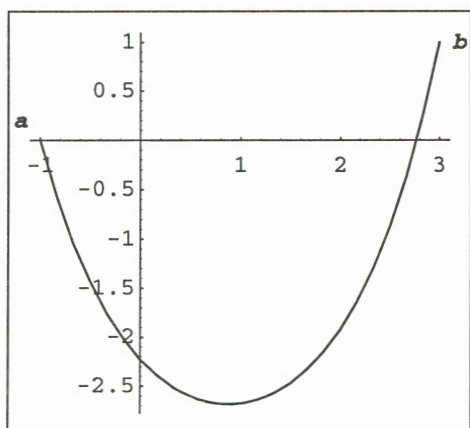




CATENARIAS

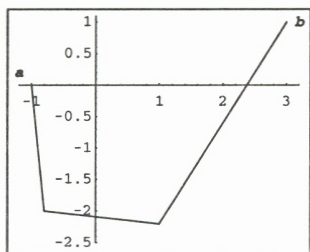
Por: Jürgen Tischer
Depto de Matemáticas

Un problema clásico del cálculo de variaciones es el de la función que describe una cadena colgante de dos puntos (no necesariamente de la misma altura) en equilibrio. La solución (salvo transformaciones sencillas) es la función catenaria $(x, m) = m \cosh(x/m)$. Ahí una cadena que cuelga de los puntos $a = (-1, 0)$ y $b = (3, 1)$ y tiene longitud 8. La fórmula exacta de esta catenaria es $-3.60709 + 0.924471 \cosh(0.956042 - 1.0817 x)$:

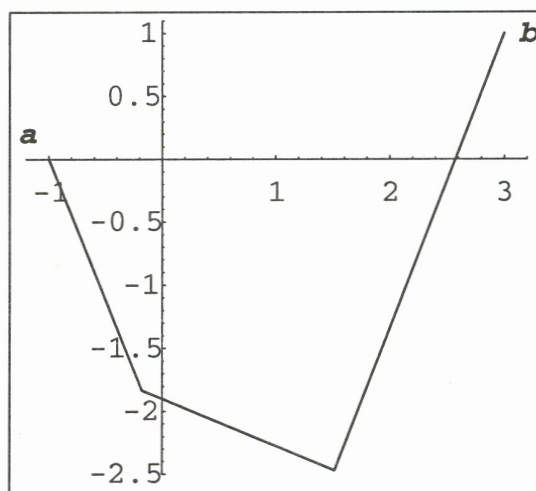


Desarrollaremos una solución del problema que no usa sino matemática elemental y el paquete *Mathematica*:

Primero consideramos un problema mucho más sencillo, el de tres varas unidas por articulaciones y colgadas en los dos puntos a y b .



En esta situación es fácil calcular el equilibrio: Las varas toman la posición tal que la energía potencial sea mínimo, lo cual es el caso cuando el centro de gravedad del sistema está en su punto más bajo. Como el sistema posee un solo grado de libertad, se puede usar el ángulo de la primera vara con la horizontal, calcular los dos de-



más puntos, la posición de los centros de gravedad de las tres varas en función del ángulo (todo esto lo hizo *Mathematica*) y buscar el mínimo. La figura 3 muestra el resultado.

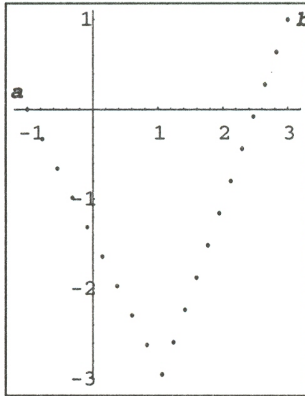
No era necesario que las tres varas eran rectas ni uniformes, todo que entra en el cálculo son las distancias entre las articulaciones y las posiciones relativas de los centros de gravedad (es cómodo tener las posiciones en coordenadas polares relativas a los respectivos extremos de las varas).

Con eso en mente argumentamos de la siguiente manera: Si tenemos una cadena en equilibrio, y



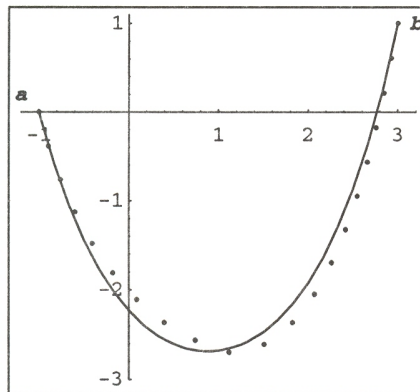
si congelamos todas las articulaciones salvo las dos en a y en b y dos en el interior, el sistema de tres varas así construido estará en equilibrio. Y si la cadena no está en equilibrio, entonces existen dos puntos en el interior tal que el sistema congelado correspondiente no está en equilibrio. Entonces es obvia la estrategia : Se comienza con una cadena en una posición fácil de generar (se tiene que cumplir las condiciones de extremos en a y b y de la longitud de la cadena). Entonces se escoge cada vez dos puntos y pone el sistema congelado en su equilibrio.

