
El problema del espectro primo para MV-álgebras y l -grupos abelianos

*Trabajo de grado
para optar al título de:*
MATEMÁTICO

Autor:
Alexánder Pérez

Directora:
Luz Victoria De La Pava, Ph. D.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias naturales y exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali



10 de octubre de 2024

Resumen

Este trabajo es una monografía en la cual se estudian con detalle la teoría y los resultados presentados en el artículo, *The spectrum problem for abelian l -groups and MV-algebras* de A. Di Nola y G. Lenzi, 2020, [14]. Se presentan los conceptos teóricos básicos y necesarios sobre MV-álgebras y l -grupos. Se estudia la topología del espectro primo tanto de las MV-álgebras como de los l -grupos. Se introducen nociones adicionales como los retículos de Belluce, las MV-álgebras y los l -grupos libres, poliedros y conos, con el objetivo de obtener una caracterización topológica de los espectros primos estudiados.

En el caso de las MV-álgebras, el Teorema 2.8.4 establece que un espacio es el espectro primo de una MV-álgebra, si y solamente si, es espectral y es una imagen epimorfa cerrada del retículo de poliedros en $[0, 1]^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para los l -grupos, el Teorema 3.6.4 indica que un espacio coincide con el espectro primo de algún l -grupo abeliano, si y solamente si, es espectral generalizado y es una imagen epimorfa cerrada del retículo de conos en $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, se presentan dos funtores entre las categorías de MV-álgebras y l -grupos abelianos con unidad fuerte, con los cuales se demuestra que forman una equivalencia categórica y en consecuencia, estas dos estructuras algebraicas representan esencialmente los mismos objetos matemáticos.

Palabras clave: MV-álgebra, l -grupo, espectro primo, retículo de Belluce, MV-álgebra libre, función de McNaughton, poliedro, l -grupo libre, cono, funtor de Mundici.

Agradecimientos

Este trabajo es el resultado del apoyo y la contribución de muchas personas que, de una forma u otra, han estado involucradas en su desarrollo. De manera especial, quiero ofrecer mis más sinceros agradecimientos:

A mis padres, por brindarme una excelente educación y numerosas oportunidades. Gracias a su respaldo, he superado desafíos que de otra manera hubieran sido mucho más difíciles.

A mi hermana, Luz Angélica, por ser una fuente constante de inspiración para mejorar cada día. Su ejemplo y cariño han sido fundamentales en mi camino.

A la profesora Luz Victoria, por sugerirme este trabajo y por su orientación. Valoro la confianza que ha mostrado en mis capacidades y su ayuda para llevar adelante este proyecto.

Al profesor Diego Velasco, por sus observaciones y sugerencias, que contribuyeron de manera significativa a complementar y mejorar este trabajo.

Al grupo de la LBC, por los momentos que hemos vivido juntos a lo largo de los años. Este trabajo es solo un logro más de los muchos que nos esperan a todos.

Al grupo de Omega, por las experiencias compartidas durante la carrera. Pronto todos seremos colegas y nuestros esfuerzos se verán recompensados.

Índice general

1	Preliminares	13
1.1	Retículos	13
1.2	Topología	18
1.3	Categorías	22
2	MV-álgebras	29
2.1	Estructura reticular de una MV-álgebra	37
2.2	Ideales	43
2.3	El espectro primo de una MV-álgebra	51
2.4	El retículo de Belluce de una MV-álgebra	63
2.5	Relaciones entre las categorías MV , BDL y Top	71
2.6	MV-álgebras libres y funciones de McNaughton	74
2.7	Poliedros	83
2.8	Caracterización del espectro primo de las MV-álgebras	89
3	<i>l</i>-grupos abelianos	95
3.1	<i>l</i> -ideales	100
3.2	El espectro primo de un <i>l</i> -grupo abeliano	104
3.3	El retículo de Belluce de un <i>l</i> -grupo abeliano	109
3.4	<i>l</i> -grupos libres	111
3.5	Conos	115
3.6	Caracterización del espectro primo de los <i>l</i> -grupos abelianos	118
4	Equivalencia entre las categorías MV y UAG	121
4.1	El funtor Γ	121
4.2	El funtor Ξ	122
4.3	Equivalencia entre MV y UAG	129
5	Aplicaciones	137

ÍNDICE GENERAL

6 Aportes relevantes	141
Bibliografía	143

Introducción

En el año 1969, M. Hochster presentó en [19] un resultado sumamente interesante:

Un espacio topológico es homeomorfo al espectro primo de un anillo conmutativo, si y solo si, es espectral.

Este resultado revela una conexión significativa entre el álgebra y la topología, lo que dio paso al planteamiento de este mismo para otras estructuras algebraicas. Particularmente, en 2011, D. Mundici planteó en [26] una serie de preguntas abiertas, entre las cuales se cuestionaba de manera similar si existían condiciones suficientes y necesarias para que un espacio topológico fuera homeomorfo al espectro primo de una *MV-álgebra* (multivalued algebra), un tipo de álgebra definida en 1958 por C. C. Chang en [10] con el fin de construir una contraparte algebraica para la lógica de Lukasiewicz (lógica multivaluada), de manera similar a como G. Boole había establecido la relación entre la lógica clásica y un caso particular de álgebra booleana un siglo atrás.

Mundici también demostró en el año 1986 en [26] que las *MV-álgebras* tienen una relación categórica importante con los *l-grupos* (lattice ordered groups), estructuras algebraicas introducidas inicialmente en 1940 por G. Birkhoff en [6] durante sus investigaciones sobre los retículos y su conexión con diferentes campos de estudio, especialmente con la teoría de conjuntos, la probabilidad y el álgebra. Por esta razón, se planteó la misma pregunta para los *l-grupos*. El problema se denominó *el problema del espectro primo*.

En el año 2020, los matemáticos G. Lenzi y A. Di Nola publicaron en [14] la respuesta a este problema, y en este trabajo se presenta, de forma detallada, la base teórica requerida para poder comprender el desarrollo expuesto por ellos. El primer capítulo de preliminares presenta varios conceptos fundamentales útiles para los temas posteriores, que son retículos, topología y teoría de categorías, suponiendo que el lector ya está familiarizado con la teoría de grupos. El siguiente capítulo se centra en las *MV-álgebras*, estudiando detalladamente el espectro primo de estas estructuras y mostrando cómo construir un

retículo asociado a cada una, denominado el *retículo de Belluce*. Se introducen paralelamente cuatro funtores que son Spec , $K(\text{Spec})$, β , Id_c , y desde el punto de vista categórico se demuestra que

1. Los funtores β , $K(\text{Spec})$, Id_c que van de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **BDL** de retículos distributivos y acotados, son naturalmente isomorfos.
2. Los funtores Spec_{MV} y $\text{Spec}_{\text{BDL}} \circ \beta$ que van de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **Top** de espacios topológicos, son naturalmente isomorfos.

(La propiedad de que los funtores $K(\text{Spec})$, β , Id_c representen esencialmente la misma acción fue planteada en [1] y en este trabajo se ofrece la prueba de ello.)

Posteriormente, se describen las MV-álgebras libres, las cuales son un caso particular de estas estructuras que satisfacen un tipo de propiedad universal; y se presenta el concepto geométrico de poliedro. Estos elementos son cruciales para abordar el problema del espectro primo. Como resultado principal de este capítulo, se tiene:

Teorema. *Un espacio topológico X es el espectro primo de una MV-álgebra, si y solo si,*

1. X es espectral.
2. Existe un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

En el tercer capítulo, se abordan las segundas estructuras algebraicas, los l -grupos abelianos. La solución al problema en este caso requiere las mismas nociones que en el capítulo anterior, con la diferencia de que aquí los objetos geométricos a considerar son conos. En ese sentido, también se tienen los mismos funtores e isomorfismos naturales entre ellos que se mencionaron antes, siendo definidos sobre la categoría **UAG** de l -grupos abelianos con unidad fuerte. El resultado más importante de este capítulo es:

Teorema. *Un espacio topológico X es el espectro primo de una l -grupo abeliano, si y solo si,*

1. X es espectral generalizado.
2. Existe un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

En el cuarto capítulo, se presenta la contrucción de manera específica de dos funtores, Γ y Ξ , entre las categorías **MV** de MV-álgebras y **UAG** de l -grupos abelianos con unidad fuerte, con los que se obtiene consecuentemente:

Teorema. *Las categorías **MV** y **UAG** son equivalentes.*

Lo anterior precisa la razón por la cual se estudian las MV-álgebras y los l -grupos abelianos a la par, puesto que guardan una correspondencia esencial entre sí.

Finalmente, el último capítulo presenta algunas aplicaciones de estas estructuras algebraicas, así como investigaciones y resultados obtenidos en los últimos años.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo integral de este trabajo, resultará útil hacer mención de ciertos conceptos y resultados sobre teoría de retículos, topología y categorías, ya que constituyen una parte fundamental de la base teórica necesaria. Se asumirá que la teoría de grupos es conocida por el lector.

1.1. Retículos

Los retículos conforman una estructura matemática estrechamente ligada a las dos estructuras algebraicas discutidas en los siguientes capítulos, las *MV-álgebras* y los *l -grupos*.

Definición 1.1.1. Un **retículo** $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un conjunto $L \neq \emptyset$ junto con dos operaciones binarias $\vee, \wedge$ que satisfacen las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in L$:

$$(i) \quad x \vee y \approx y \vee x \quad y \quad x \wedge y \approx y \wedge x. \quad (\text{Conmutatividad})$$

$$(ii) \quad x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z \quad y \quad x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z. \quad (\text{Asociatividad})$$

$$(iii) \quad x \vee x \approx x \quad y \quad x \wedge x \approx x. \quad (\text{Idempotencia})$$

$$(iv) \quad x \wedge (x \vee y) \approx x \quad y \quad x \vee (x \wedge y) \approx x. \quad (\text{Absorción})$$

Se utiliza el símbolo $\approx$ para señalar que las expresiones a ambos lados de este representan lo mismo, aunque su interpretación depende del contexto, lo cual puede evidenciarse en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con $\vee$ definido como el mínimo común múltiplo y $\wedge$ como el máximo común divisor, para cada par de elementos en $\mathbb{N}$, conforma un retículo. En este caso, $\approx$ simboliza la igualdad.

Ejemplo 1.1.3. El conjunto de las proposiciones en la lógica clásica, considerando $\vee$ como el conector disyunción y $\wedge$ como el conector conjunción, componen un retículo. Aquí, $\approx$ representa la equivalencia lógica entre proposiciones.

En adelante, se usará el símbolo $=$ en lugar de $\approx$ para simplificar la notación.

En algunos textos como [9], el concepto de retículo se aborda de la siguiente manera.

Definición 1.1.4. Un conjunto parcialmente ordenado (o poset, del inglés *partially ordered set*) $\langle L, \leq \rangle$ es un **retículo**, si para cada par $a, b \in L$, los elementos

$$\begin{aligned} \sup\{a, b\} &:= \min\{c \in L \mid a \leq c, b \leq c\}, \\ \inf\{a, b\} &:= \max\{d \in L \mid d \leq a, d \leq b\}, \end{aligned}$$

existen en L .

Como es de esperar, las definiciones 1.1.1 y 1.1.4 son equivalentes. En efecto, si $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo como en la Definición 1.1.1, se construye el orden parcial $\leq$ así:

$$a \leq b, \text{ si y solo si, } a = a \wedge b, \text{ si y solo si, } b = a \vee b.$$

En sentido contrario, si $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo como en la Definición 1.1.4, se definen las operaciones $\vee, \wedge$ como:

$$a \wedge b := \inf\{a, b\} \text{ y } a \vee b := \sup\{a, b\}.$$

Observación 1.1.5.

- (1) Dado un retículo $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$, existe otro retículo asociado $\mathbf{L}^{op} = \langle L, \vee_{op}, \wedge_{op} \rangle$ denominado **retículo dual** (también llamado opuesto), donde el conjunto subyacente es el mismo y las operaciones están definidas así:

$$a \vee_{op} b := a \wedge b, \quad a \wedge_{op} b := a \vee b.$$

- (2) Si L es un conjunto y $\vee$ es una operación binaria en L cumpliendo las propiedades de conmutatividad, asociatividad e idempotencia, se dice que L es un **join-semiretículo**. Claramente, todo retículo es un join-semiretículo.
- (3) Un retículo L se denomina **0-retículo**, si posee un elemento mínimo, denotado por 0 ; y se dice que es **acotado**, si tiene mínimo y máximo.

- (4) Un tipo particular de retículo son los retículos distributivos, en los cuales se cumple que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ y también $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para cada terna a, b, c en el retículo. Sin embargo, estas igualdades son equivalentes, por lo que en la práctica, es suficiente demostrar solo una de las dos para determinar si un retículo es distributivo o no.
- (5) Un elemento a de un retículo L se dice que es **compacto**, si para cualquier subconjunto $A = \{x_j \mid j \in J\}$ de L tal que $\bigvee A$ existe en L y también $a \leq \bigvee A$, existe $B \subseteq A$ finito de manera que $a \leq \bigvee B$. La observación 2.2.6 ilustra a manera de ejemplo cuáles son los elementos compactos del retículo de ideales de una MV-álgebra.

Ejemplo 1.1.6. Para todo conjunto X , se tiene que $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$ es un retículo distributivo, además de ser un 0-retículo dado que $\emptyset$ es el elemento mínimo.

Naturalmente, se introducen las funciones que conservan la estructura de retículo, las cuales son conocidas como *homomorfismos de retículos*.

Definición 1.1.7. Dados dos retículos $\langle L_1, \vee_{L_1}, \wedge_{L_1} \rangle$, $\langle L_2, \vee_{L_2}, \wedge_{L_2} \rangle$, una función $f : L_1 \rightarrow L_2$ se dice que es un **homomorfismo de retículos**, si para cada $a, b \in L_1$, se tiene que:

$$(i) \quad f(a \vee_{L_1} b) = f(a) \vee_{L_2} f(b).$$

$$(ii) \quad f(a \wedge_{L_1} b) = f(a) \wedge_{L_2} f(b).$$

Si L_1 y L_2 son retículos considerados como posets, entonces una función $f : L_1 \rightarrow L_2$ es un **homomorfismo de retículos** si $a \leq_{L_1} b$ implica $f(a) \leq_{L_2} f(b)$.

Si f es inyectivo (sobreyectivo), se denomina **monomorfismo** (**epimorfismo**) de retículos. En el caso en que f sea una biyección, es un **isomorfismo**, los retículos L y M se dicen **isomorfos** y se escribe $L \cong M$.

Cuando no haya lugar a ambigüedades, se omitirán los subíndices de las operaciones y del orden.

Ejemplo 1.1.8. Los conjuntos $L = \{a, b\}$ y $M = \{c, d, e\}$, ordenados como $a \leq b$ mientras que $c \leq d \leq e$, son muestra de 0-retículos. Además, es inmediato que la función $f : L \rightarrow M$ definida como $f(a) = d$, $f(b) = e$ es un homomorfismo de retículos.

Como puede evidenciarse en el Ejemplo 1.1.8, un homomorfismo entre 0-retículos no siempre preserva el elemento mínimo, lo cual sí ocurre en el caso del elemento neutro en los homomorfismo de grupos. En general, si un homomorfismo $f : L \rightarrow M$ entre 0-retículos satisface $f(0_L) = 0_M$, entonces f se denomina **0-homomorfismo**.

Definición 1.1.9. Un homomorfismo $f : L_1 \longrightarrow L_2$ entre join-semirretículos es una función tal que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ para cada par $a, b \in L_1$, y es **cerrado**, si para cualesquiera $a_0, a_1 \in L_1$ y $b \in L_2$ de manera que $f(a_0) \leq f(a_1) \vee b$, existe $x \in L_1$ que cumple $a_0 \leq a_1 \vee x$ y $f(x) \leq b$.

Note que la condición de ser cerrado el homomorfismo entre join-semirretículos f puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a_0, a_1 \in L_1 \text{ y } b \in L_2 \text{ de manera que } f(a_0) \vee f(a_1) \vee b = f(a_1) \vee b, \\ &\text{entonces existe } x \in L_1 \text{ de manera que } a_0 \vee a_1 \vee x = a_1 \vee x \text{ y } f(x) \vee b = b. \end{aligned}$$

Esto indica que, intuitivamente, siempre que se tenga una relación entre las imágenes bajo f de dos elementos del dominio y un elemento del codominio, dada por la igualdad $f(a_0) \vee f(a_1) \vee b = f(a_1) \vee b$, se puede encontrar un elemento en el dominio que permita mantener una relación similar dentro del dominio mismo. Específicamente, se puede encontrar un elemento x de manera que la combinación $a_0 \vee a_1 \vee x$ se reduzca a $a_1 \vee x$. Además, se garantiza que b sea mayor o igual a la imagen de este elemento x bajo f . En otras palabras, no solo se encuentra un elemento que mantiene la relación deseada en el dominio, sino que también se asegura que su imagen no exceda el valor b en el codominio.

Ejemplos de homomorfismos entre join-semirretículos se presentan en los ejemplos 2.8.7 y 3.6.5.

En los retículos se presentan ciertos subconjuntos que tienen algunas características interesantes, tal es el caso de los *subretículos* e *ideales*.

Definición 1.1.10. Sea L un retículo. Un conjunto $I \subseteq L$ se dice que es un **subretículo** si $a \vee b, a \wedge b \in I$ para cualquier par $a, b \in I$. Por otra parte, I se denomina **ideal** si satisface:

- (i) Si $a \in L, b \in I$ y $a \leq b$, entonces $a \in I$.
- (ii) Si $a, b \in I$, entonces $a \vee b \in I$.

Además, se dice que el ideal I es **primo**, si dados $a, b \in L$, $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$. La colección de los ideales primos de L se conoce como el **espectro primo** de L y se denota por $\text{Spec}(L)$.

Note que todo ideal de un retículo es también subretículo, pero la afirmación recíproca no siempre es cierta, como se expone en el Ejemplo 1.1.13.

Ejemplo 1.1.11. Dado un grupo G , el conjunto $S(G)$ de todos los subgrupos de G es un retículo donde para cada $H, K \in S(G)$ se tiene que

$$H \vee_{S(G)} K := \langle H \cup K \rangle, \quad H \wedge_{S(G)} K := H \cap K.$$

donde $\langle H \cup K \rangle$ denota el subgrupo generado por $H \cup K$, el cual es el menor subgrupo que lo contiene. Por otra parte, el conjunto $N(G)$ de todos los subgrupos normales de G también es un retículo, con las operaciones definidas como:

$$N_1 \vee_{N(G)} N_2 := N_1 N_2 = \{n_1 n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}, \quad N_1 \wedge_{N(G)} N_2 := N_1 \cap N_2.$$

Es evidente que las operaciones $\wedge_{S(G)}$ y $\wedge_{N(G)}$ coinciden sobre $N(G)$ y no es difícil ver que ocurre lo mismo con las operaciones $\vee_{S(G)}$ y $\vee_{N(G)}$. De esta manera, se tiene que $N(G)$ es un subretículo de $S(G)$.

Ejemplo 1.1.12. Para cada retículo L y $a \in L$, el conjunto $I_a := \{b \in L \mid b \leq a\}$ es un ideal de L . En particular, estos tipos de ideales corresponden a los ideales principales de L , esto es, I_a es el menor ideal de L que contiene al elemento a .

Ejemplo 1.1.13. En el retículo $L = \{a, b, c, d\}$ con $a \leq b \leq d$ y también $a \leq c \leq d$, sin ser comparables b y c , se tiene que L posee 16 subconjuntos y una revisión rápida muestra que solamente 5 de estos, son ideales primos de L . Específicamente,

$$\text{Spec}(L) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, L\}.$$

Adicional a esto, observe que $L' := \{a, b, d\}$ es un subretículo de L , pero no es un ideal puesto que $c \leq d$ y $c \notin L'$.

Definición 1.1.14. Dado un retículo $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, una relación de equivalencia $\sim$ sobre L se dice que es una **congruencia** si para cualesquiera $a, b, c, d \in L$ que satisfacen $a \sim b$ y $c \sim d$, se tiene que $(a \vee c) \sim (b \vee d)$ y también $(a \wedge c) \sim (b \wedge d)$.

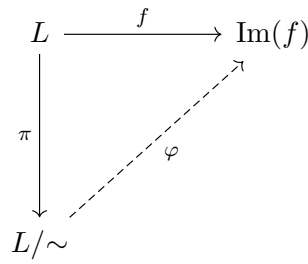
Dada una congruencia $\sim$ sobre un retículo $\langle L, \vee_L, \wedge_L \rangle$, el conjunto $L/\sim := \{[a] \mid a \in L\}$ de clases de equivalencia también es un retículo, donde las operaciones están definidas como:

$$[a] \vee_{L/\sim} [b] := [a \vee_L b], \quad \text{y} \quad [a] \wedge_{L/\sim} [b] := [a \wedge_L b].$$

Cuando no se presentan ambigüedades, es usual omitir los subíndices.

El siguiente teorema es una versión para retículos de un resultado fundamental que se presenta en diversas estructuras algebraicas.

Teorema 1.1.15. (Primer teorema de isomorfismos para retículos) Si $f : L \longrightarrow M$ es un homomorfismo de retículos, entonces el conjunto $\ker(f) := \{(a, b) \in L \times L \mid f(a) = f(b)\}$ determina una congruencia $\sim$ sobre L y la función $\varphi : L/\sim \longrightarrow \text{Im}(f)$ con $\varphi([a]) := f(a)$ es un isomorfismo de retículos.



(En este caso, π denota el epimorfismo de retículos definido como $\pi(a) = [a]$.)

Demostración. Es fácil ver que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia, mientras que para cualesquiera $a, b, c, d \in L$ con $a \sim b$ y también $c \sim d$, se tiene que $f(a) = f(b)$ y $f(c) = f(d)$, de donde $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = f(c) \vee f(d) = f(c \vee d)$ y a su vez, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = f(c) \wedge f(d) = f(c \wedge d)$, lo que significa que $(a \vee b) \sim (c \vee d)$ y que $(a \wedge b) \sim (c \wedge d)$, por lo que $\sim$ es una congruencia sobre L .

En segundo lugar, para cada par a, b de elementos en L con $[a] = [b]$ en $L/\sim$, se obtiene que $\varphi([a]) = f(a) = f(b) = \varphi([b])$, por lo que φ está bien definida. Además,

$$\varphi([a] \vee [b]) = \varphi([a \vee b]) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = \varphi([a]) \vee \varphi([b]),$$

y también,

$$\varphi([a] \wedge [b]) = \varphi([a \wedge b]) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = \varphi([a]) \wedge \varphi([b]),$$

de donde φ es un homomorfismo de retículos. Adicional a esto, si $\varphi([a]) = \varphi([b])$, entonces $f(a) = f(b)$ y a su vez $a \sim b$, por lo que $[a] = [b]$ en $L/\sim$ y φ es inyectiva. Por último, para cada $b \in \text{Im}(f)$, existe $a \in L$ de manera que $b = f(a) = \varphi([a])$, lo que hace a φ una función sobreyectiva.

Por lo tanto, la función φ es un isomorfismo de retículos y $L/\sim \cong \text{Im}(f)$. □

Para un estudio más detallado de la teoría de retículos, consulte [9] y [6].

1.2. Topología

Es bien sabido que la topología es una rama de las matemáticas, independiente del álgebra abstracta. Sin embargo, esto no implica que estas dos estén completamente aisladas. Por ejemplo, la topología se conecta con el campo de las ecuaciones diferenciales garantizando la existencia de soluciones mediante teoremas de punto fijo; en el área del análisis, permite estudiar la continuidad y compacidad de funciones; y en álgebra, se relaciona

con estructuras como los grupos topológicos. Precisamente, lo que se realizará posteriormente es caracterizar ciertos subconjuntos de las MV-álgebras y de los l -grupos, que son estructuras propias del álgebra, pero desde una perspectiva topológica.

Definición 1.2.1. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple:

- (i) $\emptyset, X \in \tau$.
- (ii) Si $\{A_i \mid i \in I\}$ es una familia arbitraria en τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
- (iii) Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

El par (X, τ) se denomina **espacio topológico**, mientras que los elementos de X y τ son llamados **puntos** y conjuntos **abiertos**, respectivamente. Un conjunto $A \subseteq X$ es **cerrado** si $A^c \in \tau$.

Ejemplo 1.2.2. Dado cualquier conjunto X , la colección $\tau_1 := \{\emptyset, X\}$ se conoce como **topología trivial**, mientras que $\tau_2 := \mathcal{P}(X)$ se denomina **topología discreta**. Evidentemente, (X, τ_1) y (X, τ_2) poseen el mismo conjunto subyacente, pero son espacios topológicos diferentes.

Habiendo introducido la noción de espacio topológico, es relevante considerar aplicaciones entre estos espacios que conserven su estructura, al igual que ocurre con los grupos y los homomorfismos de grupos.

Definición 1.2.3. Una función entre espacios topológicos $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ se dice que es **continua** si para cada $U \in \tau'$ se tiene que $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\} \in \tau$.

Se puede observar fácilmente que cualquier función entre espacios topológicos es continua cuando el dominio tiene la topología discreta. De igual forma, una función será continua si el codominio tiene la topología trivial.

Dado cualquier espacio topológico, es posible encontrar un subconjunto de la topología, de tal manera que cada conjunto abierto puede ser construido utilizando elementos del primero. Formalmente, esto se conoce como *base* de la topología.

Definición 1.2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una **base** para τ , si para cada $A \in \tau$, $A = \bigcup_{j \in J} B_j$ para algunos $B_j \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.2.5. El conjunto $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{\emptyset\}$ es una base para la topología discreta. Por otra parte, es inmediato que para cada espacio topológico (X, τ) , se tiene que τ es una base para sí misma.

Ejemplo 1.2.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección de bolas abiertas

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\},$$

forma una base para la **topología usual** τ en $\mathbb{R}^n$. En particular, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, se puede dotar a A de la **topología inducida** (también llamada usual) por el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau)$, donde los conjuntos abiertos en A son precisamente las intersecciones $A \cap U$, con U siendo abierto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2.7. Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$.

- Un conjunto $U \subseteq X$ se denomina **vecindad** de x y se denota como $U(x)$, si contiene un conjunto abierto del cual x es un elemento.
- El punto x se dice **adherente** a A si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A .
- El conjunto $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U(x), U(x) \cap A \neq \emptyset\}$ de todos los puntos de X adherentes a A es llamado la **clausura** de A (también conocida como la adherencia de A).
- A se dice **compacto**, si $A \subseteq \bigcup\{U_i \in \tau \mid i \in I\}$ implica $A \subseteq \bigcup\{U_j \in \tau \mid j \in J\}$ para algún $J \subseteq I$ finito.

Proposición 1.2.8. Sea (X, τ) un espacio topológico.

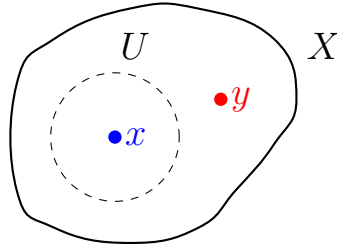
- (i) Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $\overline{A}$ es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A , es decir, corresponde a la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A .
- (ii) El **interior** de A , definido como $\text{int}(A) := \bigcup\{U \subseteq A \mid U \in \tau\}$, es el mayor conjunto abierto contenido en A .

Las siguientes definiciones son de suma importancia, ya que más adelante se verá detalladamente que los espectros primos de las MV-álgebras y de los l -grupos abelianos cumplen estas propiedades.

Definición 1.2.9. Dado un espacio topológico (X, τ) , se denota como $K(X)$ a la colección de los subconjuntos de X que son abiertos y compactos a la vez, el cual es un retículo con el orden usual de conjuntos.

Definición 1.2.10. Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que X es **sobrio**, si cada subconjunto no vacío, que sea cerrado e irreducible (que no puede descomponerse como unión de dos subconjuntos propios y cerrados), corresponde a la clausura de un conjunto unitario.

Definición 1.2.11. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es T_0 , si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un subconjunto abierto U de X que contiene a un punto y al otro no.



El concepto que sigue reúne las nociones mencionadas anteriormente.

Definición 1.2.12. Un espacio topológico (X, τ) es llamado **espectral**, si satisface las siguientes condiciones:

- (i) La colección $K(X)$ es una base para la topología y es cerrada bajo intersecciones finitas.
- (ii) X es T_0 .
- (iii) X es sobrio.
- (iv) X es compacto.

Si (X, τ) cumple (i), (ii) y (iii), se denomina **espacio espectral generalizado**.

Ejemplo 1.2.13. Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, el par (X, τ) es conocido como el Espacio de Sierpinski, en honor al matemático Waclaw Sierpinski, quien contribuyó en gran medida en teoría de conjuntos, teoría de números y topología. Observe que este espacio es espectral.

En efecto, la finitud de X implica que todo subconjunto de este es compacto, lo que conlleva a que X es compacto y que $K(X) = \tau$ es base para sí misma, que además es cerrada bajo intersecciones finitas. Adicional a esto, X es T_0 puesto que $\{b\} \in \tau$ es tal que $b \in \{b\}$ y $a \notin \{b\}$. Por último, note que los conjuntos cerrados en X son $\emptyset, \{a\}$ y X , los cuales son evidentemente irreducibles, en donde $\{a\} = \overline{\{a\}}$ y $X = \overline{\{b\}}$, lo cual indica que X es sobrio. De acuerdo a todo lo anterior, se concluye que el Espacio de Sierpinski es un espacio espectral.

Ejemplo 1.2.14. Es posible generalizar el Espacio de Sierpinski de la siguiente manera:

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, considérese (Y, Ω) como el espacio topológico con $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\Omega = \{\emptyset, Y\} \cup \{U \subseteq Y \mid x_n \in U\}$. Análogamente al Ejemplo 1.2.13, la finitud de Y implica que

el espacio es compacto y que $K(Y) = \Omega$ es una base para sí misma, cerrada bajo intersecciones finitas. Sumado a esto, para cada par de puntos distintos $x_i, x_j \in Y$ se tiene que $\{x_i, x_n\} \in \Omega$ satisface que $x_i \in \{x_i, x_n\}$ y $x_j \notin \{x_i, x_n\}$, por lo que Y es un espacio T_0 .

Por otra parte, los conjuntos cerrados en Y son $\emptyset, Y$ y cualquier subconjunto de Y que no contenga a al punto x_n . Una evaluación rápida muestra que los únicos subconjuntos no vacíos, cerrados e irreducibles de Y , son precisamente Y y los conjuntos unitarios $\{x_m\}$ para $m = 1, 2, \dots, n-1$, y a su vez se tiene que $\{x_m\} = \overline{\{x_m\}}$ y que $Y = \overline{\{x_n\}}$, lo que hace a Y un espacio sobrio. De esta manera, se concluye finalmente que Y es un espacio espectral.

Para profundizar en los conceptos de topología, puede consultarse [7], [15] y [27]. Además, [29] muestra una representación topológica de un caso especial de retículos, lo que evidencia las conexiones entre la topología y otras ramas de las matemáticas.

1.3. Categorías

Las categorías, un concepto matemático introducido en el siglo pasado, representan una herramienta innovadora ya que ofrecen una perspectiva distinta al enfoque tradicional basado en conjuntos, al proporcionar un marco para entender la estructura y las conexiones entre diferentes objetos matemáticos. Particularmente, aunque las MV-álgebras y los l -grupos son estructuras algebraicas independientes, presentan conexiones interesantes y gracias a la teoría de categorías se puede afirmar que estas estructuras son realmente similares.

Definición 1.3.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de

- una colección $\text{obj}(\mathcal{C})$ de **objetos**,
- para cada par de objetos A, B en $\text{obj}(\mathcal{C})$, una colección $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de **morfismos** de A a B , denotados como $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$, de tal manera que para cualquier C en $\text{obj}(\mathcal{C})$, existe una asignación

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f, \end{aligned}$$

llamada **composición**, sujeta a dos axiomas:

- (i) **Identidad:** Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, existe un morfismo $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que si B, C son otros objetos en $\mathcal{C}$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, se tiene que $1_A \circ f = f$ y $g \circ 1_A = g$.

- (ii) *Asociatividad:* Si A, B, C, D son objetos en $\mathcal{C}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

En una categoría $\mathcal{C}$, si se tienen los morfismos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow i & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

se dice que el diagrama **conmuta** si $g \circ f = h \circ i$.

Ejemplo 1.3.2.

- (1) **SET** es la categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfismos son funciones.
- (2) **Grp** es la categoría cuyos objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos.
- (3) **Ring** es la categoría cuyos objetos son anillos unitarios y los morfismos son precisamente homomorfismos de anillos.
- (4) **Top** es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y los morfismos corresponden a las funciones continuas.
- (5) **POSET** es la categoría cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son funciones que preservan el orden.
- (6) **Vect_K** es la categoría cuyos objetos son K -espacios vectoriales y los morfismos son transformaciones lineales.

Es importante destacar que no todos los objetos en las categorías deben ser estrictamente conjuntos, como se puede evidenciar en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3.3. Dado un grupo G , se construye una categoría $\mathcal{C}$, donde el único objeto es precisamente G , mientras que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) := G$, es decir que los morfismos son los elementos de G . El morfismo identidad es el elemento neutro e y la composición de morfismos está dada así:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) \\ (a, b) & \longmapsto & ab. \end{array}$$

Ejemplo 1.3.4. Si $(P, \leq)$ es un poset, se construye la categoría $\mathcal{C}$ donde $\text{obj}(\mathcal{C}) = P$ y para cada par $a, b \in P$, se considera

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) := \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a, b \text{ no son comparables,} \\ \{f_{a,b}\}, & \text{si } a \leq b, \\ \{f_{b,a}\}, & \text{si } b \leq a. \end{cases}$$

Como $a \leq a$ para cada $a \in P$, se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) = \{f_{a,a}\}$ y $1_a := f_{a,a}$. La composición se deriva de la transitividad de $\leq$, en efecto,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c) \\ (f_{b,c}, f_{a,b}) &\longmapsto f_{a,c}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5. Sea R un anillo con identidad, $\mathbf{Mat}_R$ es la categoría cuyos objetos son los números enteros positivos, y para cada $m, n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\text{Hom}_{\mathbf{Mat}_R}(n, m) := \{A \mid A \text{ es una matriz de tamaño } m \times n \text{ con entradas en } R\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, el morfismo identidad 1_n corresponde a la matriz identidad I_n y note que la composición de morfismos se define como la multiplicación usual de matrices.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Mat}_R}(m, n) \times \text{Hom}_{\mathbf{Mat}_R}(l, m) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Mat}_R}(l, n) \\ (A, B) &\longmapsto BA. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.6. Dada una categoría $\mathcal{C}$, existe una categoría asociada a $\mathcal{C}$, denominada **categoría dual** (también llamada opuesta) y denotada por $\mathcal{C}^{op}$, la cual consiste en los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y los morfismos en $\mathcal{C}^{op}$ se obtienen al invertir los morfismos en $\mathcal{C}$. Esto es, si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces formalmente $f^{op} : B \longrightarrow A$ es un morfismo en $\mathcal{C}^{op}$. (La inversión se realiza de manera formal y no se refiere al sentido usual, puesto que los morfismos no necesariamente son biyectivos.)

Ejemplo 1.3.7. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, se define una categoría $\mathcal{D}$ cuyos objetos son todos los morfismos en $\mathcal{C}$. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(f, g)$ se compone de todos los pares (α, β) , donde $\alpha : A \longrightarrow C$ y $\beta : B \longrightarrow D$ son morfismos en $\mathcal{C}$ de manera que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

El morfismo identidad $1_f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f, f)$ es $1_f := (1_A, 1_B)$, y la composición está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G, G) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(G, G) \\ ((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) &\longmapsto (\alpha \circ \gamma, \beta \circ \delta). \end{aligned}$$

Así como se han observado los homomorfismos entre retículos, que son funciones que preservan el orden, o las funciones continuas entre espacios topológicos, que mantienen la estructura topológica, es natural investigar si existen formas de preservar la estructura de una categoría al mapearla a otra. Para abordar esta cuestión, se introduce el concepto de funtor, una herramienta fundamental en teoría de categorías que permite formalizar y analizar los mapeos entre estas.

Definición 1.3.8. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, también denotado como $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, es una aplicación tal que,

- (i) asigna a cada $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$ un único objeto $F(A)$ en $\mathcal{D}$,
- (ii) para cada par $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ y un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, se tiene un único morfismo $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$,

y que satisface los siguientes axiomas:

- (a) Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
- (b) Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Por otra parte, una aplicación $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se denomina **funtor contravariante**, si representa un funtor covariante de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}^{\text{op}}$.

Un ejemplo sencillo de un funtor es el *funtor identidad* $1_{\mathcal{C}}$, que actúa como la función identidad sobre objetos y morfismos. Note también que la composición de funtores también es un funtor. A lo largo del trabajo, serán presentados otros ejemplos de funtores de manera más precisa.

Definición 1.3.9. Dados dos funtores $\mathcal{C} \xrightarrow[F]{F} \mathcal{D}$, una **transformación natural** α es una aplicación que asigna a cada objeto A de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)$, de tal manera que para cada morfismo $A \xrightarrow{f} A'$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\
 \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_{A'} \\
 G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A')
 \end{array}$$

Si α_A es un isomorfismo para cada $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$, se dice que α es un **isomorfismo natural**, que F, G son naturalmente isomorfos y se denota como $F \cong G$.

Las transformaciones naturales permiten establecer un mapeo coherente entre las acciones de los funtores en diferentes categorías. Fundamentalmente, capturan cómo los funtores interactúan de manera consistente con la estructura de los objetos y morfismos de las categorías correspondientes.

Ejemplo 1.3.10. Considere la categoría $\mathbf{Vect}_K$ del Ejemplo 1.3.2 y el par de funtores covariantes

$$\mathbf{Vect}_K \xrightleftharpoons[F]{1_{\mathbf{Vect}_K}} \mathbf{Vect}_K,$$

donde F es tal que $F(V) = V^{**}$ indica el espacio dual del correspondiente espacio dual del espacio vectorial V , esto es:

$$\begin{aligned}
 V^* &:= \{T : V \longrightarrow K \mid T \text{ es transformación lineal}\}, \\
 V^{**} &:= \{\hat{T} : V^* \longrightarrow K \mid \hat{T} \text{ es transformación lineal}\},
 \end{aligned}$$

mientras que para cada morfismo $T : V \longrightarrow W$ en $\mathbf{Vect}_K$, el morfismo $F(T) : F(V) \longrightarrow F(W)$ es construido de la siguiente manera:

1. Se define $T^* : W^* \longrightarrow V^*$ como $T^*(\phi) := \phi \circ T$,
2. Así mismo, se establece $T^{**} : V^{**} \longrightarrow W^{**}$ como $T^{**}(\varphi) := \varphi \circ T^*$.
3. Se toma $F(T) = T^{**}$.

Se quiere mostrar que los funtores $1_{\mathbf{Vect}_K}$ y F son naturalmente isomorfos. Para ello, asígnese a cada K -espacio vectorial V , el mapeo $1_{\mathbf{Vect}_K}(V) \xrightarrow{\alpha_V} F(V)$, esto es, $V \xrightarrow{\alpha_V} V^{**}$, de manera que $\alpha_V(v) : V^* \longrightarrow K$ es tal que $\alpha_V(v)(\phi) := \phi(v)$, para cada $v \in V$.

- Si $v = w$ en V , entonces $\phi(v) = \phi(w)$ para toda transformación lineal $\phi \in V^*$, lo que significa que $\alpha_V(v) = \alpha_V(w)$ y así, α_V está bien definida.

- Sean $v, w \in V$ que satisfacen $\alpha_V(v) = \alpha_V(w)$, entonces para cada $\phi \in V^*$ se sigue que $\phi(v) = [\alpha_V(v)](\phi) = [\alpha_V(w)](\phi) = \phi(w)$, y puesto que $v \neq w$ en V implica la existencia de una transformación lineal f tal que $f(v) \neq f(w)$, la afirmación contrarrecíproca indica que $v = w$. Así, α_V es inyectiva.
- Sea $\varphi \in V^{**}$, basta con tomar $v \in V$ de manera que para cada $\phi \in V^*$ se satisfaga $\varphi(\phi) = \phi(v)$, pues esto conlleva a que $\varphi = \alpha_V(v)$ y por ende, α_V es sobreyectiva.
- Para cada par $v, w \in V$ y $\lambda \in K$, se tiene que $\alpha_V(\lambda v + w) : V^* \rightarrow K$ es tal que

$$\begin{aligned}
 [\alpha_V(\lambda v + w)](\phi) &= \phi(\lambda v + w) \\
 &= \lambda \phi(v) + \phi(w) \\
 &= \lambda [\alpha_V(v)](\phi) + [\alpha_V(w)](\phi) \\
 &= [\lambda \alpha_V(v) + \alpha_V(w)](\phi),
 \end{aligned}$$

para cada $\phi \in V^*$, teniendo en cuenta la linealidad de ϕ y que $\alpha_V(v)$ y $\alpha_V(w)$ pertenecen al K -espacio vectorial V^{**} . Así, α_V es una transformación lineal y por ser biyectiva, es un isomorfismo.

Ahora bien, note que para cada morfismo $V \xrightarrow{T} W$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{T} & W \\
 \alpha_V \downarrow & & \downarrow \alpha_W \\
 F(V) & \xrightarrow{F(T)} & F(W)
 \end{array}$$

En efecto, para cada $v \in V$ se tiene que $(\alpha_W \circ T)(v) : W^* \rightarrow K$ es tal que $\phi \mapsto \phi(T(v))$, y también $(F(T) \circ \alpha_V)(v) = F(T)(\alpha_V(v)) = \alpha_V(v) \circ T^*$ está definida de W^* a K , con $\phi \mapsto (\varphi \circ T)(v)$. Luego, $F(T) \circ \alpha_V = \alpha_W \circ T$.

De esta manera, se ha demostrado que α es un isomorfismo natural y que los funtores $1_{\mathbf{Vect}_K}$ y F son naturalmente isomorfos.

Definición 1.3.11. Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen **equivalentes**, si existen funtores $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ de manera que $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ y también $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$. En este caso, tanto F como G se denominan **equivalencias**.

Cuando se habla de que dos partes son idénticas, es importante tener presente qué son realmente.

- La noción correcta para indicar que dos elementos de un objeto en una categoría son el mismo, es la igualdad. Por ejemplo, $a = a$ en el objeto $\{a, b, c\}$ en **SET**.
- Para mencionar que dos objetos en una categoría coinciden, se emplea el concepto de isomorfismo. Este es el caso en la categoría **Grp**, donde el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ es isomorfo a todo grupo cíclico infinito.
- Dos funtores entre categorías son esencialmente iguales cuando se tiene un isomorfismo natural entre ellos, como se evidencia en el Ejemplo 1.3.10, donde $F \cong 1_{\mathbf{Vect}_K}$.
- La equivalencia entre categorías sirve para expresar que son lo mismo. El Teorema 4.3.6 establece que las MV-álgebras y los l -grupos abelianos con unidad fuerte, representan los mismos objetos matemáticos.

Para explorar los conceptos de teoría de categorías y obtener una visión más amplia, se pueden consultar [20], [21] y [28].

