



Universidad del Valle  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Pregrado en Matemáticas

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

**Ecuación del calor y funciones de Morse  
minimales y estables en espacios  
proyectivos reales y complejos**

Estudiante: Sebastián Muñoz Muñoz  
Director: Alexander Quintero Vélez  
Codirector: Gonzalo García Camacho

Septiembre de 2017

## Resumen

Siguiendo resultados similares en [2] para toros planos y esferas redondas, en este trabajo se demuestra que, para condiciones iniciales “arbitrarias”  $f_0$ , la solución  $f_t$  en el tiempo  $t$  de la ecuación del calor en espacios proyectivos reales y complejos eventualmente se convierte en (y permanece siendo) una función de Morse minimal con valores críticos distintos. Además, se muestra que la solución se vuelve una función *estable*. Se establecen también condiciones suficientes que son simples y generales para que el resultado anterior sea cierto en variedades compactas arbitrarias.

# Índice general

|                                                                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Agradecimientos</b>                                                                                           | <b>2</b>  |
| <b>Introducción</b>                                                                                              | <b>3</b>  |
| <b>1 Preliminares</b>                                                                                            | <b>5</b>  |
| 1.1 Teorema espectral . . . . .                                                                                  | 5         |
| 1.2 Teorema de Rouché . . . . .                                                                                  | 6         |
| 1.3 Teorema de estabilidad . . . . .                                                                             | 7         |
| 1.3.1 Topologías $C^k$ y $C^\infty$ . . . . .                                                                    | 7         |
| 1.3.2 Funciones de Morse y funciones estables . . . . .                                                          | 9         |
| 1.3.3 Grupos de Lie y variedades cociente . . . . .                                                              | 11        |
| 1.4 Ecuación del calor en variedades . . . . .                                                                   | 12        |
| <b>2 Ecuación del calor y funciones de Morse minimales y estables en espacios proyectivos reales y complejos</b> | <b>16</b> |
| 2.1 Estrategia global de la solución . . . . .                                                                   | 16        |
| 2.2 Resultados básicos . . . . .                                                                                 | 17        |
| 2.3 Espacios proyectivos reales . . . . .                                                                        | 19        |
| 2.4 Espacios proyectivos complejos . . . . .                                                                     | 22        |
| <b>Conclusiones</b>                                                                                              | <b>25</b> |
| <b>Bibliografía</b>                                                                                              | <b>26</b> |

# Agradecimientos

Agradezco enormemente al profesor Gonzalo García Camacho por su apoyo incondicional y valioso consejo durante el desarrollo de este trabajo y en la etapa final de mis estudios de pregrado, los cuales me siento muy afortunado de haber tenido. También agradezco de antemano al profesor Oscar Andrés Montaña por tomarse el trabajo de leer y revisar mi trabajo. Finalmente, agradezco al director de mi trabajo, el profesor Alexander Quintero Vélez, por darme la oportunidad de expandir mis horizontes matemáticos realizando esta investigación.

# Introducción

La ecuación del calor, que es el modelo matemático para el flujo del calor y en su forma más simple se escribe como

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f,$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace-Beltrami, es una de las ecuaciones diferenciales parciales más relevantes en matemáticas y física, y tiene propiedades verdaderamente notables. Por ejemplo, si una condición inicial arbitraria  $f_0$  es sometida a esta ecuación, entonces la solución  $f_t$ , para cada instante de tiempo  $t > 0$ , será una función infinitamente diferenciable. A la luz de estos hechos, la ecuación del calor se presenta a sí misma como un proceso regularizador fundamental.

En un artículo reciente [2], un resultado en esta dirección fue establecido, evidenciando importantes propiedades regularizadoras de la ecuación en cuestión. Dada una función  $f$  definida en una variedad  $M$ , un indicador de regularidad para  $f$  es que todos sus puntos críticos sean no-degenerados, o lo que es lo mismo, que  $f$  sea una función de Morse. Los autores mostraron que, al menos en el caso de esferas redondas  $n$ -dimensionales y toros planos, condiciones iniciales suaves “arbitrarias”  $f_0$  son transformadas eventualmente por la ecuación del calor en funciones de Morse minimales; funciones de Morse que tienen el mínimo número de puntos críticos posible en la variedad. En concreto, los resultados de ese artículo pueden resumirse en el siguiente teorema:

**Teorema 0.0.1.** *Sea  $M = \mathbb{T}^n$  o  $M = \mathbb{S}^n$ . Existe un subconjunto denso y abierto  $S$  de  $C^\infty(M)$  tal que para cada  $f_0 \in S$ , existe un  $T > 0$  tal que para todo  $t \geq T$ , la solución  $f_t$  de la ecuación del calor con condición inicial  $f_0$  es una función de Morse minimal en  $M$ .*

Investigando la pregunta de si esto es un fenómeno más general presentándose en otras variedades Riemannianas compactas, en este trabajo se formulan condiciones suficientes que son simples y generales para que el resultado general sea cierto en una variedad (Lema 2.2.1) y se demuestra dicho resultado para espacios proyectivos reales y complejos de dimensión arbitraria. Observaremos además que en estos espacios, la solución  $f_t$  adquiere una propiedad fundamental denominada *estabilidad*, que *grosso modo* significa que funciones cercanas a  $f_t$  serán “idénticas” a  $f_t$  módulo un cambio de coordenadas

adecuado<sup>1</sup>. Este es el contenido de los siguientes dos teoremas.

**Teorema 0.0.2.** *Existe un conjunto  $S \subset C^\infty(\mathbb{RP}^n)$ , que es denso y abierto<sup>2</sup> en la topología  $C^\infty$ , tal que para cada condición inicial  $f = f_0 \in S$ , si  $f_t$  es la solución correspondiente a la ecuación del calor en  $\mathbb{RP}^n$  en el tiempo  $t$ , entonces existe  $T > 0$  tal que para  $t \geq T$ ,  $f_t$  es una función de Morse minimal estable en  $\mathbb{RP}^n$ .*

**Teorema 0.0.3.** *Existe un conjunto  $S \subset C^\infty(\mathbb{CP}^n)$ , que es denso y abierto en la topología  $C^\infty$ , tal que para cada condición inicial  $f = f_0 \in S$ , si  $f_t$  es la solución correspondiente a la ecuación del calor en  $\mathbb{CP}^n$  en el tiempo  $t$ , entonces existe  $T > 0$  tal que para  $t \geq T$ ,  $f_t$  es una función de Morse minimal estable en  $\mathbb{CP}^n$ .*

Los resultados de esta investigación se encuentran publicados en [1].

---

<sup>1</sup>Cercanas en el sentido estándar de la topología  $C^\infty$  de Whitney, que mide las funciones por su tamaño y el de sus derivadas parciales de todos los órdenes.

<sup>2</sup>Obsérvese que esta es una manera topológica de precisar que las funciones que no cumplen el enunciado caben en un conjunto de tamaño despreciable; un cerrado nunca denso.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Teorema espectral

Para comenzar los preliminares del trabajo, se presentan los dos resultados elementales de diagonalización para operadores simétricos y hermitianos en dimensión finita, junto con dos respectivos corolarios sobre formas cuadráticas que serán utilizados en el desarrollo para estudiar los primeros espacios propios del operador de Laplace-Beltrami en los espacios proyectivos.

**Teorema 1.1.1** (Teorema espectral real). *Sea  $A$  una matriz real simétrica. Entonces  $A$  tiene todos sus valores propios reales y es diagonalizable mediante una matriz ortogonal.*

Para la demostración del teorema ver capítulo 7 de [4].

