 2013).

En la actualidad, la formación de docentes se considera un tema de gran relevancia para el desarrollo docente, aún más cuando se entiende la formación docente como el proceso en el que un sujeto se hace profesional en un campo disciplinar específico (Edwards et al, 1995 citado en Corrales, 2013). En palabras de Campillo y Rico (2004), las competencias básicas que se espera desarrollen los futuros profesores a lo largo de su formación inicial, están relacionadas con la capacidad para planificar su actuación docente.

Dentro de las decisiones que debe tomar un profesor a la hora de realizar su actividad docente, aparecen planificaciones curriculares y Didácticas, las cuales orientan dicha actividad realizada por parte de los maestros. En palabras de Rico (1997), para dicho proceso de planificación, se deben tener presentes las directrices curriculares, criterios respecto al contenido, criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos, para finalmente, tener presente los criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores y las dificultades.

En la investigación en formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria existe una marcada preocupación por establecer las competencias que debe desarrollar un futuro profesor

de matemáticas para el ejercicio de su actividad docente (Abbott et al, 2000, citado en Gómez et al, 2008). En este contexto y desde el punto de vista de formación del profesor, la competencia de planificación de la enseñanza resulta clave tanto como contenido u objetivo de dicha información, como objeto de estudio y conocimiento.

Tal y como lo menciona Rico (2009), existe una ausencia de un plan de formación de profesores que contemple los avances curriculares y la incorporación de las NTICs, generando así dificultades en las tareas de planificación y desarrollo de *Unidades Didácticas* basadas en un *Análisis Didáctico*. Los autores anteriormente mencionados, hablan de la forma en la que, en la Universidad de Granada, por medio de un curso orientado a la formación inicial de profesores de matemáticas, se propone la realización de un *Análisis Didáctico* y la elaboración de *Unidades Didácticas* en torno a un contenido matemático escolar determinado, como una estrategia adecuada para el desarrollo de la formación y de las competencias profesionales de los docentes (Gómez et al, 2008).

Posteriormente Bedoya (2020), muestra como la manera para mejorar progresivamente la comprensión de la labor docente y perfeccionar su enseñanza ideal, viene de la mano con la investigación y desarrollo del currículo bien fundado, los cuales han de estar fundamentados en estudios realizados en clases escolares y diversas experiencias de los profesores. De aquí que el profesor como investigador debe de preocuparse por entender su práctica, para asimismo poder mejorarla.

Por otra parte, Hitt (1998; 2003) afirma que uno de los problemas para la comprensión de conceptos del cálculo se debe a la falta de acercamiento visual que se hacen de dichos objetos matemáticos (entre los que se encuentra la derivada), pues los profesores de matemáticas hacen énfasis en los trabajos de proceso algebraico y se resta importancia a los procesos visuales. Autores como Eisenberg y Dreyfus (1990, citado en Hitt, 2003), mencionan que hay una tendencia a pensar

que las matemáticas no son visuales, por lo cual hay una resistencia a aceptar los aspectos positivos de la visualización de los conceptos matemáticos. En particular y como lo expresa Godino *et al* (2012):

El papel de la visualización en el trabajo matemático, profesional o escolar es complejo ya que está frecuentemente imbricado con el uso de inscripciones simbólicas, que, aunque «se vean», su significación es puramente convencional. El problema tiene relevancia incluso cuando la visualización se refiere al uso de objetos visuales, los cuales interaccionan no solo con las inscripciones simbólicas, sino también y principalmente con el entramado de objetos conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que se ponen en juego en las correspondientes configuraciones.

Presmeg (1997; 2006), muestra que un tema actual e importante en el campo de la Educación Matemática es ver cómo interactúa la visualización con la Didáctica de las Matemáticas, pues considera que dichas investigaciones se han dejado de lado, generando una devaluación de la visualización en la educación matemática, lo cual deja poco espacio para que las prácticas en el aula incorporen y valoren la visualización como una parte integral de la actividad matemática (citado en Arcavi, 2003). De lo anterior la autora plantea trece preguntas que pueden orientar el trabajo investigativo de la visualización en la Educación Matemática, donde se destaca el ver cómo pueden los profesores ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre lo visual y lo simbólico de las distintas nociones matemáticas (p. 227).

Por lo anterior, este trabajo de grado pretende reflexionar sobre la planificación curricular y didáctica del profesor en formación inicial al desarrollar un modelo local de Análisis Didáctico del concepto de derivada, con el fin de mostrar que el proceso de visualización didáctica es un

conocimiento didáctico válido y especializado del profesor, visto como docente y como investigador.

De aquí que surge la pregunta que orienta este estudio:

¿Qué conocimientos didácticos y modelo local de análisis didáctico sostienen el proceso de visualización de la pendiente de la recta tangente a una curva, con miras a la construcción del concepto de derivada por parte de profesores de matemáticas en formación inicial?

1.1.OBJETIVOS

- **Objetivo General**

- ✓ Identificar y presentar algunos conocimientos didácticos que sostienen el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente, con miras a la construcción del concepto de derivada por parte de los profesores en formación.

- **Objetivos específicos**

- ✓ Construir un modelo local de Análisis Didáctico, basado en la evolución histórico-epistemológica, el análisis fenomenológico y el análisis semiótico del concepto de derivada, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos del contenido que sostienen el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente.
- ✓ Diseñar e implementar un programa de formación inicial de profesores de matemáticas que permita generar una unidad didáctica para la enseñanza y comprensión de la derivada basada en el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente.

1.2.HIPÓTESIS

Un modelo local de análisis didáctico entorno al proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente, es un recurso o medio para la enseñanza y comprensión del concepto de derivada en un punto de una función. De lo anterior que en la presente investigación se aportan conocimientos didácticos que fundamentan al proceso de *visualización* como un *organizador del currículo*, de acuerdo con la propuesta teórica de los organizadores del currículo formulada por el grupo de investigación, formación e innovación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA).

1.3.ANTECEDENTES

Para el presente apartado, se realizó una revisión de diversos estudios tanto nacionales como internacionales contemplados dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas, teniendo como líneas la formación inicial de profesores de matemáticas y la visualización didáctica (o visualización en la Didáctica de las Matemáticas), haciendo énfasis en lo trabajado por el grupo de investigación PNA. Así pues, a continuación, se expondrán algunos de los estudios que sirven como antecedentes a mi investigación.

1.3.1. FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En palabras de Rico (2004), la principal finalidad de la formación inicial consiste en preparar al profesor que comienza su trabajo en el mundo de la educación para la consideración coherente de las múltiples tareas que requiere la docencia y su tratamiento coordinado. De aquí que hay una diversidad de problemas que surgen en el ámbito educativo de las matemáticas, lo cual hace que al interior del campo de la Didáctica de las Matemáticas aparezcan distintos paradigmas que concreten programas de formación docente (Bedoya, 2020).

Dentro de los trabajos del grupo PNA (grupo investigativo con más de 30 años trabajando en proyectos sobre la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas), se destaca la tesis doctoral “Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras” (Bedoya, 2002), la cual ha sido, en gran parte, considerada de manera estructurada en esta investigación, pues se concreta el diseño, planificación, implementación y evaluación de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, teniendo en cuenta el conocimiento didáctico que requiere el profesor de matemáticas para realizar un **modelo local de análisis didáctico** de carácter conceptual y metodológico, basado en la propuesta de **los organizadores del currículo** del grupo investigativo anteriormente mencionado.

Finalmente, es importante destacar dos trabajos desarrollados en el ámbito local, dentro de la línea de formación inicial de profesores de matemáticas, teniendo en cuenta las propuestas desarrolladas en el grupo PNA:

1. Corrales (2013) desarrolla una sistematización de experiencias sobre una propuesta de unidad de organización y concreción curricular y didáctica (Unidad Didáctica) en torno a una estructura conceptual asociada al tema de los números racionales, correspondiente al grado séptimo (7º) de educación básica, en el contexto de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira. En dicho trabajo se destaca la implementación de un modelo local de análisis didáctico, con el fin de identificar conocimientos didácticos claves del contenido, para posteriormente estructurar una unidad didáctica que dé cuenta de la planificación y competencia curricular y didáctica de la docente.
2. Solano (2017) desarrolla un análisis didáctico de las concepciones de la derivada que tienen dos profesores de matemáticas (un matemático y un licenciado) de educación superior, por medio del conocimiento didáctico de la derivada expresado en sus creencias y concepciones. En dicho trabajo se destaca el análisis didáctico de contenido de la derivada,

pues tiene consideraciones histórico-epistemológicas, semióticas y fenomenológicas de dicho objeto matemático.

1.3.2. VISUALIZACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

“El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización, y en general la ostensión, en la construcción y comunicación matemática” (Godino, et al, 2012).

En miras del desarrollo del aprendizaje, la Educación Matemática, específicamente la Didáctica de las Matemáticas, trata de observar e investigar la diversidad de dificultades en la enseñanza del cálculo, para así darle un tipo de tratamiento a estas. De aquí surgen diversas investigaciones que contemplan a la visualización como el proceso capaz de mediar con dicha problemática de la enseñanza de las matemáticas.

En palabras de Eisenberg y Dreyfus (1990), citado por Hitt (2003), se menciona que hay una tendencia a pensar que las matemáticas no son visuales, por lo cual hay una resistencia a aceptar los aspectos positivos de la visualización de los conceptos matemáticos. De aquí que autores como Zimmermann y Cunningham (1991) consideren que las matemáticas deben trabajar con elementos no estrictamente algebraicos, pues se pueden incluir elementos de carácter espacial, verbal, lógico e intuitivo, procurando implementar la visualización y restaurarla a partir de imágenes visuales.

El concepto de *visualización matemática* se desarrolla dentro de las investigaciones realizadas por Hitt (1998; 2003), resaltando el valor de la visualización en la resolución de problemas y lo complicado que puede resultar el trabajar con los estudiantes por medio de la visualización matemática, ya que se requieren procesos cognitivos superiores, dejando de lado los procesos algorítmicos predominantes en la metodología de enseñanza tradicional en la educación

secundaria. Finalmente, el autor en mención muestra algunos de los problemas que se tiene en la enseñanza del Cálculo, destacando que los profesores de matemática hacen poco uso de diferentes tipos de representación y se limitan a operaciones algebraicas dejando de un lado el contenido visual que puede ayudar en el momento de abordar distintos problemas en el aula de clase.

Por otra parte, Boz (2005), desarrolla la visualización dinámica en un artículo que examina el uso de software con la visualización en educación matemáticas, por medio de la revisión de distintas investigaciones sobre dicho término, mostrando inicialmente que no hay un consenso para definir visualización en Educación Matemática, además que dicho concepto juega un papel vital en el pensamiento matemático, por lo que los entornos de software podrían integrarse en la enseñanza de las matemáticas para fomentar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos.

Rahim et al (2009), muestra desde el punto de vista de la enseñanza, que la visualización parece ser un método poderoso a utilizar para mejorar la comprensión de los estudiantes de una variedad de conceptos en muchas disciplinas como las matemáticas, pues hay muchas razones que sustentan el uso de la visualización para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles de la educación. Por su parte, Guzmán (2002) muestra en su investigación que introducir procesos de visualización dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una tarea difícil y esto se debe al proceso de decodificación que se debe realizar, ya que dicho proceso, al ser familiar para el profesor se le facilita, mientras que para el estudiante no.

Luego Presmeg (2006), desarrolla un estado del arte sobre la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mostrando que la investigación sobre visualización en la Educación Matemática se inició a fines de la década de 1970 y principios de la de 1980 y ha ido creciendo lentamente hasta que en 1990 llegó a ser reconocida como un campo importante para la educación matemática, pues surgieron investigaciones de desarrollo curricular con contenidos

particulares, promoviendo la enseñanza con el proceso de visualización, por medio del uso de entornos tecnológicos.

Después, la autora en mención explica que en el 2000 se amplió el horizonte de la visualización en Educación Matemática incluyendo aspectos semióticos, al desarrollar investigaciones sobre el aprendizaje significativo de las matemáticas basado en la visualización como un componente esencial en los sistemas de representación dentro de los procesos de resolución de problemas. Asimismo, considera que un tema actual e importante en el campo de la Educación Matemática es ver cómo interactúa la visualización con la Didáctica de las Matemáticas, pues interpreta que dichas investigaciones se han dejado de lado.

Finalmente, Presmeg (2006) plantea trece preguntas que pueden orientar futuras investigaciones respecto a la visualización en la Educación Matemática, de las cuales resalto cinco que pueden ser importantes para el desarrollo de la presente investigación:

7. ¿Cómo pueden los profesores ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre inscripciones simbólicas de las mismas nociones matemáticas?
9. ¿Cómo puede el uso de imágenes e inscripciones visuales facilitar u obstaculizar la reificación de procesos como objetos matemáticos?
10. ¿Cómo se puede aprovechar la visualización para promover la abstracción y generalización matemática?
12. ¿Cómo cambian los aspectos visuales de la tecnología informática la dinámica del aprendizaje de las matemáticas?
13. ¿Cuál es la estructura y cuáles son los componentes de una teoría global de visualización para la educación matemática? (p. 227).

Luego, Guzmán (2001) en su obra *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*, desarrolla un conjunto de intuiciones visuales que apoyan y en ocasiones han

dado origen a conceptos y procesos del análisis matemático. En dicho texto muestra lo que él define como visualización, alejando dicho concepto de la definición en psicología, pues la enfoca de forma que la visualización son aquellas ideas, conceptos y métodos de las matemáticas que tienen una gran riqueza visual y representable intuitivamente, con el fin de resolver problemas, por medio de la manipulación de dichas representaciones.

Posteriormente, es importante mencionar como antecedente local, un trabajo de grado desarrollado por Ordoñez y Ramírez (2014), en el que desarrollan un análisis didáctico del proceso de enseñanza de la derivada en el curso de Cálculo I en la Universidad del Valle, buscando describir y analizar críticamente el papel que los profesores de dicho curso y el papel que le asignan a la visualización en el contexto local o particular del sistema didáctico que se implementa en la clase de Cálculo I, cuando se propone enseñar y aprender el concepto (sistema o estructura conceptual) de la derivada.

Finalmente, Bedoya (2002), teniendo en cuenta diversas investigaciones (Bishop, 1983; Zimmermann y Cuningham 1991; Tall 1991; Zaslavsky 1997), muestra el desarrollo que ha tenido el concepto de visualización en la Didáctica de las Matemáticas, esto con el fin de proponer el concepto de **visualización didáctica** como un proceso estructurado y sistemático, el cual representa de forma interna y externa los objetos matemáticos escolares de forma conceptual y procedimental, todo con propósitos didácticos. Es importante aclarar que, dentro del presente proyecto de investigación, se espera afinar aún más el concepto de **visualización didáctica**.

2. MARCO CONCEPTUAL

El trabajo investigativo a desarrollar centra la atención en el proceso de visualización como un conocimiento didáctico del contenido especializado del profesor en formación, es decir, como un

organizador didáctico y curricular. De aquí que, como soporte de la posición de la investigación a desarrollar, se tendrán en cuenta varias categorías teóricas (ver figura 1), de las cuales se puntualizará en tres aspectos, a saber:

- Conocimiento didáctico & análisis didáctico en la formación profesional de profesores de matemáticas.
- Modelos locales de los organizadores del currículo, análisis didáctico de contenido y la unidad didáctica (unidad de análisis didáctico y unidad didáctica guía).
- La visualización: un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas.

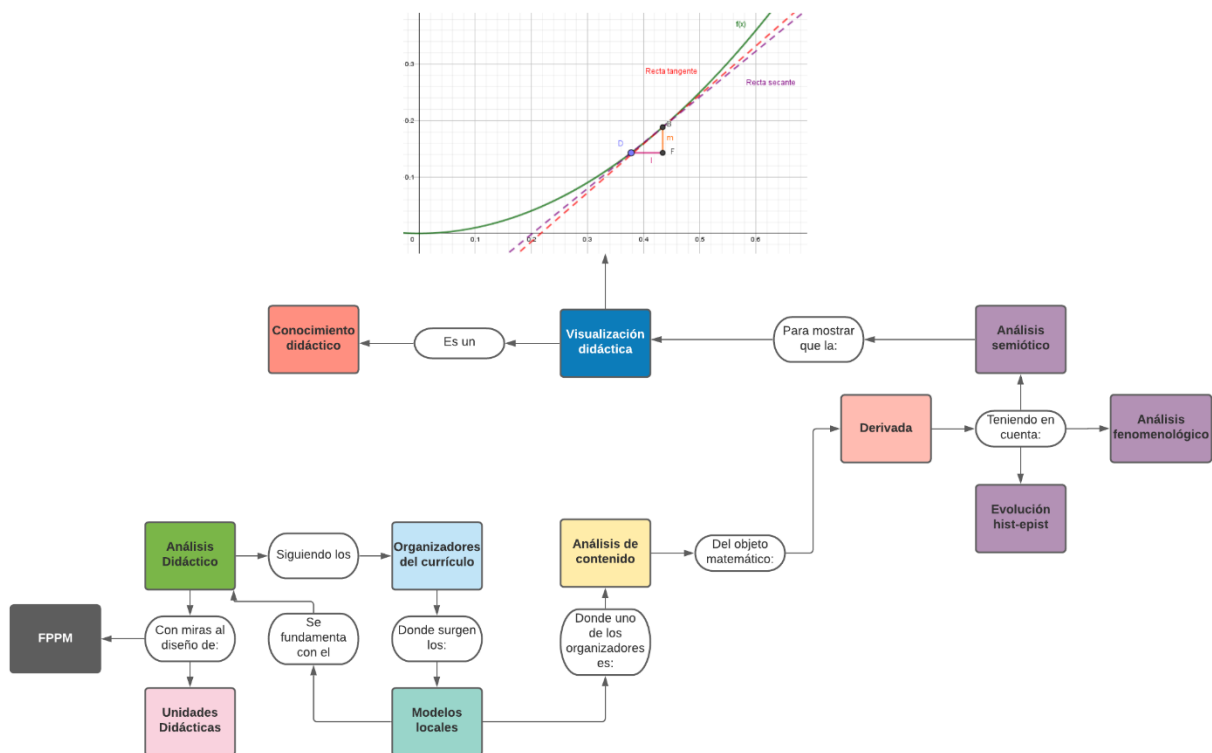


Figura 1. Categorías teóricas del trabajo de investigación (Elaboración propia).

2.1.CONOCIMIENTO DIDÁCTICO & ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN PROFESIONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En el grupo de investigación PNA surgen distintos intereses investigativos dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas, se enmarca la línea de formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas, la cual, en palabras de Rico (2004), debe ser un campo de atención prioritario, pues una buena regulación de los planes de formación del profesorado de matemáticas contribuirá a la resolución de varios de los problemas educativos.

La formación profesional del profesor de matemáticas concibe al futuro profesor de matemáticas como un profesional formado, autónomo y reflexivo con sus prácticas, con dominio de las matemáticas escolares, su didáctica y su pedagogía, para lo cual se necesita de un plan de formación permanente que le aporte conocimientos, competencias y saberes sobre los fundamentos teóricos, conceptuales y metodológicos del currículo, las nociones generales y fundamentales de la Didáctica de las Matemáticas, conocimiento didáctico y principios organizadores y analíticos del conocimiento matemático (Bedoya, 2020).

Dentro de los desarrollos conceptuales y metodológicos del grupo de investigación PNA, Gómez y Rico (2008), proponen la realización de un Análisis Didáctico y la elaboración de Unidades Didácticas en torno a un contenido matemático escolar determinado, como una estrategia adecuada para el desarrollo de la formación y de las competencias profesionales de los docentes. De aquí, que dichas propuestas deben estar fundamentadas en los *conocimientos didácticos* desarrollados a través de procesos y resultados obtenidos mediante distintos tipos de *análisis didácticos* (Bedoya, 2020).

Asimismo, Rico (1997), muestra como antes de comenzar la planificación de las unidades didácticas, se debe hacer una reflexión amplia sobre el *conocimiento didáctico* del tema a tratar, el cual se enmarca en los criterios de los *organizadores del currículo*. De aquí que el *conocimiento*

didáctico se constituya como la principal fuente de información didáctica profesional, pues permite al profesor de matemáticas diseñar, desarrollar y evaluar las distintas actividades de planificación curricular y didáctica (Bedoya, 2020).

Finalmente, Rico *et al* (2013) define el *análisis didáctico* como un método de investigación propio del campo de la Didáctica de las Matemáticas, el cual pretende fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de contenidos matemáticos específicos según la comunidad educativa y el medio escolar. De aquí que el *análisis didáctico* se caracterice como el resultado de la articulación y concreción en la práctica de los *conocimientos didácticos* pues se centra en un contenido y un contexto determinados, con miras tanto al diseño de actividades o unidades de enseñanza-aprendizaje, como al desarrollo de proyectos curriculares, microcurriculares o de investigación. (Bedoya, 2020).

La propuesta de análisis didáctico del grupo PNA, hace que Bedoya (2002) proponga un modelo local de análisis didáctico como un complemento de la propuesta teórica de los *organizadores del currículo*, pues tiene en cuenta el contexto nacional, institucional y de aula, así como las necesidades específicas del docente investigador que realiza el análisis didáctico con propósitos de diseñar e implementar una unidad didáctica.

Teniendo en cuenta lo anterior, Bedoya (2020, pág. 2) propone 4 categorías para el modelo local de análisis didáctico, a saber:

- Análisis didáctico curricular.
- Análisis didáctico de contenido.
- Análisis didáctico cognitivo.
- Análisis didáctico de instrucción.

2.2.MODELOS LOCALES DE LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO, ANÁLISIS DIDÁCTICO DE CONTENIDO Y LAS UNIDADES DIDÁCTICAS.

Teniendo en cuenta la forma en que se concibe el análisis didáctico en la presente investigación, Rico (1997) propone como elementos teórico y metodológico, articuladores y facilitadores de este análisis, la noción de *organizadores del currículo*. Según Bedoya (2020) el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una unidad didáctica no se puede reducir a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, pues se deben incorporar otras informaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen (Segovia y Rico, 2001). Dichas informaciones son lo que definimos como *organizadores del currículo*.

Por lo anterior, los *organizadores del currículo* constituyen mejoras a las propuestas generales de organización disciplinar, ya que, en palabras de Bedoya (2020), la nueva concepción de currículo de matemáticas, de carácter local, sistémico y funcional, exige considerar nuevos organizadores y nuevas maneras de procesamiento y construcción de significados para el conocimiento matemático escolar, generando así la propuesta de los *organizadores del currículo*, cuyas características principales las resume Rico (1997) de la siguiente manera:

Vamos a llamar organizadores a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Hablamos así de organizadores del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y comprensión del conocimiento matemático y unos criterios para

abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión, para producir nuevos significados. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997, p.45).

Posteriormente, teniendo en cuenta las nuevas concepciones sobre el currículo de matemáticas con la propuesta de los organizadores del currículo, es fundamental aclarar que se sigue presentando una alta complejidad en los requerimientos de la comunidad de educadores matemáticos, ya que hay una pluralidad de concepciones teóricas, conceptuales y metodológicas que se dan cita, así como un carácter funcional (teórico-práctico), sistémico y contextualizado de dichos requerimientos (Bedoya, 2020).

Por lo anterior que, en el contexto del grupo PNA se genera la propuesta de *modelos locales de los organizadores del currículo* (Bedoya, 2002), el cual, por su carácter local y parcial, cada modelo impone una estructura e incluso un tipo de funcionamiento del currículo. Además, se puede considerar que sólo de este modo, resultará factible el desarrollo gradual de propuestas curriculares y de formación didáctica de los profesores de matemáticas, validadas mediante la práctica sistemática y reflexiva a través del *análisis didáctico* (Bedoya, 2020).

Luego, es importante aclarar que el diseño y desarrollo del modelo local propuesto en la presente investigación tiene una contextualización y desarrollo inicial desde tres puntos de vista complementarios o perspectivas, a saber:

1. Los contextos de concreción, donde lo normativo, lo institucional y el aula serán puntos de análisis. En este punto de vista se concreta el análisis didáctico curricular;
2. El análisis teórico-crítico de los conceptos (revisión y apropiación de los referentes teóricos como fundamento o soporte crítico de todo el proceso). En este punto de vista se concretan los análisis de contenido, cognitivo y parte del instruccional, es decir, la Unidad de Análisis Didáctico (UAD);
3. Y finalmente desde el punto de vista de la práctica (como estrategia metodológica investigativa y formativa). En este punto de vista se complementa el análisis instruccional y se concreta el diseño e implementación del programa de formación (guiones y la Unidad Didáctica Guía UDG).

Posteriormente, teniendo en cuenta que el *análisis didáctico de contenido* (o *análisis de contenido*) es un *organizador del currículo*, Bedoya (2020) lo define como un análisis disciplinar, epistemológico, fenomenológico, histórico y representacional del contenido matemático escolar. Es importante tener en cuenta que el análisis didáctico de contenido está destinado a formular, a partir de ciertos datos, inferencias atendibles y válidas que se puedan aplicar al contexto específico (Krippendorff, 1990, citado en Rico *et al*, 2013).

El desarrollo del análisis didáctico de contenido de la derivada se desarrollará teniendo en cuenta tres aspectos u organizadores, a saber:

1. El análisis de la evolución histórico-epistemológica del concepto de derivada, a fin de identificar su construcción, los obstáculos dentro de dicho proceso y la importancia de las

rectas tangentes a curvas para el surgimiento de dicho concepto (Andreu y Riestra, 2005; Grabiner, 1983; Recalde, 2017; Ortega y Sierra, 1998).

2. El análisis fenomenológico y de modelización de la derivada, con el fin de abordar los fenómenos que dan origen al concepto, los contextos en los que se utilizan y en las cuales se aplican (Rico, 2013). En el caso de la presente investigación, se revisará lo referido al aspecto geométrico de la derivada (recta tangente a una curva por medio del triángulo de Barrow) y al fenómeno físico del movimiento.
3. Análisis semiótico (o análisis didáctico semiótico) de la derivada, tomado como el análisis de las representaciones desde el punto de vista de la Didáctica y con propósitos didácticos (Bedoya, 2020).

Posteriormente, a modo de cierre del análisis didáctico de contenido, se sintetiza una estructura conceptual del contenido matemático, para posteriormente, realizar un análisis de instrucción, el cual sirve para concretar el análisis de contenido (en la presente propuesta sería el modelo local) por medio del diseño de la *unidad didáctica* del tema estudiado (Rico, 2013).

Otro aspecto importante que muestra los lineamientos (MEN, 1998) es que el diseño de una *unidad didáctica* se relaciona con la selección de textos escolares, materiales didácticos y situaciones problemas coherentes con los logros de aprendizaje propuestos en el currículo institucional; sin embargo, es fundamental retomar que la concreción de una unidad didáctica no es solamente seleccionar y secuenciar un conjunto de conceptos y procedimientos, sino que incorpora elementos referentes al conocimiento matemático y a la formación profesional del profesor investigador, es decir que dicha unidad didáctica se concibe como una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos (Segovia y Rico, 2001, p. 87).

Es importante aclarar que en la presente propuesta de investigación se propone desarrollar dos categorías de unidades didácticas, una que denominamos *unidad de análisis didáctico* (UAD), y otras, que denominamos *unidad didáctica guía* (UDG), la cual se concreta teniendo en cuenta la anterior.

De lo anterior que, en la presente investigación, la UAD es un producto elaborado a partir del *modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico de contenido*, de lo anterior que dicha UAD es para el docente investigador y será fundamental para el diseño del programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Por otra parte, la UDG constituyen las unidades guías propuestas a partir de la UAD, con el fin de ser llevadas al aula de clase, es decir que está dirigida a los estudiantes. Ambas UD serán consideradas como instrumentos metodológicos de investigación, formación docente e innovación curricular, pues serán útiles en el contexto de observación, recogida y análisis de la información durante el proyecto. A continuación, se muestra la estructura general de una unidad didáctica (Bedoya, 2020), la cual comparten tanto la UAD como la UDG.

- Título.
- Presentación y descripción general (Tipo de actividad, temporalización, etc.).
- Análisis curricular (concreciones curriculares, modelo didáctico pedagógico).
- Objetivos (generales y específicos).
- Recursos (humanos, bibliográficos, tecnológicos, etc.)
- Análisis didáctico de contenido.
- Análisis cognitivo (competencias, errores y dificultades).
- Análisis de instrucción: Orientaciones didácticas (basadas en el modelo didáctico pedagógico).

- Secuencia de actividades (Actividades de introducción, motivación y diagnóstico; actividades de desarrollo; actividades de evaluación y actividades de apoyo y ampliación).
- Reflexión autocrítica y evaluación de la unidad.
- Referencias bibliográficas.

En el capítulo 4 Resultados de investigación, se mostrarán algunas de las unidades didácticas, las demás aparecerán como anexo de la presente investigación.

2.2.1. ANÁLISIS CURRICULAR

Con el fin de realizar un análisis curricular, es fundamental conocer los contextos de concreción del currículo para de esta manera tener un panorama amplio frente a pretensiones, modelos, directrices metodológicas y objetivos del entorno social frente a la educación, pues dicho contexto le da en cierta parte, el carácter local a la presente investigación. En la presente propuesta de investigación, se consideraron como referencia curricular, tres contextos de concreción y reflexión sobre el CME en la normatividad: Contexto nacional (la derivada en los documentos del MEN), contexto institucional (la derivada en los cursos de la malla curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle) y aula (libros de texto y medios).

- **Contexto nacional:**

En la presente investigación se considera el contexto nacional como el primer nivel de concreción, pues muestra la política trazada por el Estado, por medio del Ministerio de Educación Nacional. En dichos documentos se muestran las intenciones educativas, así como distintas orientaciones metodológicas, de contenidos y curriculares para el área. Dicho análisis del contexto nacional se realizará desde los documentos ministeriales (Lineamientos, Estándares y DBA en

Matemáticas), esto debido a que la presente propuesta de investigación se piensa para la comprensión de la derivada en la Educación Media.

I. Lineamientos curriculares en Matemáticas

Con los lineamientos curriculares (MEN, 1998), se pretenden atender a la necesidad de dar orientaciones y criterios nacionales sobre los currículos, sobre la función de las áreas y sobre nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas. De aquí que en dicho documento se proponen una serie de elementos para el mejoramiento del currículo de las matemáticas escolares; donde se resalta la importancia de los contenidos básicos, las situaciones problema como contextos para el aprendizaje y la movilización de procesos matemáticos generales (Corrales, 2013).

Dicho documento se presenta en tres partes, la primera que muestra algunos antecedentes que motivaron a la elaboración de los lineamientos, unos relacionados con el desarrollo del área en el país y otros de política actual. En la segunda parte se proponen unos referentes curriculares para orientar a las instituciones educativas en el diseño y desarrollo del currículo dentro del respectivo PEI. Dichos referentes tienen que ver con la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones pedagógicas, sobre una nueva visión del conocimiento matemático escolar, sobre distintas posibilidades de organizar el currículo y sobre la evaluación. La tercera y última parte presentan algunas reflexiones sobre la formación en educación matemática de los docentes (MEN, 1998, pág. 4).

Los lineamientos fueron el primer documento normativo en plantear los cinco pensamientos matemáticos que deben ser promovidos por el docente en el aula, a través de los distintos contenidos matemáticos; el pensamiento numérico, **el pensamiento espacial**, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y **el pensamiento variacional**. Además, muestra que cada uno de estos requiere de un sistema para su tratamiento, comprensión y enseñanza;

sistemas numéricos, **sistemas geométricos**, sistemas de medidas, sistemas de datos y **los sistemas algebraicos y analíticos**, respectivamente (MEN, 1998).

Los lineamientos proponen también cinco procesos que ayudan a organizar el currículo de matemáticas como un todo, esto teniendo en cuenta que dichos procesos se relacionan con el aprendizaje de las matemáticas, con el fin de posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás. Los procesos son: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problema, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998).

II. Estándares básicos de competencia en Matemáticas

Inicialmente, es importante aclarar que los Estándares (MEN, 2006) parten de los lineamientos previamente presentados, pues en dichos estándares, se complementan no solo los cinco procesos generales, sino también los cinco tipos de pensamiento con sus respectivos sistemas. Dicho documento selecciona algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento mencionados anteriormente, por lo que se presentan en cinco columnas que corresponden a cada uno de dichos tipos de pensamiento y a los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él.

Luego, cada estándar de cada columna pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales mencionados anteriormente, pero suele referirse también a otros procesos generales que pueden practicarse en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar (MEN, 2006).

Por otra parte, los estándares (MEN, 2006) se distribuyen en cinco conjuntos de grados: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo, esto

con el fin de dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo.

Posteriormente, el documento aclara que el conjunto de estándares debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo y no como metas que se puedan delimitar en un tiempo fijo determinado, pues éstos identifican niveles de avance en procesos graduales que, incluso, no son terminales en el conjunto de grados para el que se proponen. Es decir que, si en un conjunto de dos grados se proponen doce estándares para un determinado pensamiento, ello no significa que éstos pueden dividirse por partes iguales entre los grados de dicho conjunto, ni menos todavía puede pensarse en una separación por periodos del año escolar claramente delimitados para cada uno de esos estándares. Por el contrario, se debe procurar una organización del trabajo escolar que garantice un trabajo integrado de todos los estándares correspondientes a mismo grupo de grados y que atienda a su conexión con los estándares de los grados anteriores y de los siguientes (MEN, 2006).

Luego, el documento muestra la coherencia, tanto vertical como horizontal que hay en cada estándar, explicando que la coherencia vertical está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados, mientras que coherencia horizontal está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (MEN, 2006), por lo anterior que se espera que el diseño curricular de cada institución se desarrolle de manera integrada, articulando los distintos pensamientos matemáticos y no cada uno por separado.

Finalmente, es importante destacar que los Estándares esperan del docente un conocimiento conceptual, relacionado tanto con el saber qué, como con el saber por qué, por lo

que, siguiendo nuestro modelo local de análisis didáctico, que el saber qué relaciona al docente con la consecución de un análisis didáctico conceptual y semiótico de los contenidos matemáticos, mientras que el saber por qué de un análisis fenomenológico e histórico-epistemológico.

III. Derechos básicos de aprendizaje en Matemáticas

Los DBA (MEN, 2016, pág. 5), son un conjunto de aprendizajes estructurantes, es decir, un conjunto coherente de conocimientos y habilidades con potencial para organizar los procesos necesarios en el logro de nuevos aprendizajes, que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once, y en las áreas de lenguaje, **matemáticas**, ciencias sociales y ciencias naturales. De lo anterior que los DBA explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular.

Por otra parte, los DBA (MEN, 2016) no constituyen una propuesta curricular y estos deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, teniendo en cuenta el PEI, así como los planes de área y aula. Por lo anterior, y teniendo en cuenta que los maestros pueden trasladar los DBA de un grado de escolaridad a otro según las especificidades de los procesos de aprendizaje, los DBA se constituyen como una estrategia que promueve la flexibilidad curricular (MEN, 2016, pág. 6).

Los DBA tienen una estructura que se compone de tres elementos; el enunciado, la evidencia de aprendizaje y el ejemplo (MEN, 2016). Es importante mencionar que los DBA en Matemáticas están directamente relacionados con los dos documentos ministeriales expuestos anteriormente (Lineamientos y Estándares).

Finalmente, aclarar que, de los cinco pensamientos matemáticos, analizaremos desde los tres documentos ministeriales mencionados anteriormente y en el orden respectivo (Lineamientos, Estándares y DBA en Matemáticas); el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y

analíticos, ya que es en este pensamiento en donde está inmerso nuestro contenido matemático escolar, la derivada (ver figura 2).

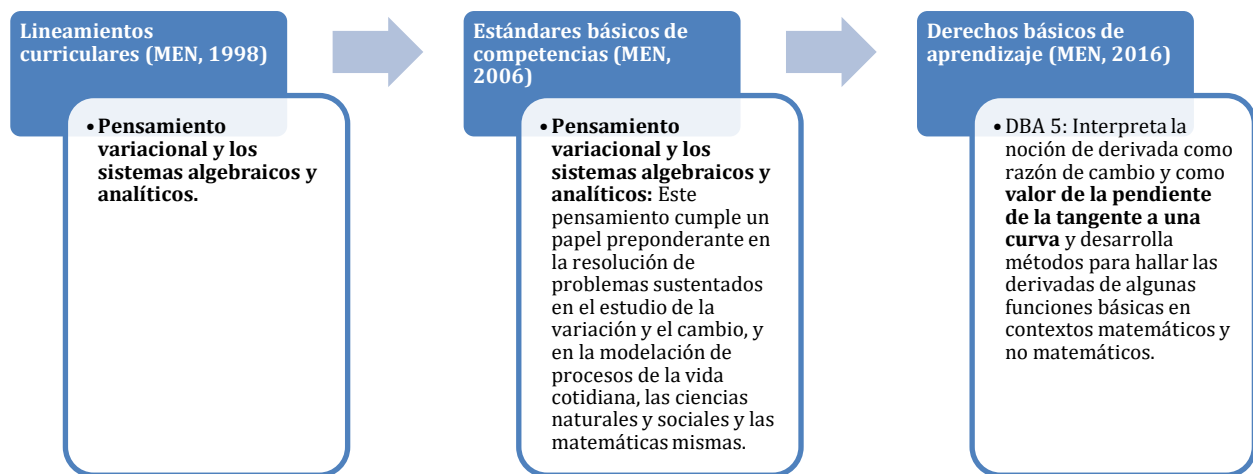


Figura 2. Esquema del análisis curricular normativo nacional (elaboración propia).