Capítulo 2

MV-álgebras

En este capítulo se introduce el concepto de MV-álgebra, también conocida como álgebra multivaluada. Esta es un tipo de estructura que nació como la contraparte algebraica de la lógica multivaluada, de la misma manera en que las álgebras booleanas lo fueron inicialmente para la lógica clásica bivaluada, y fueron definidas en [10] en el año 1958 por el matemático Chen Chung Chang, quien se destacó por sus contribuciones a la teoría de modelos. En la teoría de conjuntos fuzzy, las álgebras multivaluadas son importantes, ya que sirven para definir el grado de pertenencia de cada elemento a un conjunto.

A continuación, se exponen algunas propiedades que cumplen las MV-álgebras, la estructura de retículo que pueden adoptar, los ideales que poseen, similar a los anillos en matemáticas, y se profundiza en el conjunto de los ideales primos de una álgebra multivaluada, conocido como el espectro primo. Se describe detalladamente la construcción de una cierta topología para este último y se enuncia la caracterización topológica que posee.

Los conceptos básicos de la teoría de MV-álgebras, presentados en este capítulo, se pueden consultar en [11].

Definición 2.0.1. Una *MV-álgebra* $\langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$, o simplemente A , es un conjunto junto con dos operaciones $\oplus : A \times A \longrightarrow A$, $\neg : A \longrightarrow A$ y 0 una constante, que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b \in A$:

- (i) $\langle A, \oplus, 0 \rangle$ es un monoide abeliano,
- (ii) $a \oplus \neg 0 = \neg 0$,
- (iii) $\neg(\neg a) = a$,
- (iv) $a \oplus \neg(a \oplus \neg b) = b \oplus \neg(b \oplus \neg a)$.

Las operaciones $\oplus$ y $\neg$ se denominarán *suma* y *negación*, respectivamente. La condición (iv), aunque es menos clara que las demás, es fundamental para demostrar ciertas propiedades en una MV-álgebra y garantizará que la operación $\vee$, que se definirá más adelante, sea conmutativa.

Ejemplo 2.0.2. *Considérese el conjunto $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, junto con las operaciones definidas como*

$$a \oplus b := \min\{a + b, 1\}, \quad \neg a := 1 - a, \quad \mathbf{0} := 0.$$

Claramente $a \oplus b = \min\{a + b, 1\} = \min\{b + a, 1\} = b \oplus a$ para todo $a, b \in [0, 1]$, y también $a \oplus 0 = \min\{a + 0, 1\} = \min\{a, 1\} = a$. Para probar que $\oplus$ cumple la propiedad asociativa, se deben analizar cuatro casos.

- Si $a \oplus b = \min\{a + b, 1\} = a + b$ y $b \oplus c = \min\{b + c, 1\} = b + c$, entonces

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= \min\{\min\{a + b, 1\} + c, 1\} \\ &= \min\{a + b + c, 1\} \\ &= \min\{a + \min\{b + c, 1\}, 1\} \\ &= a \oplus (b \oplus c). \end{aligned}$$

- Si $a \oplus b = 1 = b \oplus c$, entonces

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= \min\{\min\{a + b, 1\} + c, 1\} \\ &= \min\{1 + c, 1\} \\ &= 1 \\ &= \min\{a + 1, 1\} \\ &= \min\{a + \min\{b + c, 1\}, 1\} \\ &= a \oplus (b \oplus c). \end{aligned}$$

- Si $a \oplus b = a + b$ y $b \oplus c = 1 \leq b + c$, entonces $1 \leq a + 1 \leq a + b + c$ y así,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= \min\{\min\{a + b, 1\} + c, 1\} \\ &= \min\{a + b + c, 1\} \\ &= 1 \\ &= \min\{a + 1, 1\} \\ &= \min\{a + \min\{b + c, 1\}, 1\} \\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

- Si $a \oplus b = 1 \leq a + b$ y $b \oplus c = b + c$, entonces $1 \leq 1 + c \leq a + b + c$ y así,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= \min\{\min\{a + b, 1\} + c, 1\} \\ &= \min\{1 + c, 1\} \\ &= 1 \\ &= \min\{a + b + c, 1\} \\ &= \min\{a + \min\{b + c, 1\}, 1\} \\ &= a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

De esta manera, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ para cualesquiera $a, b, c \in [0, 1]$, por lo que $([0, 1], \oplus, 0)$ es un monoide abeliano.

Además, dado $a \in [0, 1]$, se tiene que $\neg(\neg a) = 1 - \neg(a) = 1 - (1 - a) = a$, $\neg 0 = 1 - 0 = 1$ y $a \oplus \neg 0 = \min\{a + 1, 1\} = 1 = \neg 0$. Por último, observe que para cualquier tripla $x, y, z \in [0, 1]$ se tiene que $x + \min\{y, z\} = \min\{x + y, x + z\}$, puesto que si se asume sin pérdida de generalidad que $y \leq z$, se sigue que $x + y = x + \min\{y, z\}$ y a su vez, $x + y \leq x + z$ implica que $\min\{x + z, y + z\} = x + y = x + \min\{y, z\}$. Teniendo en cuenta esto, resulta:

$$\begin{aligned} a \oplus \neg(a \oplus \neg b) &= a \oplus [1 - (a \oplus \neg b)] \\ &= a \oplus [1 - (a \oplus (1 - b))] \\ &= \min\{a + 1 - \min\{a + 1 - b, 1\}, 1\} \\ &= \min\{-[-a - 1 + \min\{a + 1 - b, 1\}], 1\} \\ &= \min\{-\min\{(-a - 1) + a + 1 - b, (-a - 1) + 1\}, 1\} \\ &= \min\{-\min\{-b, -a\}, 1\} \\ &= \min\{-\min\{-a, -b\}, 1\} \\ &= \min\{-\min\{(-b - 1) + b + 1 - a, (-b - 1) + 1\}, 1\} \\ &= \min\{-[-b - 1 + \min\{b + 1 - a, 1\}], 1\} \\ &= \min\{b + 1 - \min\{b + 1 - a, 1\}, 1\} \\ &= b \oplus [1 - [b \oplus (1 - a)]] \\ &= b \oplus [1 - (b \oplus \neg a)] \\ &= b \oplus \neg(b \oplus \neg a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $[0, 1]$ es un álgebra multivaluada.

La MV-álgebra del Ejemplo 2.0.2 se conoce como la **MV-álgebra estándar** y es considerada la más importante debido a las consecuencias que se derivan del siguiente resultado.

Teorema 2.0.3. (Teorema de completitud de Chang) *En la lógica de Łukasiewicz (o multivaluada), una fórmula φ es semánticamente válida si y solo si es sintácticamente derivable. Es decir, una fórmula φ es verdadera en todos los modelos, si y solo si puede ser derivada mediante las reglas del sistema deductivo de la lógica de Łukasiewicz.*

Demostración. La prueba se presenta en [10], donde el teorema constituye el objetivo más importante de dicho artículo. $\square$

Este teorema muestra que el sistema formal de la lógica de Łukasiewicz es completo, lo que significa que no hay fórmulas que sean verdaderas en todos los modelos pero que no puedan ser derivadas formalmente. En adición, dado que los modelos algebraicos para la lógica de Łukasiewicz son las álgebras multivaluadas, las fórmulas se interpretan como propiedades que se satisfacen en el contexto algebraico, y puesto que la MV-álgebra $[0, 1]$ actúa como el conjunto de posibles valores de verdad para las proposiciones en esta lógica, se deduce que una propiedad es válida en cualquier MV-álgebra si y solo si es válida en la MV-álgebra estándar.

Ejemplo 2.0.4. Si X es un conjunto no vacío y A es una MV-álgebra, entonces A^X también es una MV-álgebra con las operaciones definidas puntualmente, es decir que para $f \oplus g$ y $\neg f$ se tiene que $(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x)$, $(\neg f)(x) := \neg f(x)$ y $\mathbf{0}$ es la función constante igual a 0.

Sean $f, g, h \in A^X$. Para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} ((f \oplus g) \oplus h)(x) &= (f \oplus g)(x) \oplus h(x) \\ &= [f(x) \oplus g(x)] \oplus h(x) \\ &= f(x) \oplus [g(x) \oplus h(x)] \\ &= f(x) \oplus (g \oplus h)(x) \\ &= (f \oplus (g \oplus h))(x), \end{aligned}$$

por lo que $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$. Denotando por $\mathbf{0} \in A^X$ a la función constante igual a 0, se tiene que $(f \oplus \mathbf{0})(x) = f(x) \oplus \mathbf{0}(x) = f(x) \oplus 0 = f(x)$, de donde $f \oplus \mathbf{0} = f$ y como también $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x) = (g \oplus f)(x)$, significa que $f \oplus g = g \oplus f$ y así, $(A^X, \oplus, \mathbf{0})$ es un monoide abeliano.

Por otra parte, $\neg(\neg f) = f$ puesto que $(\neg(\neg f))(x) = \neg(\neg f)(x) = \neg(\neg f(x)) = f(x)$ para cada $x \in X$, y $(f \oplus \neg \mathbf{0})(x) = f(x) \oplus (\neg \mathbf{0})(x) = f(x) \oplus \neg \mathbf{0}(x) = f(x) \oplus \neg 0 = \neg 0 = \neg \mathbf{0}(x)$ implica $f \oplus \neg \mathbf{0} = \neg \mathbf{0}$. Por último,

$$\begin{aligned} [f \oplus \neg(f \oplus \neg g)](x) &= f(x) \oplus [\neg(f \oplus \neg g)(x)] \\ &= f(x) \oplus \neg[(f \oplus \neg g)(x)] \\ &= f(x) \oplus \neg[f(x) \oplus (\neg g)(x)] \\ &= f(x) \oplus \neg[f(x) \oplus \neg g(x)] \\ &= g(x) \oplus \neg[g(x) \oplus \neg f(x)] \\ &= g(x) \oplus \neg[g(x) \oplus (\neg f)(x)] \\ &= g(x) \oplus \neg[(g \oplus \neg f)(x)] \\ &= g(x) \oplus [\neg(g \oplus \neg f)(x)] \\ &= [g \oplus \neg(g \oplus \neg f)](x), \end{aligned}$$

así que $f \oplus \neg(f \oplus \neg g) = g \oplus \neg(g \oplus \neg f)$. Esto concluye la verificación de que A^X es un álgebra multivaluada.

En particular, dado cualquier conjunto $X \neq \emptyset$, se tiene que

$$[0, 1]^X := \{f : X \longrightarrow [0, 1] \mid f \text{ es función}\}$$

es una MV-álgebra que se relaciona fuertemente con la teoría de conjuntos fuzzy, pues cada función $f \in [0, 1]^X$ determina el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ en el conjunto fuzzy (X, f) , el cual puede pertenecer o no, parcial o totalmente.

Para el siguiente ejemplo, note que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2},$$

ya que si $a \leq b$, implica que $a - b \leq 0$, de donde

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (-(a - b))}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a = \min\{a, b\},$$

mientras que si $b \leq a$, resulta $0 \leq a - b$, por lo que

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (a - b)}{2} = \frac{a + b - a + b}{2} = \frac{2b}{2} = b = \min\{a, b\}.$$

Ejemplo 2.0.5. Sea X un espacio topológico y $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual. Consideremos

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow [0, 1] \mid f \text{ es una función continua}\} \subseteq [0, 1]^X.$$

La función **0** constante igual a 0 pertenece a $C(X)$ dado que toda función constante es continua, e igualmente para la función **1** constante igual a 1. Por otro lado, si $f, g \in C(X)$, tenemos que

$$(f \oplus g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + 1 - |f(x) + g(x) - 1|}{2},$$

por lo que $f \oplus g$ también es continua por ser composición de funciones continuas y $f \oplus g \in C(X)$. Por último, $\neg f = \mathbf{1} - f$ es una función continua por ser una combinación lineal de funciones continuas, así que $\neg f \in C(X)$. De esta manera, se concluye que $C(X)$ es una subálgebra de $[0, 1]^X$.

En una MV-álgebra, se definen auxiliariamente la constante $1 := \neg 0$ y las operaciones binarias $\odot, \ominus$ dadas por $a \odot b := \neg(\neg a \oplus \neg b)$ y $a \ominus b := a \odot \neg b$, las cuales se denominan *producto* y *diferencia*, respectivamente.

Proposición 2.0.6. Si A es una MV-álgebra, entonces para cualesquiera $a, b, c \in A$,

$$(i) \neg 1 = 0.$$

$$(ii) a \oplus \neg a = 1.$$

$$(iii) a \odot 1 = a.$$

$$(iv) a \odot 0 = 0.$$

$$(v) a \odot \neg a = 0.$$

$$(vi) \neg(a \odot b) = \neg a \oplus \neg b.$$

$$(vii) \neg(a \oplus b) = \neg a \odot \neg b.$$

$$(viii) a \odot (\neg a \oplus b) = b \odot (\neg b \oplus a).$$

$$(ix) a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c.$$

$$(x) a \odot b = b \odot a.$$

Demostración. Sean A una MV-álgebra y $a, b, c \in A$.

$$(i) \neg 1 = \neg(\neg 0) = 0.$$

$$(ii) a \oplus \neg a = a \oplus \neg(0 \oplus a) = a \oplus \neg(\neg 1 \oplus a) = \neg(\neg a \oplus 1) \oplus \neg 0 = \neg 0 = 1.$$

$$(iii) a \odot 1 = \neg(\neg a \oplus \neg 1) = \neg(\neg a \oplus 0) = \neg(\neg a) = a.$$

$$(iv) a \odot 0 = \neg(\neg a \oplus \neg 0) = \neg(\neg a \oplus 1) = \neg 1 = 0.$$

$$(v) a \odot \neg a = \neg[\neg a \oplus \neg(\neg a)] = \neg(\neg a \oplus a) = \neg 1 = 0.$$

$$(vi) \neg(a \odot b) = \neg[\neg(\neg a \oplus \neg b)] = \neg a \oplus \neg b.$$

$$(vii) \neg(a \oplus b) = \neg[\neg(\neg a) \oplus \neg(\neg b)] = \neg a \odot \neg b.$$

$$\begin{aligned} (viii) \quad a \odot (\neg a \oplus b) &= \neg[\neg a \oplus \neg(\neg a \oplus b)] \\ &= \neg[\neg a \oplus (\neg(\neg a) \odot \neg b)] \\ &= \neg[\neg a \oplus (a \odot \neg b)] \\ &= \neg[(b \odot \neg a) \oplus \neg b] \\ &= \neg(b \odot \neg a) \odot b \\ &= b \odot (\neg b \oplus a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ix) \quad a \odot (b \odot c) &= \neg a \oplus \neg(b \odot c) \\ &= \neg a \oplus (\neg b \oplus \neg c) \\ &= (\neg a \oplus \neg b) \oplus \neg c \\ &= \neg(a \odot b) \oplus \neg c \\ &= (a \odot b) \odot c. \end{aligned}$$

$$(x) a \odot b = \neg(\neg a \oplus \neg b) = \neg(\neg b \oplus \neg a) = b \odot a.$$

Esto concluye la prueba. □

Definición 2.0.7. Si A una MV-álgebra y $B \subseteq A$ tal que

- (i) $0 \in B$,
- (ii) si $a, b \in B$, entonces $a \oplus b \in B$,
- (iii) si $a \in B$, entonces $\neg a \in B$,

entonces B se denomina **subálgebra** de A .

Observación 2.0.8. Por la clausuratividad de las operaciones $\oplus$, $\neg$ y debido a que $0 \in B$, la subálgebra $B \subseteq A$ satisface los axiomas de la Definición 2.0.1 y en consecuencia, también es una MV-álgebra.

Es fácil ver que la intersección de subálgebras de una MV-álgebra A , también es una subálgebra de A . En ese sentido, para cada $X \subseteq A$, se define la **subálgebra generada** por X como el conjunto $\text{sub}(X) = \bigcap \{B \subseteq A \mid X \subseteq B, B \text{ es subálgebra de } A\}$, el cual corresponde a la menor subálgebra que contiene a X . Esta noción de subálgebra generada por un subconjunto será importante en la sección de MV-álgebras libres y funciones de McNaughton.

Proposición 2.0.9. Sea A una MV-álgebra y $\emptyset \neq S \subseteq A$. Definiendo $S_0 := S$ y de manera inductiva $S_{n+1} := S_n \cup \{\neg x \mid x \in S_n\} \cup \{x \oplus y \mid x, y \in S_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{sub}(S) = \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Dado que $S_0 = S \neq \emptyset$, se sigue que $S_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y a su vez, $\bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in S_n$, lo que implica que $\neg x \in S_{n+1}$ y también $1 = x \oplus \neg x \in S_{n+2}$, de donde $0 = \neg 1 \in S_{n+3}$. Así, $0 \in \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

En segundo lugar, si $a, b \in \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ sin pérdida de generalidad, de manera que $a \in S_m$, mientras que $b \in S_n$. De acuerdo a la construcción recursiva, resulta $S_m \subseteq S_n$, por lo que $a \in S_n$ y por consiguiente, $a \oplus b \in S_{n+1} \subseteq \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Así mismo, considerando $a \in S_n$, se obtiene que $\neg a \in S_{n+1} \subseteq \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, lo que significa que $\bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una subálgebra de A .

A continuación, se verifica que $\text{sub}(S) = \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Claramente, $S = S_0 \subseteq \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, por lo que $\text{sub}(S) \subseteq \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ por la definición de subálgebra. Recíprocamente, se procede por inducción sobre n para mostrar

que $S_n \subseteq \text{sub}(S)$. Es inmediato que $S_0 = S \subseteq \text{sub}(S)$. Suponga ahora por hipótesis inductiva que $S_k \subseteq S$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Dado $z \in S_{k+1}$, se deben analizar tres casos.

- Si $z \in S_k$, entonces $z \in \text{sub}(S)$ por la hipótesis de inducción.
- Si $z = \neg x$ para algún $x \in S_k \subseteq S$, entonces $z = \neg x \in \text{sub}(S)$ por ser una MV-álgebra.
- Si $z = x \oplus y$ para algunos $x, y \in S_k$, análogamente, se sigue que $x, y \in \text{sub}(S)$, de donde $z = x \oplus y \in \text{sub}(S)$.

Como consecuencia, $S_{k+1} \subseteq \text{sub}(S)$, lo que implica que $S_n \subseteq \text{sub}(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por ende, $\bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{sub}(S)$. Con esto, se concluye la prueba. $\square$

Denotaremos en adelante $0a := 0$, $a^0 := 1$, mientras que para cada $n \geq 1$, se definen $na := a \oplus (n-1)a$ y $a^n := a \odot a^{n-1}$.

Definición 2.0.10. *Un elemento a de una MV-álgebra A se dice que tiene **orden** n y se escribe $\text{ord}(a) = n$, si n es el menor número natural tal que $na = 1$. Si n existe, a se denomina de **orden finito** y en caso contrario, se denota $\text{ord}(a) = \infty$.*

Ejemplo 2.0.11. *En la MV-álgebra estándar $[0, 1]$, se tiene que $\text{ord}(0) = \infty$ y para cualquier $a \neq 0$, el orden de a es finito debido a la propiedad arquimediana de los números reales.*

2.1. Estructura reticular de una MV-álgebra

Se procede a construir una estructura de retículo sobre cualquier álgebra multivaluada, utilizando para ello las operaciones definidas anteriormente y la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Si A es una MV-álgebra y $a, b \in A$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) $\neg a \oplus b = 1$.
- (ii) $a \odot \neg b = 0$.
- (iii) $b = a \oplus (b \odot \neg a)$.
- (iv) Existe $c \in A$ tal que $b = a \oplus c$.
- (v) Existe $d \in A$ tal que $a = b \odot d$.

Demostración. Sea A una MV-álgebra y $a, b \in A$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\neg a \oplus b = 1$, entonces $0 = \neg 1 = \neg(\neg a \oplus b) = \neg(\neg a \oplus \neg(\neg b)) = a \odot \neg b$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $a \odot \neg b = 0$, se sigue que $a \oplus (b \odot \neg a) = b \oplus (a \odot \neg b) = b \oplus 0 = b$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Tomando $c := b \odot \neg a$, es evidente que $a \oplus c = a \oplus (b \odot \neg a) = b$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Considerando $d = a \oplus \neg b$, resulta

$$\begin{aligned}
 b \odot d &= b \odot (a \oplus \neg b) \\
 &= a \odot (\neg a \oplus b) \\
 &= a \odot (\neg a \oplus (a \oplus c)) \\
 &= a \odot ((\neg a \oplus a) \oplus c) \\
 &= a \odot (1 \oplus c) \\
 &= a \odot 1 \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (i) $\neg a \oplus b = \neg(b \odot d) \oplus b = (\neg b \oplus \neg d) \oplus b = \neg d \oplus (\neg b \oplus b) = \neg d \oplus 1 = 1$.

Con esto, se finaliza la prueba. □

Definición 2.1.2. Dada una MV-álgebra A , se introduce una relación $\leq$ en A de manera que $a \leq b$, si y solo si, a, b satisfacen alguna de las condiciones de la Proposición 2.1.1.

Proposición 2.1.3. Para cada MV-álgebra A , la relación $\leq$ definida en 2.1.2 es una relación de orden.

Demostración. Sea A una MV-álgebra.

- (a) Reflexividad: Si $a \in A$, puesto que $a = a \odot 1$, se satisface la condición (v) de la Proposición 2.1.1 y así, $a \leq a$.
- (b) Antisimetría: Si $a, b \in A$ satisfacen $a \leq b$ y $b \leq a$, se sigue que por la condición (ii) y (iii) de la Proposición 2.1.1, respectivamente, que $a \odot \neg b = 0$ y $a = b \oplus (a \odot \neg b)$. Luego, $a = b \oplus (a \odot \neg b) = b \oplus 0 = b$.
- (c) Transitividad: Si $a, b, c \in A$ de tal manera que $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces por la condición (iv) de la Proposición 2.1.1, existen $w, w' \in A$ con $b = a \oplus w$ y $c = b \oplus w'$. Por consiguiente, $c = b \oplus w' = (a \oplus w) \oplus w' = a \oplus (w \oplus w')$, lo que significa que $a \leq c$.

□

Cuando $\leq$ es un orden total, A se denomina **MV-cadena**. Note que el orden de la MV-álgebra estándar $\leq_{[0,1]}$ coincide con el orden usual $\leq_{\mathbb{R}}$ de los números reales, puesto que para cada par $a, b \in [0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned} a \leq_{[0,1]} b &\iff \neg a \oplus b = 1, \\ &\iff (1 - a) \oplus b = 1, \\ &\iff \min\{1 - a + b, 1\} = 1, \\ &\iff 1 \leq_{\mathbb{R}} 1 - a + b, \\ &\iff 0 \leq_{\mathbb{R}} -a + b, \\ &\iff a \leq_{\mathbb{R}} b, \end{aligned}$$

lo que significa que $\leq_{[0,1]}$ es un orden total y en consecuencia, $[0, 1]$ es una MV-cadena.

Proposición 2.1.4. *Si A una MV-álgebra, entonces para cualesquiera $a, b, c \in A$,*

- (i) $0 \leq a \leq 1$.
- (ii) $a \leq b$, si y solo si, $\neg b \leq \neg a$.
- (iii) $a \leq b$ implica $a \oplus c \leq b \oplus c$ y $a \odot c \leq b \odot c$.

Demostración. Sea A una MV-álgebra y $a, b, c \in A$.

- (i) Como $\neg 0 \oplus a = \neg 0 = 1$, entonces $0 \leq a$. Igualmente, $a \odot \neg 1 = a \odot 0 = 0$ implica $a \leq 1$ y así, $0 \leq a \leq 1$.
- (ii) $a \leq b$, si y solo si, $\neg a \oplus b = 1$, esto es, $0 = \neg 1 = \neg(\neg a \oplus b) = a \odot \neg b = \neg b \odot \neg(\neg a)$, lo que significa que, $\neg b \leq \neg a$.
- (iii) Si $a \leq b$, entonces existe $w \in A$ tal que $b = a \oplus w$, lo que implica que

$$b \oplus c = (a \oplus w) \oplus c = (a \oplus c) \oplus w,$$

por lo que $a \oplus c \leq b \oplus c$. Además, $a \leq b$ equivale a que existe $z \in A$ con $a = b \odot z$, de donde $a \odot c = (b \odot z) \odot c = (b \odot c) \odot z$, así que $a \odot c \leq b \odot c$.

Así, se ha probado que cada MV-álgebra posee elemento mínimo y elemento máximo, que la negación invierte el orden, y que las operaciones suma y producto son compatibles con la relación de orden. $\square$

Introduciendo las operaciones binarias $\vee, \wedge$ en cada MV-álgebra A como:

$$a \vee b := a \oplus (b \odot \neg a) \quad y \quad a \wedge b := a \odot (b \oplus \neg a),$$

se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.5. *Si A es una MV-álgebra y $a, b \in A$, entonces*

$$(i) \quad 0 \leq a \odot b \leq a \wedge b \leq a, b \leq a \vee b \leq a \oplus b \leq 1.$$

$$(ii) \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

$$(iii) \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$$

Demostración. Sea A una MV-álgebra y $a, b \in A$.

- (i) Por la Proposición 2.1.4 se tiene que $0 \leq a \odot b$ y $a \oplus b \leq 1$. Por otro lado, por la condición (v) de la Proposición 2.1.1 se sigue que $a \wedge b \leq a$ considerando $d := b \oplus \neg a$, mientras que $a \leq a \vee b$ resulta de considerar $c = b \odot \neg a$ en la condición (iv). Observe también que

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \oplus \neg(a \odot b) &= [a \odot (b \oplus \neg a)] \oplus [\neg a \oplus \neg b] \\ &= [a \odot (b \oplus \neg a) \oplus \neg a] \oplus \neg b \\ &= [(b \oplus \neg a) \oplus (\neg a \odot \neg(b \oplus \neg a))] \oplus \neg b \\ &= (b \oplus \neg a) \oplus (\neg a \odot b \odot a) \oplus \neg b \\ &= (b \oplus \neg a) \oplus (b \odot 0) \oplus \neg b \\ &= (b \oplus \neg a) \oplus 0 \oplus \neg b \\ &= (b \oplus \neg a) \oplus \neg b \\ &= \neg a \oplus (b \oplus \neg b) \\ &= \neg a \oplus 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

de donde $a \odot b \leq a \wedge b$. Por último,

$$\begin{aligned} \neg(a \vee b) \oplus (a \oplus b) &= \neg(a \oplus (b \odot \neg a)) \oplus (a \oplus b) \\ &= (\neg a \odot \neg(b \odot \neg a)) \oplus a \oplus b \\ &= [(\neg a \odot (\neg b \oplus a)) \oplus a] \oplus b \\ &= [(a \odot \neg(\neg b \oplus a)) \oplus (\neg b \oplus a)] \oplus b \\ &= (a \odot b \odot \neg a) \oplus (\neg b \oplus a) \oplus b \\ &= [(a \odot \neg a) \odot b] \oplus [(\neg b \oplus a) \oplus b] \\ &= (0 \odot b) \oplus [a \oplus (\neg b \oplus b)] \\ &= 0 \oplus (a \oplus 1) \\ &= a \oplus 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

lo que implica que $a \vee b \leq a \oplus b$.

$$(ii) \neg(a \vee b) = \neg(a \oplus (b \odot \neg a)) = \neg a \oplus \neg(b \odot \neg a) = \neg a \odot (\neg b \oplus a) = \neg a \wedge \neg b.$$

$$(iii) \neg(a \wedge b) = \neg(a \odot (b \oplus \neg a)) = \neg a \oplus \neg(b \oplus \neg a) = \neg a \oplus (\neg b \odot a) = \neg a \vee \neg b.$$

Con lo anterior, se expone que el producto es una cota inferior y la suma es una cota superior para cada par de elementos en un álgebra multivaluada, además de que los ítems (ii) y (iii) muestran igualdades similares a las Leyes de De Morgan que se presentan tanto en lógica proposicional como en teoría de conjuntos. $\square$

La razón por la cual se utilizaron los símbolos $\vee$ y $\wedge$ para denotar las dos últimas operaciones definidas es que, al igual que en las definiciones equivalentes de retículo, estas operaciones corresponden al supremo y al ínfimo de cada par de elementos, respectivamente. Considerando las proposiciones 2.1.4 y 2.1.5, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Si A es una MV-álgebra, entonces $(A, \leq)$ es un retículo distributivo y acotado, donde el primer elemento es 0 y el último es 1. Además, para cada par de elementos $a, b \in A$,*

$$\sup\{a, b\} = a \vee b \quad y \quad \inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

Demostración. Sea $c \in A$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $c = a \oplus (c \odot \neg a)$ y $\neg b \oplus c = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} c \oplus \neg(a \vee b) &= (a \oplus (c \odot \neg a)) \oplus (\neg a \wedge \neg b) \\ &= (\neg a \odot c) \oplus a \oplus (\neg a \wedge \neg b) \\ &= (\neg a \odot c) \oplus [a \oplus (\neg a \odot (\neg b \oplus a))] \\ &= (\neg a \odot c) \oplus [(\neg b \oplus a) \oplus (a \odot \neg(\neg b \oplus a))] \\ &= (\neg a \odot c) \oplus [\neg b \oplus a \oplus (a \odot b \odot \neg a)] \\ &= (\neg a \odot c) \oplus [\neg b \oplus a \oplus (0 \odot b)] \\ &= (\neg a \odot c) \oplus (\neg b \oplus a \oplus 0) \\ &= (\neg a \odot c) \oplus (\neg b \oplus a) \\ &= [(\neg a \odot c) \oplus a] \oplus \neg b \\ &= [c \oplus (a \odot \neg c)] \oplus \neg b \\ &= (a \odot \neg c) \oplus (\neg b \oplus c) \\ &= (a \odot \neg c) \oplus 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, $a \vee b \leq c$ y como consecuencia, $\sup\{a, b\} = a \vee b$. Por otra parte, si $c \in A$ es tal que $c \leq a$ y $c \leq b$, significa que $\neg a \leq \neg c$ y $\neg b \leq \neg c$. Luego, $\sup\{\neg a, \neg b\} = \neg a \vee \neg b \leq \neg c$, lo que conlleva a que $c \leq \neg(\neg a \vee \neg b) = \neg(\neg a) \wedge \neg(\neg b) = a \wedge b$. De esta manera, $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ y A es un retículo, que además es acotado por la Proposición 2.1.4.

Por último, sean $a, b, c \in A$, note que $b \leq b \vee c$ y también $c \leq b \vee c$ implican que $a \odot b \leq a \odot (b \vee c)$ y a su vez $a \odot c \leq a \odot (b \vee c)$, por lo que $a \odot (b \vee c)$ es una cota superior para los elementos $a \odot b, a \odot c$. Más aún, si z es cualquier otra cota superior de estos dos, se sigue que $b \leq b \vee \neg a = \neg a \oplus (a \odot b) \leq \neg a \oplus z$ y así mismo, $c \leq \neg a \oplus z$, lo que conlleva a que $b \vee c \leq \neg a \oplus z$ y así, $a \odot (b \vee c) \leq a \odot (\neg a \oplus z) = a \wedge z \leq z$, lo que indica que $(a \odot b) \vee (a \odot c) = a \odot (b \vee c)$. Teniendo en cuenta esto, observe ahora que $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ y también que $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$, por lo que $a \wedge (b \vee c)$ es una cota superior de los elementos $a \wedge b, a \wedge c$. Además, si w es cualquier otra cota superior de ellos, dado que $\neg(b \vee c) = \neg b \wedge \neg c \leq \neg b$ y a su vez $\neg(b \vee c) \leq \neg c$, implica $b \odot (a \oplus \neg(b \vee c)) \leq b \odot (a \oplus \neg b) = a \wedge b \leq w$ y de manera análoga $c \odot (a \oplus \neg(b \vee c)) \leq w$. Por consiguiente,

$$a \wedge (b \vee c) = (b \vee c) \odot (a \oplus \neg(b \vee c)) = (b \odot (a \oplus \neg(b \vee c))) \vee (c \odot (a \oplus \neg(b \vee c))) \leq w,$$

y resulta $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Se concluye que A es un retículo distributivo y finaliza la prueba. $\square$

Como es natural, también existen funciones entre álgebras multivaluadas que preservan la estructura, al igual que ocurre con los grupos, los anillos o los retículos. Estas funciones se conocen como homomorfismos de MV-álgebras.

Definición 2.1.7. Si A, B son dos MV-álgebras, un **homomorfismo** entre MV-álgebras (o MV-homomorfismo) es una función $f : A \longrightarrow B$ que satisface:

- (i) $f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b)$ para cualquier par $a, b \in A$,
- (ii) $f(\neg a) = \neg f(a)$ para cada $a \in A$.

Si f es inyectivo (sobreyectivo), se denomina **monomorfismo** (**epimorfismo**). En el caso en que f sea una biyección, es llamado **isomorfismo**.

Como es de esperarse, la composición de MV-homomorfismos también resulta siendo un MV-homomorfismo.

Ejemplo 2.1.8. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ y un elemento fijo $a \in X$, considere la función $\varphi : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi(f) := f(a)$. Observe para cualquier par $f, g \in [0, 1]^X$, se tiene

$$\varphi(f \oplus g) = (f \oplus g)(a) = f(a) \oplus g(a) = \varphi(f) \oplus \varphi(g),$$

y también

$$\varphi(\neg f) = (\neg f)(a) = \neg f(a) = \neg \varphi(a),$$

por lo que φ es un MV-homomorfismo. Adicionalmente, para cada $b \in [0, 1]$, la función constante $f(x) = b$ para todo $x \in X$ satisface $b = f(a) = \varphi(f)$, lo que indica que φ es sobreyectiva y por lo tanto, se concluye que φ es un epimorfismo.

Ejemplo 2.1.9. Si $\{(A_i, \oplus_{A_i}, \neg_{A_i}, 0_{A_i}) \mid i \in \Omega\}$ es una familia de MV-álgebras, entonces el producto cartesiano $A = \prod_{i \in \Omega} A_i$ cuyos elementos son denotados como $\{a_i\}_{i \in \Omega}$, también es una MV-álgebra, donde:

$$\begin{aligned} \{a_i\}_{i \in \Omega} \oplus_A \{b_i\}_{i \in \Omega} &:= \{a_i \oplus_{A_i} b_i\}_{i \in \Omega}, \\ \neg_A \{a_i\}_{i \in \Omega} &:= \{\neg_{A_i} a_i\}_{i \in \Omega}, \\ 0_A &:= \{0_{A_i}\}_{i \in \Omega}, \end{aligned}$$

mientras que para cada $j \in \Omega$, la función $\pi_j : A \longrightarrow A_j$ definida como $\pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega}) = a_j$ es un epimorfismo de MV-álgebras, puesto que

$$\begin{aligned} \pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega} \oplus_A \{b_i\}_{i \in \Omega}) &= \pi_j(\{a_i \oplus_{A_i} b_i\}_{i \in \Omega}) \\ &= a_j \oplus_{A_j} b_j \\ &= \pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega}) \oplus_{A_j} \pi_j(\{b_i\}_{i \in \Omega}), \end{aligned}$$

mientras que,

$$\begin{aligned} \pi_j(\neg_A \{a_i\}_{i \in \Omega}) &= \pi_j(\{\neg_{A_i} a_i\}_{i \in \Omega}) \\ &= \neg_{A_j} a_j \\ &= \neg_{A_j} \pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega}), \end{aligned}$$

y la sobreyectividad es inmediata ya que para todo $\hat{a} \in A_j$, se tiene que $\hat{a} = \pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega})$ con $a_j = \hat{a}$ y $a_i = 0$ para cada $i \neq j$ en Ω .

2.2. Ideales

En esta sección, se presenta una clase específica de subconjuntos dentro de las MV-álgebras, conocidos como ideales. A continuación, se analiza en detalle un tipo particular de estos ideales, llamados ideales primos, cuya colección se denomina espectro primo. El objetivo a seguir es proporcionar una caracterización topológica del espectro primo, basada en tres conceptos fundamentales que se discutirán más adelante.

Definición 2.2.1. Dada una MV-álgebra A , un subconjunto $I \subseteq A$ no vacío se denomina **ideal** de A si satisface las siguientes condiciones:

- (i) si $a, b \in I$, entonces $a \oplus b \in I$,
- (ii) si $a \in A, b \in I$ y $a \leq b$, entonces $a \in I$.

Un ideal I es **propio** si $I \neq A$ y un ideal P se denomina **primo** si es propio y además, $a \oplus b \in P$ o $b \oplus a \in P$ para cualquier par $a, b \in A$. El **espectro primo de A** es el conjunto de todos los ideales primos en A y se denota por $\text{Spec}(A)$, mientras que la colección de los ideales de A se representa por $\text{Id}(A)$. (La notación $\text{Id}(A)$ no debe confundirse con el morfismo identidad 1_A sobre un objeto A en una categoría, aunque en ocasiones sea denotado de esa manera.)

Adicionalmente, un ideal propio M de A es llamado **maximal** si para cualquier ideal H con $M \subseteq H \subseteq A$, se tiene que $M = H$ o $H = A$.

Un ejemplo de ideal de una MV-álgebra se presenta cuando se tiene un MV-homomorfismo $f : A \rightarrow B$, ya que el conjunto $\ker(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, llamado el **kernel** de f , se verifica fácilmente que es un ideal de A .

Observación 2.2.2. Dado un ideal I de una MV-álgebra A , I es propio si y solo si $1 \notin I$. En efecto, $I = A$ implica $1 \in I$; mientras que si $1 \in I$, entonces $a \in I$ para cada $a \in A$ puesto que $a \leq 1$, lo que indica que $I = A$.

Observe que la intersección de ideales también es un ideal. En ese sentido, dado un subconjunto X de una MV-álgebra A , se define el **ideal generado** por X como

$$(X) = \bigcap \{I \in \text{Id}(A) \mid X \subseteq I\},$$

el cual es evidentemente el menor ideal de A que contiene a X . Si X es finito, se dice que (X) es **finitamente generado**.

Proposición 2.2.3. Si A es una MV-álgebra y $X \subseteq A$, entonces

$$(X) = \{a \in A \mid a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \text{ para algunos } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}.$$

Demostración. Sea

$$B := \{a \in A \mid a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \text{ para algunos } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\},$$

se tiene que B es un ideal de A . En efecto, $B \neq \emptyset$ ya que $0 \leq x$ para cualquier $x \in X$. Además, si $a, b \in B$ y $c \in A$ con $c \leq a$, significa que $a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ y también

$b \leq y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_m$ para algunos $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in X$, lo que conlleva a que $a \oplus b \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus \cdots \oplus y_m$ y $c \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$, así que $a \oplus b, c \in B$ y $B \in \text{Id}(A)$. Más aún, $x \leq x$ para cada $x \in X$ implica que $X \subseteq B$ y a su vez, $(X) \subseteq B$.

De otro lado, si $a \in B$, es decir, $a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ con $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, se sigue que $x_1, x_2, \dots, x_n \in (X)$, por lo que $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in (X)$ y $a \in (X)$. De esta manera, $B \subseteq (X)$ y se concluye que $(X) = B$. Por lo tanto, se obtuvo una caracterización para los ideales generados por subconjuntos de un álgebra multivaluada. $\square$

Corolario 2.2.4. *Sea A una MV-álgebra.*

- Para cada $x \in A$, $(x) = \{a \in A \mid a \leq nx \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$, donde $(x) := (\{x\})$.
- Si $J \in \text{Id}(A)$, entonces $(J \cup \{x\}) = \{a \in A \mid a \leq b \oplus nx \text{ para algunos } b \in J, n \in \mathbb{N}\}$, para cada $x \in A - J$.

Los ideales en A de la forma (a) se denominan **ideales principales** y el conjunto de todos estos se denota por $\text{Id}_c(A)$. Por otra parte, es fácil ver que $\text{Id}(A)$ es un retículo con el orden parcial dado por la contención usual de conjuntos, y en consecuencia,

$$\sup\{I, J\} = (I \cup J), \quad \inf\{I, J\} = I \cap J,$$

para cualquier par $I, J \in \text{Id}(A)$. Denotaremos en adelante $I \vee J := \sup\{I, J\}$ y también $I \wedge J := \inf\{I, J\}$.

Observación 2.2.5. *Dada A un álgebra multivaluada y $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un ideal finitamente generado en A , note que $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por ser ideal, lo que conlleva a que $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \subseteq (x_1, x_2, \dots, x_n)$ por la minimalidad del ideal principal. Por otro lado, dado que $x_i \leq x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, esto implica que $x_i \in (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$ y nuevamente por la minimalidad del ideal finitamente generado, resulta $(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$. Esto concluye que todo ideal finitamente generado en una MV-álgebra, es un ideal principal.*

Observación 2.2.6. *El subíndice c en la notación $\text{Id}_c(A)$ hace referencia al hecho de que el conjunto de ideales principales de cada álgebra multivaluada A corresponde exactamente a la colección de elementos compactos en el retículo de ideales $\text{Id}(A)$. Efectivamente, si $a \in A$ es tal que $(a) \subseteq \bigvee\{I_j \mid j \in \Omega\} = (\bigcup\{I_j \mid j \in \Omega\})$, entonces por la Proposición 2.2.3 se sigue que $a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ para algunos $x_1, x_2, \dots, x_n \in \bigcup\{I_j \mid j \in \Omega\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se toma un ideal I_i con $i \in \Omega$ de manera que $x_i \in I_i$, lo que conlleva a que*

$a \in (\bigcup\{I_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}]$ y a su vez, $(a] \subseteq (\bigcup\{I_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}]$, lo que indica que todo ideal principal es un elemento compacto en el retículo de ideales de A .

Por otro lado, si se considera un elemento compacto en el retículo $\text{Id}(A)$, puesto que $I = (\bigcup\{(a] \mid a \in I\}) = \bigvee\{(a] \mid a \in I\}$, se puede asegurar la existencia de una colección finita $\{a_i \in I \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ de manera que se cumple que

$$\begin{aligned} I &= \bigvee\{(a_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\} \\ &= (\bigcup\{(a_i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n] \\ &= (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n], \end{aligned}$$

lo que significa que I es un ideal principal.

Proposición 2.2.7. Si A es una MV-álgebra, entonces para cualquier par $a, b \in A$,

- (i) Si $a \leq b$, entonces $(a] \subseteq (b]$.
- (ii) $(a] \vee (b] = (a \vee b] = (a \oplus b]$.
- (iii) $(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$.

Demostración.

- (i) Sean $a, b \in A$ con $a \leq b$. Si $x \in (a]$, entonces $x \leq na$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo que conlleva a que $x \leq nb$ ya que $na \leq nb$. Así, $x \in (b]$ y $(a] \subseteq (b]$.
- (ii) Como $a \vee b \in (a \vee b]$, $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, se sigue que $a, b \in (a \vee b]$, por lo que $(a] \subseteq (a \vee b]$, $(b] \subseteq (a \vee b]$ y así, $(a] \vee (b] \subseteq (a \vee b]$. Recíprocamente, como $a, b \in (a] \vee (b]$, entonces $a \oplus b \in (a] \vee (b]$ y $a \vee b \leq a \oplus b$ implica que $a \vee b \in (a] \vee (b]$ y por tanto, $(a \vee b] \subseteq (a] \vee (b]$.
- (iii) Dado que $a \in (a]$, $b \in (b]$, $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, resulta $a \wedge b \in (a]$, $a \wedge b \in (b]$ y $a \wedge b \in (a] \cap (b] = (a] \wedge (b]$, lo que significa que $(a \wedge b] \subseteq (a] \wedge (b]$. Por otro lado, si $x \in (a] \cap (b]$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ de manera que $x \leq ma$ y $x \leq nb$. Luego,

$$x \leq ma \wedge nb \leq mn(a \wedge b),$$

de donde $x \in (a \wedge b]$ y $(a] \wedge (b] = (a] \cap (b] \subseteq (a \wedge b]$.

