



Conocimiento didáctico del profesor de matemáticas en grado séptimo sobre la igualdad en los números reales

Evert Alexis Yela Arango - 1925923

Josshua Ortiz Pedroza - 1928338

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024



Conocimiento didáctico del profesor de matemáticas en grado séptimo sobre la igualdad en los números reales

Evert Alexis Yela Arango - 1925923

Josshua Ortiz Pedroza - 1928338

Trabajo de grado para optar el título de

Licenciado(s) en matemáticas

Director del trabajo de grado:

Mg. José Luis Vásquez Tigreros

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024

Resumen

En este trabajo se describen los conocimientos didácticos que el profesor con formación en educación matemática desarrolla a partir del diseño de propuestas educativas que relacionan la resolución de problemas en situaciones de igualdad con números reales en grado séptimo. La metodología del trabajo es de tipo cualitativa, centrada en un estudio de casos para caracterizar el conocimiento didáctico de un profesor a través de un modelo local que articula el Análisis didáctico y el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), con el objetivo de caracterizar las concepciones de un profesor de matemáticas según el modelo local de enseñanza. Se diseña una matriz comparativa para contrastar el modelo local de enseñanza con las concepciones del estudio de caso, para caracterizar las concepciones y decisiones del profesor cuando se enfrenta a la enseñanza de la noción de igualdad con números reales. Finalmente, se presentan las conclusiones y reflexiones finales de la investigación, sobre los aspectos considerados en la matriz comparativa en relación con el conocimiento didáctico evidenciado por el docente. Esto demuestra que el conocimiento profesional de un profesor va más allá de simplemente saber matemáticas, implicando una integración efectiva entre el conocimiento teórico y práctico, para generar un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: *Resolución de problemas, igualdades numéricas, Mathematical Knowledge for Teaching, conocimiento didáctico, formación docente.*

Abstract

This work describes the didactic knowledge that the teacher with training in mathematics education develops from the design of educational proposals that relate the resolution of problems in situations of equality with real numbers in seventh grade. The methodology of the work is qualitative, focused on a case study to characterize the didactic knowledge of a teacher through a local model that articulates the Didactic Analysis and the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model, with the objective of characterizing the conceptions of a mathematics teacher according to the local teaching model. A comparative matrix is designed to contrast the local teaching model with the conceptions of the case study, to characterize the conceptions and decisions of the teacher when faced with teaching the notion of equality with real numbers. Finally, the conclusions and final reflections of the research are presented, on the aspects considered in the comparative matrix in relation to the didactic knowledge evidenced by the teacher. This shows that a teacher's professional knowledge goes beyond simply knowing mathematics, involving an effective integration between theoretical and practical knowledge, to generate a positive impact on student learning.

Keywords: Problem solving, numerical equalities, Mathematical Knowledge for Teaching, didactic knowledge, teacher training.

Dedicatoria

En primer lugar, a nuestras familias y principalmente a nuestras madres, quienes han sido un apoyo incondicional desde lo moral y económico en el transcurso de la elaboración de este trabajo de investigación y a lo largo de la carrera. Gracias a nuestros abuelos, padres, hermanos, e hija, por estar presentes en cada momento que requerimos de su guía y refugio, este logro también es de ustedes. Igualmente, agradecemos a nuestro tutor Jose Luis Vásquez, quien nos ayudó y dedicó su tiempo para guiarnos en la elaboración de este proyecto, destacamos su compromiso en su función como tutor y como formador del profesorado de matemáticas, ya que fue clave para la finalización de este proyecto de grado. Por último, a la Universidad del Valle por ser nuestra alma mater y formarnos con excelentes habilidades y competencias desde lo profesional y social, gracias por siempre servir como una institución de educación superior formadora de profesionales con una alta calidad educativa, agradecemos por brindarnos el mejor entorno académico en todo este proceso formativo. Con mucha gratitud, Joshua Ortiz Pedroza y Evert Alexis Yela.

Índice de contenido

Índice de tablas.....	8
Índice de gráficos.....	8
Introducción.....	9
Capítulo I - El problema.....	11
1. 1 Descripción del problema.....	11
1. 1. 1 En la formación y conocimiento del docente de matemáticas.....	11
1. 1. 2 En el currículo de programas de formación del profesorado de matemáticas.....	13
1. 1. 3 En el aprendizaje y enseñanza de la igualdad numérica.....	14
1. 2 Objetivo general.....	18
1. 2. 1 Objetivos específicos.....	18
1. 3 Antecedentes.....	18
1. 3. 1 Acerca de la resolución de problemas en la formación de profesores.....	18
1. 3. 2 Sobre la enseñanza de la igualdad numérica en los reales desde el enfoque de (RdP).....	20
1. 3. 3 Sobre el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).....	22
1. 4 Justificación.....	25
Capítulo 2 - Marco teórico.....	28
2. 1 Análisis Didáctico (AD).....	28
2. 2 Estructura del Análisis Didáctico (AD).....	29
2. 2. 1 Análisis conceptual.....	30
2.2.1.1 Análisis conceptual sobre las igualdades en los números reales.....	31
2. 2. 2 Análisis de contenido.....	33
2.2.2.1 Análisis de contenido sobre las igualdades en los números reales.....	33
2. 2. 3 Análisis cognitivo.....	35
2. 2. 3.1 Análisis cognitivo sobre la igualdad en los números reales.....	36
2. 3 Modelo de Análisis didáctico (AD).....	37
2. 3 Formación y conocimiento didáctico del profesor de matemáticas.....	38
2. 3. 1 Desempeños del docente con formación en matemáticas.....	40
2. 3. 2 Organización de los contenidos matemáticos escolares.....	40
2. 3. 3 Modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).....	41
2. 4 Igualdades en los números reales desde la didáctica y desde las matemáticas.....	43
Capítulo 3 - Metodología de investigación.....	48

3. 1 Contexto y participantes.....	48
3. 2 Modelo local de enseñanza (Creación propia).....	49
3. 3 Estudio de caso.....	51
3. 3. 1 Entrevista semiestructurada.....	52
3. 3. 2 Metodología de la entrevista.....	52
3. 4 Análisis de la información recolectada.....	52
3. 4. 1 Matriz comparativa.....	54
Capítulo 4 - Conclusiones finales.....	89
Bibliografía.....	91
Anexos.....	95
Preguntas - Entrevista semiestructurada.....	95

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Estructura del Análisis de contenido sobre la noción igualdad.....</i>	<i>34</i>
<i>Tabla 2. Modelo local del Análisis didáctico.....</i>	<i>37</i>
<i>Tabla 3. Matriz comparativa de dominio (SMK).....</i>	<i>55</i>
<i>Tabla 4. Matriz comparativa de dominio (PCK).....</i>	<i>65</i>

Índice de gráficos

<i>Gráfico 1. Ciclo y estructura del Análisis didáctico.....</i>	<i>37</i>
<i>Gráfico 2. Gráfico 2. Modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).....</i>	<i>43</i>
<i>Gráfico 3. Articulación del Análisis didáctico y modelo MKT.....</i>	<i>50</i>
<i>Gráfico 4. Articulación del modelo local de enseñanza y las categorías de estudio.....</i>	<i>54</i>

Introducción

El presente trabajo de investigación se desarrolla en el campo de la Didáctica de Matemáticas; específicamente en la línea de la formación del docente del Programa de Licenciatura en Matemáticas, de la Facultad de Educación y Pedagogía (FEP) de la Universidad del Valle. La metodología del trabajo es tipo cualitativa centrada en el estudio de casos, articulado con el Análisis didáctico (AD)¹, y el desarrollo de una técnica de entrevista (semiestructurada) como instrumento para la recolección de datos. Asimismo, se presenta una matriz comparativa que fue articulada con las categorías de estudio empleadas para la entrevista y el modelo local de enseñanza; creado a partir del MKT y AD.

En esta investigación se presenta un análisis teórico de los desempeños del profesor de matemáticas cuando se enfrenta a la resolución de problemas (RdP)² de igualdad con números reales en el nivel de básica secundaria, específicamente en el grado séptimo, gracias al análisis de los documentos teóricos que se abordan a lo largo de trabajo sobre: RdP matemático, la noción de igualdad, el modelo local de enseñanza que articula desarrollos del Análisis Didáctico y el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)³, y la formación de docente de matemáticas. El contexto de cómo entendemos los desempeños del docente con formación en matemáticas se relaciona con lo planteado por Llinares (2012), quien entiende los desempeños del docente como las acciones, habilidades y competencias que los futuros profesores y profesores en ejercicio, desarrollan y demuestran en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Igualmente, este trabajo tiene como objetivo caracterizar las concepciones de los docentes con formación en matemáticas, según el modelo local de enseñanza, cuando se enfrentan a la resolución de problemas de igualdad con números reales en grado séptimo. Para ello, se emplea una matriz comparativa, para caracterizar las concepciones del docente con formación en matemáticas con el modelo local de enseñanza, que destaca los conocimientos de

¹ (AD) Análisis Didáctico.

² (RdP) resolución de problemas.

³ (MKT) Mathematical Knowledge Teaching.

estos cuando desarrollan actividades de resolución de problemas. Por último, se interpretan y analizan los aspectos considerados en la matriz comparativa en relación con las concepciones del docente con formación en matemáticas cuando planifica actividades de resolución de problemas; todo lo anterior asociado a la enseñanza y aprendizaje de las igualdades numéricas en los números reales.

Para finalizar, se presentan las conclusiones sobre la investigación con respecto al marco teórico, la metodología de investigación, la experiencia en la práctica profesional y las dificultades encontradas asociadas a nuestra investigación sobre los conocimientos didácticos de un profesor de matemáticas cuando se enfrenta a la resolución de problemas de igualdad con números reales en el nivel de básica secundaria.

En el siguiente apartado se describen los aspectos asociados con la problemática de estudio relacionado con el conocimiento didáctico de un profesor de matemáticas al planificar una propuesta educativa para la enseñanza de la igual en los números reales en el grado séptimo de básica secundaria.

Capítulo I - El problema

En este primer capítulo se presenta la problemática del trabajo de investigación establecida desde tres categorías que estructuran: el problema visto desde la formación y conocimiento del docente de matemáticas, el problema visto desde el currículo de los programas de formación del profesorado de matemáticas, y el problema visto desde la enseñanza y aprendizaje de la igualdad. Lo anterior, es con el objetivo de dar a conocer la descripción del problema, tomando de referencia a algunas investigaciones sobre la igualdad en los números reales, un enfoque de RdP y el modelo de enseñanza MKT. Dicho problema se indaga en el campo de la formación del docente, así como en los aspectos didácticos, curriculares y disciplinares que están involucrados en dicha formación. Asimismo, la descripción que se presenta en este capítulo permite dar cuenta de la pregunta, los objetivos, la justificación y antecedentes de comunidades de investigación acerca del tratamiento y las formas de abordar el problema descrito en contextos específicos.

1. 1 Descripción del problema

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas revelan obstáculos y limitaciones que dificultan la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los aprendices. Una de estas dificultades, es la que se identifica cuando los docentes en ejercicio requieren resolver problemas matemáticos asociados con propiedades básicas de la teoría de números, específicamente, situaciones sobre la igualdad numérica en el campo de los reales. A continuación, se presentan las tres categorías que estructuran el problema de esta investigación: el problema visto desde la formación y conocimiento del docente de matemáticas, el problema visto desde el currículo de los programas de formación del profesorado de matemáticas, y el problema visto desde la enseñanza y aprendizaje de la igualdad.

1. 1. 1 En la formación y conocimiento del docente de matemáticas

Esta categoría se relaciona con las competencias profesionales asociadas a la interpretación, planificación y desarrollo de su labor docente a partir de sus conocimientos,

experiencias y prácticas de enseñanza. Estas competencias profesionales permiten el desarrollo y comprensión de los temas a sus estudiantes, por lo que algunas de estas decisiones pueden evidenciar dificultades o limitaciones que dan cuenta sobre procesos de formación y conocimiento de los profesores de matemáticas.

Al respecto, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) mencionan que los profesores no cuentan con las técnicas de enseñanza que les permitan establecer y modificar un contenido de los saberes, y que aporte a la construcción de los currículos o los libros de textos de los colegios para la comprensión de la noción de igualdad. Esto es, que hasta los propios profesores no son conscientes de los diferentes significados y contextos del signo igual. Además, los autores mencionan que el hecho que los profesores no señalen a sus estudiantes que el signo igual puede tener diferentes significados es cuestión de una transposición didáctica, o sea, los profesores deben organizar y modificarse el contenido de saberes sobre la noción de igualdad específicamente los diferentes significados y contextos del signo igual.

A partir de lo planteado por Ball, Thames, y Phelps (2008) establece la importancia de estructurar y definir los conocimientos del contenido del profesor de matemáticas, o sea, los conocimientos matemáticos necesarios para realizar las tareas recurrentes de enseñar matemáticas a los estudiantes. Igualmente, se menciona que lo anterior se da a partir de la necesidad de ver más allá de aspectos generales de la enseñanza y tener una mirada desde varios contextos. Los autores establecen que al identificar las demandas cognitivas se busca relacionar los conocimientos matemáticos que exige el trabajo que realiza el profesor, estableciendo varios dominios del profesor de matemáticas para caracterizar los conocimientos del contenido del profesor y no caer en una perspectiva reduccionista.

De igual manera, Flores, Sosa y Ribeiro (2016) señalan que la complejidad del conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas puede plantear desafíos a la definición y comprensión de un objeto en estudio. Esta afirmación se refiere principalmente a la diversidad de elementos que conforman el conocimiento del contenido especializado del profesor, este conocimiento no solo incluye el conocimiento del contenido matemático, sino también el

conocimiento didáctico, el conocimiento del currículo, el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento del contexto educativo. Además, estos elementos no son independientes entre sí, sino que están interrelacionados y se combinan en la práctica del profesor de matemáticas. Por lo tanto, la comprensión y definición del conocimiento del contenido especializado del profesor de matemáticas puede ser un proceso complejo y desafiante.

1. 1. 2 En el currículo de programas de formación del profesorado de matemáticas

Esta categoría se establece desde la perspectiva de la resolución de problemas matemáticos, analizando las dificultades que se puedan generar desde los currículos de los programas de formación del profesorado de matemáticas, y la importancia para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

La primera perspectiva que presentamos es la de Malaspina (2016) menciona que el planteamiento y RdP matemáticos son dos aspectos esenciales de la actividad matemática, pero los investigadores y profesores no le prestan la atención que requiere en relación con lo que representa plantear y solucionar problemas matemáticos para un objeto de aprendizaje. Asimismo, hay dificultad para llevar a cabo en la práctica todo lo descrito por las comunidades académicas. Además, establece estar de acuerdo con lo afirmado por: Ellerton (2013) y Abu-Elwan (1999) sobre la implicación que tiene los formadores de docentes en los procesos de RdP matemáticos, específicamente enfatiza en la importancia crítica, o sea, los profesores de matemáticas deben tener las habilidades para ir más allá de solucionar problemas; promoviendo situaciones en el aula de clase y enfocándose en el análisis e interpretación de los problemas matemáticos.

Al respecto Felmer, et al. (2015) en su investigación realizada presentan dos dificultades relacionadas con la resolución de problemas en la formación del profesor, los profesores en el estudio señalaron los siguientes aspectos: las limitaciones sobre lo que entienden por problema; el uso de heurísticas y la falta de oportunidades para reflexionar sobre la introducción de la RdP en el contexto de la enseñanza de la matemática escolar, y la identificación de una actividad matemática como un problema; los profesores presentan limitaciones en el uso de heurísticas

frente a la RdP con múltiples soluciones y creen resolver un problema cuando encuentran solo una de las soluciones, sin plantearse a encontrar otras posibles respuestas al problema. En resumen, la primera fenomenología se asocia a la comprensión, el uso de heurísticas y el desarrollo de estrategias de metacognición. La segunda fenomenología se asocia a la definición de lo que se entiende por problema y las diferentes soluciones que pueden plantearse de acuerdo al tipo de problema que se esté desarrollando.

De acuerdo con Wilhelmi, et al. (2007)

... La noción de igualdad no explícita referencia alguna a un sistema de prácticas matemáticas ni tampoco a un contexto matemático de uso. En muchas circunstancias, las instituciones escolares aceptan (irreflexivamente) que los estudiantes tienen la capacidad de adaptar esta definición formal de la noción de igualdad a los diferentes contextos de uso, produciéndose un fenómeno de ilusión de transparencia (p. 82).

Con lo anterior, se enfatiza en errores que se generan en las instituciones educativas o colegios desde el currículo escolar para lograr organizar o modificar la definición de igualdad y lograr entenderla desde diferentes contextos. Asimismo, las implicaciones que se generan al no realizar por parte de los profesores o instituciones educativas ningún tipo de análisis o estudios sobre las diferentes funciones que se le puede dar al signo igual; dando por hecho que los estudiantes van a deducir los diferentes significados y contextos a partir del problema presentado por el profesor.

1. 1. 3 En el aprendizaje y enseñanza de la igualdad numérica

Esta última categoría se presenta en relación con las dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la noción de igualdad numérica, en particular, los obstáculos y limitaciones que se evidencian en diferentes niveles de escolaridad.

En cuanto a la revisión teórica de algunos documentos sobre las dificultades y limitaciones del aprendizaje de la igualdad numérica, autores como (Chica y Soto, 2015, como se citó en Navia y Vergara, 2021) permite constatar que los estudiantes presentan dificultades para usar y entender el signo igual como una relación de equivalencia y en su lugar, la gran mayoría

de los estudiantes lo ven como un significado operacional. Asimismo, se identifica el poco uso de las propiedades de la igualdad, así se puede ver en (Chica y Soto, 2015, como se citó en Navia y Vergara, 2021):

En síntesis, esta investigación permite reconocer un problema generalizado, por parte de los estudiantes de educación primaria y secundaria, en torno a la comprensión limitada del signo igual. Particularmente, en el contexto de resolución de ecuaciones se logra evidenciar que los estudiantes presentan un nivel eminentemente operatorio, como si se tratara de un indicador para operar, dejando de lado algunos usos de las propiedades de la igualdad. Además, permite evidenciar que las concepciones erróneas que conciben los estudiantes en relación con el signo igual, en aritmética, trae consigo dificultades en el aprendizaje del álgebra (p.7).

Igualmente, Molina, et al., (2006) mencionan que existen las siguientes dificultades y limitaciones: dificultad para reconocer igualdades cerradas⁴ y abiertas; en la investigación realizada los estudiantes presentaron dificultades para reconocer el significado de expresiones de la forma $a = a$, por no tener una operación involucrada, $c = a + b$, por el orden de los miembros de la igualdad, y $a + b = c + d$ por la posición del signo igual en el medio. Otra dificultad que reconocen los autores en su investigación es la tendencia computacional, los estudiantes mostraron una tendencia a operar inmediatamente con los números involucrados en la igualdad, sin considerar la igualdad como un todo, los autores expresan que lo anterior es una consecuencia a la enseñanza del cálculo que tradicionalmente domina la enseñanza de la aritmética. Por último, los autores expresan que hay una limitada comprensión del significado del signo igual por parte de los estudiantes en contextos aritméticos, esto es, a lo largo de las secciones de clase se pudo ver una evolución desde la interpretación operacional del signo.

⁴ Las igualdades abiertas son aquellas que presentan algún término desconocido (incógnita), a averiguar (e.g., $8 + 4 = + 5$). Las igualdades cerradas, por el contrario, aparecen completas, sin ningún término desconocido (e.g., $8 + 4 = 7 + 5$).

En conclusión, en los documentos presentados anteriormente se destaca la importancia de abordar desde la resolución de problemas el desarrollo del pensamiento relacional ⁵ y la comprensión del significado del signo igual, desde los primeros cursos de la Educación Matemática.

Así entonces, en esta propuesta se considera la RdP matemáticos como un proceso fundamental, a lo largo de toda la formación docente y escolaridad de las personas, que contribuye a desarrollar habilidades cognitivas y descubrir un repertorio de estrategias que posibilitan a los sujetos considerar diversas estrategias para resolver nuevos y desafiantes problemas. Tal como afirman Castro y Lupiáñez (2016) “La resolución de problemas significativos contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior y descubrir un repertorio de estrategias que preparan al escolar para resolver nuevos problemas” (p. 46).

