

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cónicas desde una construcción Punto por Punto Lugares Geométricos en un AGD

Fase 1 de la Situación Problema No. 1a: Construya Geométricamente.

Abra tanto el archivo **rectangulo.fig** como el conjunto de herramientas denominado **Herramientas para esta Situación Problema 1a** en el programa Cabri Géomètre. Observe que dos de los lados están divididos en 10 partes, cada uno de los puntos ha sido nombrado con un número. Desde el punto C se han trazado segmentos hasta cada uno de los puntos divisorios de la altura del rectángulo. Ver Figura 1.¹

Ahora, por cada uno de los puntos de la base superior, nombrados de izquierda a derecha en orden numérico, trace rectas perpendiculares a dicha base. Ver Figura 2.

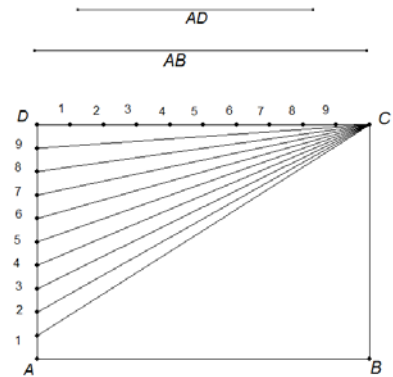


Figura 1

Fase 2 de la Situación Problema No. 1a: Reflexione, Escriba y Valide en el AGD.

- Escriba** a mano, en las hojas de papel, una conjetura acerca de cuál cree Ud. qué es el *Lugar Geométrico* que se forma cuando se unen esos puntos de intersección de las rectas correspondientes a los puntos igualmente numerados. Es decir, la intersección del segmento que pasa por 1 con la recta que pasa por 1, la intersección del segmento que pasa por 2 con la recta que pasa por 2, y así sucesivamente.
- Luego **valide** su conjetura usando el AGD con alguna construcción geométrica dinámica de tal manera que al arrastrar un punto de su construcción, vaya recorriendo dichos puntos de intersección.

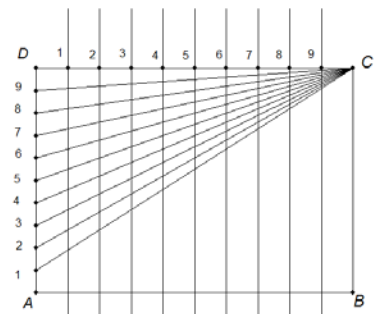


Figura 2

Fase 3 de la Situación Problema No. 1a: Represente Algebraicamente.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Situación problema No. 1a

¹ Situación Problema adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre del libro de Anfossi, A. (1961). Lugares Geométricos. pp. 64. En: *Curso de Geometría Analítica*. México: Editorial Progreso S.A.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 1A.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes _____

y _____

Número de Computador: _____

¿Existe alguna relación geométrica entre la nube de puntos y una cónica en particular que contenga a dichos puntos?. Ver figura 3.

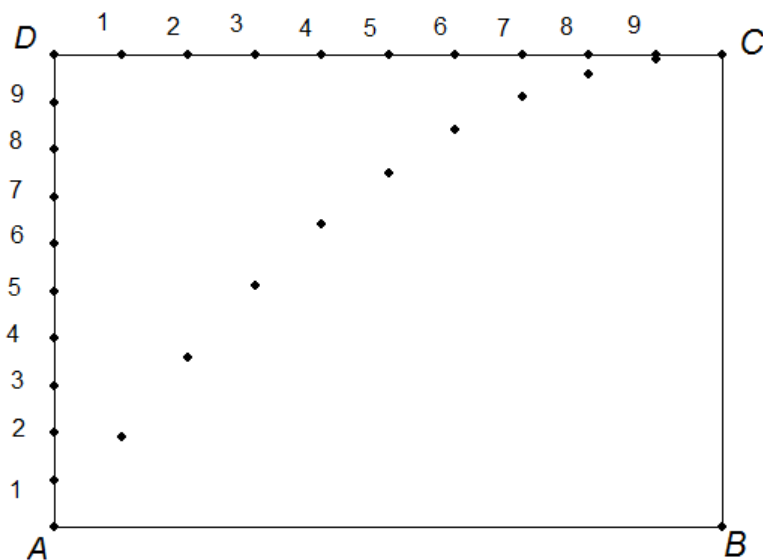


Figura 3

Sugerencias:

1. Tenga en cuenta la definición de una *Cónica* como *Lugar Geométrico*. Revise las definiciones dadas en el libro de texto guía, **Geometría Analítica** de **C. Lehmann**. Para Parábola, la definición aparece en la página 149. Para Elipse, la definición aparece en la página 171; y para Hipérbola, la definición aparece en la página 191.
2. Agréguela a la figura construcciones geométricas auxiliares de tal manera que Usted experimente con el AGD.
3. Si considera focos y/o rectas directrices, entonces dibújelas sobre la figura y trate de experimentar donde quedará especialmente ubicadas.
4. Retome las definiciones.

Conjetura

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN PUNTO POR PUNTO

La Parábola de Werner en un AGD

Fase 1 de la Situación Problema No. 1b: **Construya Geométricamente.**

Este es un método para construir puntos de una parábola de parámetro p con regla y compás. Ver figura 1.¹

1. Trace un segmento de recta y denomínelo p .
2. Se dibujan dos rectas perpendiculares r y s que se cortan en un punto V .
3. Sobre r se señala un punto O a una distancia $2p$ de V , usando el compás.
4. Se trazan circunferencias con el centro en la recta r y que pasan por O ; éstas cortan a la recta s en puntos A, B, C , etc. y a la recta r en A', B', C' , etc.
5. Se trasladan paralelamente los segmentos VA, VB, VC , etc. a los puntos respectivos A', B', C' , etc. obteniéndose los puntos A'', B'', C'' , etc. los cuales pertenecen ya a la parábola de vértice V y parámetro p (junto con sus simétricos respecto de la recta r).