De acuerdo con lo anterior, se ha probado que el orden entre dos elementos se preserva al pasar a los ideales principales que generan, y que tanto el supremo como el ínfimo de dos ideales principales son también ideales principales. $\square$

Los ideales en una MV-álgebra permiten generar otras MV-álgebras. Específicamente,

Proposición 2.2.8. *Si I es un ideal de una MV-álgebra A , la relación $\sim_I$ definida como*

$$a \sim_I b \iff d(a, b) := (a \oplus b) \oplus (b \oplus a) \in I,$$

es una relación de equivalencia.

Demostración. La reflexividad se sigue de que $(a \oplus a) \oplus (a \oplus a) = 0 \oplus 0 = 0 \in I$ y la simetría se obtiene por la propiedad conmutativa de la suma. Para la transitividad, note que si $a \sim_I b$ y $b \sim_I c$, significa que $(a \oplus b) \oplus (b \oplus a)$ y también $(b \oplus c) \oplus (c \oplus b)$ son elementos de I . Luego, $(a \oplus c) \leq (a \oplus b) \oplus (b \oplus c)$ debido a que

$$\begin{aligned} \neg(a \oplus c) \oplus ((a \oplus b) \oplus (b \oplus c)) &= \neg(a \odot \neg c) \oplus ((a \odot \neg b) \oplus (b \odot \neg c)) \\ &= \neg a \oplus c \oplus (a \odot \neg b) \oplus (b \odot \neg c) \\ &= (\neg a \oplus (a \odot \neg b)) \oplus (c \oplus (b \odot \neg c)) \\ &= (\neg a \vee \neg b) \oplus (c \vee b) \\ &\geq \neg b \oplus b \\ &= 1, \end{aligned}$$

de donde $\neg(a \oplus c) \oplus ((a \oplus b) \oplus (b \oplus c)) = 1$ y por la Proposición 2.1.1, resulta $(a \oplus c) \leq (a \oplus b) \oplus (b \oplus c)$. Análogamente, se obtiene que $(c \oplus a) \leq (c \oplus b) \oplus (b \oplus a)$ y en consecuencia, $(a \oplus c) \oplus (c \oplus a) \leq (a \oplus b) \oplus (b \oplus a) \oplus (b \oplus c) \oplus (c \oplus a)$, donde este último es un elemento de I al ser clausurativo para la suma. Así, $(a \oplus c) \oplus (c \oplus a) \in I$ y se llega a que $a \sim_I c$.

De esta manera, se concluye que $\sim_I$ es una relación de equivalencia. □

De acuerdo a lo anterior, para cada álgebra multivaluada A y un ideal I , el conjunto $A/I := \{a/I \mid a \in A\}$ de las clases de equivalencia bajo la relación $\sim_I$ tiene estructura de MV-álgebra, donde las operaciones $\oplus$, $\neg$ y la constante se definen como

$$\begin{aligned} a/I \oplus b/I &:= (a \oplus b)/I, \\ \neg(a/I) &:= (\neg a)/I, \\ \mathbf{0}_{A/I} &:= 0/I. \end{aligned}$$

Este tipo de MV-álgebras se conocen como **MV-álgebras cociente**. En particular,

Proposición 2.2.9. *En toda álgebra multivaluada A , un ideal P es primo, si y solo si, A/P es una MV-cadena.*

Demostración. Para cada par de elementos $a, b \in A$, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 a/P \leq b/P \text{ o } b/P \leq a/P, \text{ en } A/P &\iff \neg(a/P) \oplus (b/P) = 1/P \text{ o } \neg(b/P) \oplus (a/P) = 1/P, \\
 &\iff (\neg a \oplus b)/P = 1/P \text{ o } (\neg b \oplus a)/P = 1/P, \\
 &\iff (\neg a \oplus b) \sim_P 1 \text{ o } (\neg b \oplus a) \sim_P 1, \\
 &\iff ((\neg a \oplus b) \ominus 1) \oplus (1 \ominus (\neg a \oplus b)) \in P, \\
 &\quad \text{o } ((\neg b \oplus a) \ominus 1) \oplus (1 \ominus (\neg b \oplus a)) \in P, \\
 &\iff a \ominus b \in P \text{ o } b \ominus a \in P,
 \end{aligned}$$

lo que significa que la MV-álgebra cociente A/P es totalmente ordenado, si y solo si, P es un ideal primo en la MV-álgebra A . $\square$

Los siguientes dos resultados serán esenciales para el desarrollo, como se verá más adelante. El primero muestra una función inducida entre los ideales principales de dos MV-álgebras a partir de una función previamente definida entre ellas. El segundo es un teorema bien conocido en el campo del álgebra, aplicable a homomorfismos de grupos, anillos o retículos.

Observación 2.2.10. Dado un MV-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, se introduce la función $Id_c(f) : Id_c(A) \longrightarrow Id_c(B)$ dada por $Id_c(f)((x]) := (f(x))$, la cual está bien definida puesto que si $x, y \in A$ satisfacen $(x] = (y]$, entonces $x \leq ny$ y $f(x) \leq nf(y)$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir que $(f(x)) \subseteq (f(y))$. Análogamente, $y \in (x]$ implica a su vez que $(f(y)) \subseteq (f(x))$, por lo que $Id_c(f)((x]) = (f(x)) = (f(y)) = Id_c(f)((y))$ y la función $Id_c(f)$ está bien definida.

Proposición 2.2.11. Si $f : A \longrightarrow B$ es un MV-homomorfismo, entonces la función $Id_c(f) : Id_c(A) \longrightarrow Id_c(B)$ es un homomorfismo cerrado de 0-retículos.

Demostración. Note que la Observación 2.2.10 también muestra que $Id_c(f)$ es un homomorfismo de retículos y que $Id_c(f)((0]) = (f(0)) = (0]$.

Por otro lado, sean $x_1, x_2 \in A$ y $b \in B$ de manera que $(f(x_1)) \subseteq (f(x_2)) \vee (b)$, veamos que existe $x \in A$ de manera que $(x_1] \leq (x_2] \vee (x]$ y $(f(x)) \leq (b)$. Dado que $f(x_1) \leq n(f(x_2) \oplus b)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $f(x_1 \oplus \neg nx_2) = f(x_1) \oplus \neg nf(x_2) \leq nb$. Tomando $x := x_1 \oplus \neg nx_2$, se obtiene $x_1 = x \oplus nx_2 \leq n(x \oplus x_2) \in (x_2] \vee (x]$ y $f(x) \in (b)$, lo que significa que $(x_1] \subseteq (x_2] \vee (x]$ y $(f(x)) \subseteq (b)$.

Por lo tanto, $Id_c(f)$ es un homomorfismo cerrado de 0-retículos. $\square$

Teorema 2.2.12. (Primer Teorema de isomorfismos) Si $f : A \longrightarrow B$ es un MV-homomorfismo, entonces $A/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$, donde $\text{Im}(f)$ es el rango de la función f .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & \text{Im}(f) \\
 \downarrow \pi & \nearrow \phi & \\
 A/\ker(f) & &
 \end{array}$$

(En este caso, π denota el MV-homomorfismo definido como $\pi(a) = a/\ker(f)$.)

Demostración. Sea $\phi : A/\ker(f) \longrightarrow \text{Im}(f)$ la función tal que $\phi(a/\ker(f)) := f(a)$, note que para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 a/\ker(f) = b/\ker(f) &\iff d(a, b) \in \ker(f) \\
 &\iff f(d(a, b)) = 0 \\
 &\iff d(f(a), f(b)) = 0 \\
 &\iff f(a) = f(b),
 \end{aligned}$$

por lo que ϕ está bien definida y es inyectiva. Además, ϕ es sobreyectiva, puesto que si $b \in \text{Im}(f)$, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ y a su vez, $\phi(a/\ker(f)) = f(a) = b$. Más aún, para cada $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
 \phi((a/\ker(f)) \oplus (b/\ker(f))) &= \phi((a \oplus b)/\ker(f)) \\
 &= f(a \oplus b) \\
 &= f(a) \oplus f(b) \\
 &= \phi(a/\ker(f)) \oplus \phi(b/\ker(f)),
 \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}
 \phi(\neg(a/\ker(f))) &= \phi((\neg a)/\ker(f)) \\
 &= f(\neg a) \\
 &= \neg f(a) \\
 &= \neg \phi(a/\ker(f)),
 \end{aligned}$$

de donde ϕ es un homomorfismo de MV-álgebras y por lo tanto, $A/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$. $\square$

La noción de homomorfismo cerrado entre retículos introducida en la Definición 1.1.9 será fundamental para el siguiente lema, donde se establece una adaptación del Teorema 2.2.12 para ideales principales en un álgebra multivaluada.

Lema 2.2.13. *Sea A una MV-álgebra, S un 0-retículo y $\phi : Id_c(A) \longrightarrow S$ un join-homomorfismo sobreyectivo y cerrado. Entonces $I := \{x \in A \mid \phi([x]) = 0\}$ es un ideal de A y existe un isomorfismo $\psi : Id_c(A/I) \longrightarrow S$ tal que $\psi((x/I)) = \phi([x])$, para cada $x \in A$.*

$$\begin{array}{ccc}
 Id_c(A) & \xrightarrow{\phi} & S \\
 \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\
 Id_c(A/I) & &
 \end{array}$$

(π denota el epimorfismo canónico, donde $\pi([x]) := (x/I)$.)

Demostración. Veamos primero que I es un ideal de A . Dado que $(0] = \{0\} \subseteq [x]$ para todo $x \in A$ y ϕ es un join-homomorfismo, entonces $\phi([x]) = \phi([x] \vee (0]) = \phi([x]) \vee \phi((0])$, por lo que $\phi((0]) \leq \phi([x])$ y por ser ϕ sobreyectiva resulta $\phi((0]) \leq s$ para todo $s \in S$ y así, $\phi((0]) = 0$. Luego, $0 \in I$ y $I \neq \emptyset$. Por otro lado, si $x, y \in I$, entonces $\phi([x]) = 0 = \phi([y])$ y dado que $(x \oplus y) = [x] \vee [y]$, se obtiene que

$$\phi([x \oplus y]) = \phi([x] \vee [y]) = \phi([x]) \vee \phi([y]) = 0 \vee 0 = 0,$$

y $x \oplus y \in I$. Además, si $x \in A$ y $y \in I$ con $x \leq y$, se sigue que $[x] \subseteq [y]$, $[x] \vee [y] = [y]$ y como consecuencia, $0 = \phi([y]) = \phi([x] \vee [y]) = \phi([x]) \vee \phi([y]) = \phi([x]) \vee 0 = \phi([x])$, por lo que $x \in I$. Así, I es un ideal de A .

Ahora, defínase la función $\psi : Id_c(A/I) \longrightarrow S$ como $\psi((x/I)) = \phi([x])$. Sean $x, y \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \psi((x/I) \vee (y/I)) &= \psi((x/I \vee y/I)) \\
 &= \psi([(x \vee y)/I]) \\
 &= \phi([x \vee y]) \\
 &= \phi([x] \vee [y]) \\
 &= \phi([x]) \vee \phi([y]) \\
 &= \psi((x/I)) \vee \psi((y/I)),
 \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}
\psi((x/I) \wedge (y/I)) &= \psi((x/I \wedge y/I)) \\
&= \psi(((x \wedge y)/I)) \\
&= \phi((x \wedge y)) \\
&= \phi((x] \wedge (y]) \\
&= \phi((x]) \wedge \phi((y]) \\
&= \psi((x/I)) \wedge \psi((y/I)),
\end{aligned}$$

por lo que ψ es un homomorfismo de retículos. Note que ψ hereda la sobreyectividad de ϕ . Además, si $\phi((x]) = \psi((x/I)) \subseteq \psi((y/I)) = \phi((y])$, entonces dado que ϕ es cerrado, existe $z \in A$ con $(x] \subseteq (y] \vee (z] = (y \oplus z]$ y $\phi((z]) = 0$, es decir que $z \in I$. Luego, $x \leq n(y \oplus z) = ny \oplus nz$ y $x/I \leq n(y/I)$, lo que significa que $(x/I) \subseteq (y/I)$. Análogamente, $\psi((y/I)) \subseteq \psi((x/I))$ implica $(y/I) \subseteq (x/I)$ y así, $(x/I) = (y/I)$ siempre que $\psi((x/I)) = \psi((y/I))$, de donde ψ es inyectiva. Por lo tanto, ψ es un isomorfismo. $\square$

2.3. El espectro primo de una MV-álgebra

En esta sección exploraremos en detalle la construcción de una topología particular para el espectro primo de una álgebra multivaluada, gracias a un resultado de gran importancia conocido como el *Teorema del ideal primo*. Este teorema establece las condiciones bajo las cuales se puede asegurar la existencia de un ideal primo que contenga a un ideal dado. Enseguida, se discuten algunas propiedades del espectro primo como espacio topológico y como retículo, junto con un ejemplo de un funtor contravariante entre las categorías de las MV-álgebras y los espacios topológicos.

Lema 2.3.1. *Si A es una MV-álgebra y $a, b \in A$ satisfacen que $a \wedge b = 0$, entonces $na \wedge nb = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como $2a \wedge b \leq 2a \wedge (a \oplus b) = a \oplus (a \wedge b) = a \oplus 0 = a$, se sigue que $2a \wedge b \leq a \wedge b = 0$ y $2a \wedge b = 0$. Así mismo, $2a \wedge 2b \leq (b \oplus 2a) \wedge 2b = b \oplus (2a \wedge b) = b \oplus 0 = b$, por lo que resulta $2a \wedge 2b \leq 2a \wedge b = 0$ y $2a \wedge 2b = 0$. Por inducción sobre k , se obtiene que $2^k a \wedge 2^k b = 0$, y dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ con $n \leq 2^m$, se tiene que $na \wedge nb \leq 2^m a \wedge 2^m b = 0$ y así, $na \wedge nb = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.3.2. (Teorema del ideal primo) *Sea A una MV-álgebra. Si I es un ideal propio de A y $\emptyset \neq S \subset A$ es un conjunto clausurativo para la operación $\wedge$ de A , de manera que $I \cap S = \emptyset$, entonces existe un ideal primo P tal que $I \subseteq P$ y $P \cap S = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathcal{J} = \{J \in \text{Id}(A) \mid J \neq A, I \subseteq J, S \cap J = \emptyset\}$ y $\{J_k \mid k \in K\}$ una cadena en $\mathcal{J}$, consideremos el conjunto $H = \bigcup_{k \in K} J_k$.

Note que $H \neq \emptyset$ puesto que $J_k \subseteq H$ para cada $k \in K$. Luego, si $a, b \in H$, entonces $a \in J_{k_1}$ y $b \in J_{k_2}$ para algunos $k_1, k_2 \in K$. Sin pérdida de generalidad, $J_{k_1} \subseteq J_{k_2}$ dado que estos son elementos de la cadena y pueden ser comparados, lo que implica que $a \in J_{k_2}$ y $a \oplus b \in J_{k_2} \subseteq H$ al ser J_{k_2} un ideal, por lo que $a \oplus b \in H$. Además, si $a \in H$ y $x \in A$ con $x \leq a$, se sigue que $a \in J_{\hat{k}}$ para algún $\hat{k} \in K$, de donde $x \in J_{\hat{k}} \subseteq H$ por ser ideal, así que $x \in H$ y de esta manera, H es un ideal de A . Más aún, como $J_k \neq A$ para todo $k \in K$, significa que $1 \notin J_k$, $1 \notin H$ y esto es, $H \neq A$.

Por otro lado, $I \subseteq J_k \subseteq H$ para cualquier $k \in K$, lo que indica que H contiene a I . Adicionalmente, si existiese $x \in S \cap H$, se tendría que $x \in S \cap J_{\hat{k}}$ para algún $\hat{k}$, lo que es falso pues $J_{\hat{k}} \in \mathcal{J}$ y $S \cap J_{\hat{k}} = \emptyset$. Como consecuencia, $S \cap H = \emptyset$ y $H \in \mathcal{J}$, además de que es una cota superior de la cadena. Luego, por el *Lema de Zorn*¹, $\mathcal{J}$ tiene un elemento maximal P . Veamos que $P \in \text{Spec}(A)$.

Suponga que existen $a, b \in A$ de manera que ni $a \oplus b$ ni $b \oplus a$ están en P , esto implica que los ideales $J = (P \cup \{a \oplus b\})$ y $K = (P \cup \{b \oplus a\})$ no pertenecen a $\mathcal{J}$ puesto que $P \subset J, K$ y de lo contrario, sería una contradicción con la maximalidad de P . Esto significa que $J = A$ o $S \cap J \neq \emptyset$, y $K = A$ o $S \cap K \neq \emptyset$, por lo que en cualquier caso, existen $c \in S \cap J$ y $d \in S \cap K$. Denotando $\mu := a \oplus b$ y $v := b \oplus a$, se sigue que $c \leq p_1 \oplus n_1 \mu$ y $d \leq p_2 \oplus n_2 v$ para algunos $p_1, p_2 \in P$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Más aún, $u \wedge v = 0$ y por el Lema 2.3.1, resulta $nu \wedge nv = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $p := p_1 \vee p_2$ y $n := \max\{n_1, n_2\}$, note que $p \in P$ ya que $p \leq p_1 \oplus p_2 \in P$. Luego, se obtiene que $c \wedge d \leq c \leq p_1 \oplus n_1 \mu \leq p \oplus n \mu$ y también $c \wedge d \leq d \leq p_2 \oplus n_2 v \leq p \oplus n v$, de donde $c \wedge d \leq (p \oplus n \mu) \wedge (p \oplus n v) = p \oplus (n \mu \wedge n v) = p \oplus 0 = p$. Así, $c \wedge d \in P$ por ser P un ideal y $c \wedge d \in S$ pues S es clausurativo bajo $\wedge$ y de esta manera, $c \wedge d \in S \cap J = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $a \oplus b \in P$ o $b \oplus a \in P$, esto es, P es un ideal primo con $I \subseteq P$ y $S \cap P = \emptyset$. □

Los corolarios de este teorema serán fundamentales para definir tanto los conjuntos abiertos, como los elementos de la base de la topología que se le asignará al espectro primo.

Corolario 2.3.3. *Cualquier ideal propio I de A puede ser extendido a un ideal primo.*

¹**Lema de Zorn.** Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío, en el que toda cadena tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

Demostración. Como $1 \wedge 1 = 1$ y ningún ideal propio contiene a 1, basta con tomar $S = \{1\}$ en el teorema anterior. $\square$

Corolario 2.3.4. Si $a \in A \setminus \{0\}$, entonces existe un ideal primo P tal que $a \notin P$.

Demostración. Puesto que $a \wedge a = a$ y $a \neq 0$, basta con considerar $I = \{0\}$ y $S = \{a\}$ en el teorema anterior. $\square$

El Corolario 2.3.4 puede ser enunciado como sigue: En cualquier MV-álgebra A se tiene que $\bigcap \text{Spec}(A) = \{0\}$. Esta propiedad será fundamental para la demostración del Teorema 2.3.6.

Definición 2.3.5. Se dice que un álgebra multivaluada A es un **producto subdirecto** de una familia $\{A_i \mid i \in \Omega\}$ de álgebras multivaluadas, si existe un monomorfismo $h : A \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} A_i$ de manera que para cada proyección $\pi_j : \prod_{i \in \Omega} A_i \longrightarrow A_j$ con $j \in \Omega$, definida como $\pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega}) = a_j$, la composición $\pi_j \circ h$ es un epimorfismo.

El siguiente teorema es de gran importancia en la teoría de MV-álgebras, ya que permite comprender cualquier MV-álgebra no vacía como un producto subdirecto de MV-álgebras totalmente ordenadas, lo cual será de gran utilidad en el capítulo cuatro.

Teorema 2.3.6. (Teorema de representación subdirecta de Chang) Toda MV-álgebra $A \neq \emptyset$ es un producto subdirecto de MV-cadenas. Es decir, existe una familia de MV-cadenas $\{A_i \mid i \in \Omega\}$ y también un monomorfismo $h : A \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} A_i$ de manera que para cada proyección $\pi_j : \prod_{i \in \Omega} A_i \longrightarrow A_j$ con $\pi_j(\{a_i\}_{i \in \Omega}) := a_j$, la función $\pi_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es un epimorfismo.

Demostración. Por la Proposición 2.2.9, se tiene que $C := \{A/P \mid P \in \text{Spec}(A)\}$ es una familia de MV-cadenas. Considérese la función $h : A \longrightarrow \prod \{A/P \mid P \in \text{Spec}(A)\}$ tal que $h(a) = \{a/P\}_{P \in \text{Spec}(A)}$. Una revisión rápida muestra que h es un MV-homomorfismo.

Por otro lado, si $a, b \in A$ con $h(a) = h(b)$, significa que $\{a/P\}_{P \in \text{Spec}(A)} = \{b/P\}_{P \in \text{Spec}(A)}$ y a su vez, $a/P = b/P$ para cada ideal primo P en A . Como consecuencia, $a \sim_P b$ y $(a \ominus b) \oplus (b \ominus a) \in P$ para todo $P \in \text{Spec}(A)$, y el hecho de que $\bigcap \text{Spec}(A) = \{0\}$ implica que $(a \ominus b) \oplus (b \ominus a) = 0$. Luego, $a \ominus b = 0 = b \ominus a$, de donde $a \odot \neg b = 0 = b \odot \neg a$ y esto equivale a que $a \leq b$ y también $b \leq a$, así que se obtiene $a = b$ y h es un monomorfismo.

Por último, dado $\hat{a}/Q \in A/Q$ con $Q \in \text{Spec}(A)$, es inmediato que

$$(\pi_Q \circ h)(\hat{a}) = \pi_Q(\{\hat{a}/P\}_{P \in \text{Spec}(A)}) = \hat{a}/Q,$$

por lo que cada composición $\pi_j \circ h$ es un epimorfismo. $\square$

La siguiente proposición nos proporciona caracterizaciones muy útiles al momento de determinar si un ideal en una MV-álgebra es primo.

Proposición 2.3.7. *Sea A una MV-álgebra y P un ideal de A . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) P es un ideal primo de A .
- (ii) $\forall a, b \in A, a \wedge b \in P$ implica que, $a \in P$ o $b \in P$.
- (iii) $\forall I, J \in \text{Id}(A), I \wedge J \subseteq P$ implica que, $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea P un ideal primo y suponga que $a, b \in A$ con $a \wedge b \in P$. Sin pérdida de generalidad, asuma $a \oplus b \in P$. Luego,

$$(a \wedge b) \oplus (a \oplus b) = (a \oplus (a \oplus b)) \wedge (b \oplus (a \oplus b)) = (a \oplus (a \oplus b)) \wedge (b \vee a) \in P,$$

y dado que $a \leq (a \oplus (a \oplus b)) \wedge (b \vee a)$, resulta $a \in P$. Análogamente, $b \oplus a \in P$ implica $b \in P$ y de esta manera, $a \in P$ o $b \in P$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sean $I, J \in \text{Id}(A)$ que satisfacen $I \wedge J \subseteq P$ y sin pérdida de generalidad que $I \not\subseteq P$, entonces existe $z \in I$ de manera que $z \notin P$. Luego, para cualquier $w \in J$ se tiene que $w \wedge z \leq w$ y $w \wedge z \leq z$, lo que conlleva a que $w \wedge z \in I \wedge J$ y debido a que $I \wedge J \subseteq P$, resulta $w \wedge z \in P$ y por hipótesis, $w \in P$ o $z \in P$, de donde se obtiene que $w \in P$ y $J \subseteq P$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sean $a, b \in A$, considerando los ideales $I := (a \oplus b]$ y $J := (b \oplus a]$ se tiene que $I \wedge J = \{0\}$. En efecto, si $w \in I \wedge J$, entonces $w \leq n(a \oplus b)$, $w \leq m(b \oplus a)$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$ y asumiendo sin pérdida de generalidad que $m \leq n$, se sigue que

$w \leq n(b \ominus a)$, así que $w \leq n(a \ominus b) \wedge n(b \ominus a) = 0$ debido a que

$$\begin{aligned}
 (a \ominus b) \wedge (b \ominus a) &= (0 \vee (a \ominus b)) \wedge ((b \ominus a) \vee 0) \\
 &= ((a \ominus a) \vee (a \ominus b)) \wedge ((b \ominus a) \vee (b \ominus b)) \\
 &= (a \odot (\neg a \vee \neg b)) \wedge (b \odot (\neg a \vee \neg b)) \\
 &= (a \wedge b) \odot (\neg a \vee \neg b) \\
 &= (a \wedge b) \odot \neg(a \wedge b) \\
 &= (a \wedge b) \ominus (a \wedge b) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

y aplicando el Lema 2.3.1. Así, $w = 0$, $I \wedge J = \{0\} \subseteq P$ y en consecuencia, resulta $(a \ominus b) = I \subseteq P$ o $(b \ominus a) = J \subseteq P$, por lo que $a \ominus b \in P$ o $b \ominus a \in P$, y P es un ideal primo de A .

Con esto, se finaliza la prueba. □

Las equivalencias demostradas en la Proposición 2.3.7 serán útiles para lo que sigue, donde se introducirá la topología asignada al espectro primo de una MV-álgebra, estableciéndolo como un espacio topológico. Para ello, primero se definen los conjuntos que corresponderán a los abiertos.

Dado un ideal $I \neq \{0\}$ en un álgebra multivaluada A , el Corolario 2.3.4 garantiza que para cada $a \neq 0$ en I , existe un ideal primo P en A de manera que $a \notin P$, lo que implica que $I \not\subseteq P$ y en consecuencia, el conjunto

$$\mathcal{O}(I) = \{P \in \text{Spec}(A) : I \not\subseteq P\}$$

está bien definido.

Proposición 2.3.8. *Sea A una MV-álgebra.*

- (i) $\mathcal{O}(\{0\}) = \emptyset$,
- (ii) $\mathcal{O}(A) = \text{Spec}(A)$,
- (iii) $\mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J) = \mathcal{O}(I \wedge J)$, para cada par de ideales I, J en A .
- (iv) $\bigcup_{k \in K} \mathcal{O}(I_k) = \mathcal{O}\left(\bigvee_{k \in K} I_k\right)$, para cualquier colección de ideales $\{I_k \mid k \in K\}$ en A .

Demostración. Sea A una MV-álgebra.

- (i) Puesto que $0 \in P$ para todo ideal primo P de A , resulta de manera inmediata $\mathcal{O}(\{0\}) = \{P \in \text{Spec}(A) \mid \{0\} \not\subseteq P\} = \emptyset$.
- (ii) Si $P \in \text{Spec}(A)$ fuese tal que $A \subseteq P$, se tendría que $P = A$, lo que no es cierto ya que cada ideal primo es propio. Así, $\mathcal{O}(A) = \{P \in \text{Spec}(A) \mid A \not\subseteq P\} = \text{Spec}(A)$.
- (iii) Si $P \in \mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J)$, entonces $I \not\subseteq P$ y $J \not\subseteq P$, lo que implica que $I \wedge J \not\subseteq P$ pues de lo contrario, por ser P un ideal primo, contendría a I o a J . Luego, $P \in \mathcal{O}(I \wedge J)$ y $\mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J) \subseteq \mathcal{O}(I \wedge J)$. Por otro lado, si $P \in \mathcal{O}(I \wedge J)$, significa que $I \wedge J \not\subseteq P$, así que P no puede contener a I ni a J porque si no fuese así, $I \wedge J$ estaría contenido en P por transitividad. Por tanto, $P \in \mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J)$ y $\mathcal{O}(I \wedge J) \subseteq \mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J)$.
- (iv) Sea $P \in \bigcup \{\mathcal{O}(I_k) \mid k \in K\}$, entonces $P \in \mathcal{O}(I_{k'})$ para algún $k' \in K$ y $I_{k'} \not\subseteq P$. Como consecuencia, $I_{k'} \subseteq \bigvee \{I_k \mid k \in K\}$ implica que $\bigvee \{I_k \mid k \in K\} \not\subseteq P$, de donde $P \in \mathcal{O}(\bigvee \{I_k \mid k \in K\})$ y $\bigcup \{\mathcal{O}(I_k) \mid k \in K\} \subseteq \mathcal{O}(\bigvee \{I_k \mid k \in K\})$. Recíprocamente, si $P \in \mathcal{O}(\bigvee \{I_k \mid k \in K\})$, se tiene que $\bigvee \{I_k \mid k \in K\} \not\subseteq P$ y esto conlleva a que P no contiene a cada I_k , es decir que existe $k' \in K$ tal que $I_{k'} \not\subseteq P$ y $P \in \mathcal{O}(I_{k'})$. De esta manera, $P \in \bigcup \{\mathcal{O}(I_k) \mid k \in K\}$ y $\mathcal{O}(\bigvee \{I_k \mid k \in K\}) \subseteq \bigcup \{\mathcal{O}(I_k) \mid k \in K\}$.

□

De acuerdo a la Proposición 2.3.8, es consecuencia inmediata que la colección

$$\tau := \{\mathcal{O}(I) \mid I \in \text{Id}(A)\}$$

en cada MV-álgebra A , resulta ser una topología sobre $\text{Spec}(A)$, la cual es denominada usualmente como **topología espectral** o también **topología de Zariski**. En ese orden, se procederá a estudiar las propiedades que posee $\text{Spec}(A)$ establecido como espacio topológico.

Lema 2.3.9. *Sea A una MV-álgebra. Si $I, J \in \text{Id}(A)$, entonces $I \subseteq J$ si y solo si $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(J)$.*

Demostración. Sean A una MV-álgebra y $I, J \in \text{Id}(A)$. Si $I \subseteq J$ y $P \in \mathcal{O}(I)$, entonces $P \in \text{Spec}(A)$, $I \not\subseteq P$ y si ocurriese $J \subseteq P$, se tendría por transitividad que $I \subseteq P$, lo que sería una contradicción. Así, $J \not\subseteq P$, $P \in \mathcal{O}(J)$ y $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(J)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(J)$ y $J = A$, es claro que $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(A) = \text{Spec}(A)$ implica $I \subseteq A$. Sea ahora $J \neq A$ y suponga que $I \not\subseteq J$, es decir que existe $a \in I - J$. Luego, por el Teorema 2.3.2, existe un ideal primo P tal que $J \subseteq P$ y $\{a\} \cap P = \emptyset$, lo que significa que $a \notin P$ y $I \not\subseteq P$. Como consecuencia, $P \in \mathcal{O}(I)$ pero $P \notin \mathcal{O}(J)$, lo que contradice al hecho de que $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(J)$. Así, $I \subseteq J$. □

Corolario 2.3.10. *El retículo de ideales $\text{Id}(A)$ de una MV-álgebra A es isomorfo al retículo de subconjuntos abiertos τ de $\text{Spec}(A)$. Esto es,*

Demostración. Considere la función $f : \text{Id}(A) \longrightarrow \tau$ tal que $f(I) = \mathcal{O}(I)$. Claramente f es sobreyectiva y además, inyectiva por el Lema 2.3.9. Más aún,

$$\begin{aligned} f(I \vee J) &= \mathcal{O}(I \vee J) = \mathcal{O}(I) \cup \mathcal{O}(J) = f(I) \vee f(J), \\ f(I \wedge J) &= \mathcal{O}(I \wedge J) = \mathcal{O}(I) \cap \mathcal{O}(J) = f(I) \wedge f(J), \end{aligned}$$

por lo que f es un homomorfismo de retículos y así, f es un isomorfismo. $\square$

Proposición 2.3.11. *Para cada MV-álgebra A , el conjunto $\{\mathcal{O}([a]) \mid a \in A\}$ es una base para la topología del espacio $(\text{Spec}(A), \tau)$, y es cerrada bajo intersecciones finitas.*

Demostración. Sea A una MV-álgebra. Si $\mathcal{O}(I) \in \tau$, note que $\mathcal{O}(I) = \bigcup \{\mathcal{O}([a]) \mid a \in I\}$. En efecto, $a \in I$ implica $[a] \subseteq I$ y a su vez $\mathcal{O}([a]) \subseteq \mathcal{O}(I)$ por el Lema 2.3.9, de donde resulta $\bigcup \{\mathcal{O}([a]) \mid a \in I\} \subseteq \mathcal{O}(I)$; mientras que si $P \in \mathcal{O}(I)$, significa que $P \in \text{Spec}(A)$ y $I \not\subseteq P$, es decir que existe $b \in I$ tal que $b \notin P$, lo que lleva a que $P \in \mathcal{O}([b]) \subseteq \bigcup \{\mathcal{O}([a]) \mid a \in I\}$ y a su vez, $\mathcal{O}(I) \subseteq \bigcup \{\mathcal{O}([a]) \mid a \in I\}$. De esta manera, $\{\mathcal{O}([a]) \mid a \in A\}$ es una base para la topología τ .

En adición, para cada par $a, b \in A$ se tiene que $\mathcal{O}([a]) \cap \mathcal{O}([b]) = \mathcal{O}([a] \wedge [b]) = \mathcal{O}([a \wedge b])$, por lo que se concluye que la base es cerrada bajo intersecciones finitas. $\square$

Proposición 2.3.12. *Dada un álgebra multivaluada A , la colección $K(\text{Spec}(A))$ de los conjuntos abiertos y compactos a la vez en el espacio $\text{Spec}(A)$, es precisamente*

$$K(\text{Spec}(A)) = \{\mathcal{O}([a]) \mid a \in A\}.$$

Demostración. Sea A una MV-álgebra. Para cada $a \in A$, el conjunto $\mathcal{O}(a) := \mathcal{O}([a])$ es abierto en el espacio $(\text{Spec}(A), \tau)$. Por otro lado, si $a \in A$ y $\{\mathcal{O}(I_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\} \subseteq \tau$ es una familia tal que

$$\mathcal{O}(a) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{O}(I_\alpha) = \mathcal{O}\left(\bigvee_{\alpha \in \Omega} I_\alpha\right) = \mathcal{O}\left(\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} I_\alpha\right)\right),$$

se sigue por el Lema 2.3.9 que $[a] \subseteq (\bigcup \{I_\alpha \mid \alpha \in \Omega\})$, por lo que $a \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ con $x_j \in I_j$ para algunos $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \bigcup \{I_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. Como consecuencia, se obtiene que $a \in \bigcup \{I_j \mid 1 \leq j \leq n\}$, lo que significa que $[a] \subseteq (\bigcup \{I_j \mid 1 \leq j \leq n\})$ y por el Lema

2.3.9. $\mathcal{O}(a) \subseteq \mathcal{O}(\bigcup\{I_j \mid 1 \leq j \leq n\})$. Así, $\mathcal{O}(a)$ es compacto para cada $a \in A$.

Más aún, observe que los conjuntos $\mathcal{O}(a)$ son los únicos abiertos y compactos a la vez, puesto que si $\mathcal{O}(I) \in \tau$ es compacto, se tiene por lo mencionado anteriormente que $\mathcal{O}(I) = \bigcup\{\mathcal{O}(a) \mid a \in I\}$ y existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ de manera que

$$\mathcal{O}(I) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i) = \mathcal{O}\left(\bigvee_{i=1}^n (x_i)\right) = \mathcal{O}(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n).$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Corolario 2.3.13. Para cada MV-álgebra A , se tiene que $\text{Id}_c(A) \cong K(\text{Spec}(A))$.

Demostración. Considerando la función f presentada en el Corolario 2.3.10, restringida como $f|_{\text{Id}_c(A)} : \text{Id}_c(A) \rightarrow K(\text{Spec}(A))$, se obtiene un homomorfismo de retículos, que claramente es sobreyectivo, y que es inyectivo por el Lema 2.3.9. Se concluye que $\text{Id}_c(A) \cong K(\text{Spec}(A))$. $\square$

Observación 2.3.14. El retículo $K(\text{Spec}(A))$ es un retículo distributivo y acotado, debido a que para cada $a, b \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(a) \vee (\mathcal{O}(b) \wedge \mathcal{O}(c)) &= \mathcal{O}(a) \vee \mathcal{O}(b \wedge c) \\ &= \mathcal{O}(a \vee (b \wedge c)) \\ &= \mathcal{O}((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \\ &= \mathcal{O}(a \vee b) \wedge \mathcal{O}(a \vee c) \\ &= (\mathcal{O}(a) \vee \mathcal{O}(b)) \wedge (\mathcal{O}(a) \vee \mathcal{O}(c)), \end{aligned}$$

mientras que el elemento mínimo es $\mathcal{O}(0) = \emptyset$ y el elemento máximo es $\mathcal{O}(1) = \text{Spec}(A)$. De manera inmediata, el Lema 2.3.13 implica que $\text{Id}_c(A)$ también es un retículo distributivo y acotado.

Lema 2.3.15. Dada una MV-álgebra A , la clausura de un punto en el espacio $(\text{Spec}(A), \tau)$ coincide con un conjunto de la forma $\mathcal{O}(I)^c$, donde $I \in \text{Spec}(A)$.

Demostración. Sean A una MV-álgebra y $J \in \text{Spec}(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\{J\}} &= \bigcap \{W \subseteq \text{Spec}(A) \mid J \in W \text{ y } W \text{ es cerrado}\} \\ &= \bigcap \{\mathcal{O}(I)^c \mid J \in \mathcal{O}(I)^c\} \\ &= \left(\bigcup \{\mathcal{O}(I) \mid J \notin \mathcal{O}(I)\} \right)^c \\ &= \mathcal{O}\left(\bigvee \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\}\right)^c \\ &= \mathcal{O}\left(\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\}\right)^c. \end{aligned}$$

Si $a \in A$ con $a \wedge b \in (\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\})$, se sigue que $a \wedge b \leq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ donde $x_i \in I_i$ y $J \notin \mathcal{O}(I_i)$ para ciertos ideales $I_1, I_2, \dots, I_n$, lo que implica que $I_i \subseteq J$, $x_i \in J$ y $a \wedge b \in J$. Luego, por ser J un ideal primo, $a \in J$ o $b \in J$. Ahora bien, como $J \notin \mathcal{O}(J)$, se tiene que $J \in \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\}$ y a su vez, $J \subseteq \bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\} \subseteq (\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\})$, lo que indica que $a \in (\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\})$ o $b \in (\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\})$ y así, $(\bigcup \{I \mid J \notin \mathcal{O}(I)\})$ es un ideal primo de A . $\square$

El siguiente teorema recopila todas las propiedades anteriormente descritas y expone la característica principal del espectro primo de una álgebra multivaluada como espacio topológico, ser un espacio espectral. Al estudiar las nociones topológicas derivadas del espectro primo de una MV-álgebra, se plantea naturalmente cuáles son las condiciones que debe cumplir un espacio para ser homeomorfo al espectro primo de una MV-álgebra. Este problema se responde en la última sección de este capítulo.

Teorema 2.3.16. *Si A es una MV-álgebra, entonces $(\text{Spec}(A), \tau)$ es un espacio espectral.*

Demostración. Por las proposiciones 2.3.11 y 2.3.12, se tiene que la colección $K(\text{Spec}(A))$ es una base para la topología del espacio $(\text{Spec}(A), \tau)$, que además es cerrada bajo intersecciones finitas.

Por otra parte, como $\text{Spec}(A) = \mathcal{O}(1)$, significa que $\text{Spec}(A)$ es compacto y también, si $P_1, P_2 \in \text{Spec}(A)$, el conjunto $U := \mathcal{O}((P_1^c \cap P_2)) \in \tau$ satisface $P_1 \in U$ y $P_2 \notin U$, ya que $P_1^c \cap P_2 \not\subseteq P_1$ y $P_1^c \cap P_2 \subseteq P_2$, lo que indica que $\text{Spec}(A)$ es T_0 .

Por último, veamos que un subconjunto cerrado de $\text{Spec}(A)$ es irreducible, si y solo si, es de la forma $\mathcal{O}(I)^c$ para algún ideal primo I . Suponga que I es un ideal de A y $\mathcal{O}(I)^c$ es irreducible. Si $a, b \in A$ con $a \wedge b \in I$, se sigue que $\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) = \mathcal{O}(a \wedge b) \subseteq \mathcal{O}(I)$ por el Lema 2.3.9, esto es, $\mathcal{O}(I)^c \subseteq \mathcal{O}(a)^c \cup \mathcal{O}(b)^c$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(I)^c &= \mathcal{O}(I)^c \cap (\mathcal{O}(a)^c \cup \mathcal{O}(b)^c) \\ &= (\mathcal{O}(I)^c \cup \mathcal{O}(b)^c) \cap (\mathcal{O}(a)^c \cup \mathcal{O}(b)^c) \cap \mathcal{O}(I)^c \\ &= [(\mathcal{O}(a)^c \cap \mathcal{O}(I)^c) \cup \mathcal{O}(b)^c] \cap [(\mathcal{O}(a)^c \cap \mathcal{O}(I)^c) \cup \mathcal{O}(I)^c] \\ &= [\mathcal{O}(a)^c \cap \mathcal{O}(I)^c] \cup [\mathcal{O}(b)^c \cap \mathcal{O}(I)^c], \end{aligned}$$

y por ser $\mathcal{O}(I)^c$ irreducible, resulta $\mathcal{O}(a)^c \cap \mathcal{O}(I)^c = \mathcal{O}(I)^c$ o $\mathcal{O}(b)^c \cap \mathcal{O}(I)^c = \mathcal{O}(I)^c$, es decir, $\mathcal{O}(I)^c \subseteq \mathcal{O}(a)^c$ o $\mathcal{O}(I)^c \subseteq \mathcal{O}(b)^c$ y a su vez, $\mathcal{O}(a) \subseteq \mathcal{O}(I)$ o $\mathcal{O}(b) \subseteq \mathcal{O}(I)$, por lo que $a \in I$ o $b \in I$, y el ideal I es primo.

Por otro lado, suponga que I es un ideal primo y $\mathcal{O}(I)^c = \mathcal{O}(J)^c \cup \mathcal{O}(K)^c$ para algunos ideales J, K de A . Luego, $\mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(J) \cap \mathcal{O}(K) = \mathcal{O}(J \cap K)$ y por ende, $I = J \cap K$. Si ocurriese que $I \neq J$ y $I \neq K$, existirían $a \in J - I$ y $b \in K - I$ de manera que $a \wedge b \in J \cap K = I$ pues $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, lo que sería una contradicción ya que I es un ideal primo. De esta manera, $I = J$ o $I = K$, y esto significa que $\mathcal{O}(I)^c = \mathcal{O}(J)^c$ o $\mathcal{O}(I)^c = \mathcal{O}(K)^c$, así que $\mathcal{O}(I)^c$ es irreducible. Como consecuencia del Lema 2.3.15, $\text{Spec}(A)$ es sobrio.

Por lo tanto, $(\text{Spec}(A), \tau)$ es un espacio espectral. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Hemos visto que a cada MV-álgebra A es posible asociarle un espacio topológico $\text{Spec}(A)$. En realidad, esto puede extenderse también a morfismos, lo que define una acción funtorial.

