



UN DISEÑO DE TAREAS QUE INTEGRA AGD Y LAS REPRESENTACIONES
GEOMÉTRICAS EN LAS ESCULTURAS DE SAN AGUSTÍN PARA LA ENSEÑANZA
DE LA SIMETRÍA AXIAL EN GRADO QUINTO.

RICARDO ALEXANDER URBANO MENESES
Código: 201303706

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO 2018



UN DISEÑO DE TAREAS QUE INTEGRA AGD Y LAS REPRESENTACIONES
GEOMÉTRICAS EN LAS ESCULTURAS DE SAN AGUSTÍN PARA LA ENSEÑANZA
DE LA SIMETRÍA AXIAL EN GRADO QUINTO.

RICARDO ALEXANDER URBANO MENESES
Código: 201303706

Trabajo para optar al título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática.
Modalidad Profundización.

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO:
M.Sc. EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO 2018



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACIÓN: Santiago de Cali, 14 de Febrero de 2018
ESTUDIANTE: RICARDO ALEXANDER URBANO MENESES - Código 1303706
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: "DISEÑO DE TAREAS QUE INTEGRA AGD Y LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS EN LAS ESCULTURAS DE SAN AGUSTÍN PARA LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL EN GRADO QUINTO"
DIRECTOR DE TESIS: Profesor EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
EVALUADORES: Profesor HILBERT BLANCO ÁLVAREZ Profesor ARMANDO AROCA ARAÚJO
COMENTARIOS DE LOS JURADOS El trabajo cumple las expectativas de un trabajo de grado- La presentación fue novedosa Las preguntas fueron resueltas con claridad
APROBADO ☒ APLAZADO ☐ RECHAZADO ☐

Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. HILBERT BLANCO ÁLVAREZ
Jurado Evaluador

Prof. EDINSSON FERNÁNDEZ M.

Director de Tesis
Prof. ARMANDO AROCA ARAÚJO
Jurado Evaluador

DIEGO GARZÓN CASTRO.
Prof. DIEGO GARZÓN CASTRO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)

Dedicatoria

A la memoria de mi amado padre Carlos Juvencio Urbano Diaz (2003), mis queridos hermanos Carlos Enrique (2017) y Jaime (2018), mis apreciados: sobrinos, Tíos, Primos y Abuelos que emprendieron un nuevo comienzo.

Agradecimientos

A Dios, a mi madre Esmaelina Meneses Pérez, a mi maravillosa Familia y a todas las maestras y maestros que me enseñaron en mis prolongadas estadías en la Universidad del Valle.

Contenido

Índice de Esquemas.....	v
Índice de Tablas	vi
Índice de Figuras	vii
Índice de Anexos.....	viii
Resumen.....	1
Introducción	2
Capítulo 1.....	5
1. Aspectos Generales de la Investigación	5
1.1 Presentación de la Problemática de Investigación	6
1.2 Presentación y Contextualización del Problema	9
1.3 Antecedentes	12
1.4 Objetivos	14
1.4.1 Objetivo general.....	14
1.4.2 Objetivos específicos.	14
Capítulo 2.....	17
2. La Simetría Axial y la Geometría en las Esculturas de San Agustín	17
2.1 Dimensión Histórica – Epistemológica.....	18
2.1.1 De la congruencia de Euclides a los movimientos en el plano.	18
2.1.2 De la Geometría Proyectiva al Programa de Erlangen.....	19
2.1.3 Simetría axial.	20
2.1.4 La simetría en el arte escultórico de San Agustín.	22
2.2 Dimensión Cognitiva.....	24
2.2.1 <i>Dificultades, obstáculos y errores</i> en el aprendizaje de la simetría axial.	24
2.2.2 Las representaciones dinámicas en los AGD.	26
2.3 Dimensión Didáctica	28
2.3.1 La Teoría de las Situaciones Didácticas como referente para el diseño.	28
2.3.1.1 El contrato didáctico y las interacciones o fases.	29
2.3.2 Diseño de tareas.	30
2.3.3 Perspectiva Etnomatemática	32
2.3.4 Modelación.	33
2.3.5 Recursos manipulativos.	34
2.3.6 Recurso Informático.....	35
2.3.6.1 Orquestación instrumental.....	36
2.3.6.2 Génesis instrumental	36
2.3.6.3 El Ambiente de Geometría Dinámica Cabri.....	37
2.3.7 Complementariedad de recursos	39
2.3.8 Las transformaciones geométricas en los referentes curriculares del MEN.	39
Capítulo 3.....	42

3.	Concepción del Dispositivo Experimental y Análisis <i>a priori</i>	42
3.1	Consideraciones Metodológicas.....	42
3.2	El Dispositivo Experimental	43
3.2.1	Variables micro-didácticas.....	45
3.2.2	Unidades de análisis.....	46
3.3	Diseño del Dispositivo Experimental.....	47
3.3.1	Aplicaciones previas de la secuencia de tareas.	49
3.3.2	Implementación en el aula.	50
3.3.3	Diseño de la secuencia de tareas.	51
3.4	Análisis <i>a priori</i> de la implementación	51
3.4.1	Análisis <i>a priori</i> de la Tarea 1: Manipulando recursos.	53
3.4.2	Análisis <i>a priori</i> de la Tarea 2: Vive tu experiencia en AGD.	55
3.4.3	Análisis <i>a priori</i> de la Tarea 3: Explorando construcciones en Cabri.....	60
3.4.4	Análisis <i>a priori</i> de la Tarea 4: Diseña tu propia escultura.....	63
	Capítulo 4.....	66
4.	Experimentación.....	66
4.1	Caracterización de la Población	66
4.2	Organización de la Experimentación	67
4.3	Recolección y Procesamiento de la Información	68
	Capítulo 5.....	70
5.	Análisis <i>a posteriori</i> y Evaluación.	70
5.1	Análisis <i>a posteriori</i> de la Tarea 1	70
5.2	Análisis <i>a posteriori</i> de la Tarea 2.	75
5.3	Análisis <i>a posteriori</i> de la Tarea 3.	83
5.3.1	Fase de institucionalización.	90
5.4	Análisis <i>a posteriori</i> de la Tarea 4	90
5.5	Consideraciones Generales de los análisis <i>a posteriori</i>	95
5.5.1	Unidad de análisis diseño de tareas.....	96
5.5.2	Unidad de análisis complementariedad de recursos.....	98
5.5.3	Unidad de análisis construcción del concepto de simetría.	99
5.5.4	Unidad de análisis relación arte escultórico y geometría.....	100
	Capítulo 6.....	103
6.	Resultados y Conclusiones Generales	103
6.1	En relación con la hipótesis de investigación HI 1	103
6.2	En relación con la hipótesis de investigación HI 2	105
6.3	En relación con la hipótesis de investigación HI 3	107
6.4	Inquietudes suscitadas a partir de esta investigación y reflexión final.	108
	Referencias bibliográficas.....	110

Índice de Esquemas

Esquema 1. Aspectos generales de la investigación	5
Esquema 2. <i>Análisis Preliminares</i>	17
Esquema 3. Proceso de Génesis Instrumental.....	37
Esquema 4. Fases de la Metodología de la ingeniería didáctica.....	42
Esquema 5. Aspectos que estructuran el Dispositivo Experimental.....	44
Esquema 6. Unidades de Análisis y sus Variables: de diseño o micro-didácticas	47
Esquema 7. El diseño de tareas y sus referentes teóricos.	48

Índice de Tablas

Tabla 1. Resultados Pruebas Saber grado quinto IEG	7
Tabla 2. Documentos de los antecedentes y sus categorías	12
Tabla 3. Sesiones de la SD para la enseñanza de las transformaciones isométrica	44
Tabla 4. Encuentros para la <i>puesta en acto</i> de la secuencia de tareas.	52
Tabla 5. Consignas de la Tarea 1.	53
Tabla 6. Consignas de la Tarea 2	56
Tabla 7. Consignas de la Tarea 3	61
Tabla 8. Tarea 4, diseña tu propia escultura	64
Tabla 9. Encuentros de la puesta en acto de la secuencia de tareas, simetrías en el plano.	67
Tabla 10: Construcciones en cartulina y consolidación respuestas de la Tarea 1	72
Tabla 11. Modelaciones Geométricas en Cabri de la Tarea 2	79
Tabla 12. Consolidación de las respuestas de la Tarea 2	81
Tabla 13. Respuestas de los estudiantes a la Tarea 3, Construcción 6.1	85
Tabla 14. Respuestas de los estudiantes a la Tarea 3, Construcción 6.2.	87
Tabla 15. Esculturas diseñadas por los estudiantes en la Tarea 4.	93
Tabla 16. Rejillas para la clasificación de la información de acuerdo a las unidades de análisis	95

Índice de Figuras

Figura 1. Simetría axial del punto p respecto a la recta l.....	21
Figura 2. Simetría axial de una figura respecto a una recta.....	21
Figura 3. Trazos en la escultura el Águila Mesita B.....	22
Figura 4. Trazos en Cabri El Partero Mesita B.....	23
Figura 5. Trazos en Cabri, Escultura Mesita C.....	24
Figura 6. Componentes de Cabri Geometry II Plus.....	38
Figura 7. Ajustes al tamaño de la cartulina en la Tarea 1.....	49
Figura 8. Posibles modelaciones en Cabri análisis <i>a priori</i> Tarea 2.....	57
Figura 9. Posible modelación en Cabri, Tarea 2 primera parte análisis <i>a priori</i>	58
Figura 10. Modelación en Cabri, Tarea 2 Literales a), b) y c).....	59
Figura 11. Modelaciones en Cabri Tarea 3: Construcciones 6.1 y 6.2.....	60
Figura 12. Posibles diseños en la Tarea 4.....	64
Figura 13. Imágenes de la I. E. Golondrinas.....	66
Figura 14. TDA en las UCA y Distribución de computadores a los estudiantes.....	76
Figura 15. Modelación en Cabri, Tarea 2.....	78
Figura 16. Esculturas analizadas en la Tarea 4.....	91

Índice de Anexos

Anexo 1. <i>Guía del estudiante Puesta En Acto</i>	115
Anexo 2. Protocolo Tarea 1	119
Anexo 3. Protocolo Tarea 2	124
Anexo 4. Protocolo Tarea 3	129
Anexo 5. Protocolo Tarea 4	136
Anexo 6. Rejilla Diseño de tareas	141
Anexo 7. Rejilla Complementariedad de Recursos	144
Anexo 8. Rejilla Construcción del Concepto de Simetría	148
Anexo 9. Rejilla Arte Escultórico y Geometría	151
Anexo 10. Guía del estudiante Versión 2.	153
Anexo 11. <i>Guía del estudiante</i> , Cursillo VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016	158

Resumen

Esta investigación se planteó a partir de dos problemas que se presentaron en la Institución Educativa Golondrinas del municipio de Cali: la institución fue dotada con 228 Tabletas y ocho aulas digitales cada una con 30 computadores portátiles que no se estaban integrando a las prácticas de aula y además, los estudiantes presentaron dificultades en el aprendizaje evidenciado en los resultados del componente que integra los pensamientos matemáticos geométrico y métrico en las Pruebas Saber.

Se propuso el diseño de una secuencia de tareas que integra Cabri y la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto. Mediante esta secuencia de tareas los estudiantes construyeron el concepto, identifican su aplicación y como lo plantea la Etnomatemática se visibilizan los conocimientos geométricos del pueblo escultor.

Esta propuesta se desarrolló siguiendo el paradigma metodológico de la *micro-ingeniería didáctica* y la Teoría de Situaciones Didácticas, a partir de las cuales se analizó la pertinencia del *diseño de tareas*.

Los estudiantes lograron modelar las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín, reconocieron los avances matemáticos y artísticos del pueblo escultor. En el desarrollo de la secuencia de tareas se evidenció que la complementariedad de recursos manipulativos e informáticos promueven el aprendizaje de la simetría axial.

Palabras claves: Simetría Axial, AGD, *Diseño de Tareas*, Esculturas de San Agustín.

Introducción

El siguiente trabajo se inscribe en la línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, en el Programa de Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática, modalidad profundización, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, puesto que se tuvo como referentes los aportes de la *Didáctica de las Matemáticas* de la escuela francesa, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (2000) y la metodología de Investigación de Ingeniería Didáctica, a partir de una de sus variaciones: la Micro Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995); igualmente se inscribe en la línea de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en Educación Matemática (EM), por la tradición de esta línea en el *diseño de tareas* utilizando Ambientes de Geometría Dinámica (AGD).

Esta investigación se desarrolló a partir de un *diseño de tareas* que integra el AGD Cabri el cual por sus características se consideran un *medio* para interactuar con los objetos matemáticos y permite modelar, interpretar, verificar y resolver problemas geométricos. Como *medio* complementario se utilizaron las fotografías de las esculturas de San Agustín como fondo de pantalla en Cabri, sobre las cuales un grupo de estudiantes: modelaron figuras geométricas, identificaron la aplicación de la simetría axial y realizaron diseños de esculturas siguiendo los principios geométricos que utilizó el pueblo escultor decodificados en Urbano (2010). La *puesta en acto* del *diseño de tareas* se realizó con estudiantes de grado quinto de la educación básica primaria, en la Institución Educativa Golondrinas (IEG) ubicada en la zona rural al norte del municipio de Cali.

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales, iniciando con la presentación del problema, donde se reflexiona acerca de los recursos pedagógicos apropiados para el contexto de las instituciones educativas, los bajos resultados en las pruebas externas, el inadecuado uso de los recursos tecnológicos en el aula y la importancia del aprendizaje de la geometría.

En el segundo capítulo se presentan los *análisis preliminares* que definen el marco teórico que sustenta esta investigación, estos análisis corresponden a la primera fase de la *micro-ingeniería* (Artigue, 1995) donde se establecen los saberes didácticos relacionados con el tema de estudio, a partir de las dimensiones: Histórica – Epistemológica, Cognitiva y Didáctica.

En el tercer capítulo se realiza la presentación de los elementos que estructuran el dispositivo experimental y los análisis *a priori*. Se hace un acercamiento al diseño metodológico propuesto desde la *micro-ingeniería didáctica* como el enfoque que orienta la investigación, luego las características generales de las actividades que conforman el diseño, una presentación de la secuencia de tareas que se tendrá en cuenta para la *puesta en acto* y finalmente se realizan los análisis *a priori* de cada tarea, realizando un análisis de control para prever lo que pueda ocurrir en el aula.

En el cuarto capítulo se abordan los aspectos relacionados con la experimentación a partir de las características de la población, la organización de la experimentación y por último la recolección y el procesamiento de la información.

En el quinto capítulo se abordan aspectos relacionados con los *análisis a posteriori*, contruidos a partir de lo ocurrido en la puesta en acto, lo proyectado en el análisis *a priori*, las situaciones que no fueron contempladas, las interacciones propuestas en la TSD y la información recolectada y

procesada; con el propósito de confrontar si son ciertas las hipótesis planteadas en esta investigación a la luz de los análisis preliminares. Primero se realizaron a partir de la puesta en acto de cada tarea y luego las consideraciones generales teniendo en cuenta la información recopilada en cada una de las rejillas de las unidades de análisis constitutivos.

En el sexto y último capítulo, se presentan los resultados y conclusiones desarrollados a partir de las hipótesis de investigación que se relacionan con los objetivos, respondiendo a estos planteamientos a partir de los análisis *a posteriori en las rejillas de análisis*, donde se evidenció que en la secuencia de tareas los estudiantes reconocieron los elementos de la simetría axial y su aplicación en un contexto artístico, histórico y cultural, que el material manipulativo e informático son complementarios y la integración de las imágenes de las esculturas al *diseño de tareas* favoreció el aprendizaje de la simetría axial y permitió visibilizar el saber geométrico que alcanzó el pueblo escultor de San Agustín.

Capítulo 1.

Aspectos Generales de la Investigación

Capítulo 1

Aspectos Generales de la Investigación

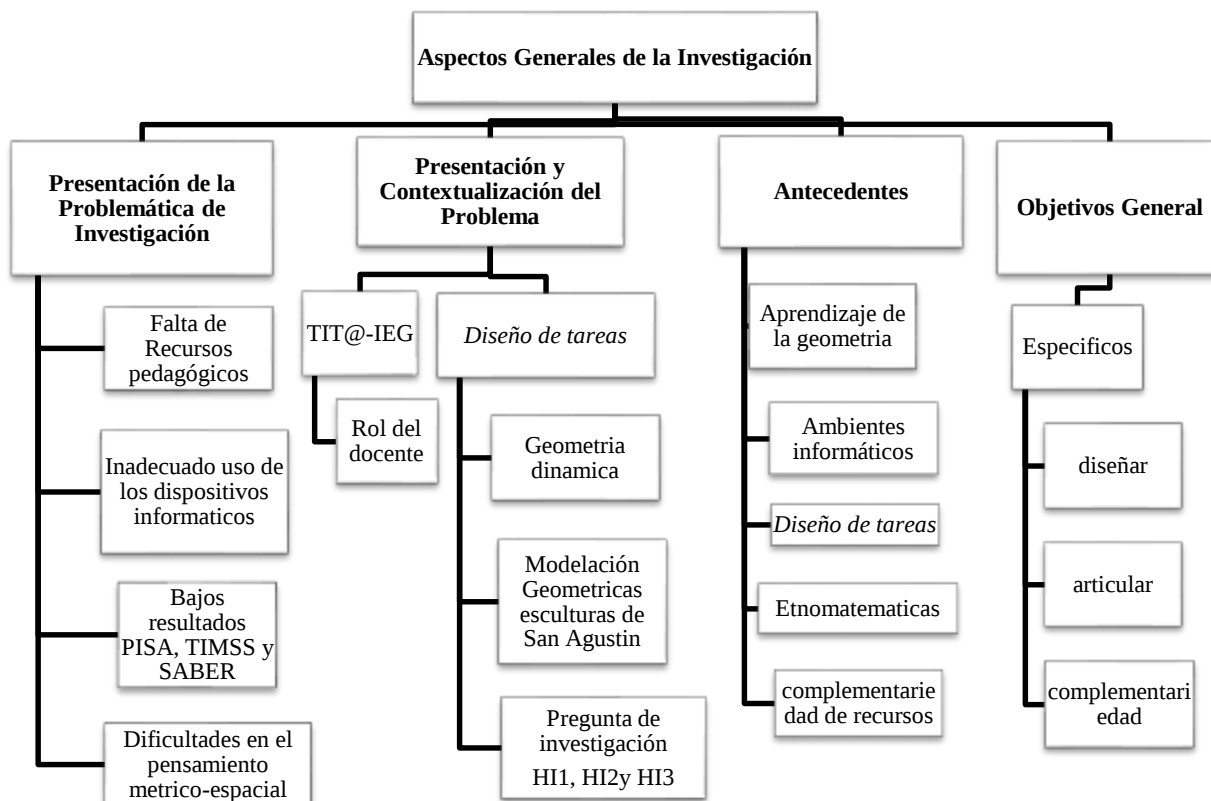
Este capítulo se inicia con el problema de investigación donde se reflexiona acerca de los recursos pedagógicos apropiados para el contexto de las instituciones educativas públicas, el inadecuado uso de los recursos tecnológicos en el aula, los bajos resultados en las pruebas internacionales TIMSS y PISA en el área de matemáticas, las Pruebas Saber presentadas por los estudiantes de grado quinto de la IEG y los desempeños en el componente geométrico.

La presentación y contextualización del problema se presenta a partir del uso inadecuado de los recursos informáticos de la IEG, la importancia del *diseño de tareas* para la enseñanza de las matemáticas que integra los AGD y la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín. Teniendo en cuenta estos aspectos, se planteó la pregunta de investigación y se propusieron las hipótesis.