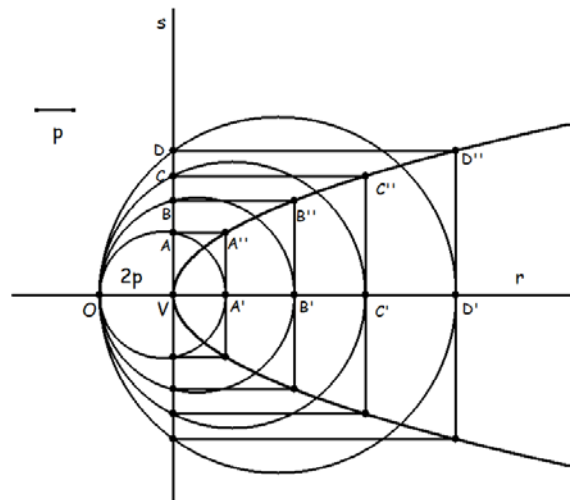


Figura 1: trazado de una parábola según Werner.

Fase 2 de la Situación Problema No. 1b: **Reflexione, Escriba y Valide en el AGD.**

- a) Justifique porque razón la construcción geométrica de Werner es una *Parábola*.
Ayuda 1: Aplique el *teorema de la altura* al triángulo rectángulo OAA' .
- b) Realice una construcción geométrica dinámica d cuando arrastre un punto, entonces exista otro punto de intersección que vaya generando la parábola y que a su vez contenga los puntos de intersección A'', B'', C'' , etc. y sus simétricos con respecto a la recta r .

Fase 3 de la Situación Problema No. 1b: **Represente Algebraicamente.**

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Encuentre el foco, la directriz, el eje focal, el vértice, el lado recto. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Situación Problema No. 1b

¹ Esta es la construcción geométrica de la Parábola del sacerdote, geógrafo y geómetra alemán *Johanes Werner* (1468-1528) que ha sido adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre tomada del libro de Río Sánchez, J. del. (1996). Breve tratado de los lugares geométricos siguiendo el desarrollo histórico de la matemática. pp. 31-32. En: *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 1b.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes _____

y _____

Número de Computador: _____

¿Es posible encontrar el foco, la directriz, el eje focal, el vértice, el lado recto en la Parábola de Werner? Si es así, diga de que manera.

Sugerencias:

El **TEOREMA de la ALTURA** nos da la relación en un triángulo rectángulo de la altura sobre la hipotenusa y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones. Dice así: "En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa."

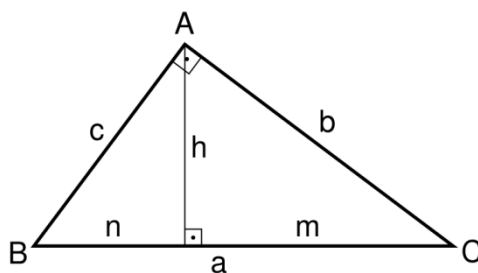


Figura 2

Explicación del TEOREMA de la ALTURA:

La altura del triángulo rectángulo ABC (ver Figura 2) lo divide en dos triángulos rectángulos semejantes, de forma que:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones, que producto de medios es igual a producto de extremos, entonces se tiene:

$$h^2 = mn.$$

Bosqueje una demostración de porque cree Usted que es una Parábola.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN GLOBAL

Uno de los Problemas de Tangencia de Apolonio

Fase 1 de la Situación Problema No. 1c: Lea, piense el enunciado y construya geoméricamente.

Dadas una recta d , un punto cualquiera A que no pertenezca a d , (fije este punto para que no se le mueva con la herramienta *Fijar/Liberar* que se encuentra en el penúltima caja de herramientas de Cabri de Izq. a Der.), es decir, un punto exterior a la recta d y un punto B que este sobre la recta d . (construya B con la herramienta *Punto sobre objeto*). Entonces construya una circunferencia que pase por A y sea tangente a d en el punto B . Es decir, B será un punto de tangencia. Ver Figura 1. Luego encuentre el *Lugar Geométrico* de todos los centros de todas las circunferencias que pasan por A y que sean tangentes a la recta d en el punto B .¹

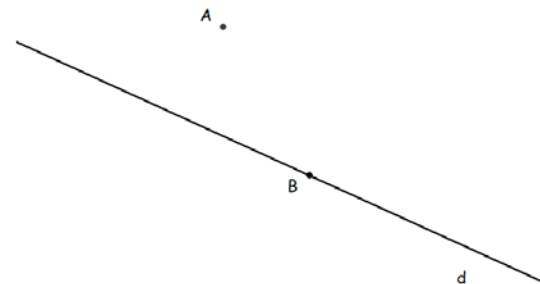


Figura 1: Condiciones iniciales del problema.

Fase 2 de la Situación Problema No. 1c: Reflexione y Haga una nueva construcción en el AGD.

Como una variante de la construcción geométrica clásica de la Parábola, se propone investigar lo que pasa cuando, en lugar de la mediatriz, se construye una recta perpendicular al segmento F_1M de modo que pase por un punto cualquiera A de éste segmento.

Veamos: Ubique un punto A en cualquier parte del segmento F_1M , localice el punto de intersección P entre la recta perpendicular al segmento F_1M que pasa por A y la recta perpendicular a d que pasa por M , construya el *lugar geométrico* del punto P cuando M se mueve a través de la recta d . Ver Figura 2.

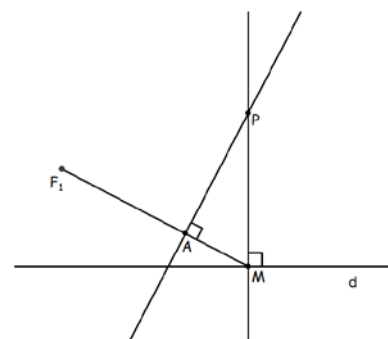


Figura 2.

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Fase 3 de la Situación Problema No. 1c: Experimente sobre la Construcción hecha en la Fase 2 en el AGD.