Igualmente, este estudio considera al docente como un actor crucial para interpretar las relaciones, propiedades y aplicación de los objetos matemáticos en su naturaleza epistemológica, fenomenológica y abstracta. Por lo tanto, la manera como los docentes planteen sus propuestas didácticas basadas en su conocimiento sobre las igualdades numéricas se debe favorecer el desarrollo del pensamiento relacional, así como lo plantean Molina, Castro y Ambrose (2006). Por ello, este estudio considera como una necesidad central, reflexionar sobre los conocimientos y decisiones que el profesor contempla al diseñar actividades escolares, asimismo, en la selección de los tipos de tareas que se abordan en las sesiones de clase sobre las igualdades numéricas con los números reales.

Además, los lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas (MEN, 1998) plantean la necesidad de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la articulación de conocimientos básicos, contextos y procesos de la actividad matemática a través de propuestas didácticas que favorezcan la habilidad para resolver y formular problemas

⁵ El pensamiento relacional lo entendemos a partir de lo mencionado por Molina, Castro Y Ambrose (2006) como el estudio que realiza una persona de manera alternativa a dos o más conceptos o ideas matemáticas para recordar o detectar relaciones que pueden existir entre ellos, y esa persona analiza o usa estas relaciones para resolver problemas matemáticos.

matemáticos y promover un aprendizaje significativo en los estudiantes. Por lo que el docente formado en Educación Matemática y encargado de orientar la enseñanza y el aprendizaje de la misma, es el actor fundamental para promover, desde la comprensión, organización del currículo y gestión de actividades didácticas; el desarrollo de competencias y destrezas en los estudiantes para razonar, modelar, resolver y formular situaciones problemas empleando las ideas asociadas a los objetos de enseñanza de las matemáticas escolares. En resumen, lo planteado en MEN (1998; 2006) destaca la importancia de la RdP como una herramienta relevante para el desarrollo del pensamiento numérico y el pensamiento variacional.

Por otra parte, se menciona que el pensamiento numérico hace énfasis en aspectos como la invención de un algoritmo y su aplicación, esto es, la descomposición, la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas. Además, se resalta que el pensamiento numérico es importante, ya que se reflexiona a partir de las respuestas en el uso de algoritmos, ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora. En cuanto al pensamiento variacional, se menciona que el estudio de la variación puede ser un iniciador funcional en el currículo de matemáticas, estableciendo su significado y sentido a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios están referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Por lo tanto, la RdP proporciona un contexto en el cual los estudiantes pueden desarrollar habilidades para pensar numéricamente y comprender la variación. En particular, al enfrentar situaciones problemáticas que requieren el uso del pensamiento numérico y la comprensión de la variación, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar conceptos matemáticos en contextos significativos, lo que contribuye valiosamente al desarrollo de estas habilidades.

A partir de los problemas y dificultades descritos anteriormente, se pretende desde este estudio atender a la siguiente pregunta problema:

¿Qué desempeños del modelo local de enseñanza, a partir del MKT y AD, se evidencian en un docente con formación en matemáticas cuando se enfrenta a la resolución de problemas de igualdad con números reales en el grado séptimo de básica secundaria?

1. 2 Objetivo general

Caracterizar los desempeños de un docente con formación en matemáticas, de acuerdo a un modelo local de enseñanza, cuando se enfrenta a la resolución de problemas de igualdad con números reales en grado séptimo de básica secundaria.

1. 2. 1 Objetivos específicos

- Fundamentar un modelo local de enseñanza basado en la RdP y las expectativas de aprendizaje que se espera promover por parte del docente con formación en matemática sobre la igualdad con los números reales.
- Indagar sobre las concepciones del docente, en relación con las categorías del modelo local de enseñanza, para destacar las interpretaciones asociadas con las actividades de RdP en situaciones de igualdad con los números reales.
- Interpretar aspectos considerados en la comparación de las concepciones del docente con el modelo local de enseñanza.

1. 3 Antecedentes

A continuación, se mencionan algunos estudios relacionados con la RdP en la formación de profesores, la enseñanza y/o aprendizaje de la igualdad numérica desde un enfoque de resolución de problemas y sobre un modelo formativo denominado Mathematical Knowledge Teaching (MKT). Esta revisión a la literatura académica posibilita comprender los desarrollos realizados en cuanto a las categorías de estudio relacionadas con la formación, la práctica y la resolución de problemas como estrategia para la comprensión de objetos de enseñanza en el currículo escolar, como lo son la igualdad con números reales.

1. 3. 1 Acerca de la resolución de problemas en la formación de profesores

Sobre la resolución de problemas, Felmer, et al. (2015) describen en su artículo los resultados de una investigación sobre la enseñanza de la resolución de problemas de matemáticas

en la Educación Media y la formación inicial docente. El objetivo general es identificar y analizar las relaciones que se establecen entre las oportunidades que ofrecen los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza media, el conocimiento matemático de los profesores recién egresados y sus prácticas didácticas, con respecto a la RdP y su papel en la enseñanza de la matemática. La investigación incluye una revisión teórica, un análisis de las concepciones de los profesores que inician sus praxis como docentes y una evaluación de su desempeño como resolutores de problemas. A partir de la investigación realizada, se concluye que existe una heterogeneidad en las prácticas pedagógicas de los docentes de matemáticas en la enseñanza media. Las prácticas pedagógicas de los docentes se acercan o alejan del enfoque de RdP en relación con tres aspectos: la naturaleza o tipo de pregunta que realizan los docentes a los estudiantes, la reacción de los docentes cuando detectan en los estudiantes un error, y cómo el docente evalúa la comprensión de la noción en el aula de clases.

Al respecto, Castro y Lupiáñez (2016) señalan la importancia y proponen como trabajar la RdP en la etapa de educación infantil en la formación inicial del profesorado de matemáticas en la Universidad de Granada. En ese orden de ideas, los autores recomiendan trabajar la RdP de dos maneras: enseñar a través de la resolución de problemas, usando problemas para introducir nuevos conceptos matemáticos y enseñar para la resolución de problemas, desarrollando habilidades de los futuros profesores para resolver y crear problemas. Esto les permite a los docentes experimentar y vivenciar el proceso de RdP; al ser resolutores de problemas primero les posibilita comprender mejor cómo guiar este proceso y de esa manera no solo se entrenan en resolver problemas, sino también en analizar qué características tiene un problema en la etapa de educación infantil.

Igualmente, Vargas (2019) en su trabajo de grado presenta una investigación para la caracterización de las prácticas evaluativas en matemáticas de los profesores de secundaria de la IE José María Córdoba de Santander de Quilichao-Cauca. La cual permitió comprender las acciones y significados de la evaluación asociada a la resolución de problemas de los profesores que imparten las clases de matemáticas en este colegio. El autor señala que la RdP puede ser considerada como método de enseñanza y propone aspectos claves cómo: enseñar sobre la

resolución de problemas, o sea, la RdP puede ser desarrollada dentro de una propuesta de formación para los profesores, ya que es de suma importancia para las acciones a seguir del profesorado. En resumen, en el conocimiento didáctico que debe tener el profesor de matemáticas se encuentran las estrategias de enseñanza que ayuden al aprendizaje del conocimiento matemático a los estudiantes, lo que para este trabajo sería el aprendizaje de la resolución de problemas.

Para concluir este apartado, mencionaremos a continuación los aspectos que tomaremos de cada antecedente mencionado sobre la RdP en la formación de profesores. De acuerdo con Felmer, et al. (2015) consideraremos el tipo de pregunta que realizan los docentes a los estudiantes para abordar las igualdades números en los reales, las decisiones y acciones de los docentes al identificar un error en las respuestas de los estudiantes; en relación con los autores Castro y Lupiáñez (2016) tomamos en consideración la propuesta para trabajar la RdP de dos formas: enseñar a través de la RdP, usando problemas para introducir nuevos conceptos matemáticos y enseñar para la RdP, desarrollando habilidades de los futuros profesores para resolver y proponer problemas. Por último, Vargas (2019) utilizaremos en pensar la RdP como método de enseñanza y considerar aspectos claves como: la RdP puede ser desarrollada dentro de una propuesta de formación para los profesores.

1. 3. 2 Sobre la enseñanza de la igualdad numérica en los reales desde el enfoque de (RdP)

Por lo que se refiere a esta categoría, Molina, Castro, y Ambrose (2006) describen los resultados de un estudio que demuestra la capacidad de los estudiantes de tercer grado al desarrollar habilidades de pensamiento relacional y comprensión del significado del signo igual en un contexto de igualdad numérica. Se discute sobre la importancia de fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la Educación Matemática y se recomiendan estrategias de enseñanza al docente sobre el significado del signo igual como trabajar con igualdades de diversas formas y el trabajo con igualdades cerradas, verdaderas y falsas; sirve para la comprensión del significado y lograr cambiar el pensamiento operacional del

signo igual, o sea, sirve para promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas en el aula.

Por su parte, Wilhelmi, et al. (2007) explican que los objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas en diferentes contextos de uso, se estructuran formando configuraciones epistémicas. La determinación y descripción de estas configuraciones epistémicas ligadas a la noción de igualdad de números reales permite introducir la noción de práctica (Holo-significado), que está constituido por la interacción de distintos modelos matemáticos con nexos a dicha noción. La noción de Holo-significado; que se entiende como la expresión de los diversos modelos asociados a la dicha noción, igualmente, la noción de modelo; que se entiende como el conjunto estructurado de un sistema de prácticas en un contexto de uso, y esto constituyen un marco para la selección de los significados curriculares que se pretenden enseñar, y para la búsqueda de situaciones fundamentales dentro de un proyecto global de enseñanza.

En el contexto local, Navia y Vergara (2021) realizan un estudio que tiene como objetivo caracterizar los contextos y significados que presentan las tareas relacionadas con el signo igual en el libro de texto de matemáticas del grado primero del programa “Todos a Aprender”. La revisión teórica del documento permitió constatar que los estudiantes presentan dificultades para usar y comprender el signo igual como una relación de equivalencia; en su lugar, la gran mayoría de ellos le atribuye un significado operacional y desde una sola dirección: de izquierda a derecha, como si se tratara de una indicación para hacer algo. Para examinar los diferentes contextos y significados se construyeron unas categorías de análisis sustentadas, fundamentalmente, en los aportes de (Ramírez, 2010, como se citó en Navia y Vergara, 2021) sobre contextos de presentación del signo igual y (Molina y Castro, 2006, como se citó en Navia y Vergara, 2021) alrededor de los diversos significados asociados a este objeto matemático. Por último, se presentan dos rutas abiertas a la investigación: I) caracterizar las tareas presentes en los libros de texto de otros grados de educación básica primaria, con el propósito de analizar los diversos significados y contextos relativos al signo igual, así como la coherencia y articulación hacia la consolidación de la interpretación relacional; y II) indagar sobre la manera en que docentes y

estudiantes reconocen, comprenden y usan los distintos significados y contextos identificados sobre el signo igual.

En relación con los antecedentes anteriormente mencionados para la investigación sobre la enseñanza de la igualdad numérica, de acuerdo con Molina, Castro y Ambrose (2006) tomamos en consideración la importancia de promover estrategias de enseñanza que involucren trabajar con igualdades en sus diferentes representaciones. Asimismo, se considera el trabajo con las igualdades cerradas, verdaderas y falsas, para desarrollar un significado amplio y con más sentido del signo igual. Igualmente, se toma en consideración lo planteado por Wilhelmi et al. (2007) sobre la noción de práctica (Holo-significado); expresión de los diversos modelos asociados a la dicha noción, y la noción de modelo; conjunto estructurado de un sistema de prácticas en un contexto de uso, ya que esto constituyen un marco para la selección de los significados curriculares que se pretenden enseñar, y para la búsqueda de situaciones fundamentales dentro de un proyecto global de enseñanza. Por último, Navia y Vergara (2021) utilizaremos las categorías de análisis basadas en investigaciones que se realizaron previamente para examinar los diferentes contextos en los que se puede involucrar la noción de igualdad y también la variedad de significados asociados al signo igual que se pueda evidenciar en nuestra investigación.

1. 3. 3 Sobre el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

Respecto al modelo de enseñanza MKT de Ball, Thames, y Phelps (2008), como se citó en, Montes, Contreras, Carrillo (2013) se menciona que este modelo nace a raíz de analizar las necesidades matemáticas de la enseñanza, en ese sentido, se requiere identificar el conocimiento matemático que exige el trabajo que realizan los profesores. Por ende, los autores definen el conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de enseñar matemáticas a los estudiantes, y lograr describir el conocimiento del profesor de matemáticas. En ese orden de ideas, se establece el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza MKT y se presenta la estructura de dicho modelo a partir de dos dominios que son: Conocimiento de la Materia (SMK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Al mismo tiempo, se establecen 6

subdominios que son: Conocimiento Común del contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Horizonte del Contenido (HCK), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del contenido y del Currículo (KCC).

Igualmente, Larrahondo (2019) en su estudio histórico sobre la resolución de problemas algebraicos, nos menciona dos momentos fundamentales de la historia del álgebra, que son: el periodo de los árabes y el libro *La Geometría* de Descartes. Pretende determinar las potencialidades que este estudio tiene para la Formación de Profesores de Matemáticas, además, es visto desde el modelo de conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza MKT, propuesto en Ball, Thames, y Phelps (2008). En el análisis se logra identificar que los problemas en al-Khwarizmi se clasifican en: formas canónicas, geométricas y de transacciones mercantiles-testamentos; y los de Descartes están vinculados en: planos, sobre curvas y sólidos. Por último, se concluye que los aportes al conocimiento del profesor de matemáticas tienen una fuerte conexión con la dimensión del conocimiento de contenido.

Al respecto, hay algunas investigaciones de los programas de formación inicial en Chile; por lo que se refiere al número de cursos de matemáticas y didáctica que ofrecen las universidades e institutos estudiados, se encontró que hay frecuencia de contenidos en los currículos de estos centros educativos que trabajan la resolución de problemas en la formación inicial de los futuros docentes, así como lo dice (Álvaro y Matus, 2011, como se citó en Felmer, et al., 2015). “Los resultados muestran que la resolución de problemas está entre los contenidos más frecuentes, apareciendo explícitamente en los programas de 9 de las 12 instituciones” (p. 67). Es posible decir que al haber presencia en 9 instituciones no se podría considerar como fenómeno la formación del docente en la resolución de problemas. Sin embargo, Felmer, et al., (2015) señalan que la problemática posiblemente está relacionada en la no profundización en los recursos que estos cursos aportan al profesor en cuanto a la forma de comprender la resolución de problemas y su función en el aprendizaje de las matemáticas. Así pues, en cómo se implementa la resolución de problemas en el aula de clases cuando estos futuros docentes están impartiendo conocimiento.

Otros autores afirman lo siguiente:

La forma en que los profesores e investigadores enfocan la propuesta de utilizar la resolución de problemas para promover el aprendizaje no es común para toda la comunidad educativa y depende fuertemente de la concepción que se tenga acerca de qué es un problema y cómo se aborda su resolución. (Felmer, et al., 2015, p. 69).

En resumen, Felmer, et al. (2015) señalan que “Interesa entender por qué los docentes de matemáticas en Chile optan por el escaso uso y rutinario planteamiento de los problemas, e indagar en la posibilidad de que este hecho esté relacionado con el tipo de formación que han recibido” (p.67). De manera que es importante investigar por qué cuando los docentes requieren resolver problemas matemáticos asociados con las propiedades básicas de la teoría de números, como es el caso de la igualdad, tienen poco o erróneo uso y planteamiento de los problemas en el aula de clase. Por tanto, la fenomenología de esta investigación radica en: el tipo de formación que tuvo el docente desde los programas de formación inicial, y la forma como los profesores entienden la resolución de problemas y los objetos matemáticos que se estudian.

De los documentos anteriormente presentados, se van a tener en cuenta algunos aspectos para este trabajo de investigación, aportes como el de Montes, Contreras, Carrillo (2013) nos ayuda a definir una idea del modelo MKT, dotando de herramientas para establecer necesidades matemáticas que se espera que evidencie el profesor. Asimismo, Larrahondo (2019) nos brinda herramientas en su investigación sobre la resolución de problemas, para potencializar la formación de profesores en matemáticas, desde el punto de vista del modelo MKT. Por último, tenemos el documento de Felmer, et al., (2015) el cual nos invita a reflexionar sobre la práctica y poco uso de la RdP por parte de los docentes en ejercicio.

1. 4 Justificación

El modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza MKT se enfoca en el conocimiento matemático necesario para la instrucción, abordando aspectos como el contenido matemático y su enseñanza. Este modelo está definido en seis subdominios que incluyen tanto el conocimiento común del contenido, como el conocimiento especializado del contenido, a diferencia del modelo MTSK que se enfoca en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, derivado de su profesión y necesario para desarrollar su labor docente, centrando sus seis subdominios exclusivamente en el profesor de matemáticas y su contexto profesional; el MKT entonces, centra su atención en el conocimiento común del profesor que proporciona una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y su integración en contextos matemáticos para promover la resolución de problemas, entre otras estrategias para enseñar de manera significativa los objetos matemáticos. Al comprender en profundidad el contenido matemático, los profesores pueden identificar las posibles dificultades que los estudiantes podrían enfrentar al resolver problemas, así como anticipar las estrategias para abordar esas dificultades evidenciadas en los estudiantes. Además, el conocimiento didáctico del contenido proporcionado por el MKT permite a los profesores seleccionar y adaptar estrategias de enseñanza que sean apropiadas para los diferentes tipos de problemas matemáticos. Esto incluye la capacidad de presentar problemas de manera que fomente la comprensión profunda, identificar y corregir errores usuales, y proporcionar retroalimentación a los estudiantes.

De acuerdo con lo descrito anteriormente, se propone investigar los desempeños de los docentes con formación en Educación matemática, de acuerdo con el modelo MKT, cuando requieren desarrollar actividades de diseño, elaboración de situaciones y ambientes de aprendizaje. Basados en la resolución de problemas sobre la igualdad como una noción de equivalencia entre las expresiones aritméticas, es decir, su asignación en el campo de los números reales.

Uno de los propósitos de la resolución de problemas en la formación de los estudiantes que aspiran a ser docentes es romper la limitación de captar la idea de que ellos no son buenos en

las matemáticas, partiendo de concepciones como: que las matemáticas se aprenden resolviendo problemas, así como lo expresan Castro y Lupiáñez (2016) quienes afirman que:

Una de las finalidades de las asignaturas que el Departamento de Didáctica de la Matemática imparte para la formación inicial de profesores de Educación Infantil en la Universidad de Granada, es la de ayudar a los alumnos universitarios a superar las limitaciones que les hayan hecho creer que no son buenos en Matemáticas. Bajo este supuesto y partiendo de la idea de que las matemáticas se aprenden resolviendo problemas (p.50).

Por su parte, los Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) señalan que modelar, plantear problemas y formular estrategias de solución, les permiten a los estudiantes crear contextos accesibles y poner en práctica sus capacidades intelectuales; con el objetivo de generar situaciones de aprendizaje significativas. En ese sentido, la RdP es importante, ya que habla de la comprensión general que tiene o desarrolla un estudiante sobre: los números y las operaciones, la habilidad y la capacidad para usar este progreso cognitivo de forma flexible, con miras a generar juicios matemáticos sensatos, y crear estrategias útiles al manejar los números y las operaciones matemáticas. Este tipo de pensamiento matemático implica la capacidad de reflexionar sobre los datos y resultados obtenidos, y de evaluar si la respuesta producida es razonable. Asimismo, la formulación, tratamiento y resolución de problemas tiene como enfoque el uso de situaciones problemas ya sean reales o inventadas, para enseñar determinados conceptos matemáticos y de esta manera posibilitar en el estudiante un acercamiento principalmente los siguientes elementos: contextualización; esto ayuda a los estudiantes a ver la utilidad y relevancia de las matemáticas en su vida cotidiana. Igualmente, permite desarrollar habilidades matemáticas; los estudiantes aprenden a abordar problemas de manera sistemática y considerar diferentes enfoques y, por último, ayuda a un aprendizaje activo; en lugar de simplemente memorizar fórmulas y procedimientos, los estudiantes aprenden a aplicar conceptos de manera práctica. Así se puede ver en MEN (2006) que afirma lo siguiente:

La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permite desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos con la posibilidad de encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. (p. 52)

Por tanto, se busca con este trabajo de investigación, relacionar e interpretar bajo un modelo local de enseñanza los desempeños que se evidencian en un docente con formación en Educación Matemática cuando se enfrentan a desarrollar actividades de resolución de problemas sobre las propiedades básicas de la teoría de números. Por medio de una matriz comparativa, se quiere contrastar la concepción del docente con el modelo local de enseñanza con los datos obtenidos del instrumento metodológico y posteriormente emplear el Análisis Didáctico, todo lo anterior, hace parte del componente metodológico del trabajo.

