

**REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA
EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE NÚMERO RACIONAL POSITIVO**

Juan Pablo Mendoza Díaz
Facultad de Humanidades, Universidad del Valle
202300496: Maestría en Filosofía
Mg. Omar Díaz Saldaña

25 de marzo de 2025

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo investigar respecto a la relación entre el uso de registros de representación semiótica (RRS) asociados al concepto de número racional positivo y la competencia para resolver problemas matemáticos. Se presentan los resultados obtenidos en un estudio de caso analizados con un enfoque mayormente cualitativo, en el cual se interviene un grupo de estudiantes en un aula de clase desarrollando diferentes actividades que tendientes a movilizar el uso de diferentes estrategias y formas de representar para el desarrollo conceptual. Se observa que la coordinación de registros de representación ofrece un modelo para investigar la transformación de los recursos cognitivos en el conocimiento matemático, una correlación positiva entre el uso del lenguaje natural y la habilidad para elaborar y resolver problemas. Este trabajo permite identificar elementos de la teoría de RRS, relacionados con el desarrollo de competencias matemáticas, como la elaboración conceptual y la resolución de problemas matemáticos, que se proponen en la educación matemática básica.

Palabras clave:

Representación semiótica, pensamiento matemático, competencia matemática, números racionales, números fraccionarios, equivalencia de fracciones.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO	7
CAPÍTULO 2. ESTUDIO DE CASO	32
CAPÍTULO 3. CONCLUSIONES.....	66
REFERENCIAS.....	71
ANEXOS	72

INTRODUCCIÓN

Una de las preguntas que me hicieron al ingresar como docente de matemáticas al inicio de mi carrera fue: ¿cómo cree usted que los estudiantes aprenden matemáticas? En ese momento contaba con pocos años de experiencia y a decir verdad esa pregunta no había pasado por mi cabeza. La respuesta que se me ocurrió fue que yo creía que los estudiantes construyen la matemática como un edificio, empezando por las bases y, luego, poco a poco, construyendo sobre un conjunto de saberes previos. Debo decir, en mi favor, que desde mi proceso educativo a nivel profesional en matemáticas no había visto ninguna asignatura que estuviera relacionada con la cognición humana. Yo estaba confiado en mi saber, propio de la disciplina, y consideraba que con ello era suficiente para abordar el desafío de enfrentarme al aula. No obstante, la experiencia me llevó, continuamente, a encontrarme con lo que, en principio, denominé el “fracaso de los estudiantes” frente al proceso de aprendizaje, razón por la que comencé a indagar acerca de cómo aprenden los estudiantes y encontré que el fracaso no es sólo de los estudiantes, sino que es compartido entre quien aprende y quien enseña, debido a que el saber de la disciplina no es lo único que garantiza el éxito en el proceso educativo llevado a cabo con los estudiantes. Esta fue una de las razones que me llevó a avanzar en mis estudios.

El lenguaje, al igual que la matemática, es un factor fundamental en el proceso educativo, como son las dinámicas discursivas dentro de un aula de clase. Es claro que existe una distancia entre las formas de hablar del profesor y del estudiante, la construcción de un discurso común frente a un saber particular es un proceso que toma tiempo, sobre todo porque los discursos dan cuenta de las disposiciones no solo mentales, sino también de la capacidad de actuar de una persona desde ese saber. Así, sería vano abordar el problema de la enseñanza únicamente desde la perspectiva del lenguaje, hace falta proponer dinámicas que movilicen el hacer de los alumnos. Ahora bien, es claro que los objetos de la matemática son mentales, razón por la cual existe un intermediario entre el pensar, el decir y el hacer en matemáticas. Es este el recurso nos referiremos como registro de representación semiótico, tomándolo de la literatura vigente de la didáctica de la matemática.

En este sentido, surge la pregunta que orienta este trabajo de investigación: ¿Cuál es la relación entre el uso de registros de representación semiótica asociados al concepto de número

racional positivo y la competencia para resolver problemas matemáticos? Para ofrecer una respuesta a esta pregunta me propongo analizar la relación entre la coordinación de diferentes registros de representación semiótica, desde la perspectiva de Raymond Duval y la aprehensión del concepto de número racional positivo a través de la resolución de problemas en los contextos de la matemática y la vida cotidiana en un grupo de estudiantes de los grados octavo grado de la Institución Educativa Magdalena Ortega, ubicada en el municipio de La Unión, Valle del Cauca.

Esto nos permitirá: primero, caracterizar los elementos teóricos respecto al enfoque de coordinación de registros de representación en relación con otras perspectivas de aprendizaje. Segundo, examinar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes durante una intervención en el aula de clases a través de un estudio de caso. Y, tercero, examinar la relación entre el uso de registros de representación semiótica y la resolución de problemas en los contextos antes mencionados

Espero que al final de esta investigación, haber ampliado mi perspectiva respecto a las formas cómo los estudiantes aprehenden matemáticas, cuál es la influencia de los registros de representación en el desarrollo de las actividades, y si vale la pena abordar la enseñanza desde la coordinación de estos, dado que al hacerlo se deberán modificar gran parte de las formas con la que actualmente me desempeño en el aula de clases.

Dada la naturaleza de esta investigación, se revisan aspectos teóricos relacionados con los procesos de aprendizaje, el contenido conceptual que va a servir de fondo para la movilización de los saberes de los estudiantes, y la didáctica a través de la cual se desarrollara el ejercicio y las orientaciones regulativas que convocan al docente.

Además, se revisará el marco de referencia en el cual se mueve la educación matemática en el país, particularmente las orientaciones que se proponen a partir de los propósitos de formación nacional en el área de matemáticas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional. Respecto a las formas como un individuo aprende, se abordará, desde la psicología, las posturas de Jean Piaget y Lev Vygotsky, quienes establecieron las bases para el desarrollo del enfoque constructivista de la educación, y enfatizan la importancia del papel del signo y el lenguaje en la modificación de los sistemas cognitivos y de representación del niño. También se abordarán los planteamientos de la didáctica de las matemáticas desde dos puntos de vista. Por un lado, las orientaciones frente a las formas actuales como se enseñan las fracciones; por otra parte, y que constituye la base del estudio de caso presentado, la teoría de registros de representación, la cual

propone que además de los signos y el lenguaje de palabras, en la investigación en torno a los temas del aprendizaje, se debe tener en cuenta el intermediario entre el estudiante y el conocimiento, los registros de representación semiótica. Finalmente, se revisan, nuevamente, las fracciones, ya no desde las orientaciones de la didáctica, sino desde las formas conceptuales que la contienen. Esta revisión se realiza de la mano de la filosofía y de la teoría de conjuntos.

En la Introducción se presente el problema central del trabajo, junto con un resumen del recorrido que seguirá el lector en la lectura de este trabajo de investigación.

El Capítulo 1 inicia exponiendo el marco de referencia común en el cual se mueven las instituciones educativas colombianas, respecto a la educación matemática. Un recorrido por la psicología del aprendizaje, en el cual se observarán los planteamientos respecto a las formas cómo el sujeto construye su conocimiento. Avanzaremos también en la dirección de la didáctica tanto de las fracciones, como de la enseñanza misma de la matemática, desde el enfoque de los registros de representación semiótica en el aprendizaje. Además, abordaremos el concepto de número racional positivo y los conceptos que son la base para su construcción, la relación de equivalencia y la relación entre pares de números enteros sobre la cual se propone la relación de equivalencia. Finalmente, se propone un ejemplo mediante el cual se observan los requerimientos cognitivos que se esperan en la clase de matemáticas.

En el Capítulo 2 se analizará el estudio de caso, llevado a cabo a partir de un grupo de estudiantes de octavo grado. Se señalarán los momentos que lo guiaron, la fundamentación teórica, preparación de documentos para entrar al aula de clases, actividades diagnósticas, sesiones de clase y actividades, y actividad de salida, además del análisis de lo observado en los estudiantes durante el desarrollo de esta actividad.

En el Capítulo 3 se presentarán las conclusiones que se retoman a partir de lo observado en el análisis presentado en el Capítulo 3, las cuales están en relación con las siguientes consideraciones: los aspectos teóricos presentados en el Capítulo 2, en particular con el enfoque que desde la didáctica nos propone Raymond Duval, que constituye la base teórica de este trabajo, y con la relación entre los signos, el lenguaje y los registros de representación semiótica y el aprendizaje de las matemáticas. Además, se exponen los límites del trabajo, que podrán ser el punto de partida de futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

Un ejemplo del uso de la habilidad matemática

“Ana ha gastado las tres cuartas partes de su botella de 400 mililitros de shampoo. ¿Cuánta cantidad de líquido le queda disponible?”

Enunciados como el anterior son propuestos en un aula de matemáticas a estudiantes a partir de los 10 años de edad. Si un estudiante resuelve correctamente el ejercicio propuesto, el docente puede afirmar, con cierto nivel de certeza, que el estudiante está en capacidad de utilizar los números fraccionarios, entendidos en una relación de proporcionalidad, y aplicarlos relacionados con la vida cotidiana. Dependiendo de los procedimientos utilizados para llegar a la respuesta, el docente podría decir cuáles procesos matemáticos han sido apropiados.

Revisemos el enunciado propuesto y lo que se debe desplegar en el estudiante para avanzar en su solución, ya que debe combinar diferentes habilidades. Primero debe reconocer la situación de la que se le habla, a partir del reconocimiento del *contexto* en el cual se desarrolla el enunciado, sabiendo de antemano que es una botella, y qué significa la expresión 400 mililitros de un líquido. En segundo lugar, desde los *contenidos* matemáticos, el estudiante debe reconocer la relación de proporcionalidad entre las fracciones y además tener la habilidad de reconocer la forma de relacionar la cantidad en la botella con la fracción dada, establecer en ambos casos cuál es la unidad y cuál sería la parte para proponer de forma adecuada dicha proporción. Además, deberá tener la capacidad de discriminar en la pregunta entre el contenido de shampoo requerido, ya que como vemos, no se está preguntando directamente por la cantidad de líquido gastado, sino por la que aún está disponible, lo cual se debe interpretar como el complemento de lo gastado en relación con la totalidad del líquido. Finalmente, desde el punto de vista de los *procesos* matemáticos, deberá estar en capacidad de proponer, ejecutar y chequear un procedimiento de cálculo de proporciones que le permita obtener la respuesta a la pregunta.

Por otro lado, desde la visión del docente, surgen algunos interrogantes: ¿Cuál es la finalidad pedagógica al proponer este tipo de problemas en el aula de clases? ¿Como evaluar el éxito o fracaso del estudiante en la actividad?, ¿Cómo orientará a los estudiantes para que desarrollen la actividad de forma satisfactoria?, ¿Cómo entender los puntos de vista de quienes no tienen respuestas satisfactorias?

El objetivo pedagógico, es decir, el porqué de la propuesta de esta clase de ejercicios esta generalmente ligado a las expectativas de formación que el estado tiene con respecto al aprendizaje de las matemáticas, el cual espera que los estudiantes resuelvan problemas matemáticos en diferentes contextos. El éxito o fracaso, al igual que el objetivo pedagógico se enmarcan en expectativas de formación. Las orientaciones para sugerir obedecen tanto a la experiencia del docente para acompañar el proceso formativo, como a su experticia y dominio en la asignatura, que se derivan en un conjunto de disposiciones de tipo didáctico que le permiten proponer y orientar actividades. Mientras que el reconocimiento de los puntos de vista está sujeto a cuestiones del aprendizaje de los estudiantes que el docente, sobre las cuales este debería tener el mismo nivel de experticia que tiene en las matemáticas mismas. En este ejemplo típico del aula de clase, se pueden vislumbrar los problemas que se abordan en esta investigación, cómo aprenden nuestros estudiantes, qué recursos didácticos utiliza el docente para apoyar el proceso y cuáles son las limitaciones, tanto personales e institucionales, con las que se encuentra en su diario hacer, para dar cumplimiento a los objetivos que se propone alcanzar.

La enseñanza de la matemática: la regulación y sus problemas

A continuación, revisaremos lo que se espera de un estudiante al finalizar su ciclo de educación secundaria desde el punto de vista regulativo, cuyo objetivo es pensado en términos de competencias. Posteriormente, se adoptará una postura frente al fracaso de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática.

A nivel nacional, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) es el ente encargado de generar los planes de educación del estado, ofrecer los lineamientos que deben ser seguidos en el territorio en materia de educación. Por otro lado, la entidad encargada de cuantificar los niveles de competencia matemática en el país es el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES, el cual parametriza y mide, de forma periódica, los niveles de competencia de los estudiantes en diferentes años de escolaridad, desde los primeros años de educación básica, hasta la finalización del ciclo escolar a nivel de pregrado. En el caso particular que nos ocupa, el ICFES, a través de las Pruebas Saber 11, es el encargado no solo de clasificar los niveles de desarrollo de competencias en matemáticas al finalizar la educación secundaria, sino también de categorizar las instituciones educativas nacionales de acuerdo con los resultados anuales de dichas pruebas. Este a su vez, como se dijo, obedece a los planes de educación que propone la Organización para la

Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la cual realiza la tarea de clasificar el nivel del país respecto a la educación a través de su Programa para la Evaluación Internacional de los estudiantes, PISA por sus siglas en inglés, realizado también, de forma periódica, una evaluación muestral de estudiantes de los países asociados.

Competencias y niveles de competencias desde el marco normativo colombiano

Aunque la forma que utilizan ambos marcos para referirse al aprendizaje es en términos de competencias que, de forma general, establece la capacidad de actuar de un estudiante a través del uso de un saber en particular. Me referiré solamente a la regulación nacional. Así, para el MEN la noción de *ser matemáticamente competente* hace referencia a: “*Formular plantear, transformar y resolver problemas. Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas. Utilizar la argumentación, la prueba y la refutación; el ejemplo y el contraejemplo como medios de validar y rechazar conjeturas. Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porque usarlos de forma flexible y eficaz.*” (MEN 2006)

Estas nociones de competencia matemática son similares. Están orientadas tanto desde una perspectiva del hacer matemático, como de la aplicabilidad de las matemáticas en diferentes situaciones, bien sea orientada a la solución de problemas, la argumentación, la implementación adecuada de algoritmos, o a la descripción, explicación y predicción de fenómenos, orientando este saber hacia el apoyo del desarrollo de las actividades humanas.

Ambas perspectivas ubican, para efectos de evaluación, tres elementos que interactúan entre sí. Los *procesos*, el *contenido* y el *contexto*. Los procesos matemáticos hacen referencia a lo que hacen los individuos para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas y las capacidades que subyacen en estos. El MEN enuncia específicamente cinco: La formulación, tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. En cuanto al contenido matemático, el MEN se refiere en términos de pensamientos matemáticos, los cuales hacen referencia a las diferentes especialidades de la matemática: el pensamiento y los sistemas numéricos; el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; el pensamiento métrico y los sistemas de medidas; el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Finalmente, los contextos son los lugares, tanto físicos como

socioculturales desde los cuales se construye sentido y significado para las actividades y contenidos matemáticos.

A partir de estos lineamientos generales, el MEN propone los estándares básicos de competencias, documento mediante el cual ofrece una ruta a través de procesos secuenciales que el estudiante debe ir implementando en intervalos de tiempo de dos años. Desde allí, las instituciones educativas diseñan e implementan, de forma secuencial, a través de los ciclos escolares educación básica y secundaria, planes para el desarrollo de esta competencia en los estudiantes. Estos deben estar consignados en documentos regulatorios, en planes de área y planes de aula y hace parte del quehacer docente, gestionarlos a través del diseño e implementación de las prácticas de aula y actualizarlos al final de cada año lectivo con base en lo alcanzado y lo no logrado. Esta integración curricular gestionada de forma temporal no tiene en cuenta el nivel de desarrollo que un estudiante ha alcanzado, ya que al cambiar el año, el nuevo docente “asume” el éxito en el año previo y parte desde los nuevos saberes para continuar avanzando en la implementación de la política pública.

En lo que respecta al tema específico de nuestra investigación, se observa que, según los estándares básicos de competencia en matemáticas, que, al terminar el grado quinto, fin del ciclo de educación básica, el estudiante debe estar en capacidad de utilizar las fracciones en diferentes contextos y que al finalizar el grado séptimo pueda utilizar y justificar el uso de los números racionales, al igual que el tratamiento de sus diferentes registros de representación. Esto se puede ver a través de dos estándares básicos de competencias de los grados quinto y séptimo respectivamente. El primero señala: *interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones*” (MEN, 2006, p. 82); mientras que al finalizar séptimo grado, se espera del estudiante que: *“utilizo números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contexto de medida”* (MEN, 2006 p. 84). Esto implica que al menos durante cinco años de escolaridad, el estudiante debe ir desarrollando las herramientas conceptuales que fundamentan la estructura de los números racionales, situación que intentaremos verificar durante el estudio de caso que realizamos en esta investigación.

La educación matemática frente al fracaso en los procesos educativos

Desde la perspectiva de Duval (2005), para analizar el problema del fracaso escolar de los estudiantes frente al aprendizaje de la matemática, se deben tener en cuenta tres puntos de vista: el institucional, el del profesor y el del estudiante.

Para este autor, los responsables institucionales del sistema educativo (expertos, responsables políticos, etc.), son los encargados de proponer el horizonte y los objetivos de formación. Eligen los conocimientos que deben ser desarrollados en cada uno de los ciclos educativos. Estos deben tener en cuenta las expectativas sociales de formación al igual que el orden de construcción de conocimiento en matemáticas. Este descompone de forma lineal un conocimiento determinado para que sea visto a través de un periodo determinado de tiempo de un año o ciclos mayores a un año. Por ejemplo, para ver el sistema de los números reales, se descompone por años en: números naturales (aproximadamente cinco años), números enteros (un año), números racionales (dos años) y finalmente los números reales (tres años). El horizonte de toda la formación es de alrededor de once años, tiempo que dura la etapa de escolarización de un estudiante antes de ingresar a la universidad. Duval considera que esa linealización del conocimiento a través de la segmentación de los contenidos matemáticos impide identificar las fallas en el desarrollo de la habilidad matemática de los estudiantes. Y objeta, que la evaluación por ciclos educativos realizada en un país, de forma periódica, no es compatible con la evaluación local que los profesores realizan dentro de las instituciones, lo cual dificulta la identificación de las fallas reales de los estudiantes.

Por otro lado, los profesores son los encargados de organizar y conducir. Es decir, deben proponer dirigir y acompañar el trabajo de los estudiantes, diseñando las actividades pedagógicas y evaluando las producciones de los estudiantes. Debe también garantizar la participación de todos los estudiantes en las secuencias de actividades propuestas. Ellos deben asumir la fragmentación de los contenidos según la propuesta institucional, y a partir de allí generar planes de clase y propuestas didácticas para un ciclo escolar. Además, deben asumir la realidad del aula: los problemas de heterogeneidad en los estudiantes, la pérdida de secuencialidad debido a los cambios en los estilos de los docentes cada año, y las distancias cognitivas y epistemológicas de las diferentes asignaturas, ya que tanto antes como después de una sesión de matemáticas, el estudiante ha sido expuesto a otras formas de saber cómo las ciencias naturales o la informática, las cuales se aprenden de formas diferentes. Por otro lado, los estudiantes son quienes deben aprender o desarrollar las habilidades. Para Duval, comprender implica tener confianza en la

capacidad de iniciativa, de análisis y de control en matemáticas frente a nuevas preguntas y a lo que no se ha visto en el aula. Por la forma como se le presentan los elementos de aprendizaje en la clase, el estudiante sólo está en la posibilidad de resolver los problemas matemáticos propuestos, sin tener la oportunidad de exponer sus fracasos para revisar sus puntos de vista y replantear sus posturas en el caso que se requiera para alcanzar el objetivo propuesto.

Duval sugiere que el fin de la enseñanza de la matemática es aportar a la autonomía intelectual, la cual considera como el fin último de la educación y que para alcanzarla es necesario centrar la investigación en el cuestionamiento de los procesos cognitivos que subyacen a la conducta autónoma de cualquier actividad matemática, en lugar de enfocarse en la optimización de las disposiciones didácticas que conduzcan al logro de objetivos de formación, como es usual en la actualidad.

Así pues, el profesor de matemáticas se encuentra en una constante tensión respecto a la dinámica regulatoria en la cual se enmarca su ejercicio que, si bien tiene sentido para administrar los procesos de enseñanza, no es del todo consecuente con los procesos de aprendizaje, los cuales no obedecen a políticas impuestas de antemano, sino a cuestiones tanto biológicas como culturales que constituyen al aprendiz.