- **Contexto institucional:** Universidad del Valle, su facultad de Educación y Pedagogía, en la Escuela de formación en ciencias, tecnologías y culturas, con el programa de Licenciatura en Matemáticas, específicamente los estudiantes de los cursos de Didáctica V: Tópicos de Didáctica de las Matemáticas.

Inicialmente, es importante aclarar que, aunque en la propuesta de investigación se piense en la comprensión de la derivada en la educación media, el experimento didáctico (programa de FIPM) que se realizará será con estudiantes para profesor de matemáticas de la Universidad del Valle, por lo que el contexto institucional será desde las resoluciones, programas y documentos propios de dicha universidad.

El programa de Licenciatura en Matemáticas tiene un total de 170 créditos, que se dividen en dos ciclos de formación, el ciclo básico y el ciclo profesional con 72 y 98 créditos respectivamente. Dentro de dichos ciclos de formación surgen cuatro componentes: saberes específicos y disciplinares, pedagogía, Didáctica de las disciplinas y formación general. Cada componente se encuentra ligado a las distintas líneas de formación del programa: Matemáticas;

Historia y Filosofía de las Matemáticas; Didáctica de las Matemáticas; Lenguaje, Razonamiento y comunicación de saberes matemáticos; Tecnología de la Información y la Comunicación en Educación Matemáticas.

Como el interés de este trabajo se centra en la recta tangente a una curva con miras a la construcción del concepto de derivada, es decir, una de las temáticas propias del curso de Cálculo I (posteriormente se realizará el análisis curricular del curso), en lo que sigue se revisarán algunos cursos previos a este, para posteriormente revisar el programa del curso en mención.

En la Licenciatura en Matemáticas el curso de Cálculo I aparece en el IV semestre (según la resolución 239 del 17 de diciembre del 2020), de aquí que los estudiantes deben cursar previamente unos cursos propios de la línea de formación en Matemáticas: Elementos de lógica matemática, Conjuntos numéricos, Matemática fundamental, Geometría y Álgebra Lineal. Asimismo, mencionamos otros cursos que consideramos pueden tener cierta relación con los intereses de la propuesta, que son: Historia de las Matemáticas Griegas y Álgebra Moderna, el cual este último se espera que los estudiantes lo ven conjuntamente con el curso de Cálculo I.

En dicho programa, el único prerrequisito para matricular el curso de Cálculo I es aprobar el curso de Matemática fundamental, el cual se encuentra en II semestre y tiene como objetivos¹:

“-Establecer un puente teórico entre la formación matemática adquirida en la formación básica y media, y la formación matemática universitaria, a través del estudio de los conceptos básicos de las matemáticas.

-Estudiar los conceptos fundamentales de las matemáticas que serán de vital importancia para abordar los primeros cursos de la línea de formación en matemáticas.

¹ Estos objetivos son tomados del programa de Matemática fundamental (405129M). Febrero – junio 2021.

-Presentar los sistemas de numeración, haciendo particular énfasis en las propiedades de los números reales y sus respectivas demostraciones.

-Estudiar el concepto de función, el dominio y rango de una función y funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.”

Este curso se centra en los sistemas numéricos y métodos de demostración, los números Reales, ecuaciones e inecuaciones en los Reales y las funciones (concepto, gráficas en distintos tipos de funciones como las polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas).

Luego, aunque el curso de Geometría no es prerrequisito, puede aportar elementos al contenido de interés en la presente propuesta de investigación, por lo que mostraremos los aspectos en los que se centra el curso en mención, el cual se encuentra ubicado en III semestre²:

“-Proporcionar los elementos de la geometría euclidiana y esenciales de la geometría analítica, en el desarrollo de problemas propios de la geometría y contextualizados.

-Construir el marco teórico pertinente de la geometría euclidiana a partir de sus elementos y relaciones fundamentales, desarrollando un marco representacional que vincule las construcciones geométricas (usando la regla-compás físico-Apps) con la estructuración de cadenas simbólicas en procesos demostrativos.

-Desarrollar competencias en relación al razonamiento deductivo (explorar, visualizar, conjeturar, relacionar, inferir y sistematizar) para que los estudiantes aprendan a demostrar proposiciones dadas dentro de un sistema axiomático.”

Este curso se centra en las nociones básicas de la geometría euclidiana, pasando por los teoremas y postulados de rectas, segmentos, ángulos, triángulos, rectas paralelas, perpendiculares,

² Estos objetivos son tomados del programa de Geometría (405137M). Febrero – junio 2021.

la circunferencia, construcciones geométricas y algunos aspectos de la geometría analítica como los lugares geométricos y transformaciones en el plano.

La resolución 111 del 26 de octubre del 2017 por lo cual se modifica la resolución 044 de abril 12 del 2002 que definió la estructura curricular del Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física, se deroga la resolución No. 051 del 27 de abril de 2017 del Consejo Académico, y se aprueba la estructura curricular del programa académico de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, donde el curso de Cálculo I aparece dentro de los componentes de formación del currículo de “saberes específicos y disciplinares” en la línea de Formación de Matemáticas, como un curso obligatorio de 4 créditos.

Posteriormente, la resolución 239 del 17 de diciembre del 2020 modifica el programa académico de Licenciatura en Matemáticas, cuya estructura curricular fue definida mediante la resolución No. 111 de octubre 26 de 2017 mostrada anteriormente, de modo tal que ahora el curso de Cálculo I aparece dentro del ciclo básico, en el componente de “saberes específicos y disciplinares” en la línea de formación de Matemáticas, como el último curso de dicha línea de formación dentro del ciclo básico mencionado anteriormente, además de ser obligatorio y contar con 4 créditos.

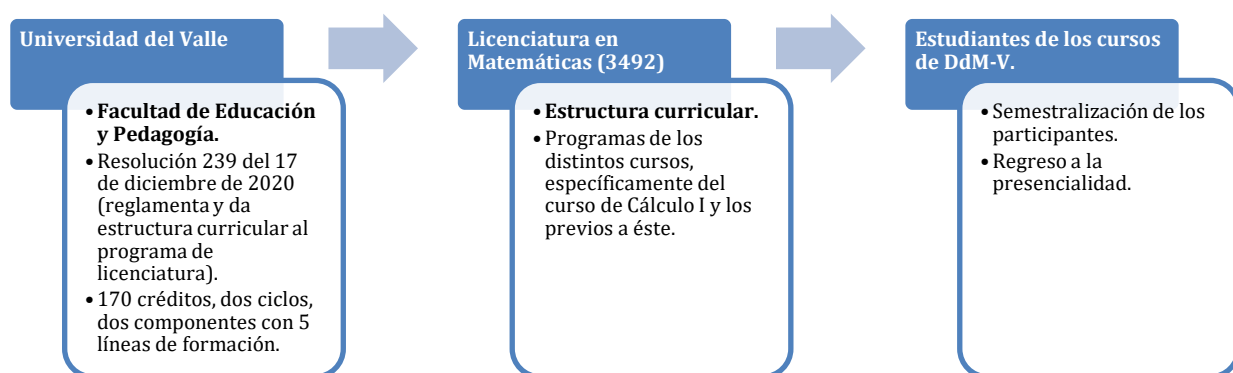


Figura 3. Esquema del análisis curricular normativo institucional (elaboración propia).

Finalmente, en cuanto al curso en el que se realizó el experimento didáctico que fue en el de Didáctica V: Tópicos Didáctica de las Matemáticas, se debe tener en cuenta que es el último curso obligatorio de la línea de Didáctica de las Matemáticas de la licenciatura en matemáticas, por lo que previamente los estudiantes debieron aprobar los prerrequisitos de Didáctica I, II, III y IV (ver anexos con los respectivos programas de los cursos). Dicho curso se encuentra en VIII semestre y tiene como objetivos³:

“-Reflexionar sistemática y colaborativamente sobre los más importantes tópicos de la DdM, y sus implicaciones o aportes en el desarrollo histórico, reciente y actual, del campo, reflejado en las propuestas de trabajo de los participantes, como estrategias de formación teórica y práctica, de investigación, de innovación o desarrollo curricular (sistematización de experiencias didácticas-docentes) y de construcción de la identidad profesional del profesor de matemáticas.

- Promover un espacio de reflexión y formación colaborativa y crítica sobre el estado actual y desarrollos recientes en torno a los principales tópicos (temas, objetos, problemas de estudio) en la DdM, concebida como disciplina científica base de la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

- Reconocer y desarrollar competencias (conocimientos, habilidades) de análisis que permitan a los estudiantes para profesores identificar, formular y estudiar problemas (de investigación, formación e innovación) relevantes en los campos de la educación matemática y de la DdM.

³ Estos objetivos son tomados del programa de Didáctica V: Tópicos Didáctica de las Matemáticas (405140M).
Abril – agosto 2022.

- Iniciar a los estudiantes en el desarrollo de una propuesta (proyecto de sistematización de experiencia o de investigación) de trabajo de grado, o de intervención educativa desde perspectivas de la DdM.”

Este curso busca ubicar a los estudiantes en el campo científico de la Didáctica de las Matemáticas, pues se tiene como propósito formativo general reflexionar sobre los más importantes tópicos (principales temas, objetos y problemas de estudio) de la DdM, y sus implicaciones o aportes en el desarrollo histórico, reciente y actual, del campo (reflejado en las propuestas de trabajo de los participantes).

2.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO COGNITIVO

Autores como Rico (2013), muestra que el análisis cognitivo centra su foco de atención en el aprendizaje de las matemáticas, pues permite al profesor llevar a cabo una descripción detallada de la problemática del aprendizaje de las matemáticas de un tema específico. De lo anterior que dicho aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades en los alumnos, de aquí que el presente análisis se centra en el estudiante, especialmente en los aspectos que dificultan la comprensión de las matemáticas. Dichas dificultades son de distinta naturaleza, por lo cual se clasifican en:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas (Rico, 1997).

Luego Bachelard (1938), define obstáculo como estancamientos o regresiones, surgidos de torpezas de entendimiento y confusiones. Luego los errores, son considerados como la presencia del estudiante en un esquema cognitivo inadecuado, por lo que Rico (1997) muestra que las dificultades se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores.

Los desarrollos de los grupos de investigación que se referencian en la presente propuesta de investigación han detectado y sistematizado las dificultades más recurrentes para cada tema de las matemáticas escolares, de tal manera que la pretensión en esta categoría de análisis es recurrir a dichos desarrollos sobre la construcción del concepto de derivada. Lo que pretende esta categoría de análisis es ahondar en las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de un objeto matemático específico, como lo es la derivada en la presente propuesta de investigación.

2.2.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción en palabras de Rico (2013), contempla objetivos de formación que el profesor ha de plantear, orientados a la toma de decisiones cuando usa tareas escolares en el aula, es decir, que dicho análisis aborda la selección, diseño y organización de tareas y sesiones con propósitos específicos. De lo anterior que el análisis de instrucción se precisa como el procedimiento en virtud del cual el profesor analiza y selecciona tareas disponibles para el diseño de actividades de enseñanza (Gómez, 2007).

Luego, el análisis de instrucción se articula alrededor de distintos componentes, los cuales dan respuesta a diferentes facetas del proceso de diseño de una unidad, como son la adecuación de las tareas a los contenidos, el papel de la resolución de problemas y modelización y el empleo de materiales y recursos (Rico, 2013). Según Rico (1997), los materiales, recursos y actividades generan un campo de problemas en la Educación Matemática, especialmente desde la práctica

educativa, pero también como tema de investigación, pues los materiales y recursos demandan la necesidad que tiene el profesor de matemáticas de conocerlos y utilizarlos, teniendo en cuenta que dichas herramientas tienen una fundamentación teórica propia en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

2.3.LA VISUALIZACIÓN: UN ORGANIZADOR DIDÁCTICO Y CURRICULAR PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.

En matemática muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales, lo que ha generado diversas investigaciones en relación al potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla (Domenicantonio et al, 2011). A lo largo de las dos últimas décadas, distintos autores muestran que los procesos intuitivos y de visualización se están revelando como un campo de investigación enormemente interesante en sí mismo (Zimmerman & Cunningham, 1991; Giaquinto, 1994; De Guzmán, 1996; Hitt, 1998; Duval, 1999; Bedoya, 2002; Mancosu, 2005; Presmeg, 2006; Gómez-Chacón, 2012; entre otros).

Justamente Mancosu (2005), muestra que a finales del siglo XIX la visualización había caído en descredito siendo relegada a un papel secundario en las matemáticas, debido a que algunas de las afirmaciones matemáticas que parecían obvias debido a una visualización intuitiva e inmediata resultaron ser incorrectas en una inspección más cercana. Sin embargo, en las últimas dos décadas se ha renovado el interés por la visualización en la lógica y las matemáticas como consecuencia de desarrollos en distintas áreas, incluidas la informática, las matemáticas, la Educación Matemática, la psicología cognitiva y la filosofía.

Luego Presmeg (2006), desarrolla en su artículo “Research on visualization in learning and teaching mathematics”, una síntesis de más de ciento cincuenta estudios distintos sobre el tema de

la visualización en la educación matemática, mostrando que dichas investigaciones se iniciaron a fines de la década de 1970 y principios de la de 1980 y ha ido creciendo lentamente hasta que en 1990 llegó a ser reconocida como un campo importante para la Educación Matemática, pues surgieron investigaciones de desarrollo curricular con contenidos particulares, promoviendo la enseñanza con el proceso de visualización, por medio del uso de entornos tecnológicos.

Después, la autora en mención explica que en el 2000 se amplió el horizonte de la visualización en Educación Matemática incluyendo aspectos semióticos, al desarrollar investigaciones sobre el aprendizaje significativo de las matemáticas basado en la visualización como un componente esencial en los sistemas de representación dentro de los procesos de resolución de problemas. Asimismo, considera que un tema actual e importante en el campo de la Educación Matemática es ver cómo interactúa la visualización con la Didáctica de las Matemáticas, pues interpreta que dichas investigaciones se han dejado de lado. De aquí que desde el 2006 se constata la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la Educación Matemática (Gómez-Chacón, 2014).

El término visualización se usa de distintas maneras tanto de forma general, como en el contexto de las matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas. En lo que sigue se mostrarán algunas definiciones que se le dan al término, para finalmente mostrar cómo se entiende la visualización en el desarrollo de la presente investigación:

Visualización es la acción y efecto de visualizar, lo cual a su vez se define como 1. Hacer visible por algún procedimiento o dispositivo lo que normalmente no se puede ver a simple vista. 2. Representar algo por medio de imágenes, después de documentarse ampliamente. 3. Formarse en el pensamiento la imagen de algo que no se tiene a la vista o de un concepto abstracto. 4. Ver la información (textual o gráfica) que se ofrece en una pantalla, monitor, visor u otro dispositivo similar (Real Academia Española, s.f.).

Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981).

La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999).

Cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático (Presmeg, 2006).

En lo que sigue, se muestra cómo se entiende la visualización en la presente investigación, teniendo en cuenta dos definiciones del término de una forma global (Zimmermann et al, 1991; Arcavi, 2003) y otras dos definiciones desde un aspecto matemático (De Guzmán, 1996; Mancosu, 2005). Dichas definiciones las consideramos complementarias y muy de la mano con nuestras ideas de visualización:

La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas (Zimmermann et al, 1991).

Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión (Arcavi, 2003, p. 217).

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo (De Guzmán, 1996).

La visualización generalmente se entiende de diferentes maneras, pero para los propósitos de este artículo tomaré un concepto bastante amplio incluyendo tanto la visualización por medio de imágenes mentales como las visualizaciones por medio de imágenes generadas por computadora o imágenes dibujadas en papel, p. e., diagramas, dibujos, figuras, esquemas, etc. Estos diferentes tipos de visualización pueden diferir sustancialmente, pero estoy interesado en ofrecer una caracterización de la visualización que sea lo más amplia posible (Mancosu, 2005).

De las definiciones inmediatamente anteriores que, se considera la visualización en la presente propuesta orientada hacia lo Didáctico y matemático (en términos de los dos autores últimos) como el proceso de crear en la mente (imágenes mentales), a lápiz y papel o con ayuda de tecnología, los objetos visuales, espaciales, geoméricos e intuitivos de los conceptos matemáticos, tales como figuras, imágenes, diagramas, gráficas, tablas, entre otros.

Es importante aclarar, teniendo en cuenta lo expuesto por Mancosu (2005) al decir que la visualización resurgió gracias a desarrollos en distintas áreas, como la informática, las matemáticas, la Educación Matemática, la psicología cognitiva y la filosofía, que la presente

investigación no se orienta en la psicología cognitiva sino en la Educación Matemática (Didáctica de las Matemáticas), tomando algunos aspectos de las matemáticas y la filosofía matemática. De ahí la definición que se asume de visualización y las distintas reflexiones que se muestran en lo que sigue del documento, como es el sentido didáctico y curricular de la visualización, los aspectos visuales de la derivada (contenido matemático escolar) y algunas reflexiones finales.

Teniendo en cuenta lo mencionado en los subcapítulos inmediatamente anteriores (2.1. y 2.2.) frente al análisis didáctico y los organizadores del currículo (Rico, 1997; 2001; 2013, Bedoya, 2002), en la presente propuesta se le da a la visualización la denominación y concepción de *visualización como organizador didáctico y curricular* para la formación tanto teórica como práctica de los profesores y naturalmente para la enseñanza y comprensión de las matemáticas. Esto además por la idea que los objetos matemáticos por su naturaleza abstracta tienen que ser necesariamente visualizados y de la riqueza visual, geométrica e intuitiva que esto contiene (De Guzmán, 1996), tanto en sus sentidos interno como externo, con la diferencia que en la presente propuesta (y es lo que le da el carácter de organizador didáctico y curricular) la visualización se basa o fundamenta en un proceso (local) de análisis didáctico de contenido (tratamiento didáctico de la visualización o visualización didáctica).

Finalmente, surge el concepto de *visualización como organizador didáctico y curricular* (que denominamos proceso de visualización didáctica o tratamiento didáctico de la visualización) como todo el sistema de apoyos del profesor (de tipo tecnológicos, materiales manipulativos, papel, lápiz, pizarra, entre otros) acompañados de un discurso estructurado del mismo, que permiten generar en los estudiantes conexiones entre una noción matemática y sus distintas representaciones. Lo anterior por medio del aprovechamiento de los contenidos visuales, geométricos e intuitivos de los conceptos matemáticos que surgen de la implementación de un modelo local de análisis didáctico desarrollado en torno a un contenido matemático determinado

(en nuestro caso, la recta tangente a una curva y su pendiente), buscando que el estudiante comprenda la noción matemática a tratar.

3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se abordarán las cuestiones metodológicas de la propuesta investigativa, en donde se presenta el marco metodológico, enmarcando el presente trabajo como una investigación de diseño (Molina et al, 2011) por medio del Análisis Didáctico (Rico et al, 2013), el estudio de caso (Stake, 1998; Martínez, 2011), la sistematización de experiencias (Jara, 2012) y la investigación evaluativa de programas de formación (Martínez Mediano, 1998; De Miguel, 1999; Bedoya, 2002). Posteriormente se presenta el diseño metodológico, donde inicialmente se hace una contextualización de la investigación, para posteriormente describir las técnicas e instrumentos de recolección de la información a estudiar, basado en los *experimentos didácticos* (Mosquera, s.f.).

3.1.MARCO METODOLÓGICO

El presente proyecto se enmarcó metodológicamente como una investigación de diseño, la cual se caracteriza como un paradigma investigativo de orden cualitativo, cuyo objetivo es analizar la enseñanza y el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza (Molina et al, 2011). En palabras de Gravemeijer & van Eerde (2009), la investigación de diseño tiene como objetivo proporcionar teorías sobre cómo hacer investigación docente, pues se refiere a características más generales de la situación de aprendizaje, de aquí que este tipo de investigación tiene muchas similitudes con lo que hacen los profesores cuando planifican, ejecutan y evalúan sus lecciones.

Por otra parte, Steffe y Thompson (2000) citado por Molina et al (2011) definen el término experimento de enseñanza como una secuencia de episodios de enseñanza cuyo objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico. De aquí que en la presente investigación se readapta dicho concepto como un

experimento didáctico, pues tiene como fin la formación del profesor y la innovación curricular, es decir que, entre las estrategias de formación del docente como investigador, surja el diseño de experimentos didácticos.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, en el presente experimento didáctico se tendrá en cuenta la siguiente conjetura o hipótesis de trabajo: un modelo local de análisis didáctico entorno al proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente, es un recurso o medio para la comprensión del concepto de derivada en un punto de la función. De lo anterior que la visualización se concreta como un organizador del currículo (teniendo en cuenta la propuesta del grupo PNA), es decir, que es un conocimiento que adoptamos como componente fundamental para articular el diseño, desarrollo y evaluación de una propuesta de formación (Rico, 1997).

3.1.1. SISTEMATIZACIÓN DE EXPERIENCIAS

La sistematización es una de las tantas estrategias de construcción de conocimiento, surgidas en el contexto del paradigma sociocrítico; por ello, los intereses teóricos que la orientan la ubican en relación a una práctica contextuada que requiere ser conocida para ser reinventada, transformada y apropiada por los sujetos involucrados, participantes en ella (Ghiso, 2019). De aquí que Bedoya (2013) citado en Camacho (2017), define la sistematización de experiencias docentes como un proceso mediante el cual uno o más profesores desarrollan una propuesta curricular o didáctica, mientras que se forman y desarrollan competencias profesionales a través de la reflexión sistemática y fundamentada de este ejercicio o práctica.

En la presente investigación entendemos la sistematización de experiencias como una forma de realizar una investigación a partir de la misma práctica docente, esto en el marco de una formación continua, es decir que sistematizamos nuestras prácticas para aprender críticamente de

ellas y así poder: mejorar nuestras propias prácticas, compartir nuestros aprendizajes con otras experiencias similares y para contribuir al enriquecimiento de la teoría (Jara, 2012).

Bedoya (2013), basándose en otros autores propone organizar el proceso metódico de sistematización en cuatro fases, no necesariamente sucesivas:

- I. Preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización.
- II. Recuperación/ reconstrucción de la experiencia: documentación y fundamentación conceptual.
- III. Análisis e interpretación de la información y del proceso realizado (de tal forma que se movilicen y desarrollen conocimientos fundamentados sobre la práctica o la experiencia).
- IV. Potenciación y socialización o comunicación de los resultados asociados con la experiencia, su sistematización (incluyendo propuestas de posibles mejoras) y fundamentación conceptual y procedimental.

Lo anterior se propone apoyarse complementariamente en un diseño basado en las metodologías del análisis didáctico (Rico, 2013; Bedoya, 2002); de estudio de casos (Chetty, 1996; Stake, 1998; Martínez, 2011) y de investigación evaluativa de programas de formación ((Martínez Mediano, 1998; De Miguel, 1999; Bedoya, 2002).

3.1.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Inicialmente, es importante destacar al AD no solo como un referente teórico del presente trabajo, sino también como una metodología de investigación, pues permite un fundamento teórico (conceptual), práctico (procedimental) y metodológico para el profesor investigador. En palabras de Rico (2013), el análisis didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de las

Matemáticas cuyo fin es fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos.

Por lo anterior que, el análisis didáctico se propone en términos de la formación profesional de profesores de matemáticas como una estrategia de cualificación y de desarrollo profesional y de competencias de los docentes, así como de innovación y desarrollo curricular y didáctico por parte de estos (Rico, 1997; Gómez, 2007; Bedoya, 2020).

Gallardo et al (2006) define el análisis didáctico como el procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado la información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas con el objeto de estudio. Luego Rico et al (2013), muestra que uno de los rasgos relevantes del análisis didáctico es que interviene en la práctica por medio de las predicciones que se generan en las investigaciones, pues establece criterios para la formación inicial y permanente del profesorado.

En la presente propuesta investigativa, tendremos en cuenta los cinco componentes dentro del ciclo y estructura del análisis didáctico, expuestos por Rico (2013): el análisis conceptual, el análisis del contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo, sin embargo, la estructura será diferente, pues tal y como se muestra en el capítulo anterior, el modelo local desarrollado tendrá en cuenta tres aspectos a saber:

- el **análisis de contenido**, dentro del cual aparecen el análisis conceptual y el análisis del contenido;
- el **análisis cognitivo**;
- y el **análisis de la práctica didáctica docente**, en el que se unen el análisis de instrucción y el análisis evaluativo.

Teniendo en cuenta lo anterior, la figura 4 muestra un esquema general metodológico de la presente propuesta investigativa, el cual está basado en la estructura presentada por Molina et al (2011) para la investigación de diseño y en lo mostrado frente al análisis didáctico como metodología de investigación (Rico et al, 2013).

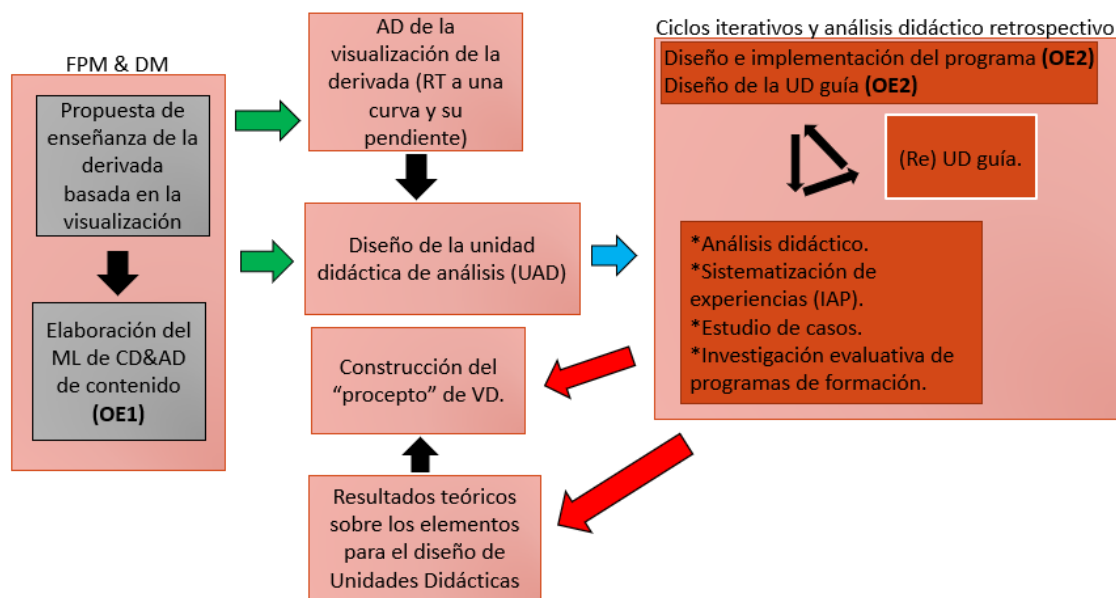


Figura 4. Estructura metodológica general del trabajo (Elaboración propia).

Teniendo en cuenta el esquema anterior, en la figura 5 se hará “zoom” al esquema metodológico, teniendo en cuenta el carácter teórico-crítico (OE1) y práctico (OE2) de la investigación, cuyos resultados son respectivamente, una unidad de análisis didáctico (UAD) y el diseño de un experimento didáctico, por medio de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas y de una unidad didáctica guía (UDG), los cuales permitirán refinar el concepto de *visualización como organizador didáctico y curricular* y validar en cierta medida el ML de AD planteado. Después, se mostrarán detalladamente algunos elementos que se encuentran referenciados dentro del ciclo iterativo y análisis didáctico retrospectivo de la figura 4, como es el estudio de caso (Stake, 1998; Martínez, 2011) y la investigación evaluativa de programas de formación (Bedoya, 2002).

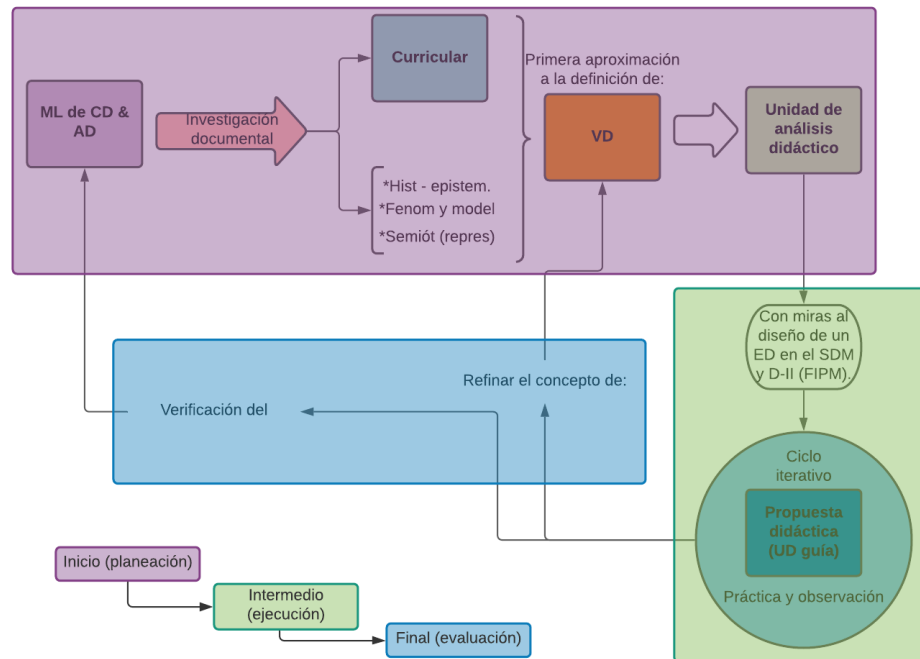


Figura 5. Estructura metodológica específica del trabajo (Elaboración propia).

3.1.3. ESTUDIO DE CASO

El método de estudio de caso es una herramienta valiosa de investigación, pues su mayor fortaleza radica en que a través de este se mide y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado (Martínez, 2011). Autores como Yin (1994), citado en Chetty (1996), argumenta que el método de estudio de caso ha sido una forma esencial de investigación en las ciencias sociales, así como en el área de educación.

Luego, Chetty (1996) citado en Martínez (2011) muestra que hay una gran variedad para recolectar datos en un estudio de caso, ya que estos pueden ser obtenidos desde una variedad de fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas; esto es, documentos, registros de archivos, entrevistas directas, observación directa, observación de los participantes, entre otros. En palabras de Martínez (2011):

Las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los

distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio.

El método de estudio de caso se usó en el presente trabajo como una forma de evaluar al docente-investigador y al programa de formación de la didáctica de la visualización (o visualización didáctica) como un conocimiento didáctico válido del profesor. De lo anterior que Stake (1998), aclara que todos los estudios de evaluación son estudios de casos, pues el programa, la persona o el organismo evaluados constituyen el caso.

3.1.4. INVESTIGACIÓN EVALUATIVA DE PROGRAMAS DE FORMACIÓN

Como hemos venido mostrando, el presente proyecto estará basado en la investigación de diseño y en el análisis didáctico, con el fin de integrarse para diseñar metodológicamente un *experimento didáctico*. De aquí que se quiere presentar un programa de formación docente e innovación curricular basado en la didáctica de la visualización (o visualización didáctica) como recurso educativo.

Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos que la metodología de evaluación de programas (Martínez Mediano, 1998; De Miguel, 1999; Bedoya, 2002) ofrece una evaluación permanente al *experimento didáctico* (ver ciclo iterativo de la figura 1), es decir que, nos ubicamos en el **análisis de la práctica didáctica docente**, específicamente en el **análisis evaluativo** de Rico (2013), solo que no sería un componente final del ciclo, ya que se readapta para considerar una evaluación iterativa del *experimento didáctico*.

Basado en diversas investigaciones, Bedoya (2002) muestra algunos principios básicos para estudios con una metodología de evaluación de programas, de los cuales destacamos que:

- Un programa es una intervención estructurada en la que se han planificado sistemáticamente recursos, tiempos, tareas, contextos, etc.
- Cada programa debería desarrollar sus propias medidas para la evaluación de la intervención.
- La evaluación de un programa debe integrar de manera complementaria, el análisis del proceso y del producto. La evaluación debe dar cuenta no sólo de si el programa tiene éxito en su producto final, sino en todas sus fases, identificando los elementos (aspectos didácticos, organización de contenidos, factores del educador, etc.) que intervienen en la consecución de los logros o del éxito final. El análisis de estos elementos permite inferir las razones, o supuestas líneas de causalidad, por las cuales un programa obtiene el éxito deseado.
- De los resultados de la evaluación de un programa se deben generar descripciones sobre su funcionamiento y recomendaciones o prescripciones para su mejoramiento.

Teniendo en cuenta los puntos anteriores, en el caso del presente proyecto de investigación tomamos como intervención estructurada al *experimento didáctico* que se desarrollará teniendo en cuenta el modelo local de análisis didáctico de la derivada. De aquí que dicha intervención se evaluará de forma permanente a fin de obtener elementos positivos y por mejorar que generen rediseños del experimento en cuestión y teoría referente al concepto de visualización didáctica (o didáctica de la visualización).

3.2.DISEÑO METODOLÓGICO

El desarrollo del objetivo específico número uno, el cual es “Construir un modelo local de Análisis Didáctico, basado en la evolución histórico-epistemológica, el análisis fenomenológico y

el análisis semiótico del concepto de derivada, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos del contenido que sostienen el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente.” estará basado en el AD como marco metodológico de investigación, el cual da pautas para la revisión y análisis documental, lo que permitirá la construcción de una UD de análisis y generará una primera aproximación al concepto de *visualización como organizador didáctico y curricular*.

De lo anterior que, la revisión y selección documental se desarrollará por medio de criterios histórico-epistemológicos de las matemáticas (de la educación matemática), involucrando aspectos geométricos, físicos, así como de distintos registros de representación de la derivada, específicamente de la secante a una curva, la recta tangente a una curva, las pendientes, la noción de límite, y la derivada, así como de aspectos fenomenológicos, con el fin de buscar los fenómenos que le den sentido al concepto matemático en mención. Esto dará pie a los distintos análisis involucrados en la construcción del modelo local.

Luego, el desarrollo del objetivo específico dos, el cual es “Diseñar e implementar un programa de formación inicial de profesores de matemáticas que permita generar una unidad didáctica para la enseñanza y comprensión de la derivada basada en el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente.”, estará basado en el diseño de un experimento didáctico (Mosquera, s.f.), el cual permitirá sistematizar la experiencia docente-investigador, esto teniendo en cuenta la estrategia metodológica del AD, al desarrollar e implementar una propuesta didáctica (Guiones del programa de formación y la UDG), que permita validar el modelo local construido en el OE1 (validación de la UAD) y dé información para refinar o resignificar el concepto de *visualización como organizador didáctico y curricular* como un conocimiento didáctico especializado del profesor de matemáticas concebido como un profesional e investigador de sus prácticas.

La siguiente matriz da un resumen de lo expresado en el anterior diseño metodológico, integrando los distintos marcos metodológicos con los distintos objetivos específicos:

Investigación de diseño	Sistematización de experiencias	Análisis Didáctico	OE's
Fase 1 Planificación	Determinar objeto de estudio. Definir pregunta de investigación	Estructuración del ML de CD&AD de contenido. Revisión documental.	OE1
Fase 2 Ejecución	Recolección y sistematización de la información	Diseño de la UD (UAD y UDG) Desarrollo del experimento didáctico (guiones y UDG) para análisis y reflexión sobre la UD (práctica y observación).	OE2
Fase 3 Evaluación	Interpretación de la información, conclusiones del proyecto y proyecciones.	Análisis de la información obtenida en entrevistas y en el ED desarrollado. Verificación del ML de CD&AD, caracterización del conocimiento didáctico del profesor y refinar el concepto de visualización como un organizador. Análisis, conclusiones y posibles proyecciones.	OE2

Tabla 1. Matriz metodológica (elaboración propia).

3.2.1. DURACIÓN DE LA APLICACIÓN

El experimento didáctico (programa de formación inicial de profesores de matemáticas FIPM) diseñado, resultado de la fase de planificación de la investigación de diseño será aplicada

durante 6 sesiones de clases de 180 minutos, sin embargo, como también se debe cumplir con el programa del curso, en dichas sesiones no se usarán los 180 minutos, sino solo 60 minutos.

SESIÓN	DESCRIPCIÓN
I	Introducción general programa FIPM.
II	Presentación del modelo didáctico-curricular de conocimiento didáctico y análisis didáctico del contenido.
III	Introducción al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, por medio del análisis cognitivo.
IV	Construcción del análisis fenomenológico del CME.
V	Definición de la visualización como organizador didáctico y curricular para la FIPM.
VI	Presentación y socialización de la UDG construida durante el desarrollo de la investigación.