Capítulo 2 - Marco teórico

En este capítulo se aborda el Análisis Didáctico como método teórico que posibilita concretar los aspectos relacionados con la metodología de investigación, así como presentar la estructura didáctica de dicho análisis propio de las Didácticas de las Matemáticas, porque posibilita pasar de lo complejo a lo más simple, empleando un sistema de categorías de manera que: el orden, la coherencia y la forma de la estructura, son características clave de este instrumento de investigación. También, se analiza la formación matemática y conocimiento didáctico del profesor, puesto que la calidad de la formación inicial del docente influye en la calidad de la enseñanza que los profesores proporcionan a sus estudiantes. Por último, se indaga sobre las igualdades numéricas en los reales, con el objetivo de entender qué tipo de situaciones y contextos se deben involucrar en la formación del profesor, y cuáles conocimientos matemáticos y didácticos debe tener o desarrollar el profesorado de matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de las igualdades con los números reales.

Antes de iniciar con el Análisis Didáctico y su relación con la fenomenología de la investigación, presentamos el contexto de cómo entendemos eso de fenomenología. Así como lo plantea (Freudenthal, 1986, como se citó en Puig, 1997) este indica que le ha dado a su método de análisis de los contenidos matemáticos el nombre de ‘fenomenología’ porque parte de la contraposición establecida en la tradición filosófica entre lo que se expresa en esa tradición con los términos ‘fenómeno’ y ‘noúmeno’. O sea, el autor lo considera como el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos del objeto matemático en estudio y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos.

2. 1 Análisis Didáctico (AD)

Este método de investigación utiliza principalmente técnicas y métodos del análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo. La finalidad del método de investigación es sistematizar los contenidos matemáticos, así como lo expresa el autor a continuación:

Las finalidades del Análisis didáctico radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar. (Rico, 2013, p. 19)

De manera que el Análisis Didáctico es un método interpretativo y transformador que articula de forma conjunta las categorías matemáticas y educativas. Para ello, este método considera la importancia del lenguaje, la precisión en las ideas y sus antecedentes, y la veracidad y el rigor en los análisis de la investigación.

2. 2 Estructura del Análisis Didáctico (AD)

Dada nuestra problemática de investigación empleamos el Análisis didáctico, principalmente utilizando las técnicas y métodos del análisis conceptual, análisis cognitivo y del análisis de contenido. Estos análisis se sirven de la interpretación histórica del conocimiento matemático y tienen una gran conexión, como el análisis conceptual sustenta un primer nivel en el análisis de contenido en cuanto a la interpretación histórica del conocimiento matemático. Además, trabajaremos con el análisis cognitivo que nos aporta a la organización de los saberes y cómo observar las expectativas de aprendizaje.

Con respecto a la estructura del Análisis Didáctico y por lo que se refiere a los tres análisis mencionados anteriormente, Rico (2013) menciona que este ciclo de estudio cuenta con dos componentes adicionales:

Análisis de instrucción: se asocia con el diseño del modelo local de enseñanza que se está trabajando y se analizan las funciones y secuencias de las tareas, materiales y recursos, y la gestión del aula.

Análisis evaluativo: se desarrolla la revisión del proceso y se analizan los criterios e instrumentos de evaluación, resultados e interpretaciones de las evidencias de aprendizaje y comprensión, así como la toma de decisiones por parte de los docentes. (p. 33)

A continuación, presentamos más en profundidad los análisis en uso, hay que aclarar que el análisis de instrucción y el análisis evaluativo no son utilizados para los análisis, pero sí hacen parte del modelo local. De manera que, se presenta en los siguientes párrafos el análisis conceptual, análisis cognitivo y el análisis de contenido y la relación con la enseñanza de la igualdad en los reales, ya que son parte fundamental de la investigación y forman parte en la articulación entre el modelo MKT y el Análisis didáctico para establecer el modelo local de enseñanza.

2. 2. 1 Análisis conceptual

Es una herramienta metodológica utilizada en la investigación educativa para controlar la complejidad semántica y poder seleccionar desde lo teórico lo más acertado para la investigación, esto quiere decir, que brinda herramientas para seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato conceptual adecuado. Según Rico (2013) este análisis aborda problemas importantes para el investigador, en particular la precisión y comprensión de los conceptos. Este es un método no empírico que se sirve de la historia y aporta en una mejor precisión y dominio de los conceptos empleados en la investigación. La forma con que los datos operan son: descripciones, definiciones, listas extensas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas.

Los aspectos que se pueden analizar en el análisis conceptual y que se unifican con la investigación son:

Definición: se puede analizar la definición del concepto, es decir, su significado preciso y su alcance.

Propiedades: se pueden analizar las propiedades del concepto, es decir, las características que lo definen y lo diferencian de otros conceptos.

Relaciones: se pueden analizar las relaciones del concepto con otros conceptos, es decir, cómo se conectan con otros conceptos y cómo se integra en un marco teórico más amplio.

Historia y contexto: se puede analizar el contexto en el que se utiliza el concepto, es decir, cómo se aplica en diferentes situaciones y cómo se reúnen con otros conceptos en un contexto específico. (Rico, 2013, p. 15-16).

2.2.1.1 Análisis conceptual sobre las igualdades en los números reales.

Los aspectos por indagar en el análisis conceptual relacionados con la investigación sobre la noción de igualdad en los números reales son: definición, propiedades, relaciones, historia y contexto.

En cuanto a la definición sobre la igualdad (Molina, et al., 2006) refieren que este significado hace referencia a una relación simétrica y reflexiva que indica que dos expresiones tienen el mismo valor, o sea, que las igualdades numéricas se refieren a expresiones matemáticas que involucran números y el signo igual ($=$). Igualmente, (Wilhelmi, et al., 2007) expresan que la noción de igualdad es una relación entre dos cantidades que tienen el mismo valor numérico y que se representa con el símbolo igual ($=$). Por último, (Kieran, 1981) se refiere a la noción de igualdad como una relación entre dos cantidades o expresiones y destaca que la comprensión de la igualdad puede variar según la etapa de desarrollo del estudiante y que es importante abordar las concepciones erróneas para mejorar la comprensión de la igualdad en el aula.

Otro de los aspectos que se va a analizar son las propiedades unificadas con igualdad, o sea, las propiedades de la igualdad que definen y estructuran esta noción. Al respecto (Molina, et al., 2006) expresan que el dominio de la noción de igualdad permite comprender las propiedades de las operaciones numéricas, así como la propiedad reflexiva de la igualdad. De igual forma, (Wilhelmi, et al., 2007) aseguran que en los procesos de formación de los estudiantes sobre la noción igualdad se establece una conexión con la propiedad simétrica y la propiedad transitiva y que están estrechamente ligadas a la noción de igualdad o equivalencia.

El tercer aspecto que se va a analizar son las relaciones de la noción de igualdad con otros conceptos; como la noción de igualdad se integra al marco teórico de otros conceptos. Wilhelmi, et al. (2007) mencionan que la igualdad se vincula desde el contexto numérico; con la

aproximación y tolerancia, desde lo aritmético; se relaciona con la identidad y relación de orden, desde lo algebraico; con la equivalencia y función de tipo algebraico, desde lo analítico; con la función principalmente trascendente y el límite cuando converge y desde lo topológico; con la distancia con respecto a la medida y la conexión.

Sobre la historia y contexto se analizarán las situaciones que utilizan la noción de la igualdad, los contextos en que aparecen los números reales, como se utilizó a lo largo de la historia, la igualdad y qué contexto utiliza el profesor para trabajar con la igualdad. (Molina, Castro y Castro, 2007) destacan el primer uso del signo igual, el cual se le atribuye a Robert Recorde en su libro de álgebra “The Whetstone of Witte” en 1557, menciona también que el signo igual ha sido utilizado con diferentes significados a lo largo del tiempo. Por ejemplo: Vieta lo empleó para la diferencia aritmética en 1591, otros autores lo utilizaron para representar más o menos ($\pm$), separar la parte entera y decimal en los números decimales, representar dos rectas paralelas o para denotar la congruencia de números. En la actualidad es utilizado en una gran diversidad de contextos y con variedad de significados, y su interpretación depende del contexto específico en el que se utilice.

Por su parte, (Kieran, 1981) menciona que la interpretación y comprensión del signo de igualdad varía según la etapa de desarrollo del estudiante. La autora destaca que los estudiantes de diferentes edades tienen concepciones erróneas comunes sobre el signo de igualdad, lo que puede afectar su comprensión matemática. Los preescolares tienden a conectar la igualdad con la idea de “contar y ver”, es decir, determinar si dos conjuntos tienen la misma cantidad al contar los elementos en cada conjunto. Igualmente, los estudiantes de primaria y secundaria a menudo interpretan el signo de igualdad como un operador, es decir, como una indicación de una acción a realizar en lugar de una relación de equivalencia. Asimismo, los estudiantes de secundaria y universitarios pueden tener dificultades para comprender la igualdad como una relación de equivalencia, lo que se refleja en errores frecuentes al resolver ecuaciones algebraicas.

2. 2. 2 Análisis de contenido

Es una técnica de investigación que se utiliza para la evaluación y verificación de los contenidos de datos escritos en la investigación. Al respecto, Rico (2013) menciona que esta técnica se define como un conjunto de procedimientos estrictos y sistemáticos para el análisis riguroso de los documentos desde los contextos en que se utilizan. De igual forma, menciona que se puede ver como un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman un texto de las matemáticas escolares.

El autor también enuncia las categorías a considerar para analizar el contenido matemático en un documento escolar que son: conceptual, formal y estructural, representacional y fenomenológica. En definitiva, la aplicación del análisis de contenido a la investigación educativa puede ayudarnos a descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa e inferir significados interpretativos en un texto.

2.2.2.1 Análisis de contenido sobre las igualdades en los números reales.

Los aspectos que se van a estudiar en el análisis de contenido y que se relacionan con la investigación sobre la igualdad en los números reales son: las nociones y conceptos; se busca explorar los temas principales y categorías relacionadas con la igualdad en los números reales, como la igualdad, la equivalencia, y el número entero, además, analizar las interrelaciones entre estos conceptos y cómo se aplican en el contexto de los números reales. Los contextos; se quiere investigar cómo los profesores con formación en matemáticas utilizan los temas de igualdad en sus prácticas, también, examinar el enfoque de resolución de problemas acerca de la igualdad, considerando el entorno de enseñanza y aprendizaje. El significado e intencionalidad; se busca analizar el significado de las palabras y temas específicos dentro del contexto de la igualdad en los números reales y se explora cómo los profesores interpretan y asignan significado a la igualdad en sus clases. Por último, situaciones de enseñanza y aprendizaje; se quiere evaluar la estructura de los textos utilizados, incluida la organización de ideas y la coherencia del discurso y examinar las situaciones de enseñanza propuestas por el profesor y las expectativas del profesor respecto al aprendizaje del estudiante con respecto a la igualdad en los números reales.

A continuación, se presenta una tabla con los aspectos de estudio en el análisis de contenido y las características de cada uno de los aspectos en relación con los referentes teóricos de la investigación:

Nociones y conceptos	Contextos	Significado e intencionalidad	Situaciones de enseñanza para el aprendizaje
Según lo planteado por (Molina, Castro y Castro, 2007) y (Wilhelmi, et al., 2007) se toma como nociones y conceptos para el análisis los siguientes temas: • Aproximación. • Identidad. • Relación de orden. • Equivalencia. • Función. • Límite. • Distancia. • Operaciones aritméticas. • Fracciones. • Propiedades de las operaciones. • Ecuaciones. • Desigualdad.	Según los Lineamientos Curriculares establecidos en el (MEN, 1998) se plantean los siguientes contextos: 1. Contexto de la vida diaria. 2. Contexto de las matemáticas. 3. Contexto de las otras ciencias.	La igualdad numérica es una relación entre dos expresiones matemáticas que representan cantidades iguales, esta se representa con el signo igual (=) y su forma puede variar según las cantidades de cada lado de las expresiones y su contexto de uso. Por ejemplo, la igualdad numérica se puede representar de la siguiente forma: $a + b = c$, $a = b + c$, $c = a + b$, etc.	Los contextos que se presentan en DBA Y EBC sobre el pensamiento numérico y pensamiento variacional de grados séptimo son los siguientes: Derechos Básicos de Aprendizaje • Contextos escolares y extraescolares. • Contextos de la vida cotidiana. Estándares Básicos de Competencias • Contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. • Contextos aritméticos y geométricos.

Tabla 1. Estructura del Análisis de contenido sobre la noción igualdad

2. 2. 3 Análisis cognitivo

Busca una organización de los saberes y se analizan las expectativas de aprendizaje, limitaciones en la formación y demandas cognitivas. Al respecto Rico (2013) afirma que “el análisis cognitivo se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta lo que se espera que se aprenda en determinados conocimientos sobre un tópico” (p. 23). Además, este análisis cuenta con tres categorías en las cuales se lleva el proceso de análisis-síntesis cognitiva: expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes, dificultades de aprendizaje, demandas cognitivas.

Los aspectos que se van a investigar en el análisis cognitivo y que se vinculan con el proyecto son:

Prioridades cognitivas: se pueden analizar las prioridades cognitivas del tema en cuestión, es decir, los conocimientos y habilidades que se consideran más importantes para el aprendizaje del tema.

Dificultades de aprendizaje: se pueden analizar las dificultades de aprendizaje que pueden surgir al aprender el tema, así como los errores comunes que los estudiantes pueden cometer.

Alcance del aprendizaje: se puede analizar el alcance del aprendizaje del tema, es decir, hasta qué punto se espera que los estudiantes comprendan y dominen el tema.

Organización y relación de las prioridades: se puede analizar cómo se organizan y unifican las prioridades cognitivas del tema, para determinar la mejor manera de enseñar y aprender el tema.

Procesos de aprendizaje: se pueden analizar los procesos de aprendizaje que se utilizan para enseñar y aprender el tema, y cómo se pueden mejorar estos procesos (Rico, 2013, pp. 33).

2. 2. 3.1 Análisis cognitivo sobre la igualdad en los números reales.

Los aspectos que se van a investigar en el análisis cognitivo y que se relaciona con la investigación sobre la igualdad en los números reales son: prioridades cognitivas; los conocimientos y habilidades que el profesor considera más importantes para la enseñanza y aprendizaje de la igualdad en su clase. Dificultades de aprendizaje; limitaciones cuando se aprende el tema. Alcance del aprendizaje; hasta qué punto se espera que los estudiantes comprendan y dominen la igualdad a partir de lo enseñado por el profesor con formación en matemáticas. Organización y unificación de las prioridades cognitivas; los diferentes procesos o formas de aprendizaje que se emplearon para la enseñanza y aprendizaje de las igualdades numéricas, y presentar una síntesis de cómo se pueden mejorar estos procesos empleados por el profesor con formación en matemáticas en el aula de clases.

En conclusión, esta estructura y ciclo del Análisis Didáctico puede aportar a mejorar las habilidades de enseñanza de las matemáticas al permitir a los educadores comprender mejor los conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan en el currículo escolar. Así pues, los educadores pueden identificar las fortalezas y debilidades de su enseñanza y ajustar su enfoque para mejorar la comprensión de los estudiantes. También, este ciclo de análisis puede ayudar a los educadores a comprender la intencionalidad educativa del discurso de las matemáticas escolares, lo que les permite diseñar planes de enseñanza y adaptarlos a las necesidades de sus estudiantes.



Gráfico 2. Ciclo y estructura del Análisis didáctico.

2. 3 Modelo de Análisis didáctico (AD)

Ahora, pongamos por caso la siguiente tabla del modelo local de AD para la aplicación en la investigación sobre los conocimientos didácticos del profesor de matemáticas en grado séptimo sobre la igualdad en los números reales.

Modelo local del Análisis Didáctico (AD)		
Tipo de análisis	Síntesis del análisis	Categorías del análisis
Análisis conceptual	Conceptos y red de significados que articulan un tema.	Conceptos y términos básicos.
		Aproximación histórica-crítica.
		Génesis epistemológico.
Análisis de contenido	Focos prioritarios.	Estructura y análisis formal.
		Sistemas de representaciones.
		Análisis fenomenológico.

Análisis cognitivo	Organización de los saberes	Expectativas de aprendizaje
		Limitaciones de aprendizaje
		Demandas cognitivas

Tabla 2. *Modelo local del Análisis didáctico.*

2. 3 Formación y conocimiento didáctico del profesor de matemáticas

La importancia de la formación inicial del profesor de matemáticas es de gran impacto e influye significativamente en la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos en desarrollo. Autores como (Cisternas, 2001, como se citó en Felmer, et al., 2015) mencionan que la formación inicial de los docentes es un tema relevante en la investigación educativa, ya que se ha demostrado que la calidad de la formación inicial influye en la calidad de la enseñanza que los docentes proporcionan a sus estudiantes. Además, se señala que los profesores en ejercicio muestran preocupación por su formación inicial y suponen que hay estrategias de enseñanza que no conocen, aunque se sienten seguros de las estrategias que usan y afirman que las emplean correctamente.

Por lo tanto, la formación inicial de los docentes es importante para lograr adquirir las habilidades, conocimientos necesarios y proporcionar una educación de calidad a sus estudiantes. Dicho de otra manera, la formación docente en el marco del proceso de formación profesional se considera un proceso transformador que toma en cuenta los conocimientos de los docentes y sus fortalezas, construye nuevos aprendizajes a partir de las actividades y reflexiona sobre las prácticas sociales en un vínculo maestro-estudiante. Esa formación inicial de los docentes se basa en una unión entre el conocimiento disciplinar y los estudiantes; debido al carácter práctico de la profesión docente, el desarrollo profesional requiere una conexión entre teoría y práctica.

De igual forma, son importantes los conocimientos didácticos que el docente de matemáticas tiene o que desarrolla durante los procesos de formación inicial sobre un tema en particular. Ya que enseñar matemáticas en los colegios o instituciones de formación significa necesariamente que deben tener conocimientos y habilidades especializadas en su práctica

profesional que una vez desarrollados, favorezcan el desarrollo profesional en la forma en que se concibe la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así como se puede ver en (Cardeñoso, Flores y Azcarate, 2001, como se citó en Banoy, 2020) “El desarrollo de estos conocimientos y capacidades estarán mediados por el contexto y las actividades que se realizan y el conjunto de interacciones que se dan en el marco de comunidades de práctica.” (p. 25)

Igualmente, (Rico, 2015, como se citó en Banoy, 2020) considera que el conocimiento del profesor de matemáticas se organiza en dos campos: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Así entonces, el conocimiento didáctico sobre un contenido escolar está constituido por: un conocimiento sobre su contenido, un conocimiento sobre su aprendizaje, un conocimiento sobre su enseñanza y un conocimiento sobre la evaluación.

En conclusión, se debe hacer énfasis en lo que se desarrolla e involucra en los currículos de formación inicial de los docentes y en los contenidos matemáticos que se estudian. De manera que es fundamental que se privilegien y promuevan cursos y programas que centren sus esfuerzos en dar oportunidades a los profesores para que observen, discutan y pongan en práctica estrategias pedagógicas que promuevan el desarrollo de las habilidades matemáticas, en particular la resolución de problemas. Felmer, et al., (2015) afirman lo siguiente:

En cuanto a la formación continua, se recomienda que se privilegien y promuevan cursos y programas que centren sus esfuerzos en dar oportunidades a los profesores para que observen, discutan y pongan en práctica estrategias pedagógicas que promuevan el desarrollo de las habilidades matemáticas, en particular la resolución de problemas (p.102).

Como resultado de estas investigaciones, es primordial investigar sobre los tipos de conocimiento matemáticos y didáctico del profesor y cómo se organizan los contenidos de las matemáticas escolares asociados a la igualdad de los números reales en grado séptimo.

2. 3. 1 Desempeños del docente con formación en matemáticas

El contexto de cómo entendemos los desempeños del docente con formación en matemáticas se basa en lo planteado por Llinares (2012) quien entiende los desempeños del docente, como las acciones, habilidades y competencias que los futuros profesores y profesores en ejercicio, desarrollan y demuestran en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estos desempeños pueden incluir organizar el contenido matemático, analizar el potencial matemático de los problemas, interpretar las producciones de los estudiantes y gestionar el discurso en el aula, entre otros aspectos relevantes en los procesos de construcción de conocimiento desde la formación de un profesor de matemáticas.