Una mirada al aprendizaje desde la psicología. El aprendizaje desde una perspectiva piagetiana

Continuación revisaremos algunos de los aportes más reconocidos que realizó el Piaget respecto al aprendizaje en los niños. Sus aportes fueron utilizados como base para estudios posteriores y para la construcción de una perspectiva psicológica que asume que el conocimiento está construido, en su mayoría, por el aprendiz. (Schunk, 2012)

Equilibrio, asimilación y acomodación

El proceso de desarrollo mental del niño es asumido como un proceso de adaptación en el sentido biológico. Este está determinado por la construcción y modificación continua de esquemas mentales las cuales entran en desequilibrio constantemente. Son las funciones de asimilación y acomodación las encargadas de restablecerlo. El proceso sería atendiendo la siguiente directriz: una vez se genera un desequilibrio en el infante, ocurre una de tres situaciones: que las estructuras mentales construidas en el momento del evento desequilibrador no sean suficientes para asumir cognitivamente el suceso, en ese caso se dice que la acomodación prima sobre la asimilación, y el

individuo lo resuelve realizando una imitación representativa; en el caso contrario, es decir, cuando el sujeto tiene estructuras mentales previamente construidas para equilibrarse, se afirma que la asimilación prima sobre la acomodación y en ese caso la respuesta es a través del juego simbólico. En una tercera alternativa, en la cual ambas están en igual proporción, dirá Piaget señala que en este caso hay representación cognitiva. (Piaget, 1994)

Así pues, se identifican tres conceptos claves en el planteamiento piagetiano: la *asimilación*, la *acomodación* y el *equilibrio*. Se entiende por *asimilación*, la modificación objetiva de los movimientos y posiciones externas por los movimientos propios, así como la modificación subjetiva resultante del hecho de la percepción y comprensión de los movimientos y percepciones. Esta es relativa al punto de vista propio. Por *acomodación*, se entiende tanto la modificación de los movimientos, como del punto de vista propio por causa de los movimientos propios y posiciones exteriores. Finalmente, el *equilibrio* entre asimilación y acomodación se define por la conservación más o menos durable de secuencias exteriores. (Piaget, 1994)

El desarrollo de la representación en el niño

Piaget propone un desarrollo de la forma como el niño desarrolla la capacidad de representación del mundo que le rodea. Los elementos utilizados para llevar a cabo este desarrollo están relacionados con la tendencia al equilibrio entre la asimilación y la acomodación de estructuras mentales. Este equilibrio es logrado a través de las actividades de imitación, juego y representación cognoscitiva, las cuales fueron estudiadas por Piaget en niños durante un lapso de alrededor de doce años. A partir de esta observación, determina unas etapas de evolución de una persona, las cuales estarían caracterizadas por un conjunto específico de actividades a saber: la actividad sensoriomotora, la actividad representativa egocéntrica y la actividad representativa de orden operatorio.

Periodos de la actividad representativa

Primer periodo: la actividad sensoriomotora. Este periodo comprende desde el nacimiento hasta los primeros dos años de vida. En este, el punto de partida son los esquemas de acción, esto es, el sistema de movimiento y el sistema de percepción están coordinados y son los encargados de replicar y adaptar una cierta conducta en diferentes situaciones, ejemplo de ello puede ser tomar un objeto o moverlo. A través de la ejecución de estos esquemas, se reproducen o modifican, tanto

los movimientos como las posiciones de los objetos. Con base en estas acciones el sujeto lo que hace es condicionar su percepción y comprensión, generando un punto de vista respecto a lo que acontece. En esta ejecución, o en el intento de ejecución de un esquema sobre un objeto o situación diferente, pueden ocurrir tres cosas: la primera es que los esquemas sean suficientes, es decir, no haya elementos nuevos que generen un desequilibrio en estos. Ejemplo de ello sería mover objetos con características similares, en condiciones similares. Ello produce unos resultados similares, por lo cual no se genera desequilibrio. A través de las mismas acciones se alcanzarían los mismos resultados. Una segunda opción es que la asimilación esté por encima de la acomodación. En este caso los elementos que conforman el esquema o requieren ser readaptados o son insuficientes para la realización de la acción. En este caso, será necesario, bien una reacomodación de los elementos del esquema o bien la integración del esquema en otro en el cual la acción pueda ser desarrollada. Por último, contrario a la segunda opción el esquema no necesita ser modificado, ya que es suficiente para la nueva acción, permitiendo la imitación de nuevos modelos a partir de la copia y adaptación de los anteriores, dentro del mismo esquema.

Segundo periodo: la actividad representativa egocéntrica

El segundo periodo está enmarcado dentro de lo que Piaget caracteriza como dos estadios. La característica definitiva de este periodo es la adquisición del lenguaje en el niño. Esto hace que se desarrolle un esquema de representación a partir de lo que denomina desdoblamiento del esquema sensoriomotor.

El pensamiento preconceptual. Se genera una nueva forma de asimilación en un nuevo esquema en el niño: la asimilación representativa. Este nuevo esquema de representación está conformado por la unión de significantes. Aparece una nueva función que será la encargada de conectar significados y significantes en esta nueva forma de asimilación, la cual va más allá de la actividad sensoriomotora. Para Piaget, esta función simbólica es responsable de la adquisición de signos colectivos (palabras), al igual que de la creación del esquema representativo. Para este estadio, el pensamiento del niño está centrado en sí mismo, es un pensamiento egocéntrico. Esto limita la apropiación de símbolos como la construcción de conceptos, debido a que el niño no tiene en cuenta más puntos de vista que el suyo propio. Además, el proceso de asimilación acomodación es ahora doble, puesto que se realiza en el esquema sensoriomotor, como en el nuevo esquema representacional. En este orden y extendiendo el problema del pensamiento egocéntrico, se piensa

que el niño no encuentra un equilibrio entre la asimilación y la acomodación en el esquema representativo, problema que se empezará a solucionar en el siguiente estadio.

El pensamiento intuitivo. En este periodo, ubicado entre los cuatro y los siete años, aún continua en dependencia de su estructura perceptiva, lo cual hace que su pensamiento sea visual e intuitivo. Comienza una descentración de la asimilación egocéntrica, esto es, el niño empieza a coordinar sus puntos de vista con los de otras personas. En esta etapa, el juego toma un papel de expresión y en transformación afectiva de esta. Además, el símbolo empieza a ser más acorde al significativo y se regresa a la tendencia del equilibrio entre la asimilación y la acomodación. Para pasar al siguiente estadio en el que se desarrollara el esquema operatorio, hacen falta dos condiciones. La primera es liberarse de las imágenes que aún no son símbolos por cuanto que pertenecen al individuo y la segunda, posibilitar al pensamiento una acomodación a transformaciones posibles, en lugar de configuraciones estáticas que conforman el estadio actual.

Tercer periodo: la actividad representativa de orden operatorio: 7 a 11 años

En esta etapa, el equilibrio entre la acomodación y la asimilación es alcanzado de forma permanente. El niño está en capacidad de realizar operaciones concretas. Además, la imitación se vuelve refleja, lo cual quiere decir que se realiza con una finalidad. Empieza a desarrollarse un pensamiento abstracto, y la capacidad de adquirir nuevos conocimientos es mayor con respecto a los anteriores periodos. Aparece la reversibilidad en el pensamiento, lo cual implica que puede realizar una revisión de una secuencia de razonamientos. De igual forma, el niño está en la capacidad de realizar clasificaciones, seriaciones y trabajar con conceptos.

Del estudio realizado por Piaget, pese a que ha sido criticado, cuestionado y rebatido en algunos de sus planteamientos, sigue siendo un punto de referencia importante en lo que se refiere a la manera cómo se desarrolla el conocimiento humano. Algunas de las críticas están relacionadas con la temporalidad del desarrollo mental del infante, con las capacidades básicas con las que cuenta un humano desde el inicio de su existencia las cuales le permiten gestionar los aprendizajes culturales (Dehaene, 2016). De esta perspectiva y en relación con los objetivos de este trabajo se rescatan las siguientes ideas. Los procesos de representación y las modificaciones propuestas en esta acción con respecto a la entrada del infante al lenguaje de palabras y signos, ya que aunque nuestra investigación no esté enfocada en la representación mental, sí está interesada en reconocer la relación entre el lenguaje como medio para el aprendizaje y la reacción natural que se tiene frente al desequilibrio cognitivo de las estructuras de pensamiento, por cuenta de la interacción del

individuo con el entorno, situación que es aprovechada de forma continua en los procesos educativos.

Una mirada a los procesos de aprendizaje desde la perspectiva de Lev Vygotsky

El constructivismo como perspectiva para entender los procesos de aprendizaje, que asume que las personas son agentes activos en el desarrollo de sus conocimientos, fue influenciado por la teoría del desarrollo humano desarrollada por Lev Vygotsky. Esta perspectiva sobre el aprendizaje se opone al conductismo que sostiene que el aprendizaje es el resultado de un proceso de condicionamiento que genera una serie de respuestas a determinados estímulos que se le presentan al aprendiz. Vygotsky propone un desarrollo de procesos psicológicos de orden superior, resultado de la internalización de operaciones externas realizadas por el sujeto.

Según Vygotsky, la forma como se ha estudiado el desarrollo psicológico de los niños se ha movido en el tiempo desde diferentes perspectivas. Una de ellas, desarrollada por el psicólogo alemán Karl Stumpf, (Vygotsky, 2000, p. 40), quien analiza el desarrollo de los niños asociados a la maduración de los organismos, y señala como crítica que el papel pasivo que el individuo tiene en su propio desarrollo no permite dar cuenta de fenómenos complejos. Una segunda perspectiva, es la de asociar el desarrollo de los humanos con el de otras especies animales. Se realizan experimentos sobre conductas y comportamientos de ciertas especies y los resultados obtenidos se extienden a los humanos. Un ejemplo de esta propuesta son los experimentos comparativos entre las conductas de los chimpancés y los niños, realizados por Kohler (Vygotsky, 2000, p. 43), y los experimentos con perros realizados por Pavlov, que derivaron en teoría del condicionamiento (Schunk, 2012, p. 78). Sin embargo, aunque esta perspectiva ha servido para fundamentar las características biológicas del desarrollo psicológico, y permiten describir funciones básicas, no son suficientes para explicar las funciones intelectuales más complejas, las cuales se entienden en la perspectiva zoológica como una continuación directa de procesos animales correspondientes.

Vygotsky caracteriza dos tipos de funciones psicológicas. Un grupo, considerado como las *funciones elementales*, las cuales están directa y totalmente determinadas por estímulos que se encuentran en el entorno. Por otro lado, se encuentran las *funciones de orden superior*, las cuales superan la dimensión biológica y cuyo rasgo definitorio es la autoestimulación generada, es decir, depende del uso y la creación de estímulos artificiales, denominados signos, que terminarán siendo los responsables de determinadas conductas (Vygotsky, 2000, p. 69). Entonces, es a partir del

desarrollo y uso del signo, incluso previo al desarrollo del lenguaje, que el pensamiento técnico evoluciona impulsado por el uso de herramientas, trayendo consigo la creación de nuevas funciones psicológicas que no son observables en otras especies.

Según Vygotsky, hay un momento en la vida del niño en la que se incluye el lenguaje en la solución de actividades prácticas, lo cual le permite planear acciones y dirigir su propia conducta. Esto ocurre ante la incapacidad de solucionar una acción por medio de los recursos que tiene a su disposición en el medio en el que se encuentra. En lugar de pedir ayuda, el pequeño recurre a sí mismo a través del lenguaje, adquiriendo una función intrapersonal. Esta función, que no se observa en los animales, es la responsable del surgimiento y evolución de las funciones superiores, ejemplo de ello es la *función planificadora del lenguaje*, que relaciona la palabra y la acción y se encarga de guiar esta última en la solución de determinadas tareas. (Vygotsky, 2000, p. 53)

Vygotsky sugiere que existe una forma elemental de conducta que se puede expresar en términos de estímulo y respuesta, donde el estímulo es una tarea que se le impone al organismo y la respuesta es su reacción directa. Sin embargo, al incluir un estímulo intermedio en la relación (un signo), genera cambios en el individuo que afectan la forma cómo este genera la respuesta. El proceso no es repentino, se desarrolla desde la incomprensión del signo que deriva en una respuesta directa al estímulo, como si el signo no existiera, hasta una apropiación de este y una respuesta producto de una reorganización de los procesos psicológicos. Así, el proceso de estímulo-respuesta, queda actualizado por una relación compleja y que esta mediada por el signo, o en palabras de Vygotsky: “... *El uso de signos conduce a los individuos a una estructura específica de conducta que surge del desarrollo biológico y crea nuevas formas de un proceso psicológico culturalmente establecido*”. (Vygotsky, 2000, p. 70).

En esta perspectiva de desarrollo, se observa que además de los factores puramente biológicos, y la interacción directa del infante con el entorno, las formas culturales establecidas en las estructuras del lenguaje y los signos del grupo social son factores que afectan el desarrollo psicológico. En los estudios realizados, se señala la existencia de una distancia entre la capacidad que tienen los niños para resolver un problema de forma independiente y la capacidad potencial, la cual está determinada por la resolución de un problema con la ayuda de un adulto o en conjunto con un compañero. A esta la denominó *zona de desarrollo próximo*, y sugiere que permite definir cuáles son las funciones que aún no ha desarrollado, sino que están en proceso de hacerlo, por lo cual se debería tener en cuenta al realizar investigaciones posteriores. En el aula, una vez se

propone un problema de aritmética, se observa que una parte del grupo de estudiantes lo pueden desarrollar de forma autónoma, otros, en cambio, requieren una guía para alcanzar la solución, y en algunos casos se observa que incluso después de una explicación, el estudiante no logra completar la tarea. En ello se observa que nivel de una habilidad particular está integrada en el estudiante. Para algunos lo está en su totalidad, para otros está en proceso y otros definitivamente no la han desarrollado.

Bühler consideró que la actividad práctica del niño anterior al desarrollo de su lenguaje es igual a la del mono. Lo cual sugiere poner la atención en comprender cómo cambia la actividad práctica previa del niño y posteriormente al desarrollo del lenguaje. Desde esta perspectiva, Vygotsky lleva a cabo sus propias investigaciones, para determinar las formas de inteligencia práctica humanas (Vygotsky, 2000, p. 45). A continuación, se presentan algunos de sus resultados.

La relación entre el lenguaje y el uso de instrumentos modifican diferentes funciones psicológicas tales como la *memoria*, la *atención*, la *percepción*, y las *operaciones sensorio-motrices*. Un primer ejemplo de este tipo de funciones es la *memoria*, respecto de la cual diferencia dos tipos. La primera, denominada *memoria natural*, la cual se genera a partir de la impresión de las experiencias vividas. Un segundo tipo, el cual se apoya inicialmente en el uso de signos externos, como muescas o nudos, los cuales evolucionan hasta convertirse en lenguaje, posibilitando la separación de los recuerdos directos, de los recuerdos relatados, en los cuales existe la posibilidad de incluir elementos adicionales como los afectivos, entre otros. Por otro lado, la *atención* está ampliamente relacionada con el uso de herramientas y es transformada una vez se adquiere el lenguaje. A través de la función indicativa, el niño es capaz de dominar su atención, puede dirigirla de forma dinámica, evalúa la importancia de su campo perceptivo, reorganiza su campo visual y espacial creando uno temporal. Este último responsable de la creación de dos nuevas funciones: las *representaciones simbólicas* y las *determinaciones de la acción proyectada* (Vygotsky, 2000, p. 65). En cuanto a la *percepción*, se inicia en una percepción natural que está determinada directamente por los sentidos. Sin embargo, una vez se adquiere el lenguaje, la percepción pasa a ser una percepción verbalizada, la cual dota a los objetos de sentido y significado. Así, no es lo mismo percibir un reloj antes que después del lenguaje, sin este solo podríamos dar cuenta de características físicas como la forma, el color, entre otras. Finalmente, en cuanto a las *operaciones sensorio-motrices*, se observa que el niño empieza a dominar sus

movimientos, a planificar sus movimientos, a autorregular su impulsividad y a realizar actuaciones en el presente, desde el punto de vista del futuro.

Práctica versus el uso del signo

Como se mencionó anteriormente, una función psicológica superior o conducta superior se refiere a la combinación de herramienta y signo en la actividad psicológica. En este sentido se debe distinguir entre herramienta y signo porque, aunque ambos son elementos mediáticos, se diferencian por cuanto la herramienta tiene fines de modificación de los objetos externos para alcanzar unos fines específicos en una determinada actividad en la cual se aspira modificar la naturaleza, está orientada externamente. No obstante, el signo no pretende modificar el objeto de las operaciones psicológicas, sino que es un apoyo, un medio de actividad interna la cual está encaminada a dominarse a sí mismo. (Vygotsky, 2000, p. 91)

Sin embargo, estas dos actividades tienen una conexión común, ya que la alteración que el hombre realiza sobre la naturaleza genera cambios en la suya propia (interior). Mientras que el uso de medios artificiales, herramientas y signos, modifican la estructura psicológica del individuo, es decir, el uso de medios artificiales cambia todas las funciones psicológicas y promueve la creación de otras nuevas (Vygotsky, 2000, p. 92). Así pues, un proceso que está determinado por acciones externas en las que el sujeto se involucra, termina siendo internalizado, entendiendo la internalización como la reconstrucción interna de una operación externa. Este proceso consta en general de tres transformaciones. Una operación que en un principio representa una actividad externa, que se reconstruye y comienza a suceder internamente. Un proceso interpersonal queda transformado en uno intrapersonal. La transformación de un proceso intrapersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una serie de procesos evolutivos. (Vygotsky, 2000, p. 94)

Entonces, para el proyecto de investigación nos parecen pertinentes los siguientes planteamientos propuestos por Vygotsky: la importancia que se le da a las interacciones sociales en el proceso de desarrollo del niño. El papel que éste tiene en su propio proceso de desarrollo, cómo construye los signos y el lenguaje, que en principio son entidades externas y que poco a poco van siendo contruidos por él, desarrollando sus funciones psicológicas elementales y de orden superior. La actividad practica y el uso de herramientas, desde las cuales se desarrollan las operaciones mentales a través de la internalización de operaciones externas. No obstante, esta perspectiva, pese a que tiene un inicio en la habilidad práctica, está basada, principalmente, en el

sentido de los apoyos visuales que hemos desarrollado culturalmente, dejando de lado otros sentidos y las elaboraciones psicológicas de las cuales son ellos responsables en parte.

Semiótica en la didáctica de la matemática

En este apartado se revisarán los tipos de representaciones que se presentan en un análisis semiótico y tres perspectivas que actualmente se encuentran en el discurso de la didáctica de la matemática. Finalmente, se expondrá la relación de estos enfoques, ventajas y límites con el trabajo en el cual se enmarca este apartado.

Tipos de representaciones

Mientras que, para caracterizar los tipos de representación, Duval, siguiendo a Paivo, Larking & Simon, (Duval 2017) recurre a las oposiciones interno/externo y consciente/no consciente, Godino solo hace una distinción entre representaciones internas y externas.

Dos características relevantes para los sistemas de representación externos, notadas por Godino, son el *carácter sistémico* y el *carácter bidireccional*. El primero se refiere a la estructura al interior de un sistema de representación. Estas formas estructurales, como se verá más adelante, son de una riqueza cognitiva que debe ser identificada y apropiada por un aprendiz. La segunda hace referencia a la reversibilidad, es decir la posibilidad de representar en dos sistemas diferentes estableciendo entre ellas una correspondencia que permita al sujeto “ir y venir” entre las representaciones, según su conveniencia.

Para Duval, la oposición consciente/no consciente está relacionada con los procesos de un individuo. Existen elementos que son perceptibles de alguna manera, o que hacen parte de su realidad. Los que no hacen parte de lo no consciente. En este sentido es a través de un proceso de objetivación o descubrimiento, que los elementos pasan de lo no consciente a lo consciente. Por otro lado, la oposición externo/interno, se refiere a lo que es perceptible de un individuo y lo que no lo es. Desde allí se derivan las representaciones internas y las externas. Las primeras, pertenecen al individuo, aunque no son comunicadas a otro. Las segundas son presentadas a otro a través de alguna producción particular del sujeto. A estas, se les atribuyen las funciones cognitivas de objetivación y de transformación, estando esta última relacionada con el uso de sistemas semióticos.

Desde estas oposiciones diferencia las representaciones *mentales*, *computacionales* y *semióticas*. Las mentales permiten al sujeto manipular un objeto en ausencia total de un significante perceptible. En estas se alojan e incorporan los conceptos, nociones, ideas y creencias, es decir, las formas más abstractas de los sistemas de conocimientos y creencias. Debido a esto son de difícil manejo ya que no están necesariamente ni en correspondencia ni subordinadas a los sistemas semióticos.

Por otro lado, las representaciones computacionales, cuyos significantes no requieren la mirada del objeto y permiten una transformación “algorítmica” de una serie de significantes en otra. Su valor cognitivo se debe a que sirve de base para el manejo de información y las transformaciones de un objeto en diferentes formas. Finalmente, las representaciones semióticas que son al mismo tiempo externas y conscientes permiten caracterizar perceptualmente un objeto, incluyendo diferentes modos perceptuales, visuales, auditivos, los cuales asumen el papel de significantes.