**Corolario 1.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$  una forma cuadrática real en  $n$  variables, donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz simétrica. Entonces existe un cambio de coordenadas ortogonal  $y = Bx$  tal que  $f(y) = \sum_i \lambda_i y_i^2$ , donde los  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A$ .<sup>1</sup>*

*Demostración.* Como  $A$  es simétrica podemos escribir  $f(x) = x^T A x$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Por el teorema espectral real, existe una matriz ortogonal  $B$  tal que  $A = B^T D B$ , siendo  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Así,  $f = x^T A x = x^T B^T D B x = (Bx)^T D (Bx) = y^T D y = \sum_i \lambda_i y_i^2$ , lo cual completa la prueba.  $\square$

**Teorema 1.1.2** (Teorema espectral complejo). *Sea  $A$  una matriz compleja Hermitiana. Entonces  $A$  tiene todos sus valores propios reales y es diagonalizable mediante una matriz unitaria.*

Para la demostración del teorema ver capítulo 7 de [4].

---

<sup>1</sup>Aquí, como es usual, se está abusando de la notación al escribir  $f(y)$  para referirse a la expresión de  $f$  en términos de las coordenadas  $y$ .

**Corolario 1.1.2.** Sea  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i,j} a_{ij} z_i \overline{z_j}$ , donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz Hermitiana. Entonces existe un cambio de coordenadas unitario  $w = Bz$  tal que  $f(w) = \sum_i \lambda_i |w_i|^2$ , donde los  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A = (a_{ij})$ .

La demostración de este corolario es esencialmente la misma del Corolario 1.1.1.

## 1.2. Teorema de Rouché

El propósito de esta sección es enunciar con precisión y presentar una demostración de un hecho que es intuitivamente claro, bien conocido y que será necesario en el desarrollo del problema: las raíces de un polinomio dependen continuamente de sus coeficientes. Para ello la herramienta básica es el teorema de Rouché (ver [15] para una demostración).

**Teorema 1.2.1** (Teorema de Rouché). Sean  $f$  y  $g$  funciones analíticas en el interior y en la frontera de un contorno cerrado  $\gamma$ . Entonces, si  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  para  $z$  en la frontera de  $\gamma$ ,  $f$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros en el interior de  $\gamma$ , contando multiplicidades.

**Corolario 1.2.1** (Dependencia continua de raíces de un polinomio respecto a sus coeficientes). Sea

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

un polinomio mónico de grado  $n \geq 1$  con raíces  $r_1, \dots, r_n$  (contando multiplicidades). Entonces para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $t_1, \dots, t_n$  son las raíces del polinomio mónico

$$g(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0,$$

con  $|a_i - b_i| < \delta$ , entonces, módulo un reordenamiento de índices, se tiene

$$|r_i - t_i| < \epsilon$$

.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\epsilon$  es suficientemente pequeño para que las bolas  $B(r_i, \epsilon)$ ,  $B(r_j, \epsilon)$  tengan clausuras disjuntas siempre que  $r_i \neq r_j$ . Sea  $R = \max_{i=1}^n (|r_i| + \epsilon)$ , y sea

$$M = \min_{z \in \bigcup_{i=1}^n \partial B(r_i, \epsilon)} |f(z)|,$$

( $M$  existe por continuidad de  $f$  y es positivo porque por construcción no hay ceros en la frontera de las bolas). Ahora, tómese

$$\delta < \frac{M}{\sum_{k=0}^{n-1} R^k}.$$

Entonces, si  $z \in \partial B(r_i, \epsilon)$ , se tiene

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - b_k) z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \delta |z^k| \\ &\leq \delta \sum_{k=0}^{n-1} R^k \\ &< M \end{aligned}$$

Luego  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  para  $z \in \partial B(r_i, \epsilon)$ . De esto, por el teorema de Rouché,  $f$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros en el interior de  $B(r_i, \epsilon)$ , lo cual evidentemente completa la demostración.  $\square$

## 1.3. Teorema de estabilidad

### 1.3.1. Topologías $C^k$ y $C^\infty$

En esta subsección daremos las definiciones básicas que permiten medir la cercanía entre dos funciones suaves de valor real definidas en una variedad  $M$ . El contexto natural para hacer esto son las topologías  $C^k$ , que miden dicha distancia por la diferencia entre los valores puntuales y entre sus derivadas de orden  $\leq k$  (en adelante  $k$  denota un entero no-negativo). En el caso general, este asunto tiene sutilezas considerables y hay varias topologías posibles, pero cuando  $M$  es una variedad compacta, todas las definiciones naturales para una topología en el espacio  $C^\infty(M)$  coinciden, y esta única topología resulta tener propiedades muy deseables como la de ser un espacio de Banach segundo contable [8]. Una manera sencilla de definirla es especificando una norma para ella, llamada la norma  $C^k$ .

**Definición 1.3.1** (Norma y Topología  $C^k$ ). Sea  $M$  una variedad suave compacta de dimensión  $m$ , sea  $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^n$  un atlas finito fijo que recubre a  $M$ , con cada  $U_i$  pre-compacto, y sea  $f \in C^\infty(M)$ . Se define la **norma**  $C^k$  de  $f$  como

$$\|f\|_k = \sup_{i,x,I} |D^I(f \circ \varphi_i^{-1})(x)|,$$

donde  $i$  varía desde 1 hasta  $n$ ,  $x$  varía sobre los elementos de  $\varphi_i(U_i)$ ,  $I$  varía sobre todos los multi-índices  $(j_1, \dots, j_m)$  con  $|j_1, \dots, j_m| = j_1 + \dots + j_m \leq k$ , y  $D^I$  denota la derivada parcial asociada al multi-índice  $I$ .<sup>2</sup> Se define la **topología**  $C^k$  de  $M$  como la topología inducida por esta norma.

---

<sup>2</sup>Notemos que el supremo existe en virtud de la pre-compacidad de los  $U_i$ .

En otras palabras, la norma de  $f$  es el valor supremo de todas sus derivadas parciales de orden  $\leq k$ , visto en ciertas coordenadas fijas. El hecho de que esto define una norma sobre el espacio vectorial  $C^\infty(M)$  es consecuencia obvia de la desigualdad triangular para la norma uniforme en los números reales. Nótese que si bien es claro que la definición de la norma depende de la escogencia del atlas (de lo cual existen muchas normas  $C^k$ ), es fácil demostrar que en este caso todas las posibles normas son equivalentes y, por tanto, la topología es la misma:

Sea  $(V_j, \psi_j)$  otro atlas *fijo* de la misma naturaleza que el anterior y denotemos temporalmente a su norma asociada por  $\|f\|'_k$ . Por simetría basta ver que  $\|f\|'_k \leq O(1)\|f\|_k$ . Cuando  $k = 0$  la afirmación es clara pues ambas normas denotan simplemente el valor máximo de  $f$  en  $M$  y por tanto son iguales, y para el caso  $k > 0$  el resultado se sigue por inducción en virtud del cálculo indicado a continuación. Suponiendo cierta la equivalencia de las normas  $C^{k-1}$  de ambos atlas, sea  $p \in U_i \cap V_j$ ,  $I = (j_1, \dots, j_s, \dots, j_m)$  un multi-índice con  $j_s > 0$ ,  $|I| \leq k$ , entonces  $I' = (j_1, \dots, j_s - 1, \dots, j_m)$  satisface  $|I'| = |I| - 1 \leq k - 1$ , y así, denotando las coordenadas de  $\varphi_i$  como  $(x_1, \dots, x_m)$  y las de  $\psi_j$  como  $(y_1, \dots, y_m)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|D^I(f \circ \psi_j^{-1})(\psi(p))| &= \left| D^{I'} \left( \frac{\partial(f \circ \psi_j^{-1})}{\partial u^{j_s}} \right) (\psi(p)) \right| \\
&\leq \left\| \frac{\partial(f \circ \psi_j^{-1})}{\partial u^{j_s}} \circ \psi_j \right\|'_{k-1} \quad (\text{Definición de la norma } C^k) \\
&\leq O(1) \left\| \frac{\partial(f \circ \psi_j^{-1})}{\partial u^{j_s}} \circ \psi_j \right\|_{k-1} \quad (\text{Hipótesis inductiva}) \\
&= O(1) \left\| \frac{\partial f}{\partial y^{j_s}} \right\|_{k-1} \\
&= O(1) \left\| \frac{\partial x^i}{\partial y^{j_s}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\|_{k-1} \\
&\leq O(1) \sum_{i=1}^m O(1) \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\|_{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^m O(1) \left\| \frac{\partial(f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial u^i} \right\|_{k-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^m O(1) \|f\|_k \quad (\text{Definición de la norma } C^k) \\
&= O(1) \|f\|_k,
\end{aligned}$$

y variando  $j, p, I$  obtenemos la desigualdad buscada, lo cual completa la inducción, mostrando que la topología es independiente de la escogencia del atlas.