En conclusión, los desempeños son fundamentales en los procesos de formación del profesorado, ya que sirven para evaluar la adquisición de conocimientos, habilidades y competencias necesarias para ejercer la docencia. En este trabajo de investigación queremos caracterizar los desempeños según el modelo local de enseñanza que se evidencian del docente con formación en matemáticas cuando se enfrentan a la resolución de problemas de igualdad con números reales en el grado séptimo de básica secundaria. De manera que, las concepciones del docente entrevistado pueden ser indicadores claves en el desarrollo de una mirada profesional para los docentes en ejercicio y futuros docentes, en el proceso de construcción del conocimiento didáctico necesario para enseñar matemáticas de manera significativa.

2. 3. 2 Organización de los contenidos matemáticos escolares

De acuerdo con lo planteado por (Rico, 2008, como se citó en Banoy, 2020) la organización del contenido matemático escolar se realiza considerando criterios cognitivos y se organiza en dos grandes bloques: conceptual y procedimental. En el campo conceptual se determinan tres tipos de conocimientos que se articulan en dicho campo a manera de complejidad creciente: hechos, conceptos, y estructuras. En el campo procedimental se consideran las destrezas, los razonamientos, y las estrategias como los tres niveles de complejidad creciente en el campo.

De acuerdo con lo anterior, (Bedoya, 2002, como se citó en Banoy, 2020) propone que el conocimiento didáctico está relacionado con los siguientes tipos de contenidos y actividades:

- a) Una noción general, bien establecida, sobre el concepto de currículo, sobre sus dimensiones y niveles de reflexión.
- b) Una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que sostienen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; igualmente sobre los principios y criterios que sostienen los procesos de evaluación.
- c) Una consideración particular sobre los contenidos del currículo y su estructura conceptual.
- d) Una aproximación cognitiva sobre cada uno de los distintos contenidos (análisis cognitivo).
- e) El análisis semiótico de los contenidos y sus implicaciones didácticas.
- f) El análisis fenomenológico de los contenidos y su didáctica.
- g) Análisis epistemológico e histórico.
- h) Análisis y valoración de los contextos en los que se presenta cada concepto y de sus significados y usos.
- i) Revisión y reflexión sobre los materiales, recursos y tecnologías con las que se pueden considerar y trabajar estos contenidos y conceptos. (p.41)

2. 3. 3 Modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

El modelo MKT presentado por Ball, Thames, y Phelps (2008) se enfoca en el conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de enseñar matemáticas a los estudiantes. Por lo tanto, se reconoce que el conocimiento matemático por sí solo no es suficiente para realizar las tareas de enseñar matemáticas, igualmente, se destaca la importancia

de que el profesor tenga un conocimiento profundo de la materia, así como un conocimiento didáctico sólido y una comprensión de cómo los estudiantes aprenden matemáticas.

Según el análisis presentado en el texto de Flores, et al. (2016) los conocimientos matemáticos que debe tener el profesor se dividen en dos bloques:

- El conocimiento puramente matemático que solamente tiene el profesor de matemáticas.
- El conocimiento que tiene un adulto bien instruido al nivel escolar que se está analizando (conocimiento que se espera que tenga o desarrolle un estudiante en ese nivel analizado) (p.8).

En resumen, se menciona que el conocimiento matemático del profesor incluye la interpretación del pensamiento matemático del estudiante y la capacidad de anticiparse a las dificultades que puedan surgir en el aprendizaje de los estudiantes. También, se destaca la importancia de que el profesor conozca a los estudiantes particularmente para poder adaptar su enseñanza a sus necesidades y características individuales. Por último, es muy importante que el profesor conozca el contenido de la sección que imparte de forma clara; en este caso la igualdad de los números reales y así como lo menciona Ball et al. (2008) estos tipos de contenidos deben ser conocidos por una persona formada en matemáticas.

A continuación, se presenta un gráfico del modelo de enseñanza MKT presentado por Ball et al. (2008) en el cual nos apoyamos para crear nuestro modelo local de enseñanza.

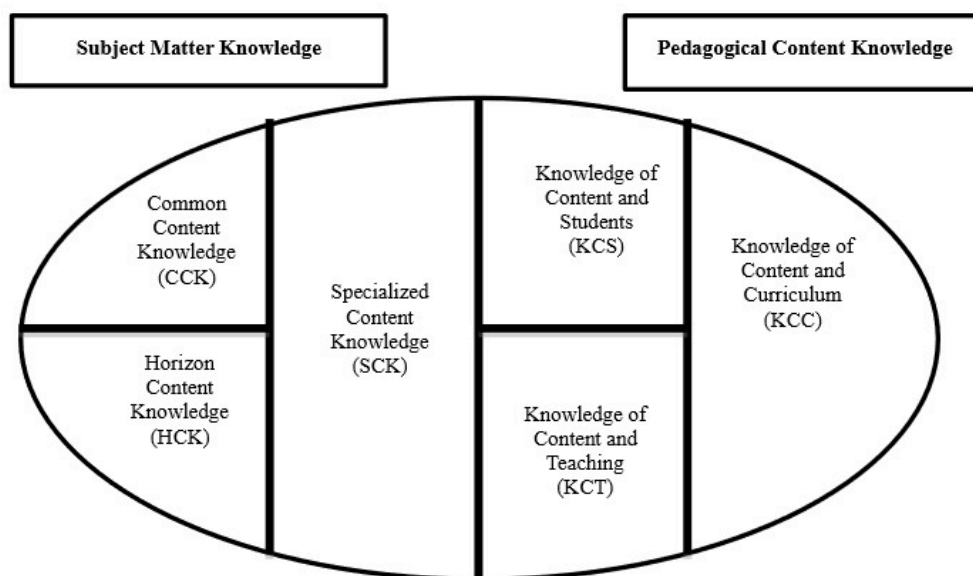


Gráfico 2. *Modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*

2. 4 Igualdades en los números reales desde la didáctica y desde las matemáticas

Diferentes investigaciones incorporadas a la epistemología de la noción de igualdad ponen de manifiesto diferentes consideraciones para conectar la teoría con la práctica. Además, aportan a este trabajo para estructurar y argumentar los tipos de contenidos que están relacionados con este objeto y los conocimientos matemáticos y didácticos que debe tener o desarrollar un profesor de matemáticas para el aprendizaje y enseñanza de las igualdades en los números reales.

En la investigación realizada por Pino— Fan y Godino (2015) se indaga sobre el conocimiento de los estudiantes de primer año de secundaria y profesores en relación con la igualdad numérica, en el desarrollo de esta investigación se evidencia cómo los estudiantes expresan diferentes significados del signo igual. Igualmente, se menciona que al momento de realizar una entrevista a los profesores encargados de los alumnos se dio a conocer algunas falencias desde la formación del profesor como: la caracterización del signo igual como una relación en ambas partes, una balanza entre dos cosas que se debe enfatizar de manera más

concreta en los estudiantes. Del mismo modo, los profesores mencionan que ese énfasis en el significado del signo igual es algo que en su formación como docentes no abordaron en ningún curso y esto genera que los educadores no tengan claridad sobre cómo hacer dicha profundización desde la igualdad numérica.

Al respecto, Kieran (1991) identifica varias dificultades en el aprendizaje de la noción de igualdad entre los estudiantes, estrictamente en las concepciones erróneas sobre el signo igual. Estas dificultades incluyen interpretar el signo igual como un operador en lugar de un símbolo de relación, la tendencia a ver el signo igual como una señal para realizar una acción, dificultad para comprender las relaciones de equivalencia. Igualmente, creer que el signo igual indica el final de un problema en lugar de una relación de equivalencia, creer que el signo igual solo se aplica a números enteros y no a expresiones algebraicas, y pensar que el signo igual solo se aplica a ecuaciones y no a otras expresiones matemáticas. Estas dificultades se observan en estudiantes de diferentes niveles educativos, desde preescolar hasta estudiantes de secundaria, se destaca la importancia de abordar por parte del profesor estos conceptos erróneos y promover una comprensión más profunda de la noción de igualdad en matemáticas.

Otra de las consideraciones que se expone en el documento Wilhelmi, et al. (2007) con el objetivo de caracterizar la noción de igualdad son las prácticas discursivas y operativas que llevaron al surgimiento de esta noción, esto es, que es prioritario, examinar las prácticas discursivas y operativas que han hecho emerger las definiciones de la noción de igualdad en diferentes contextos. Por esto, los autores nos dicen que, para describir los sistemas de prácticas operativas y discursivas con relación a un objeto matemático, es necesario identificar las principales nociones, propiedades, lenguaje, argumentos y acciones utilizados en un aula de clases para trabajar con las igualdades numéricas.

Un ejemplo de estas dificultades en el aprendizaje de la noción de igualdad es lo que nos dice (Antibi et Brousseau, 2000, como se citó en, Wilhelmi, et al., 2007) “Un estudio más profundo demostraría que también surgen muchas dificultades por el hecho de que se utiliza al mismo tiempo el signo “=” con el lenguaje del objeto: la ecuación, la identidad, el cálculo, y en

el lenguaje de trabajo sobre el objeto: como descriptor de transformaciones, como un meta teorema o como una “inferencia” (p. 96). Con esto, los autores quieren decir que es importante identificar la relación de equivalencia sobre el signo igual, ya que esta relación es uno de los antecedentes claros para determinar el significado de la noción de igualdad de los números reales y lograr conectar la teoría con la práctica en las aulas de clases.

Otra de las consideraciones que se expresa por parte de los autores son las dificultades que los estudiantes pueden encontrar al aprender la noción de igualdad, particularmente debido a la complejidad de las prácticas operativas y discursivas asociadas a esta noción. Este obstáculo está relacionado con la conexión entre las prácticas matemáticas y los contextos de uso en los estudiantes, específicamente cuando se trabaja con el signo igual. Este signo indica que lo que se encuentra a la izquierda del igual es el primer miembro de la igualdad y lo que se encuentra a la derecha del signo igual es el segundo miembro de la igualdad. Lo anterior, se consideran dos formas de designar al mismo objeto o dos formas de escribir el signo igual. Además, los autores nos dicen que la noción de igualdad numérica no especifica relaciones de las prácticas matemáticas y de los contextos matemáticos que se pueden utilizar.

Asimismo, el estudio realizado por Molina et al. (2006) deja en evidencia la principal dificultad del aprendizaje y enseñanza de las igualdades en los números. Según el estudio, se ha detectado que los estudiantes de tercer grado de educación primaria muestran una comprensión muy limitada del signo igual en contextos aritméticos, por ende, las dificultades se encuentran en la resolución de igualdades numéricas. (p. 34)

Además, se dice que la mayoría de los estudiantes entienden el signo igual como un símbolo que debe ir seguido a su derecha de la respuesta a la operación u operaciones situadas a su izquierda y tienden a rechazar igualdades que visualmente para los estudiantes no coinciden o no son iguales. Al respecto, Molina, et al. (2006) afirman lo siguiente:

La mayoría de los alumnos entienden el signo igual como un símbolo que debe ir seguido a su derecha de la respuesta a la operación u operaciones situadas a su izquierda y tienden

a rechazar igualdades de la forma $c = a + b$ porque “están al revés” cambiándolas a: $c + a = b$ o $a + b = c$ (p. 36).

En los dos documentos se presentan estrategias para superar esta dificultad de comprensión del signo igual y observar de forma correcta la relación de equivalencia con el igual, las estrategias en el documento de Molina, et al. (2006) son:

- Utilización de las igualdades numéricas cerradas verdaderas y falsas probaron ser un contexto eficaz mediante el cual los estudiantes pueden verbalizar y desarrollar su comprensión del signo igual.
- Fomentar la interacción entre los mismos estudiantes, o sea, la importancia de que los estudiantes se escuchen unos a otros para que el intercambio de estrategias y opiniones sea realmente fructífero.
- Creación de un enfoque centrado en el desarrollo del pensamiento relacional que favorezca una comprensión semántica de la aritmética y un acercamiento a las expresiones.

En el documento de Wilhelmi, et al. (2007) las estrategias que se presentan son:

- Construcción de significados y la resolución de problemas para ayudar a los estudiantes a comprender la noción de igualdad, esto es, que se sugiere que los profesores enfatizen en la importancia de la construcción de significados y la RdP en lugar de simplemente enseñar definiciones formales.
- Proporcionar a los estudiantes una variedad de problemas que involucren la noción de igualdad en diferentes contextos de uso para ayudarlos a comprender la complejidad de las prácticas operativas y discursivas conectadas con esta noción.
- Apoyar a los estudiantes a comprender la relación entre las prácticas matemáticas y los contextos de uso para contribuir a comprender la noción de igualdad.

En definitiva, la igualación de números es esencial, ya que aporta al desarrollo de habilidades matemáticas más avanzadas, como la resolución de ecuaciones y la comprensión de las propiedades de las operaciones. Además, es una noción fundamental en la vida cotidiana, puesto que nos permite comparar y evaluar cantidades y establecer relaciones entre ellas y desde el contexto escolar, es importante la comprensión de esta noción para el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas.

Capítulo 3 - Metodología de investigación

Con el objetivo de caracterizar, relacionar y analizar las concepciones del docente entrevistado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la igualdad numérica en los números reales, se emplea una matriz comparativa que contrasta los conocimientos del profesor entrevistado con los conocimientos que se espera tenga un profesor de matemáticas en relación con el modelo local de enseñanza. Además, nos servimos del método propio de la Didáctica de las Matemáticas que es el AD en la perspectiva de investigación articulado con el estudio de caso para comprender las decisiones que toma un profesor cuando se enfrentan a la enseñanza de la igualdad en los números reales en grado séptimo, a partir del enfoque de la resolución de problemas.

En resumen, se busca fundamentar bajo un modelo de enseñanza los desempeños que se evidencian de un profesor con formación matemática cuando se enfrentan a desarrollar actividades de resolución de problemas sobre las igualdades numéricas en los números reales para grado séptimo.

3. 1 Contexto y participantes

El perfil que se analiza es de un solo profesor, específicamente es licenciado en Matemáticas y Física, egresado de la Universidad del Valle, magíster en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Internacional de La Rioja. Con experiencia de más de 5 años como docente de varias instituciones educativas de carácter público y privado, en distintas poblaciones del Valle del Cauca, enseñando a nivel de primaria, bachillerato y educación superior, principalmente en grado séptimo. Por consiguiente, la institución en la que se realizará dicha indagación es la Institución Educativa Jorge Isaacs El Placer del municipio El Cerrito - Valle del Cauca, situada en el casco urbano y de carácter público, en la cual el profesor en estudio es titular para la asignatura matemáticas.

3. 2 Modelo local de enseñanza (Creación propia)

A partir del modelo de enseñanza MKT de Ball, Thames, y Phelps (2008) la estructura del modelo local de conocimiento matemático para la enseñanza que presentamos a continuación se relaciona con el Análisis Didáctico, el cual está compuesto por dos dominios que son: Conocimiento de la Materia (SMK); el conocimiento teórico y matemático que tiene el profesor de matemáticas sobre la igualdad numérica y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas sobre cómo enseñar o instruir la igualdad numérica. Asimismo, el Análisis Didáctico se relaciona a partir del análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción, y se articula con los subdominios del modelo MKT, creando así la estructura del modelo local de enseñanza. Cada uno de estos subdominios tienen aspectos que estructuran y se relacionan con uno o dos de los análisis y que están vinculados con la enseñanza y aprendizaje de las igualdades en los números reales. A continuación, se describen cada uno de los subdominios del MKT y su relación con los análisis mencionados:

Análisis de contenido y su relación con CCK: el análisis de contenido abarca los conocimientos que los profesores deben tener en el marco de la educación matemática. Esto incluye habilidades de resolución de problemas, conceptos, teoremas y operaciones matemáticas, estos conocimientos le permiten al profesor comprender la estructura conceptual, este análisis se relaciona con el conocimiento Común del Contenido (CCK): este análisis se desarrolla en el conocimiento matemático que es compartido por la mayoría de los profesores y profesionales de las matemáticas. Esto es, que los profesores deben tener amplio dominio de las matemáticas, incluyendo habilidades de resolución de problemas, conceptos, teoremas y operaciones matemáticas.

Análisis cognitivo y conceptual y su relación con el HCK y SCK: Estos análisis, cognitivo y conceptual se relacionan con el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y el Conocimiento del Horizonte (HCK). Desde el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) se trabaja en el conocimiento matemático que los profesores

necesitan para enseñar, los conocimientos son usados por el profesor para desarrollar sus propuestas de aula. Y desde el Conocimiento del Horizonte del Contenido (HCK) se desarrolla a partir de las ideas matemáticas que los estudiantes pueden encontrar difíciles, en este análisis se supone conocer cómo están compuestos los diferentes conceptos matemáticos y cómo se relacionan con otros contenidos.

Análisis de instrucción y su relación con KCT: El análisis de instrucción está relacionado con el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), ya que este se refiere a la comprensión de cómo enseñar los conceptos matemáticos, asimismo, se relaciona con el uso de diferentes herramientas didácticas para orientar un tema.

Análisis evaluativo y su relación con KCC: el análisis evaluativo está relacionado con el Conocimiento del Contenido Curricular (KCC), el cual involucra la comprensión de los estándares y objetivos del currículo matemático y cómo diseñar experiencias de aprendizaje en función de ellos. Específicamente, el conocimiento sobre los diferentes modelos, objetivos, organización y planificación de los planes de estudios que deben de ser enseñados dentro del nivel educativo que desempeñan.

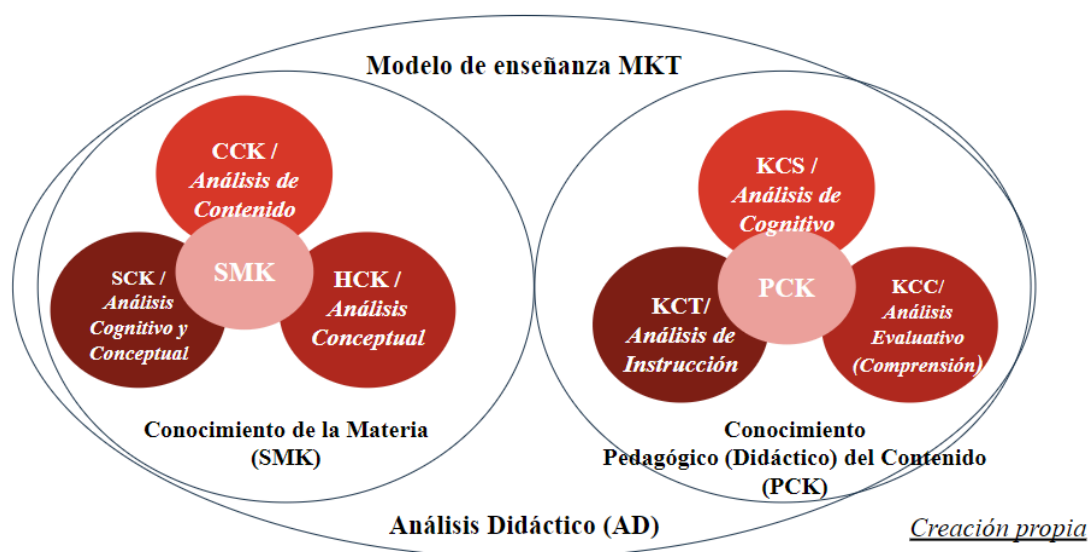


Gráfico 3. Articulación del Análisis didáctico y modelo MKT.

3.3 Estudio de caso

Como parte de la metodología de trabajo se emplea un estudio de caso, este consiste en una investigación empírica que se enfoca en un fenómeno contemporáneo en profundidad y dentro de su contexto de la vida real, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes. En otras palabras, se utiliza el método de estudio de caso para entender un fenómeno de la vida real en profundidad, abarcando dicha comprensión en condiciones contextuales importantes, y que son altamente pertinentes para el fenómeno de estudio.

Según lo planteado por Yin, (2009) este método de investigación es apropiado, ya que proporciona una comprensión profunda y detallada de un fenómeno de la vida real, lo que puede ser útil para explorar fenómenos complejos y poco conocidos. De igual forma, aporta a la investigación para generar hipótesis e investigar el “cómo” o “por qué” funcionó un tratamiento o intervención.