Posteriormente, se presentan los antecedentes los cuales se han seleccionado debido a que involucraron temáticas asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, el *diseño de tareas*, la geometría dinámica, propuestas que han emergido de la Educación en Etnomatemática y la complementariedad de recursos.

Por último, se exponen los objetivos generales y los objetivos específicos. Los anteriores aspectos se consolidaron en el Esquema 1.

Esquema 1. Aspectos generales de la investigación



1.1 Presentación de la Problemática de Investigación

En el problema de investigación se reflexiona acerca de los recursos pedagógicos, el uso inadecuado de los recursos tecnológicos en el aula, los bajos resultados en las pruebas internacionales y nacionales de matemáticas y las dificultades en el desarrollo del pensamiento métrico-espacial.

Se considera como recurso pedagógico, todos los elementos que intervienen en la clase: elementos físicos, estrategias, guías, tiempo, software, entre otros. Los recursos pedagógicos son considerados por Garzón y Vega (2013) como una sola unidad de análisis que congrega el uso de los materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los actos discursivos en los cuales aquellos toman un sentido y significación particulares.

El diseño de una secuencia de tareas es un recurso pedagógico que puede ser adecuado al contexto en que se desarrolla. En su experiencia en la formación de educadores matemáticos Garzón y Vega (2013). “encuentran que indefectiblemente, los profesores para la planeación y el desarrollo de sus clases utilizan actividades como (talleres, guías, tareas, ejercicios) que ya han sido puestas en práctica por otros profesores” (p. 4). Por lo que se debe considerar, validar el diseño de una secuencia de tareas, en la práctica del profesor, con la mirada integral de un investigador de su propia experiencia pedagógica.

El *diseño de tareas* juega un papel importante en el desarrollo de las clases, tanto como un elemento que permite en una investigación los análisis alrededor de las prácticas educativas en la enseñanza de un concepto o como un recurso pedagógico que orienta en el aula los procesos de aprendizaje, (Pochulu, Font y Rodríguez, 2013) afirman que: “Las tareas son, en esencia, las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio) en la clase, y estas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje” (p.1).

En relaciona con los avances de los recursos tecnológicos y su accesibilidad a la mayoría de los estudiantes de la IEG, éstos sin una orientación apropiada son subutilizados o empleados generalmente como reproductores de música, video, fotografías y para consultar las redes sociales, sin que se aprovechen adecuadamente sus herramientas en el contexto escolar.

La Institución cuenta con una amplia oferta de recursos tecnológicos en el aula de clase, ocho de las doce aulas cuentan con treinta computadores portátiles y un video proyector respectivamente, hay una sala de sistemas con treinta computadores y además para los grados de primaria hay 228 Tablet de 10 pulgadas con diversas aplicaciones diseñadas para el campo educativo.

A pesar de la disponibilidad de todos estos recursos informáticos en el aula, su integración a los procesos de enseñanza por parte de los profesores es muy esporádica, por la falta de actividades que involucren el uso de éstos para el aprendizaje de los conceptos matemáticos dentro y fuera del aula de clase.

Una alternativa para aprovechar los dispositivos informáticos es el *diseño de tareas* que integran AGD según lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), en los Estándares Básicos de Competencia de Matemáticas donde se afirma que:

Estos ambientes informáticos, proponen nuevos retos y perspectivas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en tanto que permiten reorganizaciones curriculares, pues no sólo realizan de manera rápida y eficiente tareas rutinarias, sino que también integran diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.). Todo esto facilita a los alumnos centrarse en los procesos de razonamiento propio de las matemáticas y, en muchos casos, puede poner a su alcance problemáticas antes reservadas a otros niveles más avanzados de la escolaridad (p.75).

Otra problemática que se analizó está relacionada con los resultados obtenidos por estudiantes colombianos en las pruebas internacionales PISA y TIMSS y los resultados obtenidos en las Pruebas Saber por los estudiantes de grado quinto de la IEG en los últimos dos años.

En las pruebas PISA del año 2015 participaron 11795 estudiantes colombianos con una edad promedio de 15 años, los resultados obtenidos en matemáticas, ubican al país en la posición 62 de 72 economías participantes, en la distribución porcentual de los estudiantes por nivel de desempeño, en esta área el porcentaje de estudiantes en alto desempeño es 0.3% y en bajo desempeño es 66%, además en el desempeño *promedio* en matemáticas Colombia tiene 390, el *promedio* de La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) es 490 y el mejor puntaje corresponde a Singapur con 564 puntos. Esta prueba se presenta cada tres años y desde 2006 al 2015 Colombia mejoró en 20 puntos, pero en relación con los demás países participantes en la prueba de matemáticas en América latina solo supera a Perú y Brasil (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior [ICFES], 2016, p.12 y 15).

Las pruebas TIMSS del año 2007 fueron presentadas por estudiantes de cuarto y octavo grado, en concordancia con el interés de esta investigación solo se tuvo en cuenta los resultados de grado cuarto. Los estudiantes colombianos de cuarto grado en matemáticas se ubicaron en la posición 53 entre 59 países participantes, de acuerdo con los desempeños el 69% de los estudiantes mostró logros inferiores a los descritos para ese nivel, el 22% se ubicó en el nivel bajo; tan solo un 7% en el nivel *medio*, 2% en el alto y ningún estudiante en el nivel avanzado (ICFES, 2010, p.14).

En Colombia entre los años 2012 y 2016 se efectuó la Prueba Saber a nivel nacional en los grados de tercero, quinto y noveno de la educación básica. De estas pruebas se toman los resultados de grado quinto de la IEG de los años 2015 y 2016 y se analizan; estos resultados se presentan en la Tabla 1¹ teniendo en cuenta el porcentaje de estudiantes en cada uno de los niveles de desempeño.

Tabla 1. Resultados Pruebas Saber grado quinto IEG

Año	Nivel insuficiente	Nivel mínimo	Nivel satisfactorio	Nivel avanzado
2015	8%	46%	38%	9%
2016	33%	29%	28%	10%

Al observar los resultados de las pruebas Saber, PISA y TIMSS se encuentra que más del 65% de los estudiantes se ubican en los desempeños inferior, bajo o mínimo de acuerdo a la prueba, lo que indica que es necesario fortalecer el trabajo en el aula de clase para mejorar las competencias

¹ Datos tomados de los informes del ICFES (2017) de los resultados de la IEG reportados en los años 2016 y 2017 correspondientes a las pruebas presentadas en los años 2015 y 2016.

matemáticas de los estudiantes.

La Prueba Saber ICFES (2017), en matemáticas evalúa tres competencias; comunicativa, razonamiento y resolución, y tres componentes que corresponden al; numérico-variacional, aleatorio y espacial-métrico, al revisar la información del componente espacial-métrico relacionado con las transformaciones geométricas se observan los siguientes datos:

En la competencia de razonamiento en el componente espacial – métrico:

- En el año 2015 el 42% y 2016 el 29% de los estudiantes no conjetura ni verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.
- En el año 2015 el 42% y en el año 2016 el 29% de los estudiantes no justifica relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.

En la competencia de resolución que involucra el componente espacial métrico:

- En el 2015 el 52% y en el 2016 70% de los estudiantes no utiliza relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.
- En el 2015 el 44% y en el 2016 45% de los estudiantes no usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.

El ICFES (2013) establece que para que un estudiante logre ubicarse en los niveles satisfactorio y avanzado en el componente espacial-métrico el estudiante debe evidenciar las siguientes competencias:

- Hace conjeturas y verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.
- Relaciona objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos.
- Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.
- Identifica y justifica relaciones de semejanza y congruencia entre figuras. (p.35)

Teniendo en cuenta los resultados y competencias evaluadas, se pone de manifiesto la importancia de implementar propuestas didácticas en el aula que potencialicen en los estudiantes el dominio de las transformaciones geométricas en situaciones que involucren interpretación, modelización y resolución de problemas.

A partir de los resultados obtenidos por los estudiantes en grado quinto en el componente espacial-métrico, se visualiza la importancia que tiene el desarrollo de competencias geométricas no solo para presentar las pruebas sino para su vida cotidiana, como se evidencia en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM):

El desarrollo del pensamiento espacial se considera fundamental para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios necesarios en la vida cotidiana, muchas disciplinas científicas como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la física y las matemáticas requieren que las personas tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. (MEN, 1998, p.37)

En los Estándares Básicos de Competencias (EBC) en Matemáticas se establecen, a partir de la

geometría, los pensamientos espacial y métrico, los cuales buscan desarrollar en los estudiantes conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como, el concepto de magnitud, la estimación de la medida, la selección de unidades de medida, de patrones, de instrumentos y procesos de medición, es significativo recalcar que la estimación de medidas y la determinación de los rango entre los que se ubican las medidas, “trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana” (MEN, 2006, p. 63).

1.2 Presentación y Contextualización del Problema

Los aspectos que promueven esta investigación están asociados a las diferentes problemáticas que se presentan en la IEG a partir de la implementación del proyecto Educación Digital Para Todos (TIT@) y el rol del docente. Las ventajas del *diseño de tareas* para la enseñanza de las matemáticas a partir de la integración de los AGD y las representaciones geométricas presentes en las esculturas del pueblo prehispánico de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial y el reconocimiento del patrimonio histórico y cultural que representan estos monolitos para la humanidad.

Actualmente se ha encontrado que la integración de TIC posibilita diversas formas de representación a partir de las cuales se pueden explorar otras estrategias de enseñanza y aprendizaje, como lo afirman Barrera y Santos (citado en Gamboa, 2017) la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de tareas y sirve como un *medio* para que formulen sus propias preguntas o resuelvan problemas.

La comunidad educativa ha visto en el uso de TIC una posibilidad para mejorar los procesos de formación de los estudiantes en los diferentes niveles, por lo que las entidades gubernamentales están asignando presupuestos para dotar a las instituciones de estos recursos tecnológicos; en los últimos años el gobierno y el sector educativo creen que la tecnología es una poderosa herramienta de aprendizaje y que con las orientaciones adecuadas los estudiantes mejoran sus posibilidades de cursar una carrera universitaria y ser exitosos en sus vidas profesionales (MEN, 2010).

En este mismo sentido la alcaldía del municipio de Santiago de Cali promueve el proyecto TIT@ para la adecuación de aulas de clase con recursos tecnológicos. Este proyecto inició en la IEG en el segundo semestre del año 2014 y el primer semestre del año 2015 capacitando a los docentes en los diferentes procesos de integración de tecnologías al aula de clases y el manejo de los equipos, simultáneamente se realizaron las adecuaciones eléctricas y de conectividad a ocho aulas en las cuales se instaló un router, video proyector, una Unidad de Carga y Almacenamiento (UCA) con 30 computadores portátiles o Terminales de Aprendizaje (TDA) y un computador para cada docente con los programas² que permiten monitorear el trabajo que realizan los estudiantes en la TDA durante la clase desde su equipo al igual que transferir información y restringir las funciones de los computadores que utilizan los estudiantes.

Por otra parte, el programa de Computadores Para Educar entregó en el mes de septiembre del año 2014 a cada estudiante y docente de la institución educativa una Tablet de 10 pulgadas con

² Classroom Management y Consola Técnica de Classroom Management son los programas que le permiten al docente monitorear el trabajo de los estudiantes en el computador.

sistema operativo Android y aplicaciones educativas, además se dotó la sala de sistemas con 30 computadores portátiles y un video proyector, a finales del año 2015 el *Ministerio de las TIC de Colombia* entregó a la institución 228 Tablet para las aulas de transición y primaria.

Con la disponibilidad de estos equipos en la institución, el reto es hacer que los estudiantes utilicen estos recursos, lo que depende en gran parte del papel que asuma el profesor como orientador propositivo y recursivo, para programar actividades que instruyan a los estudiantes en el aprovechamiento de los mismos en sus procesos de aprendizaje en las diferentes áreas, al respecto la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2008) expone que:

El docente es la persona que desempeña el papel más importante en la tarea de ayudar a los estudiantes a adquirir esas capacidades. Además, es el responsable de diseñar tanto oportunidades de aprendizaje como el entorno propicio en el aula que facilite el uso de las TIC por parte de los estudiantes para aprender y comunicar. Por esto, es fundamental que todos los docentes estén preparados para ofrecer esas oportunidades a sus estudiantes. (p.2)

En el marco del Plan Decenal de Educación 2006-2016 (MEN, 2007) y los lineamientos en TICS del año 2004 (MEN, 2004), presentan la importancia de integrar las TIC como eje transversal para fortalecer los métodos de enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos y promover procesos investigativos, que propendan por la innovación educativa para darles sentido desde una constante construcción de las nuevas formas de ser y de estar del aprendiz.

Los proyectos de incorporación de TIC al aula de clase se asocian con la formación del docente, no sólo en el desarrollo de competencias informáticas sino también en la reflexión de su propia práctica como investigador de sus métodos de enseñanza y de los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, al respecto la UNESCO (2008) expone que:

Las nuevas tecnologías (TIC) exigen que los docentes desempeñen nuevas funciones y también requieren nuevas pedagogías y nuevos planteamientos en la formación docente. Lograr la integración de TIC en el aula dependerá de la capacidad de los maestros para estructurar el ambiente de aprendizaje de forma no tradicional, fusionar las TIC con nuevas pedagogías y fomentar clases dinámicas en el plano social, estimulando la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo. (p.7)

Teniendo en cuenta las apreciaciones de la cita anterior se realizó un *diseño de tareas*, que se propuso como un recurso pedagógico que integra los recursos informáticos con que cuenta la IEG a partir de la integración de AGD.

Al respecto los EBC en Matemáticas proponen que “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”, (MEN, 2006, p. 49).

En el diseño de la secuencia de tareas se integran los AGD o ambientes informáticos, que se conciben como sistemas de representación mediadores en la construcción del conocimiento, que posibilitan el reconocimiento de los objetos matemáticos a través de la visualización en la interfaz

del programa, generando múltiples representaciones que amplían las posibilidades de acceder al concepto, su aplicación y aprendizaje.

En la medida que los estudiantes acceden a estos procesos de representaciones geométricas a través de la manipulación del AGD, se generarán experiencias que propician el desarrollo del pensamiento espacial, habilidades para interpretar su espacio circundante, identificar estructuras y sintetizar o esquematizar situaciones problema. Al respecto los LCM expresan que:

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. (MEN, 1998. p.37)

En el *diseño de tareas*, junto a los ambientes informáticos se integran las esculturas de la cultura de San Agustín, donde a partir de la modelación de figuras geométricas y las transformaciones isométricas en los detalles esculpidos en las esculturas, se decodificó cómo los escultores utilizaron estos elementos geométricos para el diseño y construcción de las esculturas (Urbano, 2010).

Con la incorporación de estos saberes matemáticos del grupo prehispánico del pueblo escultor de San Agustín al aula de clases, se pretendió hacer un reconocimiento a los avances científicos y culturales que alcanzó este pueblo ancestral, como lo propone Blanco (2017) “la Etnomatemática, es una herramienta que nos proporciona elementos para reivindicar saberes locales como matemáticas, que nos permite valorar y visibilizar el conocimiento matemático del colonizado frente al conocimiento matemático del colonizador” (p.179), además estudiarlos, fortalecerlos, respetarlos, enseñarlos, usarlos y divulgarlos.

Teniendo en cuenta las anteriores apreciaciones se plantea la siguiente pregunta:

¿De qué manera las características del diseño de una secuencia de tareas, que integra un AGD alrededor de las representaciones geométrica en las esculturas de San Agustín, promueven el aprendizaje de la simetría axial y el reconocimiento del pueblo escultor, en estudiantes de grado 5° de la IE Golondrinas?

De esta pregunta se desprenden las siguientes hipótesis de investigación:

- **HI 1:** El diseño de una secuencia de tareas que integra los AGD y la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín, promueven el aprendizaje de la simetría axial.
- **HI 2:** La incorporación de las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la geometría, contribuye al reconocimiento del valor científico y cultural de estos pueblos ancestrales.
- **HI 3:** El uso de recursos manipulativos e informáticos propician el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría axial.

1.3 Antecedentes

En este apartado se presentan los referentes teóricos que permiten ubicar la problemática de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas a partir del *Diseño de tareas*, los AGD, las propuestas de enseñanza de la geometría desde una perspectiva Etnomatemática y la complementariedad de recursos. Se referencian ocho documentos que involucran los conceptos que se asocian a la investigación como se puede observar en la Tabla 2.

Tabla 2. Documentos de los antecedentes y sus categorías

No	Autores y título	Enseñanza de la geometría	Diseño de tareas.	Ambientes informáticos	Etnomatemática	Complementariedad
1	Díaz, Sánchez, y Mayorga (2014). Cabri II Plus como herramienta para la enseñanza de las Isometrías.	X	X	X		
2	Montes (2012). Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De Transformaciones Geométricas En El Plano con Estudiantes de Grado Séptimo Haciendo Uso del Entorno Visual del Juego Pac-Man.	X	X	X		X
3	Ibargüen y Realpe. (2012). La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos.	X	X	X		X
4	Santacruz (2011). Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria.	X	X	X		
5	Fernández (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus.	X	X	X		
6	Acosta, Monroy, y Rueda (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio.	X	X	X		
7	Huapaya y Salas (2008). Uso de las ideas matemáticas y científicas de los Incas en la enseñanza - aprendizaje de la geometría.	X	X		X	
8	Aroca (2007). Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: comunidad indígena Ika – sierra nevada de santa marta.	X	X		X	

A continuación, se presentan algunos aspectos generales de los antecedentes referenciados en la anterior tabla que se relacionan con esta investigación.

Díaz *et al.* (2014); en este artículo se hace énfasis en la incorporación de las TIC en muchos de los procesos de la vida cotidiana y en como esto ha generado cambios en la enseñanza y aprendizaje en las diferentes disciplinas y niveles escolares, además propone a Cabri como un software de geometría dinámica de fácil manipulación, amigable y de rápido aprendizaje. Con el uso de Cabri se realiza el desarrollo de cinco ejercicios de simetría axial, tres de rotación y cinco de traslación y a partir de estos se comprueba que Cabri permite a los estudiantes visualizar, descubrir, conjeturar y comprobar propiedades que se deseen trabajar, a manera de conclusión proponen que

el rol del maestro es gestionar las actividades para el desarrollo de su clase integrando estos recursos de geometría dinámica los cuales contribuyen al desarrollo de un pensamiento geométrico de calidad.

Montes (2012); presenta una propuesta didáctica que integra los movimientos del video juego Pac-Man, donde reconoce los movimientos rígidos en el plano. A partir de estos elementos construye una secuencia de actividades para abordar las transformaciones en el plano que buscan generar la comprensión y el aprendizaje del concepto geométrico, tomando como referentes los entornos visuales del videojuego Pac-Man, integrando el trabajo manual y la manipulación de objetos concretos.

Ibarguen y Realpe (2012); en este trabajo se aborda la enseñanza y el aprendizaje de la transformación de simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos como es el Simetrizador y AGD Cabri, para realizar este análisis se diseñó e implementó una secuencia didáctica basada en la TSD y desarrollada dentro del marco de la *micro-ingeniería*. En los resultados de la investigación se concluye que el papel de la complementariedad muestra que, si se utilizan varios artefactos dentro de un ambiente de aprendizaje, cada uno proporciona al estudiante un conocimiento diferente, por lo que el Simetrizador y Cabri permiten observar propiedades distintas de la simetría axial.