**Definición 1.3.2** (Topología  $C^\infty$ ). Sea  $M$  una variedad suave compacta de dimensión

$m$ . Se define la topología  $C^\infty$  de  $M$  como la topología generada por la unión de todas las topologías  $C^k$  de  $M$ .

Observemos que la subbase usada en la definición de la topología  $C^\infty$  (la unión de las topologías  $C^k$ ) es en realidad una base en virtud del hecho obvio de que  $B_{k+1}(f, r) \subset B_k(f, r)$ , donde  $r > 0$  y  $B_k(f, r)$  es la bola de radio  $r$  centrada en  $f$  en la topología  $C^k$ .

### 1.3.2. Funciones de Morse y funciones estables

Se darán ahora las definiciones de función de Morse y función estable, y se enunciará una profunda caracterización de las funciones estables de una variedad; el teorema de estabilidad.

**Definición 1.3.3** (Punto crítico no-degenerado). Sea  $f \in C^\infty(M)$  una función suave de una variedad  $M$ , sea  $p \in M$  un punto crítico de  $M$  y sea  $(U, \varphi)$  una carta en  $M$ . Se dice que  $p \in U$  es un **punto crítico no-degenerado** de  $f$  si la matriz Hessiana de la función  $f \circ \varphi^{-1}$  es invertible en el punto  $\varphi^{-1}(p)$ .

Para justificar esta definición, hace falta notar que no dependa de la escogencia de la carta  $(U, \varphi)$ . La justificación es un simple cálculo: sean  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  coordenadas alrededor del punto crítico  $p \in M$ . Lo que se debe verificar es que las matrices Hessianas  $B = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_p)$  y  $C = (\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j}|_p)$  son ambas invertibles o ambas singulares. En efecto, sea  $A = (\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_p)$  la matriz de cambio de coordenadas en el punto crítico  $p$ , tenemos

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p \\ &= \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \Big|_p \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_p + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \Big|_p \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \Big|_p \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \Big|_p \\ &= (A^T C A)_{ij}, \end{aligned}$$

y como  $A$  es invertible, se sigue que  $B$  es invertible si y sólo si  $C$  es invertible, lo cual termina de mostrar que la definición es correcta. Con esto se puede dar la definición de función de Morse.

**Definición 1.3.4** (Función de Morse y función de Morse minimal). Se dice que una función  $f \in C^\infty(M)$  es una **función de Morse** si todos sus puntos críticos son no-degenerados. Decimos además que  $f$  es una **función de Morse minimal** si su número de puntos críticos es el mínimo posible para una función de Morse definida en la variedad.

Ahora definiremos estabilidad para funciones  $C^\infty$ . En términos intuitivos, las funciones estables son aquellas que permanecen idénticas módulo difeomorfismo bajo perturbaciones pequeñas (el tamaño de estas perturbaciones se mide con las métricas  $C^k$  que se definieron arriba).

**Definición 1.3.5.** Sea  $M$  una variedad suave compacta, y sea  $f \in C^\infty(M)$ .  $f$  se dice **estable** si existe una vecindad  $W_f$  de  $f$  en la topología  $C^\infty$  tal que para cada  $f' \in W_f$  existen difeomorfismos  $g, h$  tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{f'} & \mathbb{R} \end{array}$$

El teorema de estabilidad, debido a John Mather, caracteriza de manera extremadamente simple las funciones estables. La forma original del teorema puede encontrarse en el artículo de Mather [10]. La versión dada a continuación (más débil) y su demostración se encuentran en [9] (pp. 79-80).

**Teorema 1.3.1** (Teorema de estabilidad). *Sea  $M$  una variedad compacta suave, y  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces  $f$  es una función de Morse con valores críticos distintos si y sólo si es estable.*<sup>3</sup>

**Corolario 1.3.1.** *Si  $M$  es una variedad suave compacta y  $f$  una función de Morse con valores críticos distintos, entonces existe una vecindad de  $f$  en la topología  $C^\infty$  tal que  $g$  es una función de Morse minimal con valores críticos distintos y el mismo número de puntos críticos de  $f$  en dicha vecindad. Esto es, existen  $r$  y  $\epsilon > 0$  tales que  $g$  es una función de Morse con valores críticos distintos y el mismo número de puntos críticos que  $f$  siempre que  $\|f - g\|_r < \epsilon$ , siendo  $\|\cdot\|_r$  una norma fija para la topología  $C^r$ .*

*Demostración.* Basta observar que la propiedad de ser una función de Morse y el número de puntos críticos son invariantes bajo cambio de coordenadas.  $\square$

---

<sup>3</sup>Que los valores críticos sean distintos significa que si  $p \neq q$  son valores críticos, entonces  $f(p) \neq f(q)$ .

### 1.3.3. Grupos de Lie y variedades cociente

En esta subsección daremos la definición de grupo de Lie, concepto que sirve para definir las variedades cociente, de las cuales los espacios proyectivos reales y complejos son ejemplos particulares.

**Definición 1.3.6.** Un **grupo de Lie** es una variedad suave  $G$  que es también un grupo, con la propiedad de que la multiplicación  $m : G \times G \rightarrow G$  y la inversión  $i : G \rightarrow G$  son funciones suaves.

**Definición 1.3.7.** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $M$  una variedad. Una acción continua de  $G$  sobre  $M$  se dice **propia** si la función de  $G \times M \rightarrow M \times M$  que envía  $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$  es propia (en el sentido topológico usual).

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en el capítulo 21 de [13].

**Teorema 1.3.2** (Teorema de las variedades cociente). *Sea  $G$  un grupo de Lie con una acción suave, propia y libre sobre la variedad suave  $M$ . Entonces el espacio de órbitas  $M/G$  (con la topología cociente) es una variedad topológica de dimensión  $\dim M - \dim G$  y tiene una única estructura suave con la propiedad de que la proyección natural  $\pi : M \rightarrow M/G$  es una submersión suave. Existen además coordenadas cúbicas<sup>4</sup>  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  para  $M$  que intersecan a cada  $G$ -órbita en el conjunto vacío o en un slice  $(y_1, \dots, y_k) \equiv (c_1, \dots, c_k)$  y tales que  $(y_1, \dots, y_k)$  son coordenadas cúbicas para  $M/G$ .*

El teorema de las variedades cociente permite definir los espacios proyectivos reales y complejos como variedades suaves.

**Definición 1.3.8** (Espacio proyectivo real). Si en el teorema 2.2.2 tomamos  $G$  como el grupo discreto  $\{1, -1\}$  de dos elementos generado por la función antipodal (o reflexión simétrica respecto al origen), y  $M = \mathbb{S}^n$ , entonces se define el **espacio proyectivo real** como  $\mathbb{RP}^n = M/G$ .