Tabla 2. Duración de la aplicación (elaboración propia).

En el siguiente capítulo “Resultados de investigación”, se mostrarán algunos guiones del programan de formación, los demás estarán como anexos de la investigación.

3.2.2. CONTEXTO Y PARTICIPANTES

El contexto en el cual se desarrolla el experimento didáctico se concibe en la presente investigación como un entorno sociocultural, el cual se encuentra inmerso en las propuestas curriculares y normativas nacionales, por medio del Ministerio de Educación Nacional, la resolución de la licenciatura, los programas de los distintos cursos vistos previamente y el programa desarrollado para el curso en el cual se sistematizó la experiencia docente.

Contextualización y participante	
Institución	Universidad del Valle (sede Meléndez).
Carácter	Pública
Zona	Urbana
Modalidad	Profesional
Participantes	8 estudiantes de VIII semestre de la Lic. en Matemáticas (EPP), 5 hombres y 3 mujeres, de entre 20 y 25 años de edad.
Criterios de selección	• Ser estudiantes del curso DdM-V (2022). • Afinidad por la enseñanza de las matemáticas en la educación media. • Participación activa en las reflexiones de clase.

Tabla 3. Información general institución educativa y participantes de la investigación (elaboración propia).

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1.LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Desde este trabajo de grado siguiendo a Segovia y Rico (2001) y Bedoya (2020), una unidad didáctica (UD), se concibe como una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades seleccionadas para ser desarrolladas en un periodo de tiempo determinado con el propósito de obtener unos objetivos específicos, teniendo en cuenta un enfoque o modelo didáctico determinado.

En la presente propuesta, se desarrollan dos categorías de unidades didácticas, una que denominamos unidad de análisis didáctico (UAD) y otras, productos de la anterior, que denominamos unidades didácticas guías (UDG), las cuales se consideran como estrategia e instrumento metodológico de recogida de y análisis de información.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el marco conceptual de la presente propuesta de investigación, la UAD es la concreción del proceso de análisis didáctico de un contenido matemático escolar específico, realizado por parte de un profesor en formación. Luego, las UDG constituyen las unidades guía propuestas cuyo fin es de ser llevadas al aula de clase y presentadas a los estudiantes por parte del profesor, esto a partir de la UAD realizada en una primera instancia.

Es importante mencionar que las dos unidades didácticas comparten una estructura general (ver subcapítulo 2.3. de la presente propuesta de investigación), sin embargo, la UAD es para el profesor y la UDG va dirigida a los estudiantes, es decir que la primera da información conceptual y didáctica fundamental sobre el contenido matemático escolar respaldando la concreción en el aula de la segunda unidad.

4.1.1. LA UNIDAD DE ANÁLISIS DIDÁCTICO (UAD)

La presente unidad es elaborada por y para el profesor de matemáticas, la cual como se mencionaba anteriormente, contiene el análisis didáctico del objeto matemático escolar (AD de contenido, AD cognitivo y el AD de instrucción) y es fundamental para la posterior elaboración de la UDG que se llevará al aula. Además, dicha unidad contiene información relevante sobre la contextualización curricular, así como información sobre el modelo didáctico pedagógico desde el cual se plantea los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Para elaborar la unidad didáctica se ha tenido en cuenta la estructura de una unidad didáctica propuesta por Bedoya (2020) con algunas modificaciones teniendo en cuenta nuestro modelo local, como por ejemplo dentro de la UAD no se incluye el desarrollo la secuencia de actividades que si va contenida en la UDG.

Título

Recta tangente a una curva y pendiente: introducción visual, intuitiva y geométrica a la noción de derivada.

Presentación y descripción general

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del cálculo, el cual, por su definición analítica, precede al concepto de límite de una función, sin embargo, consideramos que dicho manejo de la derivada puede ser problemático. Esta Unidad de Análisis Didáctico (UAD) se centra en la enseñanza de la derivada, para el grado undécimo de educación media, por medio de un tratamiento didáctico de la visualización de la recta tangente a una curva y su respectiva pendiente y se desarrolla como una formación permanente e innovación curricular en el marco de un estudio posgradual en Educación con énfasis en Educación Matemática.

Análisis curricular

La siguiente tabla hace referencia al eje temático que está contenido en la propuesta curricular en sus tres niveles, nacional, institucional y aula.

Nacional (MEN).	Estándar: (pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos) Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. DBA: 5. Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Procesos: • Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. • Modelación. • Comunicación. • Razonamiento. • Formulación, tratamiento y resolución de problemas.
------------------------	--

Institucional.	Plan de área de Matemáticas: se propone que dicha unidad se trabaje en el I periodo escolar, a modo de introducción al concepto de derivada (aunque también se podría trabajar en un curso de precálculo universitario). Modelo pedagógico de la respectiva institución educativa.
Aula.	Plan de clase de Matemáticas de grado undécimo. Materiales y recursos.

Tabla 4. Referentes curriculares de la derivada (elaboración propia).

Objetivo general

Resignificar la noción de derivada por medio de la visualización de la pendiente de la recta tangente a una curva.

Objetivo específico

Proponer actividades significativas relacionadas con la aproximación de rectas secantes a la recta tangente a una curva con sus respectivas pendientes, que le permita al estudiante acercarse a la noción de derivada de forma visual, geométrica e intuitiva.

Recursos

Profesor, aula de clases, pizarra, marcadores, computador, proyector, GeoGebra, guía de actividades impresa, regla, lápiz.

Análisis didáctico de contenido de la derivada

A continuación, se desarrollarán los distintos análisis mencionados anteriormente que ajustan el análisis didáctico de contenido de la derivada.

Análisis de la evolución histórico-epistemológica de la derivada

En el presente apartado se desarrollará el análisis de tipo histórico-epistemológico del concepto de derivada, con el fin de explorar los distintos desarrollos de dicho objeto matemático, pues nos dará pautas para desarrollar nuestro modelo local de AD y la UD de análisis entorno a la derivada, teniendo en cuenta el proceso de VD.

Inicialmente Grabiner (1983), menciona que históricamente la derivada primero fue utilizada (método de Fermat para hallar máximos y mínimos), después descubierta (invención del cálculo por parte de Leibniz y Newton), luego desarrollada (contribuciones hechas por Lagrange y Euler) y finalmente definida (inicialmente por Cauchy y corregida posteriormente por Weierstrass), por lo que dicho concepto aparece ligado, no solo a otros conceptos matemáticos, como el concepto de límite, recta tangente a una curva, entre otros, sino también a distintos aspectos fenomenológicos, como puede ser la velocidad de una partícula (física) o el triángulo característico de Barrow (geometría) para hallar rectas tangentes a distintas curvas.

Uno de los primeros antecedentes del concepto de derivada aparece ligado, sin querer, al concepto de recta tangente a una curva, y se da en las Cónicas de Apolonio de Pérgamo (262-190 a.C.), donde se hace un estudio de la manera en que se puede hallar la tangente a algunas cónicas; no obstante, es Arquímedes (287 – 212 a.C.) el precursor de los métodos infinitesimales, pues sus obras influyeron en el resurgimiento de estos métodos, los cuales, posteriormente, adquirieron mucha relevancia en los trabajos de Galileo (1564 – 1642) en mecánica, astronomía, arquitectura y de navegación, puesto que presentan retos similares (Ortega et al, 1998).

De lo anterior que, a comienzos del siglo XVII, aparecieron problemas que estaban directamente ligados a lo que hoy conocemos como derivada, como el de hallar rectas tangentes a distintas curvas y sus puntos máximos y mínimos.

Fermat (1601-1665) crea un método para resolver el problema de hallar los máximos y mínimos sin disponer del concepto de límite. Recalde (2017), muestra los pasos expuestos por Fermat, a saber:

1. Se designa por a al término a maximizar, y por E a una cantidad infinitamente pequeña.
2. Se reemplaza a por $a + E$, lo que significa que el máximo o el mínimo queda expresado en término de potencias de a y de E .
3. Las expresiones de los dos puntos anteriores se hacen aproximadamente iguales (“casi iguales”, escribe Fermat) y se realizan las respectivas simplificaciones y reducciones.
4. Se dividen las expresiones por una misma potencia de E , de tal suerte que al menos uno de los términos resultantes no contenga E .
5. Se hace E igual a cero y se igualan las expresiones resultantes.
6. Se soluciona la ecuación resultante, obteniendo el valor máximo o mínimo relativo.

Como ejemplo, Fermat resuelve el problema de hallar el punto P del segmento AB tal que el área formada por los dos segmentos resultantes sea máxima. Si se designa por $AB = b$ y $PB = a$, se trata de maximizar el producto $a(b-a)$. Denominando por el signo “ $\sim$ ” a la expresión “casi iguales” y remplazando a por $a + E$, se obtiene,

$$a(b-a) \sim (a+E)(b-(a+E))$$

Donde,

$$ab - a^2 \sim (a+E)(b-a-E)$$

$$ab - a^2 \sim ab - a^2 - aE + bE - aE - E^2$$

Luego de realizar las respectivas simplificaciones se llega a:

$$Eb \sim 2aE + E^2$$

Finalmente, al simplificar E a ambos lados, y posteriormente hacer $E=0$, se obtiene que $a=b/2$. De manera similar, Fermat aplicó dicho método para hallar máximos y mínimos con el cálculo de tangentes a ciertas curvas algebraicas. En dicho trabajo, sugiere el manejo del cociente diferencial que se usa actualmente para calcular la pendiente de la recta tangente, además, la E que llama “infinitamente pequeña”, constituye uno de los antecedentes más importantes al concepto de límite. Por lo anterior, Laplace (1749-1827) considera a Fermat como el verdadero padre del cálculo diferencial.

Isaac Barrow (1630-1677), maestro de Newton, alternaba gran parte de su vida a la enseñanza de las matemáticas en el Gresham College de Londres y al desarrollo de varias obras, como la *Lectioes Geometricae* en 1670, donde en la lección X, desarrolla su método para el cálculo de tangentes, por medio del triángulo característico, denominado así por Leibniz, usado por Newton. En lo que sigue, se mostrará la descripción hecha por Toledano (2017) al método de Barrow:

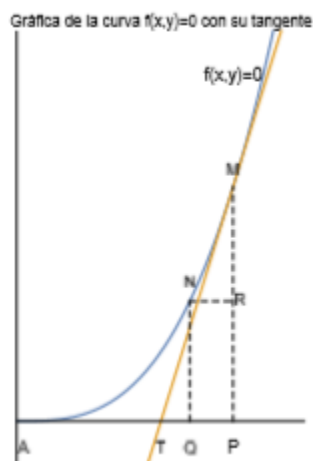


Figura 6. Método de Barrow para el cálculo de tangentes (tomado de Toledano, 2017).

Sean AP y PM dos líneas rectas dadas, PM cortando a la curva dada en M, y supongamos que MT corta a la curva en M y a la recta AP en T.

En orden de encontrar el segmento PT, es decir la subtangente, consideremos un arco de la curva MN infinitamente pequeño. Tracemos NQ y NR paralelas, respectivamente, a MP y AP. Sean $MP=m$, $PT=t$, $MR=a$ y $NR=e$ otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos MR con NR por medio de una ecuación obtenida por el cálculo. A continuación, observamos las siguientes reglas:

Regla 1: en el cálculo omitiremos todos los términos que contienen potencias superiores a uno de a o e , o productos de ellos.

Regla 2: después de formar la ecuación, desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen a o e .

Regla 3: se sustituye m por a y t por e , de aquí se encontrará la cantidad PT. (Toledano, 2017, p. 83).

Teniendo en cuenta el método expuesto, si se denota $AP=p$, tenemos que las coordenadas de los puntos M y N serán (p, m) y $(p-e, m-a)$ respectivamente, donde ambos puntos están sobre la curva.

En lo que sigue, se aplicará el método para la curva $y = x^2$:

Teniendo en cuenta ahora el plano cartesiano, y lo mencionado anteriormente, las coordenadas de un punto N sobre la curva son $(x-e, y-a)$, tenemos que

$$y - a = (x - e)^2$$

Donde, por al resolver el cuadrado y aplicar la regla 1, tenemos que:

$$y - a = x^2 - 2xe$$

Posteriormente, al aplicar la regla 2, quitamos los términos que no contienen a o e , luego se simplifica el menos, quedando:

$$a = 2xe$$

De aquí que, al interpretar la regla 3 por la semejanza de triángulos entre MPT y el “triángulo” infinitesimal MRN (ver figura 6), Barrow dice que “si el arco MN es infinitamente pequeño, podemos sustituir con seguridad dicho arco por un pequeño trozo de la tangente” es decir que aplica el triángulo característico bajo la idea de que la tangente es la posición límite de las secantes, cuando a y e se aproximan a cero, es decir, cuando M se aproxima a N. Luego, como m , que es la derivada, cumple que $m=a$, y e tiende a ser cero, se tiene que:

$$m = 2x$$

Newton (1642-1717), cuyas bases matemáticas provienen de Isaac Barrow y su método para calcular tangentes, tuvo una visión fenomenológica (cinemática) de dicho problema, por medio del “triángulo característico de Barrow”, el cual lo condujo a su método de fluxiones en 1671, el cual se basaba en que las variables x e y , son cantidades que van fluyendo. Veamos la descripción que Rey Pastor y Babini (1985, p. 92):

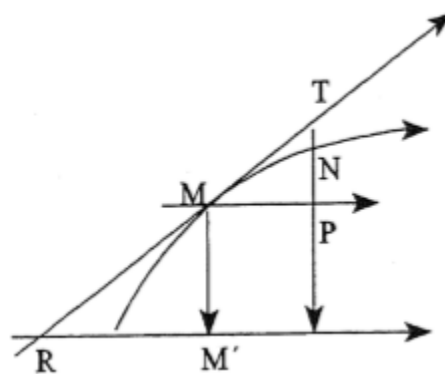


Figura 7. Cálculo de tangentes de Newton, basado en el triángulo característico de Barrow (tomado de Ortega et al, 1998).

“Considera el ‘triángulo característico’ mixtilíneo formado por los incrementos MP, PN y el arco MN que, compara con los triángulos MPN y MPT. Al coincidir N con M, la cuerda y el arco coinciden con la tangente y el triángulo mixtilíneo evanescente MPN en su última forma es semejante al triángulo MPT, y sus lados evanescentes MP, PN y MN son proporcionales a los lados del triángulo MPT, de donde las fluxiones de la abscisa, la ordenada y el arco son proporcionales a los lados del triángulo MPT, o lo que es lo mismo, a los lados del triángulo MRM’ formado por la ordenada, la tangente y la subtangente. Pero esas fluxiones no son otra cosa que las razones de los elementos evanescentes” (Rey Pastor y Babini, 1985, citado en Ortega et al, 1998).

Recalde (2017), muestra que Newton, en su obra *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y editada en 1704, propone establecer sus resultados evitando los problemas de rigor que emergían cuando se despreciaban las cantidades infinitesimales en los cálculos, pues las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

De lo anterior se observa como el cálculo de derivadas condujo a Newton hacia el concepto de límite, ya que éste se interesó por la razón de las cantidades que se aproxima a un límite cuando las dos cantidades tienden a cero, es decir que, para Newton, la derivada no es una aplicación del concepto de límite, sino todo lo contrario (Cornu, 1983, citado en Ortega et al, 1998).

Leibniz (1646-1716) por su parte, desarrolló el cálculo infinitesimal con mucha preocupación por la claridad de los conceptos y el aspecto formal de las matemáticas, lo que condujo a que creara el simbolismo adecuado. En 1684 escribió una memoria de apenas seis páginas en las que introdujo la notación y propiedades de la diferenciación, así como resolución de problemas de máximos y mínimos, según su segunda diferencial (Ortega et al, 1998).

Euler (1707-1783) publicó los primeros tratados del cálculo infinitesimal, integrando el cálculo diferencial y el método de fluxiones, mientras que Lagrange (1736-1813) trata de desarrollar el cálculo de forma más rigurosa, al querer eliminar los infinitamente pequeños, hallando así la función derivada para aplicar todos sus resultados a la geometría y a la mecánica (Ortega et al, 1998).

Es Cauchy (1789-1857) el que puso las bases del análisis matemático al prescindir de la geometría, de los infinitesimales y de las velocidades de cambio, formulando así la definición de límite y a partir de ella la de derivada, junto con sus propiedades fundamentales. Cauchy definió la derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x , al darle a la variable x un incremento $\Delta x=i$ y forma la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Y al límite cuando $i \rightarrow 0$ es lo que define como la derivada de y con respecto a x , la cual es la definición de la derivada como la usamos en la actualidad. Gracias a lo anterior, unido con el uso de la definición épsilon-delta, Cauchy logró una primera aproximación a la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo, la definición de Cauchy de la derivada tenía una deficiencia, pues dado un épsilon eligió un delta que supuso que funcionaría para cualquier x . Es decir, asumió que el cociente de diferencias convergía uniformemente hasta su límite. (Grabiner, 1983).

Sin embargo, Weierstrass (1815-1897) hizo que las desigualdades algebraicas reemplazaran las palabras en los teoremas en el Análisis, y usó su propia distinción entre convergencia puntual y uniforme junto con las técnicas delta-épsilon de Cauchy para presentar un tratamiento sistemático y riguroso del cálculo en su obra en 1872, donde muestra un dominio completo de los conceptos de derivada, la noción de límite y su existencia (Grabiner, 1983).

En la siguiente imagen Grabiner (1983), muestra una línea de tiempo en la que presenta las fechas relevantes en el desarrollo del concepto de derivada y los matemáticos que realizaron la contribución para definir dicho concepto. Dentro de los intereses de la presente investigación, destacar que, entre Descartes y Newton, aparece Barrow (1670) con sus aportes por medio del triángulo característico para el cálculo de rectas tangentes a curvas.

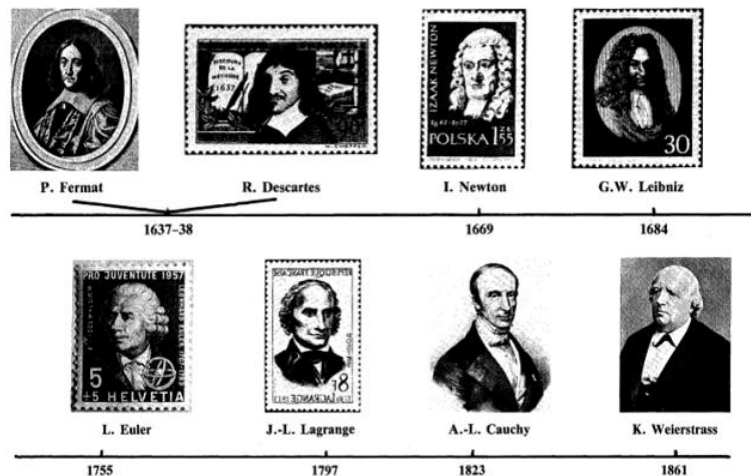


Figura 8. Línea de tiempo con los matemáticos de mayor contribución a la evolución del concepto de derivada (tomado de Grabiner, 1983).

Análisis fenomenológico de la derivada

En el presente apartado se desarrollará el análisis de tipo fenomenológico del concepto de derivada, esto con el fin de explorar los fenómenos en los que se aplica el concepto a analizar. Freudenthal (1983), define la fenomenología como tomar un concepto matemático, estructura matemática o idea y describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado y con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Además, hace claridad en que cuando esta descripción tiene que ver con el proceso de aprendizaje de una generación joven, es entonces fenomenología didáctica, es decir, es una manera de mostrarle al profesor aquellos lugares en los que los aprendices pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje de la humanidad (p. ix).

Posteriormente Puig (1997), utiliza la expresión *análisis fenomenológico*, en el contexto del análisis didáctico, teniendo en cuenta que: “El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos” (p. 63). De aquí que la fenomenología de un concepto matemático la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización, es decir que un análisis de tipo fenomenológico consiste en describir fenómenos asociados a los conceptos matemáticos, así como la relación que existe entre ellos (Rico, 2001, citado en Solano, 2017).

En cuanto a la derivada, uno de sus propósitos es representar la razón de cambio en alguna situación, como puede ser el cambio del volumen de un globo a lo largo de cierto tiempo, el cambio de la luminosidad a lo largo de la madrugada, entre otros. Luego, uno de los fenómenos físicos a los que se asocia el concepto de derivada es al movimiento, pues por medio de este surge una dependencia entre el concepto matemático mencionado, y la velocidad (en nuestro caso, visto de forma gráfica) con la que se mueve algún objeto.

Para los seres humanos, el término *movimiento* es algo normal, incluso es algo que generalmente se hace, pues para ir a los distintos lugares de estudio o de trabajo, debe haber algún tipo de movimiento. Dicho movimiento trae consigo algunos conceptos físicos importantes, como el de posición, desplazamiento, tiempo, velocidad y aceleración, entre otros. Cuando una persona se dirige en su vehículo al trabajo, generalmente hay unos momentos en los que debe aumentar o disminuir la velocidad (aceleración o desaceleración), pues en la carretera hay otros vehículos, semáforos o cualquier objeto que hace que esto ocurra.

Por lo anterior que, decir que durante el trayecto de la casa al trabajo se mantiene una velocidad constante, es falso, por lo que conceptos como *velocidad media* aparecen con el fin de analizar cómo varía la posición del auto, respecto a un intervalo de tiempo, es decir, saber cómo

cambió la posición de la persona que iba al trabajo, pero solamente entre los 10 y 11 minutos de haber salido de su casa, por ejemplo, es decir que solo nos interesa saber qué ocurrió en dicho intervalo de tiempo. Si realizamos una gráfica de la posición respecto al tiempo de dicha situación, y tenemos en cuenta conceptos de secantes y tangentes a curvas, así como pendiente de una recta, podemos concretar un poco más el concepto de derivada, por medio del fenómeno físico de movimiento, precisamente del concepto de *velocidad instantánea*.

Sea una situación en la que un ciclista profesional se desplaza con velocidad constante desde una posición inicial x_1 en un instante t_1 hasta una posición final x_2 en un instante t_2 como lo muestra la figura 9.



Figura 9. Dibujo posición respecto al tiempo del movimiento del ciclista (elaboración propia).

Si con el fin de estudiar la velocidad del ciclista, se modela gráficamente el movimiento de la figura 9, se obtiene una recta en el plano cartesiano, tal y como se observa en la figura 10.

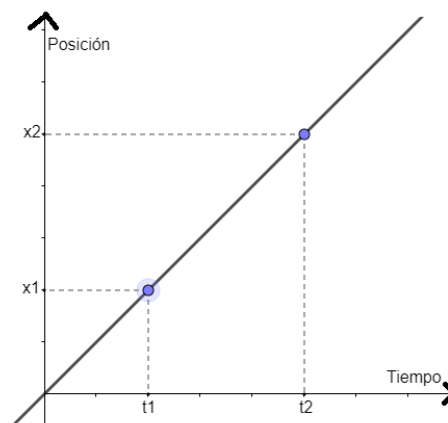


Figura 10. Representación gráfica de la posición respecto al tiempo del movimiento del ciclista (elaboración propia).

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta de la figura 10 viene dada por:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Y que la velocidad se define como el cambio de posición respecto al cambio de tiempo, es decir que en la situación del ciclista:

$$v_{media} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Se tiene que la velocidad del ciclista, que en dicha situación es constante, es la pendiente de dicha recta.

Ahora, si la velocidad del ciclista no es constante, lo cual es un poco más real teniendo en cuenta los pares, la carretera, semáforos y lo mencionado anteriormente, aparece una situación en la que el movimiento del ciclista es acelerado, luego la velocidad entre las posiciones x_1 y x_2 no necesariamente es igual a la velocidad en otras dos posiciones, cosa que si pasa cuando la velocidad del ciclista es constante (caso inmediatamente anterior).

En la figura 11 se modela el movimiento del ciclista en una gráfica de posición contra tiempo, teniendo en cuenta que ahora la velocidad no será constante:

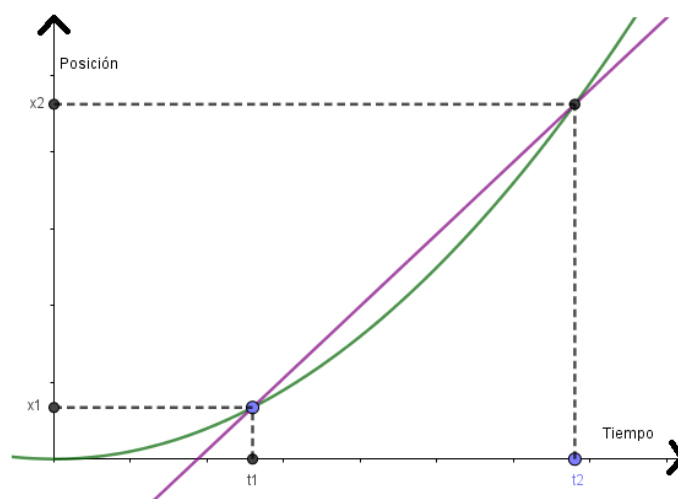


Figura 11. Gráfica posición contra tiempo del movimiento del ciclista cuando su velocidad es variable (elaboración propia).

La pendiente de la recta da la velocidad media entre los instantes t_1 y t_2 , sin embargo, si acercamos el punto (x_2, t_2) al punto (x_1, t_1) como se ve en la figura 12, la diferencia de tiempo ($\Delta t = t_2 - t_1$) se hace más pequeña ($\Delta t \rightarrow 0$), luego la recta púrpura que inicialmente es secante a la gráfica posición contra tiempo del movimiento del ciclista con velocidad variable, pasa a ser tangente en el tiempo t_1 , luego esto indica que se está analizando el movimiento del ciclista, ya no en un intervalo de tiempo, sino en un instante.

Por lo anterior que, es posible hallar ya no la velocidad media del ciclista dado un intervalo de tiempo, sino la velocidad en cualquier instante. Como observamos en el caso del movimiento del ciclista con velocidad constante, la velocidad está relacionada con la pendiente de la recta, luego a velocidad variable, la velocidad en el instante t_1 se relaciona con la pendiente de la recta que pasa por el punto (t_1, x_1) y que es tangente a la gráfica de posición contra tiempo en dicho punto. Luego, la velocidad se define analíticamente como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$$

Lo cual se relaciona directamente con la definición analítica de la derivada de una función

$$v = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

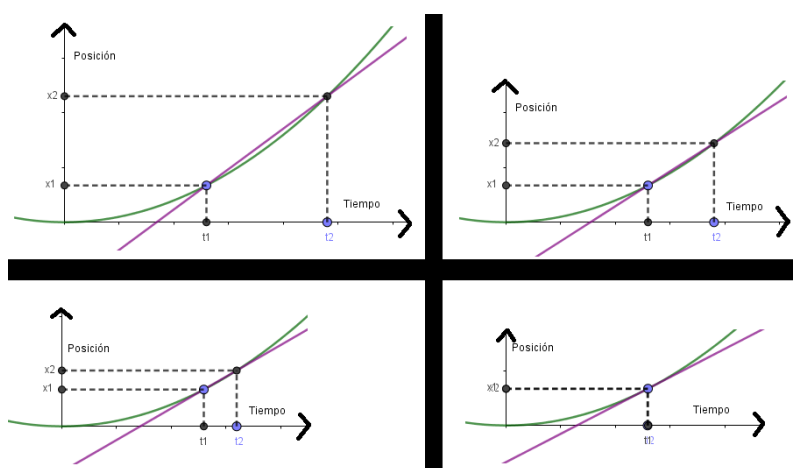


Figura 12. Acercamiento del punto (x_2, t_2) al punto (x_1, t_1) (Elaboración propia).

Análisis semiótico

En el presente apartado se desarrollará el análisis de tipo didáctico-semiótico del concepto de derivada, con el fin de explorar los distintos sistemas de representación de dicho objeto matemático, pues nos dará pautas para desarrollar nuestro modelo local de AD y la UAD entorno a la derivada, teniendo en cuenta *la visualización como un organizador didáctico y curricular*.

Para el estudio semiótico se tendrá en cuenta la clasificación de los distintos sistemas de representación en representaciones internas y externas (Duval, 1999), más si consideramos que es por medio de la visualización que el profesor puede crear puentes entre la noción matemática y las representaciones anteriormente mencionadas, es decir, que *la visualización es un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas* (lo que queremos definir como *visualización didáctica*). De aquí se define:

- Representaciones internas, también denominadas representaciones mentales como las que permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible.
- Representaciones externas son las que se producen de forma visible y observable por el sujeto con el ánimo de comunicar. Es importante tener en cuenta que las representaciones externas cumplen con la función no solo de comunicar las representaciones internas del individuo sino también de actuar como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas representaciones mentales (Duval, 1999).

Posteriormente Rico (2000), afirma que el concepto de representación se emplea sistemáticamente en la educación matemática desde la década de los 80. En varios trabajos desarrollados en dicha época, aparecen alternativas conceptuales similares, más no equivalentes, como los símbolos (Skemp, 1980), sistema matemático de signos (Kieran y Filloy, 1989), sistemas de notación (Kaput, 1992) y sistema de registros semióticos (Duval, 1993).

Radford (1998) muestra que hay un gran interés didáctico sobre las representaciones, ya que, mediante dichas representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas. Lo anterior es debido a que las representaciones se definen como todas aquellas herramientas, signos o gráficos, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas (Rico, 2000).

Luego Duval (2004), afirma que la utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática, puesto que los tratamientos matemáticos no pueden ser ajenos a un sistema semiótico de representación. Además, precisa que un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite la presencia de una representación identificable, si permite el tratamiento de una representación (la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada) y si permite la conversión de una representación (la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial).

En lo que sigue, y con el fin de desarrollar el análisis didáctico-semiótico del concepto de derivada, se mostrarán las distintas representaciones semióticas del concepto de derivada, usando el registro semiótico simbólico, verbal escrito y gráfico.

✓ Registro semiótico: lenguaje simbólico:

➤ Definición algebraica: $m = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

➤ Definición analítica: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

➤ Definición trigonométrica: $\tan \alpha = m$

➤ Definición para funciones: $m = f'(x)$

➤ Definición en notación Leibniz: $\frac{dy}{dx} = m$

- ✓ Registro semiótico: lenguaje verbal escrito:
 - Definición geométrica: La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva.
 - Definición como tasa de cambio: La derivada es la razón de cambio instantánea.
 - Definición analítica: La derivada es el límite cuando “h” tiende a cero, del cociente diferencial.
 - Definición en física: La derivada es velocidad instantánea con la que se mueve una partícula.
- ✓ Registro semiótico: lenguaje gráfico:
 - Definición geométrica: (ver figura 13)

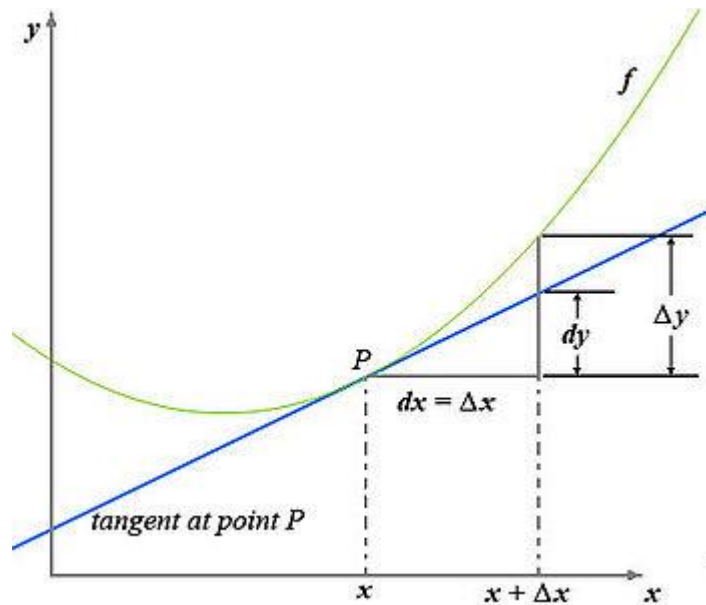


Figura 13. Representación gráfica en el plano cartesiano de la derivada de la función f en el punto P ⁴.

- Definición intuitiva: El paso de recta secante a tangente: (ver figura 14)

⁴ tomado de <http://mujeres1101.blogspot.com/2011/07/definicion-analitica-de-derivada-como.html>

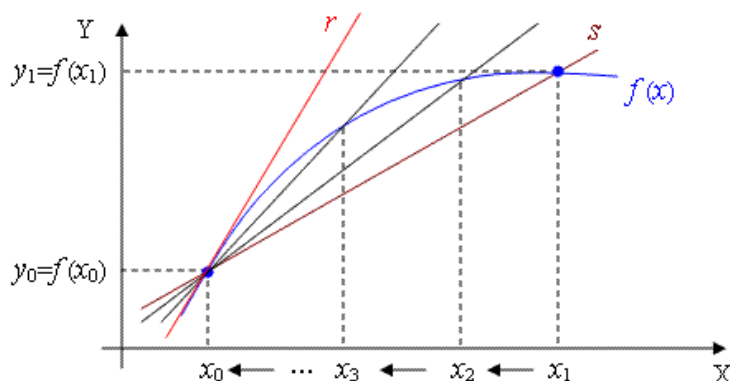


Figura 14. Representación gráfica en el plano cartesiano del paso de recta secante a recta tangente a una curva⁵.

Estructura didáctico conceptual de la derivada

Del análisis didáctico de contenido, se obtiene todo tipo de información frente al objeto matemático, el cual se sintetiza en una estructura (para nosotros, estructura didáctico conceptual), la cual muestra la riqueza de significados y relaciones entre el concepto, el modo en que se representa, su funcionalidad y campos de aplicación. Toda la información se puede sintetizar en un mapa conceptual, para de aquí mostrar prioridades y nociones básicas de un tema de matemáticas (Rico, 2013).

Por lo anterior que, desde el punto de vista de nuestro modelo local de análisis didáctico, la estructura didáctico conceptual relativa al objeto matemático curricular (es decir, al contenido matemático escolar) es precisamente una construcción que resulta de los análisis didácticos curriculares y de contenido realizados previamente. Para el caso de la presente investigación, la estructura didáctico conceptual de la derivada se presenta como esquema en la siguiente figura:

⁵ tomado de <http://campusdematematicas.com/calculo-infinitesimal/significado-geometrico-de-la-derivada-de-una-funcion/>

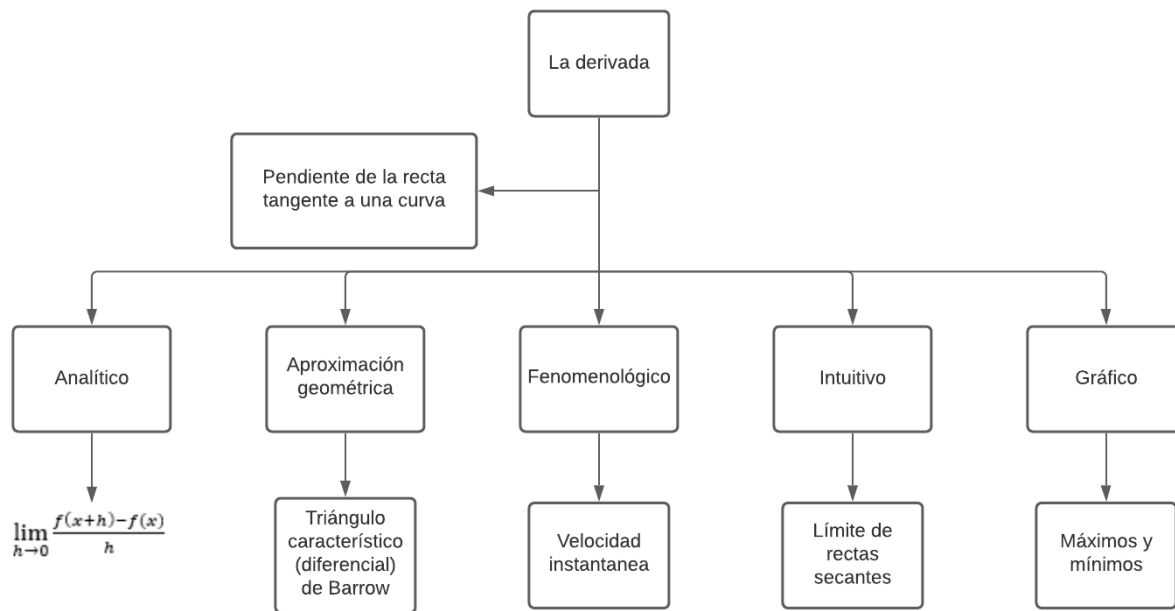


Figura 15. Estructura didáctica conceptual de la derivada (elaboración propia).

Teniendo en cuenta no solo los análisis que caracterizan nuestro modelo local de análisis didáctico de contenido (análisis histórico-epistemológico, fenomenológico y semiótico) sino también la estructura de la figura 15, construimos una definición propia (local) de la derivada, esto con el fin de caracterizar aún más nuestro modelo local.