Santacruz (2011); este trabajo presenta cómo se concibe, diseña y evalúa, una secuencia didáctica que toma en consideración aspectos de la orquestación instrumental y la TSD, alrededor de la noción de transformación de rotación, contemplando la emergencia y evolución de un Esquema Social de Uso (ESU).

Fernández (2011); el desarrollo de esta investigación está centrada en reconocer la estrecha relación entre el proceso de integración de TIC, las representaciones ejecutables que permiten al estudiante modificar condiciones, controlar variables y manipular situaciones matemáticas concretas y el uso de materiales y recursos pedagógicos que permitan motivar e involucrar a los estudiantes en actividades de aprendizaje significativas. La investigación centra su atención en la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global.

Acosta *et al.* (2010); presentan una investigación en el aula a partir de la TSD, donde se plantean problemas y retos de búsqueda de la mejor estrategia de solución a trece actividades diseñadas en Cabri para la enseñanza de las transformaciones geométricas de simetría axial y traslación, en estudiantes de grado cuarto. En esta investigación se concluyó que el uso del software Cabri Geometry permite que los estudiantes identifiquen las propiedades que caracterizan las transformaciones geométricas de simetría axial y traslación.

Huapaya y Salas (2008); este trabajo enfatiza en dos aspectos: primero se realiza una aproximación Etnomatemática en el cual se identifican conceptos matemáticos que utilizó el pueblo Inca en sus diferentes manifestaciones culturales en la arquitectura, urbanismo, cerámica, orfebrería, textiles, agricultura y técnicas de irrigación, donde se puede evidenciar el uso de conceptos geométricos en las construcciones, partiendo de la identificación de los elementos de la geometría en las diferentes construcciones indígenas y luego se construyen varias propuestas didácticas, las cua-

les buscan que los estudiantes reconozcan que conocimientos, patrones, objetos o formas geométricas usaban los incas en sus diversas manifestaciones culturales y tecnológicas, además de reconocer y aprender de forma intuitiva y natural las aplicaciones de los conceptos geométricos.

Aroca (2007); muestra que existe un conocimiento ancestral del manejo de las transformaciones geométricas en las representaciones de símbolos y deidades que decoran las mochilas que tejen las indígenas arhuacas y que utilizan los pueblos aborígenes que habitan y habitaron el territorio Colombiano en La Sierra Nevada de Santa Marta. Luego elabora una propuesta de enseñanza de las transformaciones geométricas a partir de la decodificación de los procesos empleados para elaborar estos detalles teniendo en cuenta la técnica empleada por las indígenas arhuacas en sus tejidos.

De los antecedentes se retoman varios aspectos que contribuyeron a la realización de esta investigación de acuerdo con la Tabla 2, cinco trabajos realizan sus intervenciones con el uso del AGD Cabri de donde se retomaron aspectos del enfoque instrumental.

Los trabajos de Montes (2012) e Ibarguen y Realpe (2012) abordan la complementariedad de recursos y artefactos permitiendo estructurar esta parte en la investigación.

De los antecedentes de Santacruz (2011), Fernández (2011) y Acosta *et al.* (2010); se consideran la integración del ambiente informático Cabri, la implementación del paradigma metodológico de la *micro-ingeniería* y la Teoría de situaciones Didáctica.

De la investigación de Acosta *et al.* (2010) además de los aportes en torno a uso de Cabri se toman las variables micro-didácticas relacionadas con la construcción del concepto de simetría en los ambientes informáticos.

Del trabajo de Huapaya y Salas (2008) y Aroca (2007) se retoman los planteamientos que estructuran la propuesta de implementación en el aula, a partir de la incorporación de resultados de investigaciones en Etnomatemática a los planes de aula, que permiten visibilizar el conocimiento matemático de los pueblos ancestrales.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general.

Analizar las características de un *diseño de tareas*, que integran Cabri y representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para el aprendizaje de la simetría axial y el reconocimiento del pueblo escultor, con estudiantes de grado 5° de la IEG de Cali.

1.4.2 Objetivos específicos.

- Diseñar desde los referentes de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* una *secuencia de tareas* que integra AGD y representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para el aprendizaje de la *simetría axial*.

- Analizar la pertinencia de la articulación del *diseño de tareas* de los AGD y las *esculturas de San Agustín* para el *aprendizaje de la simetría axial* y el *reconocimiento del pueblo escultor*.
- Reconocer el campo de posibilidades y restricciones de *la complementariedad de recursos manipulativos y AGD* en el *aprendizaje de la simetría axial*.

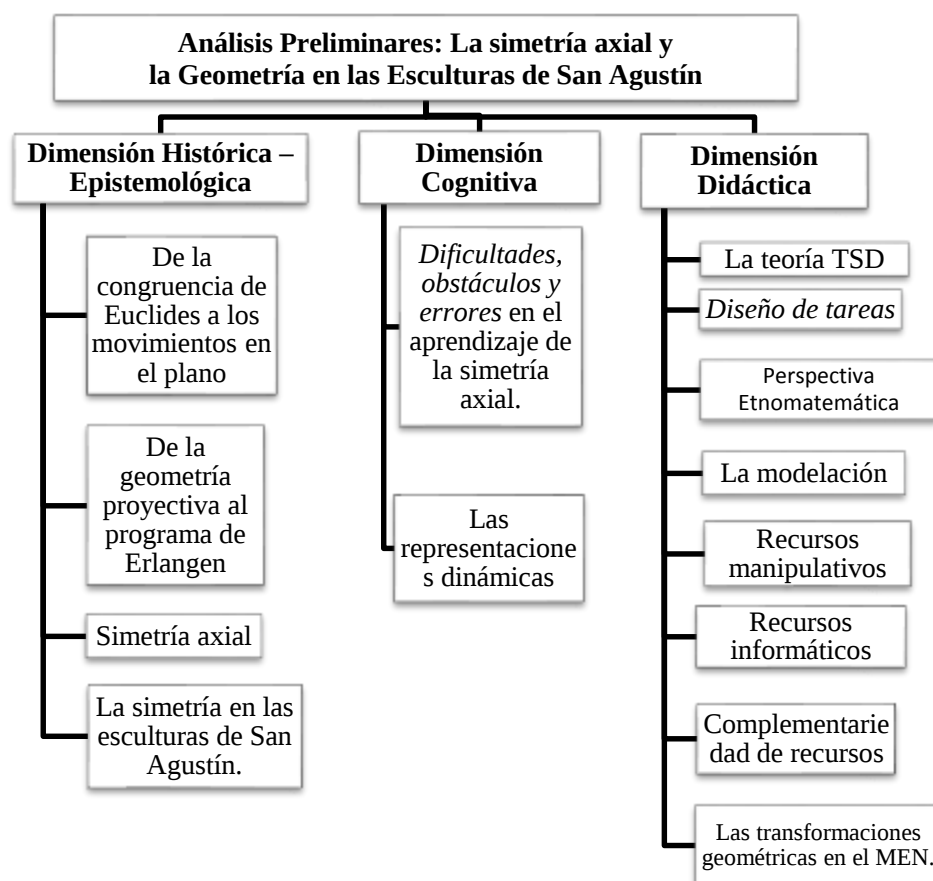
Capítulo 2.
La simetría axial y la Geometría en las Esculturas de San
Agustín

Capítulo 2

La Simetría Axial y la Geometría en las Esculturas de San Agustín

En este capítulo se presentan los *análisis preliminares* donde se definen los referentes teóricos que sustentan esta investigación, estos análisis corresponden a la primera fase del paradigma metodológico de la ingeniería didáctica (ID) a partir de la cual se estructuró esta investigación adoptando una de sus variaciones: la *micro-ingeniería*. (Artigue, 1995). En el Esquema 2 se sintetizan los *análisis preliminares*.

Esquema 2. Análisis Preliminares



En esta fase se definió el marco teórico y se establecieron los saberes didácticos relacionados con el tema de estudio. Siguiendo la estructura de la ID, estos análisis se abordaron a partir de las siguientes dimensiones: Dimensión Histórica – Epistemológica, Dimensión Cognitiva y Dimensión Didáctica.

En la Dimensión Histórica-Epistemológica se realizó un acercamiento a la evolución del concepto de simetría axial, partiendo de las relaciones de congruencia desde Euclides, pasando por la geometría proyectiva en el siglo XV y los postulados de Félix Klein en el programa de Erlangen, luego se define la noción de simetría axial a partir de las transformaciones isométricas y por último se muestra como la simetría axial está presente en el arte escultórico de la cultura prehispánica de San Agustín (Urbano, 2010).

En la Dimensión Cognitiva se presentan algunas características generales de la simetría axial a partir de los referentes curriculares del MEN, las *dificultades, errores y obstáculos* para el aprendizaje de la simetría axial y los procesos de modelación.

En la Dimensión Didáctica se presentan las características de la TSD, el *diseño de tareas*, los recursos manipulativos, los recursos informáticos y la complementariedad de recursos.

2.1 Dimensión Histórica – Epistemológica

La revisión sobre la evolución del concepto de simetría axial, tiene como propósito mostrar los diferentes momentos que permitieron la consolidación del mismo y establecer una relación con los procesos de aprendizaje de los estudiantes relacionando las etapas de la evolución de la noción de simetría axial con los sistemas de representación³: cuando se reconoce el concepto de simetría axial en la naturaleza, las construcciones de templos y esculturas se puede asociar con representaciones concretas. La aplicación del concepto en la geometría proyectiva de las pinturas del siglo XV se relaciona con las representaciones gráficas o esquemáticas. Finalmente cuando se define la función de la forma $f:R^2 \rightarrow R^2$ y las reglas que determinan la transformación de simetría axial estas se asocian con las representaciones abstractas.

Se buscó evidenciar que los procesos de aprendizaje y la evolución de los conceptos geométricos se construyen partiendo de las representaciones concretas y luego se pueden alcanzar los otros tipos de representaciones del concepto de simetría axial.

2.1.1 De la congruencia de Euclides a los movimientos en el plano.

La obra Euclidiana de “*Elementos*” de la Geometría Antigua es uno de los referentes históricos que permite hacer un rastreo a varios conceptos geométricos, sobre las transformaciones isométricas que por su definición conservan la congruencia de las figuras planas. En ésta obra, se presentan varias proposiciones matemáticas en las que se hace referencia a la congruencia entre figuras que se establecen a partir de la relación de igualdad que planteó Euclides en la cuarta noción común y la superposición de figuras. Las congruencias más conocidas en la obra Euclidiana están relacionadas con las demostraciones de dos triángulos congruentes siguiendo la relación entre Lado-Ángulo-Lado (LAL), Lado-Lado-Lado (LLL) y Ángulo-Lado-Ángulo (ALA) donde se define que las dos figuras son congruentes si se cumple una de estas tres condiciones (Vasco, 1992).

Euclides centró su trabajo en las propiedades y las relaciones entre los elementos que constituyen los cuerpos geométricos en el espacio, lo que en su momento le permitió realizar las demostraciones; al poder determinar que figuras geométricas en un mismo plano son congruentes si se lograba superponer una figura sobre la otra. Este mismo principio se puede observar en la demostración del teorema de Pitágoras⁴ proposición 42 Libro I.

³ Duval (1999). Semiosis y pensamiento humano.

⁴ En relación con las demostraciones de Euclides, Vasco (1992) expone que estas se hacían por prolongaciones y cortes para evitar mover las figuras.

2.1.2 De la Geometría Proyectiva al Programa de Erlangen.

En el siglo XV los aportes hechos a la geometría están ligados al desarrollo artístico en el manejo de la perspectiva, es así como Alberto Durero (1471-1528) en 1525 publicó su obra sobre geometría titulada *“Tratado sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas”* en la cual se exponen los elementos para el uso de medidas con regla y compás en la construcción de espirales basadas en la sección áurea, a este mismo geómetra se le debe la invención del compás de proporción áurea que es utilizado en su obra sobre la proporción del cuerpo humano (Bonell, 1999). Esto permitió observar como en el renacimiento algunos artistas utilizaban en sus obras el número áureo.

En la Edad Moderna Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) sintetizan la geometría con el álgebra, creando la geometría analítica. De acuerdo con Piaget y García (1982) “el plano cartesiano permite establecer construcciones geométricas a partir de puntos representados por parejas ordenadas, rectas y curvas por ecuaciones, en este sentido el estudio de los cuerpos geométricos se reduce al análisis de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes” (p.90).

El álgebra aporta al avance de la geometría a partir de la incorporación de los sistemas de transformaciones como método fundamental de la geometría. Cabe anotar que el concepto de transformación en geometría tiene su origen en la geometría proyectiva de Poncelet (1788- 1867), puesto que anteriormente se aplicaba “sin tener conciencia ni de su significación, ni de su alcance” (Piaget y García, 1982, p.103).

A pesar de que se habían estructurado las bases para los sistemas de transformaciones, es Félix Klein (1849-1925) quien determina la manera de llevar las transformaciones proyectivas a las estructuras de grupo, originando la formulación del Programa de Erlangen en 1872 que proporcionó un giro sobre la manera de entender la geometría, despertando el interés de los matemáticos por el estudio de los diferentes grupos de transformaciones, en especial por el grupo de las isometrías.

El programa describe la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen invariantes (sin cambios) bajo grupos de transformaciones. En resumen, la geometría puede clasificarse de acuerdo con este planteamiento de la siguiente manera:

- Isometrías: transformaciones de figuras planas que preservan las distancias y los ángulos (congruencia).
- Semejanzas: transformaciones de figuras planas donde se preserva la forma (semejanza).
- Afinidades: transformaciones de figuras planas donde se preserva el paralelismo.
- Proyectividades: transformaciones de figuras planas que preservan la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas.
- Topologías: transformaciones de figuras planas que preservan el cerramiento y la orientación” (De Villiers citado en Santacruz, 2011)

Desde este punto de vista, las isométricas son aquellas transformaciones de figuras planas que preservan las distancias y los ángulos, en las cuales se pueden constatar algunas invariantes presentes en el espacio geométrico, es decir, aquellos cuerpos o expresiones matemáticas que no cam-

bian sus magnitudes ni la forma, por lo que la figura inicial y la final son geoméricamente congruentes (Piaget y García 1982).

En el momento que se aborda el concepto de transformación se asume la existencia de movimientos en el espacio a partir de relaciones que transforman figuras en un plano a figuras en el mismo plano, lo que en términos de funciones estaría dado por $f: R^2 \rightarrow R^2$, en donde la figura original que se denomina *objeto* es un elemento de R^2 , f es la regla que describe el cambio y la figura que resulta después del cambio se denomina *imagen* que pertenece al codominio R^2 .

Una isometría es considerada una transformación congruente en la cual se conserva la longitud de manera que si P y P' y Q y Q' son dos pares de puntos correspondientes, determinan los segmentos correspondientes $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, por ejemplo: una rotación en torno a P es una isometría en la que P es un punto invariante. Toda isometría con un punto invariante es una rotación o una reflexión según sea directa u opuesta.

Si se obtiene una figura F' de otra figura F a través de una isometría (traslación, rotación, simetría central o axial) o de una composición de varias de ellas, se declara que las figuras F y F' son congruentes por lo tanto la transformación isométrica convierte la figura en otra que es ella misma.

La isometría es directa cuando conserva el sentido de la figura, como la rotación y la traslación, y es opuesta cuando invierte el sentido de la figura como la simetría axial y central. Se consideran dos tipos de congruencia: la congruencia directa que se presenta si dos figuras se hacen coincidir moviendo sólo una de ellas sin sacarla del plano donde se encuentra ubicada mediante un giro o una traslación y la congruencia opuesta, donde un par de figuras congruentes se pueden hacer coincidir mediante una reflexión o reflexión deslizante, en este orden de ideas los movimientos en el plano se pueden clasificar como opuestos y directos.

Cuando se analizan los avances de la geometría proyectiva en el programa de Erlangen, se encuentran varios aspectos que son relevantes para el diseño de la secuencia de tareas, partiendo de la influencia de la geometría proyectiva en la creación de obras de arte del siglo XV que permiten entender algunos elementos tallados en las esculturas y cómo a partir de la clasificación de los grupos de transformaciones de Félix Klein (1849-1925) permite entender de dónde surgen las transformaciones isométricas.

2.1.3 Simetría axial.

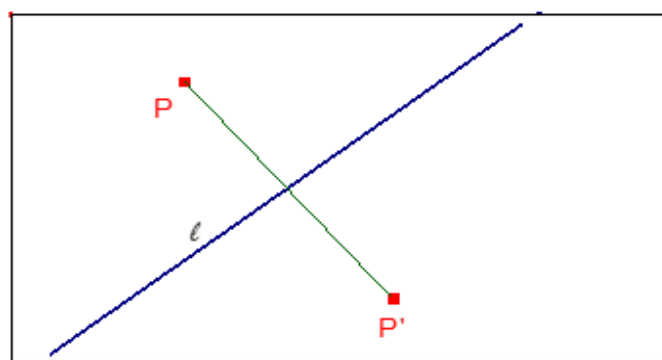
La simetría se considera como un elemento relevante dentro del aprendizaje de la geometría, que favorece la comprensión y el análisis de diversos problemas geoméricos teniendo en cuenta que muchas figuras poseen las propiedades de esta transformación.

Al realizar movimientos simétricos en el plano es posible llegar a las soluciones de algunos problemas, también se puede apreciar esta situación en los procesos que requieren de un equilibrio, en construcciones artísticas y de ingeniería. Al respecto Franchi y Hernández (2004) proponen que la simetría, trasciende el hecho meramente estético y presenta una dimensión de orden práctico que cataliza la atracción que ejerce sobre las personas, que son incontables las situaciones en las

que se ha hecho uso de la simetría, para conseguir explicar diversos fenómenos, para modelar otros o para realizar diseños de todo tipo.

Hay que tener en cuenta que existen varios tipos de simetría, pero en esta investigación se abordó la reflexión respecto a una recta o simetría axial que de acuerdo con Guerrero (2006) se define como una transformación geométrica en la que un punto P es transformado en un punto P' a partir de un eje de simetría l de tal manera que el segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje l y ambos puntos P y P' son equidistantes del eje. Desde el punto de vista estático, se dice que P y P' son axialmente simétricos si están sobre la misma perpendicular al eje l y son equidistantes de éste, ver figura 1.

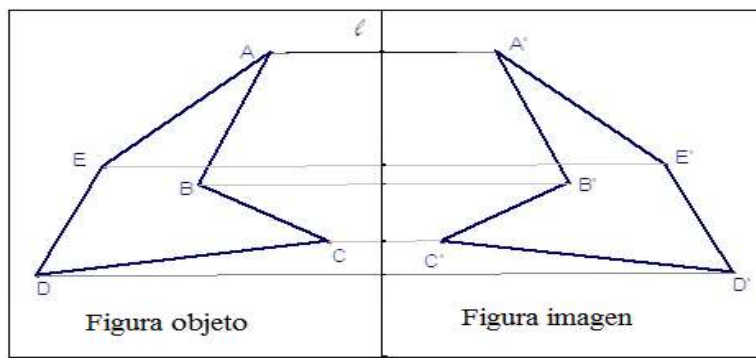
Figura 1. Simetría axial del punto p respecto a la recta l .



En el caso de dos figuras, son axialmente simétricas cuando cada uno de sus puntos son axialmente simétricos. En este caso es preciso tener en cuenta la metáfora del espejo que permite introducir los términos de objeto y su correspondiente *figura imagen* respecto al eje l , la simetría axial transforma una figura geométrica en otra idéntica.