Observación 2.3.17. Para cada MV-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, se define la función $\text{Spec}(f) : \text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ como $\text{Spec}(f)(P) = f^{-1}(P)$, la cual está bien definida puesto que si $P \in \text{Spec}(B)$, es evidente que $f^{-1}(P) \neq \emptyset$ ya que $f(0) = 0 \in P$ y $0 \in f^{-1}(P)$. Si $a, b \in f^{-1}(P)$, entonces $f(a), f(b) \in P$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \in P$, de donde $a \vee b \in f^{-1}(P)$. Además, si $a \in A$ y $b \in f^{-1}(P)$ con $a \leq b$, se tiene que $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \in P$, así que $f(a) \in P$ y $a \in f^{-1}(P)$. Luego, $f^{-1}(P)$ es un ideal de A .

Ahora bien, si $a, b \in A$ y $a \wedge b \in f^{-1}(P)$, significa que $f(a \wedge b) \in P$ y como $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, se sigue que $f(a) \in P$ o $f(b) \in P$ por ser P un ideal primo de B , es decir que $a \in f^{-1}(P)$ o $b \in f^{-1}(P)$, de donde $f^{-1}(P) \in \text{Spec}(A)$ y la función $\text{Spec}(f)$ está bien definida.

Proposición 2.3.18. Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo entre MV-álgebras, entonces la función $\text{Spec}(f) : \text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ es continua.

Demostración. Sea $\mathcal{O}(I) \subseteq \text{Spec}(A)$, observe que $(\text{Spec}(f))^{-1}(\mathcal{O}(I)) \subseteq \text{Spec}(B)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\text{Spec}(f))^{-1}(\mathcal{O}(I)) &= \{P \in \text{Spec}(B) \mid \text{Spec}(f)(P) \in \mathcal{O}(I)\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(B) \mid I \not\subseteq \text{Spec}(f)(P)\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(B) \mid I \not\subseteq f^{-1}(P)\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(B) \mid f(I) \not\subseteq P\} \\ &= \mathcal{O}((f(I))). \end{aligned}$$

Como consecuencia, $(\text{Spec}(f))^{-1}(\mathcal{O}(I)) \in \text{Spec}(B)$. Esto prueba que $\text{Spec}(f)$ es una función continua. $\square$

Además de lo anterior, es claro que si A es una MV-álgebra, entonces $\text{Spec}(1_A) = 1_{\text{Spec}(A)}$ y para cualquier par de homomorfismos entre MV-álgebras $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, se tiene que

$$\text{Spec}(g \circ f) = (g \circ f)^{-1}|_{\text{Spec}(C)} = (f^{-1} \circ g^{-1})|_{\text{Spec}(C)} = \text{Spec}(f) \circ \text{Spec}(g).$$

De esta manera, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3.19. *Spec define un funtor contravariante de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **Top** de espacios topológicos.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Spec}(A) \\ \downarrow f & & \uparrow \text{Spec}(f) \\ B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Spec}(B) \end{array}$$

A continuación, se presentarán otros dos ejemplos de acciones functoriales.

Como consecuencia de la Proposición 2.2.11 y de la Observación 2.3.14, se puede entender la asociación de una MV-álgebra A con su retículo de ideales principales $\text{Id}_c(A)$ como una acción functorial $\text{Id}_c(A)$. De hecho, para cada álgebra multivaluada A se tiene que $\text{Id}_c(1_A) = 1_{\text{Id}_c(A)}$, mientras que para cualquier par de MV-homomorfismos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, resulta

$$\begin{aligned} \text{Id}_c(g \circ f)(a) &= ((g \circ f)(a)) \\ &= \text{Id}_c(g)(f(a)) \\ &= (\text{Id}_c(g) \circ \text{Id}_c(f))(a), \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, lo que implica que $\text{Id}_c(g \circ f) = \text{Id}_c(g) \circ \text{Id}_c(f)$. De esta manera, se obtiene lo siguiente.

Proposición 2.3.20. *Id_c define un funtor covariante de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **BDL** de retículos distributivos y acotados.*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Id}_c(A) \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{Id}_c(f) \\
 B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Id}_c(B)
 \end{array}$$

El nombre **BDL** de la categoría de retículos distributivos y acotados, proviene de sus siglas en inglés, *bounded distributive lattice*.

Observación 2.3.21. Dado un MV-homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, este induce la función $K(\text{Spec})(f) : K(\text{Spec}(A)) \longrightarrow K(\text{Spec}(B))$ dada por $K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a)) = \mathcal{O}(f(a))$.

Proposición 2.3.22. Si $f : A \longrightarrow B$ es un MV-homomorfismo, entonces la función $K(\text{Spec})(f) : K(\text{Spec}(A)) \longrightarrow K(\text{Spec}(B))$ es un homomorfismo de retículos.

Demostración. Para cada par $a, b \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a) \vee \mathcal{O}(b)) &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a \vee b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a \vee b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a) \vee f(b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a)) \vee \mathcal{O}(f(b)) \\
 &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a)) \vee K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(b)),
 \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}
 K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a) \wedge \mathcal{O}(b)) &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a \wedge b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a \wedge b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a) \wedge f(b)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a)) \wedge \mathcal{O}(f(b)) \\
 &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a)) \wedge K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(b)),
 \end{aligned}$$

lo que muestra que $K(\text{Spec})(f)$ es un homomorfismo entre retículos. $\square$

Adicional a esto, es fácil ver que $K(\text{Spec}(1_A)) = 1_{K(\text{Spec}(A))}$, mientras que para cualquier par de MV-homomorfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, resulta

$$\begin{aligned}
 K(\text{Spec})(g \circ f)(\mathcal{O}(a)) &= \mathcal{O}((g \circ f)(a)) \\
 &= K(\text{Spec})(g)(\mathcal{O}(f(a))) \\
 &= (K(\text{Spec})(g) \circ K(\text{Spec})(f))(\mathcal{O}(a)),
 \end{aligned}$$

lo que indica que $K(\text{Spec})(g \circ f) = K(\text{Spec})(g) \circ K(\text{Spec})(f)$. Por lo tanto, se obtiene:

Proposición 2.3.23. *$K(\text{Spec})$ define un funtor covariante de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **BDL** de retículos distributivos y acotados.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & K(\text{Spec}(A)) \\ \downarrow f & & \downarrow K(\text{Spec})(f) \\ B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & K(\text{Spec}(B)) \end{array}$$

La última proposición de esta sección destaca un aspecto interesante de los ideales primos en una álgebra multivaluada, todo ideal principal puede describirse como la intersección de todos los ideales primos que contienen a su generador.

Proposición 2.3.24. *Sea A una MV-álgebra. Para cada $a \in A$ de orden infinito,*

$$(a] = \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)),$$

es decir, $(a]$ coincide con la intersección de todos los ideales primos que contienen a a .

Demostración. Note que $\text{ord}(a) = \infty$ implica que $(a] \neq A$ y, considerando $(a]$ y $\{1\}$ como I y S respectivamente en el Teorema 2.3.2, se obtiene que $\bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)) \neq \emptyset$. Ahora bien, para cada $P \in \text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)$, P es un ideal primo que contiene a a , lo que indica que $a \in \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a))$ y así, $(a] \subseteq \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a))$. En sentido contrario, sea $b \in A$ tal que $b \in (a]^c$, entonces $b \notin (a]$ y, tomando $(a]$ y $\{b\}$ como I y S respectivamente en el Teorema 2.3.2, existe un ideal primo P tal que $(a] \subseteq P$ y $P \cap \{b\} = \emptyset$, es decir que $a \in P$ y $b \notin P$. Luego, $b \in (\bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)))^c$ y $(a]^c \subset (\bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)))^c$, por lo que $\bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)) \subseteq (a]$ y se concluye que $(a] = \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a))$. $\square$

2.4. El retículo de Belluce de una MV-álgebra

Vamos a introducir el primer concepto necesario para establecer la caracterización topológica del espectro primo de una álgebra multivaluada, el *retículo de Belluce asociado*. Este retículo se define como un conjunto cociente de la MV-álgebra, utilizando una relación de equivalencia basada en la pertenencia a los mismos ideales primos. Luego, se observa que este retículo es distributivo y acotado, y que además es isomorfo tanto al

retículo de ideales principales de la MV-álgebra como al retículo de los conjuntos abiertos y compactos del espectro primo. Finalmente, se muestra que esto conduce a un funtor covariante entre las categorías de las MV-álgebras y la de los retículos distributivos y acotados.

Sea A una MV-álgebra, para cada $S \subseteq \text{Spec}(A)$ es posible definir una relación de equivalencia $\sim_S$ sobre A , como sigue:

$$a \sim_S b, \text{ si y solo si, } \forall P \in S : a \in P \text{ si y solo si } b \in P.$$

En otras palabras, dos elementos están relacionados siempre que pertenezcan a los mismos ideales primos de S .

Proposición 2.4.1. *Para cada $S \subseteq \text{Spec}(A)$, la relación $\sim_S$ es una congruencia sobre A con respecto a las operaciones $\oplus, \vee, \wedge$.*

Demostración. Es fácil ver que $\sim_S$ es una relación de equivalencia sobre A . Veamos que $\sim_S$ es compatible con las operaciones $\oplus, \vee$ y $\wedge$.

Sean $a, b, a', b' \in A$ con $a \sim_S b$ y $a' \sim_S b'$. Si $P \in S$ y $a \oplus a' \in P$, entonces $a, a' \leq a \oplus a'$ implica $a, a' \in P$ por ser P un ideal, de donde $b, b' \in P$ y a su vez, $b \oplus b' \in P$. Análogamente, $b \oplus b' \in P$ implica $a \oplus a' \in P$, lo que significa que $a \oplus a' \sim_S b \oplus b'$.

En segundo lugar, sea $P \in S$ tal que $a \vee a' \in P$, entonces $a, a' \in P$ pues $a, a' \leq a \vee a'$, lo que conlleva a que $b, b' \in P, b \oplus b' \in P$ e igualmente, $b \vee b' \leq b \oplus b'$ implica $b \vee b' \in P$. De manera análoga, $a \vee a' \in P$ siempre que $b \vee b' \in P$. Así, $a \vee a' \sim_S b \vee b'$.

Por último, si $P \in S$ es tal que $a \wedge a' \in P$, por ser P un ideal primo se tiene que $a \in P$ o $a' \in P$, es decir que $b \in P$ o $b' \in P$ y puesto que $b \wedge b' \leq b, b'$, resulta $b \wedge b' \in P$. De manera similar, $a \wedge a' \in P$ si $b \wedge b' \in P$ y así, $a \wedge a' \sim_S b \wedge b'$.

Esto concluye que la relación $\sim_S$ es una congruencia con respecto a las operaciones binarias de la suma, supremo e ínfimo en una MV-álgebra. $\square$

En adelante, consideraremos $S = \text{Spec}(A)$ y a la relación $\sim_{\text{Spec}(A)}$ como $\sim$. El conjunto cociente $A/\sim$ será denotado como $\beta(A)$, mientras que $\beta(a) := \{b \in A \mid a \sim b\}$ para cada $a \in A$. La importancia de este procedimiento recae en que a cada MV-álgebra se le puede asociar un retículo distributivo y acotado, tal cual como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2. Si A es una MV-álgebra, $\langle \beta(A), \leq \rangle$ es un retículo distributivo, acotado inferiormente por $\beta(0)$ y superiormente por $\beta(1)$, donde para cualesquiera $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}\beta(a) \wedge \beta(b) &:= \beta(a \wedge b) \\ \beta(a) \vee \beta(b) &:= \beta(a \vee b) = \beta(a \oplus b) \\ \beta(a) &\leq \beta(b), \text{ si y solo si, } \beta(a \wedge b) = \beta(a), \text{ si y solo si, } \beta(a \vee b) = \beta(b).\end{aligned}$$

Demostración. Sea A una MV-álgebra, veamos que $\beta(A)$ es un retículo, definiendo las operaciones $\vee, \wedge$ como en el enunciado. Sean $a, b, c \in A$,

- $\beta(a) \vee \beta(b) = \beta(a \vee b) = \beta(b \vee a) = \beta(b) \vee \beta(a).$
- $\beta(a) \wedge \beta(b) = \beta(a \wedge b) = \beta(b \wedge a) = \beta(b) \wedge \beta(a).$
- $$\begin{aligned}(\beta(a) \vee \beta(b)) \vee \beta(c) &= \beta(a \vee b) \vee \beta(c) \\ &= \beta((a \vee b) \vee c) \\ &= \beta(a \vee (b \vee c)) \\ &= \beta(a) \vee \beta(b \vee c) \\ &= \beta(a) \vee (\beta(b) \vee \beta(c))\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\beta(a) \wedge \beta(b)) \wedge \beta(c) &= \beta(a \wedge b) \wedge \beta(c) \\ &= \beta((a \wedge b) \wedge c) \\ &= \beta(a \wedge (b \wedge c)) \\ &= \beta(a) \wedge \beta(b \wedge c) \\ &= \beta(a) \wedge (\beta(b) \wedge \beta(c))\end{aligned}$$
- $\beta(a) \vee \beta(a) = \beta(a \vee a) = \beta(a) = \beta(a \wedge a) = \beta(a) \wedge \beta(a).$
- $\beta(a) \vee (\beta(a) \wedge \beta(b)) = \beta(a) \vee \beta(a \wedge b) = \beta(a \vee (a \wedge b)) = \beta(a).$
- $\beta(a) \wedge (\beta(a) \vee \beta(b)) = \beta(a) \wedge \beta(a \vee b) = \beta(a \wedge (a \vee b)) = \beta(a).$

Ahora bien, definiendo la relación $\leq$ en $\beta(A)$ como

$$\beta(a) \leq \beta(b), \text{ si y solo si, } \beta(a \wedge b) = \beta(a), \text{ si y solo si, } \beta(a \vee b) = \beta(b),$$

se obtiene que $\leq$ es un orden parcial. Además, $\beta(a) \wedge \beta(0) = \beta(a \wedge 0) = \beta(a)$ y también $\beta(a) \vee \beta(1) = \beta(a \vee 1) = \beta(1)$ para cualquier $a \in A$, indica que $\beta(A)$ es un retículo acotado,

inferiormente por $\beta(0)$ y superiormente por $\beta(1)$. Por último,

$$\begin{aligned}\beta(a) \vee (\beta(b) \wedge \beta(c)) &= \beta(a) \vee \beta(b \wedge c) \\ &= \beta(a \vee (b \wedge c)) \\ &= \beta((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \\ &= \beta(a \vee b) \wedge \beta(a \vee c) \\ &= (\beta(a) \vee \beta(b)) \wedge (\beta(a) \vee \beta(c)),\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\beta(a) \wedge (\beta(b) \vee \beta(c)) &= \beta(a) \wedge \beta(b \vee c) \\ &= \beta(a \wedge (b \vee c)) \\ &= \beta((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \\ &= \beta(a \wedge b) \vee \beta(a \wedge c) \\ &= (\beta(a) \wedge \beta(b)) \vee (\beta(a) \wedge \beta(c)),\end{aligned}$$

con $a, b, c \in A$, de donde se obtiene que $\beta(A)$ es un retículo distributivo y acotado. Adicionalmente, note que $\beta(a \vee b) = \beta(a \oplus b)$, puesto que si $P \in \text{Spec}(A)$ es tal que $a \vee b \in P$, entonces $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ implican $a, b \in P$ y $a \oplus b \in P$; y por otro lado, si $a \oplus b \in P$, entonces $a \vee b \leq a \oplus b$ conlleva a que $a \vee b \in P$.

Esto concluye la prueba. □

Con base en la proposición anterior, para cada MV-álgebra A se define el **retículo de Belluce asociado a A** , denotado por $\beta(A)$, como el retículo con $A/\sim$ como conjunto subyacente. El nombre se debe al matemático Lawrence Peter Belluce, quien introdujo esta noción en [3] en el año 1986 y contribuyó de manera significativa al estudio del álgebra universal, la lógica y la teoría de conjuntos fuzzy.

Observación 2.4.3. *Es fácil ver que $\beta(a) = \beta(b)$, si y solo si, $(a] = (b]$. En efecto, si $(a] = (b]$ y $P \in \text{Spec}(A)$ es tal que $a \in P$, entonces $(b] = (a] \subseteq P$ y $b \in P$; análogamente $b \in P$ implica $a \in P$, así que $\beta(a) = \beta(b)$. Recíprocamente, $\beta(a) = \beta(b)$ implica por definición que $\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)$ coincide con $\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(b)$ y por la Proposición 2.3.24,*

$$(a] = \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(a)) = \bigcap (\text{Spec}(A) - \mathcal{O}(b)) = (b].$$

De esta manera se obtiene inmediatamente que $\beta(A) \cong \text{Id}_c(A)$ y además, por el Corolario 2.3.13, se puede concluir también que $\beta(A) \cong K(\text{Spec}(A))$.

La construcción de la topología espectral es frecuentemente utilizada en ciertas estructuras algebraicas, y en particular, es posible dotar con esta topología al espectro primo de cualquier retículo. Más aún, el funtor Spec expuesto en la Proposición 2.3.19 también se puede definir de manera contravariante de la categoría **BDL** de retículos distributivos y acotados a la categoría **Top** de espacios topológicos.

Resulta interesante que dada una álgebra multivaluada, su espectro primo coincide con el espectro primo de su retículo de Belluce asociado, enfatizando que esta correspondencia se entiende desde el punto de vista topológico.

Teorema 2.4.4. *Si A es una MV-álgebra, entonces $\text{Spec}(A) \cong \text{Spec}(\beta(A))$.*

Demostración. Sea A una MV-álgebra, defínase la función $\varphi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(\beta(A))$ tal que $P \mapsto \beta(P) := \{\beta(a) \mid a \in P\}$. Si P es un ideal primo de A , veamos que $\beta(P)$ es un ideal primo del retículo $\beta(A)$. Claramente $\beta(P) \neq \emptyset$ ya que $0 \in P$ y $\beta(0) \in \beta(P)$. Sean $\beta(a) \in \beta(A)$ y $\beta(b) \in \beta(P)$ con $\beta(a) \leq \beta(b)$, entonces $\beta(a) = \beta(a) \wedge \beta(b) = \beta(a \wedge b)$ y como $a \wedge b \leq b$, se sigue que $a \wedge b \in P$ y $\beta(a) = \beta(a \wedge b) \in \beta(P)$. Además, si $\beta(a), \beta(b) \in \beta(P)$, puesto que $a, b \in P$ implica $a \oplus b \in P$ y a su vez, $a \vee b \leq a \oplus b$ indica que $a \vee b \in P$. Así, resulta $\beta(a) \vee \beta(b) = \beta(a \vee b) \in \beta(P)$ y $\beta(P)$ es un ideal de $\beta(A)$.

Adicionalmente, si $\beta(a), \beta(b) \in \beta(A)$ y $\beta(a \wedge b) = \beta(a) \wedge \beta(b) \in \beta(P)$, se obtiene que $a \wedge b \in P$ y al ser P un ideal primo de A , $a \in P$ o $b \in P$, por lo que $\beta(a) \in \beta(P)$ o $\beta(b) \in \beta(P)$. De esta manera, $\beta(P) \in \text{Spec}(\beta(A))$ y φ está bien definida.

En segundo lugar, defínase la función $\phi : \text{Spec}(\beta(A)) \rightarrow \text{Spec}(A)$ como

$$\phi(W) = \bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in W\}.$$

Veamos que para cada ideal primo W de $\beta(A)$, $\phi(W)$ es un ideal primo de A . Claramente $\phi(W) \neq \emptyset$ pues $W \neq \emptyset$ y si $a, b \in \phi(W)$, existen $c, d \in A$ tales que $a \in \beta(c)$ y $b \in \beta(d)$, con $\beta(c), \beta(d) \in W$, lo que significa que $\beta(a) = \beta(c)$ y $\beta(b) = \beta(d)$. Luego, se tiene que $\beta(a \oplus b) = \beta(a \vee b) = \beta(a) \vee \beta(b) = \beta(c) \vee \beta(d) = \beta(c \vee d)$, de donde $a \oplus b \in \beta(c \vee d)$ y $\beta(c \vee d) = \beta(c) \vee \beta(d) \in W$, así que $a \oplus b \in \phi(W)$.

Además, si $a \in A$ y $b \in \phi(W)$ son tales que $a \leq b$, se sigue que $b \in \beta(c)$ para algún $c \in A$ y $\beta(c) \in W$, lo que implica que $\beta(a) \leq \beta(b) = \beta(c)$ y $\beta(a) \in W$. Como $a \in \beta(a)$, se tiene que $a \in \phi(W)$. Más aún, si $a, b \in A$ y $a \wedge b \in \phi(W)$, se tiene que $a \wedge b \in \beta(c)$ con $c \in A$ y $\beta(c) \in W$, lo cual conlleva a que $\beta(a) \wedge \beta(b) = \beta(a \wedge b) = \beta(c) \in W$ y dado que W es primo, resulta $\beta(a) \in W$ o $\beta(b) \in W$, es decir que $a \in \phi(W)$ o $b \in \phi(W)$ puesto

que $a \in \beta(a)$, $b \in \beta(b)$. Como consecuencia, $\phi(W)$ es un ideal primo de A y ϕ está bien definida.

Ahora bien, observe que para cualquier $P \in \text{Spec}(A)$,

$$(\phi \circ \varphi)(P) = \phi(\beta(P)) = \bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in \beta(P)\},$$

y $\bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in \beta(P)\} = P$ pues si $b \in P$, se tiene que $b \in \beta(b)$ con $\beta(b) \in \beta(P)$, de donde $b \in \bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in \beta(P)\}$; mientras que si $b \in \bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in \beta(P)\}$, significa que $b \in \beta(a)$ para algún $a \in P$, por lo que $\beta(a) = \beta(b)$, $a \sim b$ y $b \in P$. Así, $\phi \circ \varphi = 1_{\text{Spec}(A)}$. Por otro lado, para cada $W \in \text{Spec}(\beta(A))$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)(W) &= \varphi \left(\bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in W\} \right) \\ &= \beta \left(\bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in W\} \right) \\ &= \left\{ \beta(b) \mid b \in \bigcup \{\beta(a) \mid \beta(a) \in W\} \right\} \\ &= \{ \beta(b) \mid \exists a \in A, b \in \beta(a), \beta(a) \in W \}, \end{aligned}$$

y $\{ \beta(b) \mid \exists a \in A, b \in \beta(a), \beta(a) \in W \} = W$. En efecto, $\beta(b) \in W$ y $b \in \beta(a)$ implica $\beta(b) \in \{ \beta(b) \mid \exists a \in A, b \in \beta(a), \beta(a) \in W \}$, mientras que si $\beta(b) \in \beta(A)$ es tal que $b \in \beta(a)$ para algún $\beta(a) \in W$, se sigue que $\beta(b) = \beta(a) \in W$. Así, $\varphi \circ \phi = 1_{\text{Spec}(\beta(A))}$ y por tanto, φ es una función biyectiva.

En tercer lugar, veamos que tanto φ como ϕ son funciones continuas. Para cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathcal{O}(\beta(a))) &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid \varphi(P) \in \mathcal{O}(\beta(a))\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid \beta(a) \notin \varphi(P)\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid \beta(a) \notin \beta(P)\} \\ &= \{P \in \text{Spec}(A) \mid a \notin P\} \\ &= \mathcal{O}(a), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
 \phi^{-1}(\mathcal{O}(a)) &= \{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid \phi(W) \in \mathcal{O}(a)\} \\
 &= \{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid a \notin \phi(W)\} \\
 &= \left\{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid a \notin \bigcup \{\beta(b) \mid \beta(b) \in W\}\right\} \\
 &= \{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid \forall \beta(b) \in W, a \notin \beta(b)\} \\
 &= \{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid \forall \beta(b) \in W, \beta(a) \neq \beta(b)\} \\
 &= \{W \in \text{Spec}(\beta(A)) \mid \beta(a) \notin W\} \\
 &= \mathcal{O}(\beta(a)),
 \end{aligned}$$

lo que conlleva a que

$$\begin{aligned}
 \varphi^{-1}(\mathcal{O}(W)) &= \varphi^{-1} \left(\bigcup_{\beta(a) \in W} \mathcal{O}(\beta(a)) \right) \\
 &= \bigcup_{\beta(a) \in W} \varphi^{-1}(\mathcal{O}(\beta(a))) \\
 &= \bigcup_{\beta(a) \in W} \mathcal{O}(a) \\
 &= \mathcal{O}(\{\beta(a) \mid \beta(a) \in W\}),
 \end{aligned}$$

y a su vez,

$$\begin{aligned}
 \phi^{-1}(\mathcal{O}(I)) &= \phi^{-1} \left(\bigcup_{a \in I} \mathcal{O}(a) \right) \\
 &= \bigcup_{a \in I} \phi^{-1}(\mathcal{O}(a)) \\
 &= \bigcup_{a \in I} \mathcal{O}(\beta(a)) \\
 &= \mathcal{O}(\beta(I)).
 \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, φ y ϕ son funciones continuas. Finalmente, se concluye que φ es un homeomorfismo y $\text{Spec}(A) \cong \text{Spec}(\beta(A))$. $\square$

Se tiene que a cada MV-álgebra A es posible asociarle un retículo distributivo acotado $\beta(A)$. No obstante, esta operación de Belluce puede extenderse a homomorfismos entre MV-álgebras.

Observación 2.4.5. Si $f : A \longrightarrow B$ es un MV-homomorfismo, se introduce la función $\beta(f) : \beta(A) \longrightarrow \beta(B)$ como $\beta(f)(\beta(a)) := \beta(f(a))$, la cual está bien definida, puesto que

si $a, b \in A$ son tales que $\beta(a) = \beta(b)$, la Observación 2.4.3 implica que $[a] = [b]$, por lo que existen $m, n \in \mathbb{N}$ de manera que $a \leq mb$ y también $b \leq na$. Luego, $f(a) \leq f(mb) = mf(b)$ y a su vez $f(b) \leq f(na) = nf(a)$, lo que significa que $(f(a)) = (f(b))$ y esto equivale a que $\beta(f(a)) = \beta(f(b))$. Esto concluye que la función $\beta(f)$ está bien definida.

Proposición 2.4.6. Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo entre MV-álgebras, entonces la función $\beta(f) : \beta(A) \longrightarrow \beta(B)$ es un homomorfismo de retículos.

Demostración. Sean $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}\beta(f)(\beta(a) \vee \beta(b)) &= \beta(f)(\beta(a \vee b)) \\ &= \beta(f(a \vee b)) \\ &= \beta(f(a) \vee f(b)) \\ &= \beta(f(a)) \vee \beta(f(b)),\end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}\beta(f)(\beta(a) \wedge \beta(b)) &= \beta(f)(\beta(a \wedge b)) \\ &= \beta(f(a \wedge b)) \\ &= \beta(f(a) \wedge f(b)) \\ &= \beta(f(a)) \wedge \beta(f(b)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta(f)$ es un homomorfismo de retículos. □

Más aún, para cada MV-álgebra A y para cada $a \in A$,

$$\beta(1_A)(\beta(a)) = \beta(1_A(a)) = \beta(a) = 1_{\beta(A)}(\beta(a)),$$

por lo que $\beta(1_A) = 1_{\beta(A)}$. Además, si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son homomorfismos entre MV-álgebras, se sigue que

$$\begin{aligned}\beta(g \circ f)(\beta(a)) &= \beta((g \circ f)(a)) \\ &= \beta(g(f(a))) \\ &= \beta(g)(\beta(f(a))) \\ &= \beta(g)(\beta(f)(\beta(a))) \\ &= (\beta(g) \circ \beta(f))(\beta(a)),\end{aligned}$$

para cada $a \in A$, de donde $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f)$. De esta manera, se obtiene:

Proposición 2.4.7. β es un funtor covariante de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **BDL** de retículos distributivos acotados.

$$\begin{array}{ccc} A & \dashrightarrow & \beta(A) \\ f \downarrow & & \downarrow \beta(f) \\ B & \dashrightarrow & \beta(B) \end{array}$$

2.5. Relaciones entre las categorías MV, BDL y Top

El Teorema 2.4.4 puede entenderse, desde el punto de vista categórico, como la composición entre los funtores Spec_{BDL} y β , que termina coincidiendo con el funtor Spec_{MV} establecido en la Proposición 2.3.19. Específicamente:

Teorema 2.5.1. Los funtores $\text{Spec}_{\text{BDL}} \circ \beta$ y Spec_{MV} son naturalmente isomorfos. Esto es, $\text{Spec}_{\text{MV}} \cong \text{Spec}_{\text{BDL}} \circ \beta$.

Demostración. Para cada MV-álgebra A , considérese $\text{Spec}_{\text{MV}}(A) \xrightarrow{\alpha_A} \text{Spec}_{\text{BDL}}(\beta(A))$ el isomorfismo definido como φ en el Teorema 2.4.4. Si $f : A \rightarrow B$ es cualquier MV-homomorfismo, note que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B) & \xrightarrow{\text{Spec}(f)} & \text{Spec}(A) \\ \alpha_B \downarrow & & \downarrow \alpha_A \\ \text{Spec}(\beta(B)) & \xrightarrow{\text{Spec}(\beta(f))} & \text{Spec}(\beta(A)) \end{array}$$

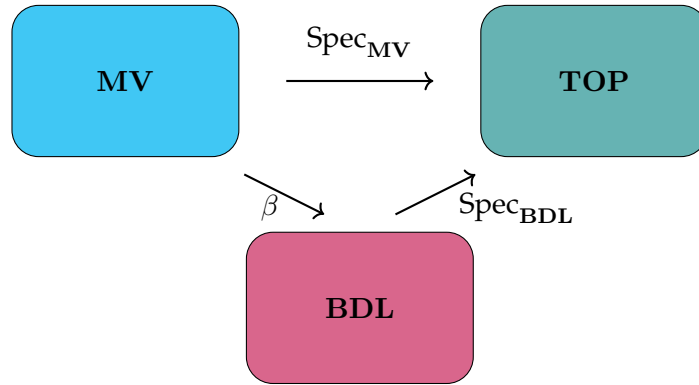
ya que para cada $P \in \text{Spec}(B)$, resulta:

$$\begin{aligned} (\text{Spec}(\beta(f)) \circ \alpha_B)(P) &= \text{Spec}(\beta(f))(\alpha_B(P)) \\ &= \text{Spec}(\beta(f))(\beta(P)) \\ &= \beta(f)^{-1}(\beta(P)) \\ &= \{\beta(a) \in \beta(A) \mid \beta(f)(\beta(a)) \in \beta(P)\} \\ &= \{\beta(a) \in \beta(A) \mid \beta(f(a)) \in \beta(P)\}, \end{aligned}$$

mientras que,

$$\begin{aligned}
 (\alpha_A \circ \text{Spec}(f))(P) &= \alpha_A(\text{Spec}(f)(P)) \\
 &= \alpha_A(f^{-1}(P)) \\
 &= \beta(f^{-1}(P)) \\
 &= \{\beta(a) \in \beta(A) \mid a \in f^{-1}(P)\} \\
 &= \{\beta(a) \in \beta(A) \mid f(a) \in P\},
 \end{aligned}$$

y puesto que $\{\beta(a) \in \beta(A) \mid \beta(f(a)) \in \beta(P)\} = \{\beta(a) \in \beta(A) \mid f(a) \in P\}$, esto implica que $\text{Spec}(\beta(f)) \circ \alpha_B = \alpha_A \circ \text{Spec}(f)$. Por lo tanto, se concluye que Spec_{MV} y $\text{Spec}_{\text{BDL}} \circ \beta$ son funtores naturalmente isomorfos. $\square$



Ahora, se probará que los funtores Id_c , $\text{K}(\text{Spec})$, β , establecidos en las proposiciones 2.3.20, 2.3.23 y 2.4.7, respectivamente, son naturalmente isomorfos entre sí, dando respuesta a esta cuestión planteada en [1]. Esto significa que los tres representan la misma acción funtorial sobre las categorías **MV** y **BDL**.

Proposición 2.5.2. *Los funtores Id_c y β son naturalmente isomorfos. Esto es, $\text{Id}_c \cong \beta$.*

Demostración. Para cada MV-álgebra A , considérese la función $\eta_A : \text{Id}_c(A) \rightarrow \beta(A)$ definida como $\eta_A([a]) = \beta(a)$. Por la Observación 2.4.3 se tiene que η_A está bien definida y es inyectiva, mientras que para cada $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
 \eta_A([a] \vee [b]) &= \eta_A([a \vee b]) = \beta(a \vee b) = \beta(a) \vee \beta(b) = \eta_A([a]) \vee \eta_A([b]), \\
 \eta_A([a] \wedge [b]) &= \eta_A([a \wedge b]) = \beta(a \wedge b) = \beta(a) \wedge \beta(b) = \eta_A([a]) \wedge \eta_A([b]),
 \end{aligned}$$

de donde η_A es un homomorfismo de retículos que evidentemente es sobreyectivo. Así, η_A es un isomorfismo para cada objeto A en **MV**. En segundo lugar, observe que para cualquier MV-homomorfismo $f : A \rightarrow B$, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_c(A) & \xrightarrow{\text{Id}_c(f)} & \text{Id}_c(B) \\
 \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\
 \beta(A) & \xrightarrow{\beta(f)} & \beta(B)
 \end{array}$$

ya que para todo $a \in A$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 (\eta_B \circ \text{Id}_c(f))([a]) &= \eta_B([f(a)]) \\
 &= \beta(f(a)) \\
 &= \beta(f)(\beta(a)) \\
 &= (\beta(f) \circ \eta_A)([a]).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\beta(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ \text{Id}_c(f)$ y se concluye que Id_c y β son naturalmente isomorfos. $\square$

Proposición 2.5.3. *Los funtores Id_c y $K(\text{Spec})$ son naturalmente isomorfos. ($\text{Id}_c \cong K(\text{Spec})$).*

Demostración. Para cada MV-álgebra A , considérese $\text{Id}_c(A) \xrightarrow{\alpha_A} K(\text{Spec}(A))$ el isomorfismo presentado en el Corolario 2.3.13. Luego, para cada MV-homomorfismo $f : A \rightarrow B$, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_c(A) & \xrightarrow{\text{Id}_c(f)} & \text{Id}_c(B) \\
 \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\
 K(\text{Spec}(A)) & \xrightarrow{K(\text{Spec})(f)} & K(\text{Spec}(B))
 \end{array}$$

debido a que para cada $a \in A$, resulta

$$\begin{aligned}
 (K(\text{Spec})(f) \circ \alpha_A)([a]) &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a)) \\
 &= \mathcal{O}(f(a)) \\
 &= \alpha_B([f(a)]) \\
 &= (\alpha_B \circ \text{Id}_c(f))([a]),
 \end{aligned}$$

por lo que $K(\text{Spec})(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \text{Id}_c(f)$ y se concluye que los funtores Id_c y $K(\text{Spec})$ son naturalmente isomorfos. $\square$

Proposición 2.5.4. *Los funtores β y $K(\text{Spec})$ son naturalmente isomorfos. Esto es, $\beta \cong K(\text{Spec})$.*

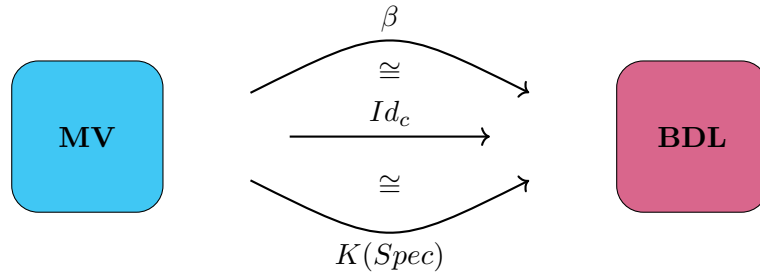
Demostración. Sea A un álgebra multivaluada, considérese $\beta(A) \xrightarrow{\omega_A} K(\text{Spec}(A))$ el isomorfismo obtenido por la Observación 2.4.3. Luego, MV-homomorfismo $f : A \rightarrow B$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \beta(A) & \xrightarrow{\beta(f)} & \beta(B) \\
 \downarrow \omega_A & & \downarrow \omega_B \\
 K(\text{Spec}(A)) & \xrightarrow{K(\text{Spec})(f)} & K(\text{Spec}(B))
 \end{array}$$

En efecto, para cada $a \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 (\omega_B \circ \beta(f))(\beta(a)) &= \omega_B(\beta(f(a))) \\
 &= \mathcal{O}(f(a)) \\
 &= K(\text{Spec})(f)(\mathcal{O}(a)) \\
 &= (K(\text{Spec})(f) \circ \omega_A)(\beta(a)),
 \end{aligned}$$

de donde $K(\text{Spec})(f) \circ \omega_A = \omega_B \circ \beta(f)$ y se concluye que los funtores β y $K(\text{Spec})$ son naturalmente isomorfos. $\square$



2.6. MV-álgebras libres y funciones de McNaughton

El segundo concepto requerido corresponde al de las MV-álgebras libres. En primer lugar, se presenta una manera de construir álgebras multivaluadas a partir de otras, denominadas MV-álgebras de términos en n variables sobre el álgebra inicial. En segundo lugar, se introducen las MV-álgebras libres, las cuales cumplen una propiedad universal particular sobre un conjunto generador. Se verifica que la MV-álgebra libre sobre un conjunto generador de n elementos es isomorfa a la MV-álgebra de términos en n variables sobre

el álgebra multivaluada $[0, 1]$. En tercer lugar, se muestran las funciones de McNaughton, que conforman una MV-álgebra y esencialmente son funciones definidas de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$, continuas con la topología natural y definidas a trozos con polinomios lineales de coeficientes enteros. Finalmente, se muestra que la MV-álgebra libre sobre un conjunto generador de n elementos es isomorfa a la MV-álgebra de funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^n$, lo cual resulta sumamente útil para una mejor manipulación y comprensión de las MV-álgebras libres.

Definición 2.6.1. Sea X un conjunto no vacío, cuyos elementos llamaremos *variables*, un **MV-término** τ en las variables $x_1, \dots, x_n$ es una expresión formal sobre el alfabeto $\{\oplus, \neg, 0, x_1, \dots, x_n\}$.

Ejemplos de MV-términos son $0, x_1, \neg x_1, x_1 \oplus x_n, \neg x_1 \oplus x_n$, mientras que $-x_2, x_1^5, 3x_4, x_1x_2$ son muestra de los que no son MV-términos. Considerando para cada número entero $n > 1$, $A^n := A \times A \times \dots \times A$, la **proyección k -ésima** $\pi_k : A^n \rightarrow A$ corresponde a la función $\pi_k(\mathbf{x}) = x_k$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Además,

$$\text{Proj}_n^A := \{\pi_k : 1 \leq k \leq n\},$$

será el conjunto de las proyecciones de A^n .

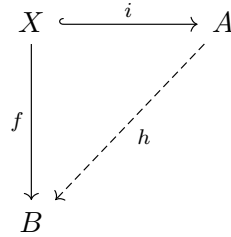
Definición 2.6.2. Dada una MV-álgebra A , para cada MV-término τ en las variables $\{x_1, \dots, x_n\}$, se define la **función de términos** $\tau^A : A^n \rightarrow A$ como sigue:

- (a) $x_i^A := \pi_i$, para cada $1 \leq i \leq n$,
- (b) 0^A es la función constante 0,
- (c) $(\rho \oplus \sigma)^A := \rho^A \oplus \sigma^A$,
- (d) $(\neg \rho)^A := \neg \rho^A$.

Term_n^A denota el conjunto de todas las funciones de términos sobre A .

Note que Term_n^A es una subálgebra de la MV-álgebra $A^{A^n} = \{f : A^n \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$ y es especial en el sentido de que Term_n^A es la menor subálgebra de A^{A^n} que contiene cada proyección en Proj_n^A . A continuación, introduciremos el concepto de **MV-álgebras libres**, las cuales son un cierto tipo de MV-álgebras caracterizadas por poseer una propiedad universal sobre un conjunto generador.

Definición 2.6.3. Una MV-álgebra $A = \text{sub}(X)$ se dice que es **libre** sobre el conjunto X , y se escribe $A = \text{Free}_X$, si para cualquier MV-álgebra B y cualquier función $f : X \longrightarrow B$, existe un MV-homomorfismo $h : A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta.



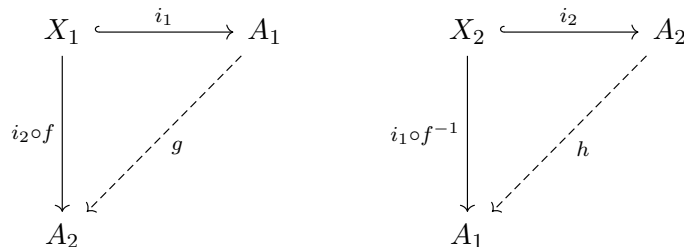
(i denota la función inclusión.)

Observación 2.6.4. Note que el MV-homomorfismo h es único, pues si existiese otro MV-homomorfismo $\hat{h} : A \longrightarrow B$ con $\hat{h} \circ i = f$, resulta $h \circ i = \hat{h} \circ i$, así que $h|_X = \hat{h}|_X$ y por la Proposición 2.0.9, se verifica que $h, \hat{h}$ coinciden sobre A .

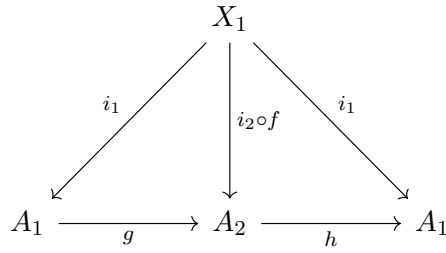
Realmente no es relevante sobre cuál conjunto X la MV-álgebra A es libre, sino más bien cuál es su cardinalidad, por lo que la MV-álgebra queda completamente determinada por esto, salvo isomorfismos. Esta característica se precisa en la siguiente proposición.

Proposición 2.6.5. Sean A_1 y A_2 MV-álgebras libres sobre los conjuntos generadores X_1 y X_2 , respectivamente. Si $|X_1| = |X_2|$, entonces $A_1 \cong A_2$.

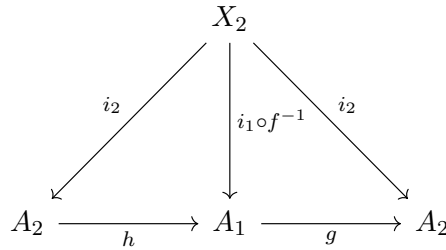
Demostración. Dado que $|X_1| = |X_2|$, existe una función biyectiva $f : X_1 \longrightarrow X_2$ y como A_1 y A_2 son generadas por X_1 y X_2 , respectivamente, se tienen también funciones $i_1 : X_1 \hookrightarrow A_1$ y $i_2 : X_2 \hookrightarrow A_2$. Luego, si se considera el par de funciones $i_2 \circ f : X_1 \longrightarrow A_2$ y $i_1 \circ f^{-1} : X_2 \longrightarrow A_1$, se garantiza la existencia de los homomorfismos $g : A_1 \longrightarrow A_2$ y $h : A_2 \longrightarrow A_1$ de manera que los siguientes diagramas conmutan.



Así mismo, teniendo en cuenta el diagrama



se obtiene que $i_1 = h \circ (i_2 \circ f) = h \circ (g \circ i_1) = (h \circ g) \circ i_1$ y como $i_1 = 1_{A_1} \circ i_1$, se sigue que $h \circ g = 1_{A_1}$ por la Observación 2.6.4. Análogamente, del diagrama



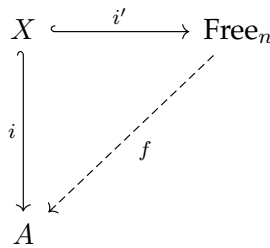
resulta $i_2 = g \circ (i_1 \circ f^{-1}) = g \circ (h \circ i_2) = (g \circ h) \circ i_2$ y $i_2 = 1_{A_2} \circ i_2$ implica $g \circ h = 1_{A_2}$. Por lo tanto, g es un isomorfismo y $A_1 \cong A_2$.