- 3.1. Arrastre el punto A a lo largo del segmento F_1M y explique lo que ocurre.
- 3.2. La forma del lugar geométrico, ¿corresponde a una parábola?. ¿Por qué razón?
- 3.3. De ser así, ¿dónde están (cuáles son ó cual es) su foco y su directriz?
- 3.4. ¿En qué caso el punto F_1 corresponde al foco?
- 3.5. ¿En qué caso la recta d corresponde a la directriz?
- 3.6. ¿Qué ocurre cuando el punto A coincide con uno de los extremos del segmento F_1M ?
- 3.7. ¿Cuál es la relación de la recta AP con el lugar geométrico de la parábola a medida que el punto A se mueve a través del segmento F_1M ?
- 3.8. ¿Qué es lo realmente importante de la relación entre la mediatriz del segmento F_1M y la parábola?

Fase 4 de la Situación Problema No. 1c: Represente Algebraicamente.

Encuentre, analice y resuelva una situación donde se diseñe el problema inicial (el Problema de Apolonio, el de la Fase 1 en esta Situación Problema No. 1c) usando el plano cartesiano y coordenadas cartesianas a los puntos y rectas dadas, así como los elementos algebraicos pertinentes para la situación. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Situación Problema No. 1c

¹ Este es uno de los diez problemas de tangencias planteados por uno de los grandes geómetras griegos de la antigüedad, Apolonio de Perga (262-190 a.C.). Los famosos problemas de Apolonio por lo regular consisten en dado tres objetos geométricos que pueden ser, cada uno de ellos, puntos, rectas o circunferencias, entonces lo que se pide construir es una circunferencia tangente a los tres objetos. Esta actividad ha sido adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 1c.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes

_____ y _____

Número del Computador donde realizó la Situación Problema No. 1c: _____

Ayuda 1 para la Fase 1: Recuerde que **B** es un punto cualquiera de la recta **d**, y por lo tanto, se puede arrastrar, es decir, es un punto cualquiera móvil, donde su dominio es toda la recta **d**.

Ayuda 2 para la Fase 1: Tenga en cuenta que la **Mediatriz** de un segmento se puede entender como un **Lugar Geométrico** de puntos tales que ... tal cosa sucede con los extremos de dicho segmento.

Ayuda 3 para la Fase 1: Tenga en cuenta la propiedad de la **Circunferencia** con su centro y halle el **Lugar Geométrico** que genera el centro de todas circunferencias tangentes que satisfacen las condiciones del problema. También tenga en cuenta la relación geométrica existente entre el radio y la recta tangente en un punto de tangencia.

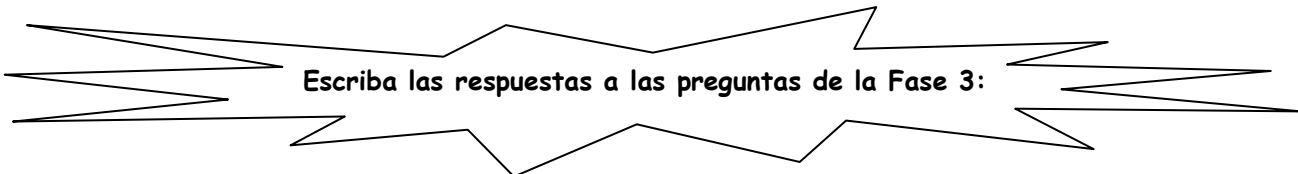


Escriba una Conjetura para la Fase 1:

Nombre del archivo de Cabri: _____



Describe su proceso de Construcción Geométrica:



Escriba las respuestas a las preguntas de la Fase 3:

Responda las Preguntas de la Fase 3 en el espacio que sigue y al revés de la hoja. Recuerde que son ocho (8) preguntas, de la 3.1, a la 3.8.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN PUNTUAL

Descubra la nube de puntos y argumente geoméricamente

Fase 1 de la Situación Problema No. 2a: construya geoméricamente.

Dado un segmento de longitud arbitraria a , construya una semicircunferencia de centro O' . Ver figura 1. Para hacer el diámetro, construya una recta m que pase por O' e intercepte a la circunferencia en los puntos O y A . Estos últimos serán los extremos del diámetro, base de la semicircunferencia.

Luego se trazan segmentos perpendiculares al diámetro, a manera de ordenadas correspondientes a diferentes puntos de la semicircunferencia: H, I, J, K, L, M, N , etc.

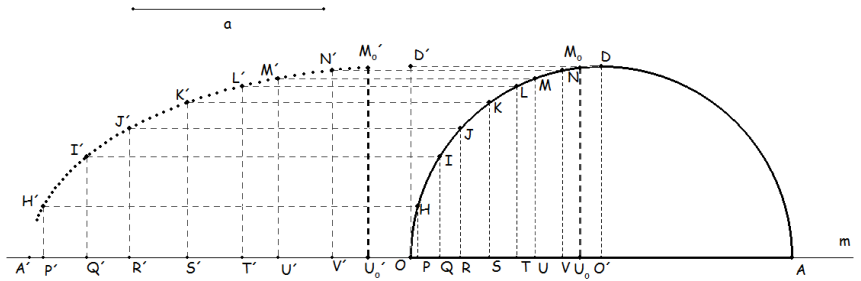


Figura 1.

Luego, en un segmento $OA' = 2a$ y a partir de A' se llevan, en la dirección $A'O$, longitudes de $A'P' = 2OP$, $A'Q' = 2OQ$, $A'R' = 2OR$, etc. Y por los puntos P', Q', R', S' , etc. se levantan perpendiculares a $A'O$ y en ellas se toman longitudes iguales, respectivamente a PH, QI, RJ , etc. Ver figura 1.¹

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Fase 2 de la Situación Problema No. 2a: Conjeture y Valide en el AGD

Escriba una conjetura por escrito acerca del *Lugar Geométrico* que se genera con esa nube de puntos de acuerdo a la construcción dada. Si Ud. afirma que es una *Parábola*, entonces demuestre que todos los puntos H', I', J', K' , etc. extremos de esos segmentos, son puntos de la *Parábola* y describa sus propiedades geométricas tales como cuál es el foco, directriz, eje focal, vértice, etc.