En nuestro modelo local, el concepto de derivada se define de manera intuitiva, por medio de tres aspectos: pendiente de una recta (secantes, sus pendientes y sus aproximaciones a la recta tangente y su pendiente); definición analítica de la derivada; representación gráfica de los dos aspectos anteriores.

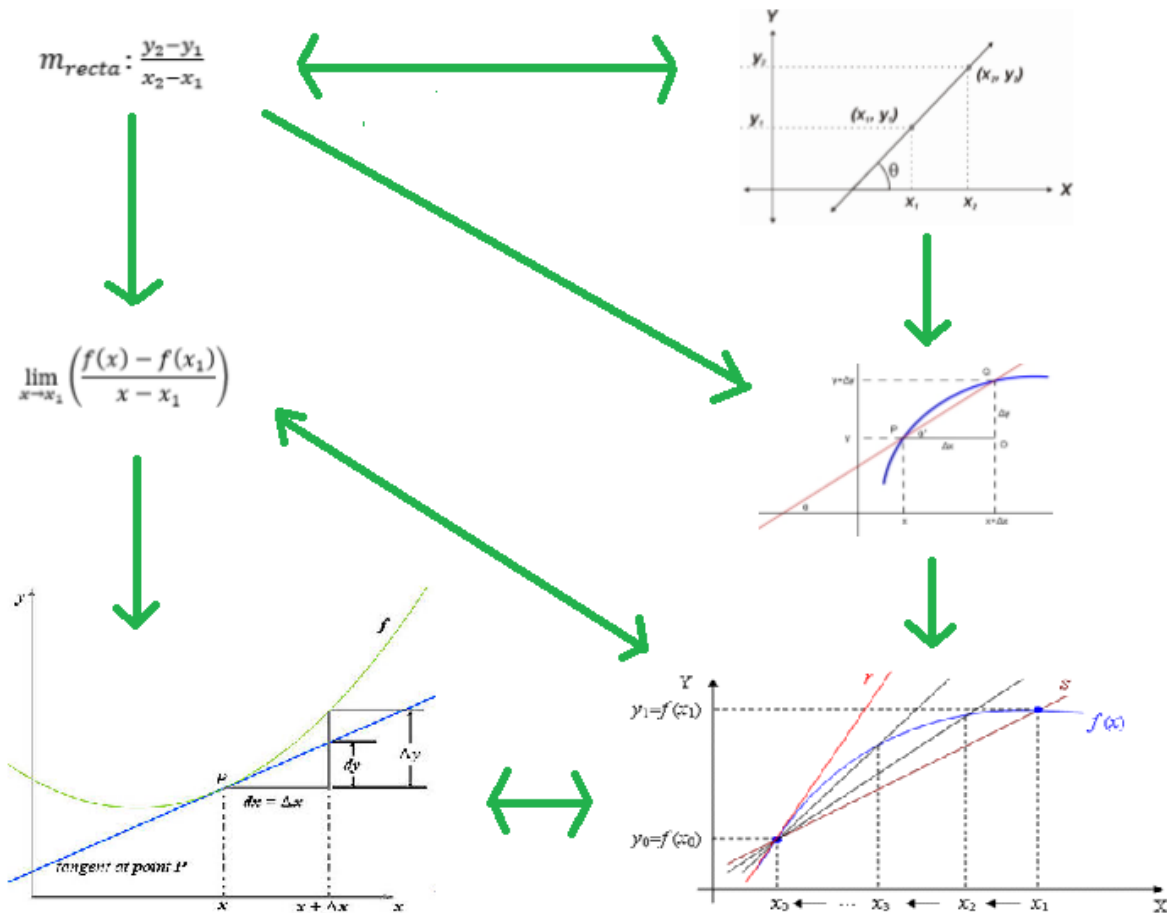


Figura 16. Esquema de representación en apoyo a nuestra definición de la derivada (elaboración propia, basado en Ramírez et al, 2014).

En el diagrama de la figura 16 se presenta un esquema de apoyo para definir localmente el concepto de derivada, es decir se muestra la relación de los conceptos que tomamos en cuenta para nuestro esquema didáctico conceptual de la derivada.

Interpretando los tres aspectos mencionados anteriormente, tenemos que la pendiente de una recta es un elemento intuitivo inicial al concepto de derivada, pues se empieza a considerar la pendiente de una recta secante a una curva, luego se pretende hacer más pequeña la diferencia que hay entre los puntos que se encuentran inscritos en la curva, hallando sus respectivas pendientes. Aquí se da un acercamiento infinito ya que se van a considerar distancias infinitamente pequeñas

hasta llegar a que esa recta sea tangente a la curva (ver figura 14), donde su pendiente se puede considerar como la aproximación de las pendientes de las rectas secantes mencionadas anteriormente. El realizar este proceso lleva directamente a la definición algebraica de derivada.

Luego, en la definición analítica se toma el proceso y la definición algebraica mencionada anteriormente, además del paso al límite, desencadenando a la definición usual o analítica-algebraica de la derivada.

Finalmente, en las representaciones gráficas de los dos aspectos mencionados anteriormente, se toman tanto la definición geométrica (ver figura 13) como la definición intuitiva (ver figura 14) y se relacionan con la pendiente de una recta, el paso de rectas secantes a tangente, permitiendo la evolución hacia el concepto de derivada; inicialmente presenta la definición de pendiente de una recta, posteriormente se relaciona tanto con la pendiente de una recta secante a una curva, como con la definición formal de derivada (por paso al límite), finalmente se relaciona lo anteriormente mencionado, con la aproximación de recta secantes a la recta tangente y la definición geométrica de la derivada (ver figura 16).

Análisis cognitivo

El análisis cognitivo de la presente propuesta de investigación se enfoca en los obstáculos, dificultades y errores, que aparece en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la recta tangente a una curva, con miras a la construcción del concepto de derivada, lo cual no solo se ha documentado en diferentes investigaciones del grupo PNA, sino también en diversa literatura de la Didáctica de las matemáticas.

En la mayoría de las propuestas curriculares nacionales, la enseñanza de la derivada inicia en el grado undécimo con la definición analítica, teniendo como punto de partida la noción de límite, para pasar lo que resta del año escolar aplicando reglas y algoritmos para hallar la derivada de algunas funciones polinómicas, para posteriormente, en algunas ocasiones, intentar hacer una

interpretación geométrica de la derivada por medio de la recta tangente a la gráfica de una función dada.

El proceso de enseñanza de la derivada privilegia entonces los aspectos algebraicos y algorítmicos, dificultando la comprensión de las distintas definiciones de derivada, haciendo que sus múltiples interpretaciones y aplicaciones, se reduzcan a hallar derivadas de algunas funciones polinómicas, por medio de diversas reglas de derivación y propiedades.

Los obstáculos, las dificultades y los errores son en conjunto trabas que afectan la adquisición y la consolidación de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes. En muchas ocasiones las respuestas equivocadas a problemas son causadas por estas trabas, que pueden deberse a conocimientos o procedimientos erróneamente adquiridos (Camacho, 2017). En la presente propuesta de investigación, concebimos que las dificultades son manifestadas en la complejidad del entendimiento de un objeto matemático, los errores son manifestaciones patentes de las dificultades y los obstáculos son situaciones que desfavorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A partir de lo expuesto anteriormente, de un pilotaje de investigación desarrollado en una institución educativa privada de la ciudad y de diversos trabajos, de los cuales se destacan Pascual (2016) y Sánchez et al (2021) entre otros, recogemos diversos obstáculos, dificultades y errores del concepto de derivada y su introducción por medio de la visualización de la pendiente de la recta tangente a una curva.

- **Obstáculos:**

- Haber introducido la enseñanza del concepto de derivada a partir de la definición analítica.
- No haber trabajado el concepto de pendiente de una recta por medio de pendiente de rectas secantes a curvas.

- No haber desarrollado una conceptualización de recta secante a una curva y de recta tangente a una curva.
- No haber desarrollado la enseñanza de la derivada desde su definición e interpretación visual, espacial y geométrica (recta tangente a una curva).
- El poco énfasis que las instituciones educativas ponen a la enseñanza de la derivada en grado undécimo, pues privilegian aspectos relacionados con la prueba saber.

- **Dificultades:**

- Conocimientos y estudios previos de rectas y sus pendientes, rectas secantes, recta tangente, curvas, sus representaciones gráficas y desarrollos algebraicos.
- La definición de tangente a una circunferencia y a una curva en general.
- Diversos significados que los profesores le asocian al concepto de pendiente de una recta (inclinación, declive, empinada, entre otras).
- Identificar la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto.
- Dominar los conceptos, símbolos y vocabulario propios del concepto de derivada.
- Dominar las reglas y propiedades de la derivada.
- Identificar la derivada como la velocidad instantánea con la que se mueve una partícula.

- **Errores:**

- Errores al utilizar la fórmula de la pendiente de una recta.
- Considerar que la pendiente de una recta es solo un número que se le asocia a una recta sin conocer su definición.
- Confundir recta secante a una curva con una recta tangente a una curva.
- Errores al hallar la derivada por medio del límite.
- Errores en el uso de las reglas de derivación y las propiedades.

Análisis de instrucción (medios, materiales y recursos)

Tal y como se mencionó en el marco conceptual de la presente propuesta de investigación, el presente análisis se considera también como un análisis de medios, materiales, recursos y su empleo en la planificación de la instrucción en el aula. Los medios, materiales, recursos, sus características, tipos y usos son contenidos didácticos cuyo dominio por el profesor en cada tema matemático escolar identifica su competencia profesional, es decir, hacen parte de lo que denominamos conocimientos didácticos (Rico et al, 2016, pág. 275).

Dentro del presente análisis quedan incluidos los recursos convencionales, como los libros de texto, cuadernos y pizarra, pero también se incluyen recursos digitales, conocidos también como nuevas tecnologías, como lo son los softwares informáticos (Geogebra) y los videos en la red (YouTube). En lo que sigue, me voy a centrar en algunos libros de texto y nuevas tecnologías (Geogebra y videos de YouTube).

Teniendo en cuenta lo anterior, en la siguiente tabla presento algunos materiales para la enseñanza de la recta tangente a una curva y su pendiente como introducción al concepto de derivada, donde incluso varios de dichos materiales fueron utilizados para el desarrollo de la unidad didáctica guía (UDG):

Materiales	Actividades
Instrumentos de dibujo: juego de reglas y compás.	Obtener las rectas secantes y tangentes a algunas curvas como una circunferencia.
Recurso informático (YouTube): video introduciendo el concepto de derivada, iniciando con una introducción, recordando el concepto de pendiente de una recta, para luego mostrar la idea intuitiva de derivada (observar los primeros 18 minutos del video https://www.youtube.com/watch?v=6-zwdrqD3U).	Observar el video y realizar un informe sobre la forma inicial en que se concibe la derivada según el video. Adicionar en el informe el concepto de pendiente de una recta y de tangente a una curva.

Recurso informático (GeoGebra): Applet Recta, variando la pendiente y el punto de intersección, tomado del repositorio web del software (https://www.geogebra.org/m/p59dza8u#material/eeBsChSf).	En este applet se trabaja la recta, su pendiente y su ecuación, donde se pueden manipular dos deslizadores, uno con la pendiente y otro con el corte en el eje y, para que luego el applet te muestre la ecuación de la recta según los movimientos que hagas. Se pretende recordar el concepto de pendiente previo a introducir la derivada.
Recurso informático (GeoGebra): Applets Interpretación geométrica de la derivada, tomado del repositorio web del software (https://www.geogebra.org/m/ZM9qmNYA, https://www.geogebra.org/m/PYCMMsQN, https://www.geogebra.org/m/yHvnbmxg, https://www.geogebra.org/m/pFcBuBrj?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Frecta).	Varios applets donde se trabaja la interpretación geométrica de la derivada, por medio del paso de rectas secantes a una recta tangente. En dichos recursos se tienen una serie de puntos que se pueden mover, ya sean de forma directa o por medio de deslizadores, con el fin de aproximar sucesivamente la recta secante a la recta tangente a la curva en un punto. Se pretenden que dichos applets sean parte del tratamiento visual de la derivada.
Recurso informático (GeoGebra): Applet Pendiente de la recta tangente, tomado del repositorio web del software (https://www.geogebra.org/m/UcsxQfJ4).	En este applet se trabaja la pendiente de la recta tangente a una curva, moviendo un punto de modo tal que se acerque al punto en que se quiere hallar la tangencia (al inicio del applet muestran las instrucciones), para posteriormente el software regresarte el valor aproximado de la pendiente. Finalmente se pide dar el valor de la ecuación de la recta tangente al punto en $(-1,0)$. Se pretende que dicho applet también sea parte de ese tratamiento visual de la derivada.

Recurso informático (GeoGebra): Applet Triángulo característico de Barrow, elaboración propia (en <https://www.geogebra.org/m/yntncxqs>) .

Recurso informático (YouTube): video introduciendo el concepto de derivada, por medio del concepto gráfico y de la inclinación que tiene un auto al andar sobre una carretera más inclinada que otra (observa los primeros 6 minutos del video <https://youtu.be/YH1WfIT6TFg?si=CFNmdah2A0DabIZk>).

En este applet se trabaja la aproximación de recta secante y sus pendientes a la recta tangente y su pendiente en un punto de la curva, por medio de el "triángulo" de Barrow y del movimiento de un punto, en donde se muestra cómo a medida que se desliza dicho punto, y el "triángulo" se hace más pequeño, se puede reemplazar (o proyectar) la "hipotenusa curva" del "triángulo" de Barrow, en la hipotenusa sobre la recta secante, y que a medida que se hace aún más pequeño (infinitesimal), dicho trozo de secante se puede reemplazar por la tangente a la curva en el punto. Se pretende que dicho applet sea el eje central del tratamiento visual de la derivada.

Observar los primeros 6 minutos y 17 segundos del video y realizar la actividad #4 de la UDG parte 3 (ver subcapítulo 4.4.).

Recurso informático (GeoGebra): Applet Montaña Rusa, tomado del repositorio web del software (https://www.geogebra.org/m/csqcgyyn).	En este applet se muestra el movimiento de un carrito sobre la montaña rusa. Teniendo en cuenta lo anteriormente trabajado con el video de la velocidad y con el triángulo de Barrow, se espera mostrar la fenomenología de la Recta Tangente por medio de la velocidad de dicho carro de montaña rusa (ver UDG 3).
---	--

Tabla 5. Algunos materiales para la enseñanza de la derivada (elaboración propia, basado en Rico et al, 2016, pág. 283).

4.1.2. LA UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA (UDG)

Como se había mencionado anteriormente, la UDG es la unidad didáctica que se presenta a los estudiantes, comparte en gran parte la estructura de la UAD, sin embargo, no contiene el análisis didáctico (propio del profesor), ni reflexiones y referencias bibliográficas. En lo que sigue se presentan algunas actividades de la UDG, las cuales se diseñaron teniendo en cuenta la UAD realizada por el profesor-investigador y los análisis realizados de la implementación del programa de formación. Las demás actividades serán presentadas como anexo de la propuesta de investigación.

4.2.LA VISUALIZACIÓN COMO ORGANIZADOR DIDÁCTICO Y CURRICULAR: EL PROGRAMA DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

Desde este trabajo de grado siguiendo a Bedoya (2002), se diseña, implementa y evalúa un programa de formación de profesores de matemáticas, el cual busca desarrollar el concepto de visualización como un organizador didáctico y curricular, lo cual permitirá diseñar propuestas de

investigación y actividades de aula (esto es UDG) para introducir visual, geométrica e intuitivamente un CME específico, el cual en dicho programa es el de la recta tangente a una curva y su pendiente.

A continuación, presentamos algunos guiones del programa de formación con el que se orientó el trabajo del equipo de investigación. Los guiones restantes del programa se encuentran en los anexos de la presente memoria.

**VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE:
INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE
DERIVADA**

GUION #1 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

I sesión (martes 3 y jueves 5 de mayo de 2022, 1 hora): **Introducción general al curso y a la propuesta (programa) de FIPM.**

Guion de trabajo:

1. Presentación general del curso y algunas consignas iniciales

- Entrega y lectura del programa del curso.
- Observaciones sobre la evaluación (formativa) del curso y sobre el trabajo final, el cual debe ser pensado como una cuota inicial a un trabajo de grado.
- Los alumnos deben participar activamente de las distintas discusiones, con el fin de registrar sus comentarios, así como enviar constantemente reseñas, ensayos y avances en sus distintas propuestas de trabajo final.
- En términos generales, durante la propuesta se trabajará en grupos pequeños (dos, máximo tres estudiantes).

2. Introducción a la propuesta (programa) de FIPM.

- Al pensar en propuestas para los trabajos finales del curso, es fundamental tener en cuenta una triple perspectiva que da una primera aproximación a dichas propuestas y fundamenta los referentes de la misma, que son la perspectiva normativa; es decir los documentos ministeriales, institucionales, etc., que sitúan contextualmente la propuesta, la perspectiva teórico-crítica; es decir, los documentos que serán base para sustentar teóricamente la propuesta, y finalmente la perspectiva práctica; es decir, documentos que muestren o ejemplifiquen situaciones de aula, así como las prácticas de los estudiantes.

Lo anterior da pie a cinco aspectos puntuales a tener en cuenta para concretar propuestas o programas de formación, trabajos de grado, incluso unidades didácticas para el aula.

Dichos aspectos son: el contexto en el que se trabajará la propuesta (locativo, grado de escolaridad, tipo de pensamiento, etc.), los propósitos (metas u objetivos de la propuesta), el contenido matemático escolar, el modelo o enfoque con el que se trabajará la propuesta y finalmente los medios o recursos que se usarán en la realización del programa.

3. Actividad planteada.

- Se abre el espacio para la discusión y participación de los estudiantes, teniendo en cuenta la presentación realizada previamente y las dudas que puedan aparecer frente a dicha presentación.
- Se comparten los documentos “La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas” de Radford (2011), “Entrevista con Luis Radford sobre la teoría de la objetivación” de Orisvaldo (2014). y “La competencia matemática en PISA” de Rico (2007) con el fin de introducir a los estudiantes, tanto a la teoría sociocultural en la Didáctica de las Matemáticas (Radford, 2011; Orisvaldo, 2014) como al concepto de competencia en matemáticas (Rico, 2007), ya que estos dan pautas para el modelo didáctico-curricular que se implementan en la propuesta (programa) de FIPM. Realizar una reseña-ensayo de dichas lecturas.
- Se comparte la ficha de caracterización, en la cual además de enviar algunos datos personales, se solicitan datos académicos (cursos matriculados, ubicación semestral, propuesta de trabajo de grado, etc.) y de igual manera se envían preguntas que pueden orientar el desarrollo de la reseña-ensayo de las lecturas de los documentos anteriormente referenciados (ver guion #2).

En lo que sigue, se presentan dos guiones fundamentales para el programa de formación, pues el primero es donde se inicia con el tópico de la visualización en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (guion #4), y en el otro, es donde ya se generan las bases para considerar a la visualización de la forma en que se tienen planteada desde el equipo de investigadores (guion #5), dando pie a que en el posterior y último guion se plantee el desarrollo de actividades para el aula frente al CME en mención, partiendo de la visualización como un organizador didáctico y curricular.

VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA

GUION #4 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

IV sesión (martes 24 y jueves 26 de mayo de 2022, 1 hora): **Fenómenos y situaciones que le dan sentido al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.**

Guion de trabajo:

1. Fenómenos y situaciones que le dan sentido al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

- Una vez mencionados y ejemplificados algunos obstáculos, errores y dificultades del CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, el análisis fenomenológico es un organizador fundamental para realizar propuestas de aula, buscando superar en cierto modo, los problemas encontrados, es decir, comprender el CME. Dicho análisis busca los fenómenos y situaciones que dan origen y sentido al CME, así como los contextos en los que se utilizan y en las cuales se aplican (Rico, 2013).

2. Actividad planteada

- Teniendo en cuenta el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente (se muestra nuevamente la figura 1 del guion #3), mencione y explique algunos fenómenos, situaciones y modos de uso que le dan sentido a dicho CME. Se realiza un conversatorio frente a dicho ejercicio.
- Se propone pensar para la próxima sesión en el concepto de visualización y su relación con el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, por lo que se propone realizar una reseña-ensayo sobre la visualización, teniendo en cuenta los documentos “La visualización: un organizador didáctico y curricular en la FPM” de Orozco (2022), el capítulo 0 “papel de la visualización” del libro “El rincón de la pizarra” de Guzmán (1996) y el documento “visualización de la recta tangente a una curva” de Llorens (1999). Para lo anterior, se plantean una serie de preguntas orientadoras para el desarrollo de dicha la reseña-ensayo frente al tópico de la visualización en la Didáctica de las Matemáticas (DdM):
 - ¿Qué papel juega la visualización en el campo de la DdM?
 - ¿Qué aspectos del enfoque Didáctico de la visualización consideras son importantes a la hora de reflexionar y desarrollar propuestas de enseñanza y comprensión del CME de la recta tangente a una curva y su pendiente? ¿Qué aspectos se extrapolan al CME (geométrico) de sus trabajos finales?
 - ¿Qué medios te aporta el enfoque Didáctico de la visualización para el desarrollo de propuestas de enseñanza y comprensión del CME de la recta tangente a una curva y su pendiente? ¿Qué medios para el CME de sus trabajos finales?
 - ¿Cómo usarían el enfoque Didáctico de la Visualización con el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente? ¿Cómo lo harían con el CME que cada uno va a desarrollar en la propuesta de trabajo final? Piense algunos ejemplos.
 - ¿Qué diferencias pueden aparecer al abordar la enseñanza y comprensión de algún CME (p.e. la recta tangente a una curva y su pendiente o los CME de cada uno) desde el enfoque Didáctico de la visualización? ¿Qué aspectos positivos y negativos pueden aparecer?

- ¿Podría repercutir o incidir la concepción de la visualización como un organizador didáctico y curricular en sus prácticas? ¿cómo?
- ¿Qué aporta o puede aportar la visualización a la Didáctica de las Matemáticas (como disciplina científica, teórico-práctica, base de la formación y desarrollo profesional de los docentes de matemáticas)?

**VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE:
INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE
DERIVADA**

GUION #5 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

V sesión (martes 31 de mayo y jueves 02 de junio de 2022, 1 hora): **La visualización como un organizador didáctico y curricular para la formación de profesores de matemáticas (FPM).**

Guion de trabajo:

1. Visualización como organizador didáctico y curricular en la FPM.

- Partiendo de algunos obstáculos, errores y dificultades del CME de la recta tangente a una curva y su pendiente y del análisis fenomenológico realizado en la sesión pasada, la visualización entra a jugar un papel importante en la búsqueda de realizar propuestas de aula, con el fin de, en cierto modo, superar los problemas encontrados, es decir, comprender el CME. Dicha visualización, que ahora queremos caracterizar como un organizador didáctico y curricular, se define como todo el sistema de apoyos del profesor (de tipo tecnológicos, materiales manipulativos, papel, lápiz, pizarra, entre otros) acompañados de un discurso estructurado del mismo, que permiten generar en los estudiantes conexiones entre una noción matemática y sus distintas representaciones. Lo anterior por medio del aprovechamiento de los contenidos visuales, geométricos e intuitivos de los conceptos matemáticos que surgen de la implementación de un modelo local de análisis didáctico desarrollado en torno a un contenido matemático determinado (en nuestro caso, la recta tangente a una curva y su pendiente), buscando que el estudiante comprenda la noción matemática a tratar.

2. Actividad planteada

- Teniendo en cuenta la consigna de la sesión anterior, la cual consistía en realizar una reseña-ensayo de los documentos sobre visualización y su relación con el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, se realiza un conversatorio frente a las ideas que lograron extraer de los distintos documentos, partiendo de la lectura de los trabajos realizados. Con lo anterior, se busca que los estudiantes vean cómo estamos concibiendo la visualización en el programa de formación y de qué manera dicha visualización aporta conocimientos (didácticos) para el diseño de actividades que genere en los estudiantes una conexión entre varios registros de representación del CME, esto es, que el estudiante comprenda la noción matemática de la recta tangente a una curva y su pendiente.

- Se propone pensar para la próxima sesión en actividades para llevar al aula, basadas en todo lo trabajado durante el programa de formación, esto es el modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico, el análisis didáctico cognitivo, el análisis fenomenológico y la visualización como organizador didáctico y curricular para el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

4.3. ANÁLISIS DEL EXPERIMENTO DIDÁCTICO

En este capítulo se sistematizará y analizará el experimento didáctico (programa de formación inicial de profesores de matemáticas) mencionado en el subcapítulo anterior. Inicialmente se realizarán algunos comentarios frente a una prueba piloto realizada durante el curso de Didáctica II: desarrollo del pensamiento geométrico y métrico, por medio de clases virtuales sincrónicas, donde se mostrarán aspectos positivos de dicho pilotaje, así como aspectos que se mejoraron en el programa de formación. Realizar el análisis del programa de formación permitirá mejorar no solo el programa (tal y como pasó con el pilotaje), sino también la UDG, con el fin de luego ser socializada y llevada al aula en una mejor versión y teniendo en cuenta los aportes hechos por los estudiantes para profesor (EPP) que participaron en la investigación. Los aspectos analizados surgen de las distintas grabaciones realizadas en las clases, los escritos en el diario de campo del equipo investigador y los distintos aportes hechos por los EPP (tanto orales en las grabaciones, como trabajos escritos entregados en el Classroom del curso).

4.3.1. PILOTAJE EN CURSO VIRTUAL (DIDÁCTICA II: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO Y MÉTRICO).

Partiendo de lo mencionado frente a la sistematización de experiencias en el capítulo 3 de la presente investigación, Jara (2012) menciona que la sistematización de experiencias es una forma de realizar una investigación a partir de la misma práctica docente, esto en el marco de una formación continua, es decir que, para la presente investigación se sistematizaron las prácticas para aprender críticamente de ellas, lo que va a permitir la mejora de estas a futuro.

Por lo anterior que el presente pilotaje da pautas para comprender el problema de investigación, pero ya en el campo de acción (aula) y será útil para identificar aspectos que se deben mejorar, tanto de la propuesta de plan de formación, como de la forma de abordarlo. Con base en Bedoya (2013), el cual propone organizar el proceso metodológico de sistematización en cuatro fases (tal como se menciona en el capítulo 3), a continuación, se presentarán algunos resultados de la investigación hasta ese momento:

- I. Preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización: en este punto es importante aclarar que la planificación inicial del proyecto estaba planteada para desarrollarse con estudiantes de grado once de una institución privada de la ciudad; sin embargo, durante el proceso aparecieron varias situaciones que permitieron el cambio al enfoque actual, es decir, a trabajar con estudiantes para profesor (FIPM) de V semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

Por lo anterior que, la planificación del pilotaje resultó compleja para el equipo investigador, pues también afectaba el hecho de que se debía pensar en que dicha experiencia se debía desarrollar en medios virtuales (Google Meet), pues en el momento que se realizó, no se contaba con garantías ni con un espacio para el retorno a la presencialidad.

Finalmente, todo lo anterior hizo que la metodología inicialmente considerada, que era estudiar el caso del profesor-investigador, se complementara con la sistematización de experiencias, permitiendo así no solamente ver el caso mencionado, sino también los aportes que realizan los EPP. En este sentido, con el presente pilotaje se esperaba desarrollar el ML de AD de la derivada (OE1) y tener un primer acercamiento al problema de investigación, es decir, ver cómo los EPP concebían y plasmaban en una UD la presente propuesta.

- II. Recuperación/reconstrucción de la experiencia: documentación y fundamentación conceptual: en un primer momento se realizó la búsqueda de documentos para profundizar en la metodología seleccionada, que respondiera al cambio que se hizo en el enfoque de la investigación, lo que permitió puntualizar en el marco teórico-conceptual y el en contexto en el que se iba a trabajar. Partiendo de esto, se desarrolló una planificación definitiva del curso, en la cual fueron incluidos aspectos de la presente investigación. En un segundo momento se llevó a cabo el trabajo en aula, en el cual se presentó a los estudiantes un ejemplo de UAD y a partir de esto se les solicitó que como trabajo final del curso hicieran algo similar con un contenido geométrico o con la derivada (se les motivó a que trabajaran con dicho CME).
- III. Análisis e interpretación de la información y del proceso realizado (de tal forma que se movilicen y desarrollen conocimientos fundamentados sobre la práctica o la experiencia): con el fin de diseñar una primera versión de la UAD se realizó un ADC de la derivada, el cual fue el primer CME para la investigación.

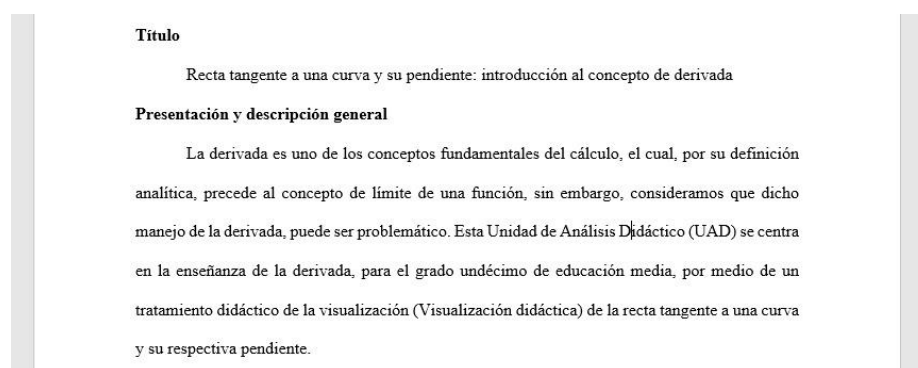


Figura 17. UAD de la derivada, versión 1. (Elaboración propia).

- IV. Potenciación y socialización o comunicación de los resultados asociados con la experiencia, su sistematización (incluyendo propuestas de posibles mejoras) y

fundamentación conceptual y procedimental: como se mencionó anteriormente se realizó una intervención en el aula (Google Meet) en la cual se le presentó a los estudiantes del curso la UAD de la derivada y un ejemplo de UDG, extraído de Pascual (2016) para que presentaran una UD como trabajo final de curso. Al analizar los trabajos entregados por los estudiantes se evidenció que al momento de desarrollar el AD de contenido se quedaron más en lo histórico- epistemológico y fenomenológico del CME que cada grupo decidió trabajar, lo cual iba en contravía con lo que se quiere impulsar en la presente investigación, es decir, *la visualización como un organizador didáctico y curricular*.

Trabajo Final DdM II.pdf		Abrir con ▼
Presentación general		2
1. Análisis curricular		2
2. Objetivo general		4
3. Objetivos específicos		4
4. Recursos		4
5. Análisis didáctico de contenido del triángulo y sus propiedades fundamentales		5
6. Análisis histórico - epistemológico del triángulo y sus propiedades fundamentales		5
7. Análisis fenomenológico del triángulo y sus propiedades fundamentales		7
8. Estructura didáctica		9
9. Diseño de actividades		14

Figura 18. Tabla de contenido del trabajo final de un grupo de estudiantes.

Finalmente, la información recolectada permitió realizar una primera socialización del ejercicio investigativo a la comunidad educativa del campo de la educación matemática; esto se realizó por medio de un póster en el Simposio de Matemática y Educación Matemática (MEM), Universidad de Nariño- 2022.

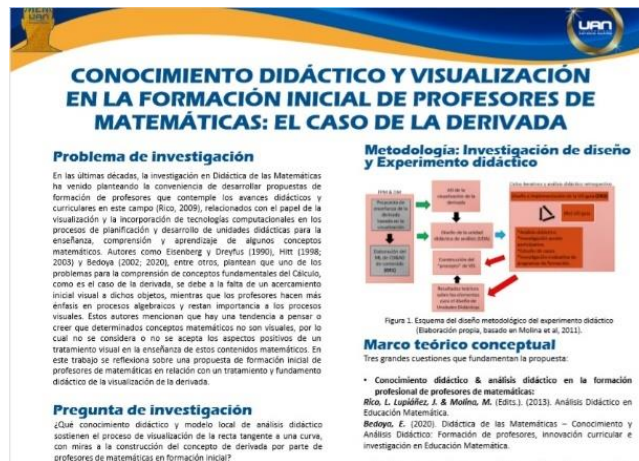


Figura 19. Parte del póster presentado en simposio MEM 2022 (Elaboración propia).

4.3.2. EXPERIMENTO DIDÁCTICO (DIDÁCTICA V: TÓPICOS DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS).

Siguiendo la organización del proceso metodológico de sistematización de experiencias (Jara, 2012) mencionada en el pilotaje anterior, se procede a mostrar algunos resultados y análisis de la investigación en las cuatro fases propuestas (Bedoya, 2013):

- I. Preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización: en esta etapa de la investigación se desarrolla como tal el experimento didáctico con el curso Didáctica V, con estudiantes de VIII semestre de la Licenciatura en Matemáticas, es decir, estudiantes ad- portas de iniciar su proceso de trabajo de grado. Para este momento las clases ya se desarrollaban de manera presencial.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la etapa de pilotaje, en un primer momento de esta etapa se cambió el enfoque de derivada a recta tangente a una curva y su pendiente, considerando que dicho enfoque aportaría el recurso visual, geométrico e intuitivo que se deseaba destacar. En un segundo momento, se definieron las intervenciones, es decir se planeó en qué momentos específicos del curso se iba a trabajar esta propuesta (ver tabla 2). En un tercer momento se realizaron varias

versiones de los guiones para las intervenciones, hasta concretar la final (ver subcapítulo 4.2 y anexos); para la realización de estos guiones previamente se revisaron y analizaron los documentos que se iban a compartir con los EPP.

Finalmente, se diseñaron diversos instrumentos para la recolección de datos: una ficha de caracterización con el fin de identificar en los EPP afinidad con el campo de la DdM; entrevistas semiestructuradas con preguntas orientadoras en los diferentes momentos del experimento didáctico (ver guion 4, subcapítulo 4.2); escritura de un artículo en el que se resumió la información encontrada en la primera parte de la investigación sobre la visualización como un organizador didáctico y curricular, este artículo sería presentado posteriormente a los estudiantes junto con otros dos artículos: Llorens (1999) y De Guzmán (1996).

 Facultad de Educación y Pedagogía Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas Licenciatura en Matemáticas Asignatura DdM-V: Tópicos de DdM Período: abril – agosto / 2022		
NOMBRE COMPLETO:	AAA BBB CCC	Fotografía
CÓDIGO:		
SEMESTRE:		
CORREO ELECTRÓNICO:		
NÚMERO DE CELULAR:		
MUNICIPIO / LUGAR DE DOMICILIO:		
ASIGNATURAS MATRICULADAS ACTUALMENTE:		
ASIGNATURAS DE LA LÍNEA DIM CURSADAS:		
INTEGRANTES DE SU GRUPO DE TRABAJO PARA REALIZAR PROPUESTAS CONJUNTAS:		
INSTITUCIÓN DONDE ESTÁ TRABAJANDO ACTUALMENTE (CURSOS O GRADOS):		
TÍTULO ACTUAL DE LA PROPUESTA DE TRABAJO FINAL (O DEL PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO):		
PREGUNTA PROBLEMA:		
OBJETIVO GENERAL:		
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:		

Figura 20. Ficha de caracterización de los EPP. (Elaboración propia).

Con el desarrollo de este experimento didáctico se esperaba culminar el diseño de la UD, es decir, UAD y guiones, así como ver las propuestas de actividades que los EPP presentan teniendo en cuenta *la visualización como un organizador didáctico y curricular* y el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

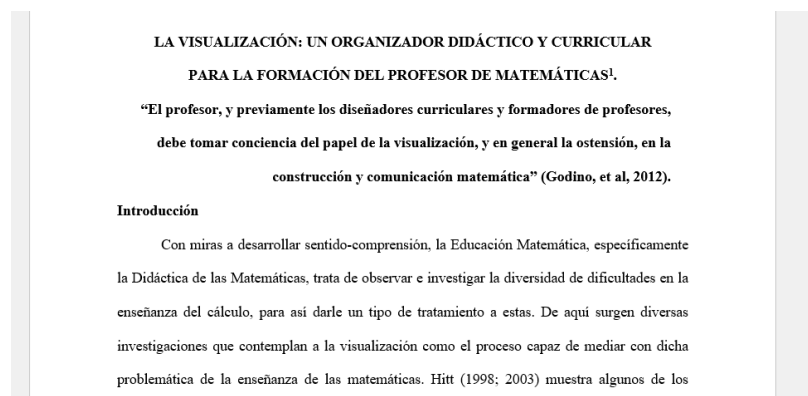


Figura 21. Artículo presentado a los EPP (ver completo en los anexos). (Elaboración propia).

- II. Recuperación/reconstrucción de la experiencia: documentación y fundamentación conceptual: durante las intervenciones en el aula, además de aplicar las herramientas mencionadas en la fase I, la información se obtuvo en forma de audio, complementando esta con las anotaciones en el diario de campo del equipo investigador y en la observación del registro de los EPP, es decir, revisión de los ensayos, reseñas y trabajos entregados por estos.