Bajo la mirada de la semiótica en la didáctica de la matemática, se analizan en particular tres autores que han ganado una influencia notable en los discursos de la didáctica de la matemática: Duval, Radford y Godino, quienes comparten la importancia que les otorgan a los registros de representación en la cognición de los objetos matemáticos en particular. Duval, por un lado, se centra en el estudio de los problemas que presentan los registros de representación semiótica y la influencia de estos en los aprendizajes conceptuales proponiendo unas condiciones para el aprendizaje basado en la coordinación de registros. De otro modo, Radford establece, como punto fundamental, en dichos aprendizajes, a la actividad deliberada. Siendo los sistemas de representación una construcción cultural que permiten al individuo objetivar una forma matemática y construir un concepto a partir de esta. Finalmente, Godino propone un enfoque que permite modelar la investigación en el aprendizaje de la matemática.

Registros de representación semiótica y aprendizaje

Para Duval, los tres elementos fundamentales en el ejercicio del aprendizaje a través de los registros de representación semiótica son la *formación*, el *tratamiento* y *conversión*. A continuación, se revisarán cada uno de ellos teniendo en cuenta el interés de la investigación. Cuando se está trabajando con un objeto matemático, como por ejemplo una fracción, es común utilizar un conjunto de signos que hacen que lo hagan perceptible. Inicialmente es válido pensar

que estos signos pueden ser contruidos por cada sujeto. Sin embargo, si se está interactuando en un grupo social, lo usual es tomar signos que existen en este.

En matemáticas ha sido una práctica común tomar elementos del lenguaje cotidiano y de otras ciencias y adaptarlos para sus propios fines. Ejemplo de ello podrían ser las figuras geométricas, formas cartesianas y gráficas, los cuantificadores y conectores lógicos, entre otros. Esto hace que, desde el inicio del proceso educativo, un estudiante deba interactuar con estas construcciones, construirlas en sus sistemas particulares de registro de información e interpretar las ideas y conceptos que el grupo social le han asignado. Es esta, la primera actividad cognitiva fundamental en la semiosis, la *formación* de representaciones. Cada sistema de representación sigue unas reglas de conformidad que permiten reconocerlas como equivalentes dentro de un conjunto de representaciones de un mismo tipo.

Ahora bien, un mismo objeto podría ser representado de diferentes maneras dentro del mismo tipo de registros, por ejemplo, escribir la fracción $1/2$ equivale a escribir la fracción $2/4$ ya que ambos números pertenecen a la misma clase de equivalencia. Ambos registros son del mismo tipo, su escritura es en forma de fracción. Sin embargo, para un estudiante en sus primeros años de escolaridad no es inmediato reconocer dicha equivalencia. Para ello se requiere tiempo, además se debe aprender un algoritmo para transformar una forma en otra. Este tipo de transformaciones son clasificadas bajo la actividad cognitiva de *tratamiento*. Como se observa en el ejemplo, hay unas reglas para la transformación que en este caso particular es el algoritmo. Estas hacen parte del aprendizaje en el caso de usarse el tipo particular registro de representación.

Una vez se forman registros de representación y se establecen los tratamientos al interior de cada uno, aparece una última actividad cognitiva, la actividad de *conversión*. Dado un objeto, este puede ser representado utilizando más de una tipología de registros de representación. Volviendo al ejemplo anterior, la fracción $1/2$ podría ser representada en su forma decimal 0.5. Esta transformación requiere que se perciba la diferencia entre el objeto representado y la forma de la representación. Duval afirma que sin la capacidad de hacer esta distinción es imposible o incomprensible llevar a cabo esta actividad. Refiere, además, que en esta actividad se hace necesario diferenciar entre la significación operatoria vinculada al registro y el número representado. En nuestro caso las formas operatorias de tratamiento de las fracciones, como las sumas y las multiplicaciones, son diferentes en el caso de las formas decimales de los números.

En caso de no ser consciente de esta última diferencia, la conversión tendrá un alto nivel de dificultad.

Con base en las tres actividades fundamentales presentadas, Duval propone estudiar el aprendizaje basándose en la coordinación de los registros, es decir, desarrollar secuencias de trabajo en el aula, que propendan por el desarrollo simultáneo de estas tres actividades fundamentales. Su punto de vista es que, si a un sujeto se le enseña a trabajar en solamente un registro, por ejemplo, las figuras geométricas o la escritura algebraica, su conocimiento quedará limitado al desarrollo de actividades en estos registros.

Cognición desde la perspectiva semiótica cultural de Radford

Radford está en desacuerdo con la premisa de que la cognición ocurre exclusivamente al interior de un individuo después de un proceso autorreflexivo que es independiente de factores externos a él. Por el contrario, la cognición se encuentra en relación con el entorno en el que interactúa el individuo, incluyendo, entre otros, los sistemas de representación y el uso de signos del grupo social. Además, cuestiona el supuesto de que los objetos conceptuales, en nuestro caso los objetos matemáticos, tienen una existencia en un “espacio ideal”, y que los recursos semióticos son herramientas mediante las cuales el individuo comunica al grupo lo que acontece respecto a estos.

Se cuestiona acerca de la relación entre cognición y cultura, desde un punto de vista antropológico. Parte del cuestionamiento sobre la naturaleza de la cognición y la ubicación del individuo en el acto de conocer. Después ubica el problema de la cognición como reflexión de la práctica social. Desde aquí concluye que la producción de objetos conceptuales es resultado de la actividad cognitiva, que no se realiza en solitario, sino que es una práctica social, mediatizada y de interiorización reflexiva enmarcada en prácticas sociales históricamente constituidas. Así pues, los desarrollos conceptuales que un individuo gestiona no son solamente un producto de los recursos puestos a su disposición para la elaboración, sino que, además, tienen una historia que ha sido generada por los grupos sociales que la han desarrollado en el tiempo, por lo cual hace necesario situar al individuo en la cultura, y a sus producciones simbólicas dentro de un sistema cultural de prácticas de significación.

Desde esta perspectiva, el individuo se posiciona como ser en la cultura. Se define el pensar como “reflexión cognitiva del mundo de acuerdo con las formas culturales de significación que

enmarcan la actividad humana” y el saber “como el producto de una praxis cognitiva, reflexiva y organizada”, centrando la actividad deliberada, en el sentido de Leóntiev, es decir, retomando las características de la actividad propuestas por él. El *objetivo* y los medios para alcanzarlo, como eje central de la cognición, siendo los sistemas semióticos culturales de significación elementos constitutivos del objeto conceptual en el sentido que son estos los que permiten objetivar al objeto.

Desde esta perspectiva, Radford sugiere que el punto de partida para la creación de un nuevo objeto matemático es la siguiente: se inicia en una actividad A con un objetivo O. Para el desarrollo de esta actividad, se tienen unos elementos conceptuales previos, $C_1, C_2, \dots, C_n$, los cuales tienen un trasfondo común que aún no se hace explícito. Hay una forma matematizable inherente a estos elementos. Supone que a partir de la necesidad de alcanzar el objetivo de la actividad surge un nuevo concepto, que es la conceptualización de la forma inherente que subyace a los elementos conceptuales previos. La objetivación del saber permite el paso de la cosa matemática al concepto creado C_M . Sugiere que ese paso tiene lugar al interior de la actividad, por lo cual hace parte de los sistemas culturales semióticos de significación y de los recursos de mediación semiótica.

A manera de ejemplo, las diferentes formas de trabajar con racionales, es decir, forma decimal, línea numérica, gráficos geométricos y forma de fracción serían los C_1, C_2, C_3, C_4 . El objetivo de la actividad podría ser un problema en el cual haya necesidad de interactuar con estas formas. La pregunta que aún está por resolver es: ¿qué es C_M ? ¿Una definición formal, o un objeto conceptual?

Enfoque ontosemiótico en educación matemática

Finalmente, Juan D. Godino. (Godino, 2018) propone un modelo relativo al conocimiento matemático al que denomina enfoque ontosemiótico (EOS), desde unas bases semióticas y antropológicas. Este enfoque, toma como entidades primarias a los objetos matemáticos, las prácticas, los procesos y las funciones semióticas.

En ese sentido establece como *práctica matemática*: “toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino, 2018). Además, propone extender los *objetos matemáticos* a los diferentes elementos que intervienen en esta práctica, como lo son los conceptos, las proposiciones, los argumentos, los procedimientos, las formas de representar incluyendo el lenguaje y las situaciones problema.

La noción de *función semiótica* se entiende como la correspondencia entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) según un criterio o regla de correspondencia, siendo toda entidad participante en un proceso de semiosis, los sistemas de prácticas operativas y discursivas, objetos que pueden asumir el papel de antecedente o precedente en dicha función. De otra manera, un *proceso* será entendido como una secuencia de acciones que son activadas o desarrolladas, para alcanzar un objetivo ante una actividad matemática propuesta.

Procesos matemáticos como la comunicación, problematización, definición, elaboración de procedimientos, son los que hacen emerger los respectivos objetos primarios de la configuración ontosemiótica (problemas, lenguajes, proposiciones, argumentos, procedimientos y conceptos). En el centro de estos se encuentra la resolución de problemas, y estos objetos establecen prácticas operativas, discursivas y normativas, las cuales configuran el enfoque.

Respecto a la construcción del concepto de número racional, el cual relaciona un conjunto de elementos operativos y discursivos alrededor de este saber, se plantea la siguiente pregunta: ¿cuál o cuáles serían los focos de atención en una investigación en el contexto del aula de clases?

Relación de las perspectivas presentadas con la investigación

La perspectiva del enfoque ontosemiótico tiene la ventaja de ser bastante robusta en comparación con las otros dos, por lo cual permite tener en cuenta dimensiones del aprendizaje que están en un contexto que va más allá del aula. Sin embargo, teniendo en cuenta lo que se pretende analizar en esta investigación, pese a estar en marco institucional y atender las políticas educativas nacionales, no es posible orientarla en esta perspectiva, por dos razones. La primera, porque es muy general y las variables sobre las que centrar su atención no son fáciles de identificar. La segunda razón es que el centro del enfoque es la resolución de problemas para el desarrollo de la habilidad matemática. En nuestro caso, enfoque central es la relación entre representación semiótica y aprendizaje de uno de los conceptos de la matemática, entendiendo concepto desde una perspectiva diferente a la propuesta en este modelo.

Respecto a la semiótica cultural, que está ubicada entre el aula y la institución, no es tan general como la anterior, y tiene elementos importantes que se pueden tener en cuenta, como, por ejemplo, la interacción entre los estudiantes, es decir, no centrar la observación en los individuos, sino en los grupos sociales establecidos en el aula, y desde allí analizar las situaciones de aprendizaje. No obstante, se debe tener en cuenta que la preocupación central de esta perspectiva

no son los registros de representación semiótica, sino la cognición a través de la elaboración de sentido sobre los sistemas de representación generados por la comunidad, incluyendo gestos, discursos hablados y registros de representación semiótica. Toda esta construcción y apropiación de sistemas tienen lugar en el desarrollo de una actividad, la cual se desarrolla para cumplir con objetivo.

La propuesta de aprendizaje, a través de la coordinación de registros, puede ser aplicable dentro del contexto del aula de clase, aunque tiene la desventaja de privilegiar a la percepción visual, por cuanto el foco de atención son los registros de representación construidos y manipulados en clase, y deja de lado los puntos de vista de quienes intervienen, lo que promueve un alto nivel de inferencia a partir de lo observado. De las tres propuestas revisadas esta es la que se ajusta mejor a los recursos y límites de esta investigación. Las variables que se observarán obedecen a la formación, el tratamiento y la conversión de registros de representación semiótica

El conjunto de los números racionales. Del concepto al aula de clases

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, existen diferentes tipos de estructuras numéricas cada una de ellas con propiedades adicionales respecto a la anterior. La primera de ellas es el conjunto de los números naturales con sus operaciones de conjunto, suma y producto. A partir de allí se extiende el conjunto incluyendo los opuestos a cada uno de los números naturales, para construir el conjunto de los números enteros. Desde allí, nuevamente se construye el conjunto de los números racionales, el cual será, en parte, descrito en este apartado, y, finalmente, se construyen los números reales.

El conjunto de los números racionales en la matemática Q^+

Dos autores desarrollan la construcción matemática del concepto de fracción. Por un lado, Marco Panza (Panza, 2019) realiza una primera definición respecto a los números fraccionarios positivos de la siguiente manera:

Definición 1: “Se llama número fraccionario estrictamente positivo a una pareja ordenada de números enteros estrictamente positivos p y m , que se denotan como $\frac{p}{q}$ ” (Panza, 2019. p. 245)

Por otro lado, José Muñoz (Muñoz, 2002) define al conjunto de los números racionales de la siguiente definición:

Definición 2: “Notaremos por Q al conjunto cociente $B/\cong$ o sea $a (Z \times Z^*)/\cong$ ” (Muñoz, J.2012. p. 178).

Como se puede observar ambas definiciones parten de un conjunto común. Una vez construido el conjunto de los números naturales $N = \{0,1,2,3,\dots\}$, y los números enteros $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ y el conjunto restringido $Z^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$ Desde este último, ambos autores, presentan la construcción de los números racionales.

Una diferencia fundamental entre la primera y la segunda definición es que en la primera se establece el conjunto a partir del producto cartesiano de los enteros por ellos mismos, es decir el conjunto de parejas ordenadas (a, b) donde ambos son números racionales positivos.

La segunda definición en cambio hace referencia al conjunto de clases de equivalencia que se generan sobre el producto cartesiano $B = Z \times Z^*$, similar a la anterior, aunque se extiende al producto de los enteros por el producto de los números enteros sin el cero. Y, además, se establece una relación de equivalencia $\cong$ sobre este producto. Esta se establece como “ $(m, n) \cong (p, q)$ si y solo si $mn = np$ ” (Muñoz, 2002, p. 177). La relación es de equivalencia si verifica tres propiedades: *simétrica*, *reflexiva*, y *transitiva* sobre el conjunto B . Revisemos las definiciones de estas propiedades:

- i. *Propiedad reflexiva:* una relación R sobre un conjunto B es *simétrica* si para cada elemento a del conjunto B , a está relacionado con a
- ii. *Propiedad simétrica:* una relación R sobre un conjunto B es *reflexiva* si para cada par de elementos a y b del conjunto B , si a está relacionado con b , entonces b está relacionado con a .
- iii. *Propiedad transitiva:* una relación R sobre un conjunto B es *transitiva* si se cumple que para cada terna de elementos a, b, c de B se cumple: Si a está relacionado con b y b está relacionado con c , entonces a está relacionado con c

A manera de ejemplo, las propiedades en términos de dos fracciones equivalentes se verían así:

- i. *Propiedad reflexiva:* $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$;

- ii. *Propiedad simétrica*: Si: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, entonces $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$;
- iii. *Propiedad transitiva*: Si: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ y: $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ entonces $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$

En este caso, vemos que el número $\frac{2}{3}$ cumple con los criterios tanto de la **definición 1**, como de la **definición 2**, en este caso se dice de $\frac{2}{3}$ que es una fracción y simultáneamente es considerado como un número racional positivo. La clase de equivalencia a la cual pertenece es $\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\right\}$

Números racionales en la didáctica de la matemática

Desde la didáctica de la matemática, Fandiño (Fandiño, 2009) presenta los números racionales desde diferentes enfoques. Algunos de ellos son la fracción como medida, como parte de una unidad, como cociente, como relación entre dos magnitudes, como operador, como número racional, como punto en una recta orientada, y como porcentaje. Estos enfoques están relacionados con las formas como es aprehendido el concepto durante el proceso escolar. En el caso de la escuela no se tienen en cuenta las construcciones matemáticas revisadas en el apartado anterior, aunque a partir del grado octavo se presenta una definición formal, aunque no se tiene en cuenta la relación de equivalencia dentro de esta. Revisaremos a continuación algunos de los enfoques mencionados anteriormente. En todos los casos, en la disposición del número $\frac{a}{b}$, denotaremos a **a** como el numerador de la fracción y a **b** como el denominador de esta.

La fracción como medida. En diferentes contextos se hace uso de las fracciones como una unidad de medida. Una forma típica es la botella de una bebida como el vino, la cual es de 750 cc o su equivalente a $\frac{3}{4}$ de un litro o 0.75 litros. También se suele decir, en el lenguaje coloquial, que medio kilogramo equivale a una libra, aunque en el sistema inglés una libra sean 454 gramos. Las tallas usadas en el calzado también suelen venir representadas por números mixtos, es decir una combinación de un entero con una fracción. Por ejemplo $38\frac{1}{2}$.

La fracción como parte de una unidad – relación parte todo. Esta es una de las formas más comunes y que aparecen al inicio del ciclo escolar en lo que se refiere a las fracciones. En este caso se toma una unidad, que puede ser continua o discreta, se divide en partes iguales y se señalan algunas de sus partes. Normalmente en esos primeros años se hace un diagrama de círculo al que

se asocia una pizza o un pastel como una totalidad (el denominador) y se divide mediante segmentos en partes iguales y se colorean las partes que se quieren señalar (el numerador).

La fracción como cociente. Siguiendo el caso anterior, la expresión $\frac{a}{b}$ denotará una partición de una unidad en b partes iguales y de ellas seleccionar la cantidad a . Al aplicar el algoritmo de la división obtendríamos un número decimal al que denominaremos cociente entre a y b . Por ejemplo, para el caso de $\frac{3}{5}$, al hacer la división $3 \div 5$ tendremos el cociente 0.6. En la escuela primaria se suele estudiar también la forma de reversar la situación, es decir, como obtener una fracción a partir de un decimal. En nuestro ejemplo la pregunta es cómo convierto a 0.6 en $\frac{3}{5}$, este problema será abordado más adelante.

Las fracciones como razones y proporciones. Para pensar la fracción como una razón podríamos identificar una característica medible de un conjunto y un subconjunto de este y desde allí expresar una razón entre estas. Por ejemplo: en un salón de 20 estudiantes, hay 12 niñas. Por tanto, la razón entre la cantidad de niñas y el total es de 3 a 5, lo cual también se denota como 3:5 o como en el grupo, la cantidad de niñas es $\frac{3}{5}$ del total de estudiantes. Ahora bien, la igualdad entre dos razones es denominada una proporción. En el ejemplo anterior, podemos encontrar diferentes proporciones como $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ y $\frac{12}{20} = \frac{24}{40}$ la cual se podría interpretar como: “si se mantuviera la misma proporción, en un grupo de cuarenta estudiantes 24 serían mujeres”. En la proporcionalidad aparece la noción implícita de relación de equivalencia revisada previamente, si se observa todas las fracciones de este ejemplo, pertenecen a la clase de equivalencia $\left[\frac{3}{5}\right]$

Como se mencionó, el concepto de número racional se desarrolló hace relativamente poco en la historia de las matemáticas, es una forma conceptual que inscribe a las fracciones dentro de una teoría de los números la cual permitió establecer bases sólidas dentro de un sistema axiomático a las estructuras numéricas fundamentales con las que la humanidad venía solucionando sus situaciones de la cotidianidad y de las ciencias naturales. El concepto de fracción se basa en las relaciones de equivalencia y orden, y parte de construcciones numéricas previas, el conjunto de los números enteros. Sin embargo, en principio no es aplicable más que para las construcciones numéricas posteriores, como los números irracionales y los números reales.

No obstante, para llevar a cabo las construcciones, aunque tienen ellas una cuota del uso de la lógica de los matemáticos muy alta, esta soportada en conjuntos que, aunque ni se definen ni se

caracterizan como conjuntos asociados a alguna realidad en particular, se pueden asociar con entidades reales, siempre que sobre las formas como los elementos de estos se relacionen, verifique las propiedades que se les impone desde la teoría, en cuyo caso todo lo que haya sido demostrado como verdad en esta, sería válido en la realidad particular escogida. Posibilitando la modelación a través de la construcción teórica de situaciones reales.

El acercamiento a las fracciones desde la teoría de conjuntos, dado su nivel de abstracción, podría estar en disonancia con la capacidad intelectual de un estudiante de octavo grado de escolaridad al que se refiere esta investigación. Por esta razón, se debe realizar una transposición didáctica, es decir, una estrategia metodológica en el aula de clases, que permita acercar el conocimiento a los estudiantes. Al respecto, la didáctica de la matemática ofrece, entre otras alternativas, el uso de los campos conceptuales, desarrollada por Gérard Vergnaud, que sugiere abordar el concepto desde diferentes perspectivas de forma simultánea; o la propuesta de Duval de acercarse desde las formas de representación semiótica, que permitan, tanto al profesor como al estudiante, observar las interacciones de este último con el saber.

Entonces, no podemos perder de vista que este ejercicio educativo, que es una de las cosas que debe aprender un estudiante de matemáticas, es una tarea que el profesor debe intentar, año tras año, en cada ciclo escolar. Es oportuno para ello revisar las precauciones señaladas por los estudiosos de la didáctica, además de una revisión y actualización continua y sistemática de las formas en las que la actividad docente se realiza. Un enriquecimiento continuo de la práctica que solo es posible desde la realización consciente del ejercicio pedagógico y un cuestionamiento conciso tanto de los elementos que este saber engloba como de los que han sido invisibilizados por la elegancia de las formas discursivas que lo exponen.