Sin embargo, si Ud. afirma que es una *Elipse*, entonces demuestre que todos los puntos H', I', J', K' , etc. extremos de esos segmentos, son puntos de la *Elipse* de centro O y semiejes focal y no focal iguales a $2a$ y a , respectivamente.

Fase 3 de la Situación Problema No. 2a: Represente Algebraicamente.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Situación Problema No. 2a

¹ Situación Problema adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre del libro de Anfossi, A. (1961). Lugares Geométricos. pp. 73-74. En: Curso de Geometría Analítica. México: Editorial Progreso S.A.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 2a.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes _____

y _____

Número del Computador donde realizó la Situación Problema No. 2a: _____

¿Existe alguna relación geométrica entre la nube de puntos y una cónica en particular que contenga a dichos puntos?. Ver figura 2.

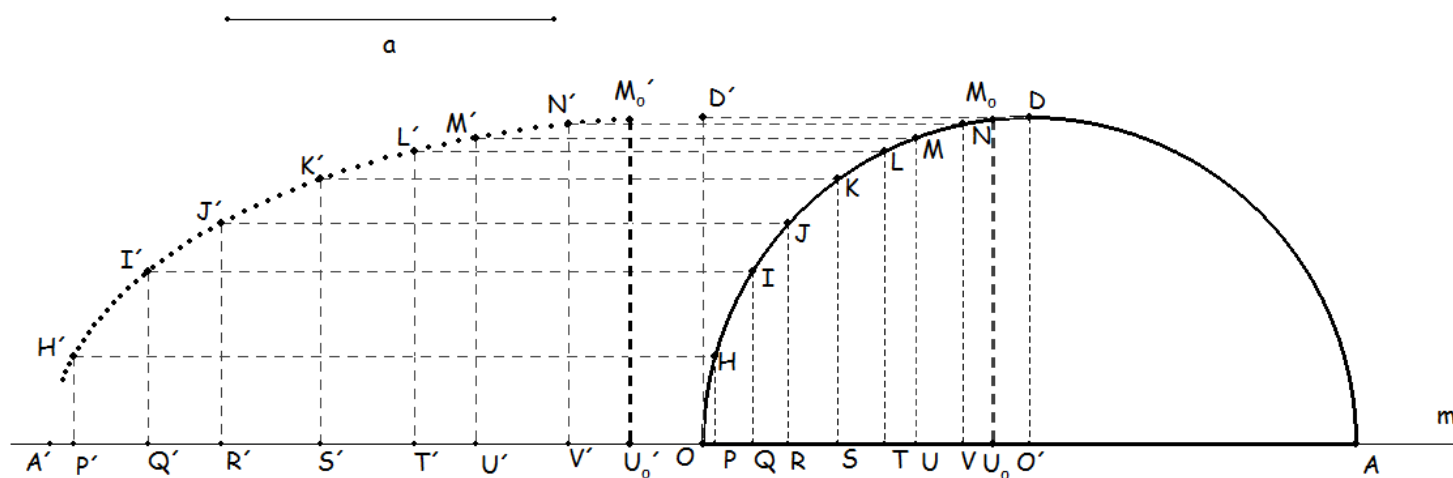


Figura 2

Sugerencias:

1. Tenga en cuenta la definición de una Cónica como Lugar Geométrico. Revise las definiciones dadas en el libro de texto guía, Geometría Analítica de C. Lehmann. Para Parábola, la definición aparece en la página 149. Para Elipse, la definición aparece en la página 171; y para Hipérbola, la definición aparece en la página 191.
2. Agréguela a la figura construcciones geométricas auxiliares de tal manera que Usted experimente con el AGD.
3. Si considera focos y/o rectas directrices, entonces dibújelas sobre la figura y trate de experimentar donde quedará especialmente ubicadas.
4. Retome las definiciones.

Escriba una Conjetura para la Fase 2:

Nombre del archivo de Cabri: _____

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN PUNTUAL HACIA LO GLOBAL

Un nube de puntos de una Elipse

Fase 1 de la Situación Problema No. 2b: construya geométricamente.

Abra primero el archivo proporcionado en el Campus Virtual denominado **Herramientas para esta SP 2b.men** Luego abra el archivo de Cabri denominado **Rectángulo dado para una elipse.fig**

Luego en el archivo de Cabri, tendrá el rectángulo dado con vértices $AA'CC'$ que dependerá de los segmentos AA' y $A'C$. Ahora bien, tres lados del rectángulo están divididos en igual número de partes, de tal modo que sean iguales entre sí las partes de los lados opuestos, y los puntos divisorios se unen con los extremos de la base, como lo indica la figura 1.¹

Luego haga aparecer el punto de intersección entre los segmentos AC y $A'C'$ y denomínelo B . Luego marque el punto medio del segmento AA' y denomínelo O . Por último, trace el segmento de recta OB .

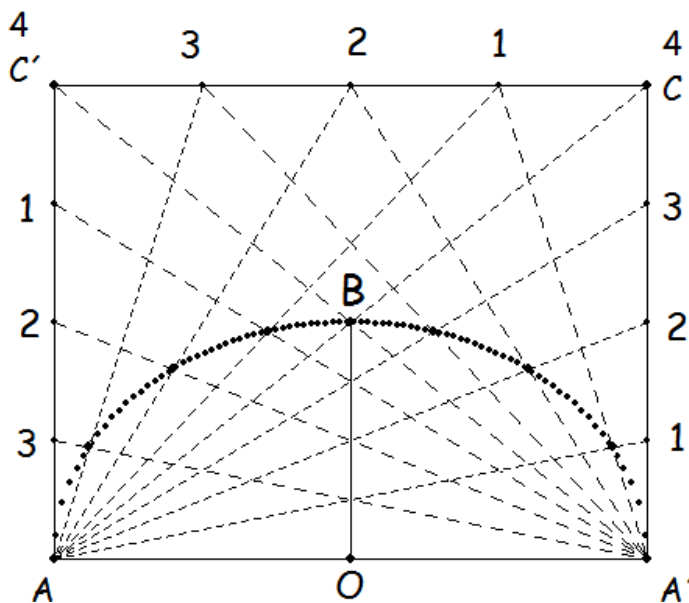


Figura 1.