La figura original se denomina *figura objeto*, cuyos puntos se denotan con letra mayúscula (A) y la figura que se obtiene al aplicar simetría axial se denomina *figura imagen*, cuyos puntos se denotan con la misma letra mayúscula con una comilla (A' que se lee A prima), como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Simetría axial de una figura respecto a una recta.



En la reflexión axial el eje simetría es la mediatriz de cada uno de los segmentos determinados por cada punto del objeto inicial O y su imagen O' . Matemáticamente se define la reflexión axial de un punto P en el plano R^2 respecto a una recta l , a partir de la función $F: R^2 \rightarrow R^2 / F(P)=P'$ sí y solo sí la recta l es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$; es decir que el segmento $\overline{PP'}$ perpendicular a l y la distancia de $d(P, l)$ es igual a la distancia $d(l, P')$, para todo P que pertenece a R^2 . Dada una recta l y un punto P , la función F transforma el punto P en un punto P' de tal manera que se verifican las siguientes propiedades:

- Si P pertenece al eje de simetría l se tiene que $F(P)=P$.
- Si P no pertenece al eje de simetría l se tiene que l es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

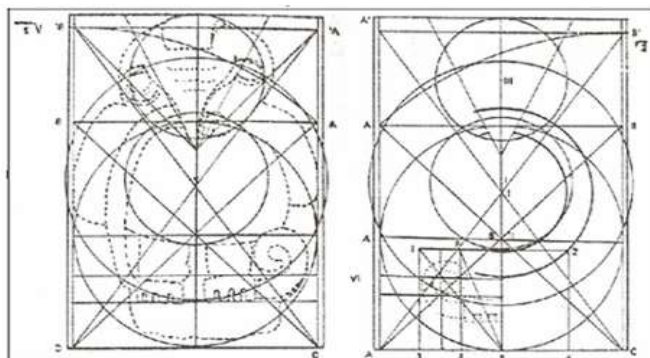
Estos elementos de la simetría axial son fundamentales para el diseño de la secuencia de tareas, puesto que a partir de estas definiciones se establecen la notación, los teoremas y las consignas registradas en la *Guía del estudiante*.

2.1.4 La simetría en el arte escultórico de San Agustín.

La cultura prehispánica que se conoce hoy con el nombre de San Agustín corresponde a un pueblo escultor que habitó las estribaciones del macizo colombiano al sur del departamento del Huila, cuyos vestigios arqueológicos datan del siglo III a. C. al siglo VII d. C. periodo que se conoce como Formativo en la cronología propuesta por Duque y Cubillos (1979).

Son pocos los estudios que se han realizado en torno a las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín, uno de ellos es el realizado por Rengifo (1966) en su libro “*La proporción armónica en la estatuaria agustiniana*”, donde analizó cinco esculturas entre ellas el Águila con serpiente⁵: En este monolito realizó una serie de trazos que muestran como cada detalle queda inscrito en circunferencias, también se establece que el contorno de la escultura se inscribe en un rectángulo Áureo y guarda una proporción con los demás elementos que la conforman; el águila sostiene una serpiente entre el pico y las garras, la talla de la cola de la serpiente está distribuida a través de una espiral aurea como se puede ver en la Figura 3.

Figura 3. Trazos en la escultura el Águila Mesita B



⁵ Escultura ubicada en la mesita B del Parque Arqueológico de San Agustín.

La investigación realizada por Urbano (2010) se llevó a cabo a partir de la modelación geométrica de 23 esculturas de la cultura de San Agustín, los procesos de modelación geométrica se realizaron colocando la fotografía frontal de la escultura como fondo de pantalla en el programa Cabri, sobre la fotografía se resaltaron los detalles de las esculturas y se verificó que estos detalles esculpido en los monolitos cumplen con las propiedades de las transformaciones isométricas, además se constató que en la elaboración de las esculturas se utilizaron figuras geométricas como elipse, circunferencias, rectángulos, triángulos equiláteros, entre otros.

Figura 4. Trazos en Cabri El Partero Mesita B



En el proceso de modelación de las representaciones geométricas en las esculturas se determinó que el pueblo escultor utilizó transformaciones geométricas para el diseño y elaboración de las esculturas de forma intencionada. Una de las transformaciones geométricas más empleadas en el diseño y construcción de las esculturas corresponde a la simetría axial que se encuentra presente en todas las esculturas analizadas, por ejemplo en la escultura El Partero,⁶ al realizar los trazos en Cabri se encontraron detalles simétricos respecto a un eje vertical y horizontal como se muestra en la Figura 4 donde se puede observar el manejo del plano subdividido en cuatro cuadrantes donde el artista esculpe un cuadrante y lo refleja sucesivamente en los otros tres, lo que da origen a una simetría rotacional de orden cuatro o una reflexión bisimétrica, verificándose el manejo de ejes de simetría perpendiculares por el pueblo escultor.

En los procesos de modelación geométrica de la escultura Ojos con Forma de Cabeza de Águila⁷, se observó el trazo de una recta vertical en la parte central de la escultura que según lo verificado en Cabri corresponde al eje de simetría. Esta es una de las pocas esculturas en las que por algún motivo el escultor no difuminó completamente el trazo de esta recta, dejando una evidencia del manejo de ejes verticales u horizontales en la planeación y elaboración de las esculturas

⁶ El partero u obispo es una escultura ubicada en la mesita B del Parque Arqueológico de San Agustín. las mesitas corresponden a los centros funerarios de los personajes de más alto rango del grupo escultor.

⁷ La escultura Ojos con Forma de Cabeza de Águila se encuentra en la mesita C del Parque Arqueológico de San

como se puede ver en la Figura 5. Además, en esta escultura se observa que el artista talló los ojos de la escultura en forma de cabeza de águila y al aplicar simetría axial respecto al eje central, esta se refleja al otro semiplano dejando como resultado dos águilas que se observan una frente a otra simétricamente.

Figura 5. Trazos en Cabri, Escultura Mesita C.



Al modelar los detalles de las esculturas en Cabri se constató que estas representaciones cumplen con las propiedades geométricas del círculo, la elipse, rectángulo, triángulos equiláteros, de igual manera se verificó la rigurosidad con que utilizaron la transformación geométrica de simetría axial lo cual permite concluir que además de trazar el eje central en las esculturas tenían instrumentos para simetrizar los detalles plasmados en la piedra. Este conocimiento les permitió crear las esculturas con la proporción armónica que los artistas reconocen en ellas y la precisión en sus trazos (Urbano, 2010).

En cada una de las tareas diseñadas en la presente investigación y las construcciones que los estudiantes manipularon se utilizaron fotografías de las esculturas de San Agustín como fondo de pantalla en Cabri, para modelar los detalles geométricos presentes en las esculturas e identificar la aplicación de la simetría axial.

2.2 Dimensión Cognitiva

En la dimensión cognitiva se analizaron las *dificultades*, *errores* y *obstáculos* que se presentan en el aprendizaje de la simetría axial y se realizó una aproximación a las representaciones dinámicas.

2.2.1 Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la simetría axial.

Para hacer referencia a las *dificultades*, *obstáculos* y *errores* en el aprendizaje de la simetría axial, es necesario definir cada uno de estos criterios:

Las *dificultades* se consideran como el grado de incapacidad para resolver una tarea o un tema

específico. Estas *dificultades* pueden ser altas o bajas en el desarrollo de un determinado tema y de orígenes diversos en el aprendizaje de las matemáticas como: la complejidad de los objetos, la falta de preconceptos, el desarrollo cognitivo de los estudiantes o la falta de motivación hacia las matemáticas.

De acuerdo con Moreno (1998), las *dificultades* en relación con el concepto de simetría axial o reflexión aparecen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen, la falta de equidistancia entre dos puntos correspondientes, la falta de perpendicularidad entre el segmento que une dos puntos correspondientes y el eje de simetría, así como la combinación de los *errores* anteriores. Por ejemplo, una dificultad se puede presentar cuando se le pide a un estudiante que realice la reflexión de una figura y no reconoce el concepto de perpendicularidad.

Un *obstáculo* es un error que no se origina por la ausencia de conocimiento, sino que surge cuando se emplea un conocimiento que es verdadero en algunas situaciones, pero no en otras y se aplica indebidamente (Godino, Batanero y Font, 2003, p.75), en el mismo sentido Moreno (1998) considera que una interpretación reducida o deformada de la noción de simetría, surge cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual, por ejemplo cuando: la figura tiene imágenes paralelas a la figura objeto aunque este no sea paralelo al eje; el desplazamiento de la figura vertical u horizontal, aunque el eje de simetría este inclinado y la construcción de la *figura imagen* sobre la prolongación de la figura objeto en alguna dirección específica (p.151).

Los *errores* en el aprendizaje de las matemáticas se presentan cuando el estudiante resuelve actividades que no son válidas desde la institucionalidad escolar matemática, se considera que reconocer un error es una posibilidad que le permite al estudiante afianzar y consolidar su conocimiento en el contexto escolar de los contenidos matemáticos (Godino *et al.*, 2003, p.75). Por ejemplo, en la transformación geométrica de simetría axial se presenta cuando los estudiantes deben realizar la reflexión a partir de un eje de simetría oblicuo y lo toman como si fuera vertical u horizontal.

De acuerdo con Moreno (1998, p. 151) y Godino *et al.* (2003, p.76) estos *errores*, *dificultades* u obstáculos en el aprendizaje de la simetría se presentan por una enseñanza donde predominan los ejes verticales u horizontales, quizás debido a la abundancia de este tipo de ejes en situaciones de la vida real (espejos, puertas, edificios, etc.), de igual manera los profesores utilizan actividades rutinarias en los que predominan este tipo de características o cuando los materiales que ha escogido, como los libros de texto; no son claros y proponen problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, con *errores* de edición, etc.

Los *errores* en el aprendizaje de las matemáticas, han promovido diversas investigaciones que los clasifican de acuerdo a sus diferentes tipologías. Brousseau (citado en Franchi y Hernández, 2004, p.66), presenta una tipología de *errores* donde el profesor los clasifica en niveles de la siguiente manera:

- Error a un nivel práctico: cuando el profesor considera que son *errores* de cálculo.
- Error en la tarea: cuando el profesor los atribuye al descuido.
- Error de técnica: cuando el profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido.

- Error de tecnología: cuando el profesor critica la elección de la técnica.
- Error de nivel teórico: cuando el profesor incrimina los conocimientos teóricos del alumno que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas.

Sobre las *dificultades* del aprendizaje de las isometrías en el plano, estas se relacionan con los problemas que se pueden presentar para realizar correctamente movimiento en el plano, en los que se evidencian diferentes situaciones, como es la identificación del movimiento, la dirección y la distancia entre el objeto y su imagen; en el caso de la simetría axial estas *dificultades* se centran en la posición del eje de simetría cuando este no corresponde a un eje horizontal o vertical.

Un *obstáculo* epistemológico que se presenta con frecuencia corresponde a la preferencia de los estudiantes por las figuras simétricas, las cuales originan *errores* al momento de construir gráficos o esquemas que no corresponden con el enunciado del problema planteado. En el uso de los AGD se presenta un error frecuente cuando los estudiantes para resolver un problema geométrico utilizan una herramienta inadecuada (Bohorquez, Boscán, Hernández, Salcedo y Moran, 2009, p.3). Un ejemplo en esta situación se presenta cuando se solicita al estudiante representar el desplazamiento de un carro en una misma dirección y en Cabri al momento de usar la herramienta traslación utiliza simetría.

La complejidad de la figura que se debe simetrizar también aumenta la probabilidad de cometer *errores*, cuando se utilizan cuadrículas éstas favorecen la simetrización si los ejes son verticales u horizontales, en los demás casos la cuadrícula se convierte en un distractor; de cualquier manera, siempre es más fácil realizar la simetría si los ejes son horizontales o verticales (Moreno, 1998).

Fielker (citado en Moreno, 1998) propone algunas actividades que permiten reconocer y prevenir los *errores*. Una de ellas es identificar el objeto geométrico con la representación construida, para evitarlo se debe trazar la mediatriz de un segmento mediante regla y compas o plegado. La asignación de propiedades indebidas a un objeto construido es una dificultad que se presenta debido a que las construcciones se realizan sin los recursos apropiados (regla, transportador, compas, etc.) o estos, son mal utilizados. Un uso adecuado del instrumento de geometría o el trabajo en AGD ayudarían a resolver estos *obstáculos*.

Al reconocer los *obstáculos*, *dificultades* y *errores* que presenta el aprendizaje de las matemáticas, es posible establecer estrategias para superarlos; en el diseño de la secuencia de tareas y los análisis *a priori* se tuvo en cuenta estas situaciones para anticiparse y tratar de evitarlos.

2.2.2 Las representaciones dinámicas en los AGD.

En los lineamientos curriculares se abordan las transformaciones geométricas a partir del movimiento, reconociendo que inicialmente solo se estudiaba como el cambio de una figura de un lugar a otro, pero que últimamente ha recuperado su carácter de dinámica. Al respecto MEN (1998) propone que “El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo (...). Esta propuesta intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos” (p.40).

Las representaciones geométricas en los AGD propician la exploración de los diferentes sistemas de representación del objeto matemático (Duval, 1999); la integración de Cabri a las actividades en el aula permite al estudiante, a través de la manipulación de las herramientas del programa y la observación de los cambios en tiempo real, identificar las características del objeto de estudio, validar propiedades, construir conocimiento y formalizar sus aprendizajes.

En los ambientes informáticos una de las herramientas más usadas es el *arrastre* que permite modificar un objeto en la vista gráfica de manera que una figura pueda convertirse en otra para identificar o validar una característica de un objeto (Rabardel, 2011). En los fenómenos asociados al arrastre se debe tener en cuenta las características de la construcción para determinar si soportan el arrastre o no. Laborde (2005) identifica dos tipos de construcciones:

- Las *construcciones robustas*, son *construcciones de figuras geométricas* hechas en un AGD las cuales al ser arrastradas conservan sus propiedades.
- las *construcciones blandas o suaves (soft)*, las construcciones geométricas de estas figuras no satisfacen todas las propiedades. Éstas, por lo general, se hacen *a ojo*, sin aludir a la teoría y son invalidadas por el modo de arrastre dado que se hace visible que algunas de las propiedades o elementos no permanecen invariantes cuando se arrastra la figura.

De acuerdo con las características del ambiente informático Fernández (2011), considera que:

El arrastre permite problematizar la percepción de los hechos geométricos en un AGD, en la acción de manipular directamente los puntos básicos de una construcción. El trabajo con el AGD va más allá de la construcción de un dibujo, lo que se pretende entonces es trabajar con una categoría de dibujos, cada uno de los cuales es un caso de una misma figura geométrica. Al mismo tiempo el ambiente, proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla (p.87).

En la manipulación de los objetos matemáticos en la interfaz del AGD y de acuerdo a las herramientas se pueden simular acciones reales sobre los objetos como cogerlos y arrastrarlos en diferentes direcciones conforme a la conveniencia del sujeto. Se debe tener en cuenta que muchas de las actividades y acciones que se definen para el trabajo en un ambiente informático, en particular, no se cumplen en otro, algunas situaciones solo tienen sentido en ese *micro-mundo* informático. Al respecto Moreno (2001) considera que su mayor impacto es de carácter epistemológico, donde se ha generado un nuevo realismo matemático, que se puede asociar con la geometría dinámica, donde sólo en ese programa o Interfaz funcionan y tienen sentido determinadas construcciones o representaciones.

En esta investigación en el diseño de la Tarea 3 la mayoría de las construcciones se realizan a partir de la herramienta “polígono” las cuales soportan el arrastre si se cogen de un lado del polígono, cuando se arrastran desde un vértice la forma se altera, pero las propiedades del polígono se conservan, por lo tanto estas construcciones se consideran robustas.

2.3 Dimensión Didáctica

En este apartado se presentan los conceptos asociados a la TSD que orienta la puesta en acto del diseño. Se propone el diseño de tareas como el instrumento que promueve el aprendizaje de la noción de simetría axial desde una perspectiva etnomatemática a partir de la visualización de las representaciones geométricas modeladas en las esculturas y los recursos manipulativos como una alternativa para que los estudiantes aborden el concepto de simetría axial desde lo concreto para llegar a lo abstracto. Se realiza un acercamiento al enfoque instrumental desde el papel del docente, la orquestación instrumental y el AGD Cabri. Finalmente, se exponen las características de las transformaciones geométricas en los referentes curriculares del MEN.

2.3.1 La Teoría de las Situaciones Didácticas como referente para el diseño.

A continuación, se realiza un acercamiento a la TSD que orienta el diseño de la secuencia de tareas, esta teoría propuesta por Brousseau (2007) busca estudiar, modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que se presentan cuando el profesor plantea enseñar un saber a sus estudiantes. La TSD está sustentada en el modelo pedagógico constructivista, siguiendo el enfoque piagetiano del aprendizaje por adaptación, donde el sujeto adquiere un conocimiento⁸ a partir de las interacciones con el *medio* sin la intrusión directa de un profesor. De acuerdo con Brousseau (2007):

El alumno aprende adaptándose a un *medio* que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrio, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (p. 30)

En la TSD la *situación didáctica* se refiere al conjunto de interrelaciones entre los elementos del sistema didáctico, de acuerdo con Brousseau (2007, p.49) esta situación se considera como el "entorno del alumno, que incluye todo lo que coopera específicamente en el componente matemático de su formación". En este sentido, una interacción se vuelve didáctica cuando los sujetos tienen la intención de modificar el sistema de conocimientos de otro. En la relación del profesor y el estudiante, el estudiante es el sujeto que desea aprender y el *profesor* quien guía al estudiante desde su investidura a través del *medio* y la situación que planificó.

En esta teoría el *medio* o entorno se considera como un conjunto de condiciones exteriores en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano. A partir de este se determinan los aprendizajes que debe desarrollar el estudiante para adaptarse al entorno, además "el *medio* no tiene ninguna intención didáctica" (Brousseau, 1986).

Un concepto importante en la TSD corresponde a las situaciones a-didácticas: donde el profesor prepara un problema o una secuencia de tareas en la que se promueve el aprendizaje por adaptación, así como unas condiciones a través de un *medio* en los cuales el estudiante se acerca a la solución de la situación problema, partiendo de sus pre saberes sin las indicaciones del profesor

⁸ La TSD distingue Saber y Conocimiento. El Conocimiento es una experiencia personal, mientras que el Saber es institucional, es decir que recibe la evaluación de una comunidad de sabios, quienes deciden lo que es el saber.

sobre los procedimientos que debe utilizar.

Brousseau (1986) distingue tres tipos de situación a-didáctica, de: *acción* (en la que el conocimiento está implícito en las acciones de los sujetos), *formulación* (donde los sujetos explicitan verbalmente su pensamiento y sus estrategias) y de *demostración* (en la cual los sujetos a partir de su conocimiento argumentan a favor o en contra de una afirmación).