Esto termina la prueba. □

De acuerdo a lo anterior, no hay ambigüedad al decir que una MV-álgebra es *libre sobre n generadores*, y se escribe $A = \text{Free}_n$. La proposición que sigue será clave al final de este capítulo y muestra que siempre es posible encontrar un epimorfismo entre una MV-álgebra libre sobre n elementos y una MV-álgebra generada por un subconjunto precisamente de cardinalidad igual a n .

Proposición 2.6.6. *Si A es una MV-álgebra generada por un subconjunto X tal que $|X| = n$, entonces existe un epimorfismo de MV-álgebras $f : \text{Free}_n \rightarrow A$.*

Demostración. Puesto que $X \subseteq A$ y Free_n es libre sobre X ya que $|X| = n$, las funciones inclusiones $i : X \hookrightarrow A$ y $i' : X \hookrightarrow \text{Free}_n$ implican la existencia de un MV-homomorfismo $f : \text{Free}_n \rightarrow A$ de manera que $f \circ i' = i$.



Además, dado que X genera a A , es evidente que f es sobreyectiva. $\square$

Un resultado significativo en este punto es la caracterización que se tiene de las MV-álgebras libres, las cuales pueden entenderse de manera isomorfa como las MV-álgebras de términos en n variables sobre la MV-álgebra estándar.

Teorema 2.6.7. *Para cada número entero $n \geq 1$, $\text{Free}_n \cong \text{Term}_n^{[0,1]}$.*

Demostración. Por la Proposición anterior, basta con probar que $\text{Term}_n^{[0,1]}$ es libre sobre el conjunto $\text{Proj}_n^{[0,1]}$. Sea B cualquier MV-álgebra y $f : \text{Proj}_n^{[0,1]} \rightarrow B$ una función, consideremos $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B^n$ donde $b_k := f(\pi_k)$ para cada $1 \leq k \leq n$. Defínase $\varphi : \text{Term}_n^{[0,1]} \rightarrow B$ con $\varphi(\tau) = \tau^B(\mathbf{b})$. Por el Teorema 2.0.3, se tiene que $\tau^{[0,1]} = \sigma^{[0,1]}$ en $[0, 1]$ implica $\tau^B = \sigma^B$ en B y $\varphi(\tau) = \tau^B(\mathbf{b}) = \sigma^B(\mathbf{b}) = \varphi(\sigma)$, por lo que φ está bien definida. Además,

$$\varphi(\tau \oplus \sigma) = (\tau \oplus \sigma)^B(\mathbf{b}) = \tau^B(\mathbf{b}) \oplus \sigma^B(\mathbf{b}) = \varphi(\tau) \oplus \varphi(\sigma),$$

$$\varphi(\neg \sigma) = (\neg \sigma)^B(\mathbf{b}) = \neg \sigma^B(\mathbf{b}) = \neg \varphi(\sigma),$$

de donde se obtiene que φ es un homomorfismo. Por último,

$$(\varphi \circ i)(\pi_k) = \varphi(\pi_k) = \pi_k^B(\mathbf{b}) = b_k = f(\pi_k).$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}_n^{[0,1]} & \xrightarrow{i} & \text{Term}_n^{[0,1]} \\ \downarrow f & \nearrow \varphi & \\ B & & \end{array}$$

Por lo tanto, $\text{Term}_n^{[0,1]} \cong \text{Free}_n$ y esto concluye la prueba. $\square$

Note que las MV-álgebras libres tal como se han definido resultan ser bastantes complejas, aún con la caracterización dada por el teorema anterior. Sin embargo, existe otra forma de representarlas de tal manera que terminan siendo más fáciles de manipular y trabajar con ellas.

Definición 2.6.8. *Para cada $n \geq 1$, una función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es llamada una **función de McNaughton sobre $[0, 1]^n$** si y solo si satisface las siguientes condiciones:*

- (i) *f es continua con respecto a la topología natural de $[0, 1]^n$.*

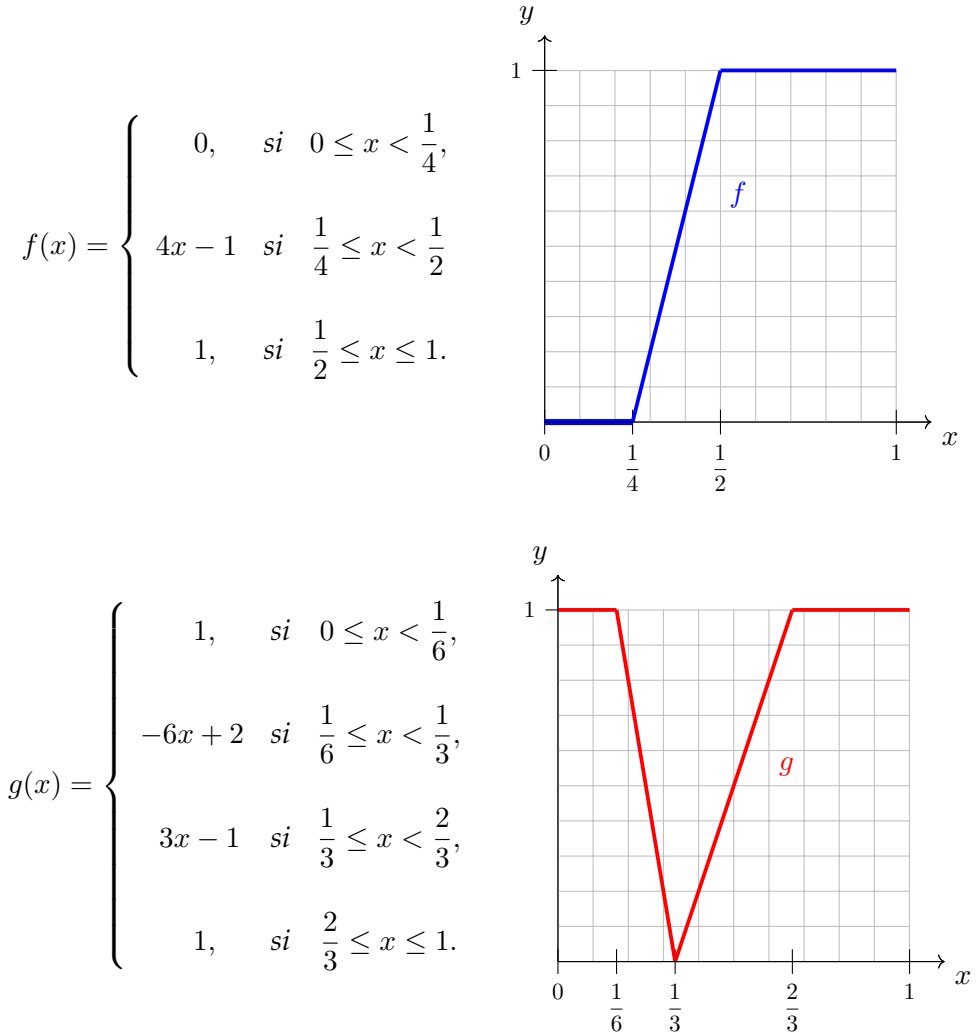
(ii) Existen polinomios lineales $p_1, \dots, p_k$ con coeficientes enteros

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = b_i + m_{i_1}x_1 + \dots + m_{i_n}x_n,$$

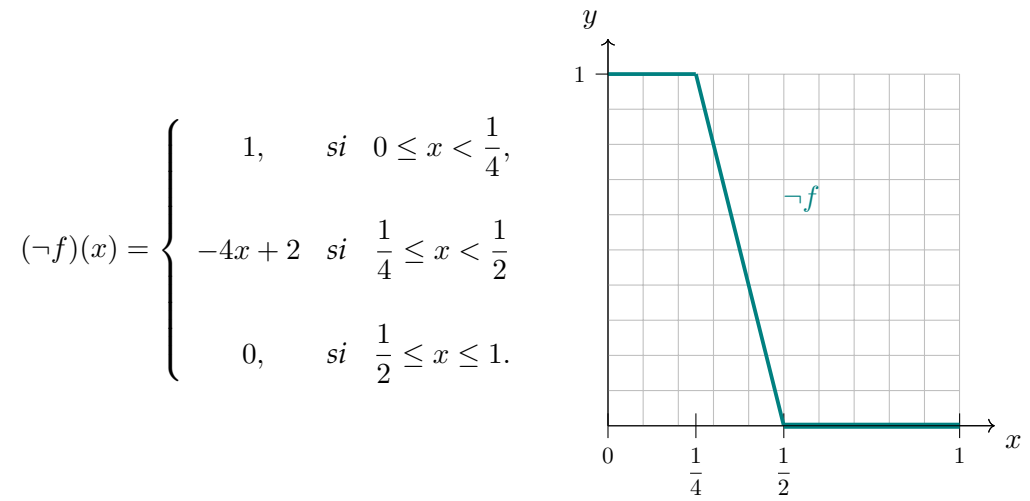
tales que para cada punto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in [0, 1]^n$, existe un índice $j \in \{1, \dots, k\}$ con $f(\mathbf{y}) = p_j(\mathbf{y})$.

Denotando como M_n al conjunto de funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^n$, se tiene que M_n es una MV-álgebra, cuyas operaciones están definidas de manera puntual sobre la MV-álgebra estándar.

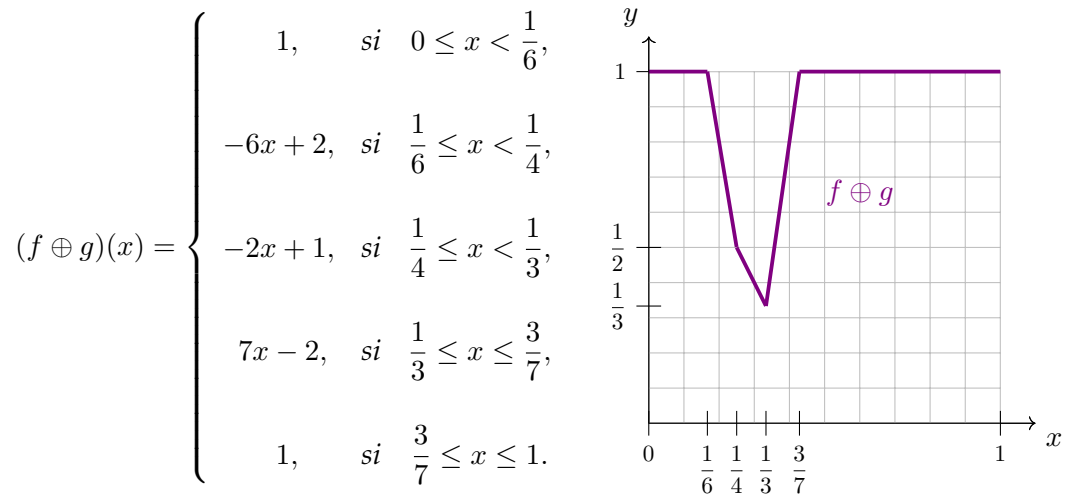
Ejemplo 2.6.9. Las siguientes son funciones de McNaughton sobre $[0, 1]$.



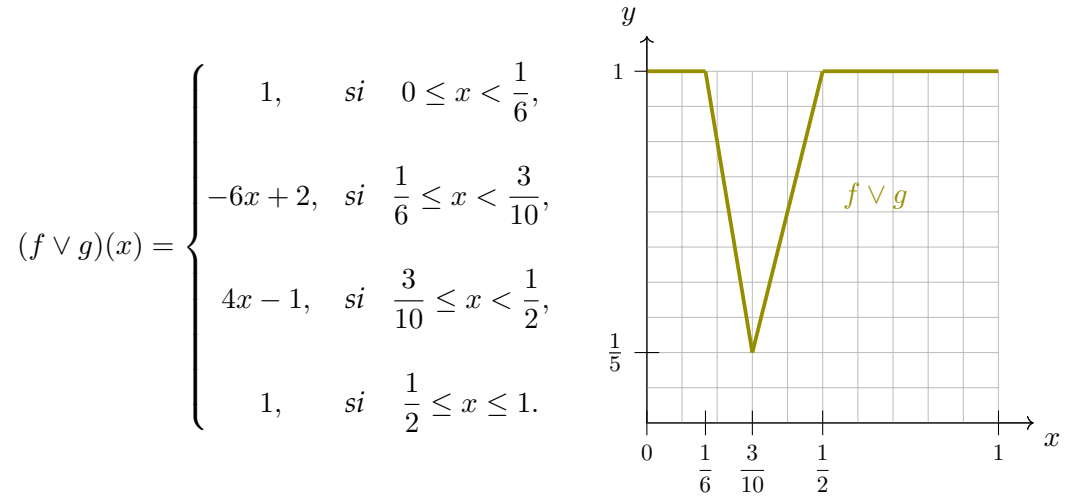
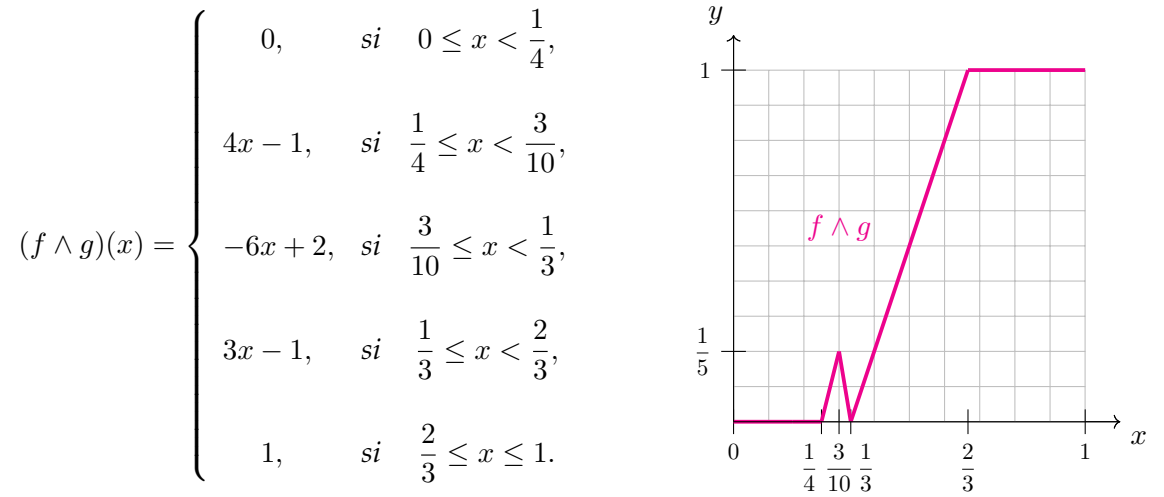
Se construye también la función $\neg f$ sobre $[0, 1]$:



Así mismo, la suma de las funciones f y g en M_1 corresponde a la función:

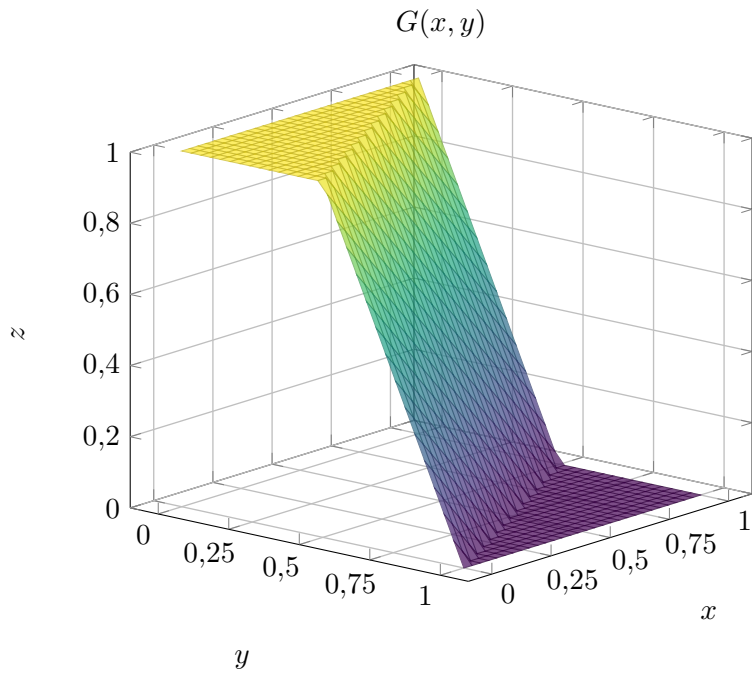
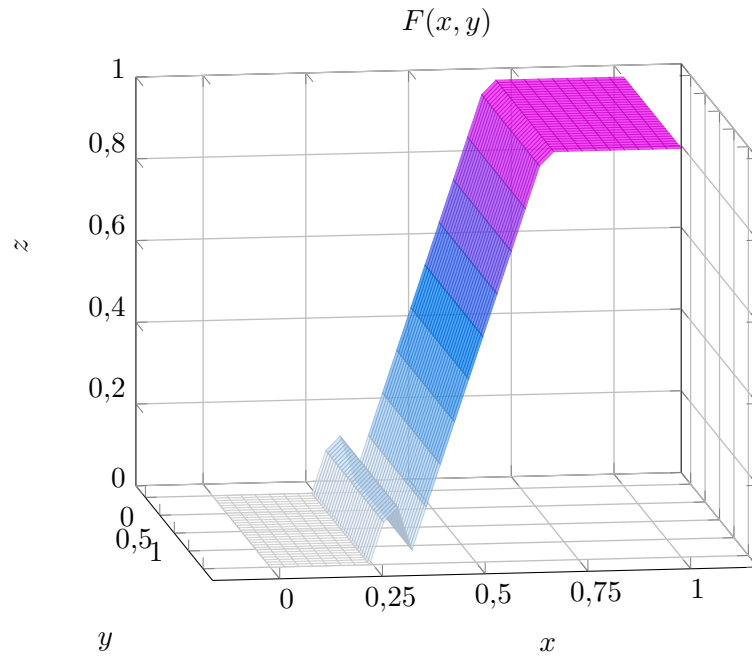


Las funciones $f \wedge g$ y $f \vee g$ están definidas de tal forma que para cada $x \in [0, 1]$, se tiene que $(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$ y $(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$.



Ejemplo 2.6.10. Las siguientes funciones son ejemplos de elementos en M_2 .

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 4x - 1, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{10}, \\ -6x + 2, & \text{si } \frac{3}{10} \leq x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1, & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 1, & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad G(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}(x - 1), \\ -x - 2y + 2, & \text{si } -\frac{1}{2}(x - 1) < y \leq -\frac{1}{2}x + 1, \\ 0, & \text{si } -\frac{1}{2}x + 1 < y \leq 1. \end{cases}$$



Note que la función $(f \wedge g)(x)$ mostrada en el Ejemplo 2.6.9 es precisamente la proyección de la función $F(x, y)$ del Ejemplo 2.6.10 sobre uno de los planos coordenados. Sin embargo, no todas las funciones en M_2 corresponden a este caso particular, lo que se evidencia con la función $G(x, y)$.

El resultado más importante de esta sección es el isomorfismo que ya se ha mencionado anteriormente, el cual no solo reduce significativamente la complejidad al operar con MV-álgebras libres, sino que también será de gran ayuda para las secciones siguientes.

Teorema 2.6.11. *Para cada número entero $n \geq 1$, $\text{Free}_n \cong M_n$.*

Para la demostración, puede consultarse la *Proposición 3.1.8* y el *Teorema 9.1.5* de [11].

2.7. Poliedros

En esta sección introduciremos el tercer concepto necesario, una clase de objetos geométricos que son bastante interesantes por su presencia en isomorfismos que involucran el retículo de Belluce de MV-álgebras libres, además de ser esencialmente los ceros de funciones de McNaughton, y serán útiles para caracterizar el espectro primo de las MV-álgebras.

Definición 2.7.1. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si para cualquier par $a, b \in A$, el conjunto*

$$[a, b] := \{(1 - t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\},$$

está contenido en A .

Por vacuidad, $\emptyset$ es un conjunto convexo. Evidentemente, si $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una familia de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ también lo es, por lo que dado cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, la **envolvente convexa de B** se define como

$$\langle B \rangle := \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ es convexo}, B \subseteq A\},$$

que termina siendo el menor conjunto convexo que contiene a B . Si $B = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, se escribe simplemente $\langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$.

Proposición 2.7.2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

Demostración. Denotando

$$B := \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\},$$

se tiene que B es convexo. En efecto, sean $x := \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$ y $y := \sum_{i=1}^k \beta_i b_i$ elementos de B y suponga sin pérdida de generalidad que $k \leq m$. Si $w \in [x, y]$, entonces

$$\begin{aligned} w &= (1-t)x + ty \\ &= (1-t) \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + t \sum_{i=1}^m \beta_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^m [(1-t)\alpha_i a_i + t\beta_i b_i], \end{aligned}$$

con $0 \leq t \leq 1$ y $b_i = 0$ para $k < i \leq m$, por lo que $(1-t)\alpha_i, t\beta_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ para cada $0 \leq i \leq m$ y también,

$$\sum_{i=1}^m [(1-t)\alpha_i + t\beta_i] = (1-t) \sum_{i=1}^m \alpha_i + t \sum_{i=1}^m \beta_i = (1-t) + t = 1,$$

es decir que $w \in B$ y $[x, y] \subseteq B$. Además, es claro que $A \subseteq B$ y por tanto, $\langle A \rangle \subseteq B$.

Recíprocamente, sea H cualquier conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subseteq H$. Probemos por inducción sobre m que cada elemento $\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \in B$ está en H . Para el caso base $m = 1$, si $\alpha_1 a_1 \in B$, entonces $a_i \in A$ y necesariamente $\alpha_i = 1$, por lo que $\alpha_i a_i \in A$ y como $A \subseteq H$, resulta $\alpha_1 a_1 \in H$. Supongamos ahora por hipótesis inductiva que para un cierto $k \in \mathbb{N}$ se tiene que cada suma $\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \in B$ con $0 \leq m \leq k$, también está en H .

Si $x := \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i a_i \in B$, se tienen dos casos. Si $\alpha_i = 0$ para cada $1 \leq i \leq k$, se sigue que $\alpha_{k+1} = 1$ y $x = a_{k+1} \in A \subseteq H$. En caso contrario, existe algún $1 \leq i \leq k$ tal que $\alpha_i \neq 0$, por lo que $\beta := \sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0$. Note además que $w := \sum_{i=1}^k \left(\frac{\alpha_i}{\beta} \right) a_i \in B$ ya que

$$\forall 1 \leq i \leq k, \frac{\alpha_i}{\beta} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad y \quad \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\beta} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^k \alpha_i = \left(\frac{1}{\beta} \right) \beta = 1,$$

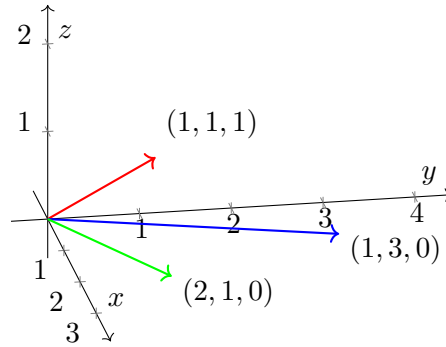
y a su vez pertenece a H por hipótesis de inducción. Así, por la convexidad de H y teniendo en cuenta que $a_{k+1} \in A \subseteq H$, resulta $x = \beta w + \alpha_{k+1} a_{k+1} \in [w, a_{k+1}] \subseteq H$. Por lo tanto, $B \subseteq H$ para cualquier conjunto convexo $H \subseteq \mathbb{R}^n$ que contenga a A , y en particular, $B \subseteq \langle A \rangle$. Se concluye de esta manera que $\langle A \rangle = B$. $\square$

Definición 2.7.3. Un conjunto $S = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina *independientemente afín*, si el conjunto de vectores $\{\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_0 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_m}\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 2.7.4. El conjunto $S = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$, donde $x_0 = (0, 1, 0)$, $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (1, 4, 0)$ y $x_3 = (2, 2, 0)$, es un conjunto independientemente afín, ya que el conjunto $S' = \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0x_m}\}$ dado por $\overrightarrow{x_0x_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{x_0x_2} = (1, 3, 0)$ y $\overrightarrow{x_0x_3} = (2, 1, 0)$, es un conjunto linealmente independiente, debido a que si se tuviesen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 3, 0) + \lambda_3(2, 1, 0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1) = (0, 0, 0),$$

se verifica fácilmente que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.



Trivialmente se tiene que $\emptyset$ es un conjunto independientemente afín. Además, la definición de independencia afín es invariante bajo el punto inicial de los vectores que pueda tomarse del conjunto S , gracias a la siguiente proposición.

Proposición 2.7.5. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, entonces

- (i) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, si y solo si, $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ es linealmente independiente, para cada $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- (ii) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente, si y solo si, $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ es linealmente independiente, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración.

- (i) Sea $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ linealmente independiente, λ un escalar real no nulo y suponga $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i (\lambda v_i) + \dots + \alpha_n v_n = 0$, entonces $\alpha_1 = \dots = \lambda \alpha_i = \dots = \alpha_n = 0$. Dado que $\lambda \neq 0$ y $\mathbb{R}$ es un cuerpo, se sigue que $\alpha_i = 0$ y de esta manera, el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \subseteq V$ también es linealmente independiente.

Para la implicación contraria, basta con multiplicar el i -ésimo vector por $\frac{1}{\lambda}$.

- (ii) Sea $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ un conjunto de vectores linealmente independiente, λ un número real y suponga $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n$ escalares tales que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i (v_i + \lambda v_j) + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + (\alpha_j + \alpha_i \lambda) v_j + \dots + \alpha_n v_n, \end{aligned}$$

entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_j + \alpha_i \lambda = \dots = \alpha_n = 0$, por lo que $\alpha_j = 0$ y por tanto, el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subseteq V$ también es linealmente independiente.

La otra implicación se obtiene análogamente cambiando el i -ésimo vector $v_i + \lambda v_j$ por $(v_i + \lambda v_j) + (-\lambda) v_j$.

En conclusión, se ha probado que un conjunto linealmente independiente sigue siéndolo si se reemplaza un vector por un múltiplo no nulo escalar de él, y también si se sustituye un vector por una combinación particular. $\square$

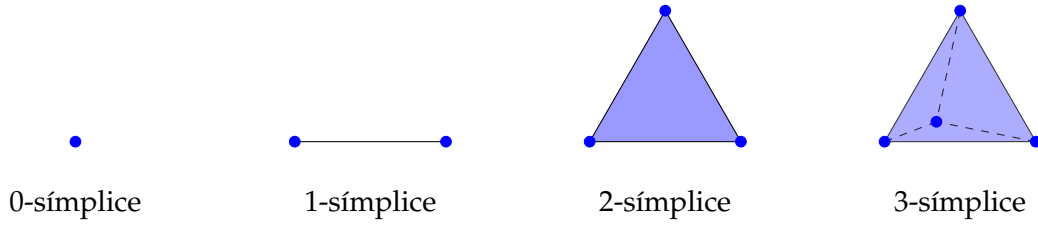
Observación 2.7.6. Si $\{\overrightarrow{x_i x_1}, \dots, \overrightarrow{x_i x_{i-1}}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_i x_j}, \dots, \overrightarrow{x_i x_m}\}$ es un conjunto linealmente independiente, se sigue que el conjunto $\{\overrightarrow{x_j x_1}, \dots, \overrightarrow{x_j x_i}, \dots, \overrightarrow{x_j x_{j-1}}, \overrightarrow{x_j x_{j+1}}, \dots, \overrightarrow{x_j x_m}\}$ también lo es por la Proposición 2.7.5, puesto que para cada $1 \leq k \leq m$ con $k \neq j$ se cambia el vector $\overrightarrow{x_i x_k}$ por $\overrightarrow{x_j x_k}$, mientras que si $k = j$, se cambia $\overrightarrow{x_i x_j}$ por $-\overrightarrow{x_i x_j}$.

Definición 2.7.7. Un m -**símplice** (también conocido como m -simplejo) σ es un conjunto tal que $\sigma = \langle A \rangle$, para algún $A \subseteq \mathbb{R}^n$ independientemente afín y con $|A| = m + 1$. El número m se denomina la **dimensión** del símplex. En el caso en el que $A \subseteq \mathbb{Q}^n$, se dice que σ es un **símplice racional**.

Adicionalmente, un conjunto τ se dice que es una **cara** del símplex σ si $\tau = \langle B \rangle$ para algún $B \subseteq A$, y se denota como $\tau \preceq \sigma$.

Evidentemente, toda cara de un símplex es a su vez un símplex, pues de la Definición 2.7.3 se sigue que todo subconjunto de un conjunto independientemente afín, también lo es. Por otra parte, el conjunto $\emptyset$ también es un símplex ya que $\emptyset = \langle \emptyset \rangle$, y se dice que es un -1 -símplice.

Ejemplo 2.7.8. Los m -símplices para $m = 0, 1, 2, 3$ son:



Se puede decir que los m -símplices permiten generalizar el concepto de triángulo a diferentes dimensiones, al igual que el hipercubo como objeto geométrico extiende la idea del cuadrado. Por otra parte, es fácil ver que la cantidad de caras que posee un m -símplice depende de su dimensión. Más precisamente:

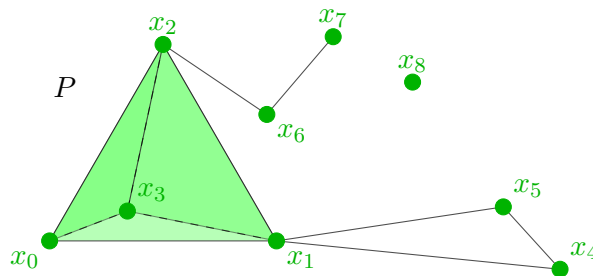
Proposición 2.7.9. El número de caras de un m -símplice es 2^{m+1} .

Demostración. Trivialmente, el -1 -símplice $\emptyset$ posee solamente una cara, que es este mismo. Sea $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un m -símplice con $m \geq 0$, se tiene entonces que $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$, donde $A = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ es un conjunto independientemente afín. Luego, si H es el conjunto de caras de σ y $\tau \in H$, resulta $\tau = \langle B \rangle$ con $B \subseteq A$ y como $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{m+1}$, significa que $|H| = 2^{m+1}$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de introducir lo que se conoce como un poliedro.

Definición 2.7.10. Un **poliedro** es cualquier unión finita de símplices, y la **dimensión** de un poliedro corresponde a la dimensión máxima de los símplices que lo componen. Diremos que un poliedro es **racional**, si es unión finita de símplices racionales.

Ejemplo 2.7.11. El conjunto P mostrado en la figura es un poliedro de dimensión 3.



A continuación, se generalizará el concepto de poliedro racional para dimensión infinita.

Definición 2.7.12. Si X es un conjunto con $|X| \leq \aleph_0$, un **poliedro cilíndrico racional** es un conjunto $C(P_0) = \{f \in [0, 1]^X : f|_Y \in P_0\}$, donde $Y \subseteq X$ es tal que $|Y| < \aleph_0$ y $P_0 \subseteq [0, 1]^Y$ es un poliedro racional.

Es fácil ver que si X es finito, entonces el poliedro cilíndrico racional termina siendo un poliedro racional.

Ejemplo 2.7.13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $[0, 1]^n$ es un poliedro cilíndrico racional.

Algo interesante para resaltar es que dado un poliedro cilíndrico racional $P \subseteq [0, 1]^n$, la colección de todos los poliedros cilíndricos racionales contenidos en P , conforman un retículo ordenado parcialmente por la inclusión usual de conjuntos, y es denotado por $C_{\text{poly}}(P)$.

En adelante, $Z(f)$ denotará el conjunto de ceros de una función f , y $Z(f_1, f_2, \dots, f_m)$ será el conjunto de ceros en común de las funciones $f_1, f_2, \dots, f_m$; esto es,

$$Z(f_1, f_2, \dots, f_m) := \bigcap_{i=1}^m Z(f_i).$$

(Esta notación es recurrente en el campo de la geometría algebraica.)

Observación 2.7.14. Por el Corolario 2.3.13, se tiene que $\beta(f) = \beta(g)$ si y solo si $(f] = (g]$, para cualquier par de elementos $f, g \in M_n$. Más aún, observe que $(f] = (g]$ implica que $Z(f) = Z(g)$. En efecto, si $(f] = (g]$ y $x \in Z(g)$, entonces $g(x) = 0$ y como $f \in (f] = (g]$, se sigue que $f \leq ng$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq f(x) \leq ng(x) = n0 = 0$, por lo que $f(x) = 0$, $x \in Z(f)$ y $Z(g) \subseteq Z(f)$. De la misma manera se obtiene que $Z(f) \subseteq Z(g)$ y por tanto, $Z(f) = Z(g)$. La implicación recíproca también es cierta y su demostración se encuentra en el Lema 3.4.8 de [11].

Teorema 2.7.15. $P \subseteq [0, 1]^n$ es un poliedro cilíndrico racional, si y solo si, $P = Z(f_1, f_2, \dots, f_m)$ para algunos $f_1, f_2, \dots, f_m \in M_n$.

Una prueba de este teorema puede consultarse en el Corolario 2.10 de [26].

El artículo [4] ha sido fundamental en el desarrollo de esta sección. Para un estudio más profundo sobre los poliedros, se recomienda consultar [30], [8], [24] y [18].

2.8. Caracterización del espectro primo de las MV-álgebras

En la última sección de este capítulo se presentan algunos resultados preliminares necesarios para enunciar el teorema más importante del capítulo, el cual establece las condiciones que debe cumplir un espacio topológico para ser homeomorfo al espectro primo de alguna MV-álgebra. Posteriormente, se muestra un ejemplo que evidencia la utilidad de este teorema.

Proposición 2.8.1. *El retículo de Belluce de M_n es dualmente isomorfo al retículo $C_{\text{poly}}([0, 1]^n)$. En otras palabras, $\text{Id}_c(M_n) \cong K(\text{Spec}(M_n)) \cong \beta(M_n) \cong C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}}$.*

Demostración. Por la proposición 2.7.15, cada poliedro cilíndrico coincide con el conjunto de ceros de ciertas funciones en M_n . Considere la función $\phi : \beta(M_n) \rightarrow C_{\text{poly}}([0, 1]^n)$ dada por $\phi(\beta(f)) := Z(f)$. La buena definición y la inyectividad de ϕ se sigue de la Observación 2.7.14.

Note también que $\beta(f) \subseteq \beta(g)$ si y solo si $(f] \subseteq (g]$, y esto implica que $\phi(\beta(g)) = Z(g) \subseteq Z(f) = \phi(\beta(f))$ y por consiguiente, ϕ es un homomorfismo de retículos contravariante. Por último, dado $P = Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$ en $C_{\text{poly}}([0, 1]^n)$, observe que

$$\begin{aligned} \phi(\beta(f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n)) &= \phi(\beta(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n)) \\ &= Z(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n) \\ &= Z(f_1, f_2, \dots, f_n) \\ &= P. \end{aligned}$$

En efecto, $x \in Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$ implica $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0$ y

$$(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n)(x) = f_1(x) \oplus f_2(x) \oplus \dots \oplus f_n(x) = 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0,$$

de donde $x \in Z(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n)$; mientras que $x \in Z(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n)$ conlleva a que $0 \leq f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \leq (f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n)(x) = 0$ y $x \in Z(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Así, ϕ es sobreyectiva.

Por lo tanto, $\beta(M_n)$ es dualmente isomorfo a $C_{\text{poly}}([0, 1]^n)$. Esto concluye la prueba. $\square$

Proposición 2.8.2. *Un retículo L es el retículo de Belluce de una MV-álgebra, si y solo si, existe un 0-homomorfismo sobreyectivo cerrado $\pi : \beta(M_n) \rightarrow L$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

($\implies$) Si $L \cong \beta(A)$ con A una MV-álgebra, entonces existe un epimorfismo $f : M_n \longrightarrow A$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\text{Id}_c(f) : \text{Id}_c(M_n) \longrightarrow \text{Id}_c(A)$ es un epimorfismo cerrado de 0-retículos por la Proposición 2.2.11, el cual induce a su vez un 0-homomorfismo sobreyectivo cerrado $\beta(f) : \beta(M_n) \longrightarrow \beta(A)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_c(M_n) & \xrightarrow{\text{Id}_c(f)} & \text{Id}_c(A) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \beta(M_n) & \xrightarrow{\beta(f)} & \beta(A)
 \end{array}$$

($\impliedby$) Suponga que existe un 0-homomorfismo sobreyectivo cerrado $\pi : \beta(M_n) \longrightarrow L$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta el Lema 2.2.13 y la Observación 2.4.3, se tiene que $I := \{f \in M_n \mid \pi(\beta(f)) = 0\}$ es un ideal de M_n y que $\beta(M_n/I) \cong L$.

Esto finaliza la prueba. $\square$

Corolario 2.8.3. *Un retículo L es el retículo de Belluce de una MV-álgebra, si y solo si, existe un 0-homomorfismo sobreyectivo cerrado $\pi : C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}} \longrightarrow L$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 2.8.1 y 2.8.2. $\square$

Teorema 2.8.4. (Caracterización topológica del espectro primo de una MV-álgebra)

Un espacio topológico X es el espectro primo de una MV-álgebra, si y solo si, X es espectral y existe un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

($\implies$) Sea $X \cong \text{Spec}(A)$ para alguna MV-álgebra A , entonces se tiene por el Teorema 2.3.16 que X es espectral. Por otro lado, dado que existen $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $f : M_n \longrightarrow A$, resulta a su vez un 0-homomorfismo sobreyectivo cerrado $\text{Id}_c(f) : \text{Id}_c(M_n) \longrightarrow \text{Id}_c(A)$. Puesto que $\text{Id}_c(M_n) \cong \beta(M_n) \cong C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}}$ y también $\text{Id}_c(A) \cong K(\text{Spec}(A)) \cong K(X)$, se obtiene así un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$.

($\impliedby$) Sea X un espacio espectral y $\pi : C_{\text{poly}}([0, 1]^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$ un epimorfismo cerrado, por el Corolario 2.8.3 se tiene que $K(X) \cong \beta(A)$ para alguna MV-álgebra A . Luego, $K(X) \cong \beta(A) \cong K(\text{Spec}(A))$, lo que implica que $\text{Spec}(K(X)) \cong \text{Spec}(K(\text{Spec}(A)))$ y por el Teorema 16 de [29], se sigue que todo espacio espectral generalizado es

homeomorfo al espectro primo de su retículo de subconjuntos abiertos compactos, por lo que se concluye que $X \cong \text{Spec}(K(X)) \cong \text{Spec}(K(\text{Spec}(A))) \cong \text{Spec}(A)$.

Esto concluye el teorema. $\square$

Vamos a ver un ejemplo para ilustrar mejor el anterior resultado, pero para ello es importante tener en cuenta las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.8.5. *Si A es una MV-cadena, entonces $M = \{a \in A \mid \text{ord}(a) = \infty\}$ es el único ideal maximal de A .*

Demostración. Primero veamos que M es en efecto, un ideal. Note que $M \neq \emptyset$ dado que $\text{ord}(0) = \infty$ y $0 \in M$. Sean $a, b \in M$, es decir, $\text{ord}(a) = \infty = \text{ord}(b)$ y suponga que $\text{ord}(a \oplus b) = m < \infty$. Luego, por ser A una MV-cadena, obtenemos que $a \leq b$ o $b \leq a$, por lo que $a \oplus b \leq 2b$ o $a \oplus b \leq 2a$, y a su vez, $1 = m(a \oplus b) \leq 2mb$ o $1 = m(a \oplus b) = 2ma$, lo que implicaría que $\text{ord}(a) < \infty$ o $\text{ord}(b) < \infty$, lo que es una contradicción. Como consecuencia, $\text{ord}(a \oplus b) = \infty$ y $a \oplus b \in M$. Además, si $a \in A$ y $b \in M$ son tales que $a \leq b$, si ocurriese que $\text{ord}(a) = m < \infty$, se tendría que $1 = ma \leq mb$ y $\text{ord}(b) < \infty$, lo que no es cierto pues $b \in M$. Así, $\text{ord}(a) = \infty$, $a \in M$ y M es un ideal de A .

Ahora bien, si I es un ideal de A tal que $M \subset I \subseteq A$, entonces existe un elemento $a \in I - M$, y esto significa que $\text{ord}(a) = n < \infty$ y $1 = na \in I$, de donde $I = A$.

Por último, sea M' otro ideal maximal de A , entonces M es propio, esto es, $\text{ord}(a) = \infty$ para cada $a \in M'$, lo que implica inmediatamente que $M' \subseteq M$ y por ser M' maximal, resulta $M' = M$. Con esto, se finaliza la demostración. $\square$

Proposición 2.8.6. *Dada una MV-álgebra A . Si I es un ideal propio de A , entonces existe un ideal maximal M de A tal que $I \subseteq M$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.2, existe un ideal primo P tal que $I \subseteq P$. Note que el conjunto $\mathcal{J} = \{J \in \text{Id}(A) \mid P \subseteq J, J \neq A\}$ es totalmente ordenado, puesto que si se tuviese $J_1, J_2 \in \mathcal{J}$ tales que $J_1 \not\subseteq J_2$ y $J_2 \not\subseteq J_1$, existirían $a \in J_1 - J_2$ y $b \in J_2 - J_1$, y al ser P primo se tiene que $a \oplus b \in P$ o $b \oplus a \in P$, de donde $a \vee b = a \oplus (b \oplus a) \in J_1$ o $a \vee b = b \oplus (a \oplus b) \in J_2$, lo que implicaría que $b \in J_1$ o $a \in J_2$, lo que sería una contradicción.

Como consecuencia, $M := \bigcup \{J \in \text{Id}(A) \mid J \in \mathcal{J}\} \in \mathcal{J}$, pues si no fuese así, se tendría que $1 \in M$, por lo que $1 \in J$ para algún $J \in \mathcal{J}$ y $J = A$, lo que es una contradicción. Además, si H es un ideal propio de A y $M \subseteq H$, se sigue que $P \subseteq H$ y $H \in \mathcal{J}$, así que

la maximalidad de M en el conjunto $\mathcal{J}$ implica que $H \subseteq M$ y por tanto, $M = H$. Se concluye de esta manera, que $I \subseteq M$ y M es un ideal maximal de A . $\square$

Ejemplo 2.8.7. Sea $X = \{a\} \subseteq [0, 1]$ un conjunto unitario, dotado con $\tau = \{\emptyset, X\}$, la única topología posible. No es difícil notar que (X, τ) es un espacio espectral, con $K(X) = \tau$. Considere ahora la función $\phi : C_{poly}([0, 1])^{op} \longrightarrow K(X)$ dada por

$$\phi(P) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in P, \\ X, & \text{si } a \notin P. \end{cases}$$

Note que ϕ es un homomorfismo de retículos. En efecto, si $P, Q \in C_{poly}([0, 1])^{op}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(P \vee_{op} Q) &= \phi(P \wedge Q) = \phi(P \cap Q) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in P \cap Q, \\ X, & \text{si } a \notin P \cap Q, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in P \cap Q, \\ X, & \text{si } a \notin P, \\ X, & \text{si } a \notin Q, \end{cases} \\ &= \phi(P) \cup \phi(Q) \\ &= \phi(P) \vee \phi(Q), \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 \phi(P \wedge_{op} Q) = \phi(P \vee Q) = \phi(P \cup Q) &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in P \cup Q, \\ X, & \text{si } a \notin P \cup Q, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in P, \\ \emptyset, & \text{si } a \in Q, \\ X, & \text{si } a \in (P \cup Q)^c, \end{cases} \\
 &= \phi(P) \cap \phi(Q) \\
 &= \phi(P) \wedge \phi(Q).
 \end{aligned}$$

Además, $\emptyset = \phi(\{a\})$ y $X = \phi(\{b\})$ para cualquier $b \neq a$ en $[0, 1]$, por lo que ϕ es un epimorfismo de retículos. Adicionalmente, si $P_0, P_1 \in C_{poly}([0, 1])^{op}$ y $B \in K(X)$ son tales que $\phi(P_0) \subseteq \phi(P_1) \wedge_{op} B = \phi(P_1) \vee B = \phi(P_1) \cup B$, considerando $P = [0, 1] \in C_{poly}([0, 1])^{op}$ se tiene que $P_1 \wedge_{op} P = P_1 \vee P = P_1 \cup P = P_1 \cup [0, 1] = [0, 1]$, por lo que $P_0 \subseteq P_1 \wedge_{op} P$ y $\phi(P) = \emptyset \subseteq B$, lo que indica que ϕ es cerrado.