Este método de investigación toma en consideración las siguientes fases:

1. **Selección del caso:** se selecciona un caso o casos que sean relevantes para la investigación y que permitan una comprensión profunda del fenómeno de interés.
2. **Diseño de la unidad de análisis:** se define la unidad de análisis, que puede ser una persona, un grupo, una organización, una comunidad, etc.
3. **Diseño de la recolección de datos:** se seleccionan las técnicas de recolección de datos, que pueden incluir entrevistas, observación, análisis de documentos, etc.
4. **Recolección de datos:** se recopila la información necesaria para responder a la pregunta de investigación.
5. **Análisis de datos:** se analizan los datos recopilados utilizando técnicas de análisis de datos apropiadas.
6. **Interpretación de los resultados:** se interpretan los resultados del análisis de datos y se extraen conclusiones.

7. **Informe del estudio de caso:** se presenta el estudio de caso en un informe que describe el caso, los métodos utilizados, los resultados y las conclusiones.

3. 3. 1 Entrevista semiestructurada

Como instrumento o técnica del trabajo de investigación, se incorpora la entrevista semiestructurada, que tiene como objetivo indagar mediante un conjunto de preguntas definidas por tres categorías de estudio en relación con los objetivos de la investigación. Sin embargo, el entrevistador está en la libertad de introducir preguntas o temas adicionales con el fin de profundizar más acerca del objeto en estudio.

3. 3. 2 Metodología de la entrevista

La entrevista se va a dividir en tres momentos los cuales apuntan a cada una de las categorías, con relación a los objetivos de la investigación, el primer momento, se pregunta de manera indirecta sobre la formación y conocimientos matemáticos que tuvo el profesor durante su paso por la institución de formación del profesorado en matemáticas. En el segundo momento, se indaga sobre el currículo y de forma indirecta se pregunta al docente si por los elementos conceptuales y estructura de los contenidos vistos por el docente sobre la noción de igualdad numérica en los programas de formación. Y finalmente, como tercer momento, se cuestionara por los contenidos asociados al conocimiento matemático y didáctico del profesor de matemáticas en su paso por las instituciones de formación del profesorado de matemáticas.

3. 4 Análisis de la información recolectada

A continuación, se va a presentar la estructura del análisis sobre la información recolectada a través de una entrevista semiestructurada, que se realizó a un profesor de matemáticas, empleando el método de estudio de casos, y utilizando la matriz comparativa que fue fundamentada con el análisis didáctico y el modelo de enseñanza. En otras palabras, se relaciona el conocimiento didáctico, sobre la resolución de problemas de igualdad numérica, que se espera tenga un profesor de matemáticas, con los conocimientos didácticos que se evidencia en el profesor de matemáticas mediante una matriz comparativa. Igualmente, se presentan las

categorías de estudio: formación del profesor de matemáticas, currículo escolar de matemáticas e implementación en el aula de clases, que se emplearon para la entrevista y que están relacionadas con los objetivos de la investigación y la pregunta problema. Las convenciones empleadas en la entrevista se presentan a continuación: E: Entrevistador y P: Profesor entrevistado.

Primera categoría (C.1): Formación del Profesor de Matemáticas (FPM)

Todos los referentes teóricos, concepciones, y estrategias didácticas del currículo de formación inicial con que el profesor desarrolla la noción de igualdad numérica en los reales en grado séptimo desde la resolución de problemas, además, ideas que tiene profesor para la realización de actividades de diseño de tareas acerca del objeto matemático mencionado.

Subcategorías de (C.1)

1. Conocimiento matemático del profesor.
2. Conocimiento sobre el estudiante.
3. Conocimiento del contenido.
4. Conocimiento didáctico del profesor.

Segunda categoría (C.2): Currículo Escolar de Matemáticas (CEM)

Desde el currículo se quiere indagar por la formación desde un contexto didáctico del profesor en los programas de formación inicial y continua, además como el profesor organiza sus propuestas a través del conocimiento curricular en matemáticas.

Subcategorías de (C.2)

1. Conocimiento que se espera.
2. Expectativas de aprendizaje.
3. Evaluación de los aprendizajes.

Tercera categoría (C.3): Implementación en el aula de clases (IAC)

Todos los obstáculos y limitaciones que el profesor de matemáticas objeto de estudio identifica cuando enseña la noción de igualdad numérica en el aula de clase.

Subcategorías de (C.3)

1. Acción y decisión del profesor en el aula.
2. Orientación sobre el currículo escolar.
3. Comprensión de la igualdad.

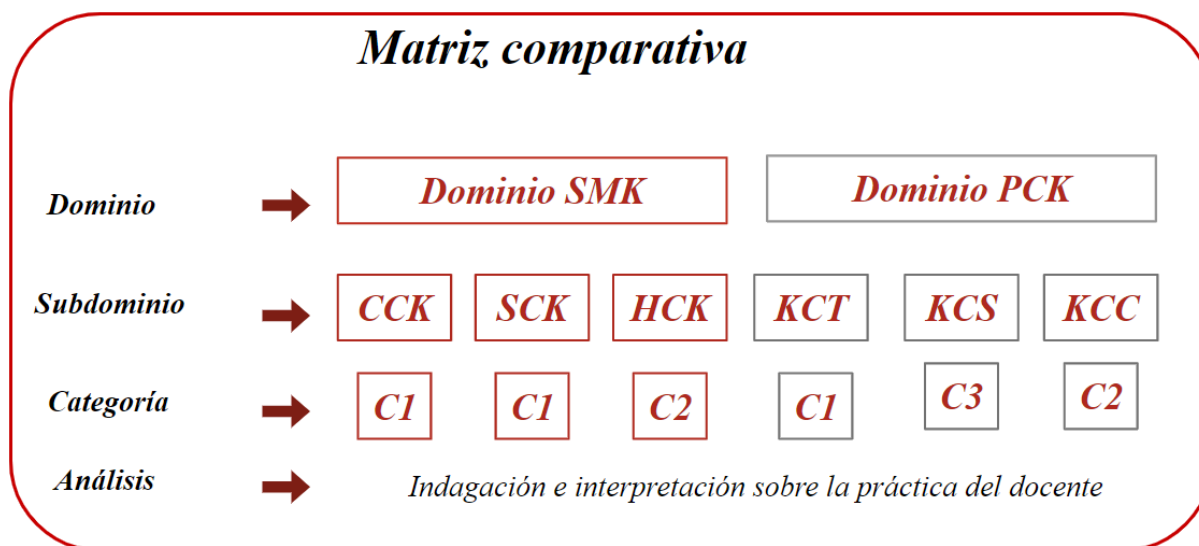


Gráfico 4. *Articulación del modelo local y categorías de estudio*

3. 4. 1 Matriz comparativa

A continuación, se relacionan las categorías mencionadas con los dominios y subdominios del modelo local de enseñanza. En esta misma tabla, se presenta la transcripción de la línea seleccionada por cada subdominio, un análisis de la línea seleccionada y un análisis general por cada dominio del modelo local de enseñanza. Por último, se presentan las reflexiones finales de cada dominio relacionado con respectiva categoría.

Dominio: Conocimiento de la materia (SMK)	
Subdominio: Conocimiento de contenido común (CCK)	Categoría C1: Formación del profesor de matemáticas (FPM)
• Significado de la igualdad. • Definición de igualdad. • resolución de problemas de igualdad. • Propiedades de la igualdad. • Relaciones numéricas con la igualdad.	Este conocimiento le permite al profesor tener amplio dominio de las matemáticas. Esto incluye habilidades de resolución de problemas, conceptos, teoremas y operaciones matemáticas.
Transcripción	Análisis de línea
Línea 6 Turno: 00:01:45 E1:...¿qué asignaturas de la línea de formación matemática te parecieron mucho más relevantes en tu formación como docente? Línea 9 Turno: 00:02:09 P: Bueno, creo que, creo que las <i>matemáticas fundamentales, matemática fundamental, geometría elemental, la geometría analítica, los cálculos, 1, 2, 3</i>, y yo creo que también las de avanzada, toda la línea fue muy relevante. Pues creo que la parte fundamental está bien, porque cuando tuvimos la formación en el Instituto de Educación, que ahora creo que es facultad, la dictaban los Profes del Instituto, o sea, eran docentes de licenciatura los que enseñaban esos cursos, cosa que cuando ya uno llegaba a los cálculos o a las matemáticas avanzadas que eran las de ciencias, pues ya tenía uno como que cierto bagaje y una visión general de muchas formas en las que se trabaja matemática.	Línea 9: El profesor menciona que toda la línea de enseñanza en matemáticas fue muy significativa para su formación como docente. Igualmente, destaca que así no esté empleando todos los temas de la línea de matemáticas; para él sí es relevante porque dota al docente de herramientas y estrategias para resolver y reflexionar sobre cómo enseñar las matemáticas.

Entonces, creo que todas, todas tuvieron mucha relevancia, pero creo que las fundamentales fueron las que, las que orientaron la reflexión sobre no solamente la matemática en sí como ciencia, sino como debía ser enseñada.

Línea 14

Turno: 00:04:28

E1: Correcto. Profe. ¿Adicional a esto, realizaste algún estudio complementario a tu formación matemática como licenciado?

Línea 15

Turno: 00:04:38

P: *¿En matemática? Matemática no pues en la maestría, una maestría, pero de todas maneras siempre tenía como un enfoque pedagógico cualquier estudio que había. Entonces no, nunca se vio matemáticas, más allá de la de cuando se estudiamos la licenciatura. La matemática en sí, como matemática no se trabajó en la exterior; siempre que había pues algún tema como las especializaciones y en cómo se podía aterrizar al aula, entonces creo que aparte de eso no ha habido más. Siempre el interés más allá de lo matemático ha sido el cómo se puede hacer esa transposición de esos conocimientos, sobre todo por el nivel que está en la escolaridad, en la secundaria o la media.*

Línea 16

Turno: 00:05:44

E1: ... dentro de estos cursos en formación, ¿realizaste algún énfasis en lo que tiene que ver con el significado de las equivalencias numéricas para el efecto de su enseñanza como tal?

Línea 15: El profesor relaciona su estudio de maestría en didáctica de las matemáticas como parte de su formación para la enseñanza de la equivalencia numérica y para la resolución de problemas.

Línea 17**Turno:** 00:06:00

P: *Como énfasis, como énfasis, ¡no! es como la parte de lo que me están hablando es como más aritmético y los trabajos que hice tanto en la licenciatura como en maestría estaban más relacionados por el lado del álgebra, pero sí tenía que ver con la resolución de problemas.*

Línea 18**Turno:** 00:06:25

E1: ... podrías... mencionar algunos cursos en los que digamos se haya mencionado o hayas aprendido algo sobre la igualdad numérica. En estos cursos que dicen, en algunos se trató este tema en específico.

Línea 19**Turno:** 00:06:48

P: *Así en lo neto, neto aritmético, la igualdad no, la verdad no recuerdo que se haya visto como tal o que se haya escrito, de pronto por allá hay un curso que se llamaba álgebra, álgebra lineal, que creo que había una parte que se hablaba mucho de los números, o sea que era como lo más aritmético que yo oí de todos los cursos, me parece que sí, que fue ahí. O topología también creo que hubo una partecita donde se trabajó ese aspecto, pero, pero así enfocado como me lo están enfocando, ya lo aterrizas es uno después.*

Línea 62**Turno:** 00:43:52

E1: ...¿cómo se evidencia el comportamiento de los estudiantes o cómo toman la

Línea 17: El profesor menciona que no realizó ningún curso de formación que tuviera un énfasis en las equivalencias numéricas y que los cursos que realizó estaban más enfocados en el álgebra con un enfoque de resolución de problemas.

Línea 19: El profesor destaca en su formación como docente si haber trabajado en cursos como: Álgebra lineal y Topología, la noción de igualdad, y menciona que le sirvieron para aprender un poco más sobre la igualdad numérica.

equivalencia numérica dentro de un problema, dentro de la resolución de algún problema en matemática?

Línea 63

Turno: 00:44:30

P: *Normalmente los problemas de matemática son pues, son expresiones en lengua natural, que se tienen que representar después en algún polinomio aritmético o en alguna ecuación, o están aterrizados a una operación. En el caso, por ejemplo, de las equivalentes, ponen en juego como dos cantidades, como que están, digamos, están tan relacionadas. Y creo que creo que la decisión más grande es cuando, cuando tienen que hacer esa, podríamos decirlo entre comillas, una traducción, pasar de la representación en lengua natural a hacer el planteamiento aritmético como tal. Entonces yo insisto mucho y creo que es algo que ha funcionado bastante y es que sea el mismo lenguaje natural, la misma lengua natural la que me dé las pistas de cómo plantearlo. O sea, que, si vos me vas a poner un cinco más tres igual a dos, más seis, ¿De dónde sacaste esos números? O sea, que no llegues directamente a plantearme los numeritos ahí, sino que, apoyando la lengua natural, hagas una especie de análisis, pues en primaria no usa mucho el análisis, operación, respuesta.*

Línea 64

Turno: 00:47:24

E1: ...¿qué papel juega dentro de la resolución de problemas el concepto o el saber el significado de una equivalencia numérica para pues darle solución a un problema entre la matemática?

Línea 63: En este fragmento de la transcripción se puede intuir cómo comprende el profesor la igualdad numérica; como una relación entre dos expresiones o cantidades en lenguaje natural que se tienen que representar en algún polinomio aritmético, ecuación u operación. Esas dos expresiones o cantidades que se tienen representan lo mismo en ambos lados. Igualmente, el docente presenta un tipo de dificultad en el aprendizaje de la igualdad numérica en relación con la dificultad que tienen los estudiantes de pasar del lenguaje natural al lenguaje aritmético.

Línea 65

Turno: 00:47:43

P: *Total, es todo. Tener los conceptos claros tanto en este como en cualquier tema, hace que tú plantees, o sea, sí, si cuando tú ves una expresión en lenguaje natural, es que es normalmente en lo que están los problemas escritos. Tú no sabes cuál de esas palabras que está ahí es la que significa el igual, cuál de esas palabras que está ahí es la que significa suma, cuál es las palabras que está ahí es la que significa que hay que restar, el que sumas, el que restas. Es esos números que están ahí, en qué orden van en la expresión, que a veces te dan un orden en digamos que hay un orden en la lengua natural y que ese orden a veces no coincide con el orden que está, que uno pone una operación. Yo creo que es total, total.*

Línea 65: El profesor habla sobre la importancia de que los estudiantes comprendan el significado e intencionalidad del signo igual desde la resolución de problemas, para lograr pasar del lenguaje natural al aritmético.

Análisis del subdominio

En este subdominio sobre el conocimiento común del contenido, el profesor entrevistado destaca aspectos claves desde la categoría de formación del profesor de matemáticas: la **línea 9** se relaciona con *la importancia y complejidad de conocimientos que emplea el profesor de matemáticas puede plantear desafíos a la definición y comprensión del objeto en estudio*, así como lo mencionan Flores, Sosa y Ribeiro (2016). Igualmente, el profesor en las **Líneas 15, 16, 17** habla de la falta de profundización que hay en los contenidos de los currículos de las instituciones de formación del profesorado sobre la igualdad o equivalencia numérica y que está muy relacionado con lo que plantea Felmer, et al. (2015) cuando habla de las dificultades en la formación del profesor desde la RdP asociada a la falta de oportunidades para reflexionar sobre el objeto en estudio. Además, tenemos la **Línea 63** en la cual se puede percibir un acercamiento a la *definición de la noción de igualdad* que tiene el profesor entrevistado; nos dice que es como una relación entre dos expresiones o cantidades en lenguaje natural que se tienen que representar en algún polinomio aritmético, ecuación u operación. Esas dos expresiones o cantidades que se tienen, representan lo mismo en ambos lados. Así como lo plantean Molina, et al. (2006); Wilhelmi, et al. (2007) y Kieran (1981) como una relación entre dos expresiones o cantidades que tienen el mismo valor y que se representan con el signo igual. Por último, tenemos la **Línea 65**, nos habla de la importancia de comprender el

significado de la igualdad y de reconocer sus diferentes usos por parte de los estudiantes, así como lo menciona Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) los profesores no cuentan con las técnicas de enseñanza que le permiten establecer y modificar un contenido de los saberes y que aporte a la construcción de los currículos o los libros de textos de los colegios para la comprensión de la noción de igualdad.	
Subdominio: Conocimiento de contenido especializado (SCK)	Categoría C1: Formación del profesor de matemáticas. (FPM)
• Expectativa de aprendizaje. (EBC Y DBA) • Contextos para el aprendizaje de la igualdad. • Prioridades cognitivas. • Dificultades en el aprendizaje de la igualdad.	Este conocimiento le permite al profesor desarrollar su propuesta de aula.
Transcripción	Análisis
Línea 40 Turno: 00:25:03 E1: ... ¿los estudiantes en qué momento deben emplear el conocimiento sobre equivalencias? ... Línea 41 Turno: 00:25:39 P: <i>Yo creo que está, yo creo que está ahí donde tú lo estás diciendo, tanto, tanto para enteros como para para racionales, están esas equivalencias, están también las equivalencias cuando, diría cuando uno hace la simplificación o la amplificación de una fracción, una fracción pues puede tener un cuarto, dos octavos o tres doceavos, o sea, son la expresión que representan como la misma cantidad. Y creo que cuando se trabaja la proporcionalidad también, la proporcionalidad directa, inversa, la regla de tres, creo que son momentos en los cuales, los</i>	Línea 41: El profesor menciona que se puede introducir el tema de igualdad o equivalencia numérica cuando se está en simplificación y amplificación de fracciones, proporcionalidad directa e inversa y regla de tres.

cuales uno puede traer como esa especie de equivalencia, no sé si a esas que refieres o solamente a las de orden aditivo.

Línea 60

Turno: 00:40:52

E1:... ¿Considera usted que ha aprendido sobre equivalencias en la operación numérica que se puedan evidenciar dentro de su práctica como docente?...

Línea 61

Turno: 00:41:47

P: *Sí, sí, obviamente. Y cuando lo mismo pasa cuando hay años, pasamos de un año a otro. Este año este tema se vio así y no funcionó, y ya al final me di cuenta cuando vimos el último, el último de los salones que funcionó mejor. Al año siguiente, si me toca el mismo grupo, en dos años, si me toca el mismo grupo, aplicamos cosas. Incluso, por ejemplo, el año pasado enseñé noveno y la última vez que yo había enseñado noveno matemáticas fue cuando te enseñé a ti. Ese fue el último año que yo enseñaba noveno. De ahí ya estuve 10.º 11, 10, 11, 10, 11, llegó al nuevo colegio y me mandan séptimo y ya el año pasado llegó noveno. Entonces como que al llegar a noveno encontré, me tocó volverme a los obstáculos que me acordaba que ocurrían en noveno y pasan exactamente cosas muy similares y que uno ya las va aplicando. Y ahora en este año otra vez tengo noveno y me rinde mucho más, los niños están más, más activos debido a que el noveno del año anterior pues fue como una, termina siendo una experimentación, termina siendo un laboratorio didáctico que hace que el año siguiente se aborde con mejores técnicas y da el resultado, porque avanza uno*

Línea 61: El profesor menciona que él también ha aprendido sobre las igualdades o equivalencias a partir de su experiencia en los mismos grados en años anteriores. Además, destaca que reflexiona y analiza sobre su práctica docente en el aprendizaje y enseñanza de la noción de igualdad a raíz de esa misma experiencia que ha ganado impartiendo esta noción.

más, tanto en el desarrollo de la planeación como en el aprendizaje de los estudiantes. Y los resultados al final los va viendo cuando llegan las pruebas externas, que son más hábiles para contestarlas.

....

Línea 74

Turno: 00:57:17

E1: ¿lo has llevado a otro concepto, a otro contexto fuera de lo matemático este tipo de equivalencias numéricas?