Conclusiones del capítulo

Las estructuras matemáticas que se utilizan en la escuela durante primaria y secundaria siguen la secuencia de construcción mencionada al inicio del apartado, sin la rigurosidad con la que se realiza en un curso de teoría de números a nivel universitario. Sin embargo, durante los ciclos escolares, existen algunas discontinuidades que vale la pena mencionar. La primera de ellas es la no inclusión de números negativos en la educación básica. Solo a través del artificio de la resta, se incluyen partes de esta estructura, aunque esta no se presenta como tal, lo cual genera un primer traumatismo en los estudiantes cuando se inicia el proceso de apropiación de números enteros, ya

que como se ha verificado a través de la experiencia, para la mayoría de los estudiantes en grado sexto al inicio del año escolar, la respuesta a la pregunta, cuanto es cuatro menos cinco, tiene como respuesta que no es posible dado que cuatro es menor que cinco. La segunda es el uso de números fraccionarios desde los diferentes enfoques presentados, sin realizar un ejercicio de objetivación del objeto que subyace a estos. Esto hace que el conocimiento de los números racionales sea compartimentado, impidiendo, al parecer, una comprensión adecuada por parte de la mayoría de los estudiantes. Para alcanzar este saber de la mejor manera, es necesario que quienes acompañan el proceso sean conscientes de las diferentes perspectivas, los distintos recursos que ponen a disposición de los estudiantes para avanzar en la construcción conceptual y, por supuesto, es necesario tener el conocimiento de la construcción de los números racionales a partir del conjunto cociente como se presenta en la **Definición 2** de este Capítulo, que corresponde a la definición que se ofrece actualmente desde la teoría de conjuntos.

CAPÍTULO 2. ESTUDIO DE CASO

Contextualizando el estudio de caso

Este capítulo se orienta a examinar las respuestas que los estudiantes presentan ante un conjunto de cuestiones que examinan la comprensión por parte de ellos de los números racionales positivos. En esa línea de indagación, se considera el concepto de unidad como totalidad, la cual puede dividirse en partes; la formación, tratamiento, conversión y coordinación de registros de representación orientadas a la diversidad de registros semióticos; la propia noción de equivalencia entre números racionales positivos; y finalmente la resolución de problemas que involucran números racionales positivos. Se debe aclarar que debido a los límites temporales de la investigación, se realizará el trabajo con base en las fracciones propias, es decir, aquellas en las cuales el numerador es menor que el denominador.

El enfoque de esta investigación es fundamentalmente cualitativo y la metodología empleada es el estudio de caso. El estudio de caso, como lo menciona Yin (Yin, 2002), atiende a tres características. El tipo de pregunta que moviliza la investigación, el control que tiene el investigador sobre el comportamiento de los eventos y el foco temporal de atención, es decir, si se realiza observación sobre hechos históricos o sobre hechos que ocurren mientras se realiza el experimento. Si las preguntas orientadoras tienen la estructura de cómo o porque, si el nivel de control mencionado es bajo y si, además, se están realizando observaciones en tiempo real, es pertinente llevar a cabo este tipo de estudio. Dado que estas tres características se ajustan al ejercicio investigativo de observación del trabajo de los estudiantes en el aula de clases, se ha escogido esta metodología.

Este ejercicio investigativo tiene como caso que la relación entre la coordinación de registros de representación semiótica y la aprehensión del concepto de número racional positivo. Este ha sido segmentado en diferentes unidades de análisis revisadas a través de diferentes instrumentos dentro del estudio siguiendo las sugerencias metodológicas propuestas por Hernández (Hernández, 2014) con el objetivo de facilitar el análisis de la información y ponerlo en relación con la teoría que lo soporta. El ejercicio tuvo tres momentos: en el primero se desarrollaron un conjunto de actividades diagnosticas; en el segundo se implementaron sesiones de clase en las cuales se hicieron explicaciones y se desarrolló un segundo grupo de actividades.

Finalmente, se hizo una actividad de salida en la cual se examinan los cambios en las formas como los estudiantes resuelven problemas de la misma tipología que los planteados en momentos previos.

Las unidades de análisis, las cuales son las encargadas de poner el énfasis en las observaciones, están en relación con la propuesta de coordinación de registros de Duval (2017). A continuación, se describen estas unidades de análisis.

Unidad de análisis 1. La formación de registros de representación semiótica. En esta se revisarán los conocimientos que los participantes tienen respecto a los diferentes registros de representación semiótica utilizados típicamente en la educación básica y media, el uso de las reglas de formación, tanto desde lo declarativo como desde el hacer, es decir el uso de estos.

Unidad de análisis 2. El tratamiento entre registros de representación semiótica. Esta unidad de análisis fue la encargada de dar cuenta de la situación de los estudiantes respecto a los diferentes tratamientos de formación dentro de cada uno de los registros escogidos. Cabe anotar que la equivalencia de fracciones, es decir, la pertenencia de dos objetos a la misma clase de equivalencia puede ser visualizada en el tratamiento.

Unidad de análisis 3. La conversión de registros. Esta unidad de análisis fue la encargada de guiar el análisis respecto a las formas como los estudiantes convierten información relacionada a números racionales a los distintos registros de representación semiótica (RRS) utilizados en el estudio.

Unidad de análisis 4. La coordinación entre registros. El objetivo de escoger esta unidad de análisis fue entender como los estudiantes manipulan los objetos en los casos requeridos, se proponen diferentes ejercicios que requieren de una coordinación entre RRS para su solución

Unidad de análisis 5. La apropiación del concepto de número racional positivo. Esta unidad se encargó de verificar el nivel en que los estudiantes identifican, transforman, y objetivan la equivalencia entre fracciones. Se debe entender que, al decir equivalencia entre fracciones, el investigador hace referencia al concepto de relación de equivalencia que hace posible la construcción del conjunto de los números racionales positivos.

Caracterización de los registros de representación semiótica

Se utilizaron tres tipologías de registros de representación semiótica.

Geométrica. Esta incluye principalmente dos registros de representación: los rectángulos y los círculos. Dentro de esta tipología, la partición de la unidad en los rectángulos se realiza de dos maneras: Una denominada *estándar*, en la cual las divisiones sobre las figuras son horizontales o verticales y una *no estándar*, en la cual la división de la unidad se realiza haciendo líneas diagonales dentro de la figura, por lo cual no es inmediato determinar la igualdad de las partes.



Imagen 1. Representaciones rectangulares estándares y no estándares de la fracción $\frac{1}{4}$

Numérica. Este tipo de registro incluyó las expresiones del número como fracción en la forma estándar, es decir, escrita de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números naturales y b diferente de cero. Sin embargo, salvo en el momento 1, se utilizarán únicamente fracciones propias, es decir, fracciones en las cuales el numerador es menor que el denominador. Además de la forma de fracción, se incluyeron la forma decimal, mencionada en la teoría del capítulo anterior en los términos de fracción como cociente. Recordemos que esta forma es el resultado de la división del numerador entre el denominador y se utilizó específicamente como uno de los procedimientos para verificar la equivalencia entre fracciones.

Lenguaje natural. Se utilizaron formas de decir propias de las fracciones, como por ejemplo un medio, tres quintos, entre otros. Además, se hizo uso de esta tipología para proponer situaciones contextualizadas que implicaran la creación y resolución de problemas que relacionaran cantidades en un contexto y fracciones.

Las actividades propuestas estuvieron siempre encaminadas a movilizar las diferentes unidades de análisis. Estas incluyeron actividades de representación de un número en diferentes registros, encontrar expresiones de fraccionaras equivalentes tanto gráfica como numéricamente, planteamiento y resolución de problemas en el contexto de medida.

Caracterización de la población

El estudio se realizó a partir de la participación de un conjunto de treinta y seis estudiantes de los dos grados octavo de la jornada de la tarde de la institución educativa Magdalena Ortega del Municipio de La Unión en el Valle del Cauca. Los estudiantes están en edades entre los trece y los dieciséis años. Los estudiantes están separados en dos grupos de veintitrés y trece personas respectivamente para un total de treinta y seis alumnos. A pesar de que el diseño se trabajó con todos los estudiantes del grupo, se tuvieron en cuenta únicamente aquellos que asistieron de forma regular a las clases en la institución, ya que una de las dificultades observadas en la institución es la inasistencia de estudiantes a la jornada escolar.

Momentos del estudio de caso

A continuación, se describirán las actividades desarrolladas durante cada uno de los tres momentos que se llevaron a cabo en el estudio de caso y se analizarán los resultados obtenidos en las actividades que fueron desarrolladas por los estudiantes, incluidas como anexos al final del presente documento.

Como se mencionó anteriormente, se desarrollaron tres momentos: un primer momento dedicado al reconocimiento de saberes previos que los estudiantes tenían frente al concepto de fracción impropia, el cual tuvo dos actividades diagnósticas. Un segundo momento, en el cual se describirán las diferentes actividades realizadas en el aula de clase en las cuales se realizaron explicaciones en torno al tema y se llevaron a cabo actividades prácticas que permitieran al estudiante avanzar en su elaboración conceptual.

Finalmente, se presentará el análisis de la actividad salida. Un cuestionario elaborado con la intención de evaluar los cambios en las formas como los estudiantes utilizan los diferentes registros de representación para resolver diferentes problemas relacionados con las fracciones impropias.

Actividades de saberes previos

Momento 1.

En esta parte del análisis, Momento 1, se reconocen los saberes previos que tienen los estudiantes respecto a las fracciones propias, elaborado por ellos en los anteriores años de escolaridad. Para ello se propusieron dos preguntas. La primera, denominada *Actividad de saberes previos 1ª parte*

(ASPI), buscaba reconocer las formas en las cuales los estudiantes representaban de forma gráfica diferentes fracciones e indagaba sobre los problemas que ellos percibían respecto a la actividad de representar. La segunda, denominada *Actividad de saberes previos 2ª parte (ASP II)*, tenía como objetivo reconocer los saberes previos de los estudiantes respecto a la noción de equivalencia entre fracciones propias.

Análisis de actividad de saberes previos 1ª parte ASP I

Como se mencionó anteriormente se utilizaron registros de representación semiótica que son comunes en la literatura educativa. Las figuras geométricas, en particular los cuadrados, rectángulos y círculos. Las formas numéricas, en forma de fracción y de decimal, y el uso del lenguaje natural, que incluye formas de decir propias de la matemática escolar y el lenguaje cotidiano.

Noción de la unidad: fracción como relación parte - todo

Esta actividad, (ASP I, página 71), cuya intención era reconocer los conocimientos que tenían los estudiantes respecto a los diferentes registros de representación en el concepto de fracción propia, sus saberes previos. Como se mencionó, la actividad tuvo dos preguntas: Representar de dos maneras diferentes un conjunto de fracciones $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right\}$ y, comentar las dificultades encontradas en el proceso. La intención de solicitar dos formas era justamente considerar otro registro aparte del círculo o el rectángulo.

Respecto a la primera pregunta (ASP I, 1), se observaron dos grandes categorías de respuesta. Una en la cual los estudiantes que hacen uso de formas irregulares, 11 de 36 estudiantes, y los que hacen uso de figuras regulares (figuras geométricas) para representar, 25 de 36 estudiantes. Ver Imagen 2.

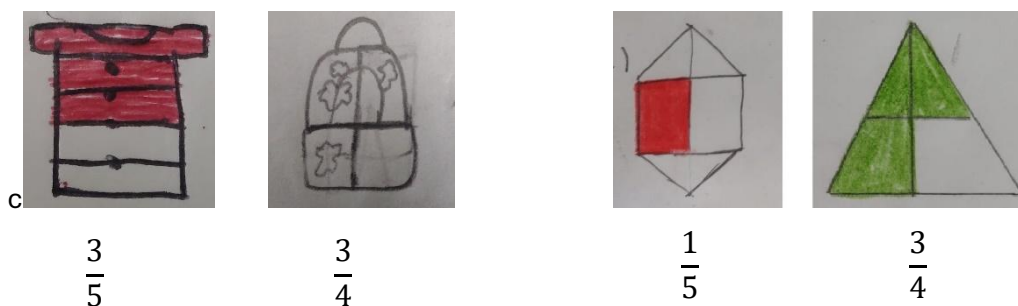


Imagen 2. Representaciones irregulares y regulares de fracciones

Dentro del primer grupo se puede observar que los estudiantes están desconociendo un elemento fundamental en una fracción en la *relación parte todo*, que la unidad debe ser dividida en partes iguales. En este caso es implícito que la unidad que va a ser fraccionada es el área de la figura dibujada y que al ser esta irregular, se dificulta la partición ya que de entrada es complicado calcular o estimar el área total y desde allí realizar una partición correcta hace que la tarea no sea exitosa. Así pues, quienes utilizan estas formas muestran que para representar una fracción lo importante es dividir de acuerdo con el denominador y colorear tantas partes como dice el numerador, pero no es necesario que todas las partes sean iguales.

Por otro lado, en los trabajos de los estudiantes que usaron figuras geométricas, 25 de 36 estudiantes, se observaron las siguientes situaciones: Quienes usaron rectángulos tienen en cuenta en su mayoría la división en partes iguales, es decir, hacen un uso adecuado de la figura para representar, aunque el nivel de precisión está supeditado a cada estudiante, debido a que algunos no utilizan la regla para dibujar y otros, a pesar de usarla no tienen en cuenta las unidades de medida, haciendo particiones basados en la estimación visual.

Los que utilizaron triángulos tuvieron los problemas de aquellos que usaron figuras irregulares, esto es, no tuvieron en cuenta el área superficial de la figura y por consiguiente se hacen particiones desiguales.

Quienes usaron círculos se separan en dos, cuando el denominador era par, la partición fue más adecuada que en el caso en el que este era impar. Lo observado fue que en el caso de denominador cinco, en su mayoría dividieron la figura en cuatro partes iguales y posteriormente, dividieron uno de los cuartos a la mitad. Esto les facilitó la partición, pero ya no se cumple la igualdad de las partes.

Respecto a la segunda pregunta (ASP I, 2, página 72), de los 36 estudiantes del estudio se observó lo siguiente: 23 no respondieron, 7 afirmaron no haber tenido dificultades, lo cual es un indicador de la certeza que tienen los estudiantes al utilizar los registros propuestos por ellos, 2 expresaron que no les había quedado claro el ejercicio, 2 dijeron que se les dificultaba pensar en una segunda forma para representar cada fracción y 2 afirmaron haber tenido dificultades al dibujar, Al respecto escribieron: “*se nos dificultó porque cuando vamos a hacer los cortes a veces nos daba más*”, evidenciando ellos mismos la dificultad en la partición de la unidad. Esto último da cuenta en estos estudiantes el reconocimiento de las reglas de formación de registros en forma geométrica y su la capacidad de expresar esto como una dificultad en sí misma.

Análisis de actividad de saberes previos 2ª parte ASP II

A continuación, revisaremos la actividad denominada *Actividad de saberes previos 2ª Parte (ASP II, página 72)*. Esta actividad está discriminada en cuatro ejercicios. El primero de ellos (*ASP II, 1*) indaga sobre la relación de equivalencia desde el análisis de cuatro registros de representación semióticos. Dos circulares, uno rectangular y uno numérico en forma de decimal. De los treinta y seis estudiantes que resolvieron este ejercicio, veinticuatro afirmaron que ninguna de las opciones propuestas es equivalente a la fracción $\frac{1}{2}$, lo cual es falso ya que tres de las cuatro opciones dadas si lo son. Esto deja ver que estos estudiantes no tienen claridad frente al concepto de equivalencia de fracciones o no están familiarizados con problemas de conversión entre los registros de representación. De los doce restantes, solamente un estudiante identificó las tres respuestas posibles, dos escogieron dos de las tres respuestas posibles y los otros seis seleccionaron la respuesta correcta en forma decimal. En principio, esto podría ser visto como un primer indicio de sentido de la postura de Duval frente la relación entre coordinación y aprendizaje, ya que para los estudiantes los estudiantes que no coordinan los diferentes registros propuestos se evidencian que el concepto de equivalencia de fracciones no lo tienen desarrollado. Mas adelante en esta investigación seguiremos explorando esta relación.

El segundo ejercicio (*ASP II, 2, página 72*) indaga sobre la relación de equivalencia a través de formas geométricas rectangulares. En este se presentan dos pares de figuras que entre ellas representan la misma fracción. Al respecto, los resultados fueron contradictorios. En el primer caso, *ASP II, 2a*. El 86% de los estudiantes no encuentra equivalencia entre el par de figuras. Una explicación para el primer caso podría tener dos razones, por un lado, las figuras están divididas de formas diferentes y además son de tamaños diferentes, por lo cual realmente se requiere tener una coordinación de registros para el reconocimiento de la equivalencia de las fracciones, que como se observa en la imagen 3. Esto no es evidente para la mayoría de los alumnos.

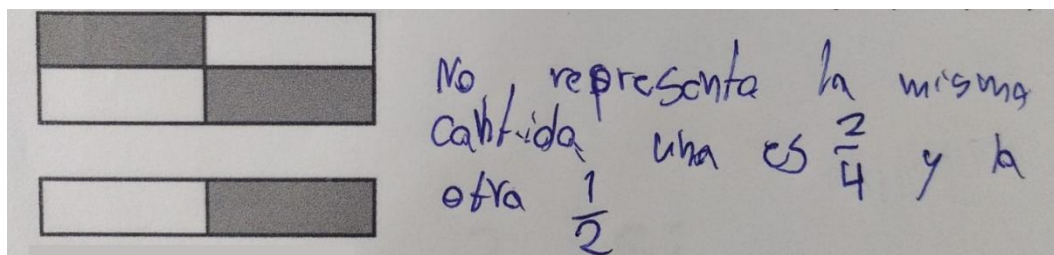


Imagen 3. Equivalencia de fracciones en saberes previos

De otro modo, los resultados del ejercicio 2b, (*ASP II, 2b*, página 72) fueron opuestos al anterior ya que el 91% afirmaron que el par de fracciones eran correctas, lo cual era correcto. Uno de los estudiantes que se equivocó en la respuesta escribió: “*a mí me parece que no porque no es lo mismo*”. Esto se podría explicar en el hecho de que ambas figuras tienen las mismas divisiones interiores y las mismas partes coloreadas, solo cambia la disposición de las divisiones.

El *Ejercicio 3*, (*ASP II, 3*, página 72) se abordan las formas numéricas en las cuales se presentaron tres pares de fracciones, dos equivalentes y una no equivalente. Para determinar la equivalencia de fracciones se pueden seguir alguno de los procedimientos que mencionaremos en este capítulo; amplificando, simplificando o multiplicando o dividiendo. Estos podrían funcionar como explicaciones para justificar la equivalencia o no de las fracciones, aunque esto no fue visto al momento de realizar esta prueba. Analizamos las respuestas de este ejercicio en cuatro categorías, los que respondieron y justificaron de forma adecuada, los que resolvieron y justificaron de forma inadecuada, los que resolvieron de forma inadecuada y justificaron, los que no resolvieron y los que resolvieron y no justificaron.

En cuanto a la primera parte del ejercicio (*ASP II, 3a*, página 72), en el cual las fracciones son equivalentes, el 11% no resuelve el ejercicio, el 25% contesta de forma equivocada, y el resto lo hacen de forma correcta. En cambio, respecto a los resultados para la segunda parte, (*ASP II, 3b*, página 72), en el cual las fracciones también eran equivalentes, el 11% no contesta, 61% lo hace de forma equivocada, y el resto lo hacen de forma correcta. En cuanto al último ejercicio (*ASP II, 3c*, página 72), en el cual las fracciones no son equivalentes, el 11% no contesta, 19.4% contesta de forma equivocada, y 69.6% lo resuelven de forma correcta.