De esta manera, por el Teorema 2.8.4, $X \cong \text{Spec}(A)$ para alguna MV-álgebra A . Más aún, como $[0, 1]$ es una MV-cadena, el Teorema 2.8.5 indica que $\{\mathbf{0}\}$ es el único ideal maximal y a su vez, $\text{Spec}([0, 1]) = \{\mathbf{0}\}$ por el Teorema 2.8.6. Por lo tanto, $X \cong \{\mathbf{0}\} = \text{Spec}([0, 1])$.

En este capítulo, se expuso la teoría fundamental sobre las MV-álgebras, incluyendo tres nociones clave: el retículo de Belluce asociado, las MV-álgebras libres y los poliedros. Durante el desarrollo, se definieron funtores entre ciertas categorías y se demostró que esencialmente realizan la misma acción. El principal resultado fue la presentación de la respuesta en [14] a la pregunta formulada en [26], relacionada con las condiciones topológicas que debe cumplir un espacio para ser homeomorfo al espectro primo de alguna álgebra multivaluada. Esto facilita en gran medida el estudio de las conexiones entre la topología y las estructuras algebraicas mencionadas.

Capítulo 3

l -grupos abelianos

En este capítulo se ofrece, una breve introducción tanto a la noción de l -grupo, que consiste en un grupo provisto de una estructura de retículo; como a la unidad fuerte, un elemento particular que cumple una condición análoga a la bien conocida *propiedad arquimediana* sobre los números reales. Se exploran algunos aspectos característicos que distinguen estas estructuras y, como resultado significativo, se describe el espectro primo de estas a partir de conos cilíndricos, de manera similar a lo expuesto en el capítulo anterior.

Los conceptos básicos de la teoría de l -grupos, presentados en este capítulo, se pueden consultar en [5], [17] y [23].

Definición 3.0.1. Un l -grupo $(G, \cdot, e, \leq)$, o simplemente G , es un grupo parcialmente ordenado, que satisface $xz \leq yz$ y $zx \leq zy$, siempre que $x \leq y$, para cualesquiera $x, y, z \in G$. Si G es abeliano, se dice que G es un l -grupo abeliano y se usará tanto la notación aditiva como la multiplicativa.

Definición 3.0.2. Denotando $G^+ := \{x \in G \mid e \leq x\}$, un elemento $u \in G^+$ se denomina **unidad fuerte** si para cada $x \in G$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq nu$. Si G tiene una unidad fuerte u , se dice que G es un lu -grupo abeliano y se escribe también como (G, u) .

Como se mencionó al inicio de este capítulo, note que la propiedad que cumple una unidad fuerte en un grupo con estructura de retículo es esencialmente la propiedad arquimediana que se aplica en el conjunto de los números reales.

Recordando que todo conjunto parcialmente ordenado puede ser visto como un retículo con dos operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$, que corresponden al supremo y el ínfimo de cada par de elementos respectivamente, se obtiene lo siguiente.

Proposición 3.0.3. Si G es un l -grupo, entonces para cualesquiera $a, b, c \in G$,

- (i) Si $a \leq b$, entonces $b^{-1} \leq a^{-1}$.
- (ii) $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$ y $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$.
- (iii) $(a \vee b)c = ac \vee bc$ y $c(a \vee b) = ca \vee cb$.
- (iv) $(a \wedge b)c = ac \wedge bc$ y $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$.
- (v) Si $ab = ba$, se tiene

$$(a \vee b)^n = a^n \vee a^{n-1}b \vee \dots \vee ab^{n-1} \vee b^n,$$

$$(a \wedge b)^n = a^n \wedge a^{n-1}b \wedge \dots \wedge ab^{n-1} \vee b^n.$$

Demostración. Sea G un l -grupo y $a, b, c \in G$.

- (i) Si $a \leq b$, entonces $a^{-1}a \leq a^{-1}b$ y $a^{-1}ab^{-1} \leq a^{-1}bb^{-1}$, por lo que $b^{-1} \leq a^{-1}$.
- (ii) Como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, entonces $(a \vee b)^{-1} \leq a^{-1}$ y $(a \vee b)^{-1} \leq b^{-1}$, lo que conlleva a que $(a \vee b)^{-1} \leq a^{-1} \wedge b^{-1}$. De igual manera, $a^{-1} \wedge b^{-1} \leq a^{-1}$ y $a^{-1} \wedge b^{-1} \leq b^{-1}$ implica que $a \leq (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}$ y $b \leq (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}$, esto indica que $a \vee b \leq (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}$ y $a^{-1} \wedge b^{-1} \leq (a \vee b)^{-1}$. Por lo tanto, $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$.

Por otra parte, puesto que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, resulta $a^{-1} \leq (a \wedge b)^{-1}$, $b^{-1} \leq (a \wedge b)^{-1}$ y $a^{-1} \vee b^{-1} \leq (a \wedge b)^{-1}$. Así mismo, $a^{-1} \leq a^{-1} \vee b^{-1}$ y $b^{-1} \leq a^{-1} \vee b^{-1}$ indican que $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \leq a$ y $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \leq b$, así que $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \leq a \wedge b$ y $(a \wedge b)^{-1} \leq a^{-1} \vee b^{-1}$. Como consecuencia, $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$.

- (iii) Dado que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, se obtiene que $ac \leq (a \vee b)c$ y $bc \leq (a \vee b)c$, por lo que $ac \vee bc \leq (a \vee b)c$. Por otro lado, como $ac \leq ac \vee bc$ y $bc \leq ac \vee bc$, entonces $a \leq (ac \vee bc)c^{-1}$ y $b \leq (ac \vee bc)c^{-1}$, de donde $a \vee b \leq (ac \vee bc)c^{-1}$ y $(a \vee b)c \leq ac \vee bc$. Por lo tanto, $(a \vee b)c = ac \vee bc$. Análogamente se obtiene $c(a \vee b) = ca \vee cb$.
- (iv) Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, se sigue que $(a \wedge b)c \leq ac$, $(a \wedge b)c \leq bc$ y así, $(a \wedge b)c \leq ac \wedge bc$. Ahora bien, dado que $ac \wedge bc \leq ac$ y $ac \wedge bc \leq bc$, resulta $(ac \wedge bc)c^{-1} \leq a$, $(ac \wedge bc)c^{-1} \leq b$ y a su vez, $(ac \wedge bc)c^{-1} \leq a \wedge b$ y $ac \wedge bc \leq (a \wedge b)c$. Por tanto, $(a \wedge b)c = ac \wedge bc$ y de igual manera, $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$.

(v) Es claro que para $n = 1$ se cumplen

$$\begin{aligned}(a \vee b)^n &= a^n \vee a^{n-1}b \vee \dots \vee ab^{n-1} \vee b^n, \\ (a \wedge b)^n &= a^n \wedge a^{n-1}b \wedge \dots \wedge ab^{n-1} \vee b^n.\end{aligned}$$

Suponga por hipótesis inductiva que las anteriores igualdades son ciertas para algún $n = k \in \mathbb{N}$. Luego, teniendo en cuenta que $ab = ba$, resulta

$$\begin{aligned}(a \vee b)^{k+1} &= (a \vee b)^k (a \vee b) \\ &= \left(a^k \vee a^{k-1}b \vee \dots \vee ab^{k-1} \vee b^k \right) (a \vee b) \\ &= a^k(a \vee b) \vee a^{k-1}b(a \vee b) \vee \dots \vee ab^{k-1}(a \vee b) \vee b^k(a \vee b) \\ &= a^k a \vee a^k b \vee a^{k-1}ba \vee a^{k-1}bb \vee \dots \vee ab^{k-1}a \vee ab^{k-1}b \vee b^k a \vee b^k b \\ &= a^{k+1} \vee a^k b \vee a^{k-1}ab \vee a^{k-1}b^2 \vee \dots \vee aab^{k-1} \vee ab^k \vee b^k a \vee b^{k+1} \\ &= a^{k+1} \vee \left(a^k b \vee a^k b \right) \vee a^{k-1}b^2 \vee \dots \vee a^2 b^{k-1} \vee \left(ab^k \vee ab^k \right) \vee b^{k+1} \\ &= a^{k+1} \vee a^k b \vee a^{k-1}b^2 \vee \dots \vee a^2 b^{k-1} \vee ab^k \vee b^{k+1}.\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}(a \wedge b)^{k+1} &= (a \wedge b)^k (a \wedge b) \\ &= \left(a^k \wedge a^{k-1}b \wedge \dots \wedge ab^{k-1} \wedge b^k \right) (a \wedge b) \\ &= a^k(a \wedge b) \wedge a^{k-1}b(a \wedge b) \wedge \dots \wedge ab^{k-1}(a \wedge b) \wedge b^k(a \wedge b) \\ &= a^k a \wedge a^k b \wedge a^{k-1}ba \wedge a^{k-1}bb \wedge \dots \wedge ab^{k-1}a \wedge ab^{k-1}b \wedge b^k a \wedge b^k b \\ &= a^{k+1} \wedge a^k b \wedge a^{k-1}ab \wedge a^{k-1}b^2 \wedge \dots \wedge aab^{k-1} \wedge ab^k \wedge b^k a \wedge b^{k+1} \\ &= a^{k+1} \wedge \left(a^k b \wedge a^k b \right) \wedge a^{k-1}b^2 \wedge \dots \wedge a^2 b^{k-1} \wedge \left(ab^k \wedge ab^k \right) \wedge b^{k+1} \\ &= a^{k+1} \wedge a^k b \wedge a^{k-1}b^2 \wedge \dots \wedge a^2 b^{k-1} \wedge ab^k \wedge b^{k+1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(a \vee b)^n &= a^n \vee a^{n-1}b \vee \dots \vee ab^{n-1} \vee b^n, \\ (a \wedge b)^n &= a^n \wedge a^{n-1}b \wedge \dots \wedge ab^{n-1} \vee b^n.\end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. □

Observación 3.0.4. Note que por la Proposición 3.0.3, si G es un l -grupo y $a \in G$ con $e \leq a^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $a^n \wedge e = e$ y

$$\begin{aligned} (a \wedge e)^n &= a^n \wedge a^{n-1}e \wedge \cdots \wedge ae^{n-1} \wedge e^n \\ &= a^n \wedge a^{n-1} \wedge \cdots \wedge a \wedge e \\ &= a^{n-1} \wedge \cdots \wedge a \wedge e \\ &= a^{n-1} \wedge a^{n-2}e \wedge \cdots \wedge ae^{n-2} \wedge e^{n-1} \\ &= (a \wedge e)^{n-1}, \end{aligned}$$

por lo que $a \wedge e = e$ y $e \leq a$. Más aún, si $a^n = e$, se obtiene que $(a^{-1})^n = e$ y en particular, $e \leq a^n$ y $e \leq (a^{-1})^n$ implican $e \leq a$ y $e \leq a^{-1}$, de donde $a = e$.

Definición 3.0.5.

1. Dado un grupo G , un elemento $g \in G$ se dice que es **de torsión** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$.
2. El grupo G se denomina **libre de torsión** si el único elemento de torsión de G es el elemento neutro.

Por la Observación 3.0.4, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.0.6. Si G es un l -grupo, entonces G es un grupo libre de torsión.

Del mismo modo, desde la perspectiva de la teoría de retículos, es importante destacar que los l -grupos también poseen una propiedad fundamental y es que siempre son retículos distributivos.

Proposición 3.0.7. Si G es un l -grupo, entonces G es un retículo distributivo.

Demostración. Sean $a, b, c \in G$. Puesto que $a \leq a \vee b$ y $a \leq a \vee c$, entonces $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Así mismo, $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ y $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$ implican que $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Luego, $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Por otro lado, denotando $w := b \wedge c$, se tiene que:

- Como $w \leq b$, resulta $e \leq bw^{-1}$ y a su vez, $a \leq bw^{-1}a \leq bw^{-1}(a \vee w)$.
- Dado que $w \leq a \vee w$, se obtiene que $e \leq w^{-1}(a \vee w)$ y $b \leq bw^{-1}(a \vee w)$, de donde $a \vee b \leq bw^{-1}(a \vee w)$.

- Razonando de la misma manera que en los dos puntos anteriores, se llega a que $a \vee c \leq cw^{-1}(a \vee w)$.

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge (a \vee c) &\leq bw^{-1}(a \vee w) \wedge cw^{-1}(a \vee w) \\
 &= (b \wedge c)w^{-1}(a \vee w) \\
 &= (b \wedge c)(b \wedge c)^{-1}(a \vee (b \wedge c)) \\
 &= e(a \vee (b \wedge c)) \\
 &= a \vee (b \wedge c).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ y G es un retículo distributivo. Esto termina la demostración. $\square$

Ejemplo 3.0.8. Sea $G \neq \emptyset$ un conjunto totalmente ordenado. El conjunto $\text{Aut}(G)$, de todas las permutaciones sobre G que preservan el orden, es un l -grupo con la composición usual de funciones, y dados $f, g \in \text{Aut}(G)$, se define el orden $\leq$ en $\text{Aut}(G)$ como, $f \leq g$, si y solo si, $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in G$.

Ejemplo 3.0.9. Si $X \neq \emptyset$ es un espacio topológico, el conjunto $C(X, \mathbb{R})$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, es un l -grupo abeliano, donde para cada $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, $f + g$ es la función definida puntualmente como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, mientras que $f \leq g$, si y solo si, $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in X$.

Ejemplo 3.0.10. $\mathbb{Z}$ es un lu -grupo abeliano con el orden usual y $u = 1$ es una unidad fuerte por la propiedad arquimediana. De hecho, cualquier $z \in \mathbb{Z}^+$ puede ser considerado como unidad fuerte.

El Ejemplo 3.0.10 muestra que si un l -grupo posee unidad fuerte, no necesariamente es única. Es precisamente por esta razón, que siempre se especifica la unidad fuerte que se está considerando para el l -grupo.

Como es habitual, también existe una definición para las aplicaciones entre l -grupos que preservan tanto la estructura de grupo como la de retículo.

Definición 3.0.11. Si G, H son l -grupos abelianos, una función $f : G \rightarrow H$ es un l -homomorfismo si para cualesquiera $a, b \in G$:

$$(i) \ f(a + b) = f(a) + f(b).$$

$$(ii) \ \text{Si } a \leq b, \text{ entonces } f(a) \leq f(b).$$

Si G es un lu -grupo abeliano y H es un lv -grupo abeliano, una función $f : (G, u) \longrightarrow (H, v)$ es un **l -homomorfismo de l -grupos abelianos con unidad fuerte**, si cumple (i) y (ii) y además, $f(u) = v$.

Naturalmente, una función $f : G \longrightarrow H$ es un l -homomorfismo si es un homomorfismo de grupos y, además, para cada par $a, b \in G$ se cumple que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

3.1. l -ideales

Al igual que sucede en cualquier estructura algebraica, en los l -grupos aparecen subconjuntos con propiedades destacables. En este sentido, el estudio se centrará en los l -ideales, una clase específica de subgrupos que merece un análisis detallado debido a que, como se mencionó anteriormente, el objetivo final de este capítulo es caracterizar topológicamente el conjunto de los l -ideales que son primos. En adelante, para un l -grupo G y $a \in G$ se usará la notación $|a| := a \vee a^{-1}$, $a^+ := a \vee e$ y $a^- := (a \wedge e)^{-1}$. No es difícil ver que $e \leq |a|$ y que $|a| = (a^+)(a^-)$.

Definición 3.1.1. Un **l -subgrupo** N de un l -grupo G es un subconjunto de G que es subgrupo y subretículo. Además, un l -subgrupo N se conoce como **convexo** o **sólido**, si para cualesquiera $a, c \in N$ y $b \in G$, $a \leq b \leq c$ implica $b \in N$.

Un resultado relevante sobre la caracterización de l -subgrupos convexos es el siguiente.

Proposición 3.1.2. Un l -subgrupo N de un l -grupo G es convexo, si y solo si, dados $a \in G$ y $b \in N$ con $|a| \leq |b|$, implica $a \in N$.

Demostración. Si N es un l -subgrupo convexo de G y se toman dos elementos $a, b \in G$ de manera que $b \in N$ y $|a| \leq |b|$, entonces $a \leq a \vee a^{-1} \leq b \vee b^{-1}$ y también $a^{-1} \leq a \vee a^{-1} \leq b \vee b^{-1}$, lo que implica que $b^{-1} \wedge b = (b \vee b^{-1})^{-1} \leq (a^{-1})^{-1} = a$ y en consecuencia, $b^{-1} \wedge b \leq a \leq b \vee b^{-1}$. Puesto que N es un l -subgrupo, $b^{-1} \wedge b, b \vee b^{-1} \in N$ y por ser convexo, resulta $a \in N$.

Ahora suponga que N es un l -subgrupo de G y $a, b, c \in G$ son tales que $a, c \in N$ y $a \leq b \leq c$. Luego, $b^{-1} \leq a^{-1}$ y por consiguiente, $|b| = b \vee b^{-1} \leq c \vee b^{-1} \leq c \vee a^{-1} \leq |c \vee a^{-1}|$ y dado que N es un l -subgrupo, se obtiene que $c \vee a^{-1} \in N$ y así, $b \in N$ y N es convexo.

De esta manera, se concluye la prueba. $\square$

Definición 3.1.3. Un l -ideal de un l -grupo G es un l -subgrupo N normal y convexo. Además, un l -ideal P es **primo** si es propio y para cualquier par $a, b \in G$, $a \wedge b \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$. El conjunto de todos los l -ideales primos de G se denomina el **espectro primo** de G y se denota por $\text{Spec}(G)$.

Trivialmente, $\{e\}$ y G son l -ideales.

Ejemplo 3.1.4. En el l -grupo aditivo $\mathbb{Z}$, los subgrupos son $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ y los subconjuntos de la forma $n\mathbb{Z} := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ mayor a 1. Todos estos subgrupos son también subretículos ya que el orden usual es total, y son normales debido a que $\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano. Sin embargo, $n\mathbb{Z}$ no es un convexo para $n \neq 1$, puesto que entre cada par de múltiplos de n existe al menos un número entero que no lo es. De esta manera, los únicos l -ideales de $\mathbb{Z}$ son $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ y es inmediato que son primos. En conclusión, $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{\{0\}, \mathbb{Z}\}$.

Puesto que la intersección de l -ideales también es un l -ideal, puede definirse para cada subconjunto A de G , el **l -ideal generado por A** , el cual corresponde a la intersección de todos los l -ideales de G conteniendo a A , y se denota por $\langle A \rangle$. Es evidente que $\langle A \rangle$ es el menor l -ideal de G que contiene a A .

El siguiente lema ofrece una descripción por comprensión para el l -ideal generado por cualquier subconjunto A de un l -grupo abeliano G .

Lema 3.1.5. Si G es un l -grupo abeliano y $\emptyset \neq A \subseteq G$, entonces

$$\langle A \rangle = \{g \in G \mid |g| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_n| \text{ para algunos } x_1, x_2, \dots, x_n \in A\}.$$

Demostración. Denotando

$$B = \{g \in G \mid |g| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_n| \text{ para algunos } x_1, x_2, \dots, x_n \in A\},$$

y puesto que para cada $a \in A$ se cumple que $|a| \leq |a|$, se tiene que $A \subseteq B$ y así, $B \neq \emptyset$. Si $a, b \in B$, entonces $|a| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_m|$ y $|b| \leq |y_1||y_2| \cdots |y_n|$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in A$. Luego,

$$\begin{aligned} |ab^{-1}| &\leq |a||b^{-1}||a| \\ &= |a||b||a| \\ &\leq |x_1||x_2| \cdots |x_m||y_1||y_2| \cdots |y_n||x_1||x_2| \cdots |x_m|, \end{aligned}$$

por lo que $ab^{-1} \in B$. Así mismo, $|a \vee b| \leq |a| \vee |b| \leq |a||b| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_m||y_1||y_2| \cdots |y_n|$ y también,

$$\begin{aligned} |a \wedge b| &= |(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}| \\ &= |a^{-1} \vee b^{-1}| \\ &\leq |a^{-1}| \vee |b^{-1}| \\ &\leq |a^{-1}| |b^{-1}| \\ &= |a||b| \\ &\leq |x_1||x_2| \cdots |x_m||y_1||y_2| \cdots |y_n|, \end{aligned}$$

así que $a \vee b \in B$ y $a \wedge b \in B$. Como consecuencia, B es un l -subgrupo de G . Además, por ser G abeliano, resulta siendo B un l -subgrupo normal. Más aún, si $a \in G$ y $b \in B$ son tales que $|a| \leq |b|$, se sigue que $|b| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_m|$ con $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$, y por transitividad, $|a| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_m|$, de donde $a \in B$ y B es convexo. De esta manera, B es un l -ideal de G conteniendo a A , lo cual indica que $\langle A \rangle \subseteq B$.

Recíprocamente, si $g \in B$, entonces existen $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ con $|g| \leq |x_1||x_2| \cdots |x_m|$, y dado que $\langle A \rangle$ es un l -ideal que contiene a A , se obtiene que $|x_i| = x_i \vee x_i^{-1} \in I_A$ para cada $1 \leq i \leq m$, así que $|x_1||x_2| \cdots |x_m| \in \langle A \rangle$, también $|g| \in I_A$ y a su vez, $g \in \langle A \rangle$, de donde $B \subseteq \langle A \rangle$. Por lo tanto, $\langle A \rangle = B$. $\square$

Corolario 3.1.6. *Los l -ideales principales (generados por un solo elemento) en un l -grupo abeliano G son de la forma*

$$\langle g \rangle := \langle \{g\} \rangle = \{x \in G \mid |x| \leq n|g|, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Se denotará en adelante al conjunto de l -ideales principales de un l -grupo G como $\text{Id}_c(G)$, el cual es un retículo bajo la inclusión usual de conjuntos. Así mismo, $\text{Id}(G)$ denota el retículo de l -ideales de G .

Observación 3.1.7. *Dado un l -homomorfismo $f : G \rightarrow H$, se introduce la función $\text{Id}_c(f) : \text{Id}_c(G) \rightarrow \text{Id}_c(H)$ tal que $\text{Id}_c(f)(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle$, la cual está bien definida, puesto que si $x, y \in G$ son tales que $\langle x \rangle = \langle y \rangle$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ que satisfacen $|x| \leq n|y|$ y a su vez $|y| \leq m|x|$. Luego, $|f(x)| = f(|x|) \leq f(n|y|) = n|f(y)|$ y de manera análoga $|f(y)| = m|f(x)|$, lo que conlleva a que $\langle f(x) \rangle = \langle f(y) \rangle$ y $\text{Id}_c(f)$ está bien definida.*

Recuerde que dado un grupo $(G, +, 0)$ y un subgrupo N normal en G , se introduce el **grupo cociente** $G/N := \{x/N \mid x \in G\}$, donde la operación binaria $*$ está definida como

$x/N * y/N = (x + y)/N$ y el elemento neutro es $0/N$. En adición si G posee un orden parcial $\leq_G$, entonces G/N también es un retículo, donde $x/N \vee y/N := (x \vee_G y)/N$ y a su vez, $x/N \wedge y/N := (x \wedge y)/N$. Cuando no se presenten ambigüedades, las operaciones se denotarán de igual forma.

De manera similar a la Proposición 2.2.11, se tiene lo siguiente.

Proposición 3.1.8. *Si $f : G \longrightarrow H$ es un l -homomorfismo entre l -grupos, entonces la función $Id_c(f) : Id_c(G) \longrightarrow Id_c(H)$ es un homomorfismo cerrado de 0-retículos.*

Demostración. La Observación 3.1.7 también muestra que $Id_c(f)$ es un homomorfismo de retículos y $Id_c(f)(\langle e_G \rangle) = \langle f(e_G) \rangle = \langle e_H \rangle$.

Ahora bien, si $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle \in Id_c(G)$ y $\langle b \rangle \in Id_c(H)$ son tales que

$$\langle f(a_0) \rangle \subseteq \langle f(a_1) \rangle \vee \langle b \rangle = \langle f(a_1) \vee b \rangle,$$

y asumiendo sin pérdida de generalidad que $a_0, a_1 \in G^+$ y $b \in H^+$, significa que existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que $f(a_0) \leq n(f(a_1) \vee b) \leq n(f(a_1) + b) = nf(a_1) + nb$, lo que implica que $f(a_0) - nf(a_1) = f(a_0 - na_1) \leq nb$ y $f((a_0 - na_1)^+) = (f(a_0 - na_1))^+ \leq nb$. Como consecuencia, se tiene que $\langle a_0 \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \vee \langle (a_0 - na_1)^+ \rangle$ y $Id_c(f)(\langle (a_0 - na_1)^+ \rangle) \subseteq \langle b \rangle$, por lo que se concluye que $Id_c(f)$ es cerrado y termina la prueba. $\square$

Así mismo, se tiene una versión del Lema 2.2.13 para l -grupos abelianos.

Lema 3.1.9. *Sean G un l -grupo abeliano, S un 0-retículo y $f : Id_c(G) \longrightarrow S$ un join-homomorfismo sobreyectivo y cerrado; entonces $J := \{x \in G \mid f(\langle x \rangle) = 0\}$ es un l -ideal de G y la función $\varphi : Id_c(G/J) \longrightarrow S$ con $\varphi(\langle x/J \rangle) := f(\langle x \rangle)$ es un isomorfismo.*

Demostración. En primer lugar, note que $e \in J$ ya que para cualquier $s \in S$ se tiene que $s = f(\langle x \rangle)$ para algún $x \in G$ y $\langle x \rangle = \langle x \rangle \vee \langle e \rangle$ implica

$$s = f(\langle x \rangle) = f(\langle x \rangle \vee \langle e \rangle) = f(\langle x \rangle) \vee f(\langle e \rangle) = s \vee f(\langle e \rangle),$$

y $f(\langle e \rangle) = 0$, por lo que $J \neq \emptyset$. Sean $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in Id_c(G)$ tales que $x, y \in J$, asumiendo sin pérdida de generalidad que $x, y \in G^+$ se sigue que

$$f(\langle x + y \rangle) = f(\langle x \vee y \rangle) = f(\langle x \rangle) \vee f(\langle y \rangle) = 0 \vee 0 = 0,$$

mientras que $f(\langle -x \rangle) = f(\langle x \rangle) = 0$, por lo que J es un subgrupo de G y es normal debido a que G es abeliano. Además, si $x \leq y$, se tiene que $y = x \vee y$, $f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x) \leq f(y)$, de donde J es también un subretículo de G . En adición, si $x \in G$ y $y \in J$ son

tales que $|x| \leq |y|$, significa que $x \in \langle y \rangle$, $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle$, $\langle y \rangle = \langle x \rangle \vee \langle y \rangle$, $0 = f(\langle y \rangle) = 0 \vee f(\langle x \rangle)$ y $f(\langle x \rangle) = 0$, por lo que $x \in J$, J es convexo y en consecuencia, un l -ideal de G .

Por otra parte, es evidente que φ es sobreyectiva por serlo f . Más aún, si se tiene $f(\langle x \rangle) = \varphi(\langle x/J \rangle) = \varphi(\langle y/J \rangle) = f(\langle y \rangle)$, entonces $f(\langle x \rangle) = f(\langle y \rangle) \vee 0$ y al ser f cerrado, existe $\langle w \rangle \in \text{Id}_c(G)$ tal que $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle \vee \langle w \rangle$ y $f(\langle w \rangle) \leq 0$. Asumiendo sin pérdida de generalidad que $y, w \in G^+$, de lo anterior se deduce que $x \in \langle y \rangle \vee \langle w \rangle = \langle y \vee w \rangle = \langle y + w \rangle$ y $|x| \leq n|y + w| = n(|y| + |w| + |y|) = 2n|y| + n|w|$ para algún $n \in \mathbb{N}$, que $w \in J$ y por ende $|w| \in J$. Luego, $|x/J| = |x|/J \leq (2n|y| + n|w|)/J = (2n|y|)/J = 2n(|y|/J) = 2n|y/J|$ en G/J y así, $\langle x/J \rangle \subseteq \langle y/J \rangle$. Análogamente se llega a que $\langle y/J \rangle \subseteq \langle x/J \rangle$, lo que prueba que φ es una función inyectiva.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}_c(G) & \xrightarrow{f} & S \\
 \downarrow \pi & \nearrow \varphi & \\
 \text{Id}_c(G/J) & &
 \end{array}$$

Esto finaliza la demostración. □

3.2. El espectro primo de un l -grupo abeliano

Para cualquier l -grupo, su espectro primo puede ser dotado de la Topología de Zariski de manera similar a como se realizó en el capítulo anterior para el espectro primo de las MV-álgebras. Para ello, se mostrará que existe una versión del Teorema 2.3.2 para l -grupos que permite definir los conjuntos abiertos. Esto implicará que el espectro primo de cada l -grupo es un espacio espectral generalizado, pero no necesariamente espectral.

Lema 3.2.1. *Sea G un l -grupo abeliano.*

- (i) Si $a, b, c \in G$ con $e \leq a \wedge b \wedge c$, entonces $a \wedge bc \leq (a \wedge b)(a \wedge c)$.
- (ii) Para cualquier par $a, b \in G^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a \wedge b^n \leq (a \wedge b)^n$.
- (iii) Para todo $x, y \in G$, $|x| \wedge |y| \leq |x \wedge y|$.

Demostración.

(i) Sean $a, b, c \in G$, tales que $e \leq a \wedge b \wedge c$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a \wedge bc &= ae \wedge bc \\
 &\leq a(a \wedge b \wedge c) \wedge bc \\
 &= aa \wedge ab \wedge ac \wedge bc \\
 &= aa \wedge ac \wedge ba \wedge bc \\
 &= a(a \wedge c) \wedge b(a \wedge c) \\
 &= (a \wedge b)(a \wedge c).
 \end{aligned}$$

(ii) Sean $a, b \in G^+$, procediendo por inducción sobre n , el caso base $n = 1$ se cumple de manera trivial. Suponiendo que $a \wedge b^k \leq (a \wedge b)^k$ es cierto para algún $k \in \mathbb{N}$, se sigue del punto anterior que $a \wedge b^{k+1} \leq (a \wedge b)(a \wedge b^k) \leq (a \wedge b)(a \wedge b)^k = (a \wedge b)^{k+1}$. Por lo tanto, $a \wedge b^n \leq (a \wedge b)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Para cualquier par $x, y \in G$,

$$\begin{aligned}
 |x| \wedge |y| &= (x \vee x^{-1}) \wedge (y \vee y^{-1}) \\
 &= [(x \vee x^{-1}) \wedge y] \vee [(x \vee x^{-1}) \wedge y^{-1}] \\
 &= (x \wedge y) \vee (x^{-1} \wedge y) \vee (x \wedge y^{-1}) \vee (x^{-1} \wedge y^{-1}) \\
 &\leq (x \wedge y) \vee x^{-1} \vee y^{-1} \\
 &= (x \wedge y) \vee (x \wedge y)^{-1} \\
 &= |x \wedge y|.
 \end{aligned}$$

Se concluye la prueba. □

Teorema 3.2.2. Si N es un l -ideal de un l -grupo abeliano G y $a \notin N$, entonces existe un l -ideal primo P tal que $N \subseteq P$ y $a \notin P$.

Demostración. Considere el conjunto $\mathcal{J} = \{I \subseteq G \mid I \in \text{Id}(G), a \notin I, N \subseteq I\}$, el cual no es vacío ya que $N \in \mathcal{J}$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{J}$ y $P = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$, veamos que P es un l -ideal de G .

Si $a, b \in P$, entonces $a \in I_i$ y $b \in I_j$ para algunos $I_i, I_j \in \mathcal{C}$ y por ser $\mathcal{C}$ una cadena, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $I_i \subseteq I_j$. Luego, $a \in I_j$ y $a - b \in I_j$ ya que I_j es un subgrupo de G , lo que indica que $a - b \in P$ y P es un subgrupo de G . Así mismo, si $a \in G, p \in P$ y $ap \in aP$, entonces $p \in I_i$ con $I_i \in \mathcal{C}$, lo que implica que $ap \in aI_i = I_i a$ por ser I_i un subgrupo normal de G . Por consiguiente, existe $q \in I_i \subseteq P$ tal que $ap = qa \in Pa$ y así, $aP \subseteq Pa$. Análogamente se obtiene que $Pa \subseteq aP$ y por tanto, $P \triangleleft G$ (esto es, P es

subgrupo normal de G).

Más aún, si $a \in G$ y $b \in P$ de manera que $|a| \leq |b|$, se sigue que $b \in I_i$ con $I_i \in \mathcal{C}$, y la convexidad de I_i implica que $a \in I_i \subseteq P$ y P también es convexo. Así, P es un l -ideal de G . Note que si ocurriese $a \in P$, se tendría $a \in I$ para algún $I \in \mathcal{J}$, lo que no es cierto y en consecuencia, $a \notin P$. Además, $N \subseteq I$ para cada $I \in \mathcal{J}$ conlleva a que $N \subseteq P$ y de esta manera $P \in \mathcal{J}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{J}$ posee un elemento maximal P' . Probemos ahora que P' es un ideal primo de G .

Suponga que existen $x, y \in G$ tales que $x \wedge y \in P'$, $x \notin P'$ y $y \notin P'$. Sean H y K los menores l -ideales de G que contienen a $P' \cup \{x\}$ y $P' \cup \{y\}$, respectivamente. Puesto que $N \subseteq P' \subset H$, $N \subseteq P' \subset K$ y P es un elemento maximal en $\mathcal{J}$, se tiene que $H \notin \mathcal{J}$ y $K \notin \mathcal{J}$, esto es, $a \in H$ y $a \in K$. Luego, por el Lema 3.1.5, $a \leq |a| \leq |p_1||p_2| \cdots |p_m||x|^k$ y $a \leq |a| \leq |\hat{p}_1||\hat{p}_2| \cdots |\hat{p}_n||y|^l$, donde $p_1, p_2, \dots, p_m, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n \in P'$ y $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tomando $p = (|p_1||p_2| \cdots |p_m|) \vee (|\hat{p}_1||\hat{p}_2| \cdots |\hat{p}_n|) \in P'$ y $d = \max\{k, l\}$, resulta $|a| \leq p|x|^d$ y $|a| \leq p|y|^d$. Como consecuencia, y teniendo en cuenta el Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned} |a| &\leq (p|x|^d) \wedge (p|y|^d) \\ &= p(|x|^d \wedge |y|^d) \\ &\leq p(|x|^d \wedge |y|)^d \\ &\leq p(|x| \wedge |y|)^{d^2} \\ &\leq p|x \wedge y|^{d^2}, \end{aligned}$$

y puesto que $p, x \wedge y \in P'$, se sigue que $p|x \wedge y|^{d^2} \in P'$ y a su vez, $|a| \leq p|x \wedge y|^{d^2}$ implica $-p|x \wedge y|^{d^2} \leq a \leq p|x \wedge y|^{d^2}$ y $a \in P'$ por ser convexo, lo que es una contradicción ya que $P' \in \mathcal{J}$ y $a \notin P'$. Por lo tanto, P' es un ideal primo y se finaliza la demostración. $\square$

En vista de este resultado importante, tanto las proposiciones 2.3.8 y 2.3.18 como el Corolario 2.3.13 se cumplen también para el caso de los l -grupos abelianos. Es decir,

Observación 3.2.3. Para cada l -grupo abeliano G se tiene:

1. El conjunto $\mathcal{O}(I) = \{P \in \text{Spec}(G) \mid I \not\subseteq P\}$ está bien definido para cada ideal I de G .
2. La colección $\tau := \{\mathcal{O}(I) \mid I \in \text{Id}(G)\}$ es una topología para $\text{Spec}(G)$.
3. Para cada l -homomorfismo entre l -grupos abelianos $f : G \longrightarrow H$, se tiene que la función $\text{Spec}(f) : \text{Spec}(H) \longrightarrow \text{Spec}(G)$ definida como en la Observación 2.3.17, es continua, lo

que implica que Spec también es un funtor contravariante de la categoría **UAG** de l -grupos abelianos con unidad fuerte a la categoría **Top** de espacios topológicos.

Teorema 3.2.4. Si G es un l -grupo abeliano, entonces $(\text{Spec}(G), \tau)$ es un espacio espectral generalizado.

Demostración. La prueba de que la colección $K(\text{Spec}(G))$ de los conjuntos abiertos y compactos a la vez, es una base para la topología τ cerrada bajo intersecciones finitas, de que el espacio $\text{Spec}(G)$ es T_0 y que también es sobrio, se siguen de manera análoga a las proposiciones 2.3.11, 2.3.12 y 2.3.16, respectivamente. $\square$

En el caso de las MV-álgebras, el espectro primo de estas es un espacio espectral. Sin embargo, el espectro primo de un l -grupo abeliano no siempre es compacto. Una condición necesaria y suficiente para que lo sea, es la siguiente.

Teorema 3.2.5. G es un lu -grupo abeliano, si y solo si, $(\text{Spec}(G), \tau)$ es un espacio espectral.

Demostración. Si G es un lu -grupo, entonces $\mathcal{O}(u) = \{P \in \text{Spec}(G) \mid u \notin P\}$ es un conjunto abierto y compacto a la vez, y note que $\mathcal{O}(u) = \text{Spec}(G)$ puesto que si existiese $P \in \text{Spec}(G)$ con $u \in P$, entonces para cualquier $x \in G$ existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq nu$ y $x \in P$, por lo que $P = G$ y esto sería una contradicción ya que todo ideal primo es propio. Así, $\text{Spec}(G)$ es compacto y por lo tanto, $(\text{Spec}(G), \tau)$ es un espacio espectral.

Recíprocamente, si G es un l -grupo y $(\text{Spec}(G), \tau)$ es un espacio espectral, se sigue que $\text{Spec}(G)$ es compacto y a su vez, existe $g \in G$ tal que $\mathcal{O}(g) = \text{Spec}(G)$. Luego, para cualquier $x \in G$ es inmediato que $\mathcal{O}(x) \subseteq \text{Spec}(G) = \mathcal{O}(g)$ y $[x] \subseteq [g]$, de donde $x \leq ng$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $u := g$ es una unidad fuerte y G es un lu -grupo. Esto concluye la demostración. $\square$

La sección concluye con un teorema análogo al Teorema 2.3.6, pero aplicable a l -grupos abelianos. Para ello, primero se presenta la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6. Dado un l -grupo abeliano G y P un l -ideal de G , las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) El l -grupo abeliano G/P es totalmente ordenado.
- (ii) El conjunto $\mathcal{J}_P := \{N \in \text{Id}_c(G) \mid P \subseteq N\}$ es totalmente ordenado por la inclusión.
- (iii) Si $I, N \in \mathcal{J}_P$ de manera que $P = I \cap N$, entonces $P = I$ o $P = N$.

(iv) P es un l -ideal primo de G .

Demostración.

(i) $\implies$ (ii) Suponga que existen $B, C \in \mathcal{J}_P$ que no se pueden comparar, es decir que existen $b \in B^+ - C$ y también $c \in C^+ - B$. Asumiendo que $b/P \leq c/P$ sin pérdida de generalidad, se obtiene que $(b \wedge c)/P = b/P \wedge c/P = b/P$, de donde $(b \wedge c)b^{-1} \in P \subseteq C$. Como consecuencia, $b \vee c = (b^{-1} \wedge c^{-1})^{-1} = (e \wedge cb^{-1})c^{-1} \in C$ y puesto que $0 \leq b \leq b \vee c$, la convexidad de C implica que $b \in C$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{J}_P$ es totalmente ordenado.

(ii) $\implies$ (iii) Si $I, N \in \mathcal{J}_P$ con $P = I \cap N$, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $I \subseteq N$, lo que significa que $P = I \cap N = I$.

(iii) $\implies$ (iv) Si $a, b \in G$ de manera que $a \wedge b \in P$, entonces

$$(P \vee \langle a \rangle) \cap (P \vee \langle b \rangle) = P \vee (\langle a \rangle \cap \langle b \rangle) = P \vee \langle a \wedge b \rangle = P,$$

lo que implica que $P \vee \langle a \rangle = P$ o $P \vee \langle b \rangle$, es decir que $a \in P$ o que $b \in P$, por lo que P es un ideal primo de G .

(iv) $\implies$ (i) Para cada par $a, b \in G$ se tiene que

$$((a \vee b)a^{-1} \wedge ((a \vee b)b^{-1}) = (a \vee b)(a^{-1} \wedge b^{-1}) = (a \vee b)(a \vee b)^{-1} = e \in P,$$

lo que conlleva a que $(a \vee b)a^{-1} \in P$ o que $(a \vee b)b^{-1} \in P$. Asumiendo sin pérdida de generalidad que $(a \vee b)a^{-1} \in P$, se sigue que

$$e/P = (a \vee b)a^{-1}/P = ((a \vee b)/P)((a^{-1})/P) = (a/P \vee b/P)(a/P)^{-1},$$

de donde $a/P \vee b/P = a/P$ y esto es $a/P \leq b/P$. Así, G/P es totalmente ordenado.

Se concluye la prueba. □

Definición 3.2.7. Un l -grupo abeliano $G \neq \emptyset$ es un **producto subdirecto** de una familia $\{G_i \mid i \in \Omega\}$ de l -grupos abelianos, si existe un l -monomorfismo $\varphi : G \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} G_i$ de manera que para cada proyección $\pi_j : \prod_{i \in \Omega} G_i \longrightarrow G_j$ con $j \in \Omega$, definida como $\pi_j(\{g_i\}_{i \in \Omega}) = g_j$, la composición $\pi_j \circ \varphi$ es un epimorfismo.

Teorema 3.2.8. (Teorema de representación subdirecta para l -grupos abelianos) Todo l -grupo abeliano puede ser representado como un producto subdirecto de grupos abelianos totalmente ordenados.