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Fase 2 de la Situación Problema No. 2b: Valide y Caracterice la Elipse con la ayuda del AGD

- Demuestre que las intersecciones de los segmentos que terminan en los puntos igualmente numerados, son de una *Elipse* que tiene como ejes los lados del rectángulo.
- Escriba en la hoja del estudiante para esta Situación Problema No. 2b, cual es el eje mayor, cual es el eje menor, cual es el eje focal, cuales son los vértices, cuales son los focos. En otras palabras, caracterice toda la elipse.
- Realice una nueva construcción geométrica de tal manera que cuando arrastre un punto, entonces el *Lugar Geométrico* de un punto de intersección en su nueva disposición geométrica, contenga luego a todos los puntos de las intersecciones anteriormente mencionadas. Lea la ayuda que aparece en la Hoja del Estudiante para esta Situación Problema. Ahí encontrará más pistas para que realice una construcción geométrica dinámica.

Fase 3 de la Situación Problema No. 2b: Represente Algebraicamente.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Situación Problema No. 2b

¹ Situación Problema adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre del libro de Anfossi, A. (1961). Lugares Geométricos. pp. 74. En: Curso de Geometría Analítica. México: Editorial Progreso S.A.

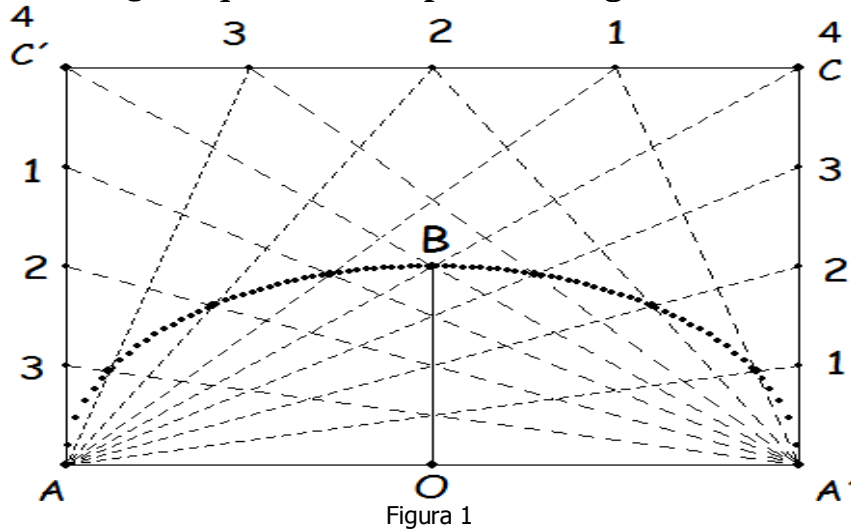
² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes

y

Número del Computador donde realizó la Situación Problema No. 2b: _____

¿Por qué es una elipse en la Figura 1?



¡ Ayuda !

1. Tenga en cuenta la definición de una Cónica como Lugar Geométrico. Revise las definiciones dadas en el libro de texto guía, Geometría Analítica de C. Lehmann. Para Parábola, la definición aparece en la página 149. Para Elipse, la definición aparece en la página 171; y para Hipérbola, la definición aparece en la página 191.
2. Agréguela a la figura construcciones geométricas auxiliares de tal manera que Usted experimente con el AGD.
3. Si considera focos y/o rectas directrices, entonces dibújelas sobre la figura y trate de experimentar donde quedará especialmente ubicadas.
4. Retome las definiciones.
5. Descargue y observe el Video preparado como ayuda para esta Situación Problema 2b. El video se denomina: Video en formato avi sobre otra Construcción Geométrica de una Elipse de manera que se va construyendo punto por punto y determinando los focos.

Escriba las respuestas de Fase 2, los numerales a), b). y c).

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN GLOBAL

Otro Problema de Tangencia de Apolonio

Fase 1 de la Situación Problema No. 2c: Lea, piense el enunciado y construya geoméricamente.

Dada una circunferencia C con centro en O y de radio cualquier longitud, y dado un punto interior cualquiera P distinto del centro O . (fije el punto P para que no se le mueva con la herramienta *Fijar/Liberar* que se encuentra en el penúltima caja de herramientas de Cabri de Izq. a Der.), y dado un punto B que este sobre la circunferencia C . (construya B con la herramienta *Punto sobre objeto*).

Resumiendo, dados los tres anteriores objetos geométricos (C con centro en O , P y B) entonces construya todas las circunferencias tangentes internas a C que pasen por el punto B y que además pasen por el punto fijo P . Es decir, B será el punto de tangencia. Ver Figura 1. Luego encuentre el Lugar Geométrico de todos los centros de todas las circunferencias que pasan por P y que además sean tangentes internas a la circunferencia C en el punto B .¹

Pregunta:

¿Cuál es el Lugar Geométrico que describen los centros de las circunferencias tangentes internas?. Escribanlo en el mismo archivo de Cabri donde hicieron la construcción.

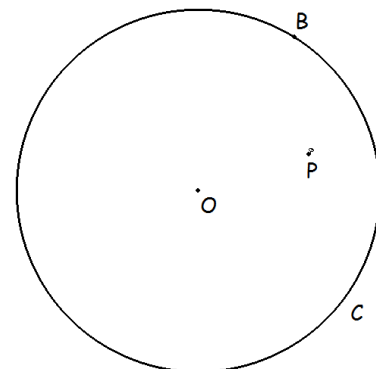


Figura 1: Condiciones iniciales del problema.

Fase 2 de la Situación Problema No. 2c: Reflexione y Haga una nueva construcción en el AGD.

Como una variante de la construcción geométrica que tiene en cuenta la circunferencia focal de una Elipse, se propone investigar lo que sucede cuando, se construye una recta perpendicular m al segmento F_2Q de modo que pase por un punto cualquiera M que pertenece a dicho segmento.