En un primer momento se diligenciaron las fichas de caracterización (ver anexos) y se les asignó a los EPP la tarea de realizar una reseña-ensayo con el fin de introducirlos, tanto a la teoría sociocultural en la Didáctica de las Matemáticas (Radford, 2011) como al concepto de competencia en matemáticas (Rico, 2007), ya que estos dan pautas para el modelo didáctico-curricular que se está implementando en la presente propuesta.

En un segundo momento se recibieron las primeras reseñas de los EPP y se realizó un conversatorio sobre estos documentos, teniendo en cuenta una serie de preguntas orientadoras y generadoras de discusión; además, se presentó el ML de CD&AD del contenido (Bedoya, 2002) haciendo énfasis en el AD curricular (lo normativo, institucional), el AD de contenido (fenomenológico, histórico y representacional del

CME), el AD cognitivo (obstáculos, dificultades y errores) y el AD de instrucción (medios, materiales y recursos).

En un tercer momento se aterrizó la discusión al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, donde se les presentó a los estudiantes una gráfica de una curva y se les solicitó que mostraran una forma de hallar la recta tangente al punto P y su pendiente (Ver figura 22), esto con el fin de buscar con los EPP algunos obstáculos, dificultades y/o errores en la comprensión geométrica, visual e intuitiva de dicho CME (AD cognitivo). Inicialmente los estudiantes propusieron que con la ecuación que modela la curva se podía derivar, reemplazar el valor de x del punto P para así obtener la pendiente y posteriormente la ecuación de la recta tangente a ese punto; sin embargo, se hizo la siguiente aclaración: “no tenemos la ecuación de la curva ni las coordenadas del punto P, pero aun así buscamos una forma de trazar una recta tangente a dicha curva en ese punto P”; de aquí que uno de los EPP comentó: “Se puede hacer otro punto distinto a P en la curva y trazamos una recta que pase por P y dicho punto, luego se va acercando ese punto a P hasta que P y ese punto sean el mismo y con eso tendríamos la recta tangente”. Se le solicitó al estudiante que hiciera el dibujo de lo que estaba diciendo, obteniendo así la figura 23. La intervención concluye proponiéndoles a los EPP pensar para la próxima sesión en los fenómenos que dan sentido al CME (AD de contenido).

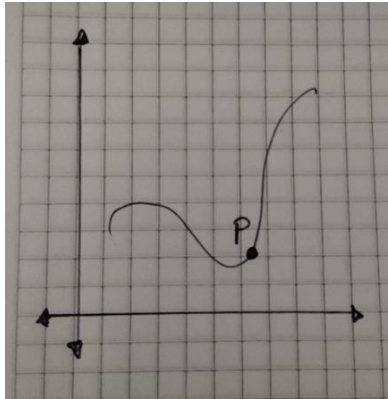


Figura 22. Gráfica de una curva y un punto P en ella. (Diario de campo, elaboración propia).

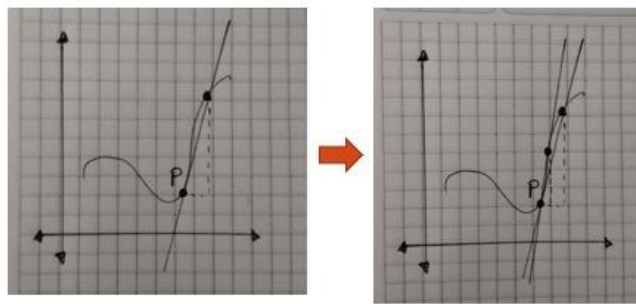


Figura 23. Acercamiento de dos puntos sobre una curva con el finde hallar la recta tangente (Diario de campo, elaboración de un EPP).

En un cuarto momento, se realizó un conversatorio frente al ejercicio de mencionar y explicar algunos fenómenos, situaciones y modos de uso que le dan sentido a dicho CME; de este ejercicio se obtuvieron las siguientes intervenciones, donde PI1 y PI2 corresponden a Profesor Investigador 1 y 2, mientras que EPP1, EPP2, EPP3 y EPP4 corresponden a los estudiantes para profesor que intervinieron en el conversatorio:

PI1: “A la comprensión le agregamos el sentido, es decir, los fenómenos, las situaciones, los hechos de la vida cotidiana, del mundo real, escolar, científico, que les permiten a los estudiantes comprender con sentido. Preguntémonos entonces, ¿cuáles son esos fenómenos y situaciones que le dan sentido al CME de la RT a una curva y su m ?”

EPP1: “El incremento, pues nosotros lo relacionamos con la pendiente de la recta y sus aplicaciones desde por ejemplo la física en el movimiento parabólico.”

EPP2: “Entiendo incremento como si la recta creciera.”

PI2: “Por mi parte, yo estaba pensando en el incremento de la pendiente, pues no podemos hablar de RT sin m.”

PI1: “Yo en cambio, no relacioné incremento como EPP2 ni como PI2, pues yo pensaba que era un incremento sobre la curva, como si fuera un crecimiento y decrecimiento sobre la curva, el cual se relaciona con la RT y su m.”

EPP3: “Por mi parte, relaciono el incremento con el movimiento por ejemplo sobre una montaña rusa en la física y como en el pasar del carro por la pista y la forma de esta, incrementa la velocidad del carro.”

EPP4: “Por mi parte no hablaría de incremento sino de variación, pues por ejemplo en lo dicho por EPP3 en algunas partes de la pista la velocidad incrementa, pero en otras disminuye, por lo que relaciono la variación con la RT y su m.”

Este momento concluyó proponiendo la lectura de los artículos sobre visualización mencionados en la fase 1 (Orozco, 2022; De Guzmán, 1996; Llorens, 1999) así como una serie de preguntas que orientan la lectura (ver anexos guion 4).

En el quinto momento se hizo un conversatorio a partir de las lecturas realizadas, donde se buscaba que los estudiantes vean cómo estamos concibiendo la visualización en el programa de formación y de qué manera dicha visualización aporta conocimientos (didácticos) para el diseño de actividades que genere en los estudiantes una conexión entre varios registros de representación del CME, esto es, que el estudiante comprenda la noción matemática de la recta tangente a una curva y su pendiente. Este momento concluyó con dos consignas para la próxima sesión: realizar la reseña-ensayo sobre la visualización (ver

trabajos en anexos) y pensar en actividades para llevar al aula, basadas en todo lo trabajado durante el programa de formación, esto es el modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico, el análisis didáctico cognitivo, el análisis fenomenológico y la *visualización como organizador didáctico y curricular* para el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

De lo anterior se destacan algunas ideas encontradas en los distintos trabajos seleccionados (R-E1, R-E2, R-E3 y R-E4 hacen alusión a la reseña-ensayo del grupo 1, 2, 3 y 4), los cuales darán pie para el análisis que se realizará posteriormente:

R-E1: “Por un lado, la visualización desde un enfoque didáctico permite aprovechar las diversas tecnologías digitales con sistemas de representación variada, brinda posibilidades dinámicas e interactivas lo cual permite realizar (profesor-estudiante) diversas representaciones de un objeto/conocimiento o proceso matemático y considerar y/o deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y observación completa; por otro lado, el material concreto o manipulativo es importante porque se centra en un micro-mundo donde el estudiante puede acceder y desarrollar el pensamiento visual y a la manipulación física del material, por lo tanto, la visualización didáctica dentro de la enseñanza y comprensión permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares.”

R-E1: “Además, es necesario resaltar que los profesores de matemáticas en formación deben tener conocimiento y aceptar lo esencial que es la visualización en la didáctica; es por esto que se considera que el generar en los estudiantes reflexiones didácticas acerca de cómo se aborda un concepto matemático fundamental es un hecho necesario que no se puede negar y una salida a esto tiene

que ver con el uso de procesos de visualización por parte del profesor con propósitos didácticos.”

R-E1: “Es decir, considerando la visualización en el aprendizaje y su implementación en el tópico de derivada (la recta tangente a una curva), replantear las propuestas de clase, en

donde se reflexione y se acepte que la resolución de un problema se potencializa a través de la visualización; se propone la idea de que las representaciones gráficas de los conceptos

matemáticos abren espacio al desarrollo de la comprensión por parte del estudiante.

Por ejemplo, hacer una presentación del concepto por medio de una gráfica que sea plasmada en ambientes digitales, esto se relaciona con la percepción de representación algebraica como base inicial e importante en la concepción del estudiante, de igual manera el estudiante debe hacer una exploración de dicho instrumento y esto le da la posibilidad de generar la manipulación del concepto como tal y es así como se genera un balance y/o equilibrio entre lo visual y los procesos algebraicos.”

R-E2: “En este sentido se hace necesario una redefinición explícita de la recta tangente previamente si se quiere utilizar esta definición para explicar el concepto de derivada, y es ahí donde la Visualización cumple un papel fundamental como instrumento eficaz para la mejora en la comprensión de conceptos abstractos y aún más potente cuando se utilizan medios tecnológicos como software de geometría dinámica.”

R-E2: “En general la Visualización potenciado por medios tecnológicos aporta importantes medios (o recursos de mediación) útiles para cada concepto, contenido

u objeto matemático susceptible de ser tratado visualmente y didácticamente para la enseñanza y comprensión de dicho objeto o contenido matemático.”

R-E3: “De esta manera, consideramos que la visualización juega un papel importante, dado que particularmente en la derivada, el interactuar entre las distintas representaciones, permite identificar de manera notoria el incremento de cada punto sobre la gráfica. Por lo tanto, podría esperarse que los estudiantes creen una noción de derivada en la que gráficamente comprendan que es un incremento puntual y en el procedimiento un incremento numérico.”

R-E3: “De acuerdo a lo anterior y apoyados en la definición de diferentes autores, consideramos que la visualización es la acción de crear, relacionar, interpretar, usar y reflexionar sobre diferentes representaciones semióticas o mentales de un objeto matemático, sean estas a lápiz y papel o por medio de ambientes de geometría dinámica, con la cual se puede lograr una comprensión de los objetos matemáticos, ya que la principal dificultad que se tiene en matemáticas para comprender se debe a que no se puede acceder a los objetos manera tangible, es por esto que existe la necesidad de hacer uso de recursos que promuevan la visualización como base para el desarrollo del pensamiento matemático.”

R-E4: “La visualización se inscribe claramente en el discurrir de la actividad matemática en todos sus niveles, es por esto, entre otras razones, que la pertinencia de los procesos de visualización tomen un roll trascendental en la forma en que se piensa y entiende el currículo de matemáticas, pues sin duda alguna, si aquello que se piensa y propone como carácter del currículo de matemáticas converge, asocia o desarrolla la visualización en este, el sentido propio de las formas en cómo se enseña y se aprende matemática gira positivamente hacia el desarrollo de diversos

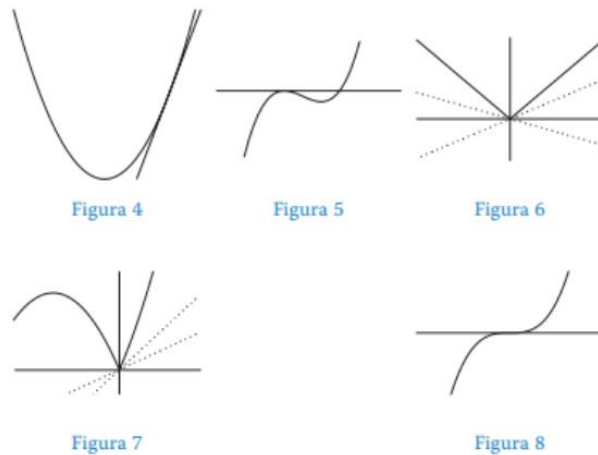
problemas de aprendizaje y enseñanza, pues sin duda alguna, los procesos de visualización permiten expresar y desarrollar experiencias de aprendizaje significativos.”

R-E4: “Es así, que la visualización como un organizador didáctico y curricular para la formación docente se traduce particularmente en la construcción de realidades en la práctica docente, en la forma en cómo se entiende y se enseña matemáticas, en el discurso mismo del docente y su relación con los conceptos matemáticos.”

R-E4: “Pensarse la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas inscritas en el desarrollo de procesos de visualización, en donde los estudiante y el profesor están en camino de desarrollar procesos de creación de imágenes representativas asociadas a algún concepto matemático constituye un “cambio” en el currículo en general, además, atiende a las necesidades del saneamiento de los conflicto y dificultades al interior de la educación matemática, reformulando la idea de que en las matemáticas escolar y en general solo es posible acercarse a la comprensión de conceptos y objetos matemáticos exclusivamente por medio de definiciones o desarrollos puramente teóricos y/o procedimentales.”

Finalmente, en el sexto momento los estudiantes socializaron la reseña-ensayo, así como las actividades encontradas o diseñadas para llevar al aula (UDG), entre las que se destacan para el posterior análisis, las que se muestran a continuación (A1, A2 y A3 hacen alusión a la actividad 1, 2 y 3):

A1: Momento 3: Reconocer la recta tangente a una curva: En este momento se prevé que el estudiante pueda graficar la o las rectas tangentes a curvas tales como:



Foster, J. (1999)

Figura 24. Gráfica de distintas curvas y posibles rectas tangentes. (Actividad propuesta por EPP, tomada de Foster, 1999).

A2: Tarea 3: ¿Cómo interpretas que la recta tangente a la curva de una función sea positiva?

a) Encuentra un punto en la que la tangente a la curva $y = x^2 - 1$ sea 4, e interpreta lo que le ocurre a dicha función en el entorno del punto.

b) La función $y = 1/x$ tiene como representación la siguiente gráfica:

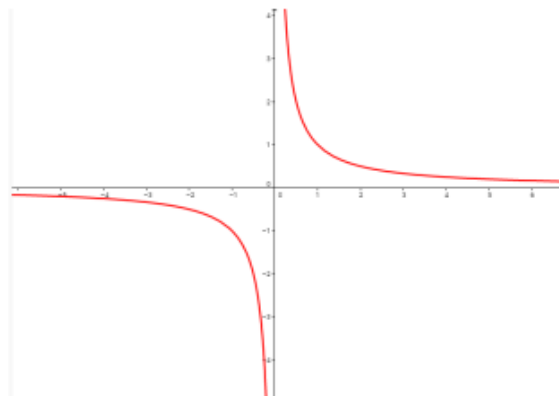


Figura 25. Gráfica de la función $y=1/x$. (Actividad propuesta por EPP, tomada de Pascual, 2016).

¿Existe algún punto de esa función con derivada positiva? Razona tu respuesta mediante la representación.

A3: Actividad: Teniendo en cuenta el siguiente applet de Geogebra, dibuje la recta tangente en distintos puntos por el que pasa el carrito de la montaña rusa. ¿Hay alguna relación entre dicha recta tangente y el movimiento del carrito? Explica.

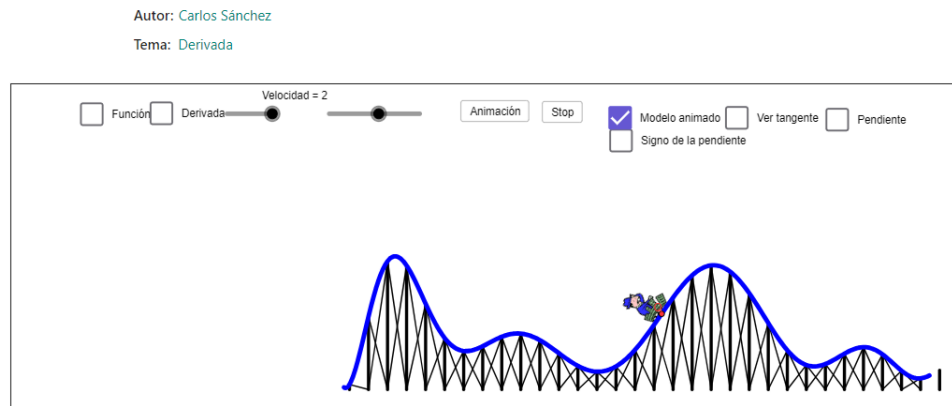


Figura 26. Applet montaña rusa. (Actividad propuesta por EPP, tomada de Sánchez, s.f. <https://www.geogebra.org/m/zjF5xh66>).

III. Análisis e interpretación de la información y del proceso realizado (de tal forma que se movilen y desarrollen conocimientos fundamentados sobre la práctica o la experiencia). En este apartado se analizarán, por medio de una serie de tablas, los últimos cuatro momentos planteados en la fase anterior, ya que estos son los que inciden directamente en la caracterización de la visualización como un organizador didáctico y curricular.

Guion 3 (Introducción al CME):

Datos recolectados	Observación
PI1: hace la gráfica de una curva y un punto P (figura 22). PI1: “Teniendo el gráfico del tablero ¿Cómo se puede hallar la recta tangente al punto P y su pendiente?” EPP1: “Derivando” EPP2: “Sí, se deriva y se reemplaza el valor de x del punto P para así obtener la	Los EPP1 y 2 tienen la claridad frente a que hay una relación entre la derivada y la RT a una curva y su pendiente. El EPP3 muestra una forma en que por medio de varias rectas secantes se puede llegar a la recta tangente a la curva.

pendiente y con eso hacemos punto-pendiente” PI2: “no tenemos la ecuación de la curva ni las coordenadas del punto P, pero aun así buscamos una forma de trazar una recta tangente a dicha curva en ese punto P”. EPP3: “Se puede hacer otro punto distinto a P en la curva y trazamos una recta que pase por P y dicho punto, luego se va acercando ese punto a P hasta que P y ese punto sean el mismo y con eso tendríamos la recta tangente”. PI1: “muéstrelo” EPP3: realiza en el tablero la gráfica de la figura 23. EPP3: “Este punto (señala punto de arriba) se va acercando al punto. Cuando los dos sean el mismo punto ahí se obtiene la recta tangente a dicha curva en P”	
---	--

Tabla 6. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 3 (elaboración propia).

Basados en lo mostrado en la tabla 6, se deduce que se puede acercar de a poco a conceptos intuitivos y visuales, permitiendo explorar de forma visual el concepto de RT a una curva.

Por lo anterior que, al omitir algunos aspectos que los EPP conocían por su formación matemática (ecuación de la curva, coordenadas del punto P, derivada de una ecuación polinómica, entre otras), los llevó a buscar otra manera para hallar la recta tangente, de aquí que el EPP3 muestre cómo poder hacerlo.

Asimismo, se identifica que, si se dan los aspectos matemáticos mencionados anteriormente, los EPP se quedan solo en la parte algebraica y algorítmica, que a modo resumen es el típico “derive, reemplace y halle la pendiente”, lo que a modo introductorio se quiere evitar en la presente propuesta.

Guion 4 (Fenomenología didáctica del CME):

Datos recolectados	Observación
PI1: “A la comprensión le agregamos el sentido, es decir, los fenómenos, las situaciones, los hechos de la vida cotidiana, del mundo real, escolar, científico, que les permiten a los estudiantes comprender con sentido. Preguntémonos entonces, ¿cuáles son esos fenómenos y situaciones que le dan sentido al CME de la RT a una curva y su m?” EPP1: “El incremento, pues nosotros lo relacionamos con la pendiente de la recta y sus aplicaciones desde por ejemplo la física en el movimiento parabólico.” EPP2: “Entiendo incremento como si la recta creciera.” PI2: “Por mi parte, yo estaba pensando en el incremento de la pendiente, pues no podemos hablar de RT sin m.” PI1: “Yo en cambio, no relacioné incremento como EPP2 ni como PI2, pues yo pensaba que era un incremento sobre la curva, como si fuera un crecimiento y decrecimiento sobre la curva, el cual se relaciona con la RT y su m.” EPP3: “Por mi parte, relaciono el incremento con el movimiento por ejemplo sobre una montaña rusa en la física y como en el pasar del carro por la pista y la forma de esta, incrementa la velocidad del carro.” EPP4: “Por mi parte no hablaría de incremento sino de variación, pues por ejemplo en lo dicho por EPP3 en algunas	Los EPP manifiestan que el incremento, la variación y la velocidad son fenómenos cotidianos que se relacionan con la recta tangente a una curva y su pendiente. Los PI1 y 2 buscan la forma de que expliquen mejor la relación entre dicha variación y velocidad con la recta tangente a una curva y su pendiente, de aquí que el EPP3 mencione la relación con la montaña rusa y la velocidad del carrito en la misma.

partes de la pista la velocidad incrementa, pero en otras disminuye, por lo que relaciono la variación con la RT y su m.”	
---	--

Tabla 7. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 4 (elaboración propia).

Con base en lo mostrado en la tabla 7, se deduce que los EPP manejan los fenómenos de variación para relacionar la cotidianidad o las situaciones de uso con el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente. Lo anterior, muestra cierto arraigo de la derivada a la recta tangente a una curva, por lo que asocian que dicha recta tangente, también tiene una relación fenomenológica con el movimiento y la variación de este (física).

Por lo anterior que, el EPP3 menciona una actividad que posteriormente mostrará (montaña rusa) y la cual se rediseñará para incluirse dentro de la UDG de la presente propuesta. Lo anterior muestra una búsqueda de información adicional por parte del estudiante (motivación en la enseñanza del CME) y una manera de mostrarse receptivo ante la visualización como un organizador didáctico y curricular para la enseñanza de un concepto, en este caso, la recta tangente a una curva y su pendiente.

Así mismo, se identifica que, los EPP reconocen fenomenológicamente la recta tangente a una curva y su pendiente, ya que mencionan (aunque no en profundidad), aspectos similares a los desarrollados en la UAD de la presente investigación; sin embargo, ningún estudiante mencionó que la recta tangente a una curva y su pendiente es en sí, una fenomenología (de tipo geométrica) del concepto de derivada, lo cual refuerza el hecho de que hay un cierto alejamiento al concepto de derivada, tal y como se propone en la introducción que se desea mostrar a dicha noción.

Guion 5 (Visualización como un organizador didáctico y curricular para la FPM):

Datos recolectados	Observación
R-E1: “Por un lado, la visualización desde un enfoque didáctico permite aprovechar las diversas tecnologías digitales con sistemas de representación variada, brinda posibilidades dinámicas e interactivas lo cual permite realizar (profesor-estudiante) diversas representaciones de un objeto/conocimiento o proceso matemático y considerar y/o deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y observación completa; por otro lado, el material concreto o manipulativo es importante porque se centra en un micro-mundo donde el estudiante puede acceder y desarrollar el pensamiento visual y a la manipulación física del material, por lo tanto, la visualización didáctica dentro de la enseñanza y comprensión permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares.” R-E1: “Es decir, considerando la visualización en el aprendizaje y su implementación en el tópico de derivada (la recta tangente a una curva), replantear las propuestas de clase, en donde se reflexione y se acepte que la resolución de un problema se potencializa a través de la visualización; se propone la idea de que las representaciones gráficas de los conceptos matemáticos abren espacio al desarrollo de la comprensión por parte del estudiante. Por ejemplo, hacer una presentación del concepto por medio de una gráfica que sea plasmada en	Los EPP mencionan la relación entre la visualización y cómo esto promueve el uso de diversos medios, especialmente los digitales. Los EPP expresan que se deben replantear las propuestas de clase por momentos donde se reflexione y se acepte que la resolución de un problema se potencializa a través de la visualización; de aquí que se pueda hacer una presentación del concepto por medio de una gráfica que sea plasmada en ambientes digitales. Los EPP identifican que se debe redefinir a la recta tangente a una curva, para usarla como medio para la comprensión de la derivada, dándole a la visualización la función de instrumento para realizar dicha resignificación de la RT a una curva y su pendiente, además que mejora el uso de la visualización cuando se realiza por medio de software. Los EPP expresan que una base importante para la comprensión de los estudiantes es la representación algebraica como base inicial e importante en la concepción del estudiante, pues genera un balance y/o equilibrio entre lo visual y los procesos algebraicos.

ambientes digitales, esto se relaciona con la percepción de representación algebraica como base inicial e importante en la concepción del estudiante, de igual manera el estudiante debe hacer una exploración de dicho instrumento y esto le da la posibilidad de generar la manipulación del concepto como tal y es así como se genera un balance y/o equilibrio entre lo visual y los procesos algebraicos.” R-E2: “En este sentido se hace necesario una redefinición explícita de la recta tangente previamente si se quiere utilizar esta definición para explicar el concepto de derivada, y es ahí donde la Visualización cumple un papel fundamental como instrumento eficaz para la mejora en la comprensión de conceptos abstractos y aún más potente cuando se utilizan medios tecnológicos como software de geometría dinámica.” R-E2: “En general la Visualización potenciado por medios tecnológicos aporta importantes medios (o recursos de mediación) útiles para cada concepto, contenido u objeto matemático susceptible de ser tratado visualmente y didácticamente para la enseñanza y comprensión de dicho objeto o contenido matemático.”	
R-E1: “Además, es necesario resaltar que los profesores de matemáticas en formación deben tener conocimiento y aceptar lo esencial que es la visualización en la didáctica; es por esto que se considera que el generar en los estudiantes reflexiones didácticas acerca de cómo se aborda un concepto matemático fundamental es un hecho	En este punto, los EPP definen la visualización en la DdM como una forma de reconstruir la práctica docente a un enfoque visual, que permita crear, mover, usar, entre otros, un concepto abstracto, buscando la comprensión de este.

necesario que no se puede negar y una salida a esto tiene que ver con el uso de procesos de visualización por parte del profesor con propósitos didácticos.” R-E3: “De acuerdo a lo anterior y apoyados en la definición de diferentes autores, consideramos que la visualización es la acción de crear, relacionar, interpretar, usar y reflexionar sobre diferentes representaciones semióticas o mentales de un objeto matemático, sean estas a lápiz y papel o por medio de ambientes de geometría dinámica, con la cual se puede lograr una comprensión de los objetos matemáticos, ya que la principal dificultad que se tiene en matemáticas para comprender se debe a que no se puede acceder a los objetos manera tangible, es por esto que existe la necesidad de hacer uso de recursos que promuevan la visualización como base para el desarrollo del pensamiento matemático.” R-E4: “Es así, que la visualización como un organizador didáctico y curricular para la formación docente se traduce particularmente en la construcción de realidades en la práctica docente, en la forma en cómo se entiende y se enseña matemáticas, en el discurso mismo del docente y su relación con los conceptos matemáticos.”	
R-E4: “La visualización se inscribe claramente en el discurrir de la actividad matemática en todos sus niveles, es por esto, entre otras razones, que la pertinencia de los procesos de visualización tomen un roll trascendental en la forma en que se piensa y entiende el currículo de matemáticas, pues sin duda	Los EPP muestran cómo la visualización permea el currículo, haciendo énfasis en que, en este punto, hay una convergencia hacia aspectos positivos que mejoren la enseñanza de las matemáticas. Los EPP expresan que, al desarrollar un currículo basado en lo visual, hay un acercamiento a la comprensión de

alguna, si aquello que se piensa y propone como carácter del currículo de matemáticas converge, asocia o desarrolla la visualización en este, el sentido propio de las formas en cómo se enseña y se aprende matemática gira positivamente hacia el desarrollo de diversos problemas de aprendizaje y enseñanza, pues sin duda alguna, los procesos de visualización permiten expresar y desarrollar experiencias de aprendizaje significativos.” R-E4: “Pensarse la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas inscritas en el desarrollo de procesos de visualización, en donde los estudiante y el profesor están en camino de desarrollar procesos de creación de imágenes representativas asociadas a algún concepto matemático constituye un “cambio” en el currículo en general, además, atiende a las necesidades del saneamiento de los conflicto y dificultades al interior de la educación matemática, reformulando la idea de que en las matemáticas escolar y en general solo es posible acercarse a la comprensión de conceptos y objetos matemáticos exclusivamente por medio de definiciones o desarrollos puramente teóricos y/o procedimentales.”	conceptos y objetos matemáticos, además mencionan que anteriormente se creía que dicha comprensión se conseguía exclusivamente por medio de definiciones o desarrollos puramente teóricos y/o procedimentales.
--	---

Tabla 8. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 5 (elaboración propia).

Con base en lo mostrado en la tabla 8, se deduce que inicialmente, los EPP ven una relación directa entre el uso de tecnologías digitales y la visualización, pues expresan que hay una mejora a dichos procesos de visualización con el uso de recursos digitales. De aquí que, en la presente investigación, las actividades propuestas en la UDG se desarrollen con el uso de videos y recursos del software Geogebra.

Luego, los EPP expresan que se debe mantener una relación entre el aspecto algebraico y lo visual; sin embargo, aunque consideramos que lo algebraico es importante, el fin de dar una introducción visual e intuitiva, disminuye el valor que se le da a lo algebraico, potenciando así lo geométrico, que en últimas es lo que se quiere con la presente propuesta.

Por otra parte, teniendo en cuenta los datos recolectados frente a la definición que los EPP dan de la visualización en la DdM, es importante tener en cuenta que hay una relación estrecha con el hecho de proponer un currículo basado en lo visual, pues dicha definición recolectada en los trabajos de los EPP, como la definición que se da en la presente propuesta, busca que se realice un currículo basado en lo visual, que permita generar procesos intuitivos, facilitando el acercamiento y la comprensión a un CME específico, como en este caso, a la derivada, o dicho de forma visual, geométrica e intuitiva, a la recta tangente a una curva y su pendiente.

Guion 6 (Actividades para la UDG de la RT a una curva y su pendiente):

Datos recolectados	Observación
A1: Momento 3: Reconocer la recta tangente a una curva: En este momento se prevé que el estudiante pueda graficar la o las rectas tangentes a curvas tales como: (ver figura 24).	Los EPP pretenden con la presente actividad que los estudiantes reconozcan una recta tangente a una curva. Los EPP expresan que, en este punto, los estudiantes ya pueden realizar la gráfica de la recta tangente, teniendo en cuenta la característica de que toque a la curva en un punto.
A2: Tarea 3: ¿Cómo interpretas que la recta tangente a la curva de una función sea positiva? a) Encuentra un punto en la que la tangente a la curva $y = x^2 - 1$ sea 4, e	Los EPP pretenden con la presente actividad que los estudiantes interpreten, según el signo de la pendiente, la recta tangente a una curva (punto a y c). Además, los EPP, solicitan en el punto b, hallar una recta tangente con una

interpreta lo que le ocurre a dicha función en el entorno del punto. b) La función $y = 1/x$ tiene como representación la siguiente gráfica: (ver figura 25). ¿Existe algún punto de esa función con derivada positiva? Razona tu respuesta mediante la representación.	pendiente dada, sin especificar el método para dicha actividad.
A3: Actividad: Teniendo en cuenta el siguiente applet de Geogebra, dibuje la recta tangente en distintos puntos por el que pasa el carrito de la montaña rusa. ¿Hay alguna relación entre dicha recta tangente y el movimiento del carrito? Explica (ver figura 26).	Los EPP pretenden, con un aspecto fenomenológico, que reconozcan la recta tangente a la montaña rusa, en el punto en el que va el carrito.

Tabla 9. Observaciones frente a los datos recolectados al aplicar el guion 6 (elaboración propia).

Teniendo en cuenta lo mostrado en la tabla 9, se deduce que los EPP en la A1 se alejan de una expresión algebraica, quedándose solo en aspectos gráficos (geométricos e intuitivos); sin embargo, una de las formas de entender la recta tangente es mostrando las diferencias con la recta secante, por lo que una opción que se podría manejar en la presente actividad es que previamente a la realización de las rectas tangentes, identifiquen varias rectas secantes, esto también permitiría ver la recta tangente, como la aproximación de rectas secantes, tal y como se plantea en la UDG de la presente investigación (ver anexos).

Luego, en la A2, los EPP quieren que los estudiantes identifiquen algunas características de la recta tangente a una curva (pendiente positiva), para posteriormente, dar una expresión algebraica con la cual se pueda hallar la recta tangente a una curva con una pendiente dada, por lo que, un estudiante avanzado e interesado en el tema, podría derivar la expresión, igualar la pendiente y hallar dicha recta tangente, lo cual, va en contravía con la presente propuesta.

Finalmente, en la A3, los EPP desean trabajar con un aspecto fenomenológico, planteando realizar la recta tangente a una curva en una situación de una montaña rusa; sin embargo, la actividad en general tiene varias potencialidades a trabajar a modo introductorio de la recta tangente a una curva, por lo que, se podría reestructurar, tal y como se realizó en la presente propuesta (ver UDG, parte 3), buscando un mayor aprovechamiento del recurso.

- IV. Potenciación y socialización o comunicación de los resultados asociados con la experiencia, su sistematización (incluyendo propuestas de posibles mejoras) y fundamentación conceptual y procedimental: como se mencionó anteriormente se realizó una intervención en el aula en la cual se le presentó a los estudiantes del curso la UAD de la recta tangente a una curva y su pendiente y se socializaron los documentos mencionados en la fase de preparación y planificación del presente subcapítulo, para que presentaran una UDG como trabajo final de curso. Al analizar los trabajos entregados por los estudiantes se evidenció que ya hacían propuestas de actividades en las que presentaban la derivada de forma geométrica e intuitiva (ver figura 26), lo cual cumplía con el objetivo de impulsar con la presente investigación a *la visualización como un organizador didáctico y curricular*.

Posteriormente, la información recolectada permitió realizar una segunda socialización del ejercicio investigativo a la comunidad educativa del campo de la educación matemática; esto se realizó por medio de una ponencia en el 6to Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática EIEM6, Universidad del Atlántico- 2022, donde varios estudiantes de la licenciatura en matemáticas de dicha universidad, hicieron presencia, los cuales hicieron comentarios positivos y por mejorar frente a las actividades para llevar al aula (UDG).



Figura 27. Certificado de participación ETEM6.

Finalmente, la tercera y última socialización del ejercicio investigativo se desarrollará al momento de realizar la sustentación de la tesis para optar al título de Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemáticas de la Universidad del Valle.

4.4. UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA (UDG) DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE.

En este subcapítulo se muestra las partes 2 y 3 de la Unidad Didáctica Guía (UDG) para llevar al aula (ver completa en anexos), la cual fue diseñada y rediseñada por el equipo investigador, lo último teniendo en cuenta los aportes realizados por los estudiantes para profesor que hicieron parte del programa de formación inicial de profesores de matemáticas (FIPM).

RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA (parte 2: Análisis).

Sesión 2: Triángulo de Barrow: recta tangente y su pendiente en un punto de una curva.

Objetivo:

- Caracterizar el triángulo de Barrow como un medio para la introducción visual, geométrica e intuitiva a la noción de derivada por medio de la recta tangente y su pendiente en un punto a una curva.
- Mostrar el proceso visual, geométrico e intuitivo de hallar la recta tangente y su pendiente en un punto a una curva.

Materiales (recursos y medios):

- Lápiz, colores, papel, regla, calculadora, computador (Tablet o celular con conectividad) y applet de Geogebra “triángulo de Barrow” (en: <https://www.geogebra.org/m/yntncxqs>).

Enfoque metodológico:

- La actividad se realizará en grupos de dos, máximo tres estudiantes. Se tendrán en cuenta, tanto lo que escriban en los espacios, como las participaciones en las distintas preguntas de las actividades.

Desarrollo de las actividades:

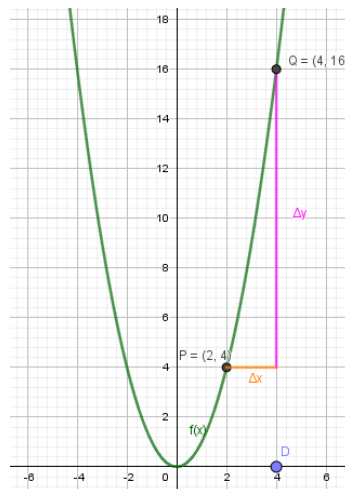
ACTIVIDAD 3. EL TRIÁNGULO DE BARROW: APROXIMACIÓN SUCESIVA DE RECTAS SECANTES Y SUS PENDIENTES A RECTAS TANGENTES Y SU PENDIENTE EN UN PUNTO DE UNA CURVA.

Isaac Barrow (1630-1677), Teólogo y Matemático británico, quien además hizo las veces de maestro del famoso Isaac Newton, desarrolló un método para el cálculo de tangentes, por medio del “triángulo característico”, también conocido como “triángulo de Barrow”. En lo que sigue, tomaremos algunos aspectos de dicho método desarrollado por Barrow, con el fin de calcular tangentes a algunas curvas.

Nota: En este punto, el profesor muestra algunos aspectos de la construcción hecha por Barrow para hallar rectas tangentes en un punto a una curva, por medio del applet “triángulo de Barrow”.

- Dibuja la recta secante a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ que pase tanto por el punto $P(2, 4)$ como por el punto $Q(4, 16)$.