Demostración. Dado un l -grupo abeliano G , se verifica de manera análoga al Teorema 2.3.6 que G es producto subdirecto de la familia $C := \{G/P \mid P \in \text{Spec}(G)\}$, donde cada G/P es un l -grupo abeliano totalmente ordenado de acuerdo a la Proposición 3.2.6. Para ello, no es difícil ver que la función $\varphi : G \longrightarrow \prod \{G/P \mid P \in \text{Spec}(G)\}$ tal que $\varphi(g) = \{g/P\}_{P \in \text{Spec}(G)}$ es un l -homomorfismo. Así mismo, la condición $\bigcap \text{Spec}(G) = \{0\}$ implica que φ es inyectiva puesto que si $\varphi(g) = \varphi(h)$, significa que $g/P = h/P$ y a su vez $gh^{-1} \in P$ para cada $P \in \text{Spec}(G)$, lo que conlleva a que $gh^{-1} = 0$ y así, $g = h$. De manera inmediata, se tiene que cada composición $\pi_Q \circ \varphi$ con $Q \in \text{Spec}(G)$ es un l -epimorfismo. $\square$

Para un análisis más detallado de las diversas propiedades del espectro primo de un l -grupo abeliano, consulte [16] y [12].

3.3. El retículo de Belluce de un l -grupo abeliano

Al igual que se presentó en la sección del retículo de Belluce para MV-álgebras, es posible asociar un retículo distributivo a cada l -grupo abeliano. Este retículo se define de manera similar, como el conjunto cociente que se obtiene a partir de la relación de equivalencia definida por la pertenencia a los mismos l -ideales primos.

No es difícil ver que el Corolario 2.3.13, la Proposición 2.3.24 y la Observación 2.4.3 también se cumplen para el caso de los lu -grupos abelianos. Específicamente,

Observación 3.3.1. Para cada l -grupo abeliano G ,

1. $I \subseteq J$ en $\text{Id}(G)$ equivale a que $\mathcal{O}(I) \subseteq \mathcal{O}(J)$.
2. $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle = \langle a \vee b \rangle$ y también $\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle = \langle a \wedge b \rangle$, para cada par $a, b \in G$.
3. $\text{Id}_c(G) \cong K(\text{Spec}(G))$.
4. Cada ideal principal $\langle a \rangle$ con $a \in G$, corresponde a la intersección de todos los ideales primos que contienen a a .
5. Por el ítem anterior, $\beta(G) \cong \text{Id}_c(G)$.
6. Como consecuencia, $\beta(G) \cong \text{Id}_c(G) \cong K(\text{Spec}(G))$.

Teorema 3.3.2. Para cada l -grupo abeliano G , $\text{Spec}(G) \cong \text{Spec}(\beta(G))$.

Demostración. Sea G un l -grupo abeliano. Dado un l -ideal primo P de G , observe que $\beta(P) := \{\beta(a) : a \in P\}$ es un ideal primo de $\beta(G)$. En efecto, $\beta(P) \neq \emptyset$ ya que $P \neq \emptyset$ y si $x, y \in G$ son tales que $\beta(x) \leq \beta(y)$ y $\beta(y) \in \beta(P)$, significa que $y \in P$ y como $\beta(G) \cong Id_c(G)$, implica que $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle \subseteq P$ y $x \in P$, de donde $\beta(x) \in \beta(P)$.

Por otro lado, si $\beta(x), \beta(y) \in \beta(P)$, se tiene que $\beta(x) \vee \beta(y) = \beta(x \vee y)$ y $x \vee y \in P$ implica $\beta(x) \vee \beta(y) \in \beta(P)$; mientras que si $\beta(x), \beta(y) \in \beta(G)$ fuesen tales que $\beta(x) \wedge \beta(y) \in \beta(P)$, entonces $\beta(x) \wedge \beta(y) = \beta(x \wedge y)$, $x \wedge y \in P$ y puesto que P es primo, se sigue que $x \in P$ o $y \in P$, es decir que $\beta(x) \in \beta(P)$ o $\beta(y) \in \beta(P)$ y de esta manera, P es un ideal primo de $\beta(G)$.

En sentido contrario, también se tiene que si J es un ideal primo de $\beta(G)$, el conjunto $\hat{J} := \{x \in G : \beta(x) \in J\}$ resulta ser un l -ideal primo de G . Para ello, es evidente que $\hat{J} \neq \emptyset$ ya que $J \neq \emptyset$ y note que si $x \in \hat{J}$, implica que $\beta(-x) = \beta(x) \in J$ y $-x \in \hat{J}$, mientras que si $x, y \in \hat{J}$, significa que $\beta(x), \beta(y) \in J$ y

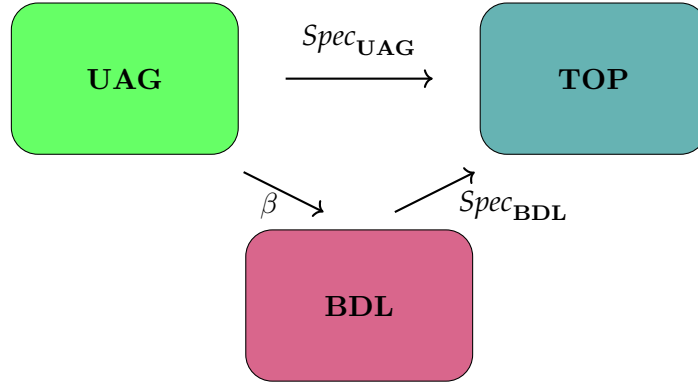
$$\begin{aligned} \beta(x + y) &\leq \beta(|x + y|) \\ &\leq \beta(|x| + |y|) \\ &= \beta(|x| \vee |y|) \\ &= \beta(|x|) \vee \beta(|y|) \\ &= \beta(x \vee (-x)) \vee \beta(y \vee (-y)) \\ &= \beta(x) \vee \beta(-x) \vee \beta(y) \vee \beta(-y) \\ &= \beta(x) \vee \beta(y), \end{aligned}$$

y este último es un elemento de J , así que $\beta(x + y) \in J$ por ser J un ideal y $x + y \in \hat{J}$. Como consecuencia, $\hat{J}$ es un subgrupo de G y normal debido a que G es abeliano. Adicionalmente, para cualquier par $x, y \in \hat{J}$ se cumple que $\beta(x \wedge y) = \beta(x) \wedge \beta(y) \in J$, $\beta(x \vee y) = \beta(x) \vee \beta(y) \in J$ y $x \wedge y, x \vee y \in J$, y si $w \in G$ es tal que $x \leq w \leq y$, conlleva a que $w = w \wedge y$, $\beta(w) = \beta(w \wedge y) = \beta(w) \wedge \beta(y)$, $\beta(w) \leq \beta(y)$ y $\beta(w) \in J$, de donde $w \in \hat{J}$. Finalmente, si $x, y \in G$ satisfacen que $x \wedge y \in \hat{J}$, se deduce que $\beta(x) \wedge \beta(y) = \beta(x \wedge y) \in J$ y por ser J un ideal primo de $\beta(G)$, resulta $\beta(x) \in J$ o $\beta(y) \in J$, es decir que $x \in \hat{J}$ o $y \in \hat{J}$, y por lo tanto, $\hat{J}$ es un l -ideal primo de G .

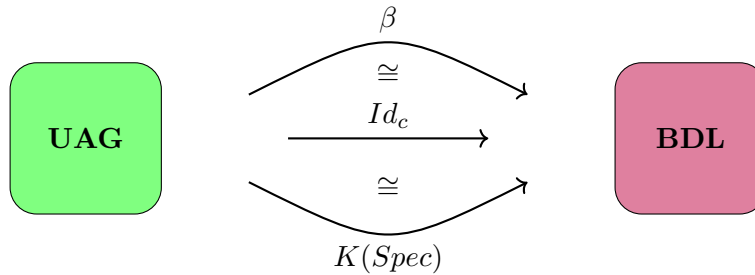
Considerando las funciones $\varphi : \text{Spec}(G) \rightarrow \text{Spec}(\beta(G))$ y $\phi : \text{Spec}(\beta(G)) \rightarrow \text{Spec}(G)$ dadas por $\varphi(P) := \beta(P)$ y $\phi(J) := \hat{J}$, se llega de igual forma que en el Teorema 2.4.4 a que $\text{Spec}(G) \cong \text{Spec}(\beta(G))$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Observación 3.3.3. Los resultados presentados en la sección Relaciones entre las categorías **MV**, **BDL** y **Top** del capítulo anterior, también son aplicables para la categoría de los l -grupos abelianos, y particularmente sobre los que poseen unidad fuerte.

1. El funtor $\text{Spec}_{\mathbf{UAG}}$ es naturalmente isomorfo a la composición $\text{Spec}_{\mathbf{BDL}} \circ \beta$.

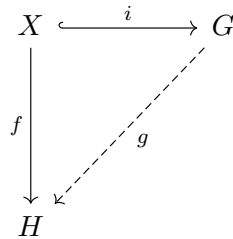


2. Los funtores β , $K(\text{Spec})$ y Id_c definidos sobre la categoría **UAG**, son naturalmente isomorfos entre sí.



3.4. l -grupos libres

Definición 3.4.1. Un l -grupo G se dice que es **libre** sobre un subconjunto generador $X \neq \emptyset$ y se escribe $G = l\text{-Free}_X$ si para cualquier l -grupo H y cualquier función $f : X \rightarrow H$, es posible construir un l -homomorfismo $g : G \rightarrow H$ tal que el siguiente diagrama conmuta.



Siguiendo la Observación 2.6.4 y la Proposición 2.6.5, se puede concluir igualmente, que si existe el l -homomorfismo g , entonces es único debido a que X genera a G ; y que no es relevante sobre cuál conjunto es libre un l -grupo sino su cardinalidad, por lo que en adelante se denotará como $l\text{-Free}^n$ al l -grupo libre sobre n generadores.

Definición 3.4.2. Para cada número entero $n \geq 1$ se introduce el conjunto $l\text{-}M_n$ formado por todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen:

(i) f es continua con respecto a la topología natural de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Existen polinomios lineales $p_1, \dots, p_k$ con coeficientes enteros

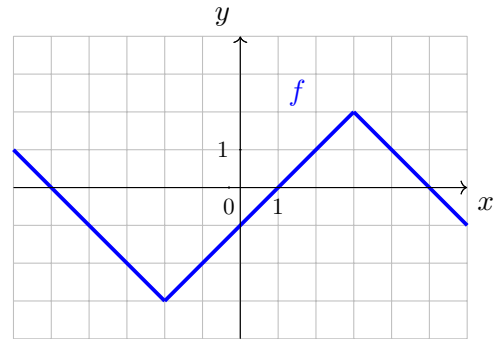
$$p_i(x_1, \dots, x_n) = b_i + m_{i1}x_1 + \dots + m_{in}x_n,$$

tales que para cada punto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, existe un índice $j \in \{1, \dots, k\}$ con $f(\mathbf{y}) = p_j(\mathbf{y})$.

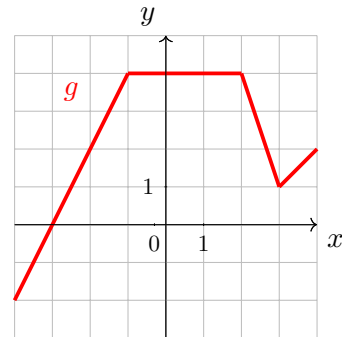
Considerando la operación $+$ en $l\text{-}M_n$ de manera puntual como $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ y definiendo el orden parcial $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $l\text{-}M_n$ es un l -grupo abeliano.

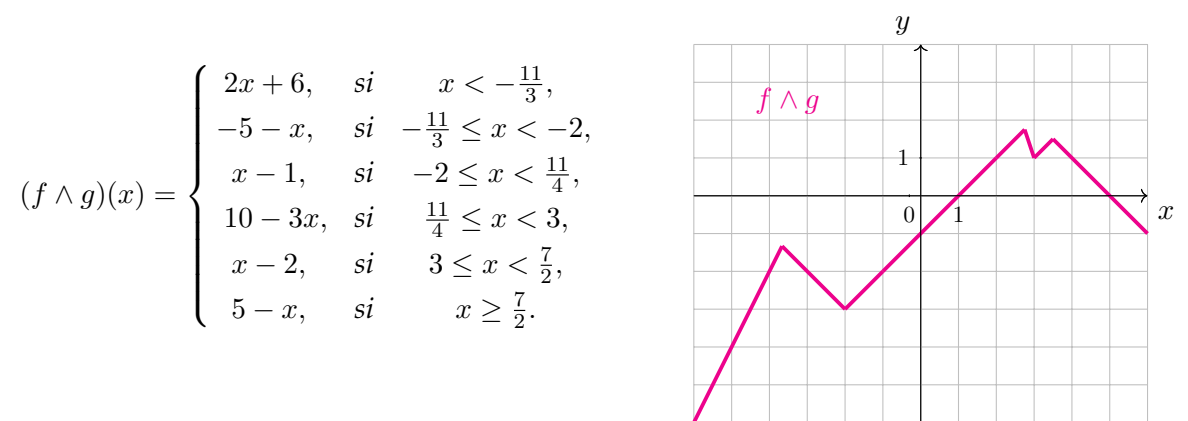
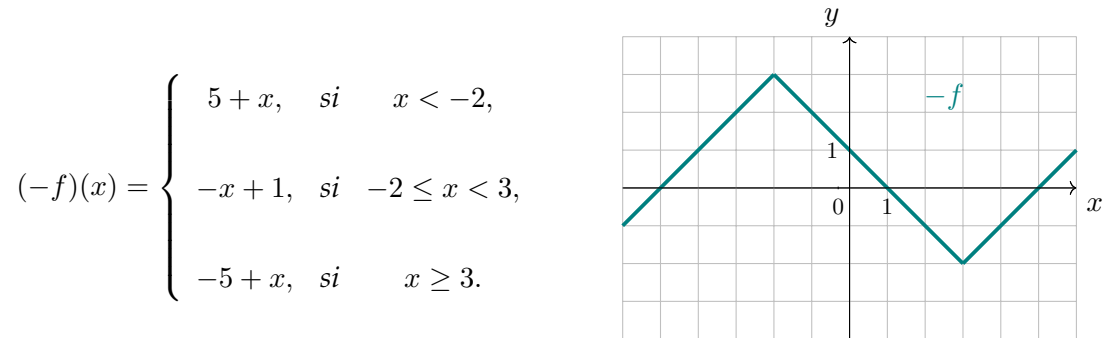
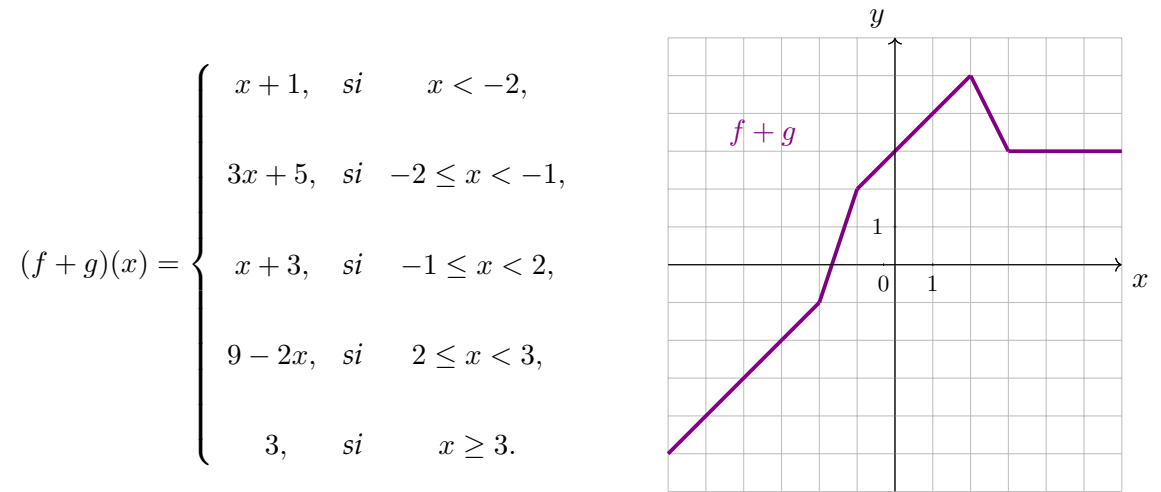
Ejemplo 3.4.3. Las siguientes funciones f y g pertenecen a $l\text{-}M_1$ y se muestran también las funciones $f + g$, $-f$, $f \wedge g$ y $f \vee g$, que existen por la observación anterior.

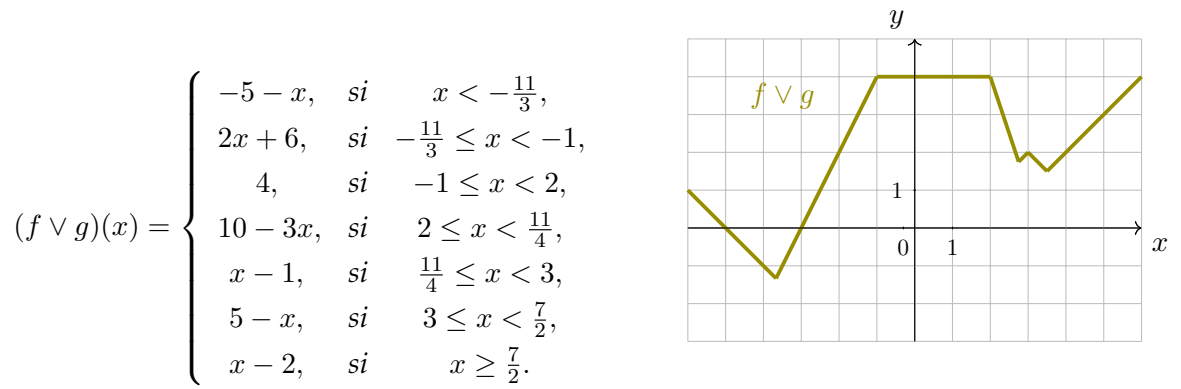
$$f(x) = \begin{cases} -5 - x, & \text{si } x < -2, \\ x - 1, & \text{si } -2 \leq x < 3, \\ 5 - x, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{si } x < -1, \\ 4, & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 10 - 3x, & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ x - 2, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

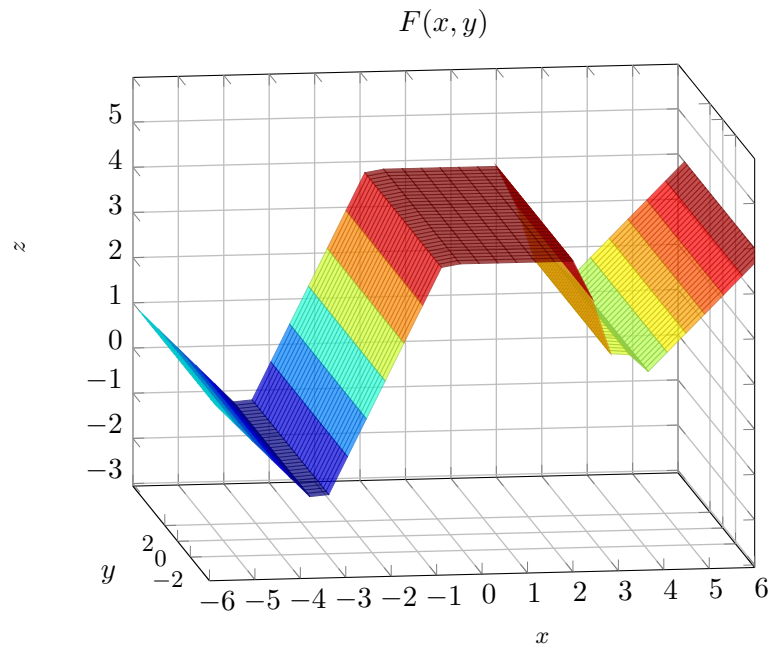


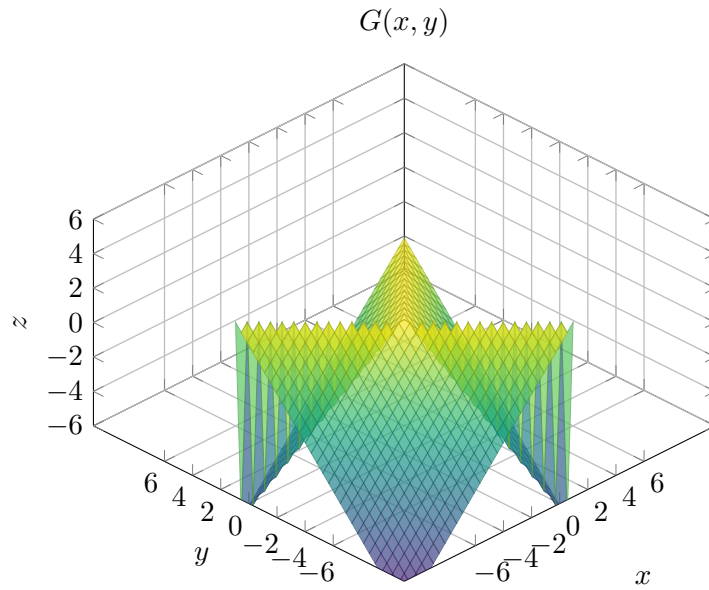




Ejemplo 3.4.4. Las siguientes funciones pertenecen a l - M_2 .

$$F(x, y) = \begin{cases} -5 - x, & \text{si } x < -\frac{11}{3}, \\ 2x + 6, & \text{si } -\frac{11}{3} \leq x < -1, \\ 4, & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 10 - 3x, & \text{si } 2 \leq x < \frac{11}{4}, \\ x - 1, & \text{si } \frac{11}{4} \leq x < 3, \\ 5 - x, & \text{si } 3 \leq x < \frac{7}{2}, \\ x - 2, & \text{si } x \geq \frac{7}{2}. \end{cases} \quad G(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x + y \leq 0, \\ x - y, & \text{si } x + y > 0 \text{ y } x - y \leq 0, \\ -x + y, & \text{si } x + y > 0 \text{ y } x - y > 0. \end{cases}$$





Observe que la función $(f \vee g)(x)$ del Ejemplo 3.4.3 es precisamente la proyección de la función $F(x, y)$ del Ejemplo 3.4.4 sobre uno de los planos coordenados. No obstante, no todas las funciones en $l\text{-}M_2$ son de este estilo, lo que se observa con la función $G(x, y)$.

De manera análoga a la Proposición 2.6.6 y al Teorema 2.6.11, se tienen los siguientes resultados en esta sección de l -grupos libres.

Proposición 3.4.5. *Si G es un l -grupo generado por un subconjunto X con $|X| = n$, entonces existe un epimorfismo de l -grupos $f : l\text{-Free}_n \rightarrow G$.*

El teorema que sigue, proporciona una herramienta fundamental para poder trabajar con los l -grupos libres de una forma más sencilla que simplemente con la definición, así como ocurre con las MV-álgebras libres y las funciones de McNaughton.

Teorema 3.4.6. *Para cada número entero $n \geq 1$, se tiene que $l\text{-Free}_n \cong l\text{-}M_n$.*

3.5. Conos

Definición 3.5.1. *Un conjunto de vectores $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina **cono simplicial**, si para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in C$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se tiene que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$.*

Al igual que ocurre con la convexidad, si $\{C_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una familia de conos simpliciales, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ también lo es, así que para cualquier conjunto de vectores

$B \subseteq \mathbb{R}^n$, la **envolvente cónica de B** se define como

$$\langle B \rangle := \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^n \mid C \text{ es cono}, B \subseteq C\},$$

el cual es el menor cono simplicial que contiene a B . Si $B = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, se escribe simplemente $\langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$ y si $B \subseteq \mathbb{Q}^n$, se dice que B es un cono simplicial **racional**.

Proposición 3.5.2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

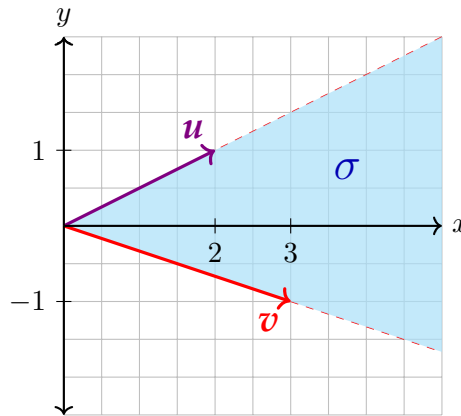
$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \right\}.$$

Demostración. Denotando

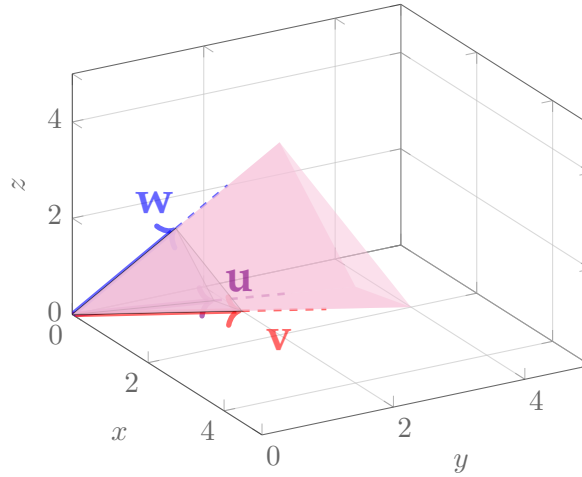
$$B := \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \right\},$$

es fácil ver que B es un cono simplicial y que $A \subseteq B$, de donde $\langle A \rangle \subseteq B$. En sentido contrario, como $\langle A \rangle$ contiene todas las combinaciones lineales de elementos de A con escalares no negativos, es inmediato que $B \subseteq \langle A \rangle$ y por tanto, $\langle A \rangle = B$. Esto concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 3.5.3. Tomando los vectores $u = (2, 1)$ y $v = (3, -1)$ en $\mathbb{R}^2$, la envolvente cónica $\sigma = \langle u, v \rangle$ está formado por todos los vectores cuyo punto inicial es el origen y su punto final está dentro de la región sombreada.



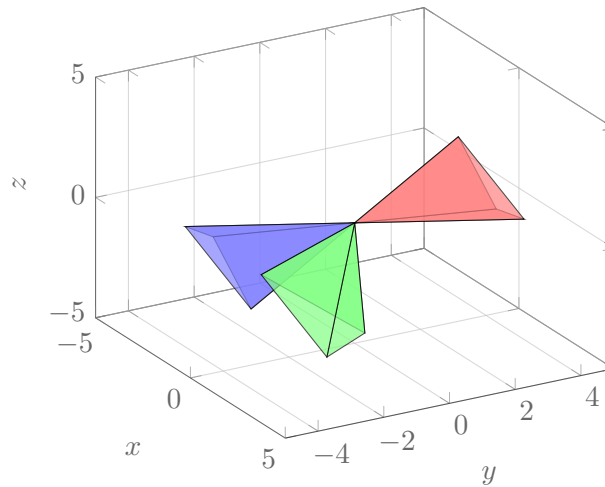
Ejemplo 3.5.4. La figura mostrada corresponde al menor cono simplicial racional en $\mathbb{R}^3$ que contiene a los vectores $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ y $w = (1, 1, 2)$.



Definición 3.5.5. Un **cono** es cualquier unión finita de conos simpliciales, y es **racional** si todos los conos simpliciales que lo componen son racionales. Además, si X es un conjunto con $|X| \leq \aleph_0$, un **cono cilíndrico racional** es un conjunto $C(P_0) = \{f \in \mathbb{R}^X : f|_Y \in P_0\}$, donde $Y \subseteq X$ es tal que $|Y| < \aleph_0$ y $P_0 \subseteq \mathbb{R}^Y$ es un cono racional.

Es evidente que si X es finito, entonces el cono cilíndrico racional resulta siendo simplemente un cono racional. Dado un cono cilíndrico racional C , la colección de todos los subconjuntos de C que también son conos cilíndricos racionales constituyen un retículo denotado por $C_{\text{cone}}(C)$.

Ejemplo 3.5.6. La siguiente figura muestra la unión de tres conos simpliciales racionales como el que se presentó en el Ejemplo 3.5.4, lo que corresponde a un cono racional.



Ejemplo 3.5.7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un cono cilíndrico racional.

Análogamente que en el capítulo anterior, se tiene también en este caso,

Teorema 3.5.8. $C \in C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)$, si y solo si, $C = Z(f_1, f_2, \dots, f_m)$ para algunas funciones $f_1, f_2, \dots, f_m$ en $l\text{-}M_n$.

De igual manera, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.5.9. $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ en $\text{Id}_c(l\text{-}M_n)$ equivale a que $Z(f) = Z(g)$ en $\mathbb{R}^n$.

Las demostraciones a estos enunciados puede consultarse en el capítulo 2 de [26], donde se reemplazan los símplejos por conos simpliciales.

3.6. Caracterización del espectro primo de los l -grupos abelianos

Proposición 3.6.1. El retículo de ideales principales de un l -grupo abeliano libre sobre n generadores, es dualmente isomorfo al retículo de conos cilíndricos racionales en $\mathbb{R}^n$. Es decir, $\beta(l\text{-}M_n) \cong K(\text{Spec}(l\text{-}M_n)) \cong \text{Id}_c(l\text{-}M_n) \cong C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}}$.

Demostración. Definiendo la función $\phi : \text{Id}_c(l\text{-}M_n) \longrightarrow C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)$ con $\langle f \rangle \mapsto Z(f)$, se tiene que ϕ es un monomorfismo de retículos contravariante, que además es sobreyectivo ya que si $C = Z(f_1, f_2, \dots, f_m) \in C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}}$, es fácil ver que $|f_1| + |f_2| + \dots + |f_m|$ pertenece a $l\text{-}M_n$ y que $\phi(\langle |f_1| + |f_2| + \dots + |f_m| \rangle) = Z(|f_1| + |f_2| + \dots + |f_m|) = Z(f_1, f_2, \dots, f_m) = C$. Por lo tanto, se concluye que $\text{Id}_c(l\text{-}M_n) \cong C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}}$. $\square$

Proposición 3.6.2. Un retículo L es el retículo de l -ideales principales de un l -grupo abeliano, si y solo si, existe un 0-epimorfismo cerrado $\pi : \text{Id}_c(l\text{-}M_n) \longrightarrow L$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

($\implies$) Sea $L \cong \text{Id}_c(G)$ para algún l -grupo G , por la Proposición 3.4.5, existe $n \in \mathbb{N}$ y un l -epimorfismo $f : l\text{-}M_n \longrightarrow G$, así que siguiendo la Proposición 3.1.8 se obtiene un 0-epimorfismo cerrado $\text{Id}_c(f) : \text{Id}_c(l\text{-}M_n) \longrightarrow \text{Id}_c(G)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 l\text{-}M_n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Id}_c(l\text{-}M_n) & & \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{Id}_c(f) & \searrow & \\
 G & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Id}_c(G) & \xrightarrow{\cong} & L
 \end{array}$$

($\Leftarrow$) Si existe un 0-epimorfismo cerrado $\pi : \text{Id}_c(l-M_n) \longrightarrow L$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se obtiene inmediatamente por el Lema 3.1.9 que $J := \{f \in l-M_n \mid \pi(\langle f \rangle) = 0\}$ es un l -ideal de $l-M_n$ y que $\text{Id}_c(l-M_n/J) \cong L$.

Esto termina la prueba. $\square$

Corolario 3.6.3. *Un retículo L es el retículo de l -ideales principales de un l -grupo abeliano, si y solo si, existe un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \longrightarrow L$, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.6.4. (Caracterización topológica del espectro primo de un l -grupo abeliano)
Un espacio topológico X es el espectro primo de un l -grupo abeliano, si y solo si, X es espectral generalizado y existe un epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $X \cong \text{Spec}(G)$ para algún l -grupo abeliano G , entonces por el Teorema 3.2.4, (X, τ) es un espacio espectral generalizado. Además, dado que $\text{Id}_c(G) \cong K(\text{Spec}(G))$, el corolario anterior indica la existencia de un cierto epimorfismo cerrado $\pi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(\text{Spec}(G))$ con $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Sea X un espacio espectral generalizado y $\pi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$ un epimorfismo cerrado, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el corolario anterior se asegura la existencia de un l -grupo abeliano G tal que $K(X) \cong \text{Id}_c(G) \cong K(\text{Spec}(G))$ y a su vez, $\text{Spec}(K(X)) \cong \text{Spec}(K(\text{Spec}(G)))$. Teniendo en cuenta el Teorema 16 de [29], resulta $X \cong \text{Spec}(K(X)) \cong \text{Spec}(K(\text{Spec}(G))) \cong \text{Spec}(G)$.

Esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 3.6.5. *Sea $X = \{a\} \subseteq \mathbb{R}$, es evidente que (X, τ) es un espacio espectral generalizado con la topología trivial. Al igual que en el Ejemplo 2.8.7, la función $\phi : C_{\text{cone}}(\mathbb{R})^{\text{op}} \longrightarrow K(X)$ dada por*

$$\phi(C) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \in C, \\ X, & \text{si } a \notin C, \end{cases}$$

es un epimorfismo cerrado, por lo que por el Teorema 3.6.4 se sabe que existe un l -grupo abeliano G tal que $X \cong \text{Spec}(G)$. Más aún, note que el subgrupo trivial $H = \{e\}$ satisface que $\text{Spec}(H) \cong \{0\} \cong X$.

En general, determinar la existencia de un epimorfismo preciso en un espacio espectral generalizado, como el que se establece en el Teorema 3.6.4 para garantizar que es homeomorfo al espectro primo de un l -grupo abeliano, puede ser sumamente complejo. La dificultad principal radica en identificar el valor del número $n \in \mathbb{N}$ que satisfaga las condiciones del teorema. Lo mismo sucede para el caso de las MV-álgebras.

En este capítulo, se presentó la base teórica general para un estudio introductorio sobre los grupos reticulados, enfocándose principalmente en aquellos que son abelianos y en algunas propiedades que cumple el espectro primo de estos. De manera análoga al capítulo anterior, se introdujeron tres nociones fundamentales: el retículo de Belluce asociado, los l -grupos libres y los conos. Así mismo, se definieron funtores similares a los del capítulo anterior, pero en este caso aplicados sobre la categoría de los l -grupos abelianos con unidad fuerte, demostrando que estos funtores determinan la misma acción. Finalmente, se expusieron las condiciones topológicas necesarias y suficientes que debe satisfacer un espacio para ser homeomorfo al espectro primo de algún l -grupo abeliano. La teoría desarrollada en este capítulo muestra una gran similitud con la del capítulo anterior sobre MV-álgebras, y en el siguiente capítulo se demostrará que esta conexión se debe a una relación categórica especial entre estas dos estructuras algebraicas.

Capítulo 4

Equivalencia entre las categorías MV y UAG

En este capítulo exploraremos la razón por la cual se estudian las MV-álgebras y los l -grupos abelianos con unidad fuerte, simultáneamente. Esto se debe a que, desde un punto de vista categórico, ambos representan esencialmente lo mismo. En ese sentido, se mostrará que existe un funtor de una categoría a la otra y viceversa, de tal manera que las composiciones de estos dos funtores (Γ y Ξ) son naturalmente isomorfas a los funtores identidad.

4.1. El funtor Γ

Sea Γ la aplicación que envía un lu -grupo abeliano $(G, +)$ al conjunto

$$[0, u] := \{x \in G \mid 0 \leq x \leq u\}.$$

Definiendo las operaciones $x \oplus y := (x + y) \wedge u$, $\neg x = u - x$ y $\mathbf{0} := 0$ sobre $[0, u]$, se prueba análogamente que en el Ejemplo 2.0.2, que $\Gamma(G, u) = [0, u]$ es una MV-álgebra. Así mismo, si $f : (G, u) \longrightarrow (H, v)$ es un homomorfismo entre l -grupos abelianos con unidad fuerte, la restricción $\Gamma(f) := f|_{[0, u]}$ de $[0, u]$ en $[0, v]$ es un homomorfismo de MV-álgebras. En efecto, dados $x, y \in [0, u]$,

$$\begin{aligned} f(x \oplus y) &= f((x + y) \wedge u) \\ &= f(x + y) \wedge f(u) \\ &= f(x + y) \wedge v \\ &= (f(x) + f(y)) \wedge v \\ &= f(x) \oplus f(y), \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}
 f(\neg x) &= f(u - x) \\
 &= f(u) - f(x) \\
 &= v - f(x) \\
 &= \neg f(x).
 \end{aligned}$$

Más aún, $\Gamma(1_{(G,u)}) = 1_{(G,u)}|_{[0,u]} = 1|_{[0,u]}$ para cada lu -grupo abeliano G , y para cualquier par de homomorfismos entre l -grupos abelianos con unidad fuerte $f : (G, u) \longrightarrow (H, v)$, $g : (H, v) \longrightarrow (K, w)$ y $a \in [0, u]$, se tiene que $f(a) \in [0, v]$ y $(g \circ f)(a) \in [0, w]$, por lo que

$$\begin{aligned}
 \Gamma(g \circ f)(a) &= (g \circ f)|_{[0,u]}(a) \\
 &= g(f(a)) \\
 &= g|_{[0,v]}(f(a)) \\
 &= (g|_{[0,v]} \circ f|_{[0,u]})(a) \\
 &= (\Gamma(g) \circ \Gamma(f))(a).
 \end{aligned}$$

Así, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. Γ es un funtor covariante de la categoría **UAG** de l -grupos abelianos con unidad fuerte a la categoría **MV** de MV-álgebras.

$$\begin{array}{ccc}
 (G, u) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [0, u] \\
 \downarrow f & & \downarrow f|_{[0,u]} \\
 (H, v) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [0, v]
 \end{array}$$

Este funtor es comúnmente llamado el **funtor de Mundici**, el cual fue introducido por primera vez en [25] en el año 1986 por el matemático Daniele Mundici, conocido por sus diversos aportes en lógica matemática, teoría informática, álgebra y análisis funcional.

4.2. El funtor Ξ

La construcción del segundo funtor, que opera en la otra dirección, resulta más compleja en comparación con el funtor de Mundici. Para lograrlo, se requiere primero la formación de un monoide particular a partir de una MV-álgebra dada, que luego se extiende bajo

una relación de equivalencia para obtener un grupo. Este grupo finalmente se verifica que es un l -grupo abeliano con unidad fuerte.

Definición 4.2.1. En una MV-álgebra A , una sucesión $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ se dice que es **buena**, si satisface:

- (i) Para cada $i \geq 1$, $a_i \oplus a_{i+1} = a_i$.
- (ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0$ para cada $r > n$.

Se denota por M_A a la colección de todas las sucesiones buenas en A .

En lugar de escribir $(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, se utiliza la notación $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Sobre el conjunto M_A se establecerá una operación binaria con la cual, se mostrará luego que es un monoide.

Definición 4.2.2. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son buenas sucesiones en una MV-álgebra A , se define la sucesión $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (c_1, c_2, \dots)$ como

$$c_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \dots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i,$$

para cada $i \geq 1$.

Note que, como $a_p = 0 = b_q$ siempre que $m < p$ y $n < q$, se tiene que $c_j = 0$ para todo $m + n < j$. Es por esto que no hay ambigüedad en escribir

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{m+n}) = (a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Además, si $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} c_i \oplus c_{i+1} &= [a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \dots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i] \oplus [a_{i+1} \oplus (a_i \odot b_1) \oplus \dots \oplus (a_1 \odot b_i) \oplus b_{i+1}] \\ &= [a_i \oplus a_{i+1}] \oplus [(a_{i-1} \odot b_1) \oplus (a_i \odot b_1)] \oplus \dots \oplus [(a_1 \odot b_{i-1}) \oplus (a_1 \odot b_i)] \oplus [b_i \oplus b_{i+1}] \\ &= a_i \oplus [(a_{i-1} \oplus a_i) \odot b_1] \oplus \dots \oplus [a_1 \odot (b_{i-1} \oplus b_i)] \oplus b_i \\ &= a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \dots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i \\ &= c_i, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ también es una buena sucesión y la operación $+$ está bien definida en M_A .

Proposición 4.2.3. Para cada MV-álgebra A , se tiene que $(M_A, +, \mathbf{0})$ con $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$, es un monoide abeliano y cancelativo (esto es, $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ implica $\mathbf{a} = \mathbf{b}$).

Demostración. Sea A una MV-álgebra, observe que para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M_A$,

$$\begin{aligned}
 ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c})_i &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})_i \oplus ((\mathbf{a} + \mathbf{b})_{i-1} \odot c_1) \oplus \cdots \oplus ((\mathbf{a} + \mathbf{b})_1 \odot c_{i-1}) \oplus c_i \\
 &= [a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i] \\
 &\quad \oplus [[a_{i-1} \oplus (a_{i-2} \odot b_1) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot b_{i-2}) \oplus b_{i-1}] \odot c_1] \\
 &\quad \oplus [(a_1 \oplus b_1) \odot c_{i-1}] \oplus c_i \\
 &= a_i \oplus (a_{i-1} \odot (b_1 \oplus c_1)) \\
 &\quad \oplus \cdots \oplus [a_1 \odot (b_{i-1} \oplus (b_{i-2} \odot c_1) \oplus \cdots \oplus (b_1 \odot c_{i-2}) \oplus c_{i-1})] \\
 &\quad \oplus [b_i \oplus (b_{i-1} \odot c_1) \oplus \cdots \oplus (b_1 \odot c_{i-1}) \oplus c_i] \\
 &= a_i \oplus (a_{i-1} \odot (\mathbf{b} + \mathbf{c})_1) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot (\mathbf{b} + \mathbf{c})_{i-1}) \oplus (\mathbf{b} + \mathbf{c})_i \\
 &= (\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}))_i
 \end{aligned}$$

para cada $i \geq 1$, de donde $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{0})_i &= a_i \oplus (a_{i-1} \odot 0) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot 0) \oplus 0 \\
 &= a_i \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 0 \\
 &= a_i,
 \end{aligned}$$

para cada $i \geq 1$, lo que significa que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$. Más aún,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{b})_i &= a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i \\
 &= a_i \oplus (b_1 \odot a_{i-1}) \oplus \cdots \oplus (b_{i-1} \odot a_1) \oplus b_i \\
 &= b_i \oplus (b_{i-1} \odot a_1) \oplus \cdots \oplus (b_1 \odot a_{i-1}) \oplus a_i \\
 &= (\mathbf{b} + \mathbf{a})_i,
 \end{aligned}$$

de donde $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ y por lo tanto, M_A es un monoide abeliano. La propiedad cancelativa se verifica en la *Proposición 2.3.1* de [11], donde se hace uso del Teorema 2.3.6. $\square$

También es posible establecer un orden parcial en M_A como sigue:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \text{ si y solo si, } \forall i \geq 1, a_i \leq b_i,$$

y como consecuencia, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \sup\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} &= (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, \dots, a_n \vee b_n, \dots), \\
 \inf\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} &= (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, \dots, a_n \wedge b_n, \dots),
 \end{aligned}$$

las cuales pueden verificarse fácilmente que son buenas sucesiones. En adelante se denotará $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} := \sup\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \inf\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Más aún, el orden $\leq$ en M_A es invariante bajo

traslaciones, esto es, $\mathbf{a} + \mathbf{c} \leq \mathbf{b} + \mathbf{c}$ siempre que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. En efecto, si $a_i \leq b_i$ para cada $i \geq 1$, se sigue que $a_{i-1} \odot c_1 \leq b_{i-1} \odot c_1, \dots, a_1 \odot c_{i-1} \leq b_1 \odot c_{i-1}$, por lo que $(\mathbf{a} + \mathbf{c})_i \leq (\mathbf{b} + \mathbf{c})_i$.