Estos resultados muestran dos puntos interesantes. Por un lado, que en los dos primeros casos existe un alto porcentaje de error, lo cual es consistente con los ejercicios anteriores, pero ahora desde un registro de representación numérico. No obstante, la situación en el caso de no equivalencia es diferente, la mayoría de las respuestas son correctas. A través de los ejercicios se pudo observar que, si bien para la mayoría no fue exitosa la tarea de determinar y justificar la equivalencia, si lo fue el hecho de determinar la no equivalencia, incluso sin estar en la capacidad para ofrecer una justificación a través de medios matemáticos. Algunas justificaciones de respuesta en este ejercicio fueron: “No, porque al hacer la operación no da el mismo resultado”, haciendo referencia a los cocientes entre el numerador y el denominador; “*no representan ser los mismos ni*

la mitad del otro”; “no son equivalentes porque las fracciones son pares”; “no es pero no sé cómo explicarlo”

El cuarto ejercicio (ASP II, 4, página 72) tuvo dos propósitos. Analizar la equivalencia en una aplicación en un problema que utiliza el lenguaje natural y las maneras que los estudiantes utilizan para resolver y explicar las formas de resolver. El problema decía: *Sara ha gastado la mitad de su dinero en unas papitas y una gaseosa. Si ambas cosas le costaron \$3,500. ¿Cuánto le habían dado?* En cuanto a las soluciones observadas se puede decir que veintitrés de los treinta y seis de los estudiantes resolvieron el problema de forma correcta, aunque solo seis de ellos explicaron el procedimiento que realizaron y en ningún caso utilizaron números fraccionarios en la resolución. Solamente multiplicaron 3500 por dos; Por otro lado, del grupo que resolvió el problema de forma incorrecta, nueve de treinta y seis, cometieron el error de interpretar en el texto la palabra *ambos*, que sumaba los precios de los productos de compra. Ver imagen 4

$$\begin{array}{r} 3500 \\ 3500+ \\ \hline 7000 \end{array} \quad 7000 \cdot 2 = 14000$$

R/ le dieron 14.000

Imagen 4. Ejemplo de solución incorrecta ejercicio 4

Este, como se ve es un error de interpretación en la lectura que incide , aunque no en establecer una relación entre una fracción y un valor, lo que en la teoría fue referenciado a la fracción como operador, que establece de forma implícita una relación de equivalencia. En este caso, al igual que en el caso de los que obtuvieron una respuesta acertada, fue a través de la manipulación de números naturales, sin usar de forma explícita las fracciones y la equivalencia subyacente. Esto deja ver el nivel de complejidad adicional que existe al utilizar el lenguaje natural como registro de representación debido a las diversas interpretaciones que se pueden tener, unas por causa de la estructura matemática del problema y otras por cuenta de la estructura del lenguaje y el desarrollo de habilidades en éste por parte de los estudiantes. Finalmente, cuatro estudiantes no resuelven el problema.

De toda la actividad se puede concluir entonces que, en efecto, hay dificultades en el entendimiento del concepto de equivalencia de fracciones por parte de los estudiantes y que pese a haber ofrecido diferentes registros de representación semiótica, los recursos de los cuales

disponían los alumnos eran insuficientes para coordinarlos y ponerlos a su servicio para resolver los diferentes problemas presentados. Además, las formas como los estudiantes argumentan sus respuestas, están alejadas de un proceso que siga unas reglas formales, las cuales, en este momento, están en desarrollo. Se observa circularidad en la argumentación en frases como “*son equivalentes porque son iguales*”. No obstante, pese a la dificultad en el concepto de equivalencias de fracciones, los estudiantes están en capacidad de resolver problemas relacionados con la vida cotidiana en los cuales interviene la fracción un medio. Sin embargo, se observa que al usar el lenguaje natural, este aspecto agrega al desarrollo de la competencia matemática, las dificultades propias del aprendizaje del lenguaje.

Actividades de clase relacionadas con los registros de representación semiótica. Sesiones de apoyo y actividades prácticas.

Momento 2.

Una vez realizadas las actividades de reconocimiento de saberes previos y teniendo en cuenta los resultados ya mencionados se trabajó en diferentes sesiones de clases y actividades, en la interpretación de la equivalencia desde los puntos de vista numérico y gráfico. Se realizaron explicaciones en sesiones de clase, se resolvieron dudas y se hicieron prácticas de trabajo en grupo para apropiar estos conocimientos. Con el ánimo de contextualizar los análisis a las actividades de cierre, se mostrarán los procedimientos trabajados con los estudiantes.

Establecimiento de reglas de formación

Con base en las actividades iniciales, de los saberes previos, se implementó una sesión de clases dedicada a la especificación de reglas de formación de registros. Estas quedaron consignadas, con el fin de ser utilizadas en lo sucesivo. Si bien los estudiantes no participaron de manera activa en la enunciación de reglas, en los momentos de indagación, estuvieron de acuerdo en las que fueron establecidas. Una de las dificultades recurrentes en la clase de matemática es la falta de participación de los estudiantes en actividades que les implique proponer nuevos ejercicios o expresar sus opiniones o puntos de vista, al igual que argumentar sus respuestas.

Por lo anterior y en aras de lograr el objetivo en un tiempo aceptable se establecieron los siguientes conjuntos de reglas. Para las formas geométricas, se divide el análisis en fracciones propias e impropias. En el caso de las fracciones propias se establecen tres criterios. i. La totalidad es la figura completa. ii. La figura debe ser dividida en partes iguales, tantas como el denominador

de la fracción que representa y iii. Se seleccionan (con un color o rellenando) tantas partes como el numerador lo indique. Además, para la forma numérica de fracción quedó establecido: i. El denominador representa el número de partes en las cuales se divide la totalidad o unidad. ii. El numerador representa las partes seleccionadas de la unidad fraccionada. Para el lenguaje solo se sugirieron dos normas. i. Establecer cuál es la totalidad en el texto. ii. Cuál es la parte de la unidad.

En adelante, las formas geométricas a utilizar serán únicamente el rectángulo y el círculo. Respecto al círculo, hay una característica técnica de construcción que hace que se requieran tanto instrumentos de medición, como habilidades y conocimientos técnicos de procedimientos geométricos. Por ejemplo, para representar la fracción tres quintos a través de esta forma, se deberá saber que la circunferencia tiene 360° , y para fraccionar en cinco partes iguales se deberán hacer segmentos que lo dividan en ángulos con apertura de 72° cada uno. Así se requeriría de un transportador, una regla y el conocimiento técnico, un saber hacer. Por otro lado, cuando se trabaja la representación numérica es necesario reconocer en el denominador, de forma simultaneas dos aspectos: La unidad o totalidad y el fraccionamiento realizado en esta, que es el número que aparece como denominador de la expresión. En cuanto al lenguaje, como estructura en si misma se hace difícil imponer un par de reglas para representar fracciones, sobre todo cuando va a ser utilizado para resolver problemas escritos en texto.

La imposición de registros tiene como ventaja la posibilidad de control que se tiene sobre la representación, que con un uso adecuado de instrumentos se pueden realizar los ejercicios de tratamiento. Además, son figuras con las cuales los estudiantes están familiarizados, lo cual no genera ejercicios adicionales de interpretación que pueden desviar la atención del aprendiz, aunque como se mencionó, hay una dificultad latente en el círculo y las fracciones con denominador impar. No obstante, limitar los recursos gráficos podría eliminar la posibilidad de asociar mediante una representación gráfica una situación problema, punto fundamental para las aplicaciones de la matemática.

Equivalencia de fracciones

Para comparar si dos fracciones son equivalentes se puede acudir a la definición, en este caso se dice que dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, son equivalentes si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$, así, por ejemplo, se puede decir que las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{6}{16}$ son equivalentes ya que, $3 \cdot 16 = 8 \cdot 6 = 48$, mientras que $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{9}$ no lo son porque $2 \cdot 9 \neq 5 \cdot 4$

Ahora bien, dada una fracción cualquiera existen dos procedimientos para encontrar fracciones equivalentes, estos son llamados procedimientos de amplificación y simplificación. El primero se realiza multiplicando tanto el numerador como el denominador por un mismo número diferente de cero. Para simplificar, lo que se debe hacer es dividir por el mismo número tanto el numerador como el denominador, obteniendo resultados exactos. En el caso de que no haya un número que divida a ambas partes, se dice que la fracción está en su mínima expresión.

Demos un par de ejemplos: Amplificando la fracción $\frac{4}{8}$ multiplicando numerador y denominador por dos, obtengo la fracción $\frac{8}{16}$. De otra forma al dividir ambas partes por dos obtendría vía simplificación la expresión $\frac{2}{4}$. Se concluye entonces que las tres fracciones son equivalentes, lo cual se podría justificar acudiendo a la definición mencionada anteriormente.

Otra forma de decidir si dos fracciones son equivalentes es dividiendo el numerador de cada una, entre su denominador, y comparar si las cantidades obtenidas son o no iguales. Si lo son, hay equivalencia entre estas. En el ejemplo anterior se verifica ya que al dividir cada numerador entre cada denominador la cantidad resultante en cada caso es 0.5, es la misma para cada fracción.

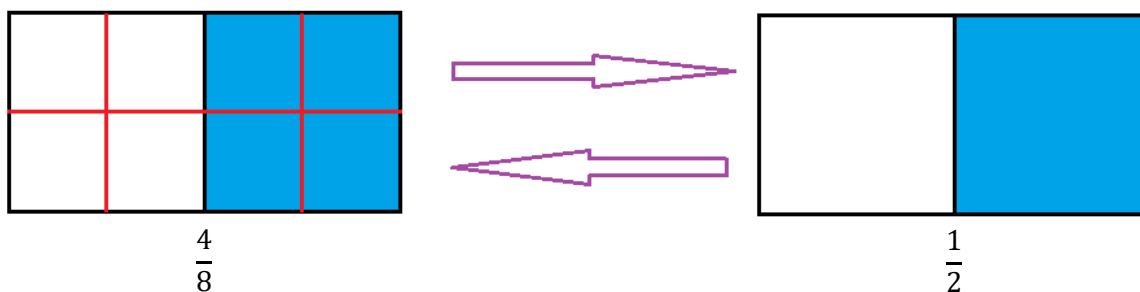


Imagen 5. Simplificar – Amplificar desde la gráfica

Una forma gráfica (*Imagen 5*) para convertir $\frac{4}{8}$ a $\frac{1}{2}$ se deben quitar subdivisiones a la fracción $\frac{4}{8}$, para obtener la fracción $\frac{1}{2}$, en la imagen 5 sería eliminar las subdivisiones en rojo de la izquierda, ocho subdivisiones de la unidad, para obtener la imagen de la derecha, dos subdivisiones de la unidad, lo cual sería numéricamente equivalente a simplificar la fracción $\frac{4}{8}$ por cuatro para obtener la fracción $\frac{1}{2}$.

En caso contrario, es decir, convertir la fracción $\frac{1}{2}$ a la fracción $\frac{4}{8}$ se deberán agregar subdivisiones de la unidad, lo cual en la imagen sería: tomar la parte de la derecha y agregar las líneas rojas para aumentar el número de subdivisiones y obtener la imagen de la izquierda, esto sería equivalente a amplificar $\frac{1}{2}$ por cuatro.

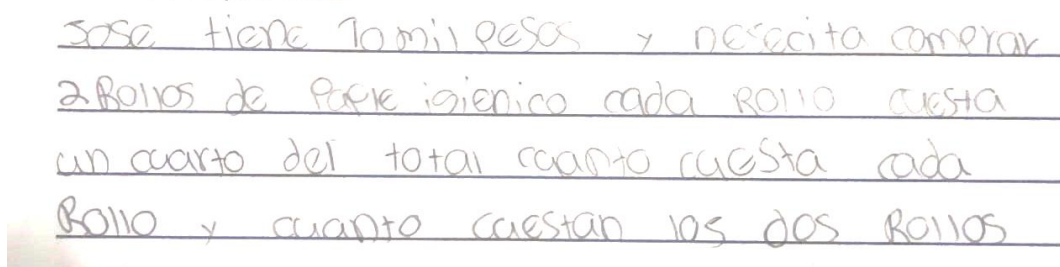
Además de las sesiones de explicación de los procedimientos anteriores, se realizó una práctica de proposición y resolución de problemas que involucran fracciones. Para ello se propuso a los estudiantes durante las explicaciones, un procedimiento gráfico mediante el cual se relacionaron los registros gráficos y de lenguaje natural como estrategia para entender y solucionar los problemas. Las observaciones respecto a esta práctica se abordarán a continuación.

Análisis de actividad 3. Elaboración de situaciones problema.

La actividad denominada *Actividad 3. Elaboración de situaciones problema* (AESP, página 73), retoma el tema del planteamiento de problemas en los que intervienen las fracciones. Esta actividad fue realizada por los estudiantes, quienes hicieron grupos de trabajo para resolverla. Para resolverla, los estudiantes debían seleccionar uno de los siguientes objetos: la cantidad de dinero diez mil pesos; un frasco de perfume de cien mililitros; un kilogramo de carne de hamburguesa o una gaseosa de un litro. Una vez seleccionado uno de los objetos, debían redactar un problema que relacionara el objeto seleccionado y una fracción. Además, debían representar gráficamente la fracción escogida e indicar el porqué de la elección de la fracción. Finalmente, debían representar gráficamente los datos del problema, haciendo uso de un registro geométrico.

A continuación, se describirán las soluciones dadas por los estudiantes en esta actividad. En cuanto al único grupo que seleccionó la cantidad de dinero, se observó que la redacción del problema fue clara y en efecto relacionaron en el problema la fracción un cuarto, la cual escogieron debido a que “*cada rollo cuesta un cuarto de \$ 10,000*”. Gráficamente representaron en un diagrama circular y en un rectángulo la fracción un cuarto, aunque no relacionaron el dinero y la fracción utilizada a través de una forma gráfica. *Ver imagen 6*

2. Situación problema.



Jose tiene 10 mil pesos y necesita comprar
2 Rollos de Papel higienico cada Rollo cuesta
un cuarto del total cuanto cuesta cada
Rollo y cuanto cuestan los dos Rollos

Imagen 6. Planteamiento de problemas

Texto de la imagen 6: Jose tiene 10 mil pesos y necesita comprar 2 rollos de papel higiénico. Cada rollo cuesta un cuarto del total. ¿Cuánto cuesta cada rollo? y ¿cuanto cuestan los dos rollos?

Respecto a los grupos que eligieron el perfume, se observó una situación similar en ambos casos. Ambos grupos enunciaron un ejercicio de división de la unidad que es en este caso el perfume, aunque no fue explícito en el texto la fracción que utilizarían. Mientras que uno de los grupos relacionó el gasto de perfume por cada diez días, el otro fraccionó a partir de una repartición de la unidad entre veinte personas. Los enunciados respectivamente: “Un perfume de 100ml me lo gasto en 30 días. ¿Cuánto perfume me gasto en 10 días?; “Si Andresito quiere compartir su tarro de perfume de 100ml entre sus 20 amigos. ¿Cuántos mililitros le tiene que dar a cada uno de sus amigos?

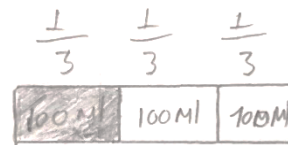
Ambos planteamientos fueron registrados a través de un rectángulo con las siguientes diferencias. Uno de los grupos relacionó simultáneamente el mismo objeto, tanto la partición en fracción del tiempo en intervalos de diez días, como la cantidad de perfume usado en cada intervalo de tiempo. Aunque la cantidad de perfume representada en la gráfica no coincide con la solución del problema, los estudiantes de este grupo coordinaron los dos registros para avanzar en la resolución del problema. Similarmente el otro grupo hizo una relación de las cantidades y las relacionó en el mismo registro, aunque hizo una modificación en la interpretación de la información, resolvieron el problema, matemáticamente, a través de operaciones.

En estos dos problemas se observa una dificultad en la coordinación de tres elementos, el registro del lenguaje natural, el numérico y el geométrico. Esto se puede observar en la *imagen 7* en donde la unidad en el lenguaje natural es de 100 mililitros, mientras que en la forma geométrica es de 300 mililitros.

2. Situación problema.

Un Perfume de 100ml me lo gasto en 30 días 3.22 cuanto perfume me gasto en 10 días

Registro en lenguaje natural



Registros geométrico- numérico

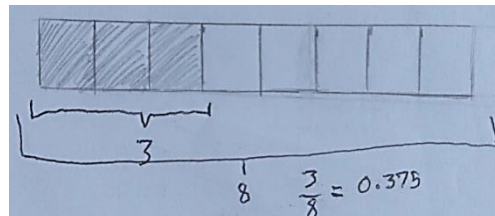
Imagen 7. Planteamiento de problemas. Incoherencia entre registros

Texto de la imagen 7. Un perfume de 100 ml me lo gasto en 30 días 3.22 Cuanto perfume gasto en 10 días

Los grupos que escogieron la carne de hamburguesa relacionaron de forma correcta la información del contexto y la fracción, la redacción de los problemas fue clara y el problema establecido tenía toda la información para ser resuelto. En cuanto a las representaciones geométricas la información relacionada fue parcial. Ambos grupos utilizaron un rectángulo como unidad, la diferencia fue que mientras que un grupo caracterizó en la figura la cantidad de gramos por porción de hamburguesa, no hizo explícita la fracción. El otro grupo en cambio relacionó en la gráfica la fracción de la carne consumida, tres octavos, pero no tuvo en cuenta la cantidad en gramos de esta equivalencia. No obstante, resolvió el problema realizando procedimientos aritméticos.

si una persona come $\frac{3}{8}$ de la hamburguesa ¿cuántos gramos habra Consumido?

Registro en lenguaje natural



Registros geométrico- numérico

Imagen 8. Planteamiento de problemas. Coherencia entre registros

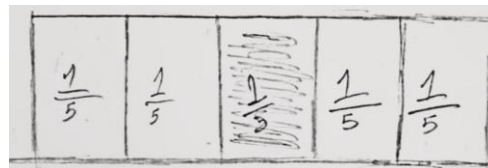
Texto de la imagen 8. Si una persona come $\frac{3}{8}$ de la hamburguesa ¿cuántos gramos habrá consumido?

Finalmente, los grupos que escogieron la bebida, se pudo observar lo siguiente: cinco de los problemas tuvieron una redacción clara y acorde con los requisitos solicitados para el planteamiento, en los otros tres no fue claro el planteamiento del problema porque no se realizó una pregunta, sino que se hicieron un par de afirmaciones dentro de las cuales explicaron la repartición del líquido. Tampoco vincularon de forma explícita una fracción en la situación propuesta. Además, el registro geométrico no relaciona la información del contexto del problema sino la fracción implícita con la cual se hace la división del refresco. En las representaciones

geométricas de los cinco problemas bien definidos, se observa información que apoya la gráfica como la cantidad de líquido o la fracción a la que hace referencia el problema.

mis amigos y yo compramos una gaseosa de 1 litro para 5 personas cuanto le tocaria a cada persona

Registro en lenguaje natural



Registros geométrico- numérico

Imagen 9. Planteamiento de problemas. Coherencia entre registros

Texto de la imagen 9. Mis amigos y yo compramos una gaseosa de 1 litro para 5 personas. Cuanto le tocaría a cada persona

En este ejercicio se notó que hay una relación entre la redacción del problema y su representación en otros registros, es decir, la necesidad de la interacción entre diferentes registros de representación semiótica para la construcción de problemas en un contexto de la vida cotidiana. Mas aún, de la necesidad de hacer uso de símbolos para representar una situación problema tomada de una realidad inmediata. Entre más precisa es la redacción de los textos, más información está relacionada en las representaciones gráficas y, al contrario, cuando la información en lenguaje natural es ambigua o imprecisa, las representaciones en otros registros frente al problema son menos nutridas de información. Entonces, desde allí se podrían sugerir dos cosas:

La primera es que la coordinación de registros es una estrategia para mejorar las técnicas de redacción y resolución de problemas en el lenguaje natural. La segunda es que el dominio del lenguaje natural como registro de representación en este tipo de problemas, es el que presenta un mayor grado de dificultad y, por tanto, se requiere de una mayor cantidad de tiempo y de recursos didácticos adicionales para su aprehensión. También se puede observar que los estudiantes sienten más confianza en la elaboración de problemas a partir de un contexto que les es familiar. Como se observó en esta actividad, aunque los estudiantes reconocían los objetos contextuales propuestos, la mayoría escogió el más utilizado en sus rutinas.

Análisis de actividad 4: Relación de equivalencia en las fracciones.

A continuación, se analizarán los puntos de vista y justificaciones frente a las tres propiedades que hacen que una relación sea de equivalencia. Además, se revisará el avance de los estudiantes respecto al procedimiento de amplificación y simplificación de fracciones utilizando diferentes registros de representación, lo que en términos de Duval serían ejercicios de tratamiento y

conversión de registros. Esta información está tomada de las respuestas de los estudiantes en la actividad denominada: *Actividad 4. Relación de equivalencia en las fracciones (AREF, página 74)*.

Como se mostró en el capítulo previo, una relación es de equivalencia si se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Los planteamientos de los estudiantes respecto a la propiedad reflexiva se verifican gráficamente mediante dos figuras geométricas iguales que representan a $\frac{1}{2}$. En la segunda y tercera propiedad se hace una verificación a través de la respuesta y justificación de una pregunta por cada propiedad. **Las preguntas realizadas fueron las siguientes: Si la fracción $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{16}{40}$, ¿es la fracción $\frac{16}{40}$ equivalente a $\frac{2}{5}$? Justifica tu respuesta. Si es equivalente a $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{8}{12}$ y, además, $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{24}{36}$ ¿Son equivalentes $\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$? Justifique su respuesta.**

Propiedad reflexiva. Recordemos que una relación es reflexiva sobre un conjunto si cada elemento está relacionado con él mismo. Respecto a esta propiedad, (AREF, 1), se observó que, si bien los 36 estudiantes respondieron correctamente y justificaron la respuesta, esta fue realizada desde tres puntos de vista diferentes. El 25% de las justificaciones estuvieron basados en las áreas de las figuras, haciendo referencia directa a lo que se observa en las figuras geométricas: el área sombreada, el número de divisiones o las partes sombreadas en cada una. 41.67% de estas en cambio estuvieron basadas en la cantidad, haciendo una inferencia sobre la igualdad de las áreas en ambas figuras. 16.67% hicieron referencia a las cantidades numéricas implícitas en la representación geométrica, mostrando un proceso de transformación entre un registro geométrico y uno numérico. Finalmente, en el 16.66% de las justificaciones solo hay afirmaciones de que las figuras son equivalentes, pero no presentan un argumento como tal. Desde este problema se puede observar diferentes niveles de apropiación conceptual y la habilidad de argumentar teniendo en cuenta reglas, bien sea de tipo gráfico o de tipo numérico.