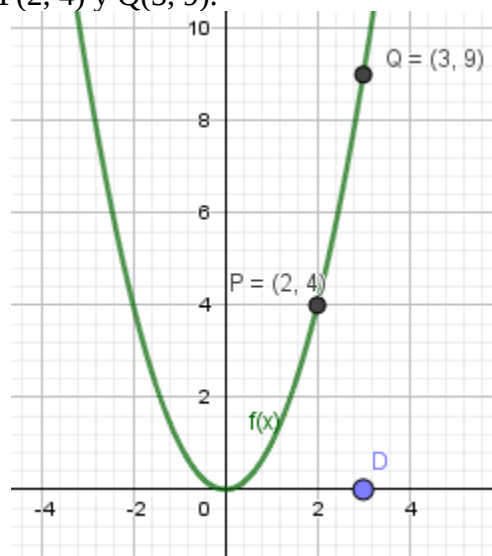
Nota: Observa que en rosado (Δy) y en naranja (Δx) aparecen los lados faltantes del triángulo de Barrow.



- Halla el valor de la pendiente de dicha recta secante. Dicho valor lo llamaremos m_1 .

Valor $m_1 =$

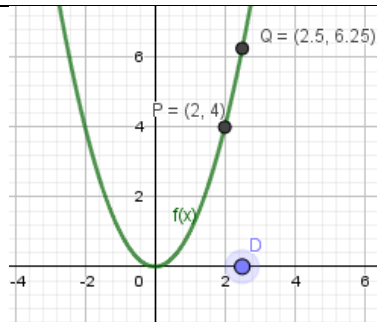
- Teniendo en cuenta el método de Barrow, se mueve el punto Q de modo tal que se acerque al punto P, tal y como se muestra en la siguiente figura. Dibuja los lados faltantes del triángulo de Barrow, así como la recta secante a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ que pase por los puntos $P(2, 4)$ y $Q(3, 9)$.



- Ahora que el punto Q está más cerca al punto P, ¿qué sucedió con el triángulo de Barrow, comparado con dicho triángulo en la primera figura?
- Halla el valor de la pendiente de dicha recta secante. Dicho valor lo llamaremos m_2 .

Valor $m_2 =$

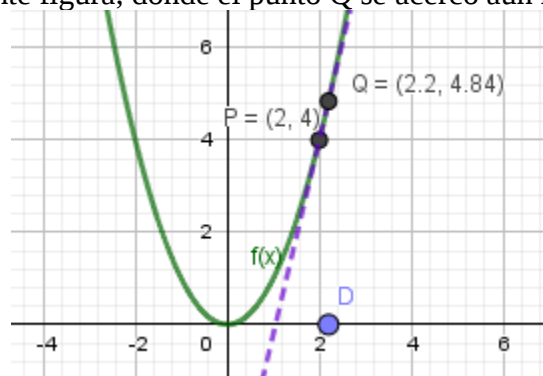
- Para continuar, se mueve el punto Q de modo tal que se encuentre más cerca del punto P, tal y como se muestra en la siguiente figura. Dibuja los lados faltantes del triángulo de Barrow, así como la recta secante a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ que pase por los nuevos puntos $P(2, 4)$ y $Q(2.5, 6.25)$.



- Ahora que el punto Q está más cerca al punto P, ¿qué sucedió con el triángulo de Barrow, comparado con dicho triángulo en la primera y segunda figura?
- Halla el valor de la pendiente de dicha recta secante. Dicho valor lo llamaremos m_3 .

Valor m_3 =

- Observa la siguiente figura, donde el punto Q se acercó aún más al punto P.



- ¿Es posible dibujar los lados faltantes del triángulo de Barrow sobre dicha figura? De ser posible, realízalo y explica qué sucede con dicho triángulo comparados con los triángulos de Barrow dibujados en las figuras anteriores. De no ser posible, justifica el motivo.
- ¿La recta color uva que pasa por P y Q sigue siendo secante a la gráfica de la función $f(x)$? Explica.
- Halla el valor de la pendiente de la recta color uva. Dicho valor lo llamaremos m_4 .

Valor m_4 =

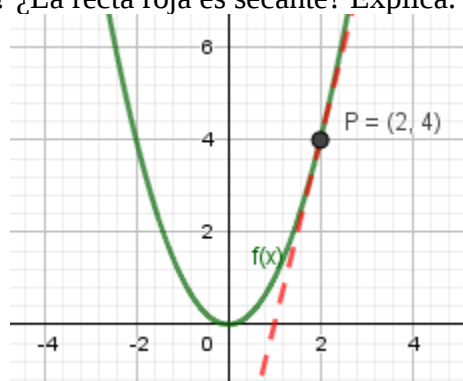
- Observa en el video “Aproximación del punto Q al punto P, triángulo de Barrow” (en <https://youtu.be/pXyj1PLOmyg>) lo que sucedió con el triángulo de Barrow y con la recta secante al realizar el proceso para hallar m_1 , m_2 , m_3 y m_4 . ¿Qué puedes concluir frente a la forma del triángulo de Barrow a medida que el punto Q se acercaba al punto P? ¿Qué puedes concluir frente a la pendiente o inclinación de la recta secante a medida que el punto Q se acercaba al punto P? Explica.
- Observa en el video “Zoom aproximación del punto Q al punto P, triángulo de Barrow” (en <https://youtu.be/6uV1r6mQfV8>) lo que sucedió con el triángulo de Barrow al hacer “Zoom” en el applet. ¿Es posible acercar aún más el punto Q al punto P, de modo tal que la recta color uva siga siendo secante a la gráfica de la función? Halla una coordenada para Q que esté aún más cerca al punto P, para finalmente obtener otro valor de la pendiente (m_5) de dicha recta secante.

Valor m_5 =

- Consigna los valores de las pendientes m_1 , m_2 , m_3 , m_4 y el valor m_5 en la siguiente tabla:

Nombre	Valor
Pendiente m_1	
Pendiente m_2	
Pendiente m_3	
Pendiente m_4	
Pendiente m_5	

- En la siguiente imagen vemos que solo está el punto P, de modo tal que ahora la recta roja toca a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ únicamente en dicho punto. ¿Qué sucedió con el triángulo de Barrow? ¿La recta roja es secante? Explica.



- Teniendo en cuenta lo que se observa en el video “Triángulo de Barrow: Proceso completo, puntos P y Q” (en <https://youtu.be/3XFLq9iPuOs>), ¿se puede concluir algo frente a lo mostrado en el video y lo realizado para hallar m_1 , m_2 , m_3 , m_4 y m_5 ?

- Si llamamos m a la pendiente de la recta roja que toca a la función únicamente en el punto $P(2, 4)$, ¿Cuál es el valor de la pendiente m de dicha recta roja? Explica la manera en que llegaste a concluir su valor.

RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA
UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA (parte 3: Deducción informal e intuitiva).

Sesión 3: Situaciones de uso de la recta tangente a una curva y su pendiente.

Objetivo:

- Mostrar distintas situaciones de uso de la recta tangente a una curva y su pendiente, con el fin de hacer una introducción a dicho concepto de forma visual, geométrica e intuitiva.

Materiales (recursos y medios):

- Lápiz, colores, papel, regla, calculadora, computador (Tablet o celular) y applet de Geogebra “Montaña rusa” (en: <https://www.geogebra.org/m/yntncxqs>).

Enfoque metodológico:

- La actividad se realizará en grupos de dos, máximo tres estudiantes. Se tendrán en cuenta, tanto lo que escriban en los espacios, como las participaciones en las distintas preguntas de las actividades.

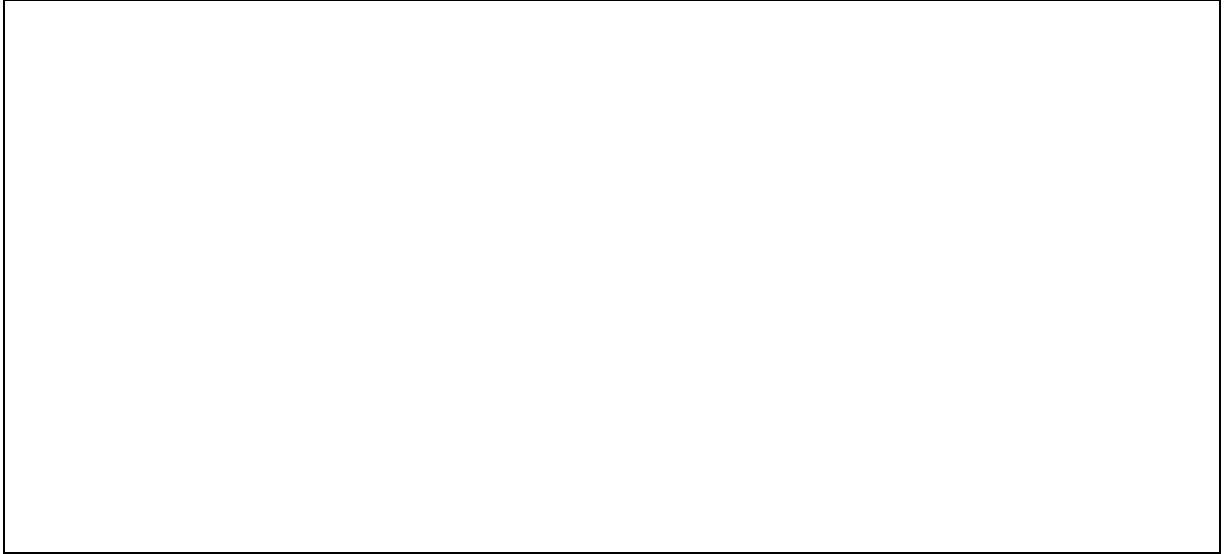
Desarrollo de las actividades:

Nota: Para las siguientes actividades, es importante que tengas a la mano totalmente resuelta la guía anterior.

ACTIVIDAD 4. LA VELOCIDAD DE UN AUTO

Observa los primeros 6 minutos y 17 segundos del video “¿Qué es la derivada? El concepto gráfico de derivada. ¿Qué es doblar la curva?” (en <https://www.youtube.com/watch?v=YH1WfIT6TFg>) y responde:

- Supongamos que la carretera es cada una de las rectas secantes realizadas en la actividad anterior (Actividad 3: EL TRIÁNGULO DE BARROW: APROXIMACIÓN SUCESIVA DE RECTAS SECANTES Y SUS PENDIENTES A RECTAS TANGENTES Y SU PENDIENTE EN UN PUNTO DE UNA CURVA).
- ¿En cuál de las cuatro carreteras (m_1 , m_2 , m_3 , m_4) se genera una mayor velocidad, teniendo en cuenta la comparación que realizan en el video? Explica.

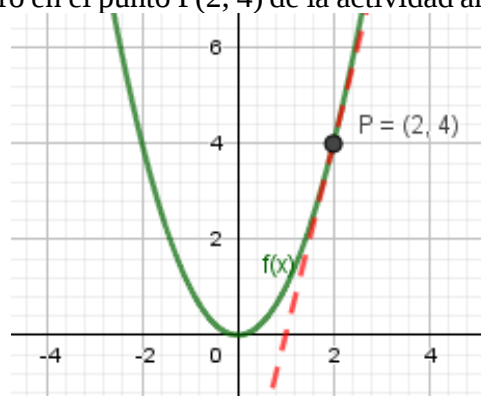


- Observa la siguiente imagen tomada del video.



- ¿A qué se te asemeja cada triángulo en los que se encuentran los carritos, respecto a lo trabajado en la guía pasada? Explica.

- Entre el minuto 5 y 6 del video, se muestra la forma en que se puede calcular la velocidad en un punto, cuando la carretera es curva. Teniendo en cuenta lo mencionado, suponga que ubicamos un carro en el punto $P(2, 4)$ de la actividad anterior (ver siguiente imagen).



- ¿A qué velocidad va el auto en dicho punto? Explica la manera en que hallaste dicho valor.

ACTIVIDAD 5. LA MONTAÑA RUSA

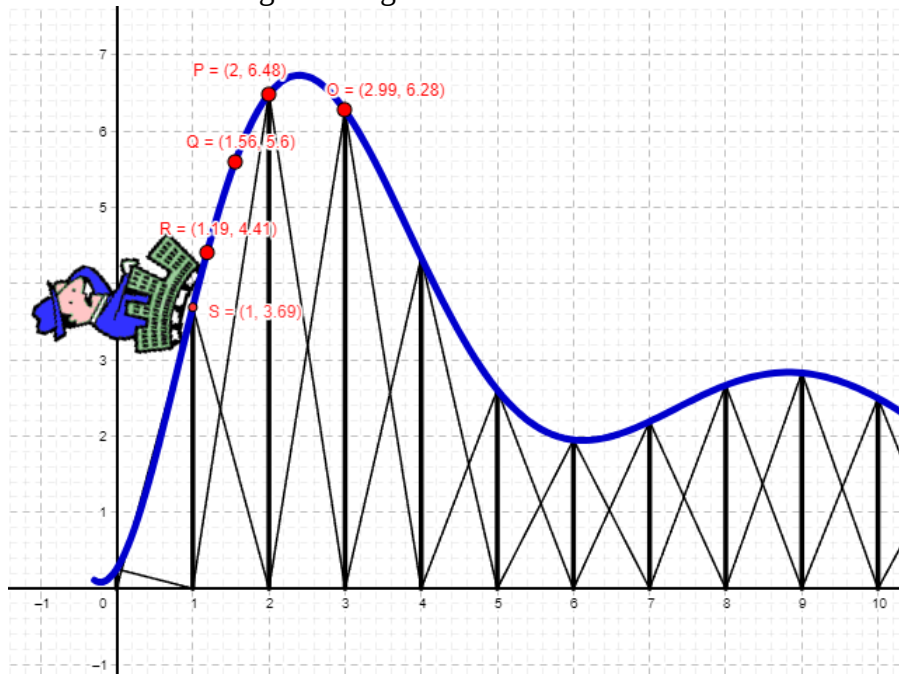
Nota: Para la siguiente actividad, es importante que tengas a la mano totalmente resuelta la actividad anterior.

Observa e interactúa con el applet “Montaña Rusa” (en <https://www.geogebra.org/m/csqcgyyn>) y responde:

- Da clic en el botón “animación” que se encuentra en la parte de arriba del applet y observa el movimiento del carrito de la montaña rusa. Compara la velocidad en la que va el carro en la subida entre $x=0$ y $x=2$ (por donde están los puntos color rojo O, P, Q

y R), con la subida entre $x=14$ y $x=19$ (por donde están los puntos color verde A, B y C). ¿Qué hipótesis puedes dar al respecto? Explica.

- Posteriormente, da clic en el botón “stop” que se encuentra en la parte de arriba y seguidamente ubica el carrito (punto S) de la montaña rusa sobre el valor $x=1$, tal y como se muestra en la siguiente figura:



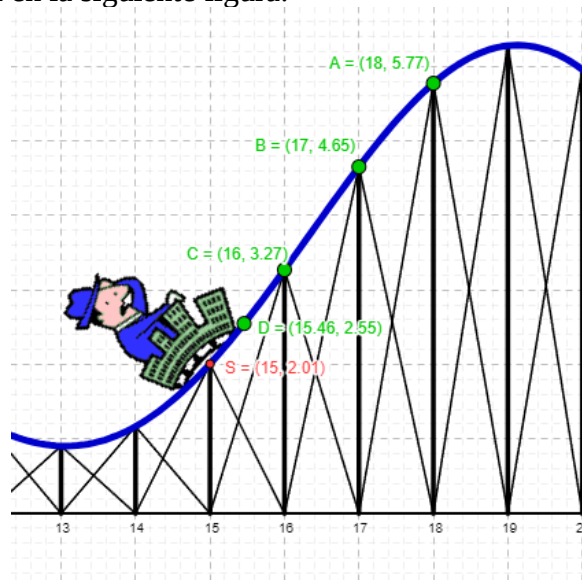
- Realiza un pequeño bosquejo del triángulo de Barrow para cada punto O, P, Q y R, respectivamente, con el punto S (carrito). ¿Qué puedes inferir frente a cada triángulo de Barrow y la inclinación, según sea con el punto O, P, Q y R? Explica.

- Teniendo en cuenta los distintos triángulos de Barrow realizados en el punto 3 y las coordenadas de los puntos O, P, Q, R y S (carrito), consigna los valores de las pendientes para cada recta en la siguiente tabla:

Nombre	Valor
Pendiente recta SO	
Pendiente recta SP	
Pendiente recta SQ	
Pendiente recta SR	

- Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Cuál es la velocidad aproximada a la que va el carrito de montaña rusa cuando está sobre el punto S(1, 3,69)? Dibuja la recta tangente sobre el punto S y posteriormente explica la manera como llegaste a concluir su valor.

- Posteriormente, ubica el carrito (punto S) de la montaña rusa sobre el valor $x=15$, tal y como se muestra en la siguiente figura:



- Realiza un pequeño bosquejo del triángulo de Barrow para cada punto A, B, C y D, respectivamente, con el punto S (carrito). ¿Qué puedes inferir frente a cada triángulo de Barrow y la inclinación, según sea con el punto A, B, C y D? Explica.

- Teniendo en cuenta los distintos triángulos de Barrow realizados en el punto 3 y las coordenadas de los puntos A, B, C, D y S (carrito), consigna los valores de las pendientes para cada recta en la siguiente tabla:

Nombre	Valor
Pendiente recta SA	
Pendiente recta SB	
Pendiente recta SC	
Pendiente recta SD	

- Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Cuál es la velocidad aproximada a la que va el carrito de montaña rusa cuando está sobre el punto S(15, 2,01)? Dibuja la recta tangente por el punto S, y posteriormente explica la manera en que llegaste a concluir su valor.

- Teniendo en cuenta la velocidad a la que va el carrito sobre el punto S cuando va en la zona de los puntos rojos (O, P, Q, R) y cuando va sobre la zona de los puntos verdes (A, B, C, D), ¿Fue acertada tu hipótesis? Explica.

La anterior UDG, es una construcción realizada por el equipo investigador, teniendo en cuenta la UAD desarrollada, así como los aportes realizados por los EPP durante el programa de formación inicial de profesores de matemáticas.

Por lo anteriormente mencionado, se destaca que las actividades tienen como fin introducir de forma geométrica, visual e intuitiva, a la recta tangente a una curva y su pendiente, a estudiantes de bachillerato y media, lo cual es un inicio para acercarse a la noción de derivada.

Finalmente, se debe mencionar que dicha UDG no fue llevada al aula, por lo que se espera, en una futura investigación, complementar la UDG, aplicarla y analizar dicha aplicación, para poder mejorarla.

5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan algunas conclusiones, reflexiones y recomendaciones relacionadas con la información suministrada por los estudiantes para profesor del programa de formación y descrita en el capítulo anterior, en relación con la pregunta y los objetivos que orientaron el trabajo de investigación. Dichas conclusiones y reflexiones se generan al contrastar la aproximación teórica que proporcionaron los referentes teóricos-conceptuales, en relación con la caracterización de la *visualización como un organizador didáctico y curricular* y los conocimientos didácticos que el profesor-investigador y los estudiantes para profesor ponen en manifiesto en los encuentros de formación y en sus propuestas de UD para la introducción geométrica, visual e intuitiva de la recta tangente a una curva y su pendiente, para la construcción de sentido de dicho CME en la educación media escolar.

5.1. CONCLUSIONES GENERALES

En relación con el *objetivo específico 1 (OE1)*, el cual pretendía construir un modelo local de Análisis Didáctico, basado en la evolución histórico-epistemológica, el análisis fenomenológico y el análisis semiótico del concepto de derivada, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos del contenido que sostienen el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente, se puede concluir que:

- El desarrollo de un modelo local de análisis didáctico (MLAD) ayuda al docente a adquirir un conocimiento didáctico (CD) que le permite fortalecer sus propuestas didácticas y curriculares, esto es, innovar en sus prácticas profesionales. Lo anterior se debe a que la construcción de dicho modelo permite caracterizar y reconocer las relaciones históricas, epistemológicas, fenomenológicas, disciplinares, didácticas, curriculares y (se espera que también las) visuales que el profesor en ejercicio evidencia

o requiere en su conocimiento didáctico y que expresa a través de discursos y propuestas educativas que consideran la introducción geométrica, visual e intuitiva de la recta tangente a una curva y su pendiente, para la construcción de sentido de dicho CME en la media escolar.

- Con la construcción del modelo local de conocimiento y análisis didáctico (ML de CD&AD) se fundamenta la *visualización como un organizador didáctico y curricular* el cual, por medio de un análisis de contenido, toma los aspectos visuales, geométricos e intuitivos de los conceptos matemáticos con el fin de desarrollar propuestas (Programas de FPM, UDG) que permitan dotar de sentido a un contenido matemático escolar (CME).
- El desarrollo del modelo local de conocimiento y análisis didáctico (ML de CD&AD) en la presente investigación, permite considerar la elaboración de dos clases de UD, una dirigida al profesor, denominada unidad de análisis didáctico (UAD), la cual se realiza basada en las distintas categorías del AD, y la otra dirigida a los estudiantes, denominada unidad didáctica guía (UDG), la cual contiene la secuencia de actividades y tareas a desarrollar por los estudiantes y contenidos necesarios para la comprensión y el aprendizaje. Esta caracterización de UD permite una mejor planificación para la aplicación en el aula.

En relación con el *objetivo específico 2 (OE2)*, el cual pretendía diseñar e implementar un programa de formación inicial de profesores de matemáticas que permita generar una unidad didáctica para la enseñanza y comprensión de la derivada basada en el proceso de visualización de la recta tangente a una curva y su pendiente, se puede concluir que:

- Una UAD puede ser construida (teniendo en cuenta un ML de CD&AD) por investigadores y formadores de profesores para que sea presentada tanto a EPP como a docentes en ejercicio, con el fin de diseñar propuestas de aula (UDG). Lo anterior, fundamentó el programa de formación inicial desarrollado en la presente investigación.
- Dentro del programa de formación inicial de profesores de matemáticas, los EPP mostraron motivación para tomar los aspectos presentados por el equipo investigador. Lo anterior permitió desarrollar un buen seminario, permitiendo que los EPP realizaran aportes significativos a la investigación.
- *La visualización como un organizador didáctico y curricular* aporta importantes medios (o recursos de mediación) útiles para cada concepto, contenido u objeto matemático susceptible de ser tratado visual y didácticamente para la enseñanza y comprensión (dotar de sentido) de dicho contenido matemático.

5.2.PERSPECTIVAS PARA DESARROLLOS FUTUROS Y RECOMENDACIONES

La articulación entre la evaluación de programas de formación y el AD como metodología de investigación, generó la posibilidad de una línea o programa de investigación basado en la Sistematización de Experiencias Docentes con propósitos formativos y de innovación curricular y didáctica; lo anterior, proponiendo un enfoque metodológico de investigación situada en el contexto del aula de clase, en este caso, con profesores en formación inicial.

La presente propuesta de formación inicial podría contribuir también a la concreción de seminario y cursos para EPP, los cuales logren integrar aspectos didácticos y metodológicos que les permita mejorar su formación inicial, dar unas pautas iniciales e innovadoras para sus futuras investigaciones en el campo de la DdM.

Finalmente, mencionar que los resultados de la presente investigación son una invitación a complementar las propuestas de formación profesional de los profesores de matemáticas, con una orientación en desarrollo de competencias, teniendo la investigación como principio fundamental de su formación, su desarrollo profesional, y razón de ser de la práctica y quehacer docente.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andreu, M. E., Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza, Morevallado Editores, Morelia, Mich. México, 157-174.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.
- Bedoya, E. (2002). Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.
- Bedoya, E. (2020). Didáctica de las Matemáticas – Conocimiento y Análisis Didáctico: Formación de profesores, innovación curricular e investigación en Educación Matemática. Documento de trabajo, sin publicar. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Boz, N. (2005). Dynamic Visualization and Software Environments. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, 4(1), 26-32.
- Camacho Ríos, J. F. (2017). Propuesta de un modelo local de análisis didáctico para fortalecer los conocimientos de un profesor de grado quinto sobre la fracción en su sentido de razón. Tesis de maestría. Universidad del Valle.
- Camargo, L. U. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Universidad de Antioquia.
- Corrales, M. J. (2013). Análisis didáctico de una propuesta instruccional en torno a los números racionales en el grado séptimo en la Institución Educativa San Vicente (Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática-Universidad del Valle).

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- Gallardo, J.; González, J. L. (2006). *El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática*.
- Ghiso, A. (2019). *Investigación educativa en el aula: conceptos, metodologías y estrategias*. San Salvador: Infod.
- Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. *The British journal for the philosophy of science*, 45(3), 789-813.
- Gómez-Chacón, I. M. (2014). Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. *Atas do XXV Seminário de| Investigaçao em Educação Matemática*, 5-28.
- Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 109-130.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.
- Gómez, J. L. L., Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics magazine*, 56(4), 195-206.

- Guzmán, M. D. (1996). El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis. Pirámide.
- Guzman, M. D. (2002). The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis.
- Guzmán, P. G., Santiago, M. C. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. Voces y silencios, 2(3), 78-89.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Educación matemática, 10(02), 23-45.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).
- Jara, O. (2012). La sistematización de experiencias. Práctica y teoría para otros mundos posibles, 8-258.
- Martínez Carazo, P. C. (2011). El método de estudio de caso Estrategia metodológica de la investigación científica. Revista científica Pensamiento y Gestión, (20).
- MEN (1998). Lineamientos curriculares nuevas tecnologías y currículo de Matemáticas. Santafé de Bogotá.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Santafé de Bogotá.
- MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemática, versión 2. Santafé de Bogotá.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 75-88.
- Mosquera, J. (s.f.). El experimento didáctico y la formación de profesores de matemáticas. University of Georgia, Athens.

- Pascual, C. (2016). Unidad Didáctica: Derivadas y cálculo diferencial. Tesis de maestría. Universidad de Granada.
- Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images* (English LD ed.).
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Brill Sense.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. La educación matemática en la enseñanza secundaria, 61-94.
- Rahim, M. H., & Siddo, R. (2009). The use of visualization for learning and teaching mathematics. HTW Dresden.
- Ramírez, G., Ordoñez, J. S. (2014). La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle: el caso de la derivada en un curso de cálculo I.
- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, 1(5).
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

- Rico, L. Lupiáñez, J. Molina, M. (Edits.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.
- Rico, L. Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Pirámide.
- Sánchez, J. L., Ramírez, M. C., Flores, C. D., Almira, J. M. S. (2021). Estudio de los significados para la enseñanza que poseen los profesores acerca del concepto de pendiente. *Educación matemática*, 33(3), 141-171.
- Solano, S. (2017). Las concepciones del concepto de derivada: dos estudios de caso sobre un matemático y un licenciado en matemáticas. (Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática-Universidad del Valle).
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 19, 105-119.
- Toledano, J. M. A. (2017). Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes. *Pensamiento Matemático*, 7(2), 65-86.
- Vázquez, M. S., del Rincón, T. O. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 87-115.
- Zimmermann, W., Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-7.

A. ANEXOS

Programa de los cursos de Didáctica I, II, III y IV de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del valle:

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa académico: Licenciatura en Matemáticas

Nombre de la asignatura: **Didáctica I: Desarrollo de pensamiento numérico**

Créditos: 3

Habilitable: No

Validable: No

Período: octubre 2021- marzo 2022

2. Enfoque y Descripción General

Este curso pertenece al Ciclo Básico Especifico de esta Licenciatura y en este se caracterizan y conceptualizan algunos campos problemáticos que aluden a la formación y desarrollo de pensamiento matemático autónomo en ámbitos escolares y extraescolares específicos y que son motivo de investigación en Educación Matemática. Campos problemáticos que tienen que ver con fenómenos que subyacen a la comunicación de saberes matemáticos en el ámbito escolar y extraescolar, esto es, fenómenos en torno a los procesos de producción, circulación y evaluación de estos conocimientos y saberes considerados como objeto de enseñanza y de aprendizaje; para lo cual, se hace necesario estudiar algunas posturas teóricas y diversas investigaciones en torno a la conceptualización e identificación de este tipo de problemas. Se inicia este estudio con el trabajo alrededor de problemáticas relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico en el ámbito de la construcción y significación de los sistemas numéricos.

Es así, como el tratamiento de estos campos problemáticos relacionados con la enseñanza de los sistemas numéricos, se abordan desde perspectivas de investigación de orden tanto nacional como internacional. Investigaciones que develan la complejidad de la construcción de diferentes significados del número natural, entero, racional, etc., asociados al tratamiento y a la conversión en distintos sistemas de representación, a los significados según el contexto de construcción y uso y al papel fundamental que juega el sistema de numeración decimal; a la complejidad en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos tratados desde las conceptualizaciones de estructura aditiva y multiplicativa, entre otros aspectos y cuyo propósito es revelar los procesos de razonamiento y contextos, asociados a estas construcciones y usos que potencian el desarrollo del pensamiento numérico. Como también, las relaciones e interrelaciones entre el desarrollo de este tipo de pensamiento y el desarrollo de los pensamientos métrico, geométrico, aleatorio, entre otros.

Estos problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, en la escuela, se abordan desde las perspectivas epistemológicas, cognitivas y didácticas; con ello se pretende caracterizar la didáctica de la aritmética como campo de investigación con problemáticas propias y con marcos teóricos y metodológicos que sustentan los tratamientos de tales problemas.

Se espera que los estudiantes participen activamente en cada una de las actividades que se proponen, tales como las lecturas de estudio de los documentos presentados tanto en clase como los de la bibliografía, exposiciones, discusiones, escritura de reseñas y ensayos, entre otros, con el propósito que se apropien de reflexiones y análisis de

situaciones y fenómenos inherentes a la construcción de pensamiento numérico en ámbitos escolares o extraescolares y, que posibiliten la búsqueda de propuestas para la solución de problemas que se les presenten en su ejercicio profesional e investigativo, en este campo. Para lograr esto último, en este curso se continúa con alguna práctica que potencie la reflexión alrededor de la finalidad del trabajo como profesor de matemáticas alrededor de las nociones de currículo, evaluación, ambientes de aprendizaje, el papel de los textos escolares, de las actividades de laboratorio, etc. Prácticas asociadas a procesos de observación y análisis alrededor de los asuntos enunciados antes.

3. Propósitos

A través de este curso se espera que los estudiantes logren:

- ☐ Una apropiación de fundamentos teóricos sobre problemas de estudio en el campo de la Educación Matemática.
- ☐ El reconocimiento de la complejidad en la formación de pensamiento matemático en ambientes escolares - dificultades, obstáculos y errores - a partir de los resultados de investigaciones en Educación Matemática, particularmente, en el desarrollo de pensamiento numérico.
- ☐ La reflexión acerca de las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, y cómo estas concepciones pueden ser fuentes de problemas en la formación de pensamiento matemático.
- ☐ El desarrollo de prácticas de observación ligadas a procesos de planificación curricular, evaluación, diseño de ambientes de aprendizaje, mediaciones etc.

4. CONTENIDOS TEMÁTICOS

CARACTERIZACIÓN Y CONCEPTUALIZACIÓN ACERCA DE PROBLEMAS EN EL CAMPO EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y EL PENSAMIENTO NUMÉRICO. En este apartado se estudia y analiza la Educación Matemática como un campo de investigación activa que durante las últimas décadas ha permitido la identificación de múltiples problemáticas que se revisten en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, así como propuestas para abordarlas. Para ello se parte estudiando las características y determinación de un problema en Educación Matemática y la conceptualización sobre errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, como elementos fundamentales en la determinación de problemas en educación matemática, como también, la perspectiva planteada por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006) acerca del pensamiento numérico.

PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO. Son objeto de reflexión y análisis en este eje temático la complejidad conceptual, procedimental y las competencias relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico, en particular, las relacionadas con: sentido numérico (como condición necesaria para la comprensión y desarrollo de pensamiento numérico y el), significado de los contenidos numéricos (contenido y estructura del currículo escolar, los naturales, enteros, racionales, irracionales y sus estructuras conceptuales, los sistemas de representación, el campo fenomenológico, entre otros aspectos), Condiciones y orientación del aprendizaje numérico (ambientes de aprendizaje, oportunidades de aprendizaje, mediaciones, entre otros), Planificación de la enseñanza para el desarrollo del pensamiento numérico (variables y funciones de las tareas matemáticas, materiales y recursos en el aula, articulaciones entre contenidos, procesos de pensamiento y contextos, evaluación y valoración de los aprendizajes para la toma de decisiones, entre otros).

ALGUNAS PRÁCTICAS DE OBSERVACIÓN SOBRE LO NUMÉRICO EN LA ESCUELA. Se trata de que los estudiantes continúen con las experiencias de una práctica de observación sobre ambientes de aprendizaje, propuesta curricular, actividades de aula, evaluaciones escolares etc., relacionadas con el desarrollo de pensamiento numérico y sus interrelaciones con otros pensamientos como el métrico, el aleatorio etc.

IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UN PROBLEMA RELACIONADO CON EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO VS LA PRÁCTICA DE OBSERVACIÓN. Se trata de que los estudiantes identifiquen una problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de lo numérico la caracterice y aborden su estudio desde investigaciones realizadas al respecto, desde prácticas investigativas y de observación. Se espera que durante este tiempo los estudiantes desarrollen el trabajo final del curso, lo cual evidencie el grado de apropiación teórica y reflexiva que lograron a lo largo del curso.

5. METODOLOGIA

La metodología se basa en el modelo de seminario – taller como estrategia de trabajo. Desde esta perspectiva los estudiantes deben adelantar una serie de lecturas para su posterior puesta en discusión en clase. De igual forma, realizar talleres donde se ponen en juego los análisis realizados en el trabajo individual o en grupo y producciones textuales como reseñas y ensayos. Además, exposiciones donde se ponen en juego sus estudios y análisis sobre un documento en particular y el seguimiento a prácticas de observación. Para todo esto, se hace un acompañamiento continuo del profesor a los estudiantes para apoyar sus desarrollos y develar sus inquietudes, para lo cual el correo institucional y el campus virtual juegan un papel importante.

6. EVALUACION

Los talleres tendrán una valoración del 30% de la nota final, los quices (dos en el semestre) un 20%, las exposiciones de un 25%, el trabajo final el 25% de la nota definitiva. El trabajo final consiste en la presentación de un documento tipo ensayo en el cual el estudiante selecciona y analiza un problema específico relacionado con el desarrollo del pensamiento numérico a la luz de los documentos abordados en clase, lecturas complementarias que los estudiantes pueden adquirir y establece la relación con las prácticas de observación realizadas. Oportunamente se darán indicaciones específicas en relación con este asunto.

BIBLIOGRAFIA

Bedoya, E. (2018). Modelos locales de análisis didáctico del contenido, conocimiento didáctico del contenido, formación de profesores de matemáticas e innovación curricular en educación básica y media. (Documento de trabajo). Cali: Área de Educación Matemática – Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Freudenthal, H. 1981. Major problems of mathematics educations. Educational studies in mathematics, Vol. 12, p.p.133-150.

Socas, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: L. Rico, La educación Matemática en la enseñanza secundaria (págs. 125-154). Barcelona, España: Ice/ Horsori.

Ministerio de Educación nacional [MEN] – Colombia. 1998. Lineamientos curriculares de matemáticas. Santafé de Bogotá.

Ministerio de Educación nacional [MEN] – Colombia. 2006. Estándares Básicos de Competencias. Área de Matemáticas. Santafé de Bogotá.

LLinares, S., Sánchez, M. Fracciones. Madrid: Editorial Síntesis. 1988.

LLinares, S., Sánchez, M. Las fracciones: diferentes interpretaciones, Capítulo 3 del libro Fracciones. Editorial Síntesis. Madrid. 2000.

LLinares, S., Sánchez, M. Las operaciones con fracciones. Los algoritmos, Capítulo 5 del libro Fracciones. Editorial Síntesis. Madrid. 2000.

Vasco U. Carlos E. El archipiélago fraccionario. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

Vergnaud, G. Los problemas de tipo aditivo. El niño, las matemáticas y la realidad Editorial Trillas. México. 1991.

Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1994. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3.1990. Pgs. 133-170.

Rico, L. (Coord.) (1997a). La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: ICE (UB) - Horsori.

Rico, L. (Ed.) (1997b). Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria. Madrid: Síntesis.

Rico, L.; y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L.; Lupiáñez, J. L.; Molina, M. (2013). Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular. Granada: Comares.

Segovia, I. y Rico, L. (2013). Matemáticas para Maestros de Educación Primaria. Madrid: Pirámide.

Moreno, A. y Rico, L. (2016) Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria. Madrid: Pirámide.

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa académico: Licenciatura en Matemáticas

Nombre de la asignatura: **Didáctica II: Desarrollo de pensamiento geométrico y métrico**

Código: 405136M

Grupo: 01

Nombre del profesor: DIEGO GARZON CASTRO

Horario: miércoles 16 00 a 18: 00; Ed. E23(331), 2073.

Créditos: 3

Habilitable: No

Validable: No

Período: Octubre- febrero de 2020

2. Enfoque y Descripción General

Este curso pertenece al Ciclo Profesional de la Licenciatura en Matemáticas. La Didáctica de la Geometría (DG), como parte de la Didáctica de las Matemáticas se ocupa de observar, describir, analizar, conocer y explicar los fenómenos y problemas relativos a las relaciones entre sujeto y objeto que se presenta en el sistema didáctico en relación con los objetos y conocimientos geométricos y métricos en los distintos contextos y niveles educativos de la Educación Básica Secundaria y Media.