Línea 75

Turno: 00:57:44

P: *No, netamente ha sido, pues digamos que los problemas de cierta manera son ejemplos de diferentes realidades que puede haber. En estos días hablábamos de las temperaturas bajo cero y, y ni siquiera yo, o sea, yo nunca he experimentado una temperatura bajo cero, entonces yo digo en estos niños, o sea menos. Y entonces uno trabaja en contextos que uno diría no, pero es que son, son de la vida real, sí, pero de pronto no es de nuestras realidades. No pues, uno trata de aterrizar lo que más pueda y tratar de cómo buscar qué saben ellos, cómo saben y cómo se podría eso ver en la vida real y cómo el manejo de esos conceptos nos podría dar respuesta a situaciones que se nos puedan presentar; pero más allá de lo académico y de lo que se trabaja en área, ¡no, no habría!*

Línea 75: El profesor señala que no ha trabajado la resolución de problemas de equivalencias numéricas desde otros conceptos, únicamente desde lo matemático. Además, menciona la complejidad de involucrar contextos completamente alejados de la realidad de los estudiantes, ocasionando dificultad para llegar a la respuesta de esos problemas.

Análisis del subdominio

En este subdominio sobre el conocimiento del contenido especializado, el profesor entrevistado destaca aspectos claves desde la categoría de formación del profesor de matemáticas: la **línea 41**, el profesor menciona cuáles son los temas que se pueden usar y que

él utiliza para involucrar la noción de igualdad o equivalencia numérica para la organización de las prioridades cognitivas; <i>simplificación y amplificación de fracciones, proporcionalidad directa e inversa y regla de tres</i>, el profesor hace énfasis en las fracciones como una de las tantas maneras para introducir la igualdad en grado séptimo. Así mismo, en la Línea 75 señala que el trabajo de la igualdad numérica lo ha desarrollado desde lo matemático y le ha funcionado para la gestión de la clase. Por último, tenemos la Línea 61, que habla de la experiencia que el profesor entrevistado ha ganado en relación con la enseñanza de la igualdad numérica en el mismo grado séptimo para los años siguientes.	
Subdominio: Conocimiento del horizonte del contenido (HCK)	Categoría C2: Currículo escolar matemático (CEM)
• Conocimiento del currículo. • Relación con otros contenidos.	Este conocimiento le permite al profesor conocer cómo están compuestos los diferentes conceptos matemáticos y cómo se relacionan con otros contenidos.
Línea 42 Turno: 00:26:50 E1: ...¿qué competencias o habilidades numéricas esperas que los estudiantes al finalizar el grado séptimo obtengan? Línea 43 Turno: 00:27:13 P: <i>Bueno, yo esperaba que ellos comprendan el conjunto de los racionales en su totalidad, que sepan que los racionales tienen varias formas de representarse, existen varios tipos de racionales, los enteros, los que son decimales finitos, los que son decimales infinitos, pero que son periódicos, que reconozcan eso, que reconozcan que una misma cantidad se puede expresar de formas distintas, como un fraccionario decimal, como un porcentaje gráficamente, que lo puedan, lo puedan imaginar también que se puedan hacer una idea, que tengan una, una relación de orden de los números, que tengan un cuarto y 0,8 y</i>	Línea 43: El profesor menciona las habilidades y competencias que se esperaba los estudiantes evidencien al finalizar la formación académica de grado séptimo en el aprendizaje de la noción de igualdad numérica, entre estas podemos mencionar: la comprensión de los conjuntos de los números racionales y sus diferentes formas de representación, como son los decimales finitos, las fracciones, los decimales periodos y mixtos, al igual que sus representaciones gráficas y porcentuales. También se espera que los estudiantes sean capaces de convertir de un lado de una representación a otra, que

<i>puedan decidir cuál de ellos es mayor, que sean, que sean capaces de convertir de un lado, de un, de una representación a otra, que sean capaces de operar y a que operen bien con los números, sobre todo cuando, cuando hay negativos en las operaciones, eso cuesta muchísimo el que sepan diferenciar cuando se opera con negativos, en la suma y en la multiplicación hay diferencias, no me gusta mucho usar la famosa ley de signos, creo que confunde bastante y digamos que más me gusta cómo usar el lenguaje natural para describir cómo se opera cuando se está en multiplicación en suma y se tienen signos iguales o signos diferentes. Y creo que lo que ha funcionado un poquito mejor, aunque algunos insisten todavía porque llegan a la casa y en la casa pues enseñan el más por más, más por menos, menos y toda esa vaina que luego se pegan una enredada, pero yo aspiraría a eso.</i>	desarrollen operaciones con números racionales sin que afecte su representación.
Análisis del subdominio En este subdominio sobre el conocimiento del horizonte del contenido, el profesor entrevistado destaca un aspecto clave desde la categoría de currículo escolar matemático: específicamente dice cuáles son los alcances de aprendizaje que para él se esperaría los estudiantes evidencien al finalizar la formación académica de grado séptimo en el aprendizaje de la noción de igualdad numérica, entre estas podemos mencionar: <i>la comprensión de los conjuntos de los números racionales y sus diferentes formas de representación, como son los decimales finitos, las fracciones, los decimales periódicos y mixtos, al igual que sus representaciones gráficas y porcentuales.</i> También, se espera que los estudiantes sean capaces de convertir de un lado de una representación a otra, que desarrollen operaciones con números racionales sin que afecte su representación. Estas habilidades y competencias que menciona el profesor entrevistado están relacionadas con lo planteado por (Molina, Castro y Castro, 2007) y (Wilhelmi, et al., 2007) que nos habla de las fracciones, los decimales y las representaciones numéricas.	

Tabla 3. Matriz comparativa de dominio (SMK).

Desde una mirada general a los desempeños del profesor entrevistado, en este dominio del conocimiento de la materia (SMK), destacamos la formación matemática que ha tenido el profesor entrevistado. A pesar de que en el currículo de formación que tuvo el profesor no se ve explícitamente las igualdades numéricas, el docente es consciente de la importancia del tema y percibiendo varios conocimientos que se espera que tenga un profesor de matemáticas.

Estas competencias y habilidades que podemos percibir del profesor entrevistado son: dominio de la noción de igualdad numérica, habilidad de resolución de problemas y la gestión de su propuesta en el aula de clase. Además, el profesor tiene conocimiento sobre las dificultades de los diferentes significados del signo igual, los contenidos del currículo para grado séptimo, las relaciones de la noción de igualdad con otros contenidos, las expectativas de aprendizaje; comprende que hay unos estándares básicos de competencias que para grado séptimo que trabaja con la noción de igualdad y los contextos de aprendizaje de la igualdad.

Dominio: Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	
Subdominio: Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS)	Categoría C1: Formación del profesor de matemáticas (FPM)
• Prioridades cognitivas. • Dificultades en el aprendizaje de la igualdad. • Alcance de aprendizaje. • Estrategias de aprendizaje de sus estudiantes.	Este conocimiento le permite al profesor saber sobre las diferentes teorías, sobre la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas.
Línea 22 Turno: 00:09:34 E1: ... ¿Consideras que algunos cursos o dentro de tu formación sobre aspectos didácticos de las matemáticas fueron suficientes para ti?	

Línea 23**Turno:** 00:09:54

P: *Pues, realmente en la época que lo trabajamos o que estudiamos, la didáctica estuvo más enfocada en la reflexión de, de los problemas, los problemas que podían que podían surgir, analizar el por qué ocurrían esos problemas desde la línea de comunicación, desde la epistemología, la tecnología, entonces siempre era como el comprender los problemas que se presentaban en el aula para, para algunos temas, de dónde partían esas dificultades, pero realmente no recuerdo, sí que se aterrizará a solucionar mucho, no. Ya fue como al final de la carrera, cuando hacíamos los seminarios de trabajo de grado y en algunas electivas que trabajamos, es que recuerdo que íbamos como a la aplicación, al cómo se podrían llevar ciertas ideas al aula, pero la gran mayoría de los cursos de didáctica estuvieron fue enfocados en comprender los problemas, el por qué pasaban, por qué los estudiantes de pronto no comprendían una u otra cosa, entonces si el obstáculo donde podía estar, si en lenguaje al momento de exponer los temas o hay algún obstáculo epistemológico que no permitía que en general los estudiantes pudieran llegar a comprender alguno u otro concepto. Y pues yo creo que, en cuanto a aplicabilidad, aunque no, no hubo muchos, muchos ejemplos de cómo se podía llevar eso al aula, creo que el haber reflexionado todo ese poco de cosas sí permite, pues si uno está muy piloso al asunto, encontrar soluciones. O sea que cuando ya está uno en el aula y empieza a encontrarse esos obstáculos, no dice bueno, esto, esto ya sé que viene por aquí, si es epistemológico, la humanidad lo resolvió así, entonces intentemos con los chicos llevarlos*

Línea 23: El profesor nos cuenta que durante su formación académica en la rama de la didáctica se enfocó mucho en la reflexión de las dificultades que podían surgir y cuál era su origen en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Por lo tanto, las asignaturas que vio en su formación desde la didáctica de las matemáticas se centró en la comprensión de los estudiantes y reflexión sobre las dificultades como: podrían aparecer fuentes teóricas y el lenguaje matemático. Sin embargo, el profesor menciona que no se veían muchos ejemplos de cómo se podría llevar un concepto o noción al aula y sobre la práctica no había mucho para seleccionar.

por este mismo camino a ver si llegan allá o si el problema es del lenguaje, entonces cómo lo comunico más bien lo comunico así o lo comunico asá, pero creo que ya ahí ya viene la capacidad del maestro, comprender el problema y buscar posibles soluciones que en la práctica se le vayan presentando. Ya en la maestría si hubo un poquito más, la mayoría de los cursos si estaban muy aterrizados, veíamos el problema, cuál era la dificultad, por qué y varias herramientas que nos permitían como poderlas aplicar en el aula. Creo que en la maestría hubo, hubo más, hubo más trabajo de aplicación de cómo podíamos enfrentarnos a ciertas cosas. En la licenciatura sí fue más el por qué pasan las cosas.

Línea 30

Turno: 00:18:35

E1: ... ¿has notado algún comportamiento que te exprese directamente una dificultad?...

Línea 31

Turno: 00:19:07

P: *¡Si! Hay muchos, muchos vacíos que van que van teniendo a lo largo de la formación, de la primaria, de bachillerato, siempre, siempre hay unos huecos conceptuales que pues uno no se puede detener, o por lo menos yo no veo, no veo provechoso el detenerme a como a, a dar una clase para rellenar ese hueco, sino más bien irlo rellenando en la medida que se van trabajando los otros temas, que si uno ve que el hueco es muy grande y es muy generalizado, pues uno parte con el tema desde un nivel de desempeño más bajito y va acrecentando. Realmente como están planteados los desarrollos de los aprendizajes en el currículo a nivel nacional, lo que manda*

Línea 31: El docente indica que durante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tanto en primaria como en bachillerato, se crean unos vacíos conceptuales y estos vacíos generan que los estudiantes no logren comprender de inmediato un objeto matemático. Por consiguiente, requiere que el docente deba implementar una estrategia para tratar de llenar dichos vacíos; en este caso, el entrevistado nos cuenta que el no se detiene totalmente a retomar el tema que genera el vacío cognitivo, sino que avanza de una manera lenta y sencilla para que estos estudiantes vayan rellenando estos vacíos en la práctica, con el fin de alcanzar y cumplir con los desempeños que plantean los DBA y EBC.

*el ministerio, desde primero hasta once son los mismos conceptos, solo hay como una especie de concepto estructurantes y, y lo único que va cambiando es el nivel de desempeño, pues al paso de los años. **O sea, que, si uno encuentra algún hueco, ya sabe que lo único que tiene que hacer es iniciar el tema, pero con un nivel muy abajo, que uno sabe que en algún momento de la historia en sus recuerdos lo encontrará y que ya con la práctica va adquiriendo la habilidad, y uno le va subiendo el nivel hasta que lleguemos a al grado en el que presupondría. Entonces sí, casi con la mayoría de los conceptos pasa eso.***

Línea 44

Turno: 00:29:36

E1: ... ¿se evidencian algunas dificultades, errores, obstáculos que sean como en referencia a estas equivalencias como tal?...

Línea 45

Turno: 00:29:58

P: *Creo que, en el momento de las propiedades como tal, entenderlas, comprenderlas, no tanto, pero cuando, cuando lo somete uno como a, no sé, hacer ejercicios, el saber que uno puede sumar en un lado y no sé, como te dijera, cuando uno pone como incógnitas, o sea, cuál es el número que debe ir aquí o acá. Creo que ahí es donde se encuentra, en el mover los paréntesis no es tanto el lío, pero creo que ya cuando tienen que operar, allí es donde se, dónde se confunden un poco o más que confundirse, es que lo hacen de manera mecánica y no comprenden que lo que están haciendo lo hacen, saben que está bien, pero no saben por qué está bien. Y me parece que es como la parte más, más frustrante, porque*

Línea 45: El profesor evidencia que hay unas dificultades en las formas de operar, los procedimientos que los estudiantes realizan son muy mecánicos y el estudiante no entiende el porqué desarrolla esas operaciones, simplemente lo hace y esto genera que haya un vacío en el momento de reflexionar, o en el momento de solucionar un problema de que requiera un nivel de reflexión más avanzado que solo desarrollar las operaciones matemáticas, entonces es ahí cuando se vuelve más evidente la dificultad, en esa falta de comprensión adecuada de la equivalencia.

hay momentos en los cuales uno no sabe cómo hacerles entender eso de que sí, que está bien y qué, y que el, el que hayan respondido o hayan hecho algún proceso correctamente está bien, pero que el que no lo comprenda, pues no es realmente le quita muchísimo valor al hacer el procedimiento, porque si llega un momento en el cual tengan que tomar decisiones para proponer la solución de algún problema o resolver alguna ejercicio, ahí se van a quedar cortos, porque como no les van a decir qué hacer y no se la van a poner como tan, tan fácil, pues el desarrollo mecánico es inútil, ahí.

Línea 46

Turno: 00:32:03

E1: ...¿Cómo tú...considerarías que los estudiantes toman este signo igual?

Línea 47

Turno: 00:32:25

P: *Como un accesorio más, o sea, a veces no le dan el significado de la igualdad como tal, más como como que ahí está el igual y esto que hago, que hago en un lado de la igualdad, me va a resultar en el otro lado de la igualdad. Y cuando uno lo toma al revés, digamos que el resultado está primero y después igual a otras cosas, como que se les hace extraño y lo leen. Pareciera, pareciera, pareciera que no, que fuera nomás un accesorio dentro de las operaciones. No me queda a mí claro que realmente le estén dando el significado al igual que se merece y que podría entrar a ser parte de la como un signo, como un signo, así como lo es el más, como lo es el menos, es el por, un dividido.*

Línea 47: El profesor nos cuenta que los estudiantes toman el signo igual como un operador final, como signo sin un significado más allá del final de una operación y cuando se les presenta en sentido contrario, o sea se les pregunta por la operación y no el resultado los estudiantes evidencian dificultades, por no tener en cuenta el signo igual como una igualdad sino como un operador similar al signo por, signo de suma o resta.

Línea 49, 50, 51, 52, 53: El profesor

Línea 48**Turno:** 00:33:43

E1: Ok, pero entonces básicamente lo toman como en una frase, uno toma un punto final, ¿cierto?

Línea 49, 50, 51, 52, 53**Turno:** 00:33:51

P: *Sí, sí, sí, sí. Pues no estaría tan seguro si tan así, pero, pero desde la perspectiva que lo estás planteando, podría ser algo como que sí, como que él está, él tiene que estar ahí. Incluso he visto en algunas ocasiones donde uno trabaja con polinomios aritméticos, o sea, combinaciones pues de operaciones, en qué, en que en algún paso del desarrollo ¡El igual se pierde! O sea, no, no lo ponen ni siquiera...*

P: *Dicen, no, no, pero pues ya sabemos que eso es así. No, no, no, no. ¿Y dónde está el igual? Esto es igual a esto, igual a esto. Salen, por ejemplo, cosas como, bueno, esto ya sería en geometría. He pillado, por ejemplo, un error como el área de un triángulo es base por altura dividido dos. Entonces ellos ponen, por ejemplo, área es cinco por cuatro igual a veinte dividido dos, igual a diez. Si ¿Si me entiendes?...*

P: *O sea, como que, como que el dos lo metieron a dividir, pero después de, después de haber hecho la multiplicación y entonces como cinco, como si cinco por cuatro fuera lo mismo que veinte dividido dos y eso además es igual a diez...Entonces el igual pierde todo el sentido ahí, pero al final le da el diez que lo que los pone a ellos felices, porque al final le dio el diez que esperaban.*

interpreta que los estudiantes no le dan mucha importancia al signo igual, a tal punto que en ocasiones omiten su escritura y solo lo ponen al final de la operación para darle cierre, darle un final a las operaciones de manera similar al punto final de un párrafo. Entonces el estudiante desconoce el amplio significado que tiene el signo igual.

Línea 64**Turno:** 00:47:24

E1: ... ¿y tú consideras que qué papel juega dentro de la resolución de problemas el concepto o el saber el significado de una equivalencia numérica para pues darle solución a un problema entre la matemática?

Línea 65**Turno:** 00:47:43

P: ...*El estudiante que no entiende la importancia del igual, pues cuando llegue el momento de ponerlo, no va, no va a responder, no va a saber. Incluso hay muchos que se bloquean y no saben qué hacer. Pues que no sé qué poner, no sé qué hacer, no entiendo, y uno les dice a veces, digamos que ingenuamente como maestro, es que no leen, eso está ahí, es simplemente leer. No, no es tan así, no es tan simplemente leer, es leer y saber el concepto matemático que me permitiría responder eso, saberlo bien. Si no lo sabes bien, por más que leas y entiendas lo que puede decir la lectura, no lo vas a poder plantear en matemáticas, en este caso la equivalencia.*

Línea 70**Turno:** 00:52:07

E1: ... ¿cuál es la variedad de conceptos, definiciones o significados que los estudiantes le han dado al signo igual a una equivalencia numérica? ¿Cómo has visto de pronto que lo han expresado de diferentes maneras?

Línea 71**Turno:** 00:52:36

P: *Es como, pues mira que, mira que la mayoría de los problemas está como, como el*

Línea 65: El profesor menciona que los estudiantes que no tienen el conocimiento suficiente sobre la noción de igualdad, presentan dificultades a la comprensión de problemas que se basan en este tema, por ende tampoco llegan a una solución.

Línea 71: El profesor habla sobre los diferentes significados que los estudiantes tienen sobre el signo igual, incluso algunos estudiantes consideran que es solo un signo operador sin un significado de fondo, en este caso los estudiantes ven este signo como un resultado final de sumar esto con esto o restar esto con lo otro, pero no le dan otro sentido, entonces los estudiantes no expresan un conocimiento acertado sobre la noción.

que me lleva al resultado, o sea, como que dice: fulanito compró tal cosa y después llegó otra cosa y Danielita también compró esto y lo otro y se dieron cuenta que valió lo mismo, entonces ¿cuánto pagaría fulanita por portal? No sé, como, como ejercicio así. Entonces palabras como "es", es como que la respuesta ideal, pero "lo mismo", "igual" o "equivale" o preguntas así por ese estilo, representan que ahí, ahí está, es como el que determina el igual. Entonces ellos cuando hacen el análisis de esto, ah bueno, como eso es igual, eso significa que esto es igual a tal cosa, entonces sumamos este con este y eso va a ser igual, esto con esto que compró la otra niña y lo que compró el otro niño y tal, y ya lo planteamos así, ahora vamos a resolver ¡ya y resuelve! y al final dan respuesta a lo que el problema puso una pregunta, casi siempre es una pregunta al final ¿cuánto valió otra cosa? Y esa respuesta pues también tiene que estar relacionada con el resultado que nos dio a lo último, que algo es igual a algo.