**Definición 1.3.9** (Espacio proyectivo complejo). Si tomamos  $G = U(1)$  como el grupo de números complejos de norma 1 actuando sobre  $M = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  por multiplicación coordenada a coordenada, entonces se define el **espacio proyectivo complejo** como  $\mathbb{CP}^n = M/G$ .

El número de puntos críticos de una función de Morse minimal en cada uno de estos espacios es conocido, y se describe en el teorema a continuación.

**Teorema 1.3.3.** *El número de puntos críticos de una función de Morse minimal en  $\mathbb{RP}^n$  y en  $\mathbb{CP}^n$  es  $n + 1$ .*

---

<sup>4</sup>Es decir, coordenadas cuya carta correspondiente es un cubo en el espacio euclidiano.

**Observación 1.3.1.** Con respecto a la justificación de este resultado: para el espacio proyectivo complejo, es conocido [11] que la suma de ciertos invariantes topológicos conocidos como los números de Betti son una cota inferior para este valor; es también conocido (y de hecho se prueba en este trabajo en la demostración de la proposición 2.4.1) que esta cota de  $n+1$  se alcanza, de lo cual se sigue el resultado. Para el espacio proyectivo real, la cota de los números de Betti no es óptima (no es  $n+1$ ) y se requiere un argumento distinto, ver [12].

Como es bien conocido, estas dos variedades compactas pueden definirse también de manera más estándar utilizando coordenadas homogéneas, construcción totalmente elemental que se asumirá como bien conocida, pero que puede verse por ejemplo en el primer capítulo de [13].

## 1.4. Ecuación del calor en variedades

Para definir con precisión el operador  $\Delta$  (y *a posteriori* la ecuación del calor) en una variedad diferenciable  $M$ , se requiere imponerle una estructura métrica adicional.

**Definición 1.4.1.** Una **métrica Riemanniana** en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia  $g$  que asocia a cada punto  $p \in M$  un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en el espacio tangente  $T_p M$  que varía suavemente en el siguiente sentido: si  $(x^1, \dots, x^n)$  es un sistema de coordenadas locales para  $M$ , entonces las funciones  $p \rightarrow \langle \frac{\partial}{\partial x^i} |_p, \frac{\partial}{\partial x^j} |_p \rangle_p$  son suaves. Decimos entonces que  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana. Un difeomorfismo (resp. difeomorfismo local) entre variedades Riemannianas se llama **isometría** (resp. **isometría local**) si es puntualmente coherente con el producto interno en el sentido obvio.

**Definición 1.4.2.** Una conexión afín  $\nabla$  en una variedad diferenciable  $M$  es una función

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

denotada por  $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ , que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**Observación 1.4.1.** Es fácil verificar, usando coordenadas locales, que la noción de conexión afín es en realidad un concepto local, en el sentido de que  $\nabla_X Y(p)$  depende únicamente de  $X(p), Y(p)$  y de los valores de  $Y$  a lo largo de una curva tangente a  $X$  en  $p$ . Esto permite darle sentido a expresiones como  $\nabla_v Y$  donde  $v \in T_p M$  y  $Y$  es un campo vectorial definido en una vecindad de  $p$ .

Las conexiones afines permiten definir la noción de derivada covariante. Para la demostración de los siguientes dos teoremas, ver [3].

**Teorema 1.4.1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial a lo largo de la curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , llamado la derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que:*

1.  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
2.  $\frac{DfV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$  ( $f \in C^\infty(M)$ ).
3. Si  $V(t) = X(c(t))$  donde  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}X$ .

**Definición 1.4.3.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana, y  $\nabla$  una conexión afín en  $M$ . Decimos que  $\nabla$  es compatible con la métrica de  $M$  si para cualquier par de campos vectoriales  $V, W$  con derivada covariante nula,  $\langle V, W \rangle$  es una función constante. Decimos que  $\nabla$  es simétrica si  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX$ .

**Teorema 1.4.2** (Levi-Civita). *Dada una variedad Riemanniana  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  en  $M$ , llamada la conexión de Levi-Civita, que es simétrica y compatible con la métrica.*

Por el teorema de representación de Riesz, la siguiente definición de gradiente tiene sentido:

**Definición 1.4.4.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Definimos el campo vectorial  $\text{grad}(f)$  en  $M$  mediante la igualdad

$$\langle \text{grad}f(p), v \rangle_p = df_p(v) \text{ para todo } v \in T_p M$$

Definimos también el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta$  mediante la fórmula

$$\Delta(f) = \text{trace}(\zeta \rightarrow \nabla_\zeta \text{grad}f),$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita.

Ahora, dada la definición del operador de Laplace-Beltrami, podemos dar la definición de la ecuación del calor.

**Definición 1.4.5.** Si  $M$  es una variedad Riemanniana, la **ecuación del calor** en  $M$  es la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f.$$

Ahora, diremos que una solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} &= \Delta f \\ f(\cdot, 0) &= f_0 \in L^2(M) \end{cases} \quad (1.1)$$

es una función continua  $f : M \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $f$  es  $C^2$  en la variable “espacial”  $x$ , variando sobre  $M$ , y  $C^1$  en la variable “temporal”  $t$ , variando sobre  $(0, \infty)$ .
- $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$ , y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M f(x, t) \psi(x) dV(x) = \int_M f_0(x) \psi(x) dV(x)$$

para toda  $\psi \in C^\infty(M)$ .

**Teorema 1.4.3.** *Si  $M$  es compacta, la solución al problema de valor inicial 1.1 es*

$$f_t = h_0 + h_1 e^{-\lambda_1 t} + h_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots,$$

donde  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  son los valores propios para  $-\Delta$  y los  $h_i$  son las proyecciones ortogonales de  $f_0$  sobre los espacios propios correspondientes<sup>5</sup>.

*Bosquejo de la demostración.* Es claro que dada la libertad para derivar término a término, o aplicar el operador de Laplace término a término (convergencia uniforme en esencia), esta expresión resuelve la ecuación. Para las sutilezas analíticas involucradas y la caracterización del espectro de  $-\Delta$  que está implícita en el enunciado, ver [6] y [14].  $\square$

Ambos espacios proyectivos, como cocientes de esferas, tienen métricas naturales inducidas por la métrica redonda usual de la esfera (la obtenida simplemente restringiendo la métrica del espacio euclidiano ambiente). Por ejemplo, puede observarse que en el caso del espacio proyectivo real, al ser un cociente por un grupo discreto de dos elementos, la proyección canónica resulta ser un difeomorfismo local que permite definir la métrica simplemente requiriendo que sea una isometría local. En el caso del espacio proyectivo complejo, la métrica natural (que puede ser inducida por la esfera de más de una forma) se denomina la métrica de Fubini-Study. Sin embargo, para propósitos del problema a trabajar, el único hecho relevante sobre estas métricas es el siguiente:

**Teorema 1.4.4.** *Sea  $M = \mathbb{RP}^n$  (resp.  $M = \mathbb{CP}^n$ ). Entonces las funciones propias de  $\Delta$  en  $M$  son los pushforward<sup>6</sup> de las funciones propias de  $\mathbb{S}^n$  (resp.  $\mathbb{S}^{2n+1}$ ) que son constantes en las órbitas de la acción de  $\{1, -1\}$  sobre  $\mathbb{S}^n$  (resp.  $U(1)$  sobre  $\mathbb{S}^{2n+1}$ ).*

Para la prueba del teorema anterior, ver [14] (pp. 145-146). En esta misma línea, se tiene la siguiente caracterización de las funciones propias de  $\Delta$  en  $\mathbb{RP}^n$  y  $\mathbb{CP}^n$ .

<sup>5</sup>Esto, en particular, dice que existe una base ortonormal del espacio de Hilbert  $L^2(M)$  formada por funciones propias del operador de Laplace-Beltrami y que todos los valores propios son positivos.