Propiedad simétrica. Como se dijo, una relación es simétrica sobre un conjunto si se cumple que si un elemento a está relacionado con un elemento b , entonces el elemento b , está relacionado con a . La situación frente al ejercicio relacionado con esta propiedad, (AREF, 2) fue la siguiente: un grupo de estudiantes, 8.33%, no presentan justificaciones a sus afirmaciones, mientras que otro grupo de estudiantes, 27.78%, hace conjeturas refiriéndose a que no es importante el orden en el que se presentan las fracciones, es decir, es lo mismo escribir: “ $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{16}{40}$ ”, que “ $\frac{16}{40}$

es equivalente a $\frac{2}{5}$ ". Al respecto afirman: "si son equivalentes no importa que cambien de lugar".

En estas formas de decir, se observa que aun la habilidad de los estudiantes para reconocer esta estructura lógica que se presenta para dar una definición aun es insuficiente. Un último grupo, 63.89%, mediante el uso de los recursos analíticos presentados previamente, ofrece argumentos que son suficientes para decidir que la afirmación está bien justificada.

Propiedad transitiva. Se dijo que una relación es transitiva si se cumple que un elemento está relacionado con otro, y este último con un tercero, entonces el primer elemento está relacionado con el tercero. Lo observado en relación con la propiedad transitiva, (AREF, 4), la cual no había sido enunciada anteriormente en el curso, debido a la complejidad de su estructura, se observó algo similar a las otras dos propiedades, aunque en diferente proporción. Para esta propiedad, el porcentaje de estudiantes que no justifica es de 22.22%. Un grupo de estudiantes, 61.11%, ofrece argumentos que, si bien aportan parcialmente a la justificación, están incorrectos, ya que amplifican la primera fracción para obtener la tercera, pero no tienen en cuenta las relaciones que hay entre la primera y la segunda y la segunda y la tercera fracción, es decir, no tienen en cuenta la estructura lógica que soporta la propiedad en sí misma. Ver imagen 10.

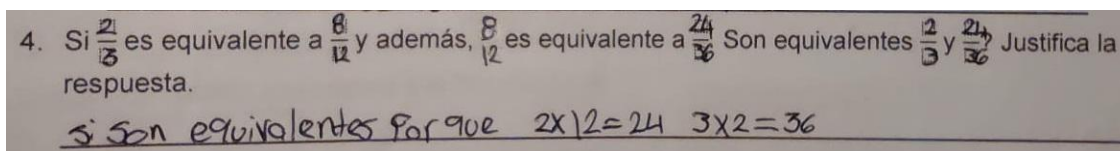


Imagen 10. Justificación incorrecta de una equivalencia de fracciones

Finalmente, un pequeño grupo de estudiantes, el 16.67%, logra justificar de forma adecuada, relacionando las tres fracciones con el número decimal que subyace a las tres fracciones o revisando por pares la equivalencia con el criterio de la definición de equivalencia. Ver imagen 11.

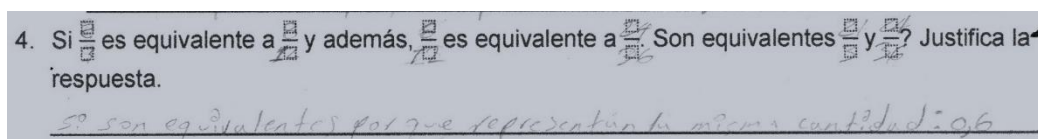


Imagen 11. Justificación de una equivalencia de fracciones

Texto de imagen 11: Si son iguales porque representan la misma cantidad: 0,6.

A partir de las observaciones anteriores se observa que en la medida en que se incrementa la complejidad en la estructura lógica de una proposición, aunque el objeto subyacente del cual se está tratando sea conocido, se esté en posesión de diferentes registros de representación que faciliten el reconocimiento de la afirmación y se tengan diferentes recursos de tratamiento que

permitan la verificación y comprensión de procedimientos, no hay una garantía de éxito para realizar una argumentación que la justifique.

Por lo anterior, surge la duda respecto a cuál es el nivel de coordinación de registros, en el sentido de Duval, que debería tener un estudiante para desarrollar su capacidad de razonamiento lógico y la justificación de procedimientos, componente fundamental del pensamiento matemático.

En esta actividad se propusieron, además, tres problemas de conversión de registros de representación. El primero, (*AREF*, 3, *página 74*), consistía en comparar si tres pares de fracciones, presentadas en registro geométrico eran equivalentes entre sí. En el segundo, (*AREF*, 5, *página 74*) se debía dibujar una fracción equivalente a una dada, expresada en forma numérica. En el último, (*AREF*, 6, *página 74*), se debía escribir en forma numérica una fracción equivalente dada en forma geométrica. Todo encaminado a coordinar dos registros de representación realizando, simultáneamente, tratamiento y conversión y, además, revisar la reversibilidad del pensamiento de los estudiantes, debido a que debían moverse de registro geométrico a registro numérico y viceversa.

Los resultados que se observaron fueron los siguientes: Con respecto al primer ejercicio, el 33.33% de los estudiantes resolvieron el ejercicio correctamente, es decir, afirmaron que los tres pares de fracciones eran equivalentes; 16.67% afirmó que dos eran equivalentes, pero una de ellas no lo era y el resto, 50%, decidieron que solamente había un par de fracciones equivalentes. En el segundo ejercicio 11.11% no lo resolvió, 66.67% en cambio dibujó las dos equivalencias solicitadas, y el 22.22% restante dibujó correctamente una de las equivalencias y se equivocó en la otra. En el último ejercicio, las fracciones propuestas eran $\frac{9}{27}$ y $\frac{2}{5}$. En este se observó que el 47.22% de los estudiantes escribieron las mismas fracciones, es decir, no construyeron equivalencias; 11.11% escribió una la fracción $\frac{1}{3}$, equivalente a $\frac{9}{27}$, aunque no escribió una equivalencia para la fracción $\frac{1}{5}$. El restante 41,67% escribió otras fracciones que no eran equivalentes a las dadas, como por ejemplo $\frac{18}{27}$ y $\frac{9}{18}$.

Lo anterior muestra que para los estudiantes decidir una equivalencia de fracciones es aún una tarea con un alto nivel de exigencia, dado que deben comparar dos registros bien sea numérico o geométrico y a continuación decidir. En cuanto al tratamiento entre registros, amplificar o simplificar, y conversión, de registro numérico a geométrico y viceversa, también se observa en las respuestas dadas que aún los estudiantes no lo tienen totalmente apropiado.

La exigencia en la tarea de realizar tratamientos en registros geométricos mentalmente, que implica el uso de la imagen para visualizar en el mismo gráfico dos formas equivalentes, cambiando las particiones de la unidad sin hacer modificaciones a los registros de representación de forma física, es considerablemente más alta que cuando se puede acceder a realizar tratamientos aritméticos para amplificar o simplificar fracciones. En este sentido, se puede afirmar que los registros son herramientas de pensamiento y visualización con las que contamos, que nos permiten suplir la falta de capacidad para imaginar la situación sin acceder a recursos físicos.

Por otro lado, elaborar procesos que impliquen convertir de un registro numérico a uno geométrico aparece como una tarea compleja, incluso se ve que es más exigente que hacer la conversión inversa, de un registro geométrico a uno numérico. Esto indica que no hay una reversibilidad de pensamiento desde estos dos registros de representación semiótica, devolverse del pensamiento geométrico al numérico es más complejo que ir del pensamiento numérico al geométrico. Este tema es un tema muy importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las representaciones semióticas, pero desborda el objetivo de este proyecto de investigación; sin duda se convierte en una investigación a realizar posteriormente.

Evaluación de las representaciones por parte de los estudiantes después de las actividades preparatorias.

Análisis de Actividad 5. Aplicación y solución de TEST.

Momento 3.

Este momento de la investigación se centra en la aplicación de un cuestionario el cual se orienta a examinar el desempeño de los estudiantes con relación a diferentes representaciones de las fracciones propias, aplicado a los 36 estudiantes con los cuales se realizó el estudio, por lo cual la comparación porcentual será respecto a esta.

Este cuestionario, denominado: ***Evaluación de las representaciones por parte de los estudiantes después de las actividades preparatorias TEST***, el cual consta de 16 ejercicios y se aplicó una vez terminadas las actividades descritas previamente en los momentos uno y dos. En lo sucesivo haremos referencia al cuestionario, como TEST. Además, analizaremos los resultados de las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta las características que se observaron.

Noción de equivalencia de fracciones: uso de registros geométricos. (TEST, 1, página 75)

En este, se debía indicar si las figuras representaban o no determinadas fracciones y explicar por qué. Este tenía dos partes, cada una con múltiples respuestas correctas: la primera de ellos era la fracción $\frac{2}{3}$, dada numéricamente y tres formas gráficas de las cuales dos eran equivalentes. Una que se llamó forma estándar, (ver imagen 1 en la página 33), otra modificada para representar una cantidad equivalente, $\frac{4}{6}$, y la siguiente con un error en la división en partes ya que se dividió en partes desiguales.

En la segunda parte del ejercicio, se utilizó la fracción $\frac{3}{4}$. Dentro de las opciones había un registro geométrico no estándar, es decir, se dividió a partir de líneas diagonales en lugar de verticales u horizontales como es lo usual, (ver imagen 1 en la página 33). El objetivo con esta segunda parte era presentar situaciones que son disruptivas en cuanto a las formas vistas en clase para indagar respecto a la capacidad del estudiante de utilizar las reglas de formación y equivalencia aun en situaciones poco usuales.

En la primera parte del ejercicio, se observó que cuando se trataba de la forma estándar de la figura, 33 estudiantes acertaron, mientras que la forma amplificada $\frac{4}{6}$ fue escogida como equivalente solo por 16 de ellos y cuando hubo que decidir la no equivalente, 20 la reconocieron como tal. En el segundo ejercicio, se observó que en la forma estándar solamente dos estudiantes se equivocaron, mientras que en la figura no estándar, (Ver imagen 1, página 33), 8 fallaron.

Este ejercicio nos muestra que después de las sesiones de entrenamiento, aunque los estudiantes pueden reconocer figuras equivalentes a fracciones siempre que estas estén relacionadas de forma directa, es decir, que el denominador refleje directamente en la figura el número de divisiones que esta presenta, aún se les dificulta reconocer una forma geométrica que sea equivalente, lo cual indica el nivel de dificultad del tratamiento entre registros geométricos necesario para el reconocimiento de equivalencia entre fracciones en este tipo de registros.

Conversión y tratamiento de registros. (TEST, 2 y 8, páginas 75 y 77)

En principio Duval resalto la importancia de la conversión de registros de representación, por lo cual ese fue uno de los puntos de inicio del trabajo de investigación en el aula. En actividades analizadas anteriormente se relacionaron errores respecto al uso de instrumentos técnicos y errores en la interpretación.

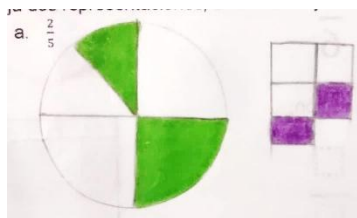
Para examinar los cambios en este aspecto, se realizó el ejercicio (*TEST*, 8, página 77), en el cual se debían diligenciar diferentes registros a partir del que estaba disponible. Por ejemplo, una de las casillas de la tabla tenía un círculo dividido en nueve partes y de estas 4 estaban coloreadas. Se debía entonces diligenciar el registro cuatro novenos en forma de fracción, en palabras y en un rectángulo. Los resultados observados fueron los siguientes:

Todos, salvo un estudiante, diligenciaron la tabla sin presentar más inconvenientes que los propios de la falta de instrumentos para hacer las gráficas y algunos errores de ortografía en el lenguaje natural. Algunos errores consistieron en escribir las fracciones en lenguaje natural, escribiendo el denominador primero, por ejemplo, escribieron *nueve cuartos*, en lugar de cuatro novenos, aunque la gráfica y la forma numérica la representaron bien. Otro error común fue dividir los círculos sin tener en cuenta la división en partes iguales. Además, dos graficaron la fracción tres octavos haciendo uso de dos círculos divididos en cuatro partes iguales. En este caso se puede pensar que los estudiantes aún no han construido una representación gráfica apropiada de una fracción.

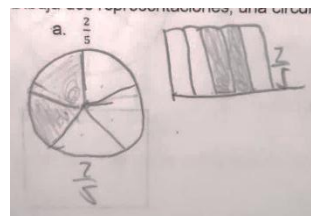
Además del ejercicio anterior se propuso el ejercicio 2 (*TEST*, 2, página 75), en el cual se debían representar las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{6}$, en dos diferentes registros geométricos. El círculo y otra cualquiera. En este ejercicio se buscaba, específicamente, reconocer cómo los estudiantes realizaban la partición de la unidad en la forma circular además reconocer que otra forma geométrica utilizaban para representarlas.

Lo observado fue lo siguiente: uno de los 36 no resuelve la actividad, siete estudiantes utilizaron en cada ejercicio un solo registro gráfico. Aunque no completaron la totalidad de la tarea, hicieron de forma correcta las representaciones. En los 28 estudiantes que usaron las dos formas geométricas requeridas se observaron las siguientes particularidades: un estudiante representó la fracción $\frac{5}{2}$ en lugar de $\frac{2}{5}$, lo cual es un error conceptual; un grupo de cuatro realizaron particiones irregulares de la unidad en el círculo que representaba a dos quintos. Por ejemplo, dividieron el círculo con segmentos horizontales y paralelos entre sí; Otro grupo, 14 estudiantes, realiza divisiones del círculo que no son iguales entre sí, bien sea dividiendo en cuatro partes y una de las partes a la mitad para obtener cinco partes o bien trazando segmentos verticales sobre el círculo. En este caso el problema que se presenta es procedimental ya que los estudiantes no cuentan con transportador para dibujar. Además, al utilizar rectángulos para representar fracciones se observan divisiones correctas. Finalmente, un grupo de nueve estudiantes realizó el trabajo

teniendo en cuenta las reglas de representación, mostrando una coordinación de registros apropiada con la expectativa del ejercicio. Ver *imagen 12*



a. Partición de la unidad en partes desiguales



b. Partición de la unidad en partes iguales

Imagen 12. Ejemplos de solución a TEST, 2

Así pues, se observa que la conversión de registros de representación es una de las tareas que se pueden llevar a cabo en este grado de escolaridad, teniendo en cuenta la rapidez con la que se alcanzan o se recuerdan las nociones implícitas en los registros respecto a la fracción como representación parte todo.

Reglas de formación. Ejercicio 3 (TEST, 3, página 75)

Para responder a la pregunta, ¿cómo escriben los estudiantes las reglas para representar una fracción?, se planteó este ejercicio en el cual se propuso redactar las normas para representar gráficamente la fracción $\frac{3}{5}$. Las formas como los estudiantes resolvieron este problema se dividieron en cuatro categorías. Los que no resuelven, 4 estudiantes, los que representan gráficamente la fracción sin escribir las reglas, 6 estudiantes, quienes se apoyan en el gráfico y en el lenguaje natural, 12 estudiantes, y quienes solo usan lenguaje natural, 14 estudiantes. Se observó entonces lo siguiente en cada una de estas actividades. De los que no resuelven y quienes solo realizaron la gráfica de la fracción no se puede afirmar la razón por la cual no lo hicieron. Se puede pensar que o bien no comprendieron la consigna o que no tienen los elementos para construir un procedimiento.

De los 12 estudiantes que resuelven apoyados en gráfico, se pueden diferenciar tres subgrupos. Quienes hacen indicaciones sobre la figura acerca de cuantas partes deben ser coloreadas de acuerdo con el numerador, 5 estudiantes; los que expresaron cuál es el numerador y cuál el denominador, 2 estudiantes; y quienes, además, de hacer el gráfico, escriben un procedimiento ordenado que permitiría al lector construir la figura de seguir los pasos indicados,

5 estudiantes. Este último grupo hace un uso correcto del vocabulario técnico respecto a dicha construcción.

Los otros 14 estudiantes que resolvieron sin hacer uso del gráfico sino del lenguaje natural, se dividieron en dos subgrupos, dos indicaron una secuencia de pasos partiendo de la existencia de un rectángulo tomado como la unidad el cual será dividido. Para llevar a cabo con éxito el procedimiento propuesto por ellos es necesario tener un conocimiento previo de la figura y, por lo tanto, se podría decir que está incompleto. Los doce restantes describieron un procedimiento que permitiría representar la fracción a quien lo siguiera. Especificaron de forma cuidadosa un paso a paso utilizando un lenguaje claro y acertado.

Como se observa a través de este ejercicio, el uso de diferentes registros de representación es un recurso utilizado por los estudiantes hasta alcanzan un desarrollo en el uso del lenguaje que les permita escribir un procedimiento matemático haciendo un uso únicamente del lenguaje natural. En esos términos se podría proponer una hipótesis sobre algunos estadios en el uso de registros de representación, que van desde una ausencia total de recursos en la cual el estudiante no resuelve, después el uso de un solo registro, en este caso el gráfico, el uso de dos o más registros de forma simultánea, cada uno con información complementaria respecto a una unidad de conocimiento, y un estadio final en el que se hace uso del lenguaje natural como único registro de representación.

Noción de la unidad en la relación parte todo. (TEST, 4,9, páginas 75 y 77)

Para reconocer la fracción como relación parte todo, hemos considerado únicamente las fracciones propias para acotar nuestra investigación, es necesario identificar cuál de las partes hace referencia a la unidad, independientemente del registro de representación propuesto. En nuestra investigación hemos mencionado que cuando se trata de un registro geométrico la totalidad de la figura se asume como la unidad, cuando trabajamos con números referimos el denominador como las partes que componen la unidad. En el lenguaje natural sin embargo la situación de reconocimiento de la unidad varía de acuerdo con el contexto en el cual esté descrita la relación. Para reconocer la habilidad de los jóvenes para reconocer la unidad se propusieron dos problemas.

Uno de ellos, el *ejercicio 4 (TEST, 4, página 75)*, presenta diferentes registros de representación: en lenguaje natural, doscientos mililitros de un litro de gaseosa; un registro geométrico que representa la fracción tres novenos en un rectángulo y en forma numérica la fracción dos novenos. El otro, *ejercicio 9 (TEST, 9, página 79)*, presenta los mismos tres tipos de

registros numérico; geométrico y lenguaje natural con las siguientes cantidades respectivamente: la fracción cinco sextos; un rectángulo que representa siete doceavos y situación en una frase *la quinta parte de un shampoo*. En este se solicita escribir en cuantas partes está dividida la unidad. En el primer ejercicio se pregunta cuál es la unidad y cuál es la parte en cada registro y se pide justificar. En el segundo, se solicita decir en cuantas partes está dividida la unidad. A continuación, revisaremos los resultados obtenidos en cada ejercicio

Respecto de las respuestas a las preguntas del *ejercicio 4* se observa que no importa cuál sea el registro de representación utilizado, lenguaje natural, geométrico o numérico, el 91.6% de los estudiantes identifica de forma correcta la unidad, 69,4% justifica de forma incorrecta mientras que 22.2% lo hace de forma adecuada. Aunque el número de estudiantes que justifica es igual en los tres registros, hubo algunas justificaciones en el registro numérico que estuvieron asociadas al tamaño del número y no a la estructura de la fracción, ver *imagen 13*. De otro modo, se observó que prácticamente solo hubo errores en la identificación de la unidad en el ejercicio presentado en lenguaje natural, lo cual pone en evidencia, la dificultad propia de este registro incluso en el contexto de la vida cotidiana. El error común al tratar con el lenguaje natural fue escoger la parte como la unidad, es decir los 200 mililitros como la unidad, en lugar del litro de bebida. En este error se observa una falta de relación entre el texto y la realidad interpretada, ya que al ponerlo en relación con una botella de gaseosa y un vaso que es equivalente a doscientos mililitros, por intuición se debería establecer que la unidad es la botella y no el vaso.

c. $\frac{2}{9}$ Unidad: 9, explicación: es el numero Mayor
 Parte: 2, explicación: es el numero Menor

Imagen 13. Escogencia de la unidad de acuerdo con el tamaño del número

Con respecto al *ejercicio 9*, en los tres registros de representación se tienen las mismas distribuciones respecto a las respuestas: 27 respuestas correctas, 7 incorrectas y 2 en las que no se responden. Además, en los registros numéricos y geométricos los errores radicaron en que escogieron la parte como la unidad. Mientras que, en la forma de lenguaje natural, las respuestas que no fueron correctas se debieron a que involucraron una fracción como la cantidad de partes en las cuales estaba dividida la unidad. En un caso dijeron que la unidad estaba dividida en dos quintos y en los otros que estaba dividida en un quinto, ver imagen 14. Ese error, genera un resultado

inadecuado en los procesos de tratamiento ya que la división de la unidad era en cinco partes. (Si divido la unidad en un quinto, la estaría dividiendo entre 0.2, lo cual equivale a multiplicarla por 5).

c. La quinta parte de una botella de shampoo

Respuesta:

$$\frac{1}{5}$$

a. Error de tratamiento en el registro lenguaje natural

Imagen 14. Ejemplos de solución a pregunta TEST, 9

Texto imagen 14.b: “Está dividida en cinco partes”

c. La quinta parte de una botella de shampoo

Respuesta: esta dividida en cinco partes

b. Acierto en tratamiento en el registro lenguaje natural

Tratamiento entre registros numéricos. (TEST, 5, página 76).