Análisis del subdominio

En este subdominio sobre el conocimiento del contenido y de los estudiantes, el profesor entrevistado destaca aspectos claves desde la categoría de formación del profesor de matemáticas: en la **línea 23** el profesor menciona que tuvo una formación en didáctica de las matemáticas y que se enfocó mucho en la reflexión de las dificultades que podían surgir y cuál era su origen en el aprendizaje, enseñanza de las matemáticas, en cómo llevar esto a la práctica. En la **línea 31** el docente nos presenta una forma de trabajar con las dificultades que puedan generarse en el aprendizaje de un objeto matemático en particular, nos dice que si observa algún vacío conceptual en un estudiante, baja el ritmo de sus clases y trata de ser más explícito en la clase. En las **líneas 45 - 53** el profesor nos presenta que una de las dificultades que hay en el aprendizaje de la igualdad en las formas de operar, **los procedimientos que los estudiantes realizan son muy mecánicos**, así mismo, nos dice que **los estudiantes toman el signo igual como un operador final** y no entienden el significado de este signo, así como nos dice Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) cuando nos habla de la importancia de comprender por parte de docentes y estudiantes los diferentes significados y contextos del signo igual y no verlo únicamente como un operador final o un símbolo y no comprende el verdadero

significado de la igualdad.	
Subdominio: Conocimiento de la Enseñanza del Contenido (KCT)	Categoría C3: Implementación en el aula de clase (IAC)
• Secuencias, materiales o recursos empleados por el docente para la gestión del aula en la comprensión de la igualdad.	Este conocimiento le permite al profesor la selección y uso de diferentes herramientas didácticas para orientar un tema.
Línea 24 Turno: 00:13:30 E1: ...¿buscaste alguna fuente externa al momento de la enseñanza de este tema? Línea 25 Turno: 00:13:54 P: <i>No, más allá de lo que los libros o el Internet ponen, o sea, realmente no indagados sobre dificultades que puedan tener teoría que me permita como, como el buscar formas de aplicarlas. Son los ejemplos que los textos sugieren al momento de llevar al aula o hay otros maestros que han puesto sus experiencias y sus actividades, talleres o teorías e internet.</i> Línea 26 Turno: 00:14:36 E1: ...¿utilizas algún tipo de estrategia para abordar este concepto de coherencia numérica o solamente te basas en una, un texto guía? Línea 27 Turno: 00:14:49 P: <i>En los textos y en algunos, bueno, ese tema no lo he visto en YouTube que lo</i>	Línea 25: El profesor nos explica que aparte de las guías de libro o internet, no ha indagado de una manera específica sobre dificultades u obstáculos que los estudiantes presentan sobre el conocimiento de igualdad. Sin embargo, se apoya en las nuevas tecnologías desde investigaciones y experiencias de otros docentes para enseñar la noción de igualdad numérica.

expliquen como tal, porque la mayoría de los temas, si me apoyo en contenidos que han creado otros maestros, pues miro mucho contenido a ver cuáles creería yo que teniendo en cuenta el perfil de mis estudiantes podría servir, pero siempre la gran mayoría son textos y a través de los textos guías, pues siempre inicio como planteando, planteando el problema y que ellos y que ellos me den soluciones. Y con base en las soluciones que ellos me dan, pues yo parto de ahí, con qué responden y con base en lo que responde, pues así mismo voy aplicando. No todos los cursos responden lo mismo, no todos los cursos responden de la misma manera y, y no a todos se les dificulta de la misma forma el comprender.

Línea 28

Turno: 00:16:02

E1: ...¿cómo consideras que aprenden tus estudiantes, la matemática?

Línea 29

Turno: 00:16:16

P: Yo creo que eso más, más de prácticamente veo que ha funcionado mucho **el contenido audiovisual que está en redes por el asunto de la concentración.** De todas maneras, en el aula, el no estar concentrados al momento de la clase cuando es magistral, pues hace que se pierda mucho. Entonces creo que el contenido audiovisual ayuda a minimizar la magistralidad, o sea, la cantidad de clases magistrales y arrancamos de una con el trabajo. **Creo que el flipped classroom o la clase invertida, que es como una de las estrategias que he trabajado de plantearles a que ellos investiguen y después lleguen a clase a simplemente a trabajar, pues hace que funcione, que funcione mejor y que y**

Línea 27: El profesor no ha utilizado un recurso audiovisual para enseñar de una manera clara la noción de igualdad, como sí sucede con otro temas que explican los docentes en recursos audiovisuales o teóricos, los recursos que se eligen se hace mediante el perfil de los estudiantes del curso, el docente identifica qué recursos pueden. Tener mayor repercusión en los estudiantes gracias a su experiencia.

Línea 29: El profesor considera que una de las estrategias que mejor le ha funcionado para que sus estudiantes aprendan con mayor facilidad es el flipped classroom o la clase invertida, que consiste en que ellos investiguen y después lleguen a la clase simplemente a trabajar y despejar dudas que surjan, esto le permitirá al profesor iniciar un tema con unas bases ya en los estudiantes, con esta estrategia las clases magistrales son minimizadas; sin embargo, hay estudiantes que avanzan con gran facilidad, pero hay otros que se les dificulta.

que ellos por lo menos tengan una idea y yo no partir en blanco al momento de explicar, sino que parto ya con algunos obstáculos que ellos se van encontrando, con algunos errores que van cometiendo y en la práctica, en el hacer, entro yo como a, no a resolverles, sino como a orientarlos por donde pueden hacer con base en lo que ellos, en los conceptos que ya tienen, los conocimientos que ya han adquirido, las habilidades que ya han adquirido anteriormente, es como que les voy orientando a tú ya sabes esto, tú ya tienes eso, pues porque no lo usas. Y he visto que, en general, en general con la práctica lo hacen unos más rápido que otros, unos incluso ni siquiera ya necesitan de mi ayuda, son muy autónomos. Incluso hay unos que aparte de los videos que yo propongo, ven otros videos y hay otros que no, ni con videos, ni con explicación, ni enfrentándolos a un par, no, no alcanzan a comprender, o sea que hay de todo.

Línea 32

Turno: 00:21:01

E1: ...¿has llegado a plantear una situación en la que tú veas que los estudiantes son un poco más eficientes?...

Línea 35

Turno: 00:21:28

P: *Sí, sí, la clase invertida.*

Línea 36

Turno: 00:21:29

E1: ... ¿Ese es como tú, es como la situación o el contexto en el que los estudiantes son un poco más eficientes?

Línea 35, 37: La clase invertida es la estrategia que el profesor utiliza con mayor frecuencia en sus clases porque ha evidenciado que funciona muy bien, pero también el profesor habla de la estrategia de espiral, que consiste en empezar con un nivel pequeño e ir aumentando la complejidad del tema con el avance de este, el profesor utiliza la estrategia de clase invertida para abordar los temas y utiliza la estrategia de espiral para

Línea 37**Turno:** 00:21:37

P: *Sí, ese y el que te nombraba ahorita es en espiral, el que te hablaba ahorita de empezar con, con un nivel más pequeño y, ir aumentando cuando vemos el tema siguiente y si se requiere de uno atrás, entonces uno como que los va retomando. ¡Recuerden que ya vimos esto! pues es como creería que los dos son muy eficientes por tiempo y además por, porque ellos van entrando en la dinámica de los nuevos temas, partiendo de otros que ya están y no tiene necesidad uno como de hacerlo de forma lineal, porque lineal no le alcanzarían a uno, pues el poder abordar lo que la planeación da, sino que toca estar dando vueltas y dando vueltas en lo mismo y cada vez, pues eso es lo que plantea el modelo en espiral, cada vez más y más y más, más grande el nivel de desempeño. Entonces clase invertida por el asunto de la concentración y que yo ya lleguen con por lo menos alguna idea conceptual de lo que se va a trabajar y en espiral el asunto de los ejercicios, los problemas que tendrán que enfrentar para que, al resolverlos más fáciles, pues ellos encuentren la confianza de que sí lo pueden hacer y paulatinamente uno va subiendo el grado hasta que logren resolver todo.*

Línea 56**Turno:** 00:35:38

E1: ... ¿has trabajado alguna estrategia en la que tú evidencies este error y lo puedas corregir, puedas de pronto guiarlos a, digamos, un concepto mucho más aterrizado sobre la igualdad, sobre la equivalencia numérica?

plantear ejercicio y problemas en la clase.

Línea 57: El profesor dice que en sus estrategias, cuando encuentra un error trata de retroalimentar los estudiantes con las bases que ellos tienen gracias a la clase invertida, en el desarrollo de las actividades va corrigiendo errores para que los estudiantes sean un poco más independientes.

Línea 57**Turno:** 00:36:03

P: *No, más allá de hacerlos caer en la cuenta. No tengo, no tengo otra. O sea, es como que mira, mira el error que tienes pues dentro del mismo, de la misma dinámica que trabajamos de la clase invertida, que ellos llegan es a trabajar de una y que uno encuentra ese tipo de errores en el trabajo. No los encuentro. Bueno, también los encuentro cuando reviso al final que toca revisar cuadernos y mirar cómo les quedan los ejercicios, pero me gusta más como encontrármelos en el camino mientras ellos están resolviendo, como ir observando e ir corrigiendo ahí en la práctica para que los siguientes ejercicios pues ya lo tengan en cuenta y sepan que no tiene lógica lo que están haciendo, que no tiene sentido lo que están, como lo están haciendo y que deben estar más atentos a resolver mejor eso ya cuando ponen algún valor y ponen de igual que él igual tenga, tenga ese sentido dentro de la operación.*

Línea 62**Turno:** 00:43:52

E1: ...¿cómo se evidencia el comportamiento de los estudiantes o cómo toman la equivalencia numérica dentro de un problema, dentro de la resolución de algún problema en matemática?

Línea 63**Turno:** 00:44:30

P: ...*Yo le meto además ilustración, hagan un dibujo que lo represente, que represente el problema como tal, para dar un poquito más de significado del que si vos estás poniendo un número, si me estás planteando una*

Línea 63: El profesor utiliza una serie de pasos para resolver problemas y estos consisten en primero dar un análisis de lo que se va hacer, una operativa y una ilustrativa, en el análisis el estudiante debe expresar el método por el cual va a solucionar el problema, las operaciones que va a utilizar y los números que va a operar, desarrolla toda la parte operativa y adicional realiza una ilustración del problema.

igualdad de alguna equivalencia, algo, ¿por qué me estás planteando eso? Es primero explicame por qué lo vas a hacer y después hazlo. Y esa partecita ha ayudado mucho a la resolución, porque normalmente uno hace el análisis en la cabeza y va y lo plantea ahí, pero cuando tú lo escribes, de pronto al expresarlo te encuentras como que no, no, no, no, estoy escribiendo algo que no es, no, esto es así, así, asá, o me puede encontrar incoherencias o puede hacer un análisis mucho mejor. Es lo que, lo que he experimentado en relación a los problemas, no sólo en aritmética, en álgebra también, en cálculo, en geometría.

Línea 76

Turno: 00:59:03

E1: ... ¿las tareas que tú propones dentro de tus clases como tal, la obtienes de Internet, son propuestas propias, te apoyan un texto guía?

Línea 77

Turno: 00:59:20

P: ¡Todas las anteriores!

Línea 78

Turno: 00:59:24

E1: ¡Utiliza varios formatos entonces!

Línea 79

Turno: 00:59:27

P: Sí, sí, sí, porque el *texto guía* normalmente está diseñado con base en lo que el ministerio dice que va a valorar las, las preguntas de prueba, saber, bueno, ahorita hay evaluar para avanzar y otras evaluaciones que se

Líneas 77 y 79: El profesor utiliza varias fuentes para las tareas o taller que realiza en clases, menciona que utiliza los textos guías escolares porque tienen como objetivos elevar desempeños que normalmente se evalúan en pruebas de estado como evaluar para avanzar, utiliza la clase taller porque esto le permite tener un enlace con sus estrategias de

hacen externas, las que contrata el colegio o la gobernación para que les apliquen a los estudiantes. También digamos que las utilizo para las clases, me gusta mucho el estilo de "clase taller", pues que me permiten los dos modelos que te hablaba rato, entonces esos son muy propios de la clase taller. En Internet, en internet miro propuestas que tienen profesores, miro también muchas, mucho contenido audiovisual para mirar de todo el contenido que hay, cuál se puede adaptar al estilo de los estudiantes que tengo, los chicos que hay una buena parte es creación propia, muchos, muchos problemas incluso me los invento, me sirven para, para también como practicar, practicar un poco la creación, y al crearlos creo que como maestro también nos obliga, por lo menos si son problemas, nos obliga a redactar bien para que un estudiante entienda, porque a veces una palabra mal escrita, una puntuación mal puesta, puede hacer que un estudiante no entienda y entonces eso me obliga a replantearme el cómo la escribo y también me puede dar pistas de por qué se puede equivocar ellos en una u otra, de todo, de todo, producción propia, del texto guía y de Internet.

enseñanza clase invertida y en espiral; el profesor investiga mucho sobre propuestas que tienen algunos docentes en internet, apoyo audiovisual que se adapte al estilo de sus estudiantes, también hay creación propia del profesor, y estas son producciones que muchas veces logran evidenciar posibles dificultades que van a tener los estudiantes a la hora de ir elaborando.

Análisis del subdominio

En este subdominio sobre el conocimiento de la enseñanza del contenido, el profesor entrevistado destaca aspectos claves desde la categoría de implementación en el aula de clase: en las **líneas 25, 27** el profesor entrevistado nos habla de las implicaciones que tienen las tecnologías de la información en el aprendizaje de la igualdad numérica, y a pensar de no tener presente un recurso audiovisual para trabajar con la noción de igualdad numérica en grado séptimo, sí destaca el uso de **libros y recursos audiovisuales** para sus clases. En las **líneas 29, 35, 37** el profesor nos habla sobre su metodología de **clases invertida o flipped classroom y el aprendizaje en espiral** que le han funcionado a lo largo de sus clases y que destacamos como un mecanismo de enseñanza para la noción de igualdad numérica desde la resolución de

problemas. Por último, en la línea 63 tenemos como <i>heurísticas de resolución de problemas</i>, el profesor menciona las representaciones gráficas o ilustraciones para contextualizar y presentar a sus estudiantes un significado diferente del problema matemático.	
Subdominio: Conocimiento del contenido del currículo (KCC)	Segunda categoría (C.2): Currículo escolar de matemáticas (CEM)
• Procesos, criterios o instrumentos de evaluación empleados por el docente, que evidencien el aprendizaje o comprensión de la noción de igualdad. • Expectativa de aprendizaje. (EBC Y DBA) • Prioridades cognitivas. • Dificultades en el aprendizaje de la igualdad. • Alcance de aprendizaje.	Este conocimiento le permite al profesor saber sobre los diferentes modelos, objetivos, organización y planificación de los planes de estudios que deben de ser enseñados dentro del nivel educativo que desempeñan.
Línea 30 Turno: 00:18:35 E1: ...¿has notado algún comportamiento que te exprese directamente una dificultad?... Línea 31 Turno: 00:19:07 P: ¡Si! Hay muchos, muchos vacíos que van que van teniendo a lo largo de la formación, de la primaria, de bachillerato, siempre, siempre hay unos huecos conceptuales que pues uno no se puede detener, o por lo menos yo no veo, no veo provechoso el detenerme a como a, a dar una clase para rellenar ese hueco, sino más bien irlo rellenando en la medida que se van trabajando los otros temas, que si uno ve que el hueco es muy grande y es muy generalizado, pues uno parte con el tema desde un nivel de desempeño más bajito y va acrecentando. Realmente como están planteados los desarrollos de los	Línea 31: El profesor normalmente sigue una guía curricular que indica que temas puede ir desarrollando durante un grado de escolaridad. Sin embargo, durante el desarrollo de estos mismos grados los estudiantes evidencia una falta de comprensión en algunos temas vistos con anterioridad y que de cierta manera son necesarios para avanzar con un tema siguiente, esto genera vacíos conceptuales que el docente debe enfrentar de manera directa, o como el docente nos menciona de una manera pasiva e indirecta, ya que el docente no se detiene a llenar ese vacío directamente porque eso generaría un retraso en la guía temática, pero

aprendizajes en el currículo a nivel nacional, lo que manda el ministerio, desde primero hasta once son los mismos conceptos, solo hay como una especie de concepto estructurantes y, y lo único que va cambiando es el Nivel de Desempeño, pues al paso de los años. O sea, que, si uno encuentra algún hueco, ya sabe que lo único que tiene que hacer es iniciar el tema, pero con un nivel muy abajo, que uno sabe que en algún momento de la historia en sus recuerdos lo encontrará y que ya con la práctica va adquiriendo la habilidad, y uno le va subiendo el nivel hasta que lleguemos a al grado en el que presupondría. Entonces sí, casi con la mayoría de los conceptos pasa eso.

Línea 38

Turno: 00:23:11

E1: ...¿qué aprendizajes o desarrollos de pensamiento numérico se abordan? Generalmente.

Línea 39

Turno: 00:23:25

P: *Los estudiantes ven los números reales, pero hasta, hasta los racionales, o sea, el séptimo no se ven los irracionales como tal. El mayor trabajo tiene que ver con enteros. El trabajo pues enteros, tanto positivo, negativos y el cero. Y los racionales en sus diferentes representaciones, como fracción, como decimal, como porcentaje, lo que la fracción significa como una división o como una parte de un todo o como una parte de la unidad. Digamos que ahí, pues que los racionales, un número racional tiene muchos significados dependiendo el contexto en los en el que se emite. Y es eso, es eso, digamos que uno se la pasa todo el todo el año en eso, en*

sí avanza de una manera lenta permitiendo a los estudiantes autorrellenar estos vacíos de manera simultánea al aprendizaje del tema en desarrollo.

Línea 39: El profesor establece los temas principales que se abordan en séptimo grado como: los números reales, los números naturales, los números enteros y los números irracionales en las diferentes representaciones, como lo son las fracciones, el número decimal, porcentajes, representaciones gráficas, y también todas las operaciones, el

lo que son los números reales, los números enteros, los números racionales, pues, aunque los enteros son racionales, pero, pero pues ya en su gran dimensión y todas las operaciones, el orden, la ubicación en la red, en el plano cartesiano de un orden a los números y la operatividad entre ellos.

Línea 58

Turno: 00:37:13

E1: ...¿cómo evalúas estas situaciones de aprendizaje de los estudiantes en lo que tiene que ver con la equivalencia en las operaciones numéricas?....

Línea 59

Turno: 00:37:47

P: Realmente pues digamos que cada institución tiene como un modelo de evaluación, un sistema, un sistema institucional de evaluación. Y el sistema institucional de evaluación refiere a muchos aspectos, no solamente está la academia, hay otra serie de aspectos que están relacionados con lo personal, con el desarrollo social y bueno, en nuestra institución por ejemplo tiene la parte de autoevaluación y coevaluación que es la que hace el mismo estudiante y con sus compañeros. Hay una parte afectiva que es como el comportamiento y cómo aborda las clases, una parte expresiva que tiene que ver con la realización de tareas, de actividades, exposiciones y todo el trabajo del día a día. Y hay una parte cognitiva que se le da a las evaluaciones escritas tipo Quiz, evaluaciones tipo ICFES y así, evaluaciones que uno realiza periódicamente. La verdad no le doy mucha importancia a la nota, no es que no es que sea, digamos que la nota para mí es lo más importante para los estudiantes sí, y pues

orden, la ubicación en el plano cartesiano y la operatividad entre ellos.

Línea 59: El docente menciona que normalmente cada institución tiene cierta autonomía en sus métodos de evaluación, que estos métodos de evaluación no son netamente académicos, teniendo en cuenta que se evalúan aspectos cualitativos del estudiante. Además, el profesor también menciona cómo son las evaluaciones en la institución en la que trabaja y qué métodos utiliza él, en ese orden de ideas, el profesor menciona varios tipos de evaluaciones escritas: tipo Quiz, tipo ICFES, así como evaluaciones desde aspectos personales y autoevaluación.

por eso yo les pongo la nota que se va mereciendo y según los acuerdos que hagamos de cómo se valorarán, pero sí me interesa mucho es el que ellos aprendan más allá de ah no, le fue mal, perdió, no, pero bueno, te fue mal, entonces te doy la oportunidad de que perdiste el examen, entonces bueno, llevaste el examen, que lo firme tu mamá, tu papá, bueno y me lo traes al otro día, bien hecho y yo te lo reviso y tú me expones cómo lo hiciste para yo quedar tranquilo de que si bien se lo copió un compañero que sacó el cinco, pues que el haberse lo copiado hizo que aprendiera, para mí ya está bien, no tengo lío con eso realmente y pues obviamente no se saca un cinco, pero si un tres, una nota que lo deje por lo menos le permita pasar, con las notas, realmente como te digo, los números no creo que no definen una persona, o sea que más importante es el desempeño, obviamente el que mejor haga las cosas y cumpla con todos los requerimientos en todos los aspectos que el sistema de evaluación dice, pues va a sacar una nota mayor por asuntos de justicia y el que no lo haga pues sacará notas más bajitas.

Línea 66

Turno: 00:49:47

E1: ...referente a estrategias que tú utilizas para evaluar... ¿cuáles se pueden evidenciar más frecuentes dentro de tus evaluaciones como tales?

...