Veamos: Ubique un punto M en cualquier parte del segmento F_2Q , luego trace la recta perpendicular m al segmento F_2Q que pase por M , luego marque el punto de intersección entre la recta m y el segmento F_1Q . Por último, construya el lugar geométrico del punto P cuando se mueve Q a través de la circunferencia X . Ver figura 2.

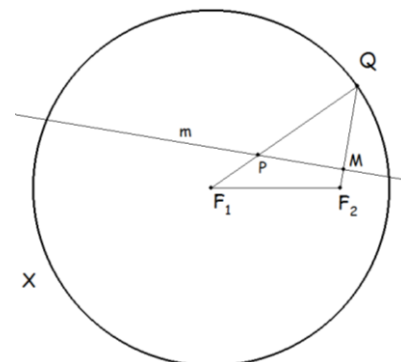


Figura 2.

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Fase 3 de la Situación Problema No. 2c: Experimente sobre la Construcción hecha en la Fase 2 en el AGD.

- 3.1. Arrastre el punto M a lo largo del segmento F_2Q y explique lo que ocurre con el lugar geométrico generado por el punto P .
- 3.2. La forma del lugar geométrico, ¿corresponde siempre en todos los casos a una elipse?. ¿en qué casos si y en qué casos no?. ¿Por qué razón?
- 3.3. De ser así, ¿dónde están ó cuáles son sus focos y cuáles son los vértices, los ejes (el mayor y menor)?
- 3.4. ¿Qué ocurre cuando el punto M coincide con uno de los extremos del segmento F_2Q ?
- 3.5. ¿Cuál es la relación de la recta m con el lugar geométrico de la Elipse a medida que el punto M se mueve a través del segmento F_2Q ?
- 3.6. ¿Qué es lo realmente importante de la relación entre la mediatriz del segmento F_2Q y la elipse?.

Fase 4 de la Situación Problema No. 2c: Represente Algebraicamente.

Encuentre, analice y resuelva una situación donde se diseñe el problema inicial (el Problema de Apolonio, el de la Fase 1 en esta Situación Problema No. 2c) usando el plano cartesiano y coordenadas cartesianas a los puntos y rectas dadas, así como los elementos algebraicos pertinentes para la situación. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Situación Problema No. 2c

¹ Este es uno de los diez problemas de tangencias planteados por uno de los grandes geómetras griegos de la antigüedad, Apolonio de Perga (262-190 a.C.). Los famosos problemas de Apolonio por lo regular consisten en dado tres objetos geométricos que pueden ser, cada uno de ellos, puntos, rectas o circunferencias, entonces lo que se pide construir es una circunferencia tangente a los tres objetos. Esta actividad ha sido adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 2c.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes

y

Número del Computador donde realizó la Situación Problema No. 2c: _____

Ayuda 1 para la Fase 1: Recuerde que **B** es un punto cualquiera de la circunferencia **C**, y por lo tanto, se puede arrastrar, es decir, es un punto cualquiera móvil, donde su dominio es toda la circunferencia **C**.

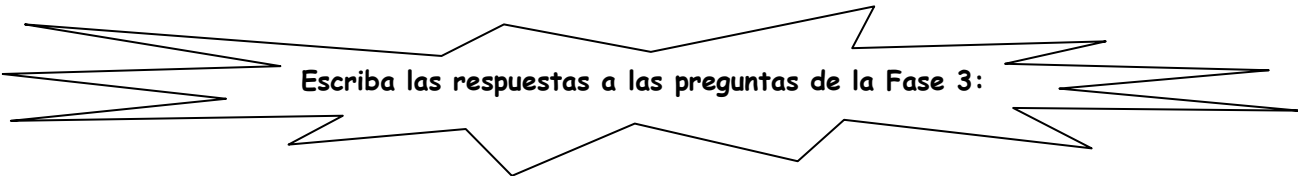
Ayuda 2 para la Fase 1: Tenga en cuenta que la **Mediatriz** de un segmento se puede entender como un **Lugar Geométrico** de puntos tales que ... tal cosa sucede con los extremos de dicho segmento.

Ayuda 3 para la Fase 1: Tenga en cuenta la propiedad de la **Circunferencia** con su centro y halle el **Lugar Geométrico** que genera el centro de todas circunferencias tangentes que satisfacen las condiciones del problema. ¿En que lugar estará el centro de todas las circunferencias tangentes en el punto **B**?



Escriba una Conjetura para la Fase 1:

Nombre del archivo de Cabri: _____



Escriba las respuestas a las preguntas de la Fase 3:

Responda las Preguntas de la Fase 3 en el espacio que sigue y al revés de la hoja. Recuerde que son ocho (8) preguntas, de la 3.1, a la 3..

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cónicas desde una construcción Punto por Punto Lugares Geométricos en un AGD

Fase 1 de la Situación Problema No. 3a: Construya Geométricamente.

Primero que todo, descargue y abra el conjunto de herramientas denominado **Herramientas para esta Situación Problema3a.men** en el programa Cabri Géomètre. Luego empieza a realizar la siguiente construcción geométrica:

Dado un segmento de longitud k y un punto fijo $P(0,a)$, se trazan semirrectas secantes PS_n que cortan en S_n ($n \in \mathbb{N}$) al eje X . Desde cada punto S_n de intersección se lleva, en la dirección OX , una distancia constante $S_nQ_n=k$. Se trazan después las rectas Q_nM_n perpendiculares al eje X por cada Q_n , que cortan a las secantes PS_n en M_n . Los puntos Q_n están a una distancia k en la dirección OX del punto S_n . Ver Figura 1.¹