<sup>6</sup>Es decir, si  $f$  es una función propia en  $\mathbb{S}^n$  que es constante en órbitas, su *pushforward* es la función  $\tilde{f}$  tal que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ , donde  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  es la proyección natural.

**Teorema 1.4.5.** *Los valores propios de  $-\Delta$  en  $\mathbb{RP}^n$  son  $\lambda_j = 2j(2j + n - 1)$ , con el espacio propio correspondiente siendo el espacio de (pushforwards de) polinomios homogéneos armónicos de grado  $2j$  en  $n + 1$  variables. Los valores propios para  $\mathbb{CP}^n$  son los números de la forma  $4j(n + j)$ , el espacio propio correspondiente siendo el de (pushforwards de) los polinomios armónicos bi-homogéneos en  $(z, \bar{z})$  de bi-grado  $(j, j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).*

Este resultado se sigue de aplicar el teorema anterior y el conocimiento del espectro del operador de Laplace-Beltrami en la esfera (los llamados armónicos esféricos) para analizar los respectivos espacios propios en los cocientes, ver [14], Cap. III, secciones C. II y C.III. Por último, se tiene una estimación para la norma  $C^k$  de un polinomio armónico en la esfera (de interés debido a que dichos polinomios constituyen las funciones propias de  $\Delta$  en esta variedad). Ver sección 10 de [5].

**Teorema 1.4.6.** *Sea  $f$  un polinomio armónico homogéneo de grado  $j$  definido en  $\mathbb{S}^n$ , sea  $k \geq 0$  y sea  $\lambda_j = j(j + n - 1)$ . Entonces*

$$\|f\|_k = O(1) \binom{n+j}{n}^{1/2} \left(1 + \lambda_j^{1/2}\right)^k \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}.$$

## Capítulo 2

# Ecuación del calor y funciones de Morse minimales y estables en espacios proyectivos reales y complejos

### 2.1. Estrategia global de la solución

La estrategia básica para la demostración de los teoremas 0.0.2 y 0.0.3 en ambos espacios puede ser bosquejada como sigue: en variedades Riemannianas compactas, según el teorema 1.4.3, la solución de la ecuación del calor tiene la forma

$$f_t = h_0 + h_1 e^{-\lambda_1 t} + h_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots,$$

donde  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  son los valores propios de  $-\Delta$  y los  $h_i$  son las proyecciones de  $f_0$  sobre los espacios propios correspondientes. La idea global consiste en explotar el decaimiento exponencial de los términos de la solución para aproximar  $f_t$  por los primeros dos términos de la suma para tiempos grandes. Nuestro conjunto  $S$  consistirá entonces de aquellas funciones para las cuales estos dos términos tengan como suma una función de Morse minimal estable. Como la estabilidad es, por definición, una propiedad invariante bajo perturbaciones pequeñas, es claro que el resultado buscado se seguirá siempre que

- (i)  $S$  sea denso y abierto, y
- (ii) se acoten exitosamente los términos restantes para que la aproximación funcione.

En la sección 2.2, se establecerán condiciones simples para que el resultado principal sea cierto en una variedad, así como una afirmación técnica que se usará más adelante para

verificar dichas condiciones en los dos espacios en cuestión. Por otra parte, las secciones 2.3 y 2.4 están, respectivamente, dedicadas a las demostraciones de los teoremas 0.0.2 y 0.0.3.

## 2.2. Resultados básicos

El siguiente lema da dos condiciones suficientes concretas para que las condiciones (i) y (ii) de la sección anterior se cumplan y, tras esto, vuelve rigurosa la estrategia previamente bosquejada para probar (usando algunos estimativos simples y la profunda caracterización del concepto de estabilidad dada por el teorema 1.3.1) que el teorema buscado se seguirá en variedades Riemannianas compactas en que los valores propios crezcan al menos linealmente, siempre que se tengan las dos condiciones mencionadas.

**Lema 2.2.1.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana compacta y conexa, sean  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  los valores propios distintos del operador de Laplace-Beltrami y sea  $\mathfrak{B} = \{\varphi_i \mid 1 \leq i \leq d_1\}$  una base arbitraria (no necesariamente ortonormal) para el  $\lambda_1$ -espacio. Suponga que los valores propios crecen al menos linealmente<sup>1</sup>, que el 0-espacio es trivial<sup>2</sup> y se tienen las siguientes dos condiciones:*

- (C1) *El conjunto  $B$  de las  $d_1$ -tuplas  $(c_1, \dots, c_{d_1})$  tales que  $\sum_i c_i \varphi_i$  es una función de Morse minimal en  $M$  con valores críticos distintos es un subconjunto denso y abierto de  $\mathbb{R}^{d_1}$ .*
- (C2) *Para cada  $f \in C^\infty(M)$ , existen  $N, C$  tales que la proyección  $h_j = \pi_j(f)$  de  $f$  sobre el  $j$ -ésimo espacio propio satisface*

$$\|h_j\|_r \leq C(1 + j^N).$$

*Entonces existe un conjunto  $S \subset C^\infty(M)$ , que es denso y abierto en la topología  $C^\infty$ , tal que para cada condición inicial  $f_0 \in S$ , si  $f_t$  es la solución correspondiente a la ecuación del calor en  $M$  en el tiempo  $t$ , entonces existe  $T > 0$  tal que para  $t \geq T$ ,  $f_t$  es una función de Morse minimal con distintos valores críticos en  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  el conjunto de funciones  $f$  cuya proyección  $\pi_1(f)$  sobre el  $\lambda_1$ -espacio es una función de Morse minimal con valores críticos distintos. Sea  $f \in S$ . Por compacidad,  $\|\cdot\|_{L^2(M)} = O(\|\cdot\|_0)$ , luego funciones en una vecindad suficientemente pequeña  $U$  de  $f$  en la topología  $C^0$  (que está contenida en la topología  $C^\infty$ ) tendrán sus coeficientes de Fourier (con respecto a cualquier base ortonormal fija) tan cercanos como

<sup>1</sup>Esto significa que existe  $r > 0$  tal que  $\lambda_j > rj$ .

<sup>2</sup>Esto es, que consiste solamente de funciones constantes. Se sabe que esto es cierto en los espacios proyectivos reales y complejos, básicamente porque lo es en la esfera. Esta condición no es esencial en lo absoluto; ver la siguiente anotación.

se quiera a los de  $f$ . Observando que los coeficientes con respecto a  $\mathfrak{B}$  son funciones continuas de los coeficientes de Fourier para el  $\lambda_1$ -espacio, la condición **(C1)** implica que si  $U$  es suficientemente pequeño,  $U \subset S$ , luego  $S$  es abierto.

Ahora sea  $f \in C^\infty(M)$  y sea  $g$  obtenida de  $f$  tal que  $\pi_i(g) = \pi_i(f)$  ( $i \neq 1$ ) y  $\pi_1(g)$  se obtiene de modificar ligeramente los coeficientes de  $\pi_1(f)$  con respecto a  $\mathfrak{B}$  de tal suerte que  $\pi_1(g)$  sea una función de Morse minimal con valores críticos distintos (nuevamente esto es posible por la condición **(C1)**). Por compacidad de  $M$ , si la modificación es suficientemente pequeña,  $g$  estará tan cerca como se quiera a  $f$  en cualquier topología  $C^r$  (y por tanto en la topología  $C^\infty$ ). Así  $S$  es denso.