En los términos de Duval, el siguiente ejercicio sería de tratamiento. La tarea propuesta fue encontrar el denominador o el numerador de cada una de cuatro pares de fracciones desde la premisa de que estas eran equivalentes. Para ello se había realizado, en anteriores sesiones de clase, una explicación al respecto. Para resolver ejercicio, era necesario entender el factor de amplificación o simplificación de cada par de fracciones y posteriormente completar la información, realizando la operación faltante. Por ejemplo, uno de los ejercicios era $\frac{x}{3} = \frac{24}{36}$, allí se tenía que encontrar el numerador faltante. Para evitar problemas de tipo operativo en multiplicaciones y divisiones que desviarán la atención, se permitió el uso de calculadora para desarrollar el ejercicio. Para resolver este ejercicio, un procedimiento aritmético sería:

- Encontrar un valor x que al multiplicarlo por 3 obtenga 36. ($x = 12$)
- Dividir a 24 entre el valor encontrado en el paso anterior (12) y escribirlo en el numerador

En este procedimiento se presenta la necesidad de realizar dos operaciones aritméticas de forma consecutiva. Esto pone de relieve el nivel de complejidad para realizar problemas de tratamiento entre registros numéricos. Además, el ejercicio requiere que el estudiante reconozca operaciones inversas y las utilice en el momento en el cual lo requiera, es decir, se indaga sobre la reversibilidad del pensamiento que permita es la que permite al estudiante pasar de una cantidad a otra a través de una operación y luego devolverse a la cantidad original con la operación inversa.

Además, tiene una carga procedimental y una interpretación de dos registros de representación de forma simultánea.

Los resultados en este problema mostraron que los estudiantes tuvieron mayor dificultad para encontrar un factor de división, que uno de multiplicación. Esto puede obedecer a que, durante el tiempo de escolarización, con los estudiantes se ha hecho un mayor énfasis en las situaciones que están relacionadas con la multiplicación sin explicar la relación inversa entre esta y la división, ya que ambas operaciones hacen parte de la estructura multiplicativa de los números enteros, esto crea un desbalance cognitivo que retrasa el desarrollo de la habilidad para resolver problemas de equivalencia.

Tratamiento entre registros geométricos. (TEST, 6, página 76)

El siguiente ejercicio da cuenta del proceso de tratamiento entre registros gráficos para establecer equivalencias entre fracciones basándose en figuras geométricas. Está dividido en tres partes en las cuales se presentan tres figuras que representan las fracciones $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{12}$ y $\frac{4}{6}$ respectivamente. Las tres figuras se deben modificar para obtener las fracciones $\frac{3}{9}$; $\frac{2}{6}$; y una equivalente a $\frac{4}{6}$ de escogencia libre. Para ello las figuras se deben modificar bien haciendo más divisiones de la unidad para amplificar o menos divisiones para simplificarla.

En las soluciones a la primera parte de la tarea, se observó que de los 36 estudiantes 23 escribieron una fracción equivalente sin modificar la figura, 9 escribieron una fracción equivalente y modificaron la figura, dos se equivocaron en la solución y dos no resolvieron. En la segunda parte, casi todos, excepto dos dividieron la figura de forma correcta. En la tercera parte del ejercicio hubo diferentes soluciones. Esta situación fue resuelta de forma exitosa para 28 estudiantes, observándose en las respuestas una de las tres posibilidades previstas: amplificar la fracción, 7 casos, simplificarla, 18 casos o representar de la misma forma, 3 casos. Como se observó, la mayoría de los estudiantes que tuvo éxito prefirió simplificar la expresión mostrando una preferencia a trabajar con factores de conversión que mantuvieran una equivalencia donde los numeradores y denominadores, fueran números relativamente pequeños.

Con este ejercicio se observó que en su mayoría los estudiantes un éxito en la coordinación de los registros, realizando tratamientos y conversiones entre los registros. Se observa también que, entre las formas de hacer tratamiento, los estudiantes prefirieron realizar el de simplificación cuando tuvieron la opción de elegir.

Lenguaje natural en la enunciación de procedimientos. (TEST, 7, página 76)

Una de las dificultades que se observan en los estudiantes es la capacidad para describir procedimientos con los cuales resuelven problemas, ver imagen 15. Una respuesta que suelen dar en el aula es: “*tranquilo profe yo me entiendo*”, durante la resolución de un problema. Al final ocurre en muchos casos que, aunque ese estudiante resuelve el problema de forma satisfactoria, no da buena cuenta de sus acciones. Para inducir esta objetivación sobre lo que se realiza y promover procesos de concientización de los procedimientos utilizados proponen en las clases ejercicios del tipo, “describa el error” o “escriba las reglas para realizar algún procedimiento”, entre otros. En el marco de esta investigación, se han propuesto algunos ejercicios de descripción de procesos. El que se presenta a continuación tiene dos partes en las cuales se le solicita al estudiante escribir el procedimiento de tratamiento usado bien para amplificar o para simplificar dos fracciones.

En la resolución se observó que de los 33 alumnos que resolvieron este ejercicio, 3 no lo hicieron, 21 usaron el lenguaje natural para realizar las explicaciones, mientras que 7 usaron las operaciones matemáticas que debieron realizarse y 5 otros juntan la explicación en palabras y, además, hacen explícito el procedimiento numérico. En este sentido, se observa que la mayoría de los estudiantes está en capacidad tanto de realizar un procedimiento de amplificación o simplificación y también lo puede explicar, aunque una tercera parte del total se sienten más confiados presentando dos registros de representación diferentes

Procedimiento:

$$\begin{array}{r} 2 \times 5 = 10 \\ 7 \times 5 = 35 \end{array}$$

a. Uso de operaciones aritméticas

Procedimiento:
para convertir $\frac{2}{7}$ en $\frac{10}{35}$
Multiplicamos tanto el
numerador como el
denominador por 5

b. Uso de lenguaje natural

Imagen 15. Ejemplos de solución a pregunta TEST, 7. Describa un procedimiento para convertir $\frac{2}{7}$ a $\frac{10}{35}$

Texto imagen 15.b: “Para convertir $\frac{2}{7}$ en $\frac{10}{35}$ multiplicamos tanto el numerador como el denominador por 5”

Lenguaje natural en las definiciones: numerador de una fracción. (TEST, 10, página 77)

Con el fin de determinar la habilidad de definir respecto a los elementos de un número racional, se realizó la siguiente pregunta: ¿Qué significa el numerador de una fracción? Las respuestas dadas por los estudiantes se clasifican de la siguiente manera: Veinte relacionan el numerador con una parte de una unidad o totalidad dividida. En este sentido se observa que los estudiantes identifican el numerador en la relación parte todo. Dentro de este grupo, tres hacen

referencia a una forma gráfica, aunque no realizan una representación de este tipo, lo cual sugiere que estaban representando la fracción a través de un formato no numérico. Otro grupo de nueve estudiantes identifica el numerador como una parte, sin hacer alusión a la totalidad. “*Las partes que tenemos*” es la respuesta común de este grupo, en este caso los estudiantes no dan cuenta de la relación parte todo; dos alumnos afirman que el numerador es la totalidad de la fracción; un estudiante escribe la fracción $2/5$ y señala la parte de arriba mientras que otro afirma “*es el número que ayuda a resolver el problema*”, respuesta que ubica la definición en un contexto determinado de solución de problemas; los tres restantes no ofrecen una definición.

Lenguaje natural en las definiciones: Definición de equivalencia. (TEST, 11, página 77)

Una definición para el concepto de equivalencia. Una de las preguntas realizadas en el documento de cierre es: ¿Qué significa que dos fracciones sean equivalentes? Las categorías de respuesta escogidas se explican a continuación. La primera categoría expresa hace referencia a la cantidad que subyace a la fracción, afirmando que dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad o valor numérico, ver imagen 16. A esta categoría pertenecen quince estudiantes. Una segunda, con cinco casos, hace referencia a las representaciones graficas de las fracciones afirmando que hay equivalencia entre fracciones si éstas representan lo mismo gráficamente. Una tercera, nueve casos, propone la equivalencia desde la posibilidad de convertir una fracción en otra a través de una operación de multiplicación o de división. Ésta tiene en cuenta elementos de tratamiento como la amplificación y la simplificación.

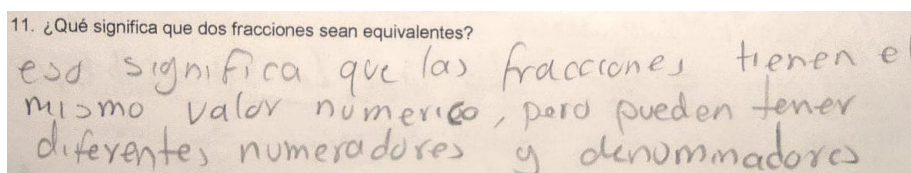


Imagen 16. Definición de fracción equivalente en términos de cantidad que subyace, TEST, 11

Texto de imagen 16: “eso significa que las fracciones tienen el mismo valor numérico, pero pueden tener diferentes numeradores y denominadores”

Finalmente, se incluyen las respuestas que no son consistentes como por ejemplo “*que al resolverlas las dos sean resolvibles*”. Esta consta de siete casos. Nuevamente se observa que hay respuestas que están directamente relacionadas con un registro de representación en particular, lo cual hace pensar que no hay una comprensión real sino un entendimiento condicionado a la forma

en la cual se gestionan los conceptos. Ya en otros casos la situación cambia, los argumentos están dados en términos abstractos, esto es, alejados del registro que los representa.

Conversión de registros. Identificación y construcción de fracciones equivalentes. (TEST, 12 y 13, página 78)

En el ejercicio siete se examinó la habilidad de los estudiantes para explicar el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes a partir del tratamiento en el registro numérico. Ahora se revisarán las habilidades para identificar fracciones equivalentes, ejercicio 12 y para construirlas a partir de una dada, ejercicio 13. Esto es con el fin de examinar el nivel de interiorización de los tratamientos, a través de su uso para solucionar problemas en el contexto de las matemáticas. Para ello se propusieron dos ejercicios. En el primero los estudiantes debían escoger tres equivalencias numéricas a la fracción $\frac{2}{6}$ entre un grupo de 5 posibilidades. En el siguiente, debían construir cuatro fracciones equivalentes a $\frac{15}{60}$.

Lo observado en el primer ejercicio fue que en el 58% de los casos los estudiantes seleccionaron las tres cantidades equivalentes, 11% escogió dos de las tres y el 22% seleccionó solo una y el restante 9% no resolvió la pregunta. Por otro lado, con respecto al ejercicio de construcción de equivalencias, los resultados mostraron que en el 78% de los casos los estudiantes construyeron las cuatro equivalencias requeridas, uno de los treinta y seis resolvió de forma inadecuada, 3%, y el resto, 19%, no resolvió. Se puede decir, entonces, que la mayoría de los estudiantes están en la capacidad de utilizar un procedimiento numérico (tratamiento) para elaborar fracciones equivalentes. También han mostrado la habilidad para identificar, al menos en el registro numérico, fracciones que son equivalentes.

Coordinación de registros para la resolución de problemas. (TEST, 14 a 16, página 78)

La parte final del **TEST** está enfocada a analizar la coordinación entre los registros de representación y el planteamiento y la resolución de problemas. Para ello se propusieron los ejercicios 14 a 16. La resolución de un problema que relaciona un contexto de la vida cotidiana y el concepto de fracción. A continuación, se solicitó redactar un problema, con unas condiciones específicas. Una cantidad que es dada y una fracción específica. Se esperaba que se creara una situación problema similar al ejercicio anterior. Finalmente, se debe resolver la situación propuesta

utilizando dos registros de representación diferentes, el registro gráfico y el registro numérico. Los tres problemas requieren del estudiante una coordinación entre lenguaje natural, números y figuras geométricas. A continuación, avanzaremos en los resultados obtenidos en cada uno de estos ejercicios.

Situación 1 (TEST, 14). Ana ha gastado tres cuartos de su frasco de shampoo. Si el contenido de la botella eran cuatrocientos mililitros, ¿Cuánto shampoo ha gastado? ¿Cuánto shampoo le queda?

Dentro del conjunto de respuestas no exitosas (siete) se observaron las siguientes formas de respuesta: cuatro estudiantes realizaron una multiplicación de forma arbitraria, multiplicaron tres veces cuatrocientos. Un estudiante establece que las tres cuartas partes de la botella equivalen a 180 mililitros de líquido, otro en cambio estableció que se habían gastado 800 mililitros y que quedaban 100 ml, mientras que otro relacionó un registro gráfico y una partición obteniendo una respuesta de 100,000 mililitros. Además, seis estudiantes no resuelven la situación.

En los casos de éxito, 23 estudiantes, se observaron las siguientes características: dos estudiantes resuelven el ejercicio de forma acertada, utilizando únicamente lenguaje natural. Otro grupo, 15 estudiantes, relaciona la información del problema a través de los registros de la lengua natural y el numérico sin hacer uso de operaciones dentro del proceso de solución.; dos estudiantes, además de usar el lenguaje natural y el registro numérico, muestran las operaciones con las cuales resuelven el problema. Finalmente, cuatro estudiantes coordinaron los tres registros de representación, numérico, geométrico y lenguaje natural, con los que se trabajó en el estudio. Ver imagen 17.

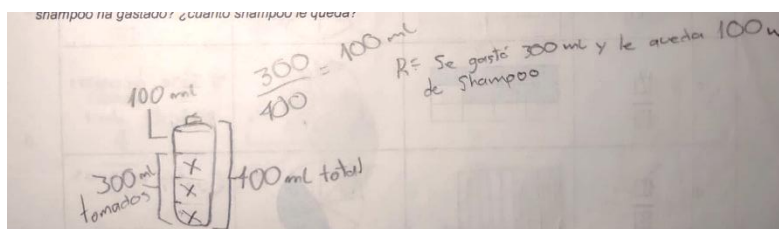


Imagen 17. Coordinación de registros de representación en la resolución de un problema, TEST, 14

Texto de imagen 17: “Se gastó 300 ml y le quedan 100 ml de shampoo”

Aunque no todas las respuestas fueron exitosas, si se verificó que más de la mitad de los estudiantes, veintiuno de treinta y seis, interactuaron con dos y tres registros representación de forma simultánea para resolver este problema. Esto es relevante en esta investigación, dado que está en relación con la relación entre coordinación de registros de representación y aprendizaje del concepto de fracción propia.

Situación 2 (TEST, 15). Proponga un problema que relacione la cantidad de dinero \$20,000 y la fracción tres quintos $\left(\frac{3}{5}\right)$

Siguiendo la lógica de revisión de respuestas del ejercicio anterior, dentro de los ejercicios de forma no exitosa se observaron los siguientes errores:

Cuatro de los treinta y seis estudiantes intentaron hacer repartos entre tres individuos, de lo que se puede inferir que aún no tienen una total claridad para identificar la unidad en una fracción y cuál es su papel en la relación parte todo. Este error conceptual se evidenció en el uso del lenguaje natural al redactar el problema. Un estudiante utilizó la fracción un quinto en lugar de usar tres quintos. Un grupo de cinco estudiantes muestra diferentes problemas en la estructura de sus planteamientos en el sentido de que o no realizan una pregunta, o intentan hacer uso de los números naturales tres y cinco que componen la fracción, perdiendo de vista la relación que está implícita en esta cantidad, ver imagen 18. Esto se traduce en inconsistencias entre las cantidades requeridas y el problema propuesto, ver imagen 18.

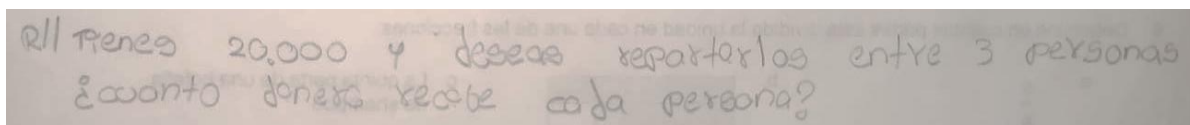


Imagen 18. Coordinación de registros de representación en la resolución de un problema, TEST, 15

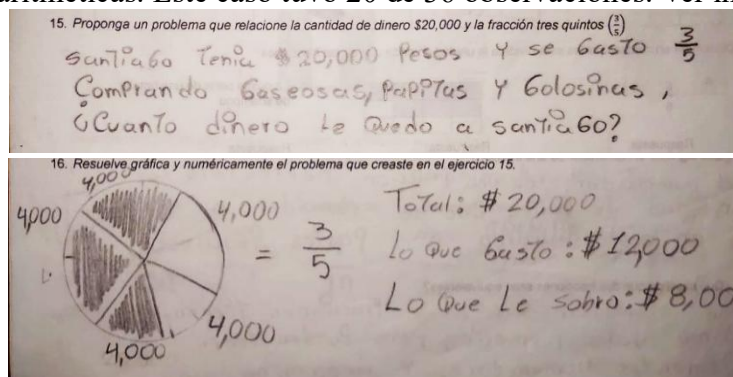
Texto de imagen 18: "Tienes 20.000 y deseas repartirlos entre 3 personas ¿canto dinero recibe cada persona?"

Dentro de los veinte casos exitosos, es decir, de los estudiantes que cumplieron las condiciones se observó: un grupo de cinco estudiantes planteó la situación relacionando correctamente un contexto y una fracción. Otro grupo, diez de treinta y seis, que hizo una correcta relación entre el contexto y la fracción aumentó el nivel de complejidad del problema al realizar la pregunta con respecto al complemento de la fracción respecto a la unidad, es decir, del número dado $\frac{3}{5}$, el complemento respecto a la unidad es $\frac{2}{5}$. Esto en la forma del lenguaje natural debe quedar expresado en términos de lo que no se usó de la cantidad.

Además, cinco estudiantes que realizó dos preguntas, teniendo en cuenta tanto el número como su complemento. Dentro de la estructura del ejercicio se observó en general que se siguió como modelo el ejercicio anterior. Sin embargo, cada grupo de estudiantes lo contextualizó de formas diferentes. En este sentido es importante proponer estructuras modelo que permitan a los estudiantes proponer situaciones y ganen habilidad en el tratamiento del registro del lenguaje natural. Finalmente, seis estudiantes no resuelven el ejercicio.

Situación 3 (TEST, 16). Resuelve gráfica y numéricamente el problema que creaste en el ejercicio anterior.

Caso 1. Uso de dos registros, solución correcta: se evidenció una correcta coordinación de los registros en la cual se puede observar directamente y sin necesidad de realizar operaciones aritméticas cuales son la o las respuestas obtenidas. Otro grupo usó dos registros para resolver el ejercicio. Aunque no usó gráfica se apoyó en el registro numérico para realizar operaciones aritméticas. Este caso tuvo 20 de 36 observaciones. Ver imagen 19.



Planteamiento del problema: "Santiago tenía \$20,000 pesos y se gastó $\frac{3}{5}$ comprando gaseosas, papitas y golosinas, ¿Cuánto dinero le queda a Santiago?"

Solución del problema

Imagen 19. Coordinación de registros de representación en la proposición y resolución de problemas (TEST, 15,16)

Caso 2. Uso de un registro, solución correcta. En este caso, seis estudiantes utilizaron un registro numérico, realizan divisiones y multiplicaciones llegando a la respuesta de forma satisfactoria. Un estudiante obtiene el resultado y sólo presenta la respuesta en lenguaje natural, sin que se observaran los procedimientos realizados. Este caso tuvo 7 de 36 observaciones.

Caso 3. Usó de dos registros, solución incorrecta: hay errores en la interpretación del problema obteniendo valores que no están relacionados con éste. Aunque los otros estudiantes utilizaron figuras geométricas y fracciones, no relacionaron de forma efectiva la información del contexto o definitivamente no la tuvieron en cuenta. Ello da cuenta de un bajo nivel de coordinación entre los registros de representación utilizados. Se puede decir que para este grupo de estudiantes el nivel de exigencia que se requiere para coordinar registros de representación

semiótica y a partir de allí resolver situaciones problema, les podría requerir un esfuerzo adicional y la inclusión de otros recursos pedagógicos. Este caso tuvo 3 de 36 observaciones.