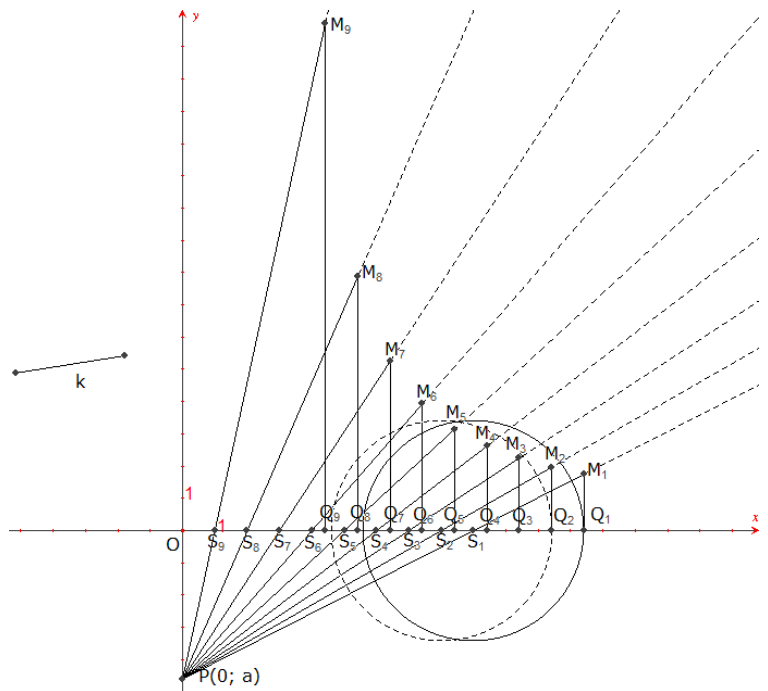


Figura 1

Preparado por: Edinsson Fernández M.²

Fase 2 de la Situación Problema No. 3a: Reflexione, Escriba y Valide en el AGD.

- Escribe** a mano, en la hoja de estudiante, una conjetura acerca de cuál crees tú qué es el *Lugar Geométrico* que se forma cuando se unen los puntos M_n .
- Luego **valida** tú conjetura usando el AGD con alguna construcción geométrica dinámica de tal manera que al arrastrar un punto de su construcción, vaya recorriendo dichos puntos de intersección.

Fase 3 de la Situación Problema No. 3a: Represente Algebraicamente.

Encuentra una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realices la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Situación problema No. 3a

¹ Situación Problema adaptada y re-pensada para que tenga sentido al ser trabajada en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre del libro de Anfossi, A. (1961). Lugares Geométricos. pp. 83. En: Curso de Geometría Analítica. México: Editorial Progreso S.A.

² Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 3A.

Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes _____

y _____

Número de Computador: _____

¿Existe alguna relación geométrica entre la nube de puntos y una cónica en particular que contenga a dichos puntos?. Ver figura 2.

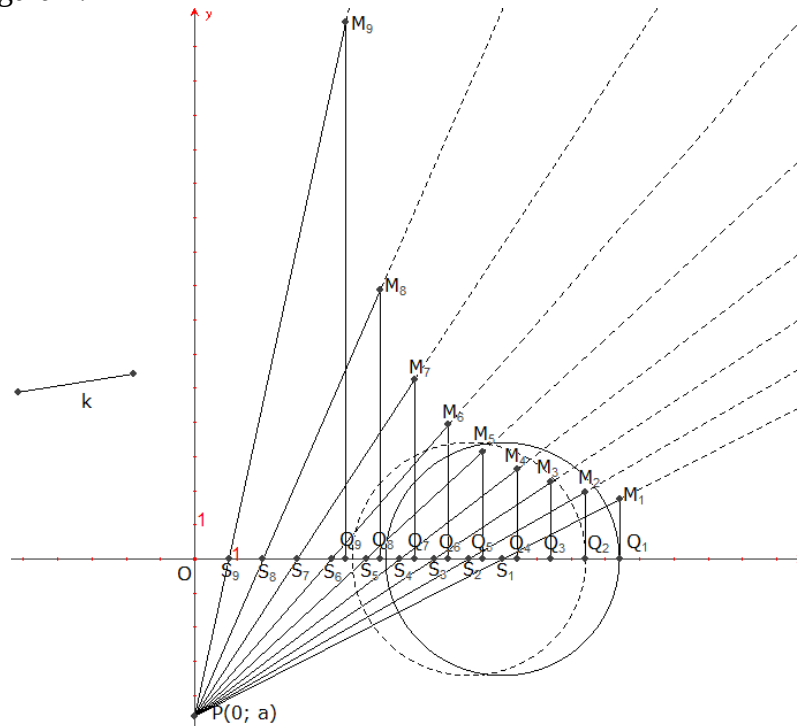


Figura 2

Sugerencias:

1. Tenga en cuenta la definición de una *Cónica* como *Lugar Geométrico*. Revise las definiciones dadas en el libro de texto guía, **Geometría Analítica** de **C. Lehmann**. Para Parábola, la definición aparece en la página 149. Para Elipse, la definición aparece en la página 171; y para Hipérbola, la definición aparece en la página 191.
2. Agréguela a la figura construcciones geométricas auxiliares de tal manera que Usted experimente con el AGD.
3. Si considera focos y/o rectas directrices, entonces dibújelas sobre la figura y trate de experimentar donde quedará especialmente ubicadas.
4. Retome las definiciones.

Conjetura

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CÓNICAS DESDE UNA CONSTRUCCIÓN GLOBAL

La Potencia de un Punto

Fase 1 de la Situación Problema No. 3b: Lea, piense el enunciado y construya geoméricamente.

Dado una circunferencia C de radio cualquiera y centro O' y un punto P interior a la circunferencia, construya dos cuerdas de la circunferencia C que pasen por P y encuentre la relación entre las medidas de los segmentos que dichas cuerdas determinan.

A continuación encontrará orientaciones que te pueden ayudar a solucionar el problema propuesto.

- Ubique dos puntos A y B como punto sobre objeto, en la circunferencia.
- Luego trace una semirrecta con origen en A y que pase por P .
- Igualmente, otra semirrecta con origen en B y que pase por P .
- Marque punto en la intersección de las semirrectas con la circunferencia y denótelos H y G . Vea la figura 1.
- Oculte las semirrectas AP y BP y trace los segmentos AG y BH . Vea la figura 2.
- Nombre los segmentos que sobre las cuerdas determina el punto P . _____, _____, _____ y _____.
- Ahora, establezca relaciones entre las medidas de la longitud de cada una de los segmentos anteriores. Para ello, tome medidas y explore moviendo el punto A o el punto B .