Según Chamorro (2003) para que una situación sea *a-didáctica*, debe cumplir las siguientes condiciones:

1. El alumno debe poder entrever una respuesta al problema planteado (debe tener los conocimientos que le permiten comprender cuál es el desafío de la situación).
2. La estrategia de base debe mostrarse rápidamente como insuficiente (de lo contrario no se produciría una evolución hacia la estrategia óptima que se busca).
3. Debe existir un *medio* de validación de las estrategias (la propia situación, sin la intervención del maestro, debe decir al alumno si su estrategia es o no válida para resolver el problema propuesto).
4. Debe existir incertidumbre, por parte del alumno, en las decisiones a tomar (el alumno no sabe de antemano si el procedimiento que va a usar dará resultado, tiene que probarlo para saberlo).
5. El *medio* debe permitir retroacciones (la información sobre el resultado de sus acciones debe venir de la propia situación, no del profesor).
6. La situación debe ser repetible (debe poder repetirse varias veces sin que se desvele cuál es el procedimiento adecuado, de lo contrario el alumno estaría obligado a aprender a la primera, no habría espacio para el error).
7. El conocimiento buscado debe aparecer como el necesario para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima, estrategia ganadora. (p.74)

2.3.1.1 El contrato didáctico y las interacciones o fases.

El contrato didáctico se establece alrededor de dos hechos esenciales: el maestro debe proponer al estudiante las situaciones apropiadas para que este al trabajar con ellas aprenda el conocimiento que se le quiere enseñar y el estudiante debe asumir su responsabilidad de trabajar en la propuesta que le realiza su profesor.

Entre los aspectos que se deben tener en cuenta en el contrato didáctico está la interacción que el docente tiene con sus estudiantes y el *medio*, la cual depende del tipo de tareas asignadas y del propósito didáctico que se persigue. En estos contratos se distinguen cuatro tipos de interacciones o fases: de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 2000).

Fase de acción: en esta fase el estudiante soluciona una situación problemática donde el docente determina o limita sus acciones mediante reglas o consignas, los estudiantes deben establecer cuál es la estrategia más oportuna para dar solución al problema planteado. Se busca que el estudiante además de realizar las actividades propuestas juzgue los resultados de su acción, obligándolo a mejorar y adaptar su modelo conforme a la retroalimentación constante de la situación. En esta

interacción el estudiante exhibe una comprensión instrumental de la situación haciendo diversas representaciones sobre el saber puesto en juego.

Fase de formulación: en esta fase los estudiantes deben ser capaces de comunicar la solución del problema por medio de un lenguaje oral o escrito asequible para sus compañeros. El docente puede ser un interlocutor con quien el estudiante intercambie información; de esta forma se manifiesta un saber implícito expresado en un enunciado, propiedad, relación o teorema que permite dar cuenta de la comprensión intuitiva de la situación planteada.

Fase de validación: en esta etapa el estudiante ha interactuado con el *medio* de forma individual o grupal, a partir de esta experiencia debe justificar la estrategia que ha puesto en marcha para resolver el problema y ser capaz de demostrar mediante pruebas que su solución al problema es correcta y funcional. En estas situaciones el estudiante valida las acciones y argumentos expresados previamente, reflejando el razonamiento didáctico logrado y contribuyendo a la construcción paulatina de nuevos saberes, por este motivo se encuentra fuertemente vinculada y casi adherida a las situaciones de formulación.

Fase de institucionalización del saber: En esta situación “se fija convencional y explícitamente el estatuto cognitivo de un conocimiento o de un saber”. El profesor busca establecer la correspondencia entre las respuestas personales y empíricas del estudiante y a partir de ello el saber escolar a enseñar. Se hace una institucionalización de los conocimientos que inicialmente aparecieron como respuesta al *medio* de forma explícita con un lenguaje técnico y riguroso basado en teoremas, definiciones y procedimientos algorítmicos.

Las *devoluciones* del profesor corresponden a las situaciones donde el estudiante presenta *dificultades* para resolver la tarea e indaga por los conceptos o acciones que debe realizar. El docente se limitará a motivar al estudiante para que continúe explorando el *medio* y pueda él solo identificar las alternativas de solución. Brousseau (2007) sostiene que: “La *devolución* es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a didáctico) o de un problema y acepta el mismo las consecuencias de esta transferencia”. (p.39)

Cuando los interrogantes de los estudiantes sean sobre el manejo del AGD el docente tendrá la libertad de sugerir, explicar u orientarlo sobre las herramientas, teniendo en cuenta que el *medio* no tiene ninguna intención didáctica (Brousseau, 1986).

2.3.2 Diseño de tareas.

El diseño y análisis de tareas en Educación Matemática ha despertado el interés de la comunidad educativa en los últimos años y como lo manifiesta Godino (2013, p.1-2) se ve reflejado en las publicaciones que se hacen al respecto y los temas centrales propuestos en los congresos internacionales. De igual manera, se aclara que no se puede considerar como algo novedoso ya que el diseño y análisis de tareas viene siendo central en diversos enfoques teóricos como la TSD (Brousseau, 1986), el enfoque metodológico de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995) entre otros. También se plantea que el *diseño de tareas* debe entenderse como lo proponen Watson & Mason (2007):

Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo cómo alteran la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimulados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea (p.206).

Se considera que las tareas no pueden ser actividades sueltas, deben estar ligadas a un contexto que proporcione alternativas de solución a partir de sus conocimientos y la exploración en un *medio*. Al respecto Godino (2013) considera que:

Las tareas están destinadas a ser usadas por un profesor usualmente en un contexto de aula, de manera que es necesario tener en cuenta una secuencia de momentos didácticos. La tarea puede ser resuelta por el profesor y mostrada a los estudiantes para que aprendan la manera de resolver ese tipo de tareas; o por el contrario la tarea es presentada para que los estudiantes la asuman como propia, exploren posibles soluciones, las formulen, comuniquen y validen (p. 12).

En esta investigación para el diseño de la secuencia se tuvieron en cuenta varios criterios que se involucran en las tareas: problemas, construcciones, aplicaciones, ejercicios y los recursos que los docentes ponen a disposición de los estudiantes como *medio* en el que interactúa y construyen el conocimiento del concepto matemático. De acuerdo con Godino et al. (2003) estas tareas:

- Proporcionan el estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas, y sus aplicaciones a contextos del mundo real.
- Pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas en el contexto de su utilidad.
- Expresan lo que son las matemáticas y lo que implica la actividad matemática. Pueden dar una visión de las matemáticas como un dominio de indagación valioso y atractivo.
- Requieren que los estudiantes razonen y comuniquen matemáticamente y promueven su capacidad para resolver problemas y para hacer conexiones (p.79).

En relación con las consignas de la secuencia de tareas se debe tener en cuenta varios criterios para analizar la calidad y la pertinencia, que promuevan la argumentación, modelización, comunicación y resolución. Pochulu *et al.* (2013) proponen los siguientes criterios:

- Que la tarea no sea cerrada, es decir, que admita más de un camino posible de resolución.
- Que la tarea no brinde sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.
- Que la tarea no se encuentre en extremo pautada. La razón es que si se pauta mucho con preguntas no se promueven procesos relevantes como la formulación de conjeturas, validación, etc. Es preferible que tenga pocas preguntas (las más generales) y que los alumnos hagan un proceso de análisis que los lleve a resolver cuestiones intermedias.
- Que la tarea requiera justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan. La razón es que se trata de promover un proceso matemático relevante como es el de argumentación.
- Si se propone una tarea en un contexto real, procurar que para resolverla este contexto sea significativo y relevante. Dicho de otra manera, evitar hacer preguntas en las que el contexto sea un “decorado” intrascendente.

- En la medida de lo posible evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de la solución de la tarea.
- Que el uso de nuevos recursos sea necesario para resolver la tarea. Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles.
- Que lo solicitado con la tarea sea algo matemático y no referido al uso de software. Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos (p.5-6).

El diseño de la secuencia de tareas propuesta en este trabajo integra el ambiente informático Cabri, teniendo en cuenta la distinción de cuatro clases de tareas propuesta por Laborde (2001):

- De Tipo I: construcciones.
- Tipo II: descripción verbal.
- Tipo III: Cajas negras o macros.
- Tipo IV: Enunciados de teoremas y su validación.

Un factor esencial en el *diseño de tareas* está determinado por la gestión del profesor en el aula de clase. Godino *et al.* (2003, p.69) sostienen que “el profesor es el encargado de seleccionar y desarrollar tareas valiosas y materiales que creen oportunidades para que los estudiantes desarrollen su comprensión matemática, competencias, intereses y disposiciones” y Watson & Mason (2007) proponen que el profesor “dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimulados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea”.

El *diseño de tareas* que se desarrolló en esta investigación está enmarcado en la secuencia didáctica para la enseñanza de las transformaciones isométricas propuestas por Urbano (2009), que integra los AGD, los recursos manipulativos, las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín, los criterios establecidos por Godino *et al.* (2003) y Pochulu *et al.* (2013) y los tipos de tareas propuestos por Laborde (2001). Este diseño buscó que los estudiantes reconozcan el concepto en los diferentes sistemas de representación y su aplicación en un contexto artístico.

2.3.3 Perspectiva Etnomatemática

En el campo de la Educación Matemática se han generado espacios que permiten el reconocimiento de otras formas y saberes matemáticos respondiendo a las necesidades de grupos humanos particulares que en su cultura han desarrollado estructuras matemáticas propias o al saber matemático de uso cotidiano alcanzado por comunidades indígenas. De igual manera, también se reconoce el desarrollo matemático logrado por algunos pueblos desaparecidos en cuyos vestigios arqueológicos se evidencia el uso de conceptos matemáticos. Estos espacios se reconocen en el marco de la Etnomatemática que de acuerdo con su precursor D'Ambrosio (1985) se concibe como el estudio de las convenciones particulares que diferentes grupos culturales o étnicos usan para matematizar su medio ambiente.

En los últimos años la Etnomatemática se ha considerado una herramienta que proporciona elementos que permiten reivindicar saberes matemáticos locales, valorar y visibilizar el conocimiento matemático del colonizado frente al del colonizador y legitimar saberes matemáticos desde una dimensión política, sin generar ostracismo toda vez que expone que los procesos de globalización y de oportunidades para que los estudiantes continúen sus estudios superiores, no es beneficioso en algunas comunidades étnicas únicamente enseñar las matemáticas de acuerdo a sus propias estructuras, pero que sí se puede hacer una puesta política donde los conocimientos ancestrales sean tenidos en cuenta en el currículo al momento de enseñar las matemáticas occidentales para visibilizar estos saberes. Al respecto D'Ambrosio (citado en Blanco y Oliveras 2016, p.113) plantea que:

El aporte de la Etnomatemática a América latina es principalmente político, puesto que: Si se reconoce y valora el carácter histórico, social y humano del conocimiento matemático hace posible hablar de equidad, de currículos propios, de diversas formas de legitimar el conocimiento, de inclusión social, de diversidad cultural, de otras historias de las matemáticas, al lado de la historia oficialista.

Específicamente en esta propuesta el enfoque etnomatemático busca visibilizar los saberes matemáticos que alcanzo el pueblo escultor de San Agustín, utilizando las imágenes de sus esculturas en la secuencia de tareas para la enseñanza de la simetría axial, teniendo en cuenta que en los detalles que las conforman se identificaron formas asociadas a figuras geométricas y movimientos en el plano que responden a las propiedades de las transformaciones geométricas.

2.3.4 Modelación.

La modelación se considera como la representación simplificada de un suceso de forma esquemática, gráfica o por medio de símbolos aritméticos y algebraicos que permiten interpretar, formular y resolver los problemas. MEN (1998) expresa que:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles (p. 80).

En este referente curricular se aclara que cuando se habla de modelación o de matematización de una situación problema, estas dos expresiones se pueden asumir como sinónimos.

Los EBC (MEN, 2006), proponen que en la educación básica la modelación se entienda como:

La simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación (p.53).

Puede considerarse que cuando un estudiante aprende a generalizar y a modelar situaciones está desarrollando pensamiento matemático. En los trabajos de modelación que utilizan ambientes informáticos, se ha generado una discusión que sostiene que la geometría tiene su propia realidad y la geometría dinámica crea nuevas realidades en cada micro mundo informático, esta discusión continúa siendo objeto de estudio.

Según Oldknow (2004, p.2) “la modelación en geometría corresponde a las partes componentes de un sistema que se representan con entidades geométricas como líneas, polígonos o circunferencias”. En su trabajo realizó construcciones geométricas a partir de imágenes colocadas como fondo de pantalla en AGD, afirmando que estas pueden ser de “geometría pura” como encontrar el centro y un arco de círculo que se aproxime al arco de un puente; “geometría de las transformaciones” como la investigación de las simetrías en una hoja de un árbol o la rotación que se encuentran en las ruedas del automóvil o de “geometría analítica” como graficar una función cuadrática para ajustarse al chorro de una fuente de agua.

Zapata (2014), presenta una investigación donde analiza partes de las plantas ornamentales a partir de la modelación usando ambientes informáticos donde los estudiantes “deben estudiar un problema espacial como es el estudio de una forma para luego describirla por medio de un modelo geométrico, el software sería una herramienta que posibilita el estudio y un *medio* que permitiría facilitar la obtención del modelo” y propone que:

La modelación en geometría dinámica está ligada a la representación gráfica en un software, el cual permite la utilización de los objetos geométricos, sus operaciones y sus relaciones además de la obtención de un modelo geométrico que permita representar la forma y el movimiento de un objeto matemático o de un objeto concreto, así como también la descripción geométrica de un fenómeno (p.62 y 63).

Laborde (1997) hace referencia a los procesos de modelación en el ambiente informático Cabri y describe la relación entre el dibujo y la geometría señalando que:

La geometría puede ser considerada como el resultado de una modelización del dibujo, y que así puede servir de instrumento de producción y de control del dibujo, o incluso de predicción. Pero, inversamente, el dibujo en geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico” (p.36).

Teniendo como referencia las anteriores apreciaciones, en el presente trabajo que integra AGD, la modelación geométrica corresponde a la identificación de objetos geométricos presentes en los detalles de las esculturas de San Agustín, que cumplen con las propiedades de figuras geométricas donde a partir de la utilización de las herramientas del ambiente informático se puede verificar la aplicación de transformaciones isométricas en el plano.

2.3.5 Recursos manipulativos.

El uso de material concreto para la enseñanza de las matemáticas ha puesto en evidencia la importancia de reconocer los conceptos matemáticos desde las representaciones concretas para llegar a lo abstracto, pasando por las representaciones gráficas. De esta manera las matemáticas se

acercan al mundo real de los sentidos, donde el estudiante construye los conceptos matemáticos a partir de su propia experiencia. Alsina y Planas (2008), plantean que para los niños la manipulación de materiales además de ser una manera divertida de acceder al conocimiento, promueve la autonomía de los aprendices, es una forma más eficaz de aprender (esto no implica que sea más rápida) y las intervenciones del docente se restringen a los momentos claves del aprendizaje.

Los recursos manipulativos son aquellos elementos o artefactos con los cuales los estudiantes tienen contacto directo a través sus sentidos como apreciar su textura, el olor, el peso y otras características de los materiales. Igualmente, pueden realizar acciones sobre ellos como cambiarlos de posición, lugar, doblarlos, agruparlos, arrugarlos, combinarlos, rayarlos o pintarlos.

Valenzuela (2012), define los recursos manipulativos o manipulables como: “Todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones” (p.24).

De acuerdo con los LCM, se propone que el aprendizaje de las transformaciones se debe abordar inicialmente a partir del uso de recursos concretos. Vasco (citado en MEN, 1998, p.40) sostiene que:

(...) una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos.

2.3.6 Recurso Informático

En el campo de la educación desde finales del siglo XX se está hablando de la integración de nuevas tecnologías, lo que dio origen a la sigla NTIC y en otros casos TICs para hacer alusión a su carácter de plural. Actualmente, se nombran Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) con independencia de cualquier característica temporal o innovadora.

En el campo de investigación en Didácticas de la Matemática son numerosos los trabajos de integración de AGD a las clases, en su mayoría coinciden en afirmar que estos recursos informáticos generan otras posibilidades de acceder al conocimiento, dinamizan los procesos de aprendizaje y mejoran las competencias en matemáticas. Al respecto Gamboa (2007), destaca la importancia del uso de la tecnología digital como:

Un *medio* que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes no podría desarrollar por la inversión de tiempo que se debe hacer para resolver ecuaciones y operaciones aritméticas limitando el espacio de la reflexión y el análisis cruciales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemáticas. (p.9)

En los LCM se afirma que “el uso de los computadores en la Educación Matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra” (MEN, 1998, p.18). Además, aseguran que es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes.

2.3.6.1 Orquestación instrumental.

Garzón y Vega (2013), proponen la orquestación como un macro proceso en un sentido lo suficientemente amplio que permite aunar la integración de Tecnologías digitales y de cualquier otro artefacto en las prácticas del aula, en relación con la enseñanza en acto, las decisiones didácticas del profesor en su práctica de enseñanza y sus habilidades discursivas en el contexto de clase.

Son muchos los autores que ponen de manifiesto que el docente es quien debe propiciar y optimizar el uso de los recursos tecnológicos en el aula de clase y fuera de ella; la metáfora de la orquestación instrumental cobra sentido cuando pone al docente como el director de la orquesta, responsable del diseño de las actividades y la orientación que debe dar al estudiante. Trouche (2004) indica que una orquestación didáctica se fundamenta en dos elementos:

- La configuración didáctica que corresponde a la configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella.
- El modo de explotación que es la manera como el profesor decide explotarla para beneficio de sus intenciones didácticas, incluye la forma en que se trabaja una tarea, la función de los artefactos sobre los esquemas y técnicas a ser desarrollados por los estudiantes.

Frente a la masificación de los diferentes recursos informáticos para la enseñanza y su integración en el salón de clases, “exige que sea el propio profesor de matemáticas quien introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la computadora” (Gamboa, 2007, p.15).

Teniendo en cuenta las anteriores apreciaciones, el docente es el responsable de gestionar los procesos para integrar los recursos informáticos que tiene a su disposición, tanto en la integración de AGD al aula de clase como en el *diseño de tareas* que le permita aprovechar las ventajas que ofrecen estos recursos para fortalecer los aprendizajes de los estudiantes.

2.3.6.2 Génesis instrumental

En la integración de TIC en Educación Matemática, uno de los investigadores más referenciados es Rabardel (2011), quien conceptualiza estos procesos de la siguiente manera:

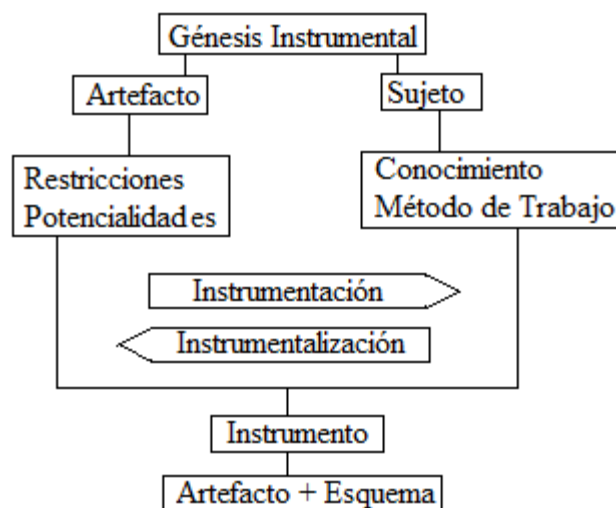
El *sujeto* corresponde a un individuo o grupo de individuos que realizan una acción sobre un *artefacto* o cosa apta para un uso elaborado intencionalmente o no y el *objeto* matemático hace referencia a cualquier tipo de dato o resultado que el *sujeto* puede introducir en escena: números, puntos, ecuaciones, funciones, entre otros.

Rabardel (2011), propone que el *artefacto* se debe convertir en un *instrumento* para el que aprende a partir de las interacciones que tiene el sujeto con los artefactos. La *génesis instrumental*

son los procesos que establecen la transformación progresiva del *artefacto* en *instrumento*. En la relación artefacto y sujeto se identifican dos procesos:

- La *instrumentación*: es la evolución de los esquemas de uso, de acción instrumentada, funcionamiento, evolución por acomodación, coordinación, combinación, inclusión y asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos.
- La *Instrumentalización*: asociada al surgimiento y evolución de los componentes del artefacto o un proceso de enriquecimiento de las propiedades intrínsecas del artefacto por parte del sujeto, como se observan en el Esquema 3.