Ahora verificamos que si  $f \in S$  y  $f = h_0 + h_1 + \dots$  con  $h_i = \pi_i(f)$ , entonces  $f_t = h_0 + e^{-\lambda_1 t} h_1 + \dots$  es una función de Morse minimal con valores críticos distintos para  $t$  suficientemente grande. Como  $h_0$  es constante, es suficiente mostrar lo mismo para  $(f_t - h_0)e^{\lambda_1 t} = h_1 + e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} h_2 + \dots$  y por el corolario 1.3.1 es suficiente probar que para cada  $r$ ,  $\|(f_t - h_0)e^{\lambda_1 t} - h_1\|_r \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \|(f_t - h_0)e^{\lambda_1 t} - h_1\|_r &= \|h_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + \dots\|_r \\ &= e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \left\| \sum_{j \geq 2} e^{(\lambda_2 - \lambda_j)t} h_j \right\|_r \\ &\leq e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \sum_{j \geq 2} e^{(\lambda_2 - \lambda_j)t} \|h_j\|_r \\ &\leq e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} C \sum_{j \geq 2} (1 + j^N) e^{(\lambda_2 - \lambda_j)t}. \end{aligned}$$

Como los  $\lambda_j$  crecen al menos linealmente, la serie de la derecha es claramente convergente y función decreciente de  $t$ , y el primer factor tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , esto completa la demostración.<sup>3</sup>  $\square$

Como se observa fácilmente que los espacios proyectivos, salvo las condiciones **(C1)** y **(C2)**, satisfacen las hipótesis del lema anterior (el crecimiento lineal de los valores propios se observa del teorema 1.4.5), el resto del trabajo está dedicado a probar que las condiciones mencionadas también se tienen en estos espacios, de lo cual se siguen los dos teoremas a demostrar. Terminamos esta sección con un enunciado técnico que se necesitará más adelante para este propósito.

**Lema 2.2.2.** *Sea  $M$  una variedad suave y sea  $G$  un grupo de Lie con una acción diferenciable, propia y libre sobre  $M$ . Sea  $h \in C^\infty(M)$  constante en cada  $G$ -órbita, de tal suerte que descienda a  $\bar{h} \in C^\infty(M/G)$ . Entonces existen coordenadas suaves*

---

<sup>3</sup>Es fácil ver que con los mismos argumentos se pueden probar condiciones completamente análogas en las cuales se aproxima  $f_t$  por (digamos) los primeros  $n$  espacios propios en lugar de sólo los dos primeros.

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  para  $M$  tales que  $(y_1, \dots, y_k)$  son coordenadas para  $G/M$  y

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_s} h}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_s}} = \frac{\partial^{i_1+\dots+i_s} \bar{h}}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_s}}$$

para índices cualesquiera  $i_1, \dots, i_s$ .

*Demostración.* Recordando el teorema 1.3.2 se tiene que existen coordenadas cúbicas  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  para  $M$  que intersecan a cada  $G$ -órbita en el conjunto vacío o en un *slice*  $(y_1, \dots, y_k) = (c_1, \dots, c_k)$  y tales que  $(y_1, \dots, y_k)$  son coordenadas para  $M/G$ . En estas coordenadas es claro que

$$h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = \bar{h}(y_1, \dots, y_k),$$

y la afirmación se sigue derivando ambos lados de la igualdad.  $\square$

## 2.3. Espacios proyectivos reales

En esta sección demostraremos nuestro resultado para el espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^n$ ; el teorema 0.0.2. Por construcción, el espacio de funciones en  $\mathbb{RP}^n$  se puede identificar (via *pullback*) con las funciones en  $\mathbb{S}^n$  para las cuales

$$f(x) = f(-x),$$

y en virtud del teorema 1.4.4 vemos que las funciones propias para el operador de Laplace-Beltrami en esta variedad son precisamente aquellas en  $\mathbb{S}^n$  que cumplen  $f(x) = f(-x)$ . Además, según el teorema 1.4.5, los valores propios son  $\lambda_j = 2j(2j+n-1)$ , con el espacio propio correspondiente siendo el espacio de polinomios homogéneos armónicos de grado  $2j$  en  $n+1$  variables. La siguiente proposición es un análisis detallado del primer espacio propio no trivial, cuyo propósito final es la verificación de la condición (C1) del lema 2.2.1.

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $f(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  una forma cuadrática real en  $n+1$  variables, siendo  $A = (a_{ij})$  una matriz simétrica.<sup>4</sup> Entonces  $f$  es una función de Morse minimal en  $\mathbb{RP}^n$  con valores críticos distintos si y sólo si la matriz  $A = (a_{ij})$  tiene valores propios distintos.*

*Demostración.* En virtud del corolario 1.1.1, podemos diagonalizar esta forma cuadrática mediante un cambio de coordenadas ortogonal  $y = Bx$  y escribir  $f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_{n+1} y_{n+1}^2$ , donde los  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A$ . Escribamos  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ .

---

<sup>4</sup>Es fácil ver que cualquier forma cuadrática puede ser expresada de esta forma simétrica, basta reemplazar  $a_{ij}$  y  $a_{ji}$  por  $(a_{ij} + a_{ji})/2$ .

El gradiente de  $f$  en estas coordenadas (vista como una función en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) es entonces  $\nabla f(y) = 2Dy$ . La prueba estará lista cuando mostremos que  $f$  tiene exactamente  $n+1$  puntos críticos (ver teorema 1.3.3) en  $\mathbb{RP}^n$ , todos ellos no-degenerados, si y sólo si  $A$  tiene valores propios distintos. Como  $\mathbb{RP}^n$  es el cociente de  $\mathbb{S}^n$  por un grupo de Lie de dimensión 0, por el teorema 1.3.2 vemos que la proyección natural es un difeomorfismo local, luego un elemento de  $\mathbb{S}^n$  es punto crítico de  $f$  si y sólo si su proyección en  $\mathbb{RP}^n$  lo es (obsérvese la identificación de  $f$  y su *pullback*), y así basta contar el número  $\eta$  de puntos críticos para  $f$  en la esfera, para después contar el número de clases de equivalencia que resultan. Como cada punto de la esfera tiene órbita 2 bajo la función antipodal, la respuesta será  $\eta/2$ , luego debemos probar que  $\eta = 2(n+1)$ . Ahora, los puntos críticos de  $f$  en la esfera serán aquellos  $y$  que satisfacen

$$\nabla f(y) \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in T_y(\mathbb{S}^n) = \langle y \rangle^\perp,$$

lo cual significa que

$$2Dy \cdot v = 0 \text{ para todo } v \in T_y(\mathbb{S}^n) = \langle y \rangle^\perp,$$

o equivalentemente  $\langle y \rangle^\perp \subset \langle Dy \rangle^\perp$ , y esto simplemente dice que  $Dy$  es un múltiplo por escalar de  $y$ . Como  $D$  es la matriz de  $A$  en las coordenadas  $y$ , los puntos críticos buscados son justamente los vectores propios de la transformación  $A$  que se encuentran en la esfera.

Si  $A$  tuviera un valor propio repetido, entonces intersecando un espacio propio de dimensión 2 con la esfera vemos que existiría una circunferencia completa de puntos críticos, implicando que  $f$  no es una función de Morse en la esfera (pues las funciones de Morse tienen sólo puntos críticos aislados, al ser no-degenerados), y esto prueba que el segundo enunciado de la equivalencia por probar implica el primero.