Preguntas a la primera exploración:

1. ¿Qué longitudes varían?
2. ¿Qué valores numéricos no cambian?
3. ¿A qué conjeturas has llegado?

Fase 2 de la Situación Problema No. 3b: Reflexione y Haga una nueva construcción en el AGD.

Utilizando el Plano Cartesiano, analice la variación que ocurre entre las medidas de las longitudes de los dos segmentos que determinó el punto P sobre una de las cuerdas. Ver figura 3.

- Para ello, transfiera una medida sobre el eje X y la otra sobre el eje Y .
- Trace rectas perpendiculares a cada eje, por el punto que determina la medida transferida.
- Marque el punto de intersección entre las perpendiculares y denótelo como R .
- Encuentre el *lugar geométrico* de R cuando se mueve el punto extremo A o B dependiendo de la cuerda que ha tomado.
- Ahora, construya el rectángulo con la herramienta polígono, cuya diagonal es el segmento OR siendo O el origen del plano cartesiano.

Preguntas a la exploración de la Fase 2:

Al mover uno de los extremos seleccionados:

1. ¿Cuál es el *lugar geométrico* que genera el punto R ?
2. ¿Qué pasa con las longitudes de los segmentos que conforman la cuerda?
3. ¿Qué pasa con el producto de esas longitudes?
4. Describa el comportamiento de los atributos del rectángulo.
5. ¿Qué sucede si P se ubica en el centro del círculo?
6. ¿Qué sucede si P se ubica sobre la circunferencia?
7. ¿Qué sucede si P está en el exterior del círculo?
8. Caracterice la cónica que resulta del *lugar geométrico*. Es decir, encuentre las partes constitutivas de la curva.
9. Encuentre una construcción geométrica dinámica, de tal manera que cuando arrastre un punto, entonces otro punto de la construcción vaya generando la cónica que se superpone al lugar geométrico generado por el punto R .

Fase 3 de la Situación Problema No. 3b: Represente Algebraicamente.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

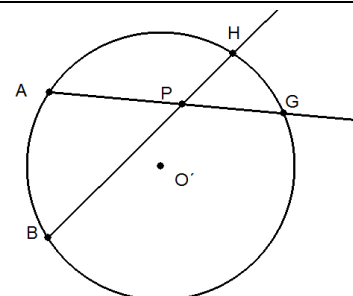


Figura 1: Condiciones iniciales del problema.

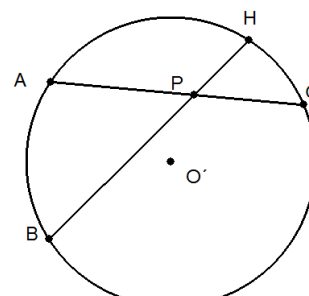


Figura 2.

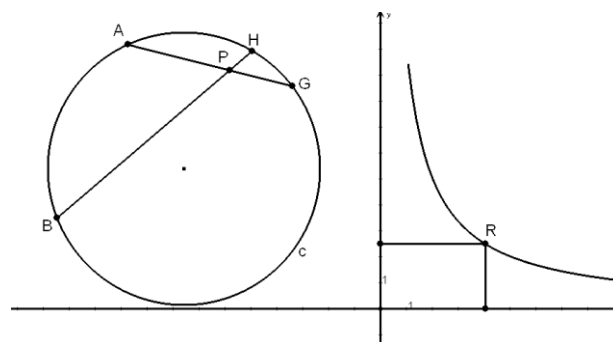


Figura 3

Preparado por: Edinsson Fernández M.¹

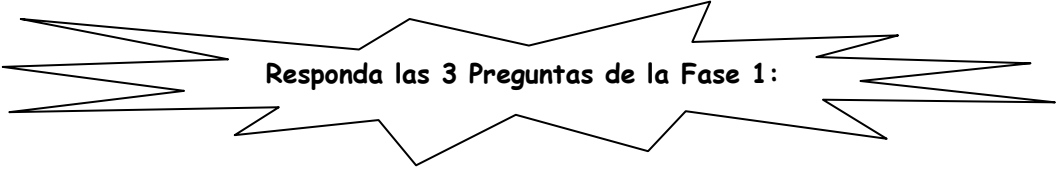
¹ Esta actividad es propiedad del autor y en ningún momento está permitida su reproducción total o parcial ni debe ser transmitida para efectos de enseñanza o de aprendizaje, debido a que está reservada, por el momento, para efectos investigativos en Educación Matemática, sin un consentimiento o permiso previo realizado por escrito por el autor.

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN PROBLEMA No. 3b.

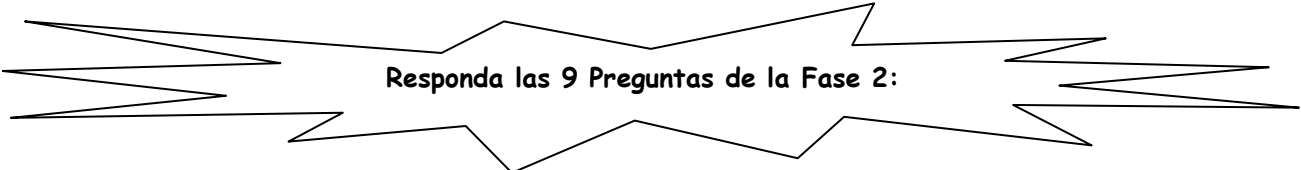
Nombres y Apellidos de la Pareja de Estudiantes

_____ y _____

Número del Computador donde realizó la Situación Problema No. 3b: _____



Responda las 3 Preguntas de la Fase 1:



Responda las 9 Preguntas de la Fase 2:

Responda las Preguntas de la Fase 2 en el espacio que sigue y al revés de la hoja. Recuerde que son nueve (9) preguntas, de la 1.) a la 9.).