Esquema 3. Proceso de Génesis Instrumental



Trouche (2004), considera que “la implementación en el aula, detrás de las dificultades de los profesores y de las deficiencias del uso de los estudiantes, está un importante proceso cognitivo-didáctico: la transformación de una herramienta técnica en un instrumento para el trabajo matemático” (p.5).

En este trabajo, la integración de recursos informáticos se orienta a contribuir para que el sujeto construya adecuadamente *esquemas de uso* que le permitan explorar y experimentar los diferentes sistemas de representaciones del concepto con el fin de que surja el conocimiento matemático.

2.3.6.3 El Ambiente de Geometría Dinámica Cabri.

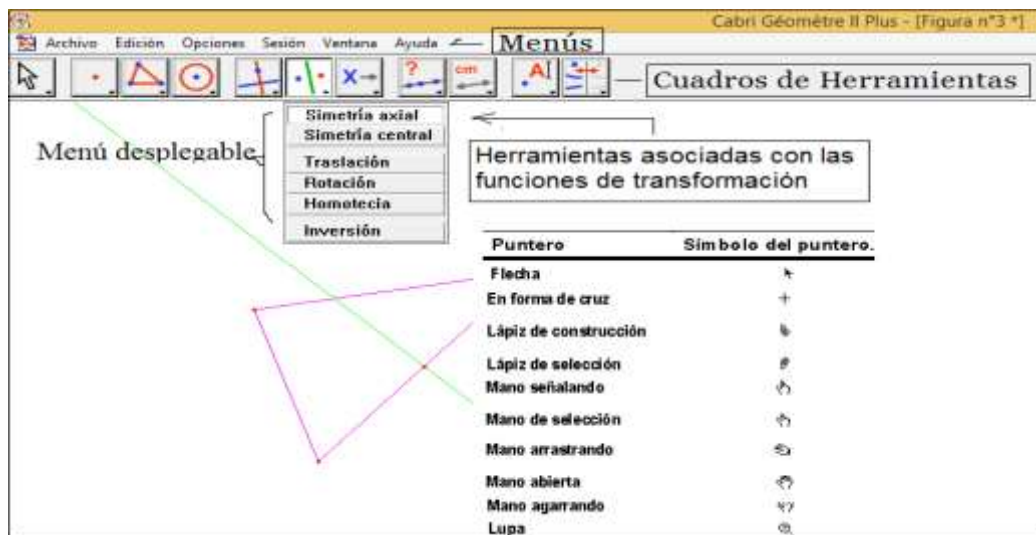
Específicamente en la Educación Matemática los recursos tecnológicos más utilizados corresponden a los Ambientes de Geometría Dinámica y los Sistemas Algebraicos Computacionales. Estos, contribuyen con sus características a construir el pensamiento matemático a partir de los procesos de visualización, en los diferentes esquemas de representación del objeto matemático (Duval, 1999).

Cabri es un software para construcciones geométricas, desarrollado por un equipo encabezado por J. M. Laborde y presentado en 1988. Este software se considera un AGD diseñado para la enseñanza de las matemáticas y geometría, caracterizado por permitir al usuario manipular las representaciones construidas en la interfaz a partir del arrastre, de la huella o la animación de la construcción que registra los cambios de forma sucesiva y permite visualizarlos en tiempo real. Este recurso informático es básicamente un procesador geométrico interactivo que integra diversas herramientas de geometría.

En relación con el trabajo de la simetría axial en Cabri, Jaime (citado en Díaz *et al.*, 2014, p.3) sostiene que “las representaciones gráficas mediadas por Cabri II Plus, para trabajar en el contenido de las transformaciones isométricas de simetría axial, traslación y rotación son actividades que permiten anticipar conclusiones, conjeturar y verificar las afirmaciones propuestas”.

Al hacer construcciones en Cabri simulando las actividades con el uso de papel, lápiz y los materiales de geometría se cuenta con las herramientas que permiten modificar el tamaño de las figuras, establecer medidas, aplicar transformaciones, nombrarlas, darle color, verificar propiedades de las construcciones y la potencia para modelar representaciones geométricas sobre una imagen colocada como fondo de pantalla, etc. Con el uso frecuente se genera economía de tiempo lo que permite orientar las actividades a las estrategias y procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Figura 6. Componentes de Cabri Geometry II Plus



Para el análisis de los momentos en que se integra Cabri en la práctica de aula, es necesario hacer aclaración de los nombres de cada componente en la interfaz entre los que se destacan: los menús (archivo, edición, opciones etc.) y los cuadros de herramientas (punteros, puntos, rectas, curvas etc.). Cada uno de estos cuadros contiene el menú de herramientas, por ejemplo el cuadro de herramientas de transformaciones contiene un desplegable donde se encuentra: simetría axial, simetría central, traslación, rotación, homotecia e inversión. Otro aspecto fundamental es el puntero que de acuerdo a la actividad cambia la forma del ícono en la interfaz, ver Figura 6.

En el *diseño de tareas*, Cabri juega un papel esencial que de acuerdo con Laborde (1997), Rabardel (2011) y Moreno (2002) en la TSD se asume como el *medio* a partir del cual los sujetos manipulan los objetos geométricos. En la *puesta en acto*, se consideró el análisis de los procesos de génesis instrumental a partir de la evolución de los esquemas de uso de los estudiantes.

Un aspecto esencial para la integración de TIC en el aula de clase, recae sobre los profesores, quienes deben: ser los encargados de seleccionar y diseñar las tareas que le permitan a los estudiantes aprovechar las ventajas que ofrecen estos recursos en la enseñanza de las matemáticas, facilitar los espacios para que los estudiantes exploren estos recursos con el propósito de que los identifiquen como una herramienta para acceder al conocimiento matemático y finalmente, son los docentes los encargados de darle uso a los recursos pedagógicos que se encuentran en las instituciones junto con los programas educativos.

2.3.7 Complementariedad de recursos

Una parte de esta investigación analizó el trabajo de los estudiantes con el uso de recursos manipulativos y el recurso informático Cabri, con el fin de explorar como se complementan estos recursos en la construcción del concepto de simetría axial.

La complementariedad de recursos se aborda a partir de Hoyos (2006, p.40) quien realizó una investigación sobre funciones complementarias de los artefactos en la que sostiene que “es probable que el *software* y los pantógrafos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas”. En este sentido Ibarguen y Realpe (2012) definen la “función complementaria a las características que posee cierto artefacto que le permiten mejorar las de otro o aquellas que tiene un grupo de artefactos que hace posible enriquecerse mutuamente, donde cada artefacto posibilita la construcción de un conocimiento diferente” (p.8).

Teniendo en cuenta que recurso pedagógico es todo lo que converge en el aula, en esta investigación se analiza la complementariedad a partir de las características de los recursos manipulativos que permiten al estudiante identificar los elementos que intervienen en la reflexión y simetrizar una figura y del recurso informático, donde mediante el arrastre y el movimiento determina la dependencia que tiene la *figura imagen* de la *figura objeto*, la ubicación del eje de simetría y verifica las propiedades de la transformación para determinar si dos figuras son simétricamente congruentes. Cada recurso aporta a la construcción del conocimiento geométrico desde sus particularidades.

2.3.8 Las transformaciones geométricas en los referentes curriculares del MEN.

El concepto de simetría axial en los referentes del MEN se analiza como parte de las transformaciones geométricas, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y en el referente pedagógico correspondiente a las Matrices de Referencia del ICFES a partir de los cuales las instituciones educativas realizan la planeación de las actividades académicas escolares.

Se considera dentro de las matemáticas a la geometría como la encargada de interactuar con las formas del mundo real que permiten describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar con él desarrollando la percepción espacial, el uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas. Al respecto el MEN (2004, p.18) expresa que el conocimiento geométrico en las matemáticas ocupa un lugar importante en los currículos escolares para la formación del individuo.

En los LCM, se expone una nueva visión de la geometría en el aula y se plantea como: “una herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, que a su vez se constituye como una fuente importante de modelación y un campo especial para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior” (MEN, 1998, p.17).

En relación con las transformaciones geométricas el MEN (1998) propone que “se trabaje la geometría por *medio* de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo” (p.40).

En los EBC se establece en el pensamiento geométrico de grado cuarto y quinto (MEN, 2006) el estándar “Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños” (p.82). A partir de este estándar se establecen las competencias que los estudiantes deben alcanzar en los grados cuarto y quinto.

Uno de los referentes pedagógicos que se tiene en cuenta al realizar la planeación de clases actualmente, corresponde a las matrices de referencia del ICFES (2015), en las cuales se han determinado los aprendizajes que evalúa las Pruebas Saber en los grados de 3°, 5° y 9° y las evidencias que permiten constatar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. En grado quinto se presenta el aprendizaje “Conjetura y verifica resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano” y las Evidencias de aprendizaje en la Matriz de Referencia⁹ corresponden a:

- Realiza transformaciones en el plano de simetría.
- Reconoce las propiedades que quedan invariantes en una transformación.
- Reconoce la congruencia entre una figura inicial y la figura resultante después de aplicar una transformación.

Para el diseño de la secuencia de tareas se tuvo en cuenta los referentes de calidad del MEN que orientan los procesos curriculares y pedagógicos en las instituciones de Educación Básica y Media en Colombia.

⁹ La matriz de referencia ICFES (2015) corresponde a un documento en forma de plegable en el cual se establecen los aprendizajes y las evidencias que se evalúan en las Pruebas Saber en los grados de 3°, 5° y 9°

Capítulo 3.
Diseño del Dispositivo Experimental y análisis *a priori*

Capítulo 3

Concepción del Dispositivo Experimental y Análisis *a priori*

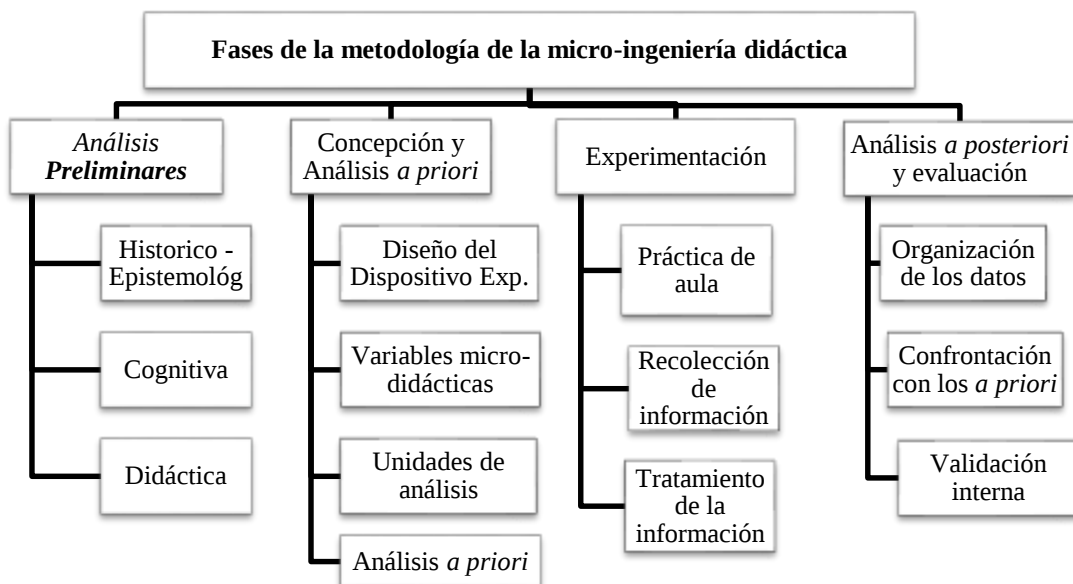
En este capítulo se presentan los elementos que estructuran el dispositivo experimental a partir de los referentes teóricos. Inicialmente, se realiza un acercamiento al diseño metodológico propuesto desde la *micro-ingeniería* (Artigue, 1995) como el enfoque que orienta la investigación y posteriormente se presenta el dispositivo experimental, el diseño de la secuencia de tareas y los análisis *a priori*.

3.1 Consideraciones Metodológicas

El diseño metodológico implementado en el desarrollo de esta propuesta corresponde a un estudio de tipo cualitativo y descriptivo, siguiendo la estructura de la *micro-ingeniería*, a partir de los referentes propuestos en el enfoque metodológico de la ingeniería didáctica. Según Artigue (1995) de acuerdo a una distinción temporal de su proceso experimental se delimita en cuatro fases: “la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación” (p.38).

En esta investigación, los *análisis preliminares* corresponden al capítulo dos, donde se definió el marco teórico y se establecieron los saberes didácticos relacionados con el tema de estudio. La fase de concepción del diseño de la situación didáctica y los análisis *a priori* se desarrollan en el capítulo tres. En el capítulo cuatro se desarrolla la fase de experimentación. Los análisis *a posteriori* y evaluación se desarrollan en el capítulo cinco. En el esquema 4 se pueden observar las fases y los componentes que delimita la metodología.

Esquema 4. Fases de la metodología de la ingeniería didáctica.



La *micro-ingeniería* según Artigue (1995), hace referencia a investigaciones que tienen como objeto estudios locales que abordan la complejidad de los fenómenos en el aula, esta metodología involucra el diseño de secuencias de aprendizaje, la puesta en acto a partir de los referentes teóricos que sustentan el diseño, al igual que los correspondientes análisis.

El enfoque metodológico de la ID está estrechamente ligado al marco teórico adoptado de la TSD que estructura la puesta en acto teniendo en cuenta el contrato didáctico, las interacciones o fases de la situación y las retroacciones¹⁰ del *medio*. La experimentación se desarrolló siguiendo el diseño de una *secuencia de tareas* para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto, que estructuró la *puesta en acto* y la validación del diseño.

El *diseño de tareas* permitió establecer, definir y orientar el desarrollo de las actividades encaminadas al aprendizaje de la simetría axial. Para el diseño de la secuencia de tareas se tuvieron en cuenta los criterios¹¹ propuestos por Pochulu *et al.* (2013); además se definieron las variables de diseño y las unidades de análisis, a partir de las cuales se estableció la pertinencia de las actividades respecto a los alcances de los objetivos planteados y sugerir formas en las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias (Godino, 2013).

Las intervenciones didácticas se desarrollaron con los estudiantes de grado Quinto A en las aulas digitales de la IEG, estas cuentan con un video proyector, computadores portátiles para cada estudiante y una red local que le permite al docente supervisar el trabajo de los estudiantes desde su computador. En esta actividad el docente es investigador de su propia práctica. En cada una de las intervenciones se recopiló información a través de videos, registros en papel, las construcciones en Cabri de las tareas 2, 3 y 4 y la construcción en cartulina de la Tarea 1.

3.2 El Dispositivo Experimental

A continuación, se presentan los aspectos que estructuraron el dispositivo experimental y las relaciones que se tejen entre el problema de investigación, las hipótesis de investigación establecidas en el primer capítulo y los análisis preliminares con sus tres dimensiones (epistemológica, cognitiva y didáctica), como se puede ver en el Esquema 5.

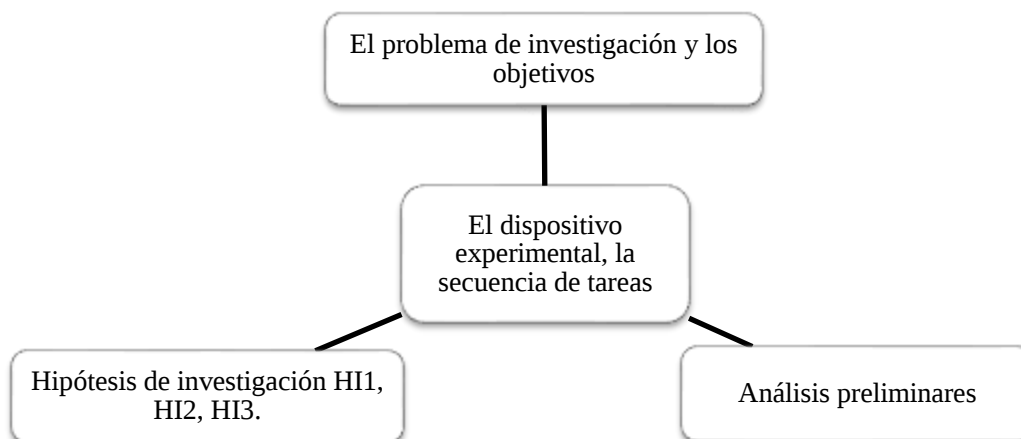
En el dispositivo experimental se destacan dos factores transversales: el primero corresponde a la integración del AGD Cabri que de acuerdo con Acosta *et al.* (2010) utiliza el software Cabri como *medio* con el cual el alumno interactúa para lograr un aprendizaje por adaptación. En este mismo sentido Laborde (1997) propone que el entorno Cabri ofrece posibilidades de organización de un *medio* para el aprendizaje, por tres razones:

- Los fenómenos visuales adquieren importancia por la dimensión dinámica del Cabri-dibujo
- Estos fenómenos están controlados por la teoría ya que son el resultado de una modelización gráfica de un modelo analítico de ciertas propiedades geométricas;
- El sin número de posibilidades de situaciones geométricas que pueden ser visualizadas con un gran número de objetos y en forma precisa (p.47).

¹⁰ Las retroacciones del *medio* permiten validar o invalidar sus acciones.

¹¹ Los criterios corresponden a los propuestos por Pochulu *et al.* (2013).

Esquema 5. Aspectos que estructuran el dispositivo experimental



El segundo aspecto central está relacionado con la Etnomatemática vista como una herramienta útil para la reivindicación de los saberes extraescolares de las comunidades indígenas de América Latina y una estrategia para la enseñanza de conceptos matemáticas apoyándose en los saberes y prácticas de las comunidades (Blanco, 2017).

Las modelaciones geométricas en las esculturas de San Agustín permiten al estudiante visualizar la aplicación del concepto y como valor agregado se logra que conozcan parte del patrimonio histórico y cultural del pueblo aborígen que esculpió en la piedra su cosmovisión e igualmente, parte del conocimiento que tenían de la naturaleza, la astronomía y la geometría.

La Secuencia de tareas que se propuso para el estudio de la simetría axial, se tomó de la Sesión 6 de la Secuencia didáctica para la enseñanza de las transformaciones isométricas propuesta por Urbano (2009), la cual fue construida a partir de los resultados obtenidos en una investigación sobre las representaciones geométricas en las esculturas del Parque Arqueológico de San Agustín. A continuación, se detallan las sesiones de la SD y su respectivo objetivo en la Tabla 3.

Tabla 3. Sesiones de la SD para la enseñanza de las transformaciones isométricas

Sesión	Objetivos
1. Socialización y diagnóstico	Identificar los conocimientos que tienen los y las estudiantes de la cultura prehispánica de San Agustín y su percepción en relación con la geometría.
2. Nivelación.	Reforzar los conocimientos básicos de los elementos de la geometría como: segmentos, rectas, circunferencias, triángulos, polígonos.
3. Exploración de AGD.	Identificar los componentes del software y sus herramientas básicas.
4. Trasladando Figuras en el plano	Identificar los elementos que intervienen en la traslación, aplicar, describir y verificar traslaciones en el plano
5. Rotando figuras geométricas en el plano.	Identificar los elementos que intervienen en la rotación, aplicar, describir y verificar rotaciones en el plano

6. Simetría en el plano	Identificar los elementos que intervienen en la simetría, aplicar, describir y verificar simetrías en el plano
7. Evaluación	Evaluar las competencias alcanzadas por los estudiantes frente al manejo del software, los movimientos en el plano y su percepción acerca del pueblo escultor.
8. Argumentación y vivencia	Realizar un recorrido por las diferentes réplicas de las esculturas que hay en la universidad del Valle y realizar exposiciones de los movimientos en el plano y el desarrollo artístico y geométrico del pueblo escultor.