El pensamiento espacial y métrico es componente fundamental de las estructuras analíticas curriculares escolares debido a sus aportes significativos en el desarrollo del

pensamiento matemático, el conocimiento de las personas y la sociedad. El desarrollo de competencias asociadas con el desarrollo de pensamiento espacial y métrico aporta instrumentos para comprender y describir el espacio y el tiempo en el que vivimos y el razonamiento. El conocimiento geométrico como parte de una disciplina científica se fundamenta en procesos de generalización, abstracción, formalización y rigor. En este sentido, la formación en geometría también resulta fundamental para emprender el estudio y comprensión de muchas otras disciplinas escolares, profesionales y científicas. En la literatura de investigación es reconocido como los estudios sobre la formación en geometría, han incrementado en lo que refiere al uso de tecnología y como esta impacta la enseñanza, el aprendizaje y el pensamiento geométrico de los estudiantes aprendices; el conocimiento del contenido geométrico por parte de los profesores y el desarrollo profesional del profesor para la formación geométrica (Jones y Tzekaki, 2016). Es por esto por lo que en esta propuesta de curso se integra el uso de distinto tipo de recursos, pero enfatizando en los recursos digitales.

Whiteley, Sinclair y Davis (2015) describen el razonamiento espacial como una capacidad vital del pensamiento y la acción humana, que no siempre ha sido identificada y fundamentada en la escuela. En consecuencia, la relevancia de desarrollar habilidades en la enseñanza asociadas con este tipo de capacidad.

La investigación en el campo de la capacidad espacial destaca el bajo desarrollo de las habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones espaciales y transformaciones, también la comprensión de las dimensiones y la localización. Los aportes de este tipo de investigación son importantes, porque el razonamiento espacial más que un componente importante del pensamiento y la acción humana se considera estrechamente conectado con el pensamiento y el desarrollo de conocimiento geométrico (Jones y Tzekaki, 2016). Esto permite reconocer su importancia para el desarrollo de habilidades en distintas disciplinas: la ciencia, la ingeniería, el arte, la tecnología, los deportes. En consecuencia, la importancia que adquiere el desarrollo de competencias profesionales de los profesores en formación para la enseñanza del razonamiento espacial y la medida.

3. Objetivo General

Promover entre los profesores en formación un espacio de fundamentación conceptual y reflexión, para promover el desarrollo de sus competencias profesionales asociadas con los conocimientos geométricos, didácticos, curriculares y habilidades para su desempeño docente.

4. Objetivos específicos

- Capacitar a los estudiantes para profesor para tomar decisiones adecuadas relativas a la enseñanza de la geometría escolar.
- Desarrollar competencias para identificar problemas de la enseñanza de la geometría, analizarlos y diseñar actividades para el aprendizaje.
- Desarrollar las competencias del estudiante para profesor en la identificación, comprensión y el razonamiento respecto a los procesos de aprendizaje, en relación con la actividad geométrica de los estudiantes.
- Fundamentar los conocimientos, la configuración y uso de recursos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

5. CONTENIDOS TEMÁTICOS

5.1 LA GEOMETRÍA COMO CONTENIDO CURRICULAR

1. Geometría y Educación. El Currículo de Geometría (finalidades), la evaluación desde un punto de vista de la DG: el Conocimiento Didáctico de la Geometría. Conexiones y relaciones entre los diversos contenidos y asignaturas.

Naturaleza del conocimiento geométrico: Expandir las visiones de la geometría.

2. Currículo y Geometría. El pensamiento espacial y métrico y su desarrollo en la Educación Básica Secundaria y Media. Las formas en el espacio y en el plano, la geometría a través de las transformaciones.

5.2 LA GEOMETRÍA COMO OBJETO DE APRENDIZAJE

3. La investigación respecto al aprendizaje de la geometría escolar y la medida.

4. Representación, modelación y resolución de problemas

5. Razonamiento Geométrico. Clasificación de formas geométricas a partir de sus propiedades. Razonamiento geométrico y construcción de sentido.

6. Construcción geométrica en entornos de geometría dinámica. La medida en ambientes de geometría dinámica.

7. Estudio del sentido espacial y la medida.

5.3 LA GEOMETRÍA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

8. La enseñanza de la Geometría en la Educación Básica y Media. El diseño de tareas, la planificación e intervención en el aula.

9. Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

6. METODOLOGIA

El curso se desarrollará en la modalidad de seminario-taller. En algunos momentos el profesor presentará ideas centrales de algunos temas e igualmente los estudiantes efectuarán sus respectivas presentaciones. Igualmente, se propondrán actividades y situaciones en la modalidad de taller para realizar por parte de los estudiantes individualmente, en grupos pequeños o conjuntamente por parte de la clase. En el enfoque de

seminario-taller el estudiante debe realizar la lectura y análisis de algunos documentos propuestos por el profesor, para su posterior presentación y discusión en clase. Igualmente, se realizarán talleres, puestas en común y tareas donde se pongan de manifiesto en la práctica los resultados de estas lecturas y análisis; es decir actividades de práctica de diseño para la formulación de tareas o actividades para el aula o la formación extraescolar. Periódicamente los estudiantes deben presentar por escrito o/y oralmente pequeños informes o trabajos sobre estas actividades, que realizarán unas veces en el aula y otras fuera de los horarios de clases. Todas estas actividades deben orientarse hacia la elaboración de un trabajo final del curso.

El eje central del seminario lo configura el diseño de una propuesta de indagación e intervención en el salón de clase, que será definida en la tercera clase, este proyecto implicará el reconocimiento de un problema en el aprendizaje de la geometría, la planificación y diseño de una secuencia de aprendizaje y la intervención en dos clases que serán videograbadas, analizadas e interpretadas. Los avances de esta propuesta serán presentados a lo largo de cuatro sesiones de clase. Estará a cargo de tres estudiantes.

7. EVALUACION

Debido a que en el curso se privilegia como estrategia metodológica el seminario taller, la asistencia y la participación de los estudiantes es un factor importante para el logro de las finalidades del curso. Por esta razón la asistencia, el trabajo en clase, la intervención en sesiones de puesta en común y debate, las sustentaciones orales de informes de lectura, presentación de pruebas parciales escritas, etc., equivale a un porcentaje del 35% del valor de la nota definitiva. Estas actividades las realizará el estudiante unas veces individualmente y otras en grupos (integrados por tres estudiantes).

Periódicamente, los estudiantes realizarán individualmente y/o en grupos, lecturas con sus respectivos informes escritos de documentos elegidos previamente por el profesor. A partir de esta actividad, complementariamente los estudiantes deben participar activamente en las sesiones de clases de puesta en común y debate sobre los contenidos

y propuestas de estos documentos. La presentación por escrito de todos y cada uno de estos informes de lectura tiene un valor del 20% de la nota definitiva. Para la presentación de los informes de lectura se recomienda hacerlo en computador, conservando el archivo correspondiente, así como seguir las indicaciones de la guía de lectura propuesta inicialmente por el profesor durante la primera semana de clases.

El proyecto transversal del curso, lo configura la propuesta de indagación e intervención, respecto a una problemática en el aprendizaje o la enseñanza de la geometría tópico o contenido geométrico o métrico escolar determinado. basándose en las propuestas teóricas, prácticas desarrolladas en el curso e inquietudes con las que se llega al curso. Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes presentaran avances referidos a la identificación del problema, la planificación de intervención, diseño y resultados obtenidos en la intervención. El informe final del trabajo, junto con su presentación previa, tienen un valor del 45% de la nota final.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA, C. y otros (1993). Simetría Dinámica. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

ALSINA, C. y otros (1997). Invitación a la didáctica de geometría. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

ALSINA, C. y otros (1998). Materiales para construir la geometría. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

Alsina, C., Fortuny, Josep M. y Pérez G., R. (1998). ¿Por qué la geometría? Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

ANDERSEN, Kirsti (2007). The Geometry of an art. The history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge.

ARTEAGA, José R. (2012). Tecné, episteme y didaxis: N°32.

BALACHEFF, N. (2000) Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En: Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona: Editorial Graó.

Barabash, M. (2017). Angle concept: a high School and tertiary longitudinal perspective to minimize obstacles. Teaching Mathematics and its Applications, 36, 31-55.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M.T. (2011). Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. The Mathematics Enthusiast, 8(3), 507-570.

BLUMENTHAL, L. (1961) A modern view of geometry. New York: Dover Publication.

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la Didáctica de la Geometría. Revista Colombiana de Educación. N°60, pp. 41-60.

Camargo, L. (2012). La geometría su enseñanza y aprendizaje. Tecne, Episteme y Didaxis: TED. N°32, pp. 4-8. (editorial).

Chamorro, M. y otros (2005). Didáctica de las Matemáticas. Tomo I y II. Madrid: Pearson Educación.

CARDONA, A. y otros (2005). La geometría de Alberto Durero. Análisis y modelación de sus construcciones. Bogotá: Universidad Jorge Tadeo Lozano.

Chamorro, M. (1999). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la longitud y la superficie. Esquemas invariantes operativos. En Revista Uno N° 19.

COXETER, H. (1971) Fundamentos de geometría. México: Limusa-Wiley.

Craine, T. y Rubenstein, R. (2009). *Understanding geometry for a changing world*. Reston: NCTM.

- DIENES, Z. y GOLDING, E. (1973). La geometría a través de las transformaciones. Vol. 1. Topología, geometría proyectiva y afín. Barcelona: Editorial Teide.
- DIENES, Z. Y GOLDING, E.W. (1973) La geometría a través de las transformaciones. Vol. 2. Geometría euclidiana. Barcelona: Editorial Teide.
- French, D. (2004). *Teaching and learning*. Continuum: Great Britian.
- GRUPO BETA (1997). Proporcionalidad geométrica y semejanza. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.
- Hatori, K. (2001). Origami construction. Recuperado en: <http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/conste.html>.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecne, Episteme y Didaxis: TED. N° 32, 55-70.
- Hollebrands, K., Laborde C. y Sträber, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. En M. Kathleen Heid y Glendon W. Blume (Eds.). Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: V.1. USA: NCTM.
- Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. En: Huzita, H. (Ed.). Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, (pp.143-158). New York.
- Keith, J. y Tzekaki, M. Research the Teaching and Learning of Geometry (2016). En A. Gutierrez, G. C., Leder y P. Boero (Eds). The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.(pp. 109-149). Rotterdam: Sense Publihers.
- MARTIN, G. (1982) Transformation geometry. An introduction to simmetry. New York: Springer Verlag.
- MARTIN, G. (1998). Geometric constructions. New York: Springer Verlag.
- Myint S., K (2017). Visual -Spatial ability in STEM Education. Switzerland: springer.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Bogotá: Ed. Magisterio.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2004) Pensamiento Geométrico y tecnologías computacionales. Serie Documentos. Proyecto de Incorporación de nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica, Secundaria y Media de Colombia. Bogotá: Enlace Editores.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006) Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002) Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas. Bogotá: Enlace Editores.
- McCrone S. H., King, J., Orihuela, Y., Robinson, E. (2010). Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in geometry. Reston: The national council of teachers of mathematics.
- Sinclair, N. y Robutti O. (2013). Technology and the role of proof : The case of dynamic geometry. En M. Clements; A. Bishop; K. Keitel, J. Kilpatrick, y K. Leung (Eds.). Third international handbook of mathematics education (pp. 571-596). NY: Springer.
- YAGLOM, M. Geometric transformations.(1962) Vol.3. New Mathematical Library . New York: Editorial Random House.
- VASCO, Carlos E. (2007). La cronotropía antes y después de la geometría. Conferencia pronunciada en la Duodécima Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática (XII CIAEM), Querétaro, México, julio 16-19 de 2007.
- VALOYES, L. y GARZÓN, D. (2003) Notas de clase. Geometría I. Cali: Universidad del Valle.
- Revista Uno (1996). Revista de Didáctica de las Matemáticas. Medida. N10.

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa académico: Licenciatura en Matemáticas

Nombre de la asignatura: **Didáctica III: Desarrollo de pensamiento estocástico**

Créditos: 3

Habitable: No

Validable: No

Período: febrero- junio de 2021

2. Enfoque y Descripción General

Es aceptado en la actualidad, que la estadística y probabilidad inundan gran parte de nuestro diario vivir en aquellas situaciones que se presentan para la toma de decisiones. Decisiones en ocasiones basadas en nuestra experiencia o en cierta regularidad estadística observada desde diferentes registros. El proceso de sensibilizar a la comunidad educativa respecto a la presencia inexorable de la variabilidad y la incertidumbre en todos los fenómenos de la naturaleza y de la sociedad y las consecuencias de ignorar su existencia, deben ser estudiados por los futuros maestros de matemáticas. La Estadística como paradigma esencial en la búsqueda del conocimiento en la investigación empírica es un requisito para el análisis y observación de los individuos hacia los colectivos como objeto y propósito de la investigación. Se establece entonces como un tránsito del conocimiento perfecto a la convivencia con el error y con lo incierto, pero con una medida de la incertidumbre y el error, convenientes para la toma de decisiones y medición del riesgo. Mediante este seminario de Didáctica de la Estadística, se pretenden descubrir algunas aristas de investigación didáctica en el marco de este nuevo paradigma que permita considerarla como línea de formación dentro de la Educación Matemática.

3. Objetivo General

Elaborar a la luz de los marcos teóricos de referencia, un proyecto estadístico para ser llevado al aula

4. Objetivos específicos

Caracterizar los distintos autores de referencia en la comunidad de la Educación Estocástica. Generar un pensamiento inductivo en el estudiante para la buena toma de decisiones en el campo de la estadística y probabilidad.

Analizar los distintos enfoques teóricos que en la actualidad modelan los problemas de la educación estadística.

5. CONTENIDOS TEMÁTICOS

Marco curricular del pensamiento aleatorio (Lineamientos, Estándares, Derechos básicos de Aprendizaje)

Elementos teóricos en la investigación en la Educación Estocástica: Algunos referentes nacionales e internacionales.

Educación Estadística Crítica

Estrategias de trabajo en el aula: El valor de los proyectos y la importancia del juego, las paradojas y las analogías en la apropiación del paradigma de la Estadística.

Elementos históricos y filosóficos en la estadística y probabilidad.

6. METODOLOGIA

Las sesiones están destinadas a desarrollarse mediante la estrategia seminario-taller. Los estudiantes serán agentes activos participando en presentaciones individuales o grupales con un tema específico previamente asignado y socializado, esto con el propósito de explorar y consolidar las diferentes habilidades y desempeños propios del pensamiento aleatorio.

7. EVALUACION

Para efectos de la evaluación durante estas sesiones, se tendrán en cuenta los siguientes criterios:

1. Desarrollo y aplicación de las presentaciones de lecturas, informes, tareas, relatorías (40%)
2. Presentación Final del Proyecto (60%)

BIBLIOGRAFIA

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. En: UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. No. 5. Grao. Barcelona.

Batanero, C. (2001). Presente y futuro de la educación estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

Behar R; Pere G. (2004). 55 preguntas a dudas típicas de estadística. Ed Diaz de Santos, Madrid.

Puede descargarse en:

http://www.victorleiva.cl/archivos/CODELCO/PDFs/55_Respuestas_a_Dudas_Tipicas__de_Estadistica.pdf

Behar R; Pere G. (2001). Mil y una dimensiones del aprendizaje de la estadística. Estadística Española Vol. 43, Núm. 148, 2001, págs. 189 a 207.

Puede descargarse en:

[http://www.ine.es/ss/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-](http://www.ine.es/ss/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition&blobheadervalue1=attachment%3B+filename%3D1259924940150&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1259936732069&ssbinary=true)

[Disposition&blobheadervalue1=attachment%3B+filename%3D1259924940150&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1259936732069&ssbinary=true](http://www.ine.es/ss/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition&blobheadervalue1=attachment%3B+filename%3D1259924940150&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1259936732069&ssbinary=true)

Godino, J. D.; Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Serie Síntesis. Madrid.

Hald, A. (1990). A history of probability and statistics and their applications before 1750. New York: Wiley.

Hacking, I. (1995). El Surgimiento de la teoría de la probabilidad. Barcelona: Gedisa.

Ministerio de Educación Nacional (2004). Pensamiento estadístico y tecnologías computacionales. Enlace Editores Ltda. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá.



UNIVERSIDAD DEL VALLE

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa Académico:	Licenciatura en Matemáticas		
Nombre de La Asignatura:	Didáctica IV: Desarrollo de pensamiento variacional		
Código y Grupo:	Grupo 01		
Nombre del Profesor:	Ligia	Amparo	Torres R.
	ligia.torres@correounivalle.edu.co		
Horario y Lugar:	viernes de 10:00 a.m. a 1:00 p.m.		
Créditos:	3 (tres).		
Habitable:	No		
Validable:	No		
Período:	Agosto – diciembre de 2020		

2. DESCRIPCIÓN GENERAL

Este curso con enfoque metodológico de seminario pertenece a la línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, de la componente en Didáctica de las disciplinas y al Ciclo profesional, de la Licenciatura en matemáticas. Para su desarrollo cuenta con tres créditos académicos, dos de los cuales están enfocados a la práctica pedagógica de diseño y experimentación.

En este seminario se abordan aspectos relacionados con los resultados de la investigación, de las últimas décadas, en didáctica del álgebra. Aspectos relacionados con la transición de la aritmética al álgebra en ámbitos escolares, la naturaleza de los pensamientos aritmético y algebraico, las dificultades y obstáculos que se presentan en dicha transición; la caracterización del razonamiento algebraico y el pensamiento variacional y sus vínculos; la relación entre algunos contenidos como las expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones con el el papel de la modelación y la resolución de problemas en la formación de pensamiento variacional y razonamiento algebraico.

Además, atentos a los desarrollos de esta investigación en didáctica del álgebra se hace necesario en este seminario estudiar algunas propuestas de trabajo algebraico en el aula, que reconocen y sustentan la relación de éstas con lo histórico – epistemológico, la generalización de patrones, la resolución de problemas, la modelación matemática, entre otros aspectos.

Para que estos fundamentos de reflexión se constituyan en verdaderas herramientas para los estudiantes y avancen en la consolidación de su formación y proyectos de grado, los estudiantes realizarán un trabajo de práctica pedagógica, de forma transversal a toda la formación, en tanto diseñaran o adaptaran algunas propuestas de aula, de la cuales harán la implementación de algunos apartados para su posterior análisis. Todo esto a través de la identificación de una problemática particular en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela.

3. PROPÓSITOS/ OBJETIVOS

A través del seminario se espera en los estudiantes:

- Una apropiación de fundamentos teóricos y metodológicos sobre problemáticas didácticas en torno al desarrollo del razonamiento algebraico y el pensamiento variacional en ámbitos escolares.
- Integren estos fundamentos de construcción de razonamiento algebraico y pensamiento variacional en el análisis de algunas propuestas sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela
- Consoliden procesos de escritura a partir de los trabajos escritos, sobre reflexiones en las temáticas, objeto de estudio.

4. METODOLOGÍA

La metodología se basa en el modelo de seminario – taller como estrategia de trabajo. Desde esta perspectiva los estudiantes deben adelantar una serie de lecturas para su posterior puesta en discusión en clase. De igual forma, se realizarán talleres donde se ponen en juego los análisis realizados en el trabajo individual o en grupo, exposiciones y producciones textuales.

5. EVALUACIÓN

Los talleres y quices tendrán una valoración del 35% de la nota final, las exposiciones de un 35% y el trabajo final el 30% de la nota definitiva. El trabajo final consiste en el análisis de un problema específico relacionado con una problemática en didáctica del álgebra.

6. EJES TEMÁTICOS – contenido y parcelación.

6.1 LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA. UN PANORAMA GENERAL.

En este apartado se estudian algunos trabajos de investigación que permiten tener una visión global de la investigación en didáctica del álgebra en las últimas décadas. Entendida la didáctica del álgebra como la disciplina que estudia las problemáticas y fenómenos relacionados con la comunicación de ideas algebraicas en ámbitos escolares y extraescolares. En decir, que da cuenta de fenómenos y problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Trabajos de investigación como compilaciones que organizan la producción investigativa en álgebra escolar desde diferentes perspectivas: la Agenda de investigación para la Educación Matemática, de la NCTM (1989), sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra, editado por Sigrud Wagner y Carolyn Kieran; el análisis que presenta Carolyn Kieran en el *Handbook del PME* del 2006, sobre la investigación en álgebra presente en los 30 años del PME. Así mismo algunas investigaciones analizadas en algunas tesis doctorales, como la de Pilar Bolea y el trabajo publicado en el volumen 9, número 3 del 2007 en *Mathematical Thinking and Learning*, sobre el apoyo a la transición del razonamiento aritmético al algebraico, editado por Karen Koellner. De igual manera el texto de Eugenio Filloy, Luis Puig y Teresa Rojano sobre el Álgebra educativa, como una aproximación teórica y empírica en este campo y trabajos como, El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar (Kieran, 1992).

Tiempos: 2 sesiones de 3 horas cada una, 21 y 28 de agosto de 2020.

6.2 RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y PENSAMIENTO VARIACIONAL EN LA ESCUELA.

Se trata de caracterizar elementos fundamentales del razonamiento algebraico, del pensamiento variacional y de sus relaciones, desde distintas problemáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela.

- **De la aritmética al álgebra en la escuela.**

Se analizan en este caso investigaciones que se refieren al estudio sobre el corte didáctico entre el pensamiento aritmético y el algebraico (Chevallard 1980, Gallardo y Rojano 1988, Filloy 1989), en el momento en que aparece como necesario operar con lo representado, es decir, aceptar la existencia de *lo desconocido* para ser representado y operar sobre ello, e.g, operar la incógnita, en el caso de la resolución de ecuaciones. Y algunas que aluden a la construcción de una simbolización propia, que permita una comunicación más eficiente de las ideas algebraicas, (Kucheman, 1981; Usinskin, 1988; Booth, 1984; Enfedaque, 1990; Ursini, 1994; Grupo Pretexto; 1994) y Vergel (2017, 2018).

Tiempo: 2 sesiones de 3 horas, 4 y 11 de septiembre de 2020.

- **Razonamiento algebraico y pensamiento variacional.**

Se trata de caracterizar elementos fundamentales del razonamiento algebraico, del pensamiento variacional y de sus relaciones, desde distintas perspectivas teóricas. Para lograr esto se estudia, de una parte, algunos trabajos como *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros* (Godino y Font, 2003), la postura de los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y de los Estándares básico de competencias (MEN, 2006) con relación al pensamiento variacional.

Tiempo: 4 sesiones de 3 horas cada una, 18 y 25 de septiembre y 2 y 9 de octubre de 2020.

- **Expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones en la escuela.**

Esta problemática es abordada en investigaciones como las de Kieran (1988, 1992, 2006), Filloy y Rojano (1985,1989,), Gallardo y Rojano (1997), Filloy (1998, 2001, 2008) donde dan cuenta de dificultades y tratamiento escolares en el aprendizaje y enseñanza de las expresiones algebraicas y ecuaciones y su papel en el desarrollo del razonamiento algebraico.

Tiempo: 2 sesiones de 3 horas cada una, 16 y 23 de octubre de 2020.

- **La resolución de problemas y la modelación como procesos generales de pensamiento.**

En la literatura especializada (Castro, 1997, Janvier, 1996, Salett Biembengut y Hein, 1999) es posible encontrar diversos nombres para designar el proceso de elaboración de modelos, y aún en algunos casos, se establecen relaciones y/o diferencias entre ellos. Algunos de estos nombres son: modelación, matematización, modelación y modelaje; términos que se caracterizarán desde varios puntos de vista. En este apartado se

abordarán algunas de estas posturas y el papel del proceso de modelación y la producción de modelos en el aprendizaje del álgebra en la escuela.

De otra parte, se estudiarán trabajos como el de Rojano (1996) sobre el papel de los problemas y la resolución de problemas en el desarrollo del álgebra, se plantea en una dirección, sobre la intervención de la historia en los problemas didácticos, distinta a lo trazado por Puig y Cerdán sobre este asunto. En este sentido, la muy conocida separación que los estudiantes tienden hacer entre la manipulación algebraica y su uso en la modelación y la resolución de problemas tiene su origen en una aproximación educativa basada en una visión simplificada del álgebra, que oculta el aspecto semántico de su gramática.

Tiempo: 3 sesiones de 3 horas cada una, los días 30 de octubre y 6 y 13 de noviembre de 2020.

- **Perspectivas de investigación y enseñanza en la iniciación al álgebra escolar.**

Los estudios recopilados por Bednarz, Kieran., Lee (1996) permiten determinar diversas perspectivas de iniciación al álgebra, en las cuales se abordan aspectos fundamentales de la problemática planteada por las investigaciones antes registradas sobre el paso de lo aritmético a lo algebraico. Se propone, en estos trabajos el ingreso en una forma más natural y constructiva al álgebra en la escuela.

Es importante destacar, el énfasis hecho por investigadores como Kieran y Radford sobre las relaciones que se deben plantear explícitamente entre las diferentes aproximaciones al álgebra. Mientras para Luis Radford (1998) la generalización como norma epistémica no puede funcionar sola, sino que tiene que estar relacionada con otra probable norma epistémica, por ejemplo la resolución de problemas, para Kieran (1996), el paso entre las diversas componentes son esenciales para el aprendizaje del álgebra; según ella debe hacerse un minucioso estudio sobre el paso del álgebra como una herramienta de generalización al álgebra como una herramienta para la resolución de problemas o para el álgebra como una herramienta de modelación, fundamentado este estudio en el tipo de negociaciones que hacen los estudiantes en estos pasajes y sobre el tipo de dificultades que ellos conllevan tanto en el ámbito procedimental como en el ámbito de los conceptos algebraicos involucrados.

Tiempo: 2 sesiones de 3 horas, 20 y 27 de noviembre de 2020.

6.3 ANÁLISIS DE ALGUNAS PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA.

Para trabajar este tópico se tomen algunos diseños de propuesta para la actividad matemática en el aula, en particular algunas secuencias didácticas o actividades que permiten analizar su aportes a la construcción de razonamiento algebraico y pensamiento variacional en la escuela y se realizan rediseños o nuevos diseños para poner en juego todo lo comprendido en el curso, y realizar esta práctica pedagógica, como un ejercicio formativo con los futuros profesores de matemáticas de este seminario. Lo que significa, que en este apartado se analizarán, diseñarán e implementarán, estas propuestas a la luz de los referentes conceptuales y metodológicos abordados en los tópicos anteriores.

Tiempo: 2 sesiones de 3 horas, 4 y 11 de diciembre de 2020 (Esta actividad es transversal al seminario)

7. BIBLIOGRAFÍA

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Gallardo, Aurora y Rojano, Teresa. (1988). Áreas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético - algebraico. Recherches en didactique des mathématiques. vol. 9. No. 2. p.155-188.

Janvier, Claude. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands. p. 225-239

Kieran, C. y Filloy Yague, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En: Enseñanza de las Ciencias. vol. 7(3). p.229-240.

Socas, M. Camacho, M., y otros. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid. Editorial Síntesis S. A.

El resto de bibliografía se entregará oportunamente.

Agosto de 2020.

Guiones del experimento didáctico # 2, 3 y 6:

VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA

GUION #2 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

II sesión (martes 10 y jueves 12 de mayo de 2022, 1 hora): **Conversatorio teoría objetivación de Radford y competencias en matemáticas y presentación el modelo didáctico-curricular (modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico del contenido).**

Guion de trabajo:

1. Actividad planteada: conversatorio documentos compartidos

- Preguntas orientadoras y generadoras de la discusión:
 - ¿Por qué resulta pertinente (necesario, importante) este paradigma en la EM, en la FPM, en las propuestas que tienen pensadas?
 - ¿Desde un punto de vista sociocultural, por qué o para qué se enseña matemáticas en la escuela, por qué es importante este enfoque o propósito?
 - ¿Cómo se puede introducir o tratar este enfoque en la EM, en una propuesta educativa? (mediante qué estrategias).
 - ¿Cuáles son los principales principios, o lineamientos que caracterizan los aportes de esta perspectiva en la EM, en una propuesta educativa?
 - ¿Cómo definiría la competencia en matemáticas y por qué es importante el trabajo por competencias en la EM?
 - ¿Cómo se podría relacionar o integrar en una propuesta educativa la perspectiva sociocultural de Radford con el trabajo por competencias?

2. El modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico del contenido.

- Uno de los cinco aspectos a tener en cuenta para el desarrollo de un programa educativo, trabajo de grado y/o unidad didáctica, es el modelo o enfoque. Un ejemplo de dicho aspecto es el modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico del contenido (Bedoya, 2002), el cual, por su carácter local y parcial, cada modelo impone una estructura e incluso un tipo de funcionamiento del currículo. Además, se puede considerar que sólo de este modo, resultará factible el desarrollo gradual de propuestas curriculares y de formación didáctica de los profesores de matemáticas, validadas mediante la práctica sistemática y reflexiva a través del análisis didáctico (Bedoya, 2020). En lo que sigue se muestra una estructura de un modelo local de CD&AD del contenido:
 - i. Contextos de concreción curricular, donde lo normativo, lo institucional y el aula serán puntos de análisis. Lo anterior por medio de un análisis didáctico curricular de documentos como los estándares básicos de competencias (MEN, 2006), lineamientos curriculares (MEN, 1998), los DBA en matemáticas (MEN, 2016), el proyecto educativo institucional del establecimiento educativo, entre otros.

- ii. AD de contenido, el cual Bedoya (2022) lo define como un análisis disciplinar, epistemológico, fenomenológico, histórico y representacional del contenido matemático escolar.
- iii. AD cognitivo, donde Rico (2013) muestra que dicho análisis centra su foco de atención en el aprendizaje de las matemáticas, pues permite al profesor llevar a cabo una descripción detallada de la problemática del aprendizaje de las matemáticas de un tema específico. De lo anterior que dicho aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades en los alumnos, de aquí que el presente análisis se centra en el estudiante, especialmente en los obstáculos, dificultades y errores en la comprensión de las matemáticas.
- iv. AD de instrucción, también llamado AD de medios, el cual en palabras de Rico (2013), contempla objetivos de formación que el profesor ha de plantear, orientados a la toma de decisiones cuando usa tareas escolares en el aula, es decir, que dicho análisis aborda la selección, diseño y organización de tareas y sesiones con propósitos específicos, así como los materiales, recursos y medios utilizados.

VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA

GUION #3 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

III sesión (martes 17 y jueves 19 de mayo de 2022, 1 hora): **Introducción al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente, por medio de los obstáculos, dificultades y errores para su comprensión.**

Guion de trabajo:

3. Introducción al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

- El CME de la recta tangente a una curva y su pendiente se trabaja normalmente como interpretación geométrica de la noción de derivada, es decir, posterior a la definición analítica de dicho concepto, al trabajo algorítmico y con las propiedades de la derivada, se pretende darle sentido al concepto por medio de dicha interpretación geométrica, sin embargo, se debe tener presente que, si los estudiantes no comprenden la definición analítica de derivada, mucho menos entenderán posteriormente su interpretación geométrica. Lo anterior reafirma lo expuesto por varios autores cuando mencionan que hay una falta de acercamiento visual a CME como la derivada, pues los profesores de matemáticas hacen énfasis en los trabajos de proceso algebraico y se resta importancia a los procesos visuales (Hitt 1998; 2003; Arcavi, 2003; Presmeg, 2006; entre otros).

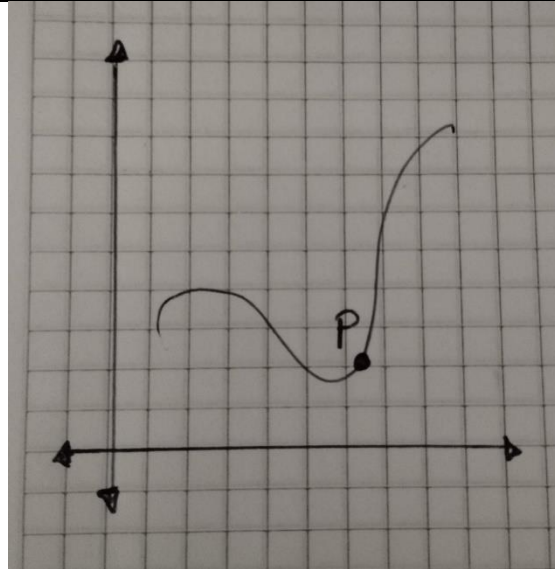


Figura 1. Gráfica de una curva y un punto P sobre ella.

4. Actividad planteada

- Teniendo en cuenta el CME de la recta tangente a una curva y su pendiente (se muestra la figura 1), mencione y explique algunos obstáculos, dificultades y/o errores en la comprensión de dicho CME. Se realiza un conversatorio frente a dicho ejercicio, teniendo en cuenta la pregunta ¿cómo obtener la recta tangente a la curva que pasa por el punto P? Lo anterior teniendo en cuenta que no se cuenta con la ecuación de la curva ni con las coordenadas del punto P.
- Se propone pensar para la próxima sesión en los fenómenos que dan sentido al CME de la recta tangente a una curva y su pendiente.

VISUALIZACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA

GUION #6 EXPERIMENTO DIDÁCTICO.

Profesores: Evelio Bedoya Moreno (Dir.) y Juan Pablo Orozco García.

VI sesión (martes 07 y jueves 09 de junio de 2022, 2 horas): **Diseño de la UDG de la recta tangente a una curva y su pendiente.**

Guion de trabajo:

5. Diseño de UD: La unidad didáctica guía (UDG).

- Basado en los aportes desde el grupo PNA, se define la unidad didáctica como una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos

específicos (Segovia y Rico, 2001, p. 87). Luego, se debe aclarar que Bedoya (2020) menciona dos categorías de unidades didácticas, una denominada unidad de análisis didáctico (UAD), y otra, denominada unidad didáctica guía (UDG), la cual se concreta teniendo en cuenta la anterior.

- En nuestro caso, el programa de formación que se está desarrollando hace las veces (o es gran parte del desarrollo) de UAD, pues es un producto elaborado a partir del modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico de contenido (realizado por el profesor-investigador) y puesta en juego en el presente programa de formación inicial de profesores de matemáticas, además que dicha UAD es diseñada por y para el docente (en este caso, para el profesor-investigador y para los profesores en formación inicial que hacen parte del curso).
- Luego, la UDG constituyen las unidades guías propuestas a partir de la UAD (es decir, a partir del programa de formación desarrollado), con el fin de ser llevadas al aula de clase, es decir que está dirigida a los estudiantes (hipotéticos, que se encuentran en educación media de alguna IE). Dicha UDG es la unidad didáctica que se presenta a los estudiantes y con la que se desarrollan las distintas actividades sobre el CME, comparte en gran parte la estructura de la UAD, sin embargo, no contiene el análisis didáctico que es propio del profesor, ni reflexiones (lo realizado hasta la sesión V del programa de formación).

6. Actividad planteada

- Teniendo en cuenta la consigna de la sesión anterior, además de lo anteriormente expuesto, se propone inicialmente diseñar o también presentar una o varias actividades encontradas en libros de texto o en la red, que puedan ser parte de una UDG sobre la recta tangente a una curva y su pendiente. Luego, se propone rediseñar las actividades encontradas inicialmente. Dicho diseño o rediseño de las distintas actividades debe estar basado en la visualización como un organizador didáctico y curricular, es decir, en todo lo trabajado durante el programa de formación, esto es el modelo local de conocimiento didáctico y análisis didáctico, el análisis didáctico cognitivo y el análisis fenomenológico.

Unidad Didáctica Guía #1:

RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y SU PENDIENTE: INTRODUCCIÓN VISUAL, GEOMÉTRICA E INTUITIVA A LA NOCIÓN DE DERIVADA UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA (parte 1: Visualización y familiarización).

Sesión 1: Exploración de saberes previos o diagnóstico.

Objetivos:

- Evaluar los conocimientos previos de los estudiantes frente a conceptos como la recta y su pendiente, recta secante y recta tangente a una curva.

- Caracterizar visualmente conceptos como la recta y su pendiente, recta secante y recta tangente a una curva.

Materiales (recursos y medios):

- Lápiz, papel y regla.

Enfoque metodológico:

- La actividad se realizará en grupos de dos, máximo tres estudiantes. Se tendrán en cuenta, tanto lo que escriban en los espacios, como las participaciones en las distintas preguntas de las actividades.