Línea 69

Turno: 00:50:25

P: *Yo le doy muchísima importancia al análisis, al que antes de plantearme la expresión me haya explicado el porqué, el por qué puso la expresión, si solo me pone*

Línea 69: El docente menciona que uno de

los numeritos y no me explica, no tiene tanto, tanta importancia. Entonces le doy muchísima, muchísima importancia al que me escriba y un estudiante que me llegue solo con los números, para mí no, pues yo les digo no me sirve, tienes que explicarme por qué lo hiciste, de dónde lo hiciste, donde sacaste eso. Y ahí uno encuentra que cuando ellos escriben, ya las preguntas ya no son tan frecuentes, porque ya ellos mismos comprenden qué hacer, entonces en el futuro simplemente ya lo buscan a uno para decirle ¿así está bien?, ¿así quedó bien?, no el ¿qué tengo que hacer? o ¿cómo no tengo que hacer? o ¿por qué lo tengo que hacer?, sino que ya lo, ya lo comprende más, porque hace entonces digamos que esa interiorización de qué significa cada elemento de la expresión de la equivalencia y tanto que lo puede explicar, cuando uno es capaz de explicar algo con sus propias palabras, pues significa que lo ha comprendido de verdad. Entonces por eso, muchísima, muchísima importancia le doy algo a la parte, al análisis de los mismos problemas, más incluso que la operatividad.

Línea 70

Turno: 00:52:07

E1: ...¿cuál es la variedad de conceptos, definiciones o significados que los estudiantes le han dado al signo igual a una equivalencia numérica? ¿Cómo has visto de pronto que lo han expresado de diferentes maneras?

Línea 71

Turno: 00:52:36

P: *Es como, pues mira que, mira que la mayoría de los problemas está como, como el que me lleva al resultado, o sea, como que dice: fulanito compró tal cosa y después llegó*

los métodos que utiliza para validar los conocimientos de los estudiantes es el análisis que pide en cada ejercicio, este análisis le permite al docente ver de una manera más clara cómo se va desarrollando el conocimiento el estudiante. El docente indica que para él tiene mayor relevancia una respuesta estructurada en lenguaje natural y acompañada de una parte aritmética en el aprendizaje de la noción de igualdad numérica desde la RdP. En resumen, este análisis que se construye en lenguaje natural fuerza al estudiante a interiorizar el porqué de cada operación que va a realizar. Para el profesor entrevistado, este método de resolución de problemas sobre igualdad numérica ha sido el que le ha funcionado en las clases.

otra cosa y Danielita también compró esto y lo otro y se dieron cuenta que valió lo mismo, entonces ¿cuánto pagaría fulanita por portal? No sé, como, como ejercicio así. Entonces palabras como "es", es como que la respuesta ideal, pero "lo mismo", "igual" o "equivale" o preguntas así por ese estilo, representan que ahí, ahí está, es como el que determina el igual. Entonces ellos cuando hacen el análisis de esto, ah bueno, como eso es igual, eso significa que esto es igual a tal cosa, entonces sumamos este con este y eso va a ser igual, esto con esto que compró la otra niña y lo que compró el otro niño y tal, y ya lo planteamos así, ahora vamos a resolver ¡ya y resuelve! y al final dan respuesta a lo que el problema puso una pregunta, casi siempre es una pregunta al final ¿cuánto valió otra cosa? Y esa respuesta pues también tiene que estar relacionada con el resultado que nos dio a lo último, que algo es igual a algo.

Línea 72

Turno: 00:54:24

E1: ...¿consideras que eso es suficiente evidencia para, digamos, es suficiente evidencia para ti en cuestión de evaluar el aprendizaje, en este caso sobre las equivalencias en las operaciones numéricas?

Línea 73

Turno: 00:54:41

P: *¿Para la resolución de problemas? Si yo creo, pues digamos que por ahora es lo que más se acerca, no he encontrado una, digamos que otro, otro método que me permita hacerlo, de pronto ya con las tecnologías creo que hay unas aplicaciones que nos permiten jugar con balanzas, que la*

Línea 71: El profesor menciona los significados e intencionalidad que los estudiantes le dan al signo igual dentro de la resolución de problemas. El docente hace énfasis que la interpretación que le dan los estudiantes al signo igual es como operador y no como una relación entre dos cantidades, esto es, los estudiantes ven situaciones de adicciones en las cuales el signo igual cumple un papel de operador final y las palabras que para el profesor determinan el signo igual son: “es”, “lo mismo”, “igual”, “equivale”, y esto es evidente en las respuestas de los estudiantes.

Línea 73: El profesor considera que el

balanza nos pueda dar una idea de equivalencia, pero yo no las he utilizado, o sea que no, no te podría decir si las he visto por ahí, pero, pero bueno, el momento que tuve la oportunidad de estar con séptimo y de verlo, no, no tenía las herramientas tecnológicas a mano, entonces no, pues no las usé y no onde mucho, pero si he visto algunas aplicaciones, algunos juegos de, con las regletas por ejemplo de cushiné o cosas así que ahí hay muchos jueguitos que tienen que ver con equivalencias y creo que creo que esos también nos podrían evidenciar, pero en lo personal no las, por lo menos en este tema no, en otros temas de pronto sí, sí los he trabajado y he visto que me sirven muchísimo, sobre todo los que tienen que ver con operatividad son bien, por lo menos el juego de, hay un juego para mí parecido a la escalera o al parqués que uno tiene un dado que es positivo y un dado negativo y eso para la suma de enteros es poderosísima porque les permite a ellos hacer operaciones en la mente de números positivos, números negativos y llegar y dar como las respuestas para poderse mover dentro de él, ya sea que se tienen que mover para adelante o se tienen que. Pero bueno, ya son otros temas, pero, así como es potente eso, creería que podrían ser potentes también los, los juegos relacionados con las equivalencias y también sería una manera de evidenciarlo, pero hasta el momento la que yo más encuentro es el que un estudiante me pueda expresar por qué hace algo.

método de análisis es uno de los más acertados para evaluar los aprendizajes de sus estudiantes desde la resolución de problemas de igualdad numérica. Sin embargo, menciona que existen muchas más metodologías, estrategias o recursos que se pueden utilizar y que también funcionan. Así mismo, el profesor indica que la integración de tecnologías en las matemáticas también genera un método de aprendizaje que el profesor podría considerar que le funciona. Por último, el profesor pone un ejemplo de recursos tecnológicos como balanzas virtuales que él considera podría funcionar y evidenciar un aprendizaje sobre igualdad, así el docente no haya tenido la oportunidad de implementarlo en sus clases.

Análisis del subdominio

En este subdominio sobre el conocimiento de contenido del currículo, el profesor entrevistado destaca aspectos claves desde la categoría de currículo escolar de matemáticas: en la **línea 31** el profesor menciona que los estudiantes evidencia una falta de comprensión en algunos temas vistos con anterioridad y que de cierta manera son necesarios para avanzar con un tema

siguiente, así mismo. En la **línea 39** encontramos una relación con lo que dicen Wilhelmi, et al. (2007), ya que el profesor establece los temas principales que se abordan en séptimo grado como: *los números reales, los números naturales, los números enteros y los números irracionales en las diferentes representaciones, como lo son las fracciones, el número decimal, porcentajes, representaciones gráficas, y también todas las operaciones, el orden, la ubicación en el plano cartesiano y la operatividad entre ellos*. En la **línea 71** hay una conexión con lo que nos dice Kieran (1981), *la interpretación y comprensión del signo de igualdad varía según la etapa de desarrollo del estudiante*; el docente hace énfasis que la interpretación que le dan los estudiantes al signo igual es como operador y no como una relación entre dos cantidades, esto es, los estudiantes ven situaciones de adicciones en las cuales el signo igual cumple un papel de operador final y las palabras que para el profesor determinan el signo igual son: *“es”, “lo mismo”, “igual”, “equivale”*, y esto es evidente en las respuestas de los estudiantes. Por último, en la **línea 79** el profesor enfoca su discurso en un método para evidenciar los aprendizajes de sus estudiantes, nos dice que para el análisis de los problemas de igualdad numérica le sirven para evaluar lo que comprendes los estudiantes sobre esta noción. Así mismo, el profesor indica que *la integración de tecnologías en las matemáticas también genera un método de aprendizaje que el profesor podría considerar que le funciona*. Por último, el profesor pone un ejemplo de recursos tecnológicos como balanzas virtuales que él considera podría funcionar y evidenciar un aprendizaje sobre igualdad, así el docente no haya tenido la oportunidad de implementarlo en sus clases.

Tabla 4. Matriz comparativa de dominio (PCK).

Desde una mirada general, los desempeños del profesor entrevistado en este dominio del Conocimiento didáctico del contenido (PCK), se puede evidenciar que el profesor tiene conocimiento sobre las dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la noción de igualdad desde la RdP presentada en esta investigación como es la formas de operar en relación con los procedimientos que los estudiantes realizan son muy mecánicos, así mismo, nos dice que los estudiantes toman el signo igual como un operador final, el signo funciona como un final de la operación matemática, haciendo ejemplo al punto final de una oración. Asimismo, destacamos las metodologías que le ha funcionado al profesor entrevistado para sus clases: clase invertida o flipped classroom y el aprendizaje en espiral. Además, se mencionó el uso de recursos como: libros de texto, audiovisuales y redes sociales. Igualmente, la importancia de analizar e interpretar los problemas empleando heurística de resolución de problemas como: ilustraciones y contextos cercanos de los estudiantes.

Estas competencias y habilidades que podemos percibir del profesor entrevistado son: organizar un seguimiento del contenido matemático sobre igualdad numérica, habilidad para analizar el potencial matemático de los problemas y habilidad para interpretar las producciones de sus estudiantes. Por ende, el profesor espera que los estudiantes al finalizar el aprendizaje de la noción de igualdad puedan comprender los números reales, los números naturales, los números enteros y los números irracionales en las diferentes representaciones como: fracciones, número decimal, porcentajes, representaciones gráficas, operaciones, relaciones de orden numérico, etc.

Capítulo 4 - Conclusiones finales

En este apartado se pretende presentar los principales hallazgos y evidenciar el logro de los objetivos planteados en la investigación. Asimismo, se destacarán los puntos más relevantes discutidos a lo largo del trabajo, proporcionando una visión integral y reflexiva sobre los resultados obtenidos. Además, se discutirán las implicaciones de estos hallazgos en el contexto de la investigación, así como posibles direcciones para futuras investigaciones.

En cuanto a la fundamentación del modelo local de conocimiento matemático para la enseñanza, a través del MKT y AD que surgió en el desarrollo de esta investigación y que tuvo como objetivo guiar los análisis realizados al estudio de caso mediante una entrevista semiestructurada y centrado en la RdP sobre las igualdades numéricas en los reales, consideramos que invita a que los profesores con formación en matemáticas reflexionen sobre sus competencias y habilidades. Específicamente, se requiere que el docente, pueda acceder a información relacionada con conceptos, nociones y estrategias que posibilitan gestionar el aprendizaje de sus estudiantes a partir de las expectativas de aprendizaje que se espera sean promovidas por parte de este. En este caso destacamos: la construcción de la noción de igualdad, resolución de problemas con igualdades cerradas y abiertas, los significados y contextos y representaciones del signo igual, etc.

Así mismo, consideramos que la exploración sobre las concepciones del docente mediante una entrevista nos brindó información necesaria para analizar las concepciones y creencias que el docente tiene para crear propuestas educativas, lo que ha desarrollado y aprendido en su experiencia formativa y práctica. Las experiencias que suman a su conocimiento sirven para evidenciar las herramientas didácticas que tiene el profesor de matemáticas y que le permiten organizar propuestas a partir de diferentes estrategias de enseñanza.

Al respecto, los análisis presentados en la matriz comparativa, en relación con el modelo local de enseñanza y lo expresado por el docente entrevistado, se puede decir que el

conocimiento matemático que posee un profesor de matemáticas es totalmente diferente del conocimiento matemático que posee un profesional que enseñe matemáticas. En nuestra experiencia en la práctica profesional entendemos la complejidad de los conocimientos del profesor, por ende, es relevante realizar una comparación de las concepciones del docente con la formación en matemáticas, en una matriz comparativa a partir del modelo local de enseñanza. Asimismo, la complejidad del conocimiento profesional de profesor de matemáticas ha permitido el uso de modelos como el MKT en investigaciones matemáticas, de manera que, este modelo local de enseñanza es útil para identificar fortalezas y limitaciones en el conocimiento de los profesores de matemáticas.

Para finalizar, vamos a destacar los desempeños que se evidencian en un docente de matemáticas cuando se enfrenta a la enseñanza de la RdP de igualdad numérica en grado séptimo. Desde el modelo local de enseñanza, se reconoce en el profesor un conocimiento de la materia y un conocimiento didáctico que se vinculan con los dominios del modelo local de enseñanza. El conocimiento del contenido común del profesor se refleja en su gran dominio de las matemáticas, abarcando conceptos, teoremas, desarrollo operativo y su habilidad en la resolución de problemas. El conocimiento especializado del profesor le ayuda a desarrollar sus clases con un mayor aprendizaje en sus estudiantes y la experiencia que el docente tiene le permite tener anticipación a posibles dificultades que los estudiantes vayan a tener referente a un tema o la relación de un concepto con otro. Así pues, el docente analiza a sus estudiantes para comprender cómo piensan ellos sobre los diferentes temas y tratar de sobrepasar esas dificultades con ayuda de metodologías, recursos didácticos y estrategias que facilitan la comprensión de los estudiantes. Estas metodologías, recursos didácticos y estrategias son elegidas por el profesor, teniendo en cuenta cómo sus estudiantes comprenden mejor los conceptos y aplicaciones, según el currículo escolar establecido para cumplir con las expectativas de aprendizaje.

Los trabajos que se esperan a partir de esta investigación deben ser en relación con la práctica profesional analizando los conocimientos didácticos de un profesor de matemáticas en la enseñanza de la igualdad en los números reales, utilizando este modelo local para la enseñanza de las matemáticas y la matriz comparativa desde la perspectiva de la práctica docente.

Bibliografía

- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Banoy, A. P. (2020). *Conocimiento didáctico en la formación de docentes de primer ciclo de básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del sistema de numeración decimal*. [Tesis de Maestría, Universidad del Valle].
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/e3887984-0318-4893-8b48-0b06aa6680fa/content>
- Castro, E., y Lupiáñez, J. L. (2016). La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial del profesorado de educación infantil. *Investigaciones en didáctica de la matemática: homenaje a Moisés Coriat*, 5, 45 - 52. Editorial Comares.
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V., y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Revista Estudios de política educativa*, 1(1), 64-105. Recuperado de:
- Flores, E., Sosa, L. y Ribeiro, C.M. (2016). Tránsito del MKT al MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7 -11). SGSE: Huelva.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Larrahondo, L. V. (2019). *Un estudio histórico sobre la resolución de problemas algebraicos y sus potencialidades en la formación de profesores de matemáticas*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle].
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/35fa2301-2aeb-4bb1-8f09-0edf09cafaea/content>

Llinares, C, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de investigación en educación matemática*. Recuperado de:

<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/96382>

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. Springer Nature. Recuperado de:

<https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27743/1/1002262.pdf>

Ministerio de Educación Nacional, Colombia (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de:

<http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-propertyvalue-55269.htm>

Ministerio de Educación Nacional- MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá (Colombia): Magisterio Recuperado de:

https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf

Ministerio de Educación Nacional-MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá (Colombia): Magisterio. Recuperado de:

https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/1921/788071114_2006_A.pdf?sequence=6

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(1), 33-46.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK.

Navia, A. L., y Vergara, M. I. (2021). *Contextos y significados del signo igual: el caso de un libro de texto de matemáticas de primer grado de educación primaria en Colombia*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. Recuperado de:

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/74151be3-f999-4737-bebe-9f58285e87ff/content>

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109. Recuperado de:

http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000100007&lng=es&tlng=es

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94. Recuperado de:

<https://cursa.ihmc.us/rid=1HW6T604L-1TJY5R0-1RNJ/Ensayo%20acerca%20del%20Análisis%20Fenomenologico.pdf>

Rico, L. y Segovia, I. (2001). Unidades didácticas: organizadores. En E. Castro (Ed) *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pág. 83-104). España: Editorial Síntesis.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Revista Unión Iberoamericana de Educación Matemática*, 9(33). Recuperado de:
<https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/801>

Uribe, L. C. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Universidad de Antioquia.

Vargas, J. (2019). *Estudio de prácticas evaluativas relacionadas con la resolución de problemas de los profesores de matemáticas de la Institución Educativa José María Córdoba de*

Santander de Quilichao-Cauca. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. Recuperado de:

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/42a19b5f-9ae9-4226-9c5c-1693121c6cfb/content>

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27(79), 77.

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods (Vol. 5). sage.

Anexos

Preguntas - Entrevista semiestructurada

A continuación, se presenta la estructura de las preguntas con su respectiva categoría para la entrevista semiestructurada realizada. El objetivo de la entrevista es recoger datos en relación con tres categorías y subcategorías de estudio. A continuación, se evidencia la estructura y las preguntas asociadas a cada una de las categorías y subcategorías, justificadas en el marco metodológico, para constatar los desempeños del (MKT) en los docentes con formación en matemáticas cuando se enfrentan a la resolución de problemas de igualdad con números reales en el grado séptimo de básica secundaria.

Categorías de estudio - Entrevista semiestructurada

Primera categoría (C.1): Formación del Profesor de Matemáticas (FP)

Subcategorías de (C.1) Conocimiento Profesional	Conocimiento matemático del profesor	Conocimiento sobre el estudiante	Conocimiento del contenido del profesor	Conocimiento didáctico del profesor
Preguntas	¿Qué asignatura de la línea de formación en matemáticas te pareció más relevante en tu formación como docente? ¿Qué asignatura de la línea de formación en matemáticas te pareció menos relevante en tú	¿Cómo aprenden matemáticas sus estudiantes? ¿Notas algún comportamiento que exprese una dificultad matemática? ¿En qué situaciones los estudiantes son más eficientes?	¿En los cursos o formaciones vistas se realizó énfasis en el significado de la equivalencia numérica para efectos de su enseñanza? ¿Qué aprendió sobre las igualdades numéricas en estos cursos y formaciones vistas?	¿Consideras que los cursos o formaciones sobre aspectos didácticos de las matemáticas fueron suficientes? ¿Buscas otras fuentes externas para enseñar las operaciones y relaciones numéricas?

	formación como docente? ¿Qué estudios has realizado complementarios a tu formación como licenciado?		¿Qué tipo de material, recursos o estrategias vistas en los cursos o formaciones utilizas para tus clases sobre las igualdades numéricas?	¿Qué estrategias utilizas para abordar el concepto de equivalencia numérica?
--	---	--	--	---

Categorías de estudio - Entrevista semiestructurada

Segunda categoría (C.2): Currículo escolar de Matemáticas (CE)

Subcategorías de (C.2) Conocimiento Profesional	Conocimiento que se espera	Expectativas de aprendizaje	Evaluación de los aprendizajes
Preguntas	Durante el grado séptimo ¿Qué aprendizajes o desarrollos del pensamiento numérico se abordan? ¿En qué situaciones matemáticas los estudiantes deben emplear el conocimiento sobre la equivalencia en las operaciones numéricas?	¿Qué competencias o habilidades numéricas se esperan de los estudiantes al finalizar el séptimo grado? Dificultades, errores y obstáculos para la enseñanza de la equivalencia en las operaciones numéricas.	¿Cómo evalúas las situaciones de aprendizaje de tus estudiantes en las clases sobre equivalencia en las operaciones numéricas? ¿Qué significado le dan los estudiantes a la equivalencia en las operaciones numéricas al resolver problemas?

Categorías de estudio - Entrevista semiestructurada

Tercer categoría (C.3): Implementación en el aula de clase (AC)

Subcategorías de (C.3) Conocimiento Profesional	Acción y decisión del profesor en el aula	Orientación sobre el currículo escolar	Comprensión de la igualdad
Preguntas	¿Considera usted que lo que ha aprendido sobre equivalencia en las operaciones numéricas se evidencia en su práctica? ¿Qué papel le otorga a la RdP para comprender sobre equivalencia en las operaciones numéricas?	Estrategias para evaluar El papel de la resolución de problemas sobre equivalencia en las operaciones numéricas Las tareas propuestas para la clase, ¿se sacan de Internet, son propuestas propias o te apoyas en algún texto escolar?	¿Cómo evidencia el aprendizaje sobre equivalencia en las operaciones numéricas? ¿En qué otros contextos diferentes utiliza las equivalencias en las operaciones numéricas?