Podría parecer buena idea escoger los dos puntos al azar, en la práctica resultó mucho más eficiente tomar siempre dos puntos vecinos y trabajar de un extremo de la cadena a la otra. Mos-

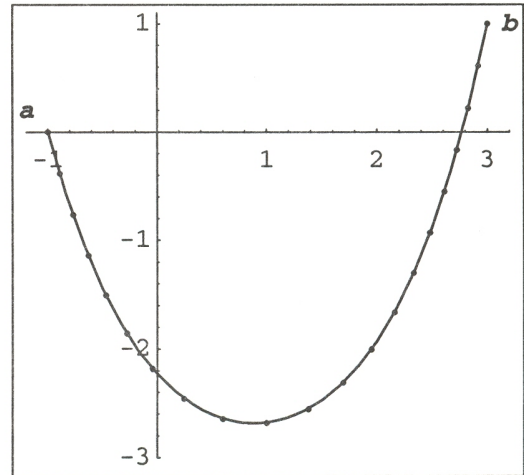


tramos eso en un ejemplo : Tomamos una cadena entre $a = (-1, 0)$ y $b = (3, 1)$ de longitud 8 (los dados de la catenaria de arriba) y de 20 eslabones. Una forma de producir un estado inicial es (para ver mejor la estructura se muestra solo las articulaciones):

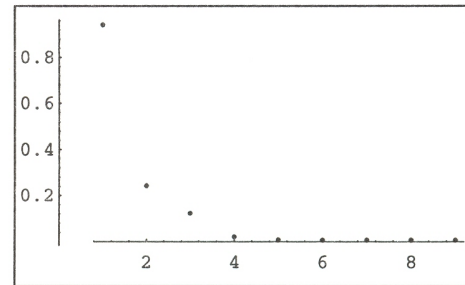
Ahora hacemos una corrida, es decir pasamos una vez por la cadena de extremo a extremo tomando como puntos internos siempre los dos puntos seguidos. El resultado comparamos con la catenaria de la figura 1. La línea continua es la catenaria, los puntos la cadena.



Y después de cinco corridas :



Es interesante analizar la diferencia entre la catenaria y la cadena después de las diferentes corridas. La siguiente figura muestra la máxima diferencia entre la cadena y los valores de la catenaria en los puntos de las articulaciones de la cadena.



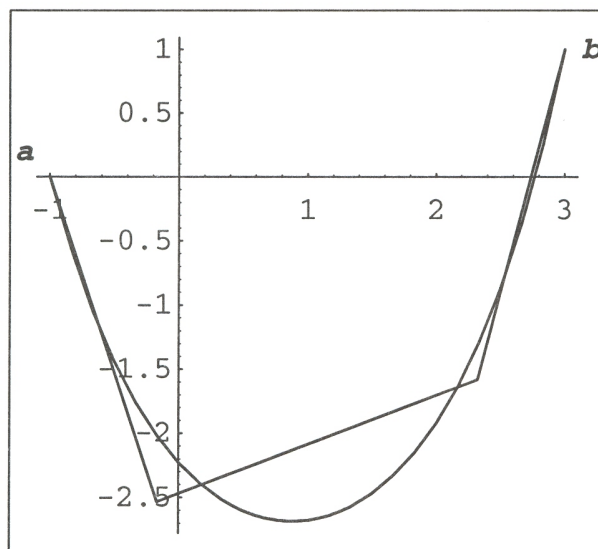
Los valores numéricos son

{0.941857, 0.24348, 0.122843, 0.0216443, 0.00875779, 0.0077665, 0.00743227, 0.00742998, 0.0074473}.

Como es de esperar los valores se reducen hasta cierto punto, pero no convergen hacia cero : La cadena es más realista que la catenaria, que corresponde al caso límite de un número infinito de eslabones. Se puede aclarar la situación fácilmente pensando en una cadena de tres eslabones (y los mismos



puntos extremos y de la misma longitud que la catenaria). En este caso una sola aplicación del algoritmo produce el resultado exacto, pero no tienen porque coincidir los puntos de articulaciones de la cadena con los puntos correspondientes de la catenaria. (En la figura correspondiente se ha dado la cadena con sus eslabones.)



Comentarios finales :

El modelo discreto en el caso de una cadena de tres eslabones es claramente superior al modelo clásico. Se puede imaginarse más situaciones donde es favorable trabajar con el modelo discreto :

- La cadena está compuesta de eslabones de diferentes longitudes, por ejemplo dos cadenas conectados por una vara.
- Los eslabones son de diferentes materiales, y por lo tanto tienen diferentes pesos específicos.
- La cadena está cargada con pesos, como en el cable de un puente.

Todos estos casos son fáciles de modelar en el modelo discreto.

Los cálculos fueron realizados en *Mathematica*. Interesados pueden pedir los archivos en la dirección electrónica del autor.

Jürgen Tischer
 Depto de Matemáticas
 Universidad del Valle
 email : jtischer@hypatia.univalle.edu.co