Caso 4. Sin respuesta. Este caso tuvo 6 de 36 observaciones.

Se observa que la coordinación de registros de representación conlleva a la creación y resolución de problemas desde el enfoque de la relación parte todo y teniendo en cuenta modelos particulares que fueron desarrollados en este ejercicio investigativo. La tarea de analizar la relación entre coordinación de registros y aprendizaje deberá ser continuada en aras de decidir si esta es una estrategia eficiente en la cognición en matemáticas es un recurso eficiente.

CAPÍTULO 3. CONCLUSIONES

Un punto de partida, aproximaciones teóricas

- En el marco teórico de esta investigación tuvimos en cuenta diferentes disciplinas: la psicología, la teoría de registros de representación semiótica, la didáctica de la matemática y las matemáticas como sistema de relaciones. Se recogieron los aportes de Piaget y Vygotsky respecto a la importancia del lenguaje en la transformación de los mecanismos de cognición humana, y la propuesta de Duval, quien reconoce que aparte del lenguaje natural, existen diferentes registros de representación semiótica mediante los humanos elaboran sus conceptos. El enfoque en la coordinación de registros permite abordar investigaciones de esta naturaleza, en donde los objetos conceptuales con los que se trabaja no son de naturaleza perceptual y no tienen necesariamente reflejos en la realidad, como lo son los conceptos matemáticos, en particular, el conjunto de números racionales o las fracciones. En ese sentido la metodología seguida por nosotros en este trabajo se enfocó en observar en el grupo, estuvo enfocada en reconocer como era la relación entre la coordinación de registros de representación y el aprendizaje del concepto de número racional positivo. En retrospectiva se observa que el análisis de la coordinación de registros ofrece un modelo que permite observar las transformaciones en las estructuras de pensamiento en el desarrollo de un concepto en matemáticas.
- El análisis y usos de los distintos registros de representación semiótica nos permitió avanzar en el significado del concepto de equivalencia, fundamental en la construcción de los números racionales positivos. Teniendo en cuenta lo anterior, nos enfocamos en el análisis de la relación entre el uso de diferentes registros de representación semiótica en el desarrollo del concepto de equivalencia, fundamental para dar estructura numérica a los números racionales y, en particular, los números racionales positivos. Los resultados que obtuvimos nos permiten afirmar, como se presentará más adelante, la cercana relación que hay entre el uso adecuado del lenguaje y la coordinación de registros. No obstante, una buena coordinación de los otros dos tipos de registros, geométrico y numérico, está en relación con un desarrollo adecuado de las nociones o preconceptos necesarios para la construcción de dicha estructura, es decir, una coordinación entre figuras geométricas y números, da cuenta de que los estudiantes tienen en su conocimiento tácito, las nociones de equivalencia y relación parte todo, aunque no estén

aún en la capacidad de trasladar estas nociones al lenguaje a través de definiciones y justificaciones.

- La coordinación de los registros de representación propuesta por Duval, mostro una correlación entre coordinación de registros y aprendizaje. En nuestro caso particular, se observó la correlación positiva entre coordinación entre registros los de representación semiótica utilizados: numéricos, geométricos y lenguaje natural y la apropiación del concepto de equivalencia entre fracciones, es decir, es posible afirmar que los estudiantes que tienen una buena coordinación entre los registros de representación elaboraron el concepto de fracciones equivalentes.

Registros de representación semiótica en el aprendizaje de las matemáticas

- Los registros numéricos podrían ser considerados como los más importantes, ya que sobre estos se puede decir que descansan las estructuras matemáticas con las cuales se trabaja diariamente en una clase de matemática. Si se observa desde la matemática, los números son una construcción a partir de un conjunto de objetos y de relaciones sobre estos objetos. no obstante, en el aula de clase pasan a ser objetos de trabajo sobre los cuales se proponen un conjunto de operaciones y procedimientos que siguen un conjunto de reglas para su manipulación y uso en la resolución de diferentes problemas. Tienen la dificultad como registro abstracto, de que encierran reglas de formación y formas procedimentales que son inquebrantables y deben ser aprehendidas para tener éxito en las actividades escolares. Sin embargo, tienen la ventaja de la economía de la escritura y la posibilidad de ser utilizados para resolver problemas en diferentes disciplinas más allá de las propias matemáticas.
- Los registros de representación geométricos, que son utilizados durante toda la vida escolar, tienen la dificultad de que se necesitan herramientas para ser dibujados, las cuales por un lado no están a disposición de los estudiantes en comunidades como en la que se realizó la investigación. Ello implica que muchos de los gráficos se construyan sin éstas y se pierda de vista aspectos relevantes que se quieran destacar a través de su uso, la partición de la unidad en nuestro caso concreto. Además, tienen en sí mismos unas reglas de formación y tratamiento que amplifican la exigencia para la elaboración conceptual. En nuestro caso particular, los procesos de amplificación y simplificación requerían procedimientos que eran específicos del

uso de estos registros y que no estaban relacionados de forma directa con los mismos procesos en el registro numérico. Como ventajas se pueden destacar: Que permiten al estudiante mediante la observación directa de estos objetos, decidir la equivalencia o no de dos fracciones, lo cual en el registro numérico no era posible, salvo memorización de los pares de fracciones, o bajo el uso de procedimientos. Otra ventaja es que permiten relacionar un concepto matemático como la relación parte todo, con un reparto proporcional en un problema de la vida cotidiana.

- El lenguaje natural el cual es el registro más utilizado en el proceso de escolarización de un estudiante, y que hace parte fundamental en el aula de matemáticas tiene como una de sus dificultades mas grandes el hecho de ser en si mismo una estructura compleja en el sentido que tiene unas reglas que deben ser aprehendidas para una adecuada comunicación. Esta estructura, pese a ser un punto de partida tanto para el estudiante como para el docente, debe ir migrando a lo largo del proceso educativo de cada estudiante hacia niveles mas técnicos. Otra dificultad es que en esta se mezclan elementos técnicos propios de la matemática, ya que ésta no tiene un lenguaje propio, sino que hace uso del lenguaje común y sobre este construye un metalenguaje. Dentro de las ventajas que tiene ese registro esta la posibilidad que da a las matemáticas de interactuar con otras disciplinas, recibir problemas de tipo cuantitativo para ser resueltos desde las matemáticas. Otra ventaja que presenta este registro es que se puede utilizar en las matemáticas para dar justificaciones de procedimientos.

Coordinación de registros de representación semiótica y el aprendizaje de las fracciones

- En esta investigación se establecieron unos niveles de comprensión en cuatro ejes: la noción de la unidad en las fracciones, la formación y conversión de registros de representación, la noción de equivalencia de fracciones y el planteamiento y resolución de problemas. además de ello, a partir del test final realizado a los estudiantes se cuantificó su distribución porcentual dentro de cada uno de cinco niveles, iniciando en un nivel en el cual se observaron las falencias más relevantes en cada eje y finalizando en el nivel cinco en el que se encuentran los estudiantes que mostraron una mejor comprensión. La distribución fue la siguiente: Nivel 1: 8.3%, Nivel 2: 25%; Nivel 3, 22.2%; Nivel 4, 25%; Nivel 5, 19.5%. A continuación, describiremos lo observado en los estudiantes en cada eje.

- Noción de la unidad en las fracciones. Se observó que los estudiantes en los niveles uno y dos tienen una baja comprensión de la unidad, confunden en una fracción la parte con la totalidad, se les dificulta además establecer el número de partes que dividen una totalidad y describen un numerador sin hacer relación con una totalidad. Opuesto a ello en el nivel más alto los estudiantes relacionan la parte con el todo, identifican la parte respecto al todo independiente del registro de representación en el cual se presenta la información. Mas aún, se observa que los estudiantes en más alto escogen el tipo de registro de representación que es más conveniente de acuerdo con la situación.
- Formación y conversión de registros. En el primer nivel en este eje que los estudiantes hacen uso de un solo registro de representación cuando deben resolver situaciones. Realizan los registros geométricos de forma inadecuada, ya que no tienen en cuenta las divisiones en partes iguales y no explican los procedimientos para construir las figuras. Contrario a ello, se observa en el nivel más alto, un excelente manejo de las conversiones entre registros numéricos y gráficos, siendo estos realizados de forma cuidadosa y proporcionada al igual que el establecimiento cuidadoso de los procedimientos de construcción.
- Noción de equivalencia de fracciones. En este eje se observa como los estudiantes pasan del no reconocimiento de fracciones equivalentes ni su construcción en el primer nivel hasta los que reconocen y construyen equivalencias sin importar el registro de representación. También son capaces de ofrecer justificaciones para establecer equivalencias, tales como la simplificación, amplificación o comparación con el número decimal, lo cual demuestra que ellos están en la capacidad de migrar de un registro geométrico a uno numérico para justificar sus procedimientos. Finalmente, establecen la equivalencia de fracciones desde el análisis de la cantidad que subyace a las formas.
- Planteamiento y resolución de problemas. Mientras que los estudiantes que se establecen en el nivel 1, ni propusieron ni resolvieron problemas redactados en lenguaje natural, los estudiantes en el nivel 5 no solamente los proponen, sino que los resuelven haciendo uso simultáneo de diferentes registros de representación, mostrando una coordinación entre los registros numérico geométrico y el lenguaje natural. En los otros niveles se observa cómo hay estudiantes que proponen situaciones que no son claras o proponen situaciones claras pero o

bien solucionan de forma inadecuada o hacen uso de uno o dos registros de representación lo cual evidencia un menor nivel de coordinación de registros respecto a los del nivel superior.

- Se observó también una correlación entre el uso del lenguaje natural y el planteamiento y la resolución de problemas, es decir, los estudiantes que muestran un mejor uso del lenguaje natural como registro de representación semiótica, coordinan los otros registros disponibles, para proponer y resolver situaciones problema contextualizadas, relacionando conceptos matemáticos y vida cotidiana, mejor que quienes tienen sólo el dominio de registros de tipo geométrico y numérico. Así pues, excluir del aula el uso del lenguaje natural como recurso para el desarrollo de habilidades matemáticas, bien por cuestiones de tiempo, bien por preferencias del docente, deja por fuera la posibilidad de potenciar dicha capacidad.
- Finalmente, se excluyó de la discusión, la cuestión de los recursos que se requieren para indagar en la teoría propuesta por Duval. La institución educativa, en concordancia con la propuesta estatal, propone unos contenidos que deben ser abordados en los tiempos que se estipulan en los planes de área de la institución. Para la realización de este ejercicio investigativo, fue necesario congelar el avance, en la secuencia propuesta, en no menos de tres semanas. Fue necesario además modificar las actividades evaluativas rutinarias que dan cumplimiento a lo requerido por el colegio. Es decir, los dos grupos de estudiantes estuvieron aislados temporalmente de las dinámicas de la institución educativa, respecto a la secuencia establecida por esta para la clase de matemática. Por fortuna y temas de autonomía del docente en el sector oficial, esto fue posible sin ningún contratiempo institucional. No obstante, la posibilidad de replicar este estudio, o estudios de naturaleza similar va a quedar supeditado a condiciones favorables dentro de la institución. Esto genera, entonces, la última duda que presentaré y es sobre qué es lo importante en el proceso educativo en un sistema institucionalizado: ¿Dar cumplimiento a los requisitos de la institución, dejando de lado al aprendiz o encontrar con estos mejores recursos para su desarrollo cognitivo?

REFERENCIAS

- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. 2a.ed. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2015). Cuestionamiento sobre la “elección” y utilización de teorías en “Mathematics Education”. En D’Amore, B, Fandiño, M Editores. *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica*. Chía: Universidad de La Sabana.
- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.
- Godino, J. (2018). *Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática*. [Archivo PDF]
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. 6a.Ed. México: Mc Graw Hill.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- OCDE (2017), *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. Versión preliminar, OECD. Publishing, Paris.
- Piaget, J. (1994). *La formación del símbolo en el niño. Imitación, juego y sueño, imagen y representación*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.
- Panza, M. (2019). *Números: Elementos de matemáticas para filósofos*. Cali: Universidad del Valle.
- Recalde, L. (2018). *Lecturas de Historia de las matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.
- Radford, L. (2024). *Semiótica cultural y cognición*. [Archivo PDF]
https://www.luisradford.ca/pub/53_Tuxtla3.pdf
- Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa*. 6a.Ed. México: Pearson.
- Vygotsky, L. (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.
- Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Yin, R. (2002). *Case Study Research. Design and Methods*. 3a.Ed. California: Sage Publications.

ANEXOS

Actividad de saberes previos 1ª Parte (ASP I).

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAGDALENA ORTEGA - ASIGNATURA: MATEMÁTICAS – GRADO 8
TALLER 1: INDAGACION DE SABERES PREVIOS -REPRESENTACION DE NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS
TEMA: NÚMEROS RACIONALES – REGISTROS DE REPRESENTACION SEMIÓTICA PARTE I
NOMBRE: _____ FECHA: _____



1. Representa gráficamente las siguientes fracciones. Utiliza dos formas diferentes:

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{3}{5}$

e. $\frac{7}{4}$

2. ¿Qué dificultades encontraste para realizar la tarea propuesta?

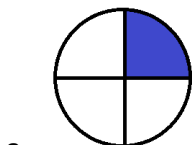
Actividad de saberes previos 2ª Parte (ASP II)

SABERES PREVIOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS

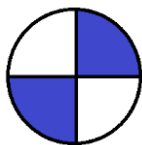
Nombre: _____ Grado: _____

Selección múltiple con múltiple respuesta:

1. Selección múltiple. Encierra en un círculo las fracciones que considere equivalentes a $\frac{1}{2}$



a.



b.



c.

d. 0.5

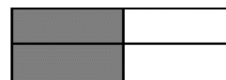
2. Decida si cada par de figuras representan la misma cantidad. explique por qué?

a.



Solución:

b.



Solución:

3. Determina si las dos fracciones son equivalentes. Explica tu respuesta.

a. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Respuesta:

Explicación:

b. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Respuesta:

Explicación:

c. $\frac{2}{9} = \frac{5}{18}$

Respuesta:

Explicación:

4. Sara ha gastado la mitad de su dinero en unas papitas y una gaseosa. Si ambas cosas le costaron \$3500. Cuánto dinero le habían dado?

Actividad 3. Elaboración de situaciones problema (AESP).**ACTIVIDAD 3. ELABORACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA**

Fecha: _____ **Grado:** _____ **Grupo número:** _____

Escoja **uno** de los siguientes productos: Una gaseosa de 1 litros (1000 mililitros), una botella de perfume de 100 mililitros, un kilo de carne para hamburguesa (1000 gramos), la cantidad de dinero equivalente a 10,000 y elabore una situación problema con el **objeto seleccionado** y una **fracción**.

1. Objeto seleccionado: _____

2. Situación problema.

3. Fracción que representa las cantidades de la situación:

4. ¿Porque escogieron esta fracción? ¿Cuales?

5. Represente la relación parte usando un rectángulo, un círculo o un segmento

Actividad 4. Relación de equivalencia en fracciones (AREF).

ACTIVIDAD 4. TRATAMIENTO AMPLIFICACION / SIMPLIFICACIÓN

Nombre: _____ Grado: _____

1. Decide si las fracciones representadas son o no equivalentes y justifica tu respuesta

a.   Respuesta: _____

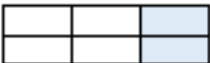
Justificación: _____

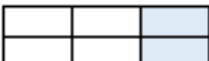
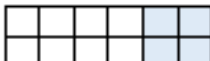
b.   Respuesta: _____

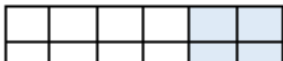
Justificación: _____

2. Si la fracción $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{16}{40}$, ¿es la fracción $\frac{16}{40}$ equivalente a $\frac{2}{5}$? Justifique su respuesta. _____

3. Decide en cada caso si las fracciones son o no equivalentes Respuesta: _____

a.  _____  _____

b.  _____  _____

c.  _____  _____

- d. En el literal c. Justifique porque las fracciones **son** equivalentes o **no** lo son

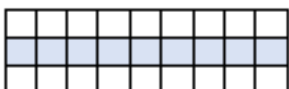
4. Si $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{8}{12}$ y además, $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{24}{36}$, ¿Son equivalentes $\frac{2}{3}$ y $\frac{24}{36}$? Justifica la respuesta. _____

5. Dibuja una fracción equivalente a la fracción dada.

a. $\frac{30}{90}$

b. $\frac{4}{5}$

6. Escribe una fracción equivalente a las representadas en las gráficas:

b.  Fracción: _____

a.  Fracción: _____

Actividad 5. Aplicación y solución de TEST.

EVALUACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES PREPARATORIAS. (TEST). GRADO 8°. ELABORADO POR: JUAN PABLO MENDOZA DÍAZ.



Parte I. Reglas de formación

Decírlas, justifícalas

1. Indica si las siguientes figuras representan la misma fracción y porque



$\frac{2}{3}$

Respuesta:



Respuesta:



Respuesta:



$\frac{3}{4}$

Respuesta:



Respuesta:



Respuesta:

2. Dibuja dos representaciones, una circular y otra cualquiera, de cada una de las siguientes fracciones:

a. $\frac{2}{5}$

b. $\frac{5}{6}$



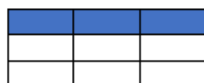
3. Cuales normas utilizarías para representar la fracción $\frac{3}{5}$, a través de un rectángulo:

4. En las siguientes fracciones determina cual es la unidad y cuál es la parte de la unidad señalada. Explica porque

- a. 200 mililitros de un litro de gaseosa

Unidad: _____, explicación: _____
 Parte: _____, explicación: _____

- b.



Unidad: _____, explicación: _____

Parte: _____, explicación: _____

- c. $\frac{2}{9}$

Unidad: _____, explicación: _____

Parte: _____, explicación: _____

EVALUACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES PREPARATORIAS. (TEST). GRADO 8°. ELABORADO POR: JUAN PABLO MENDOZA DÍAZ.



Parte II. Tratamiento

5. Escribe la parte faltante para obtener una fracción equivalente:

a. $\frac{5}{8} = \frac{25}{\square}$

c. $\frac{\square}{27} = \frac{5}{9}$

b. $\frac{12}{16} = \frac{\square}{4}$

d. $\frac{\square}{3} = \frac{24}{36}$

6. En cada caso escribe la fracción correspondiente a la gráfica y modifica la figura para obtener la fracción:

	Escribe la fracción:		Fracción:	Modifica la figura
a.	$\frac{\square}{\square}$		$\frac{3}{9}$	
b.	$\frac{4}{12}$		$\frac{2}{6}$	
c.	$\frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square}$	

7. Describe un procedimiento para para convertir a la fracción equivalente:

	Fracción:		Equivalencia:		Procedimiento:
a.	$\frac{2}{7}$	$\rightarrow$	$\frac{10}{35}$		
b.	$\frac{8}{20}$	$\rightarrow$	$\frac{4}{10}$		

EVALUACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES PREPARATORIAS. (TEST). GRADO 8°. ELABORADO POR: JUAN PABLO MENDOZA DÍAZ.



Parte III. Conversión de fracciones

8. completa la tabla con la representación correspondiente:

	Fracción	Rectángulo	Círculo	Palabras
a.	$\frac{5}{6}$			
b.	$\frac{3}{8}$			Tres de ocho
c.	$\frac{5}{8}$			
d.	$\frac{3}{8}$			

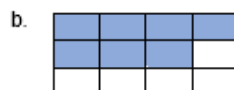
9. ¿Qué significa el numerador de una fracción?

10. ¿Qué significa que dos fracciones sean equivalentes?

11. Determine en cuantas partes está dividida la unidad en cada una de las fracciones:

a. $\frac{5}{6}$

Respuesta:



Respuesta:

c. La quinta parte de una botella de shampoo

Respuesta:

EVALUACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES PREPARATORIAS. (TEST). GRADO 8º. ELABORADO POR: JUAN PABLO MENDOZA DÍAZ.



Parte IV. Coordinación en resolución de problemas

En los ejercicios 12 a 16 puede utilizar graficas para plantear o solucionar cada problema:

12. Encierre en un círculo las fracciones que considere equivalentes a la fracción $\frac{2}{6}$

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{8}{24}$

d. $\frac{20}{100}$

e. $\frac{20}{60}$

13. Escriba cuatro fracciones equivalentes a la fracción $\frac{15}{60}$

Respuesta: _____, _____, _____, _____

14. Ana ha gastado tres cuartos de su frasco de shampoo. Si el contenido de la botella eran cuatrocientos mililitros, ¿cuánto shampoo ha gastado? ¿cuánto shampoo le queda?

15. Proponga un problema que relacione la cantidad de dinero \$20,000 y la fracción tres quintos $\left(\frac{3}{5}\right)$

16. Resuelve gráfica y numéricamente el problema que creaste en el ejercicio 15.