Defínase ahora la relación $\sim$ sobre $M_A \times M_A$ como

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}', \mathbf{b}'), \text{ si y solo si, } \mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}.$$

Es evidente que $\sim$ es reflexiva y simétrica. Además, observe que si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ y $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \sim (\mathbf{a}'', \mathbf{b}'')$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'' = \mathbf{a}'' + \mathbf{b}'$, de donde

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}') + (\mathbf{a}' + \mathbf{b}'') &= (\mathbf{a}' + \mathbf{b}) + (\mathbf{a}'' + \mathbf{b}') \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}'') + (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') &= (\mathbf{a}'' + \mathbf{b}) + (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \\ \mathbf{a} + \mathbf{b}'' &= \mathbf{a}'' + \mathbf{b}, \end{aligned}$$

lo que significa que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sim (\mathbf{a}'', \mathbf{b}'')$, $\sim$ es transitiva y a su vez, $\sim$ es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ se escribe como $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Habiendo definido el monoide M_A y la relación de equivalencia $\sim$, el conjunto cociente formado por estas dos será un grupo abeliano que posteriormente se dotará de estructura reticular a partir del orden $\leq$ establecido en M_A .

Proposición 4.2.4. *Sea A una MV-álgebra. El conjunto $G_A := (M_A \times M_A) / \sim$, junto con las operaciones $+, -$ definidas como*

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}] &:= [\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}], \\ -[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &:= [\mathbf{b}, \mathbf{a}], \end{aligned}$$

es un grupo abeliano, donde el elemento neutro es $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$.

Demostración. En primer lugar, veamos que las operaciones están bien definidas. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}' \in M_A$ tales que $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}', \mathbf{b}']$ y $[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [\mathbf{c}', \mathbf{d}']$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} + \mathbf{d}' = \mathbf{c}' + \mathbf{d}$, por lo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b}' + \mathbf{d}') &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}') + (\mathbf{c} + \mathbf{d}') \\ &= (\mathbf{a}' + \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' + \mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{a}' + \mathbf{c}') + (\mathbf{b} + \mathbf{d}), \end{aligned}$$

lo que significa que $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}] = [\mathbf{a}' + \mathbf{c}', \mathbf{b}' + \mathbf{d}'] = [\mathbf{a}', \mathbf{b}'] + [\mathbf{c}', \mathbf{d}']$. Además, $\mathbf{b} + \mathbf{a}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}' = \mathbf{b}' + \mathbf{a}$ implica que $-[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = [\mathbf{b}', \mathbf{a}'] = -[\mathbf{a}', \mathbf{b}']$.

Por otra parte, note que si $a, b, c, d, e, f \in M_A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 ([a, b] + [c, d]) + [e, f] &= [a + c, b + d] + [e, f] \\
 &= [(a + c) + e, (b + d) + f] \\
 &= [a + (c + e), b + (d + f)] \\
 &= [a, b] + [c + e, d + f] \\
 &= [a, b] + ([c, d] + [e, f]),
 \end{aligned}$$

mientras que $[a, b] + [0, 0] = [a + 0, b + 0] = [a, b]$ y también,

$$[a, b] + (-[a, b]) = [a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [0, 0],$$

ya que $(a + b) + 0 = a + b = b + a = 0 + (b + a)$ y $(a + b, b + a) \sim (0, 0)$. De esta manera, G_A es un grupo. Más aún,

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b],$$

por lo que G_A es un grupo abeliano. Esto concluye la prueba. $\square$

Se define en G_A el orden parcial $\leq$ de manera que $[a, b] \leq [c, d]$, si y solo si, $a + d \leq c + b$. Note que el orden en G_A es invariante bajo traslaciones, es decir que para cualesquiera $[a, b], [c, d], [e, f] \in M_A$ con $[a, b] \leq [c, d]$, se cumple que $[a, b] + [e, f] \leq [c, d] + [e, f]$. En efecto, $[a, b] \leq [c, d]$ significa que $a + d = c + b$ y esto conlleva a que

$$(a + e) + (d + f) = (a + d) + (e + f) \leq (c + b) + (e + f) = (c + e) + (b + f),$$

de donde

$$[a, b] + [e, f] = [a + e, b + f] \leq [c + e, d + f] = [c, d] + [e, f].$$

Adicionalmente, si denotamos como $\mathbf{1}$ a la buena sucesión $(1, 0, 0, \dots)$, resulta que $u_A := [\mathbf{1}, \mathbf{0}]$ es una unidad fuerte en G_A , puesto que si $[a, b] \in G_A$ donde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, entonces $n[\mathbf{1}, \mathbf{0}] = [n\mathbf{1}, n\mathbf{0}] = [(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, \mathbf{0})]$ y esto implica que

$$[a, b] \leq [(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, \mathbf{0})] = n[\mathbf{1}, \mathbf{0}],$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 a + \mathbf{0} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &\leq (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, b_1, b_2, \dots, b_m) \\
 &= b + (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}),
 \end{aligned}$$

debido a que $a_i \leq 1$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y que $0 \leq b_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Como consecuencia, $(G_A, \mathbf{u}_A)$ es un l -grupo abeliano con unidad fuerte.

En este punto, ya ha sido determinado el l -grupo abeliano con unidad fuerte que estará relacionado con una MV-álgebra dada bajo el funtor Ξ . Ahora, se prosigue a estudiar el comportamiento que se presenta con respecto a los MV-homomorfismos.

Si $h : A \rightarrow B$ es un MV-homomorfismo, se define la función $h^* : M_A \rightarrow M_B$ como $h^*(\mathbf{a}) = h^*((a_1, a_2, \dots, a_n)) := (h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$. Observe que para cualquier par $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_A$ y $i \leq 1$,

$$\begin{aligned} (h^*(\mathbf{a} + \mathbf{b}))_i &= h((\mathbf{a} + \mathbf{b})_i) \\ &= h(a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus \dots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i) \\ &= h(a_i) \oplus (h(a_{i-1}) \odot h(b_1)) \oplus \dots \oplus (h(a_1) \odot h(b_{i-1})) \oplus h(b_i) \\ &= (h^*(\mathbf{a}) + h^*(\mathbf{b}))_i, \end{aligned}$$

lo que significa que $h^*(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = h^*(\mathbf{a}) + h^*(\mathbf{b})$. Más aún, si $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, entonces $a_i \leq b_i$ para cada $i \geq 1$, lo que conlleva a que $h(a_i) \leq h(b_i)$ y $h^*(\mathbf{a}) \leq h^*(\mathbf{b})$, de donde h^* también preserva el orden.

Sea Ξ la aplicación que asigna a cada MV-álgebra A , el l -grupo abeliano con unidad fuerte $\Xi(A) := (G_A, \mathbf{u}_A)$, para cada homomorfismo de MV-álgebras $h : A \rightarrow B$, la función $\Xi(h) : \Xi(A) \rightarrow \Xi(B)$ con $\Xi(h)([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [h^*(\mathbf{a}), h^*(\mathbf{b})]$, es un homomorfismo de l -grupos abelianos con unidad fuerte. En efecto, si $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ en G_A , se sigue que $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, así que $h^*(\mathbf{a}) + h^*(\mathbf{d}) = h^*(\mathbf{a} + \mathbf{d}) = h^*(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = h^*(\mathbf{b}) + h^*(\mathbf{c})$, lo que conlleva a que $\Xi(h)([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [h^*(\mathbf{a}), h^*(\mathbf{b})] = [h^*(\mathbf{c}), h^*(\mathbf{d})] = \Xi(h)([\mathbf{c}, \mathbf{d}])$, por lo que la función $\Xi(h)$ está bien definida.

Sumado a esto, para cualquier par $[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \in G_A$,

$$\begin{aligned} \Xi(h)([\mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) &= \Xi(h)([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{d}, \mathbf{c}]) \\ &= \Xi(h)([\mathbf{a} + \mathbf{d}, \mathbf{b} + \mathbf{c}]) \\ &= [h^*(\mathbf{a} + \mathbf{d}), h^*(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \\ &= [h^*(\mathbf{a}) + h^*(\mathbf{d}), h^*(\mathbf{b}) + h^*(\mathbf{c})] \\ &= [h^*(\mathbf{a}), h^*(\mathbf{b})] + [h^*(\mathbf{d}), h^*(\mathbf{c})] \\ &= [h^*(\mathbf{a}), h^*(\mathbf{b})] - [h^*(\mathbf{c}), h^*(\mathbf{d})] \\ &= \Xi(h)([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) - \Xi(h)([\mathbf{c}, \mathbf{d}]), \end{aligned}$$

y si $[a, b] \leq [c, d]$, se sigue que $a + d \leq c + b$, por lo que

$$h^*(a) + h^*(d) = h^*(a + d) \leq h^*(c + b) = h^*(c) + h^*(b),$$

y así, $\Xi(h)([a, b]) = [h^*(a), h^*(b)] \leq [h^*(c), h^*(d)] = \Xi(h)([c, d])$. Además,

$$\begin{aligned} \Xi(h)(u_A) &= [h^*(1_A, 0_A, 0_A, \dots), h^*(0_A, 0_A, 0_A, \dots)] \\ &= [(h(1_A), h(0_A), h(0_A), \dots), (h(0_A), h(0_A), h(0_A), \dots)] \\ &= [(1_B, 0_B, 0_B, \dots), (0_B, 0_B, 0_B, \dots)] \\ &= u_B. \end{aligned}$$

Sumado a esto, $\Xi(1_A) = 1_{\Xi(A)}$ puesto que $\Xi(1_A)([a, b]) = [1_A^*(a), 1_A^*(b)] = [a, b]$ para todo $[a, b] \in \Xi(A)$, mientras que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son homomorfismos de MV-álgebras y $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Xi(g \circ f)([a, b]) &= [(g \circ f)^*(a), (g \circ f)^*(b)] \\ &= [((g \circ f)(a_1), \dots, (g \circ f)(a_m)), ((g \circ f)(b_1), \dots, (g \circ f)(b_n))] \\ &= [g^*(f(a_1), \dots, f(a_m)), g^*(f(b_1), \dots, f(b_n))] \\ &= \Xi(g)([f^*(a), f^*(b)]) \\ &= \Xi(g)(\Xi(f)([a, b])) \\ &= (\Xi(g) \circ \Xi(f))([a, b]), \end{aligned}$$

lo que conlleva a que $\Xi(g \circ f) = \Xi(g) \circ \Xi(f)$. De esta manera, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 4.2.5. *Ξ es un funtor covariante de la categoría **MV** de MV-álgebras a la categoría **UAG** de l -grupos abelianos con unidad fuerte.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (G_A, u_A) \\ \downarrow f & & \downarrow \Xi(f) \\ B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (G_B, u_B) \end{array}$$

4.3. Equivalencia entre MV y UAG

En esta sección se demostrará la existencia de un isomorfismo natural entre los funtores $\Gamma \circ \Xi$ y 1_{MV} , así como entre los funtores $\Xi \circ \Gamma$ y 1_{UAG} . Esto implicará finalmente que estas dos categorías coinciden.

Lema 4.3.1. *Si A es una MV-álgebra, la función $\epsilon_A : A \rightarrow \Gamma(\Xi(A))$ con $a \mapsto [(a), \mathbf{0}]$, es un isomorfismo de MV-álgebras.*

Demostración. Si A es una MV-álgebra y $a, b \in A$, se tiene que $(a) + (b) = (a \oplus b, a \odot b)$ es una buena sucesión de acuerdo a la propiedad clausurativa de la operación $+$ en M_A . Luego, $(a \oplus b) \leq (a \oplus b, a \odot b)$ y $(a \oplus b) \leq \mathbf{1}$ en M_A , por lo que $(a \oplus b) \leq (a \oplus b, a \odot b) \wedge \mathbf{1}$. Además, si $c = (c_1, \dots, c_n) \in M_A$ es tal que $c \leq (a \oplus b, a \odot b)$ y $c \leq \mathbf{1}$, entonces $c_1 \leq a \oplus b$ y $c_i = 0$ para todo $i \geq 2$, lo que significa que $c \leq (a \oplus b)$ y así, $(a \oplus b) = (a \oplus b, a \odot b) \wedge \mathbf{1}$. Luego,

$$\begin{aligned} \epsilon_A(a \oplus b) &= [(a \oplus b), \mathbf{0}] \\ &= [(a \oplus b, a \odot b) \wedge \mathbf{1}, \mathbf{0}] \\ &= [(a \oplus b, a \odot b), \mathbf{0}] \wedge u_A \\ &= [(a) + (b), \mathbf{0}] \wedge u_A \\ &= [(a), \mathbf{0}] + [(b), \mathbf{0}] \wedge u_A \\ &= [(a), \mathbf{0}] \oplus [(b), \mathbf{0}] \\ &= \epsilon_A(a) \oplus \epsilon_A(b). \end{aligned}$$

Más aún, como $(a) + (\neg a) = \mathbf{1}$, se obtiene que $(\mathbf{1}, (a)) \sim ((\neg a), \mathbf{0})$, $[\mathbf{1}, (a)] = [(\neg a), \mathbf{0}]$ y a su vez,

$$\begin{aligned} \epsilon_A(\neg a) &= [(\neg a), \mathbf{0}] \\ &= [\mathbf{1}, (a)] \\ &= u_A + [\mathbf{0}, (a)] \\ &= u_A - [(a), \mathbf{0}] \\ &= \neg[(a), \mathbf{0}] \\ &= \neg \epsilon_A(a). \end{aligned}$$

Por otra parte, si $a, b \in A$ son tales que $\epsilon_A(a) = \epsilon_A(b)$, entonces $[(a), \mathbf{0}] = [(b), \mathbf{0}]$, lo que indica que $(a) = (a) + \mathbf{0} = (b) + \mathbf{0} = (b)$ y $a = b$, es decir que ϵ_A es inyectiva.

Por último, dado $[a, b] \in \Gamma(\Xi(A)) = [[0, 0], [1, 0]]$ con $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, asumiendo $m = n$ (completando con ceros si es necesario) y teniendo en cuenta que $[0, 0] \leq [a, b] \leq [1, 0]$, se sigue que $b = 0 + b \leq a + 0 = a$ así como también $a = a + 0 \leq b + 1 = (1, b_1, b_2, \dots, b_n)$ y resulta $a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \dots \geq a_n \geq b_n$, lo que conlleva a que $a = b + ((a_1 \odot \neg b_1) \oplus (a_2 \odot \neg b_2) \oplus \dots \oplus (a_n \odot \neg b_n))$. De esta manera,

$$\begin{aligned} [a, b] &= [((a_1 \odot \neg b_1) \oplus (a_2 \odot \neg b_2) \oplus \dots \oplus (a_n \odot \neg b_n)), 0] \\ &= \epsilon_A((a_1 \odot \neg b_1) \oplus (a_2 \odot \neg b_2) \oplus \dots \oplus (a_n \odot \neg b_n)), \end{aligned}$$

y ϵ_A es sobreyectiva. Por lo tanto, la función ϵ_A es un isomorfismo y con esto, queda demostrado el lema. $\square$

Teorema 4.3.2. $\epsilon : 1_{\mathbf{MV}} \longrightarrow \Gamma \circ \Xi$, con $A \mapsto \epsilon_A$ es un isomorfismo natural.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de MV-álgebras, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \epsilon_A \downarrow & & \downarrow \epsilon_B \\ \Gamma(\Xi(A)) & \xrightarrow{\Gamma(\Xi(f))} & \Gamma(\Xi(B)) \end{array}$$

En efecto, si $a \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\epsilon_B \circ f)(a) &= \epsilon_B(f(a)) \\ &= [(f(a)), 0] \\ &= [f^*((a)), f^*(0)] \\ &= \Xi(f)([(a), 0]) \\ &= \Xi(f)|_{\Gamma(\Xi(A))}([(a), 0]) \\ &= \Gamma(\Xi(f))(\epsilon_A(a)) \\ &= (\Gamma(\Xi(f)) \circ \epsilon_A)(a), \end{aligned}$$

de donde $\epsilon_B \circ f = \Gamma(\Xi(f)) \circ \epsilon_A$. Como consecuencia, ϵ es una transformación natural y dado que ϵ_A es un isomorfismo para cada $A \in \text{obj}(\mathbf{MV})$, se concluye que ϵ es un isomorfismo natural y $1_{\mathbf{MV}} \cong \Gamma \circ \Xi$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Para el segundo caso, donde se debe construir un isomorfismo entre cada l -grupo abeliano con unidad fuerte (G, u) con $\Xi(\Gamma(G, u))$, es necesario considerar primero una función particular entre G^+ y el monoide $M_{\Gamma(G, u)}$, la cual se deriva a partir de la siguiente proposición.

Proposición 4.3.3. *Sea G un l -grupo abeliano con unidad fuerte u . Para cada $x \in G^+$, existe una única buena sucesión $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{\Gamma(G, u)}$ tal que $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.*

Demostración. Sea G un lu -grupo abeliano y $x \in G^+$. Se definen los elementos $a_1 := x \wedge u$ y $a_{m+1} := (x - a_1 - \dots - a_m) \wedge u$ para cada $m \geq 1$. Veamos por inducción sobre m que $x - a_1 - \dots - a_m = (x - mu)^+$. Para el caso base $m = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} x - a_1 &= x - (x \wedge u) \\ &= x + (-x \vee -u) \\ &= (x - x) \vee (x - u) \\ &= 0 \vee (x - u) \\ &= (x - u)^+. \end{aligned}$$

Suponga por hipótesis inductiva que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x - a_1 - \dots - a_k = (x - ku)^+$. Luego,

$$\begin{aligned} x - a_1 - \dots - a_k - a_{k+1} &= (x - ku)^+ - a_{k+1} \\ &= (x - ku)^+ - ((x - a_1 - \dots - a_k) \wedge u) \\ &= (x - ku)^+ - ((x - ku)^+ \wedge u) \\ &= (x - ku)^+ + (-(x - ku)^+ \vee -u) \\ &= ((x - ku)^+ - (x - ku)^+) \vee ((x - ku)^+ - u) \\ &= 0 \vee ((x - ku)^+ - u) \\ &= 0 \vee [(0 \vee (x - ku)) - u] \\ &= 0 \vee (-u \vee (x - (k+1)u)) \\ &= (0 \vee -u) \vee (x - (k+1)u) \\ &= 0 \vee (x - (k+1)u) \\ &= (x - (k+1)u)^+. \end{aligned}$$

De esta manera, $x - a_1 - \dots - a_m = (x - mu)^+$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Observe que esto implica inmediatamente que $a_i \in [0, u] = \Gamma(G, u)$ para todo $i \geq 1$. Además, como u es unidad fuerte, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq nu$, lo que conlleva a que siempre que $j \geq n$, resulta $x \leq nu \leq ju$, $x - ju \leq 0$ y $x - a_1 - \dots - a_j = (x - ju)^+ = 0$, de donde $a_{j+1} = 0$ para cada

$j > n$. Más aún, $x - a_1 - \cdots - a_n = (x - nu)^+ = 0$ implica que $x = a_1 + \cdots + a_n$.

En segundo lugar, note que $a_i \oplus a_{i+1} = a_i$ con $i \in \mathbb{N}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 a_i \oplus a_{i+1} &= (a_i + a_{i+1}) \wedge u \\
 &= [(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + (x - a_1 - \cdots - a_i) \wedge u] \wedge u \\
 &= [[(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + (x - a_1 - \cdots - a_i)] \wedge [(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + u]] \wedge u \\
 &= [(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + (x - a_1 - \cdots - a_i)] \wedge [(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + u] \wedge u \\
 &= [(x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u + (x - a_1 - \cdots - a_i)] \wedge u \\
 &= (a_i + x - a_1 - \cdots - a_i) \wedge u \\
 &= (x - a_1 - \cdots - a_{i-1}) \wedge u \\
 &= a_i.
 \end{aligned}$$

Como consecuencia, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{\Gamma(G,u)}$ y $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Veamos por último que esta buena sucesión es única.

Sea $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in M_{\Gamma(G,u)}$ tal que $x = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b_1 \oplus \cdots \oplus b_m \\
 &= (b_1 + \cdots + b_m) \wedge u \\
 &= x \wedge u \\
 &= a_1,
 \end{aligned}$$

mientras que si se asume por hipótesis inductiva que existe $1 \leq i < m$ tal que $a_j = b_j$ para cada $j \leq i$, resulta

$$\begin{aligned}
 b_{i+1} &= b_{i+1} \oplus \cdots \oplus b_m \\
 &= (b_{i+1} + \cdots + b_m) \wedge u \\
 &= (x - b_1 - \cdots - b_i) \wedge u \\
 &= (x - a_1 - \cdots - a_i) \wedge u \\
 &= a_{i+1},
 \end{aligned}$$

lo que significa que $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y la sucesión es única. Con esto, se ha demostrado lo que se requería. $\square$

A partir de lo anterior, se define la función $\omega : G^+ \longrightarrow M_{\Gamma(G,u)}$ como $\omega(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, que está bien definida y es inyectiva de acuerdo a la Proposición 4.3.3. Más aún, la función

ω preserva las operaciones $+$, $\vee$, $\wedge$, lo cual se muestra en el Lema 7.1.5 de [11] haciendo uso del Teorema 3.2.8.

Lema 4.3.4. *Si G es un lu -grupo abeliano, la función $\eta_{(G,u)} : (G, u) \rightarrow \Xi(\Gamma(G, u))$ tal que $x \mapsto [\omega(x \vee 0), \omega(-x \vee 0)]$, es un isomorfismo de l -grupos abelianos con unidad fuerte.*

Demostración. Sea $x \in \ker(\eta_{(G,u)})$, significa que $\eta_{(G,u)}(x) = [\omega(x^+), \omega((-x)^+)] = [0, 0]$, por lo que $\omega(x^+) = \omega(x^+) + 0 = 0 + \omega((-x)^+) = \omega((-x)^+)$ y dado que ω es una función inyectiva, resulta $x^+ = (-x)^+$. Luego,

$$\begin{aligned} x \vee 0 &= -x \vee 0 \\ x \vee 0 &= -(x \wedge 0) \\ (x \vee 0) + (x \wedge 0) &= 0 \\ [(x \vee 0) + x] \wedge [(x \vee 0) + 0] &= 0 \\ [(x + x) \vee (0 + x)] \wedge [x \vee 0] &= 0 \\ (2x \vee x) \wedge (x \vee 0) &= 0 \\ x \vee (2x \wedge 0) &= 0, \end{aligned}$$

así que $x \leq x \vee (2x \wedge 0) = 0$ y a su vez $2x \leq x$, por lo que se tiene que $2x \leq 0$, $2x \wedge 0 = 2x$ y en consecuencia, $0 = x \vee (2x \wedge 0) = x \vee 2x = x$. De esta manera, $\ker(\eta_{(G,u)}) = \{0\}$ y $\eta_{(G,u)}$ es una función inyectiva.

En segundo lugar, si $[a, b] \in \Xi(\Gamma(G, u))$, entonces $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ para algunos $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n \in [0, u] = \Gamma(G, u)$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a, 0] + [b, 0] \\ &= [(a_1, a_2, \dots, a_m), 0] + [(b_1, b_2, \dots, b_n), 0] \\ &= [\omega(a_1 + a_2 + \dots + a_m), 0] + [\omega(b_1 + b_2 + \dots + b_n), 0] \\ &= [\omega((a_1 + a_2 + \dots + a_m)^+), \omega((-a_1 - a_2 - \dots - a_m)^+)] \\ &\quad + [\omega((b_1 + b_2 + \dots + b_n)^+), \omega((-b_1 - b_2 - \dots - b_n)^+)] \\ &= \eta_{(G,u)}(a_1 + a_2 + \dots + a_m) + \eta_{(G,u)}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\ &= \eta_{(G,u)}(a_1 + a_2 + \dots + a_m + b_1 + b_2 + \dots + b_n), \end{aligned}$$

lo que indica que la función $\eta_{(G,u)}$ es sobreyectiva y por lo tanto, una biyección. Para mostrar que $\eta_{(G,u)}$ es un homomorfismo de grupos, note que para cualquier par $x, y \in G$

se cumple que:

$$\begin{aligned}
 x + y = x + y &\iff (x + y)^+ - (x + y)^- = (x^+ - x^-) + (y^+ - y^-) \\
 &\iff (x + y)^+ - (-(x + y))^+ = x^+ + y^+ - (-x)^+ - (-y)^+ \\
 &\iff (x + y)^+ + (-x)^+ + (-y)^+ = x^+ + y^+ + (-(x + y))^+ \\
 &\iff \omega((x + y)^+ + (-x)^+ + (-y)^+) = \omega(x^+ + y^+ + (-(x + y))^+) \\
 &\iff \omega((x + y)^+) + \omega((-x)^+ + (-y)^+) = \omega(x^+ + y^+) + \omega(-(x + y))^+ \\
 &\iff [\omega((x + y)^+), \omega(-(x + y))^+] = [\omega(x^+ + y^+), \omega((-x)^+ + (-y)^+)].
 \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \eta_{(G,u)}(x + y) &= [\omega((x + y)^+), \omega(-(x + y))^+] \\
 &= [\omega(x^+ + y^+), \omega((-x)^+ + (-y)^+)] \\
 &= [\omega(x^+) + \omega(y^+), \omega((-x)^+) + \omega((-y)^+)] \\
 &= [\omega(x^+), \omega((-x)^+)] + [\omega(y^+), \omega((-y)^+)] \\
 &= \eta_{(G,u)}(x) + \eta_{(G,u)}(y).
 \end{aligned}$$

La función $\eta_{(G,u)}$ también es un homomorfismo de retículos. En efecto, si $x \leq y$ en (G, u) , entonces $x^+ = x \vee 0 \leq y \vee 0 = y^+$ y $-y \leq -x$ implica $(-y)^+ = -y \vee 0 \leq -x \vee 0 = (-x)^+$. Luego,

$$\begin{aligned}
 x^+ + (-y)^+ \leq (-x)^+ + y^+ &\implies \omega(x^+ + (-y)^+) \leq \omega((-x)^+ + y^+) \\
 &\iff \omega(x^+) + \omega((-y)^+) \leq \omega((-x)^+) + \omega(y^+) \\
 &\iff [\omega(x^+), \omega((-x)^+)] \leq [\omega(y^+), \omega((-y)^+)] \\
 &\iff \eta_{(G,u)}(x) \leq \eta_{(G,u)}(y).
 \end{aligned}$$

Por último, observe que $\eta_{(G,u)}(u) = [\omega(u^+), \omega((-u)^+)] = [\omega(u), \omega(0)] = [(u), \mathbf{0}]$, por lo que la función $\eta_{(G,u)}$ preserva la unidad fuerte. Así, $\eta_{(G,u)}$ es un isomorfismo de l -grupos abelianos con unidad fuerte, lo que concluye la prueba. $\square$

Teorema 4.3.5. $\eta : 1_{\mathbf{UAG}} \longrightarrow \Xi \circ \Gamma$, con $(G, u) \mapsto \eta_{(G,u)}$ es un isomorfismo natural.

Demostración. Sea $f : (G, u) \longrightarrow (H, v)$ un homomorfismo de l -grupos abelianos con

unidad fuerte, note que para cualquier $x \in G$,

$$\begin{aligned}
 (\eta_{(H,v)} \circ f)(x) &= \eta_{(H,v)}(f(x)) \\
 &= [\omega(f(x) \vee 0), \omega(-f(x) \vee 0)] \\
 &= [\omega(f(x) \vee f(0)), \omega(-f(x) \vee f(0))] \\
 &= [\omega(f(x \vee 0)), \omega(f(-x \vee 0))] \\
 &= [f^*(\omega(x \vee 0)), f^*(\omega(-x \vee 0))] \\
 &= [f|_{[0,u]}^*(\omega(x \vee 0)), f|_{[0,u]}^*(\omega(-x \vee 0))] \\
 &= \Xi(\Gamma(f))([\omega(x \vee 0), \omega(-x \vee 0)]) \\
 &= \Xi(\Gamma(f))(\eta_{(G,u)}(x)) \\
 &= (\Xi(\Gamma(f)) \circ \eta_{(G,u)})(x),
 \end{aligned}$$

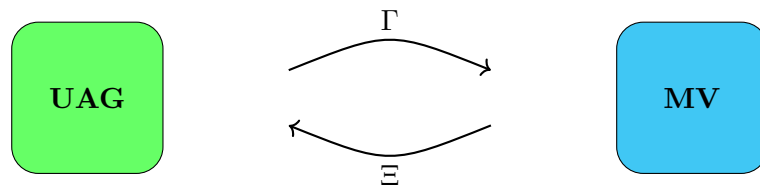
por lo que $\eta_{(H,v)} \circ f = \Xi(\Gamma(f)) \circ \eta_{(G,u)}$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 (G, u) & \xrightarrow{f} & (H, v) \\
 \eta_{(G,u)} \downarrow & & \downarrow \eta_{(H,v)} \\
 \Xi(\Gamma(G, u)) & \xrightarrow{\Xi(\Gamma(f))} & \Xi(\Gamma(H, v))
 \end{array}$$

De esta manera, η es una transformación natural y ya que $\eta_{(G,u)}$ es un isomorfismo para cada $(G, u) \in \text{obj}(\mathbf{UAG})$, significa que η es un isomorfismo natural y $1_{\mathbf{UAG}} \cong \Xi \circ \Gamma$. $\square$

Con todo lo realizado anteriormente, el resultado final es inmediato.

Teorema 4.3.6. *Las categorías **UAG** y **MV** son equivalentes.*



No es difícil ver que el funtor Γ es mucho más fácil de construir en comparación con el funtor Ξ . De hecho, la construcción del l -grupo abeliano con unidad fuerte G_A desde el monoide M_A de buenas sucesiones de una MV-álgebra A , se realiza de manera similar a la construcción del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ a partir del monoide $\mathbb{N}$, utilizando la misma relación de equivalencia. Además, la equivalencia obtenida entre estas categorías permite

concluir que, en esencia, estas dos estructuras algebraicas representan los mismos objetos matemáticos.

Nótese que contar con esta equivalencia categórica es sumamente útil, ya que en algunos casos un problema en el contexto de las MV-álgebras puede transformarse en uno equivalente en el ámbito de los l -grupos abelianos con unidad fuerte, donde la solución podría ser más sencilla de encontrar y luego aplicarse a las MV-álgebras (o viceversa). Esta correspondencia permite aprovechar los resultados desarrollados en una de estas áreas y aplicarlos en la otra, facilitando el análisis y resolución de problemas complejos. Además, al establecer un puente entre estas dos estructuras algebraicas, se amplían las herramientas disponibles, enriqueciendo las posibilidades de investigación y desarrollo en ambas teorías.

El artículo [13] resultó fundamental para el desarrollo de todo este capítulo y entender, la relación entre estas estructuras y la definición de los funtores involucrados.

Capítulo 5

Aplicaciones

Como se puede notar, los ideales juegan un papel fundamental en el estudio exhaustivo de las MV-álgebras, y en particular, el espectro primo es sumamente útil para ello. Esto se evidencia fácilmente ya que forman una gran parte del campo de estudio de estas estructuras algebraicas. Siguiendo esta idea y para dar cuenta del campo abierto para la investigación de estas estructuras, se presentan tres artículos publicados recientemente y posteriores al artículo [14].

En [2], se expone un problema similar al desarrollado en [14], relacionado con el estudio de las MV-álgebras cuyo espectro primo es dado. Cabe mencionar que si dos MV-álgebras tienen espectros primos homeomorfos, no implica necesariamente que las dos estructuras sean isomorfas. Tal es el caso de las MV-álgebras $\{0, 1\}$ y $[0, 1]$, puesto que $\text{Spec}(\{0, 1\}) \cong \{0\} \cong \text{Spec}([0, 1])$, pero $[0, 1]$ y $\{0, 1\}$ son diferentes debido a su cardinalidad. En ese sentido, dos álgebras multivaluadas se denominan **equiespectrales** si sus espectros primos son homeomorfos, y en consecuencia, también lo son si y solo si sus retículos de Belluce (o sus retículos de ideales principales) son isomorfos.

Dada cualquier MV-álgebra A , es posible entender a la clase formada por todas las MV-álgebras equiespectrales a A como una categoría, y el resultado principal de [2] es que este tipo de categorías son *pequeñas*, esto significa que tanto la colección de objetos como la colección de morfismos para cada par de objetos, son conjuntos¹. Debido al paralelismo que se presenta entre las MV-álgebras y los l -grupos abelianos, todo lo mencionado anteriormente también aplica para estos últimos. Actualmente, estas clases equiespectra-

¹El concepto de *clase* abarca tanto los conjuntos como colecciones más grandes que pueden dar lugar a contradicciones dentro de la *teoría de conjuntos*. A manera de ejemplo, se sabe que no es posible definirse el conjunto de todos los conjuntos, puesto que esto conduce a la *Paradoja de Russell*, pero sí existe la noción de clase de todos los conjuntos.

les siguen siendo objeto de estudio desde la teoría de categorías.

Por otro lado, en [22] se pretende mostrar la existencia de una MV-álgebra no contable cuyo espectro primo coincida con el espectro primo de Free_1 , vistas bajo isomorfismo, como las funciones de McNaughton sobre $[0, 1]$. Para esto, se construye una álgebra multivaluada A_1 compuesta por todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, definidas a trozos por polinomios lineales y de coeficientes racionales. A partir de esto, es inmediato que $\text{Free}_1 \subseteq A_1$ y se verifica que estas dos estructuras son equiespectrales, aunque A_1 resulta ser contable. En consecuencia, se considera después el conjunto A_2 formado por todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ que son racionales en cada segmento inicial de $[0, 1]$, pero que pueden tener un límite irracional en 1. Es con esta última que se obtiene que $\text{Free}_1 \subseteq A_1 \subseteq A_2$, también que $\text{Spec}(A_1) \cong \text{Spec}(\text{Free}_1) \cong \text{Spec}(A_2)$ y que además, es no contable. Como consecuencia de este estudio, surge una pregunta abierta que corresponde a la existencia de una MV-álgebra no contable y equiespectral a cualquier MV-álgebra dada.

En ese mismo artículo, pero por separado, se estudian también los l -grupos abelianos. Particularmente, un l -grupo abeliano G se dice que es **divisible** si para todo $x \in G$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in G$ tal que $ny = x$. Es fácil ver que si tal elemento y existe, entonces es único, puesto que si existiese otro $\hat{y} \in G$ con $n\hat{y} = x$, se sigue que $ny = n\hat{y}$, $n(y - \hat{y}) = ny - n\hat{y} = 0$ y dado que todo l -grupo es libre de torsión, resulta $y - \hat{y} = 0$ y $y = \hat{y}$. Por esta razón, se denota $y := x/n$. En esta parte del artículo, se prueba que todo l -grupo abeliano divisible tiene estructura de $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial, y que si $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $(m/n)x := (mx)/n$. No está de más mencionar que el hecho de que estos objetos puedan verse como espacios vectoriales permite que el campo de estudio sea mucho más grande y puedan existir más aplicaciones apoyándose en el álgebra lineal.

Finalmente, en [25] se presenta un desarrollo más detallado del Funtor de Mundici, así como una demostración diferente a la desarrollada en este trabajo sobre la equivalencia entre las categorías de los l -grupos abelianos con unidad fuerte y las MV-álgebras, puesto que se exhibe que el funtor Γ es *plenamente fiel* (la asignación de morfismos es biyectiva) y *esencialmente sobreyectivo sobre objetos* (la asignación de objetos es sobreyectiva), lo que implica la equivalencia. Allí mismo, se puede evidenciar también la utilidad que posee el Funtor de Mundici en el estudio de la mecánica cuántica, una conexión muy interesante y un tanto inesperada entre esta área y el estudio de las dos estructuras algebraicas aquí mostradas.

En este trabajo se han recopilado las definiciones, propiedades y resultados más significativos de la teoría de MV-álgebras y de los l -grupos abelianos, con el fin de crear un documento autocontenido y de fácil interpretación para el lector. En los capítulos dos y tres, se logró obtener una caracterización topológica del espectro primo de las MV-álgebras y de los l -grupos abelianos, comparable al desarrollo realizado por M. Hochster en [19] con respecto a los espacios espectrales y el espectro primo de los anillos conmutativos. Este aspecto es crucial, dado que el problema central en topología es clasificar los espacios que comparten los mismos invariantes topológicos. En el cuarto capítulo, se expuso la razón fundamental por la cual las MV-álgebras y los l -grupos abelianos con unidad fuerte están estrechamente relacionados, y la teoría de categorías fue esencial para establecer formalmente esta conexión. Esta equivalencia es extremadamente útil, ya que cualquier cuestión planteada en una de estas categorías puede traducirse a la otra, donde la resolución puede ser más accesible, facilitando así la obtención de resultados deseados.

Capítulo 6

Aportes relevantes

1. Este trabajo se llevó a cabo con el objetivo de ofrecer un documento autocontenido y accesible, diseñado para facilitar el estudio introductorio tanto de la teoría de MV-álgebras como de los l -grupos. Además, se presentan de manera clara la mayoría de las demostraciones y ejemplos ilustrativos, acompañados de gráficos que facilitan una mejor interpretación de los temas abordados.
2. El Ejemplo 1.2.14 fue elaborado de manera propia debido a la falta de ejemplos de espacios espectrales en la literatura. Aunque no se tiene certeza de si puede considerarse una contribución novedosa, se decidió incluirlo para ilustrar el concepto.
3. Se incluyó una breve explicación en el sentido de la lógica, que justifica por qué toda propiedad que se cumple en $[0, 1]$ también se satisface en cualquier MV-álgebra.
4. Se realizaron las demostraciones de la Proposición 2.2.11, el Lema 2.2.13 y el Teorema 2.8.4, ya que en [14] no se incluían. Además, se detalló la prueba del Teorema 3.2.2, pues la versión proporcionada en dicho artículo no se presentó completa. También se desarrollaron las demostraciones de los resultados en la sección *Caracterización del espectro primo de los l -grupos abelianos*, dado que no aparecían en [14].
5. Se introdujeron los funtores Spec , $K(\text{Spec})$, Id_c y β , los cuales no se definieron en [14], pero sí en [1]. Así mismo, se demostró que la composición $\text{Spec} \circ \beta$ es naturalmente isomorfa a Spec , y que $K(\text{Spec})$, Id_c y β también son isomorfos de manera natural. Cabe resaltar que en la página 17 de [1], se plantea la pregunta de si estos funtores son isomorfos, aunque no se ofrece una demostración. Todos estos resultados son válidos también para la categoría **UAG** de los l -grupos abelianos con unidad fuerte, lo que permitió presentar un enfoque categórico en el trabajo.
6. Los ejemplos en las secciones sobre *MV-álgebras libres y funciones de McNaughton*,

Poliedros, l -grupos libres y conos fueron desarrollados de manera independiente. Del mismo modo, se incluyeron las gráficas en dos y tres dimensiones para mejorar la comprensión de las definiciones respectivas, ya que es poco común encontrar ejemplos gráficos en tres dimensiones. Estas imágenes fueron agregadas siguiendo la recomendación del profesor Diego Velasco.

7. Los ejemplos 2.8.7 y 3.6.5 fueron planteados con el propósito de resaltar la importancia de la caracterización topológica del espectro primo de ambas estructuras, dado que no se encontraron ejemplos ilustrativos en la literatura. Si bien estos ejemplos son algo sencillos, esto se debe a la dificultad de encontrar un epimorfismo cerrado adecuado y el número n que satisfaga los teoremas pertinentes.
8. La equivalencia categórica entre las MV-álgebras y los l -grupos abelianos con unidad fuerte fue presentada por primera vez en [25], donde se muestra que el funtor de Mundici Γ es plenamente fiel y esencialmente sobre los objetos. Posteriormente, en [11] se describe la equivalencia mediante la definición del funtor Ξ en sentido contrario al de Γ , demostrando que las composiciones de ambos son naturalmente isomorfas a los funtores identidad. En este trabajo, se desarrolló con mayor detalle esta equivalencia, siguiendo el segundo enfoque mencionado.
9. Finalmente, en la sección *Aplicaciones*, se describen algunos artículos que destacan estas estructuras como objetos de estudio.

Bibliografía

- [1] B. Barbieri, A. Di Nola, and G. Lenzi. The spectrum problem for abelian l -groups and MV-algebras: a categorical approach. *Arxiv*, 2023. <https://arxiv.org/abs/2303.10208>.
- [2] G. Barbieri, A. Di Nola, and G. Lenzi. Spectral mv-algebras and equispectrality. *Arch. Math. Logic*, 2024. <https://doi.org/10.1007/s00153-024-00926-5>.
- [3] L. P. Belluce. Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory. *Canadian Journal of Mathematics*, 38(6):1356–1379, 1986.
- [4] N. Bezhanishvili, V. Marra, D. McNeill, and A. Pedrini. Tarski’s theorem on intuitionistic logic, for polyhedra. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2018.
- [5] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein. *Groupes et Anneaux Réticulés*, volume 608 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. <https://doi.org/10.1007/bfb0067004>.
- [6] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume 25. American Mathematical Society, 1940. <https://doi.org/10.2307/2268183>.
- [7] N. Bourbaki. *General Topology*, volume 1 of *Elements of Mathematics*. Springer, Berlin, 1989.
- [8] A. Brøndsted. *An Introduction to Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1983.
- [9] S. Burris and H. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. Springer-Verlag, 1981.
- [10] C. Chang. Algebraic analysis of many-valued logic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88:476–490, 1958.
- [11] R. Cignoli, I. D’Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*, volume 7 of *Trends in Logic-Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9480-6>.

- [12] R. Cignoli, D. Gluschkof, and F. Lucas. Prime spectra of lattice-ordered abelian groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 136:217–229, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(98\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00031-0).
- [13] R. Cignoli and D. Mundici. An elementary presentation of the equivalence between MV-Algebras and l -groups with strong unit. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, 61(1):49–64, 1998. <https://www.jstor.org/stable/20015989>.
- [14] A. Di Nola and G. Lenzi. The spectrum problem for abelian l -groups and MV-algebras. *Algebra Universalis*, 81, 2020. <https://doi.org/10.1007/s00012-020-00668-4>.
- [15] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [16] G. Elliott and D. Mundici. A characterisation of lattice-ordered abelian groups. *Mathematische Zeitschrift*, 213:179–186, 1993. <http://eudml.org/doc/174525>.
- [17] A. Glass and W. Holland. *Lattice-Ordered Groups: Advances and Techniques*. Mathematics and Its Applications 48. Springer Netherlands, 1 edition, 1989.
- [18] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Number 221 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [19] M. Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142:43–60, 1969. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122783870>.
- [20] S. M. Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1971.
- [21] T. Leinster. *Basic Category Theory*. Cambridge University Press - Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143, 2014.
- [22] G. Lenzi. On the spectrum of countable MV-algebras. *Transactions on Fuzzy Sets and Systems*, 2(2):184–193, 2023. <http://doi.org/10.30495/tfss.2023.1991906.1082>.
- [23] A. Marlow and T. Feil. *Lattice-Ordered Groups: An Introduction*. Reidel Texts in the Mathematical Sciences. Springer, 1 edition, 1988.
- [24] J. Matousek. *Lectures on Discrete Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.

- [25] D. Mundici. Interpretation of $AF C^*$ -algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65(1):15–63, 1986. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(86\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90015-7).
- [26] D. Mundici. *Advanced Łukasiewicz Calculus and MV-Algebras*, volume 35 of *Trends in Logic-Studia Logica Library*. Springer, Dordrecht, 2011. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0840-2>.
- [27] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2000.
- [28] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2016.
- [29] M. Stone. Topological representations of distributive lattices and brouwerian logics. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 67:1–25, 1938. <https://doi.org/10.2307/2267630>.
- [30] G. Ziegler. Lectures on polytopes. *Graduate Texts in Mathematics*, 152, 1991.