El diseño de la secuencia *simetría en el plano*, se estructuró a partir de cuatro tareas: la primera centró la atención en el uso de recursos manipulativos y el reconocimiento de la noción de simetría axial; la segunda tarea se desarrolló a partir de la fotografía de una esculturas de San Agustín colocada como fondo de pantalla en Cabri donde se modelaron las figuras geométricas presentes en la escultura; en la tercera tarea los estudiantes trabajaron con dos construcciones en Cabri y a partir del arrastre exploraron e identificaron la dependencia de figuras y construyeron los ejes de simetría y en la tarea cuatro los estudiantes diseñaron una escultura aplicando simetría axial y las estrategias utilizadas por los escultores de la cultura de San Agustín. La descripción de las actividades se puede ver en el Anexo 1. *Guía del estudiante*

Teniendo en cuenta el dispositivo experimental se plantearon las hipótesis de diseño (HDD) a partir de los procesos que se dan alrededor del aprendizaje del concepto geométrico.

- HDD1: al realizar el arrastre de las figuras modeladas en Cabri que conforman una escultura, los estudiantes reconocen los elementos que intervienen en la simetría axial.
- HDD2: el uso de recursos manipulativos y recursos informáticos favorecen la construcción del concepto de simetría axial.
- HDD 3: La integración de las esculturas de San Agustín al diseño permiten reconocer la aplicación del concepto de simetría axial y visibilizar los conocimientos geométricos del pueblo escultor.

3.2.1 Variables micro-didácticas.

Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando para facilitar el análisis de una ingeniería: “Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase” (p.42).

En el diseño didáctico, las variables micro-didácticas que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de los actos pedagógicos objeto de reflexión en los análisis *a priori* y su respectivo contraste en los análisis *a posteriori* se plantean a partir dos categorías:

En relación con el aprendizaje de la simetría axial, se tuvo en cuenta cómo el estudiante identifica los elementos que intervienen, construye los conceptos y reconoce las propiedades que definen la simetría axial. En la construcción de estas variables, se consideraron los fenómenos visuales

relativos al movimiento de figuras geométricas en el plano propuestas por Acosta *et al.* (2010) como se presenta a continuación:

- *Dependencia*: en las acciones de arrastre el estudiante exploró sobre los elementos construidos en la interfaz de Cabri que permiten ser cambiados de lugar para reconstruir una escultura. Al diseñar una actividad en Cabri utilizando la herramienta de simetría axial, se reconocen dos elementos: la *figura objeto* y su correspondiente *figura imagen*, en este AGD la existencia de la imagen y el desplazamiento dependen estrictamente de la figura objeto. En la construcción con los recursos manipulativos el estudiante identificó que la imagen depende de las acciones realizadas a partir del objeto y el eje de simetría.
- *Movimiento*: en el plano si dos figuras son simétricas, cuando se arrastra la *figura objeto* en un movimiento perpendicular al eje de simetría, la *figura imagen* tiene movimientos contrarios, si estos movimientos son paralelos al eje de simetría; el desplazamiento de la imagen conserva el mismo sentido del movimiento del objeto arrastrado.
- *Definir o predecir el eje de simetría*: al arrastrar la figura objeto esta se toca con su correspondiente *figura imagen* en el eje de simetría, si se trazan segmentos cuyos extremos son dos puntos correspondientes estos son paralelos entre si y la recta que pasa por los puntos medios corresponde al eje de simetría.

En cuanto al reconocimiento del pueblo escultor de San Agustín, se tuvo en cuenta en los procesos de modelación y construcciones en Cabri cómo los estudiantes hacen referencia al arte escultórico. Las variables son:

- *La modelización*: esta variable permitió analizar las actividades de los estudiantes en torno al reconocimiento, redefinición de figuras geométricas y la verificación del uso de transformaciones en las esculturas, como fue definido en el apartado 2.3.4.
- *Reconocimiento cultural*: en esta variable se observó cuando el estudiante empleaba términos referentes a la simbología, la historia, la cultura y los avances científicos del pueblo escultor, como se estableció en el apartado 2.3.4.

Estas variables micro-didácticas hacen parte de las unidades de análisis.

3.2.2 Unidades de análisis.

Para los correspondientes estudios se han establecido cuatro unidades de análisis que agrupan las variables de diseño¹² y las variables micro didácticas, a partir de estas unidades se abordaron las hipótesis de investigación y los objetivos específicos, a continuación, se presentan las unidades de análisis:

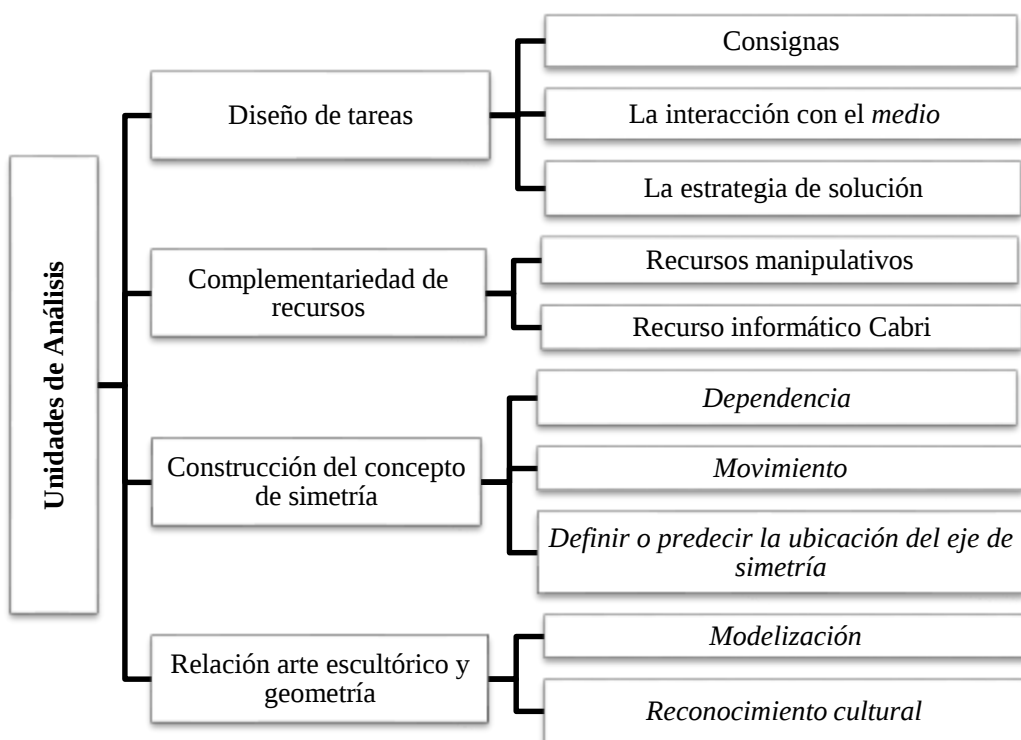
- *Diseño de tareas* se observó a partir de las variables de diseño: las consignas, la interacción con el *medio* y la estrategia de solución.

¹² Las variables de diseño corresponden a los elementos a partir de los cuáles se analiza el diseño de la secuencia de tareas, teniendo en cuenta las consignas, la estrategia ganadora, el *medio* y la complementariedad de los recursos.

- *Complementariedad de recursos* se observó a partir de las variables de diseño: los recursos manipulativos y el recurso informático Cabri.
- *Construcción del concepto de simetría* se analizó a partir de las variables micro-didácticas: *Dependencia*, *Movimiento* y *Definir o predecir el eje de simetría*.
- *Relación Arte escultórico y geometría* se estudió a partir de las variables micro-didácticas: *Modelización* y *Reconocimiento cultural*.

El Esquema 6 muestra la relación entre las unidades de análisis y las variables que se tendrán en cuenta para realizar los respectivos análisis.

Esquema 6. Unidades de Análisis y sus Variables: de diseño o micro-didácticas



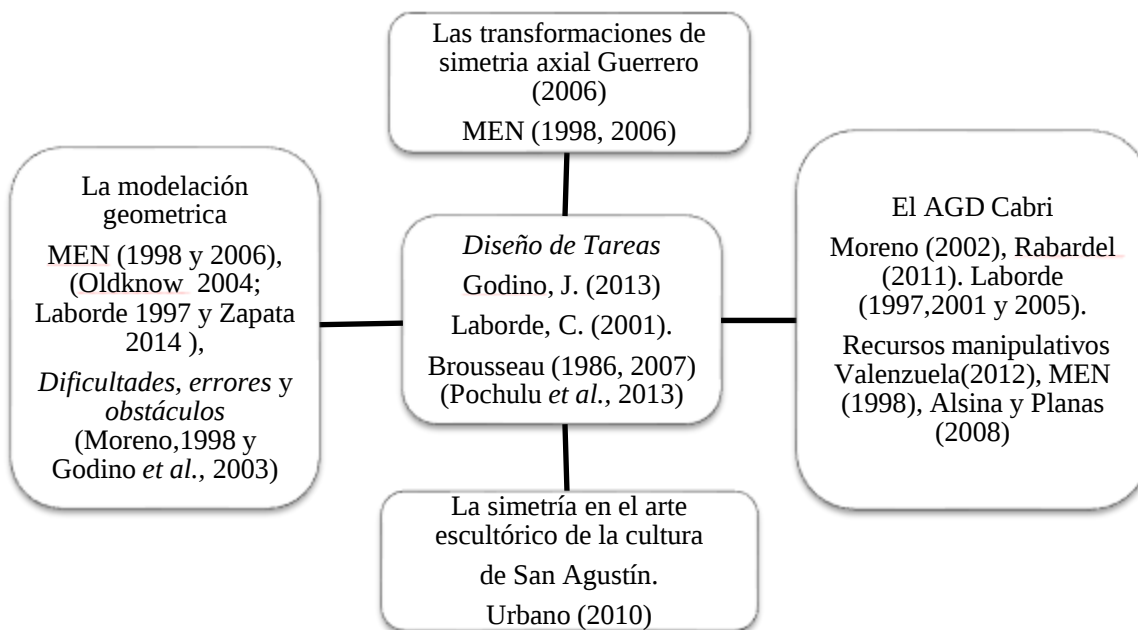
3.3 Diseño del Dispositivo Experimental.

En este apartado se describen las características generales de las actividades que conforman el diseño de la secuencia de tareas que se tuvieron en cuenta para la realización de los análisis *a priori* y la *puesta en acto* en el proceso de experimentación.

En la *puesta en acto*, los estudiantes abordaron los distintos tipos de tareas propuestos por Laborde (2001) de la siguiente manera: en la Tarea 1: sólo se trabajó con material manipulativo, en la Tarea 2 se desarrollaron tareas de Tipo I y II. En la Tarea 3 tareas III y IV y en la Tarea 4: los

estudiantes desarrollaron actividades que involucran los tipos de tareas I, II y IV. Las actividades de cada tarea se pueden ver en el Anexo 1 *Guía del estudiante*.

Esquema 7. El *diseño de tareas* y sus referentes teóricos.



Este diseño está sustentado en los referentes teóricos abordados en los *análisis preliminares*:

El *diseño de tareas* se estructuró a partir de Godino (2013) que lo propone como una alternativa para diseñar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en las tareas diseñadas se reconocen los 4 tipos de tareas propuestos en el AGD Cabri por Laborde (2001), la estructura que se planteó desde la TSD por Brousseau (1986, 2007) y los criterios para la formulación de las consignas (Pochulu et al., 2013).

De la Dimensión Didáctica se retomó para el *diseño de tareas* el uso de recursos, en la Tarea 1 se trabajó con recursos manipulativos, explorando el trabajo con material concreto a partir de papel, témperas, doblado y utensilios escolares. Valenzuela (2012) define los tipos de materiales y sus ventajas en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Las siguientes tareas se desarrollaron integrando el recurso informático Cabri que posibilita otras formas de aprendizaje de la geometría y lo reconocen como un mediador del conocimiento (Laborde, 1997; Moreno, 2002 y Rabardel, 2011).

De la dimensión Histórica – Epistemológica, el *Diseño de las tareas* se apoya en la construcción del concepto de simetría axial, las propiedades y su notación (Guerrero, 2006 y MEN, 2004 y 2006), otro aspecto fundamental en el *diseño de tareas* correspondió a la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín (Urbano, 2010) que se utilizó con el propósito de que los estudiantes reconocieran la aplicación del concepto de simetría axial en un contexto artístico (MEN,

1998 y 2006) y visibilizar el patrimonio histórico y cultural de los pueblos prehispánicos que habitaron el territorio Colombiano desde una perspectiva Etnomatemática.

En la dimensión Cognitiva se tuvo en cuenta para el diseño los procesos de modelación (MEN, 1998 y 2006; Laborde, 1997 y Oldknow, 2004). En relación con las *dificultades, errores y obstáculos* se retomaron los aportes de Moreno (1998) y Godino et al. (2003).

3.3.1 Aplicaciones previas de la secuencia de tareas.

La construcción del dispositivo experimental y su evolución se ha gestado en varios momentos a través de aplicaciones previas en diferentes escenarios, estas experiencias permitieron dilucidar varios ajustes al diseño inicial de la secuencia de tareas propuesta por Urbano (2009) y para la realización de los análisis *a priori*.

La primera aplicación previa se realizó en el mes de junio del año 2015, a un grupo regular de estudiantes de grado sexto de la IEG, con edades entre 11 y 14 años, a este grupo de estudiantes se les aplicó la *Tarea 1*, en esta aplicación los estudiantes tardaron demasiado tiempo para realizar sus dibujos, debido a que el tamaño de la cartulina correspondía a un pliego completo de (100 cm x 70 cm) y que los estudiantes podían pintar lo que desearan.

De esta experiencia se observó que el tamaño de la cartulina dificultó realizar los trazos, por lo que en lo sucesivo se estableció el tamaño de la cartulina de (50cm x 35cm) y se utilizaría una fotocopia para repintar usando máximo dos colores de témperas, además se realizaron ajustes a las consignas para que los textos quedaran más cortos.

Figura 7. Ajustes al tamaño de la cartulina en la Tarea 1



Una segunda aplicación se llevó a cabo con estudiantes de ingeniería de la Universidad de Medellín, en el taller *modelaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial alrededor del diseño de tareas con Cabri*, realizado en el marco del VIII Congreso Iberoamericano de Cabri 2016, la actividad se realizó en dos bloques de 90 minutos, asistieron en promedio 50 estudiantes, la mayoría de ellos no conocían el programa Cabri, se trabajaron las tareas 2, 3 y 4.

En esta experiencia se observaron aspectos relacionados con el esquema de uso del programa, en particular la herramienta *apuntador*, la cual es necesario cliquear para cambiar de herramienta y permitir el arrastre; otros aspectos que se observaron fueron: el manejo de tiempo para identificar

necesidades de ajuste en cada tarea, el interés de los estudiantes en la actividad y su compromiso para realizarlas, en el Anexo 11 se presenta la guía entregada a los estudiantes.

Las anteriores experiencias aportaron elementos importantes para el rediseño de la secuencia de tareas y la realización de los análisis *a priori* desde lo instrumental, la gestión del tiempo, las devoluciones y el reconocimiento del pueblo escultor.

3.3.2 Implementación en el aula.

Un aspecto transversal en la *puesta en acto* de las tareas corresponde al trabajo colaborativo que se tuvo en cuenta en las tres primeras tareas, se conformaron grupos de trabajo de máximo cuatro estudiantes, en estos grupos se distribuyeron las funciones de: moderador, un guardián del tiempo y el vocero quien en la puesta en común, se encarga de compartir a toda la clase las respuestas, experiencias y posiciones del grupo sobre el tema abordado.

La implementación en el aula o *puesta en acto* del *diseño de tareas* se realizó siguiendo la propuesta planteada en la TSD y el contrato didáctico, donde se reconocen cuatro tipos de interacciones o fases: acción, formulación, validación e institucionalización entre el docente, el estudiante y el *medio* (Brousseau, 2000). A continuación, se describe cada una de estas fases de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2.3.1.1

Fase de acción: en esta fase el estudiante realiza las actividades propuestas y juzga los resultados, obligándolo a mejorar y adaptar su modelo conforme a la retroalimentación constante de la situación. En este momento el estudiante trabaja con material concreto o manipulativo, que le permite potencializar los procesos de representación que son elementos necesarios para entender y acceder al concepto matemático y sus aplicaciones. Esta fase también está estrechamente ligada con el uso de Cabri donde realiza las construcciones propuestas haciendo uso de las herramientas de los ambientes informáticos o explora las construcciones que se han diseñado para cada una de las actividades, en esta fase se busca que el estudiante construya el conocimiento matemático, se apropie de Cabri, sus herramientas y piense con él.

Fase de formulación: esta actividad permite al estudiante exponer sus experiencias, conclusiones, conocimientos, argumentar sus estrategias y soluciones a los compañeros de clase y el profesor quien debe moderar estas intervenciones y si es el caso, reorientar la discusión sobre el concepto matemático que se está estudiando.

Fase de validación: En esta etapa el estudiante ha interactuado con los recursos manipulativos e informáticos de forma individual o grupal, a partir de esta experiencia debe justificar la estrategia que utilizó para desarrollar las tareas y demostrar mediante argumentos que sus soluciones son correctas y funcionales, lo que contribuye a la construcción del conocimiento matemático.

Fase de institucionalización: en el cierre de la Tarea 3 y retomando los aportes de los estudiantes, el docente explica el concepto desde lo matemático, exponiendo las definiciones, fórmulas y reconociendo teoremas o postulados que sustentan las propiedades de la transformación geométrica de simetría axial.

3.3.3 Diseño de la secuencia de tareas.

El diseño de la secuencia de tareas se presenta en la *Guía del estudiante* de la Sesión 6 que corresponde al Anexo 1. El diseño está planteado a partir de una secuencia que integra cuatro tareas que se presentan a continuación:

En la Tarea 1: *Manipulando Recursos*, el estudiante realiza una actividad a partir del uso de material concreto o manipulativo, utilizando la fotocopia de una escultura pegada a un lado de un cartulina de (50 cm x 35 cm) con un doblez cerca de la mitad que se redefine con el trazo de una recta *l*, luego se resalta el contorno y los detalles de la escultura con témpera, se dobla la cartulina por la recta *l* para que la pintura se estampe en el lado continuo de la cartulina, a partir de este ejercicio se identifica algunos elementos de las transformaciones geométricas como son la figura objeto y la *figura imagen*, puntos correspondientes del objeto y la imagen, el eje de simetría, además debe responder varios interrogantes sobre las estrategias utilizadas, la relación entre la figura objeto y la *figura imagen*, identificar y marcar puntos correspondientes, trazar rectas entre puntos correspondientes y establecer la relación entre estas rectas y el eje de simetría.

En la Tarea 2: *Vive tu experiencia en AGD*, el estudiante trabaja en Cabri en relación con la modelación de figuras geométricas y simetrías a partir de la fotografía de una escultura colocada como imagen de fondo de pantalla en Cabri. A partir de estas construcciones debe: predecir el eje de simetría, identificar puntos correspondientes, calcular las longitudes del segmento que une los puntos correspondientes, hallar punto medio y relacionar estos conceptos geométricos entre si y respecto al eje de simetría.