Desarrollo de las actividades:***ACTIVIDAD 1. LA RECTA Y SU PENDIENTE.***

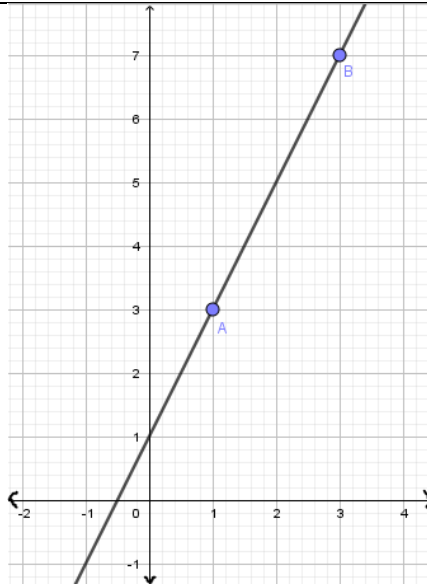
1. ¿Qué es una recta?
2. ¿Cómo se define la pendiente de una recta? ¿recuerdas la forma de hallar dicha pendiente? Escríbela.
3. En el siguiente espacio, representa una recta de la(s) forma(s) que conozcas.

--

4. ¿Recuerdas la ecuación de la recta? Escribe dicha ecuación, identificando cada una de las letras.

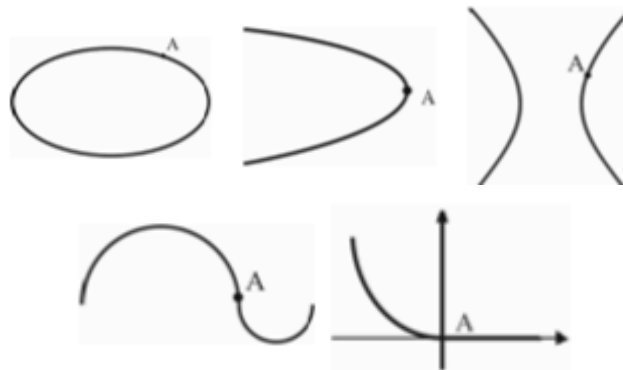
--

5. Teniendo en cuenta la siguiente gráfica, halla la pendiente y la ecuación de la recta.



ACTIVIDAD 2. RECTAS SECANTES Y RECTAS TANGENTES A DISTINTAS CURVAS⁶.

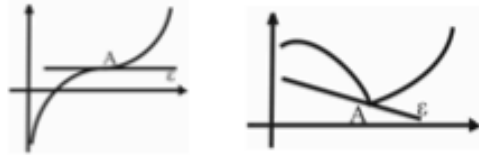
1. Trate de explicar, en palabras simples, lo que está pensando cuando escucha el término “recta secante” y el término “recta tangente”.
2. Bosqueje algunas rectas secantes que pasen por el punto “A” en las gráficas de la siguiente figura. Justifique su respuesta.



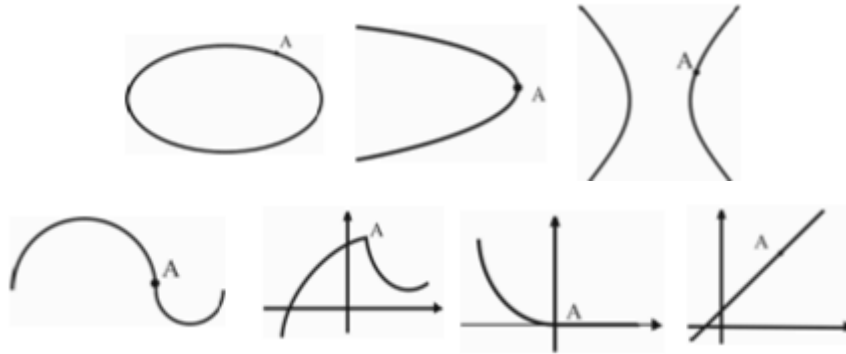
3. ¿Cuál de las siguientes rectas que están dibujadas en las siguientes figuras son rectas tangentes de la respectiva gráfica en el punto “A”? justifique su respuesta.



⁶ Algunas actividades se plantean teniendo en cuenta la investigación realizada por Biza et al (2008).



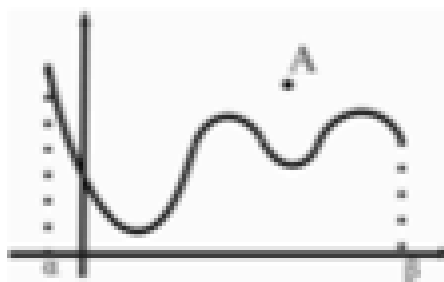
- Si existen, bosqueje las rectas tangentes en el punto “A” a las gráficas que aparecen en la siguiente figura. Justifique sus respuestas.



- En la siguiente figura, dibuje algunas (al menos dos) rectas secantes que pasen por el punto “A”.



- Dibuje tantas rectas tangentes de la curva como pueda, que pasen por el punto “A”.



Artículo sobre visualización como organizador didáctico y curricular:

LA VISUALIZACIÓN: UN ORGANIZADOR DIDÁCTICO Y CURRICULAR PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS⁷.

“El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización, y en general la ostensión, en la construcción y comunicación matemática” (Godino, et al, 2012).

Introducción

Con miras a desarrollar sentido-comprensión, la Educación Matemática, específicamente la Didáctica de las Matemáticas, trata de observar e investigar la diversidad de dificultades en la enseñanza del cálculo, para así darle un tipo de tratamiento a estas. De aquí surgen diversas investigaciones que contemplan a la visualización como el proceso capaz de mediar con dicha problemática de la enseñanza de las matemáticas. Hitt (1998; 2003) muestra algunos de los problemas que se tiene en la enseñanza del Cálculo, destacando que los profesores de matemática hacen poco uso de diferentes tipos de representación y se limitan a operaciones algebraicas dejando de un lado el contenido visual que puede ayudar en el momento de abordar distintos problemas en el aula de clase.

En palabras de Eisenberg y Dreyfus (1990), citado por Hitt (2003), se menciona que hay una tendencia a pensar que las matemáticas no son visuales, por lo cual hay una resistencia a aceptar los aspectos positivos de la visualización de los conceptos matemáticos. De aquí que autores como Zimmermann y Cunningham (1991) consideren que las matemáticas deben trabajar con elementos no estrictamente algebraicos, pues se pueden incluir elementos de

⁷ Este documento ha sido elaborado con base en la revisión y análisis documental realizado en el marco de la investigación “Conocimiento didáctico y visualización en la formación inicial de profesores de matemáticas: el caso de la recta tangente a una curva y su pendiente”, que realiza Juan Pablo Orozco García bajo la dirección del profesor Evelio Bedoya Moreno, para optar al título de Magíster en Educación de la Universidad del Valle.

carácter espacial, verbal, lógico e intuitivo, procurando implementar la visualización y restaurarla a partir de imágenes visuales.

El tema central de este documento y posterior conversatorio – la visualización en la Didáctica de las Matemáticas – tiene amplios avances en el ámbito de investigación. Reflexionar hoy en este contexto del SIE-IV, en el que estamos conjuntamente trabajando investigadores en formación y profesores, requiere volver a examinar brevemente las conceptualizaciones trabajadas y mostradas en los resultados parciales de la investigación (análisis didáctico de la visualización), así como distintas investigaciones que nos han precedido.

Algo de historia sobre visualización y su conceptualización

En matemática muchos conceptos y procesos podrían ligarse a interpretaciones visuales, lo que ha generado diversas investigaciones en relación al potencial didáctico de la visualización, la forma como ésta puede favorecer al aprendizaje y bajo qué condiciones utilizarla (Di Domenicantonio et al, 2011). A lo largo de las dos últimas décadas, distintos autores muestran que los procesos intuitivos y de visualización se están revelando como un campo de investigación enormemente interesante en sí mismo (Zimmerman & Cunningham, 1991; Giaquinto, 1994; De Guzmán, 1996; Hitt, 1998; Duval, 1999; Bedoya, 2002; Mancosu, 2005; Presmeg, 2006; Gómez-Chacón, 2012; entre otros).

Justamente Mancosu (2005), muestra que a finales del siglo XIX la visualización había caído en descredito siendo relegada a un papel secundario en las matemáticas, debido a que algunas de las afirmaciones matemáticas que parecían obvias debido a una visualización intuitiva e inmediata resultaron ser incorrectas en una inspección más cercana. Sin embargo, en las últimas dos décadas se ha renovado el interés por la visualización en la lógica y las

matemáticas como consecuencia de desarrollos en distintas áreas, incluidas la informática, las matemáticas, la Educación Matemática, la psicología cognitiva y la filosofía.

Luego Presmeg (2006), desarrolla en su artículo “Research on visualization in learning and teaching mathematics”, una síntesis de más de ciento cincuenta estudios distintos sobre el tema de la visualización en la educación matemática, mostrando que dichas investigaciones se iniciaron a fines de la década de 1970 y principios de la de 1980 y ha ido creciendo lentamente hasta que en 1990 llegó a ser reconocida como un campo importante para la Educación Matemática, pues surgieron investigaciones de desarrollo curricular con contenidos particulares, promoviendo la enseñanza con el proceso de visualización, por medio del uso de entornos tecnológicos.

Después, la autora en mención explica que en el 2000 se amplió el horizonte de la visualización en Educación Matemática incluyendo aspectos semióticos, al desarrollar investigaciones sobre el aprendizaje significativo de las matemáticas basado en la visualización como un componente esencial en los sistemas de representación dentro de los procesos de resolución de problemas. Asimismo, considera que un tema actual e importante en el campo de la Educación Matemática es ver cómo interactúa la visualización con la Didáctica de las Matemáticas, pues interpreta que dichas investigaciones se han dejado de lado. De aquí que desde el 2006 se constata la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la Educación Matemática (Gómez-Chacón, 2014).

El término visualización se usa de distintas maneras tanto de forma general, como en el contexto de las matemáticas y la Didáctica de las Matemáticas. En lo que sigue se mostrarán algunas definiciones que se le dan al término, para finalmente mostrar cómo se entiende la *visualización* en el desarrollo de la presente investigación:

Visualización es la acción y efecto de visualizar, lo cual a su vez se define como 1. Hacer visible por algún procedimiento o dispositivo lo que normalmente no se puede ver a simple vista. 2. Representar algo por medio de imágenes, después de documentarse ampliamente. 3. Formarse en el pensamiento la imagen de algo que no se tiene a la vista o de un concepto abstracto. 4. Ver la información (textual o gráfica) que se ofrece en una pantalla, monitor, visor u otro dispositivo similar (Real Academia Española, s.f.).

Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981).

La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999).

Cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático (Presmeg, 2006).

En lo que sigue, se muestra cómo se entiende *la visualización* en la presente investigación, teniendo en cuenta dos definiciones del término de una forma global (Zimmermann et al, 1991; Arcavi, 2003) y otras dos definiciones desde un aspecto matemático (De Guzmán, 1996; Mancosu, 2005). Dichas definiciones las consideramos complementarias y muy de la mano con nuestras ideas de visualización:

La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para

representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas (Zimmermann et al, 1991).

Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión (Arcavi, 2003, p. 217).

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo (De Guzmán, 1996).

La visualización generalmente se entiende de diferentes maneras, pero para los propósitos de este artículo tomaré un concepto bastante amplio incluyendo tanto la visualización por medio de imágenes mentales como las visualizaciones por medio de imágenes generadas por computadora o imágenes dibujadas en papel, p. e., diagramas, dibujos, figuras, esquemas, etc. Estos diferentes tipos de visualización pueden diferir sustancialmente, pero estoy interesado en ofrecer una caracterización de la visualización que sea lo más amplia posible (Mancosu, 2005).

De las definiciones inmediatamente anteriores que, se considera la visualización en la presente propuesta orientada hacia lo Didáctico y matemático (en términos de los dos autores últimos) como el proceso de crear en la mente (imágenes mentales), a lápiz y papel o con ayuda de tecnología, los objetos visuales, espaciales, geométricos e intuitivos de los conceptos matemáticos, tales como figuras, imágenes, diagramas, gráficas, tablas, entre otros.

Es importante aclarar, teniendo en cuenta lo expuesto por Mancosu (2005) al decir que la visualización resurgió gracias a desarrollos en distintas áreas, como la informática, las matemáticas, la Educación Matemática, la psicología cognitiva y la filosofía, que la presente investigación no se orienta en la psicología cognitiva sino en la Educación Matemática (Didáctica de las Matemáticas), tomando algunos aspectos de las matemáticas y la filosofía matemática. De ahí la definición que se asume de visualización y las distintas reflexiones que se muestran en lo que sigue del documento, como es el sentido didáctico y curricular de la visualización y algunas reflexiones finales.

La visualización como un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas.

Inicialmente Rico et al (2013), define el análisis didáctico como un método de investigación propio del campo de la Didáctica de las Matemáticas, el cual pretende fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de contenidos matemáticos específicos según la comunidad educativa y el medio escolar. De aquí que el análisis didáctico se caracterice como el resultado de la articulación y concreción en la práctica de los conocimientos didácticos pues se centra en un contenido y un contexto determinados, con miras tanto al diseño de actividades

o unidades de enseñanza-aprendizaje, como al desarrollo de proyectos curriculares, microcurriculares o de investigación. (Bedoya, 2020).

De lo anterior que, en la presente investigación se propone como elementos teórico y metodológico, articuladores y facilitadores de este análisis, la noción de organizadores del currículo (Rico, 1997). Según Bedoya (2020) el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una unidad didáctica no se puede reducir a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, pues se deben incorporar otras informaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen (Segovia y Rico, 2001). Dichas informaciones son lo que definimos como organizadores del currículo.

Por lo anterior que, los organizadores del currículo constituyen mejoras a las propuestas generales de organización disciplinar, ya que, en palabras de Bedoya (2020), la nueva concepción de currículo de matemáticas, de carácter local, sistémico y funcional, exige considerar nuevos organizadores y nuevas maneras de procesamiento y construcción de significados para el conocimiento matemático escolar, generando así la propuesta de los organizadores del currículo, cuyas características principales las resume Rico (1997) de la siguiente manera:

Vamos a llamar organizadores a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Hablamos así de organizadores del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de

reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y comprensión del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión, para producir nuevos significados. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997, p.45).

De lo anterior que, la presente propuesta se le da a la visualización la denominación y concepción de *visualización como organizador didáctico y curricular* para la formación tanto teórica como práctica de los profesores y naturalmente para la enseñanza y comprensión de las matemáticas. Esto además por la idea que los objetos matemáticos por su naturaleza abstracta tienen que ser necesariamente visualizados y de la riqueza visual, geométrica e intuitiva que esto contiene (De Guzmán, 1996), tanto en sus sentidos interno como externo, con la diferencia que en la presente propuesta (y es lo que le da el carácter de organizador didáctico y curricular) la visualización se basa o fundamenta en un proceso (local) de análisis didáctico de contenido (tratamiento didáctico de la visualización o visualización didáctica).

Finalmente, surge el concepto de *visualización como organizador didáctico y curricular* (que denominamos proceso de visualización didáctica o tratamiento didáctico de la visualización) como todo el sistema de apoyos del profesor (de tipo tecnológicos, materiales

manipulativos, papel, lápiz, pizarra, entre otros) acompañados de un discurso estructurado del mismo, que permiten generar en los estudiantes conexiones entre una noción matemática y sus distintas representaciones. Lo anterior por medio del aprovechamiento de los contenidos visuales, geométricos e intuitivos de los conceptos matemáticos que surgen de la implementación de un modelo local de análisis didáctico desarrollado en torno a un contenido matemático determinado (en nuestro caso, la recta tangente a una curva y su pendiente), buscando que el estudiante comprenda la noción matemática a tratar.

Algunas reflexiones finales

Es importante destacar el papel que está tomando en la actualidad la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de aquí el hecho de alentar al desarrollo de distintas investigaciones que muestren el papel que juega la visualización dentro de la Didáctica de las Matemáticas (Presmeg, 2006).

Atendiendo la complejidad que hay en el desarrollo de investigaciones de este tipo, que en lo que sigue se dejan algunas preguntas (preguntas que también se hace el equipo de investigación en el desarrollo de esta) con el fin de que el profesor de matemáticas, investigador, investigador en formación, lector, entre otros, pueda complementar sus ideas y conceptos frente a la visualización como un organizador didáctico y curricular:

- ¿Qué diferencias pueden aparecer al abordar la enseñanza y comprensión de algún contenido matemático escolar (p.e. la recta tangente a una curva y su pendiente) desde una perspectiva visual, espacial, geométrica e intuitiva? ¿Qué aspectos positivos y negativos pueden aparecer?

- ¿Podría repercutir o incidir esta concepción de la visualización como un organizador didáctico y curricular en sus prácticas? ¿cómo?
- ¿Qué aporta o puede aportar la visualización a la Didáctica de las Matemáticas (como disciplina científica, teórico-práctica, base de la formación y desarrollo profesional de los docentes de matemáticas)?
- ¿Cómo se pueden unificar los significados de visualización desarrollados por los matemáticos, los psicólogos y los educadores matemáticos para en términos de Presmeg (2006), poder darle estructura a una teoría general de visualización para la educación matemática?

Finalmente, se puede decir que, además de un organizador didáctico y curricular en la Didáctica de las Matemáticas y la formación de profesores de matemáticas, la visualización y el pensamiento visual y espacial aporta importantes medios (o recursos de mediación) útiles para cada concepto, contenido u objeto matemático susceptible de ser tratado visualmente y didácticamente para la enseñanza y comprensión de dicho objeto o contenido matemático. Se espera complementar dicha reflexión con el desarrollo final del proyecto de investigación.

Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.
- Bedoya, E. (2002). Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

- Boz, N. (2005). Dynamic Visualization and Software Environments. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, 4(1), 26-32.
- Di Domenicantonio, R., Costa, V., & Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 75-87.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis. *The British journal for the philosophy of science*, 45(3), 789-813.
- Gómez-Chacón, I. M. (2014). Visualización y razonamiento. *Creando imágenes para comprender las matemáticas. Atas do XXV Seminário de| Investigação em Educação Matemática*, 5-28.
- Guzmán, M. D. (1996). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis*. Pirámide.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, 10(02), 23-45.
- Mancosu, P. (2005). Visualization in logic and mathematics. In *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 13-30). Springer, Dordrecht.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Santafé de Bogotá.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemática, versión 2*. Santafé de Bogotá.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Brill Sense.

- Rahim, M. H., & Siddo, R. (2009). The use of visualization for learning and teaching mathematics. HTW Dresden.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: Diccionario de la lengua española, 23.^a ed., [versión 23.5 en línea]. <<https://dle.rae.es>> [Recuperado el 11 de abril del 2022].
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. Visualization in teaching and learning mathematics, 19, 105-119.
- Toledano, J. M. A. (2017). Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes. Pensamiento Matemático, 7(2), 65-86.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. Visualization in teaching and learning mathematics, 1-7.

Algunas fichas de caracterización (se cambian los datos básicos por XXX para preservar el anonimato):

 Facultad de Educación y Pedagogía Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas Licenciatura en Matemáticas Asignatura DdM-V: Tópicos de DdM Periodo: abril – agosto / 2022		
NOMBRE COMPLETO:	XXXXXX	
CÓDIGO:	XXXXXX	
SEMESTRE:	Octavo	
CORREO ELECTRÓNICO:	XXXXXXX@correounivalle.edu.co	
NÚMERO DE CELULAR:	XXXX	

MUNICIPIO / LUGAR DE DOMICILIO:	Cali	
ASIGNATURAS MATRICULADAS ACTUALMENTE:	Análisis matemático, Didáctica V, Filosofía de las matemáticas, Formación semillero de investigación I, Matemáticas recreativas, Razonamiento matemático.	
ASIGNATURAS DE LA LÍNEA DdM CURSADAS:	Todas las anteriores a Didáctica V	
INTEGRANTES DE SU GRUPO DE TRABAJO PARA REALIZAR PROPUESTAS CONJUNTAS:	XXXXXXXXXX	
INSTITUCIÓN DONDE ESTÁ TRABAJANDO ACTUALMENTE (CURSOS O GRADOS):		
TÍTULO ACTUAL DE LA PROPUESTA DE TRABAJO FINAL (O DEL PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO):		
PREGUNTA PROBLEMA:		
OBJETIVO GENERAL:		
OBJETIVOS ESPECIFICOS:		
HIPÓTESIS:		
RESUMEN EJECUTIVO:		
LÍNEA Y/O ÁREA DE CONOCIMIENTO / (TIPO DE PENSAMIENTO)	Línea de tecnologías digitales / Pensamiento variacional	
CONTENIDO U OBJETO MATEMÁTICO DE INTERÉS A TRABAJAR	Función cuadrática	
TUTOR(ES):		

El paradigma sociocultural... (el método socrático de la pregunta)

“Seis honrados servidores me enseñaron cuanto sé.
Sus nombres son: **cómo, cuándo, dónde, qué, quién y por qué**”
— R. Kipling

¿Por qué resulta pertinente (necesario, importante) este paradigma en la EM, en la FPM, en sus Propuestas?

¿(Desde un punto de vista sociocultural), por qué o para qué se enseña matemáticas en la escuela, por qué es importante este enfoque o propósito?

[Nota: hoy día, temas como la innovación, el desarrollo científico y tecnológico, así como el desarrollo de la inteligencia y el conocimiento científico se basan en el conocimiento matemático.]

¿Cómo se puede introducir o tratar este enfoque en la EM, en una propuesta educativa? (mediante qué estrategias)

¿Cuáles son los principales principios, o lineamientos que caracterizan los aportes de esta perspectiva en la EM, en una propuesta educativa?

¿Qué diferencias reconoce en las maneras de concebir y abordar fenómenos y objetos de estudio en un paradigma (o desde una perspectiva) sociocultural? Y ¿cómo repercutirían o incidirían estas concepciones emergentes y alternativas en sus propias concepciones y puntos de vista formativos en relación con sus prácticas?

[...]

Hacer una breve reflexión y plantear su experiencia personal al respecto de la siguiente reflexión (tesis) de Hersh:

One's conception of what mathematics is affects one's conception of how it should be presented. One's manner of presenting it is an indication of what one believes to be most essential in it... The issue, then, it is not, what is the best way to teach? But What is mathematics really about?

(Hersh, 1986, p. 13)

Algunas otras preguntas (generadoras) orientadoras para las lecturas, la reflexión personal y grupal (colaborativa) y la escritura...

Caracterizar el carácter científico e interdisciplinario de la Didáctica de las Matemáticas.

¿Qué papel juega el (o los) contexto(s) en la actividad educativa matemática?

¿Por qué, cómo y sobre qué se deben formar las y los docentes de matemáticas?

¿En qué consiste o debe consistir la actividad (práctica) matemática de un docente de matemáticas?

¿Qué aporta o puede aportar la Didáctica de las Matemáticas (DdM) (como disciplina científica, teórico-práctica, base de la formación y desarrollo profesional de los docentes de matemáticas)?

¿Qué desafíos afronta la DdM en la actualidad y el futuro próximo?

¿Qué características debería tener un buen docente de matemáticas? ¿La práctica profesional de un docente de matemáticas es o debería ser una técnica, un arte o una actividad científica?

¿Alrededor de qué tópico(s) o contenido(s) matemático(s) propone desarrollar sus propuestas (Didácticas) en este seminario (de DdM-V)? Considere de nuevo la primera pregunta de esta sección de preguntas guías u orientadoras. ¿Por qué lo considera este tópico importante o fundamental? ¿Cuál considera es su potencial formativo en el o en los grados de la escolaridad en el que propone trabajarlos?

¿Qué otras preguntas, reflexiones, hipótesis y/o conclusiones le generaron los textos que ha leído?

Algunas reseñas sobre visualización entregadas por los EPP (se cambian los datos básicos por XXX para preservar el anonimato):

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Didáctica de las Matemáticas V: Tópicos de DdM

Profesores: Evelio Bedoya / Juan Pablo Orozco

Estudiantes: xxx Johana xxx / xxx David xxx

La visualización

En el campo de la educación matemática, la visualización anteriormente no se consideraba como un proceso que permite la comprensión de los objetos matemáticos, dado que se pensaba que esta afectaba la rigurosidad matemática. Sin embargo, desde nuestra experiencia como estudiantes y monitores hemos percibido que la visualización es un herramienta que facilita el entendimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos, principalmente en el cálculo, ya que al reflexionar sobre los cursos de cálculo diferencial e integral hemos identificado que nuestra experiencia de aprendizaje en cada curso fue diferente debido a las herramientas utilizadas por las docentes en cada curso.

En cálculo diferencial, el enfoque que tenía la docente era promover la mecanización, pues se presentó de manera geométrica la noción de derivada como recta tangente a la curva, pero, no se le dió mayor relevancia. Posteriormente, se presentaron las reglas de derivación, la relación entre la derivada y la continuidad de funciones, para luego desarrollar ejercicios. Durante el proceso de desarrollo de los ejercicios, no solo se pedía resolver derivadas, sino que se pedía graficar la recta tangente en los puntos sugeridos, al igual que el hallar parámetros que hacían válida la relación. Esto nos permitió percatarnos del sentido que tenía el hallar la derivada y su interpretación en el plano, sin embargo, a lo largo del curso identificamos que a los demás compañeros se les dificultó encontrar este sentido, dado que la

docente no promovía herramientas que ayudarían a la visualización del objeto.

Por el contrario, en cálculo integral, el enfoque que tenía la docente era promover la comprensión de los objetos de estudio por medio de las representaciones gráficas y geométricas, pues a partir de una explicación intuitiva sobre el área y lo que esta representa gráficamente, se dio paso a explicar de manera formal y gráfica que es el área bajo la curva,

lo cual nos permitió comprender qué es lo que calculamos realmente al realizar integrales o al utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Por otro lado, al tener la oportunidad de ser monitores, principalmente en las asignaturas de matemáticas, hemos tratado de ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos matemáticos haciendo uso de diferentes tipos de representaciones semióticas, del significado de las mismas y cómo estas se pueden relacionar a su vez con las representaciones de otros conceptos. Además, se promueve que los estudiantes logren hacer un sistema colores, dado que a lo largo de nuestra experiencia consideramos que los colores ayudan a diferenciar distintos aspectos en un mismo registro de representación, por ejemplo, para sacar las partes de un conjunto con n elementos, se hace uso de un color para representar los elementos del conjunto y otro color diferente para representar los corchetes de los subconjuntos del conjunto de partes.

De esta manera, consideramos que la visualización juega un papel importante, dado que particularmente en la derivada, el interactuar entre las distintas representaciones, permite identificar de manera notoria el incremento de cada punto sobre la gráfica. Por lo tanto, podría esperarse que los estudiantes creen una noción de derivada en la que gráficamente comprendan que es un incremento puntual y en el procedimiento un

incremento numérico.

De acuerdo a lo anterior y apoyados en la definición de diferentes autores, consideramos que la visualización es la acción de crear, relacionar, interpretar, usar y reflexionar sobre diferentes representaciones semióticas o mentales de un objeto matemático, sean estas a lápiz y papel o por medio de ambientes de geometría dinámica, con la cual se puede lograr una comprensión de los objetos matemáticos, ya que la principal dificultad que se tiene en matemáticas para comprender se debe a que no se puede acceder a los objetos manera tangible, es por esto que existe la necesidad de hacer uso de recursos que promuevan la visualización como base para el desarrollo del pensamiento matemático.

Referencias

Llorens, J. (1999, agosto). Visualización de la recta tangente a una curva. Educación Matemática, (11 - 2), 120-127.

Orozco, J. La visualización: un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas. (Documento en construcción).

Universidad Del Valle

Facultad De Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

Didáctica V: Tópicos

Profesores: Evelio Bedoya - Juan Pablo Orozco García

Fecha: 05/07/22

Reseña - Ensayo

Integrantes:

Camila Xxx 2017xxxxx-3492

Felipe Xxx 2017xxxxx-3492

Camilo Xxx 2017xxxxx-3492

¿Qué papel juega la visualización en el campo de la DdM?

Antes de hablar del papel de la visualización en el campo de la DdM es importante aclarar que la didáctica de las matemáticas trata de observar e investigar las diferentes dificultades que se presentan en la enseñanza del cálculo, esto en el fin de implementar un tipo de tratamiento que nos permita mejorar estas dificultades. Es aquí donde se contempla a la visualización como un proceso posiblemente capaz de mejorar las dificultades que se presentan.

Ahora bien, a través del tiempo la visualización ha tomado diferentes significados como: “Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981). La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999).” (Orozco, 2022) sin embargo en este caso se va a tomar en cuenta el concepto más amplio que incluye tanto la visualización por medio de imágenes mentales como las visualizaciones por medio de imágenes generadas por computadora o imágenes dibujadas en papel, diagramas, dibujos, etc.

Estas definiciones de visualización son importantes para establecer la visualización

como un organizador didáctico y curricular, pues según Bedoya (2020) el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una unidad didáctica no se puede reducir a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, pues se deben incorporar otras informaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen.

Podemos notar por medio del siguiente ejemplo que traemos a colación del texto “Visualización de la recta tangente a una curva” (1999) como en algunos casos la visualización, aunque cumple en cierta medida en la superación de dificultades en el proceso de aprendizaje matemático es necesario que la parte teórica también esté bien definida y no genere problemas de interpretación al armonizar con el componente visual.

En relación a ello, unas de las dificultades que se manifiestan en estudiantes de un primer curso de análisis en la universidad es que consideren en la interpretación geométrica de la derivada (como en la figura) que la recta no es tangente, puesto que corta a la curva y por lo tanto la recta es secante. pero cuando se les pide que halle la derivada de la función $y = x^3$ en $x = 0$, no supondrán ningún problema utilizar procesos algebraicos para hallar una solución.

El origen de esas contradicciones se debe a la omisión de la definición explícita de recta tangente a una curva por un punto y por la insistencia excesiva en los aspectos mecánicos o algebraicos relacionado con el concepto de derivada.

En este sentido se hace necesario una redefinición explícita de la recta tangente previamente si se quiere utilizar esta definición para explicar el concepto de

derivada, y es ahí donde la Visualización cumple un papel fundamental como instrumento eficaz para la mejora en la comprensión de conceptos abstractos y aún más potente cuando se utilizan medios tecnológicos como software de geometría dinámica.

Con esta perspectiva geométrica que permite estos medios tecnológicos se puede proponer formas alternativas de introducir el concepto de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos, gracias a la facilidad que brindan para representar gráficamente toda clase de curvas, la aplicación de zoom permite visualizar desde diferentes escalas el comportamiento local de las gráficas, también permite que los estudiantes interactúen con los objetos de forma dinámica y que ellos mismos desvelen sus propiedades.

En general la Visualización potenciado por medios tecnológicos “aporta importantes medios (o recursos de mediación) útiles para cada concepto, contenido u objeto matemático susceptible de ser tratado visualmente y didácticamente para la enseñanza y comprensión de dicho objeto o contenido matemático.”

Referencia Bibliográfica.

- Foster, J. (1999). Visualización de la recta tangente a una curva. Educación matemática, 11(2), 120-127.
- García, A., García, F., Rodríguez, G., & de la Villa, A. La visualización en la obra de Miguel de Guzmán. SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS, 12.
- Orozco J. (s. f.) LA VISUALIZACIÓN: UN ORGANIZADOR DIDÁCTICO Y CURRICULAR PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Reseña-Ensayo: Una mirada acerca de la importancia del enfoque didáctico de la visualización.

Xxxxx. Cod:18xxxxx

Xxxxxx. Cod: 18xxxxx

La visualización ha venido formando una nueva línea de investigación que estudia la capacidad de los seres humanos para procesar representaciones visuales; para Burkhard (2005) es llamada “Visualización del Conocimiento”, cuando este conocimiento se utiliza desde un enfoque didáctico y con propósitos didácticos por parte del profesor de matemáticas; para Bedoya (2002) este proceso es llamado “visualización didáctica” y lo considera parte del conocimiento didáctico del contenido y una de las competencias didácticas profesionales del profesor de matemáticas.

De esta manera, dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la visualización es considerada como uno de los procesos más importantes al momento de enfrentarse con el desarrollo de propuestas de clase y conceptos matemáticos para su adecuada comprensión. Además, se podría ver la visualización como un medio que facilita la resolución de problemas, la creación de situaciones problema y la creación de conocimiento matemático y geométrico, entre otros.

Ahora bien, la integración del proceso de visualización da la posibilidad de interpretar gráficas, imágenes, tablas, diagramas etc., lo que permite que tanto el profesor como el estudiante profundicen en el concepto matemático que se esté trabajando y de igual manera facilitando la comprensión de este, es decir que el pensamiento visual dentro de la didáctica aporta importantes medios que son útiles para trabajar cada concepto sea a papel y lápiz, o con herramientas digitales. Por tanto, la visualización incluye el proceso de

construir y transformar tanto el imaginario visual mental, como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático. (Presmeg, 2006).

Por un lado, la visualización desde un enfoque didáctico permite aprovechar las diversas tecnologías digitales con sistemas de representación variada, brinda posibilidades dinámicas e interactivas lo cual permite realizar (profesor-estudiante) diversas representaciones de un objeto/conocimiento o proceso matemático y considerar y/o deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y observación completa; por otro lado, el material concreto o manipulativo es importante porque se centra en un micro-mundo donde el estudiante puede acceder y desarrollar el pensamiento visual y a la manipulación física del material, por lo tanto, la visualización didáctica dentro de la enseñanza y comprensión permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares.

En cuanto a la consideración de la visualización desde la Didáctica de las matemáticas como un organizador y curricular es importante, ya que para diseñar y poder desarrollar una propuesta de aula se deben incluir o tener en cuenta diferentes aspectos que brindan riqueza para la enseñanza del conocimiento matemático, estos aspectos de distintas formas contienen mejoras a dichas propuestas que podrían facilitar y adecuar una concepción de un conocimiento cualquiera desde el pensamiento visual.

Además, es necesario resaltar que los profesores de matemáticas en formación deben tener conocimiento y aceptar lo esencial que es la visualización didáctica; es por esto que se considera que el generar en los estudiantes reflexiones didácticas acerca de cómo se aborda un concepto matemático fundamental es un hecho necesario que no se puede negar

y una salida a esto tiene que ver con el uso de procesos de visualización por parte del profesor con propósitos didácticos.

De acuerdo a lo anterior, un aspecto importante y que no debe pasar por alto es entonces, el aporte de la visualización a la Didáctica de las matemáticas, que se puede observar desde una perspectiva de competencia, es decir, considerar la visualización como proceso de comprensión y enseñanza de las matemáticas, plasmada como un tipo de representaciones que permite dar sentido a algunas ideas que se relacionan con el contenido u objeto matemático que se quiere trabajar.

Por ejemplo, distintos estudios en didáctica de las matemáticas, realizadas por diferentes investigadores, han mostrado que el proceso de visualización matemática puede ser implementado como un medio importante para el desarrollo de la intuición, de representaciones internas y por lo tanto para la comprensión y el aprendizaje significativo de muchos conceptos matemáticos en general, como, por ejemplo: el aprendizaje de los conceptos fundamentales del cálculo.

Es decir, considerando la visualización en el aprendizaje y su implementación en el tópico de derivada (la recta tangente a una curva), replantear las propuestas de clase, en donde se reflexione y se acepte que la resolución de un problema se potencializa a través de la visualización; se propone la idea de que las representaciones gráficas de los conceptos matemáticos abren espacio al desarrollo de la comprensión por parte del estudiante. Por ejemplo, hacer una presentación del concepto por medio de una gráfica que sea plasmada en ambientes digitales, esto se relaciona con la percepción de representación algebraica como base inicial e importante en la concepción del estudiante, de igual manera el estudiante debe hacer una exploración de dicho instrumento y esto le da la posibilidad de

generar la manipulación del concepto como tal y es así como se genera un balance y/o equilibrio entre lo visual y los procesos algebraicos.

Finalmente, la visualización dentro de nuestro tópico “área como magnitud” también se aborda desde una perspectiva importante, teniendo en cuenta las dificultades, errores y obstáculos que se presentan para su comprensión; por ejemplo, el error que se produce por el uso no apropiado del mismo sentido visual, es decir lo que sucede al momento de que el aprendiz se enfrenta a la comparación de superficies haciendo uso de su pensamiento visual. Para esto se puede no solo proponer actividades que estén inspiradas en un ambiente dinámico en donde el estudiante tenga la posibilidad explorar y apropiarse del concepto como tal por medio de las representaciones de dicho objeto, sino presentar actividades que se puedan realizar por medio del material concreto, lo que da la oportunidad al estudiante y abre espacio a la manipulación y el uso de su pensamiento visual, para que pueda por si mismo generar una concepción y consideración de propiedades de dicho tema.

Referencias

- Orozco, J.P. (2021). La visualización: Un organizador didáctico y curricular para la formación del profesor de matemáticas.
- Guzmán, M. D. (1996). El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis. Pirámide.
- Llorens, J.L (1999). Visualización de la recta tangente a una curva. Notas de clase. Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia. (pp. 120-127)
- Bedoya, E. (2002). Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Burkhard, R. (2005). Knowledge Visualization: The Use of Complementary Visual Representations for the Transfer of Knowledge: A Model, a Framework, and Four New Approaches (Doctoral dissertation, Swiss Federal Institute for Environmental Science and Technology).

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In Handbook of research on the psychology of mathematics education (pp. 205-235). Brill Sense.