Para la implicación recíproca, supongamos que los valores propios son todos distintos, de tal suerte que todos los espacios propios son líneas rectas. Entonces los puntos críticos buscados son justamente las  $2(n+1)$  intersecciones de estas líneas con la esfera (dos por cada línea), que en nuestra elección de coordenadas son justamente los vectores canónicos  $\{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}\}$ , entonces  $\eta = 2(n+1)$ , como se quería. Los valores críticos son distintos porque son precisamente los  $\lambda_i$ . Ahora, falta ver que estos puntos críticos  $\pm e_i$  son todos no-degenerados. Para probar esto, calculamos la matriz Hessiana en coordenadas locales y verificamos que es invertible. Fijamos  $i$  y escribimos  $f$  en las coordenadas locales para  $\mathbb{S}^n$  alrededor de  $\pm e_i$  definidas por  $(u_1, \dots, u_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1})$ . Se obtiene:

$$f(u_1, \dots, u_n) = \lambda_i + \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i) u_j^2$$

Luego, el gradiente está dado por

$$\nabla f(u) = 2 \text{diag}(\lambda_1 - \lambda_i, \dots, \lambda_{i-1} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \lambda_i, \dots, \lambda_{n+1} - \lambda_i) u$$

y la Hessiana de  $f$  en el punto  $e_i$  para estas coordenadas es la matriz

$$2\text{diag}(\lambda_1 - \lambda_i, \dots, \lambda_{i-1} - \lambda_i, \lambda_{i+1} - \lambda_i, \dots, \lambda_{n+1} - \lambda_i),$$

que es invertible porque los  $\lambda_i$  son distintos.  $\square$

Esta sección termina con la demostración del primero de los dos teoremas principales.

*Demostración del teorema 0.0.2.* Para demostrar este teorema verificamos que las condiciones **(C1)** y **(C2)** del Lema 2.2.1 se satisfacen. Por los comentarios al principio de esta sección, una función genérica en el  $\lambda_1$ -espacio tiene la forma de  $f$  en la proposición 2.3.1, con la condición adicional de que  $\text{tr}(A) = 0$ , es decir  $a_{n+1,n+1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn})$ . Luego, el siguiente conjunto es una base para este espacio propio:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{1}{2}x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1 \right\} \cup \left\{ x_{ii}^2 - x_{n+1,n+1}^2 \mid 1 \leq i < n+1 \right\}.$$

Los coeficientes de  $f$  en esta base (de tamaño  $(n^2 + 3n)/2$ ) son los  $a_{ij}$  para  $i < j$  o  $i = j < n+1$ . Diagonalizando  $A = Q^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})Q$  vemos que dejando  $Q$  fija y variando ligeramente  $\lambda_i$  (manteniendo la condición de traza nula), puede hacerse que los valores propios sean distintos; luego, por continuidad (dada por la ecuación matricial) y la proposición 2.3.1, el conjunto  $B$  de la condición **(C1)** en el Lema 2.2.1 que corresponde a nuestro  $\mathfrak{B}$  es denso en  $\mathbb{R}^{(n^2+3n)/2}$ .

Para mostrar que  $B$  es abierto, notamos primero que los coeficientes del polinomio característico  $p$  de  $A$  son funciones continuas de los  $a_{ij}$  (en el sentido usual), y los  $\lambda_i$  dependen continuamente de los coeficientes de  $p$  según el teorema 1.2.1. Esto implica (junto con el hecho de que  $A$  es simétrica lo cual obliga a que las raíces sean reales) que si  $p$  tiene raíces reales distintas, variaciones pequeñas de los  $a_{ij}$  no afectarán esta propiedad, como se quería.

Ahora para verificar la condición **(C2)**, sea  $\bar{h}_{2j} = \pi_j(f)$  la proyección de  $f$  sobre el  $j$ -ésimo espacio propio, siendo  $h_{2j}$  el polinomio armónico homogéneo de grado  $2j$  correspondiente obtenido por *pullback*. Por el lema 2.2.2,  $\|\bar{h}_j\|_r = O(1)\|h_j\|_r$ . Del teorema 1.4.6, obtenemos entonces

$$\|\bar{h}_{2j}\|_r = O(1) \binom{n+2j}{n}^{1/2} \left(1 + \lambda_j^{1/2}\right)^r \|h_{2j}\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}.$$

Como tanto  $\lambda_j = 2j(2j+n-1)$  como  $\binom{n+2j}{n}$  son polinomios en  $j$  (de grados 2 y  $n$ , respectivamente) y  $\|h_{2j}\|_{L^2(\mathbb{S}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}$ , la desigualdad buscada se sigue de inmediato, completando la demostración.  $\square$

## 2.4. Espacios proyectivos complejos

Esta subsección está dedicada a demostrar el teorema 0.0.3 para el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{CP}^n$ . En adelante identificamos  $\mathbb{C}^n$  con  $\mathbb{R}^{2n}$  como espacios vectoriales reales y variedades mediante la correspondencia

$$(z_1, \dots, z_n) = (x_1 + \sqrt{-1}y_1, \dots, x_n + \sqrt{-1}y_n) \equiv (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n).$$

La variedad Riemanniana  $\mathbb{CP}^n$  con la métrica de Fubini-Study puede ser realizada entonces como el cociente  $S^{2n+1}/U(1)$ , y las funciones propias (de valor complejo) para el operador de Laplace-Beltrami son las funciones propias para la esfera que son invariantes bajo multiplicación por elementos de  $U(1)$ . La forma más conveniente de caracterizarlas para nuestro propósito es (según el teorema 1.4.5) como los polinomios armónicos bi-homogéneos en  $(z, \bar{z})$  de bi-grado  $(j, j)$ , con valores propios correspondientes  $4j(n+j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Ahora, esto implica que las funciones propias de valor real para el primer valor propio  $4(n+1)$  son precisamente las funciones  $f$  descritas en la siguiente proposición en el caso en que  $A$  tiene traza nula, pues la condición de que tengan valores reales obliga a la matriz de coeficientes a ser Hermitiana. Este resultado juega entonces un papel análogo al de la proposición 2.3.1 en la sección anterior.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $f: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como*

$$f(z) = \frac{\sum_{i,j} a_{ij} z_i \bar{z}_j}{|z|^2},$$

*siendo  $A = (a_{ij})$  una matriz Hermitiana. Entonces  $f$  desciende a una función de Morse minimal con valores críticos distintos en  $\mathbb{CP}^n$  (realizado como el cociente de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  obtenido de identificar puntos en una misma línea) si y sólo si la matriz  $A = (a_{ij})$  tiene valores propios distintos.*

*Demostración.* Es claro que  $f$  es 0-homogénea, luego podemos considerarla como una función en  $\mathbb{CP}^n$ . Similarmente a la demostración de la proposición 2.3.1, el hecho de que  $A$  es Hermitiana nos permite usar, según el corolario 1.1.2, el teorema espectral para diagonalizar a  $A$  mediante un cambio de coordenadas unitario  $w = Bz$ . En estas coordenadas  $f$  toma la forma

$$f(w) = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n+1} \lambda_i |w_i|^2}{|w|^2},$$

donde los  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A$ . Reemplazando a  $B$  con una permutación de sus columnas, podemos asumir que  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n+1}$ . La suma de los números de Betti (ver observación 1.3.1) para  $\mathbb{CP}^n$  es  $n+1$ ; luego basta mostrar que  $f$  tiene  $n+1$  puntos críticos en  $\mathbb{CP}^n$  y que todos ellos son no-degenerados, si y sólo si los valores propios

de  $A$  son distintos. Los conjuntos  $U_i = \{[w] \in \mathbb{CP}^n \mid w_i \neq 0\}$ , junto con las funciones coordenadas inhomogéneas  $w = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n)$  son una familia de cartas suaves que cubren a  $\mathbb{CP}^n$ , luego podemos proceder calculando los puntos críticos en cada  $U_i$  mediante el uso de las coordenadas locales correspondientes. En estas coordenadas inhomogéneas,  $f$  toma entonces la forma

$$f(w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n) = \frac{\lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j |w_j|^2}{1 + \sum_{j \neq i} |w_j|^2} = \frac{\lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j^2 + \lambda_j y_j^2}{1 + \sum_{j \neq i} x_j^2 + y_j^2}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} df &= - \frac{\sum_{j \neq i} 2x_j dx_j + 2y_j dy_j}{\left(1 + \sum_{j \neq i} x_j^2 + y_j^2\right)^2} \left( \lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j^2 + \lambda_j y_j^2 \right) + \frac{\sum_{j \neq i} 2\lambda_j x_j dx_j + \lambda_j 2y_j dy_j}{1 + \sum_{j \neq i} x_j^2 + y_j^2} \\ &= \frac{\sum_{j \neq r} 2x_j \left( \lambda_j - \lambda_i + \sum_{r \neq i} (\lambda_j - \lambda_r)(x_r^2 + y_r^2) \right) dx_j}{\left(1 + \sum_{j \neq i} x_j^2 + y_j^2\right)^2} \\ &\quad + \frac{\sum_{j \neq r} 2y_j \left( \lambda_j - \lambda_i + \sum_{r \neq i} (\lambda_j - \lambda_r)(x_r^2 + y_r^2) \right) dy_j}{\left(1 + \sum_{j \neq i} x_j^2 + y_j^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Luego  $df = 0$  significa que para cada  $j \neq i$ ,

$$x_j \left( \lambda_j - \lambda_i + \sum_{r \neq i} (\lambda_j - \lambda_r)(x_r^2 + y_r^2) \right) = 0,$$

y

$$y_j \left( \lambda_j - \lambda_i + \sum_{r \neq i} (\lambda_j - \lambda_r)(x_r^2 + y_r^2) \right) = 0.$$

Si  $\lambda_i$  fuese un valor propio repetido, digamos  $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ , entonces haciendo  $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+2} = \dots = x_n = 0$  y  $y_1 = \dots = y_{i-1} = y_{i+2} = \dots = y_{n+1} = 0$  se sigue que las ecuaciones anteriores se cumplen para cualquier escogencia de  $x_{i+1}$ ,  $y_{i+1}$ , luego los puntos críticos de  $f$  no son aislados y así  $f$  no es una función de Morse; queda entonces demostrado que el segundo enunciado de la equivalencia a probar implica el primero.

Recíprocamente, supongamos  $\lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$ . Haciendo  $j = 1$  en las dos ecuaciones anteriores y usando el hecho de que los  $\lambda_r$  están en orden creciente, se sigue  $x_1 = y_1 = 0$ . Inductivamente se obtiene  $x_2, y_2, \dots, x_{i-1}, y_{i-1} = 0$ . Similarmente empezando con  $j = n+1$  y haciendo inducción hacia atrás se concluye  $x_j = y_j = 0$  para cada  $j \neq i$ . Luego el único punto crítico de  $f$  en  $U_i$  es  $[0, \dots, 1, \dots, 0]$ , donde el 1 se encuentra en la  $i$ -ésima posición. Entonces hay  $n+1$  puntos críticos en total y sus valores correspondientes

son distintos (son los  $\lambda_i$ ). Para verificar la no-degeneración, se sigue fácilmente de los cálculos anteriores que el determinante de la matriz Hessiana en  $[0, \dots, 1, \dots, 0]$  en las  $i$ -ésimas coordenadas inhomogéneas es

$$2^{2n}(\lambda_1 - \lambda_i)^2 \cdots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_i)^2,$$

que es no-nulo pues los  $\lambda_i$  son distintos.  $\square$

El análisis precedente nos permite demostrar el segundo y último teorema.

*Demostración del teorema 0.0.3.* Como en la prueba del teorema 0.0.2, debemos verificar las condiciones **(C1)** y **(C2)** del Lema 2.2.1. Esta vez la función genérica en el  $\lambda_1$ -espacio tiene la forma de  $f$  en la proposición 2.4.1, con la condición  $\text{tr}(A) = 0$ , o sea  $a_{n+1,n+1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ . Escribamos  $a_{ij} = b_{ij} + \sqrt{-1}c_{ij}$ . Como  $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ , escribiendo

$$a_{ij}z_i\overline{z_j} + a_{ji}z_j\overline{z_i} = b_{ij}(z_i\overline{z_j} + z_j\overline{z_i}) + \sqrt{-1}c_{ij}(z_i\overline{z_j} - z_j\overline{z_i}),$$

vemos que la dimensión en este caso es  $n(n+2)$  y una base es:

$$\begin{aligned} & \{z_i\overline{z_j} + z_j\overline{z_i} \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \cup \{\sqrt{-1}(z_i\overline{z_j} - z_j\overline{z_i}) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \\ & \cup \{z_{ii}^2 - z_{n+1,n+1}^2 \mid 1 \leq i < n+1\}. \end{aligned}$$

Los coeficientes de  $f$  para esta base son los  $b_{ij}$  y los  $c_{ij}$  para  $i < j$ , y los  $b_{ii}$  para  $i < n+1$  (pues  $c_{ii} = 0$ ). Notando que los  $b_{ij}, c_{ij}$  y los  $a_{ij}$  están relacionados biyectiva y bi-continuamente, podemos diagonalizar  $A = Q^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})Q$  y terminar de verificar la condición **(C1)** con el mismo argumento de la prueba del teorema 0.0.2. Ahora, para la condición **(C2)**, el argumento del teorema 0.0.2 (apelando nuevamente al lema 2.2.1 y al teorema 1.4.6) da el estimativo

$$\|\overline{h}_{2j}\|_r = O(1) \binom{2n+1+2j}{2n+1}^{1/2} \left(1 + \lambda_j^{1/2}\right)^r \|h_{2j}\|_{L^2(S^{2n+1})}$$

para la proyección de  $f$  sobre  $j$ -ésimo espacio propio, y el resultado se sigue de la misma forma puesto que  $\lambda_j = 4j(n+j)$  y  $\binom{2n+1+2j}{2n+1}$  son polinomios (de grados 2 y  $2n+1$ ) en  $j$ .  $\square$

# Conclusiones

- Se logró demostrar, aproximando las soluciones de la ecuación del calor mediante el primer espacio propio no trivial, que en espacios proyectivos reales y complejos de dimensión arbitraria dichas soluciones se transforman eventualmente en funciones de Morse minimales estables.
- Se demostraron condiciones suficientes que son simples y generales para que lo anterior sea cierto en variedades compactas, lo cual aporta herramientas para el estudio del mismo problema en el contexto de otras variedades Riemannianas.

# Bibliografía

- [1] Muñoz S. Quintero A. *Heat equation and stable minimal Morse functions on real and complex projective spaces*, Revista Colombiana de Matemáticas, vol. 51, no. 1, pp. 71-82, enero-junio. 2017.
- [2] Cadavid C. Vélez J. D. *A Remark on the Heat Equation and Minimal Morse Functions on Tori and Spheres*, Ingeniería y Ciencia, vol. 9, no. 17, pp. 11-20, enero-junio. 2013.
- [3] Do Carmo M. P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [4] Artin M. *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [5] Garret P. *Harmonic analysis on spheres, II*. [http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes\\_c/spheres\\_II.pdf](http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes_c/spheres_II.pdf)
- [6] Chavel I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, 1984.
- [7] Guillemin V. Pollack A. *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [8] Hirsch M. *Differential Topology*. Springer-Verlag , 1976.
- [9] Golubitsky M. Guillemin V. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, 1973.
- [10] Mather J. Stability of  $C^\infty$  mappings. II: Infinitesimal stability implies stability. *Annals of Mathematics*, Vol. 89, No. 2, Marzo 1969, pp. 254-291.
- [11] Milnor J. *Morse theory*, Princeton University Press, 1960.
- [12] Andrica D. Măgura D. Pinteș C. The circular Morse-Smale characteristic of closed surfaces. *Bull. math. Soc. Sci. Math. Roum.* **57** (2014), No. 3, 235–242.
- [13] Lee J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [14] Berger M. Gauduchon P. Mazet E. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Springer-Verlag, 1971.

[15] Ahlfors L. *Complex Analysis*. McGraw Hill, 1953.