En la Tarea 3: *Explorando construcciones en Cabri*, a partir de dos construcciones y la propiedad del arrastre, el estudiante debe reconstruir una escultura arrastrando las partes que están dispersas en el plano¹³, construidas utilizando simetría axial, polígonos, circunferencias pintadas con diferentes colores.

En la Tarea 4: *Diseña tu propia escultura*, esta tarea la desarrollan los estudiantes después de que se ha realizado la fase de institucionalización del conocimiento y como una actividad de evaluación, el estudiante debe diseñar su propia escultura en Cabri aplicando los conceptos estudiados, en un cuadro de texto en Cabri expone los conceptos geométricos que utilizó y el significado de la escultura que diseñó en torno a lo artístico y cultural del pueblo escultor.

3.4 Análisis *a priori* de la implementación

Siguiendo la estructura de la *micro-ingeniería* en su tercera fase, que comprende el diseño de las situaciones didácticas y su análisis *a priori*, los cuales se conciben, como un análisis de control, permitiendo visualizar algunas situaciones que pueden ocurrir u ocurren en el aula, en relación con las acciones de los estudiantes en la construcción del conocimiento Artigue (1995), propone:

¹³ El plano corresponde a la interfaz de Cabri

Este análisis *a priori* se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, en cuanto la teoría constructivista considere el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un *medio* determinado, la TSD que sirven de referencia a la metodología de la ID ha pretendido desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (p.44)

De ahí que los análisis *a priori* buscan determinar de qué forma las elecciones realizadas por el docente permiten controlar las actuaciones de los estudiantes y los significados que ellos construyen, según Artigue (1995):

El objetivo del análisis *a priori* es determinar si las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. (p.53)

Los análisis *a priori* de la *puesta en acto* de la secuencia de tareas se realizaron a partir de los referentes teóricos expuestos en los *análisis preliminares* y el diseño del dispositivo experimental, estas actividades se implementaron en el aula de clase, como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Encuentros para la *puesta en acto* de la secuencia de tareas.

Tareas	Nombre	Materiales	Tiempo
Tarea 1	<i>Manipulando Recursos</i>	• Guía del estudiante • Utensilios cotidianos de la clase de geometría • Témperas, pinceles, tijeraa, pegante. • Anexo 6.1 (Fotocopia de la escultura pegada en un cuarto de cartulina)	55 minutos
Tarea 2	<i>Vive tu experiencia en AGD</i>	• Guía del estudiante • Aula digital y AGD Cabri	110 minutos
Tarea 3	<i>Explorando construcciones en Cabri: 6.1 y 6.2</i>	• Guía del estudiante • Aula digital y AGD Cabri	110 minutos
Tarea 4	<i>Institucionalización del concepto y evaluación.</i>	• Guía del estudiante • Aula digital y AGD Cabri	55 minutos

En los análisis *a priori* de cada tarea, inicialmente se presenta una descripción general en relación con la TSD, los propósitos, las consignas¹⁴ que hacen parte de la *Guía del estudiante*, los saberes matemáticos que se movilizan y los comportamientos que se proveen. En el desarrollo de los análisis *a priori* de las tareas se aludirá a las interacciones o fases de *acción*, *validación*, *formulación* e *institucionalización*.

¹⁴ Las consignas corresponden a las instrucciones y orientaciones que conforman el diseño de la secuencia de tareas.

3.4.1 Análisis *a priori* de la Tarea 1: Manipulando recursos.

Para la realización de esta tarea, se proporcionará a cada grupo de estudiantes los siguientes materiales: témperas, pinceles, tijeras, pegante, cartulina y la fotocopia de una escultura.

Esta tarea busca que el estudiante construya el conocimiento usando recursos manipulativos, toda vez que varios estudios han puesto en evidencia la importancia de reconocer los conceptos matemáticos desde lo concreto para llegar a lo abstracto pasando por las representaciones gráficas, es así como las matemáticas se acercan al mundo real de los sentidos, permitiendo que el estudiante construya los conceptos matemáticos desde su propia experiencia (Alsina y Planas, 2008; MEN, 2008 y Valenzuela, 2009)

Esta tarea está constituida por una fase de acción, donde los estudiantes trabajan con material manipulativo. Posteriormente, sobre los dibujos construidos realizarán algunas acciones puntuales y resolverán cuatro preguntas sobre la construcción en cartulina.

Propósito

- Realizar un acercamiento a la noción de simetría axial.
- Construir e identificar el eje de simetría.
- Reconocer la figura objeto y la *figura imagen*.
- Identificar puntos correspondientes del objeto en su imagen.
- Reconocer figuras geométricas que utilizó el escultor para el diseño de la escultura.

Consigna

Tabla 5. Consignas de la Tarea 1.

Tarea 1: Manipulando Recursos	
En la hoja del Anexo 6.1 realiza un doblez o pliegue teniendo en cuenta no tocar la escultura, al doblar la cartulina, la fotocopia de la escultura debe quedar cubierta, luego traza una línea recta por el doblez que llamaremos <i>l</i>, utilizando la regla y el lápiz. Con témpera pinta el contorno, puntos, rectas y detalles de la fotografía de la escultura que en adelante la llamaremos el <i>objeto</i>, sin que se haya secado la témpera dobla la hoja por la línea <i>l</i> que trazaste y desliza suavemente tus dedos sobre el dorso del papel para que la témpera se adhiera en la otra parte de la cartulina, finalmente extiende la cartulina, si es necesario repinta un poco la figura que se estampó la cual llamaremos <i>imagen</i>. (Nota, a medida que pintas puedes doblar y estampar varias veces para que no se seque la pintura) Teniendo en cuenta la actividad desarrollada anteriormente responde las siguientes preguntas:	
a.	Al comparar la figura objeto, con la figura imagen que se estampó al doblar la cartulina ¿Se puede asegurar que tienen la misma forma?, ¿Por qué?
b.	¿La fotocopia de la escultura, el objeto , tiene el mismo tamaño que el dibujo estampado la imagen al otro lado de la línea? ¿Por qué?
c.	Identifica varios puntos en el objeto, márcalos con letras mayúsculas, por ejemplo (R) y su correspondiente punto en la imagen con la misma letra y una comilla, por ejemplo (R'). ¿Cómo son las distancias del punto R a la recta <i>l</i> y del punto R' a la recta <i>l</i> , compara las distancias de los demás puntos en el objeto con la recta y su correspondiente en la imagen?
d.	Si trazas rectas que pasen por los puntos en el objeto y su correspondiente imagen, ¿Qué relación geométrica hay entre estas rectas? ¿Esta condición se da para cualquier par de rectas trazadas entre los puntos del objeto y

su punto correspondiente en la imagen? _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.

La primera actividad de la Tarea 1 está asociada a la fase de acción, el estudiante comienza leyendo la consigna, es posible que los estudiantes frente a esta situación pidan orientaciones, el docente en su devolución podrá intervenir y modelar el doblez de modo que este sea inclinado para no crear la dependencia de los ejes vertical y horizontal como regularmente ocurre en el aula.

Se esperaría que cuando los estudiantes modelen las figuras geométricas y resalten los detalles que forman la escultura con témperas identifiquen elementos geométricos como rectángulos, circunferencias y segmentos; al momento de estampar la pintura en el otro espacio de la cartulina posiblemente no conserven el eje de simetría y el dibujo estampado va a ser diferente con detalles superpuestos.

Sobre la pregunta del literal a), al tratar de comparar el objeto y su imagen, podría presentarse un error de visualización al momento de la construcción de las figuras, si se tiene en cuenta que al adherirse la témpera los bordes secos no se van a estampar, resultando una imagen menos definida que puede inducir a los estudiantes a decir que los dos dibujos son diferentes, otro error que podría presentarse es, cuando el estudiante dobla la cartulina para estampar y no se cerciora de que el doblez sea siempre el mismo, lo que generaría el uso de varios ejes de simetría, teniendo como resultado una *figura imagen* distorsionada, de acuerdo a Godino *et al.* (2003), esta situación se presenta cuando los estudiantes no definen correctamente el eje de simetría que puede ser oblicuo y lo toman como si fuera vertical u horizontal.

Otro aspecto que se esperaría es que reconozcan la dirección de los elementos simetrizados, cuando en la figura objeto están a la derecha, en la *figura imagen* se encuentran a la izquierda. Al realizar la construcción con el uso de la témpera podrán identificar que en el dibujo estampado (la *figura imagen*), la forma, el tamaño y la distancia al eje de simetría depende de las acciones que se realicen sobre la figura objeto, en este ejercicio el estudiante debería identificar la dependencia que tiene la *figura imagen* de la figura objeto y que los puntos correspondientes son equidistantes del eje de simetría. A pesar de que varios autores como Godino *et al.* (2003) y Moreno (1998), afirman que estos reconocimientos son una de las principales dificultades que se presentan en el aprendizaje de las isometrías en el plano, especialmente, en la simétrica axial.

En la pregunta del literal b) el estudiante podría asociar los dos dibujos con la noción de congruencia, por lo que debe validar si la *figura imagen* es congruente con la figura objeto al comparar que tienen la misma forma y el mismo tamaño, si esta situación no ocurre, el docente intervendrá realizando un *acto de devolución*, interrogando sobre las causas que incidieron para que el estudiante no reconozca la congruencia entre el objeto y su imagen. Una posibilidad que se puede presentar en la *figura imagen* es que sea ligeramente más pequeño, porque al estamparlo parte de la témpera se haya secado, la devolución del docente debería llevar al estudiante a imaginar que se cumplen las condiciones óptimas de estampado en la realización del ejercicio y por lo tanto las figuras son congruentes.

En la pregunta del literal c) se esperaría que los estudiantes nombre varios vértices con la notación correspondiente y luego midan las distancias de los puntos al eje de simetría, reconozcan la notación de puntos correspondientes en la simetría y que son equidistantes al eje. Un error que se podría presentar es que al asociar la construcción con la transformación de traslación, no identifiquen que los puntos que estaban a la derecha de la figura luego de aplicar simetría axial se encuentran a la izquierda de esta; de forma similar ocurre si el eje de simetría es horizontal, en este caso el estudiante identificaría que las imágenes con relación al objeto se han invertido y lo que estaba en la parte de arriba se encuentra abajo en la imagen. Así mismo, como manifiesta Godino et al. (2003), sería usual que los estudiantes presenten *dificultades* en el reconocimiento de la posición del eje de simetría, más aún, cuando dicho eje sea oblicuo.

Al revisar los puntos marcados y nombrados por los estudiantes en los dibujos, si es necesario, el docente realizará la devolución para que el estudiante identifique los puntos correspondientes de la simetría, también, podría sugerir que coloquen un punto con témpera de un color diferente y al estamparlo encontrarían el punto correspondiente en la *figura imagen*, de esta manera se superarían estas *dificultades* y se podría continuar con la siguiente actividad.

Al realizar la medida de los puntos correspondientes al eje de simetría se esperaría que estas medidas sean iguales, por lo que se requiere que los estudiantes movilicen saberes como el reconocimiento de ángulos rectos o de perpendicularidad de dos rectas para que realicen las medidas correctamente, en el caso de que las longitudes de estos segmentos sean diferentes se deberá indagar a cada grupo cuál fue el procedimiento que utilizaron para medir estas distancias y sugerir que se trate de encontrar la distancia más corta de los puntos a la recta. Si la situación persiste, se podría estar presentado *errores* en la ubicación de los puntos o que las medidas se hacen sin tener en cuenta las reglas para determinar la distancia de un punto a una recta.

En el literal d) es posible que los estudiantes no comprendan la pregunta porque se hace referencia a “*si esta condición se cumpliría para cualquier par de rectas*”, en esta situación el docente podría realizar un acto de devolución con el propósito que los estudiantes pasen de la *fase de acción* a una *fase de validación*, es decir, que los estudiantes de manera individual o a partir de las socialización de la respuesta a las tareas, sean capaces de justificar la estrategia que ha dado resultado para resolver el problema, es posible que después de la intervención del docente los estudiantes respondan que son diferentes debido a que están en distintos lugares o unas son más largas que otras dependiendo de cómo las hayan trazado o que no asocien la pregunta con el concepto de paralelismo, también podría reconocer que cualquier par de rectas trazadas por puntos correspondientes en una simetría son paralelas, porque al prolongarlas se observa que las rectas no se cortan.

3.4.2 Análisis *a priori* de la Tarea 2: Vive tu experiencia en AGD.

Esta tarea surge de los resultados encontrados en el análisis de las representaciones geométricas en la escultura *Ojos de cabeza de águila* ubicada en la Mesita C del Parque Arqueológico de San Agustín, esta escultura es una de las pocas en la cual el artista esculpió un eje vertical de simetría y al final de su construcción no lo difuminó completamente, lo que se convierte en una evidencia determinante para afirmar que el pueblo escultor conocía y utilizaba el concepto geométrico de simetría axial (Urbano, 2010).

Con esta actividad el estudiante se acercaría al proceso de modelación de figuras geométricas, a partir de la imagen de una escultura colocada como fondo de pantalla en Cabri, en este caso, se utilizará la escultura La Máscara por sus grabados, reconociéndose en ella rectángulos, círculos, elipses y segmentos; su contorno se puede definir mediante arcos y rectas.

Esta es la primera actividad donde los estudiantes interactuarán con el AGD, esperándose que algunas de las herramientas de Cabri las asocien con las herramientas del editor gráfico Paint que se usa habitualmente en la escuela, esta tarea deberían realizarla en 110 minutos en las aulas digitales de la institución, donde cada estudiante cuenta con un computador portátil con el cual acceden al programa Cabri Geometry II Plus.

Al inicio de esta actividad, se guarda en el escritorio de cada TDA¹⁵ una carpeta digital, que se nombrará SESION 6 con los siguientes archivos: *Guía del estudiante*, Fotografías de las esculturas de San Agustín editadas para que su tamaño sea compatible con la pantalla de 12 pulgadas de la TDA y las construcciones en Cabri que se utilizarán en la Tarea 3. En un primer momento los estudiantes trabajarán de forma individual y posteriormente se conformarán grupos para compartir sus experiencias y hacer la puesta en común

Propósito

- Realizar un acercamiento a las herramientas de Cabri.
- Construir e identificar del eje de simetría.
- Modelar representaciones geométricas.
- Determinar el eje de simetría.
- Identificar si dos figuras son simétricas.
- Modelar las representaciones geométricas utilizadas por el pueblo escultor.

Consigna

Tabla 6. Consignas de la Tarea 2

Tarea 2: Vive tu experiencia en AGD	
Coloca la imagen de la escultura la Máscara de Quebradillas (Figura 1) como fondo de pantalla en Cabri, resalta los detalles de la escultura utilizando la herramienta polígono, luego traza una recta vertical que divida en dos partes iguales la escultura y nómbrala con la letra I . Marca y nombra varios puntos con letras mayúsculas en el lado Izquierdo de la escultura (objeto A) y su correspondiente a la derecha con la misma letra mayúscula de la forma (A' prima).	
a.	Mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta I y de su correspondiente punto en la derecha, a la recta I , puedes utilizar la notación distancia (A, I) o distancia (I , A') para registrar tu respuesta en la <i>Guía del estudiante</i> , realiza esta misma acción con otros puntos, ¿cómo son las distancias correspondientes?, ¿Por qué?
b.	Traza segmentos entre los puntos del objeto y su correspondiente en la imagen, con las herramientas de Cabri halla el punto medio. • ¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí? • ¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta?

¹⁵ TDA son las Terminales De Aprendizaje o computadores portátiles de las aulas digitales.

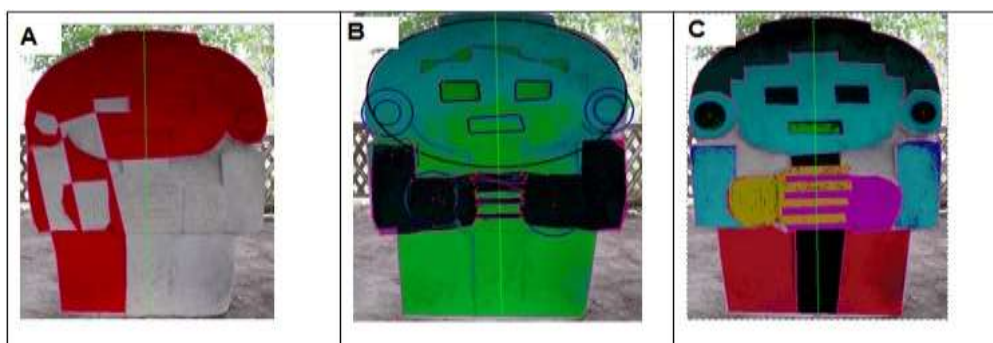
- ¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta?
 - ¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta?
- c. Utiliza la herramienta Mostrar ejes y rejilla, haga que el eje de simetría de la escultura coincida con el eje vertical (eje Y), identifica varios puntos correspondientes del objeto y la imagen y escribe las coordenadas del punto C:(x,y) y su correspondiente en la derecha C':(x,y). Escribe varios grupos de puntos con su correspondiente imagen. A: (__, __) y A': (__, __) ; B: (__, __) y B': (__, __)

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.

La primera parte de esta actividad corresponde a la *fase de acción*, los estudiantes deberían ingresar al programa, colocar la imagen de la escultura como fondo de pantalla en Cabri, sobre esta imagen los estudiantes modelar las representaciones geométricas con el uso de la herramienta polígono.

Al utilizar esta herramienta se podría presentar varias *dificultades*: al construir el polígono y no cerrarlo, cuando no establece un orden sucesivo en la puesta de los puntos formando varios polígonos que no cumplen con las características de un polígono en Cabri, la modelación de todos los detalles de la escultura aplicando solo una vez la herramienta polígono; en las dos situaciones anteriores al momento de “rellenar” con color las figuras definidos se colorea por pequeñas zonas, como se muestra en la Figura 8 recortes¹⁶ A y B, también, al arrastrar una figura se mueve toda la construcción; estas situaciones se presentarían porque los estudiantes no han desarrollado los esquemas de uso de las herramientas de Cabri. Es decir, los estudiantes se encuentran en la fase de *instrumentalización* puesto que no han identificado las propiedades del artefacto (Rabardel, 2011).

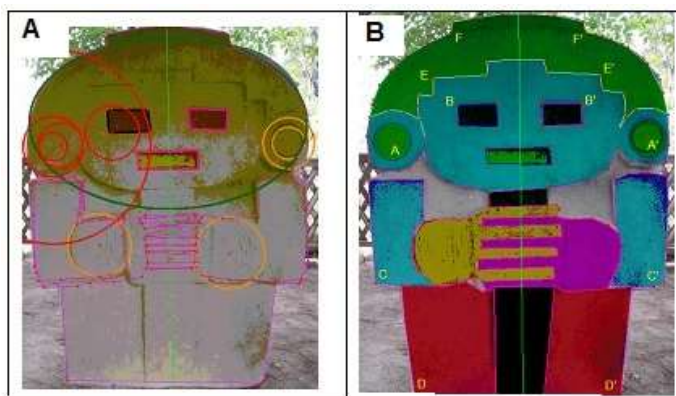
Figura 8. Posibles modelaciones en Cabri análisis *a priori* Tarea 2



Al modelar las orejas de la escultura se deberían construir dos circunferencias, al ejecutar esta herramienta posiblemente el tamaño de la circunferencia sea mayor que el contorno de la oreja y al tratar de realizar los ajustes, podrían continuar construyendo nuevos círculos o que estos estén desplazados del lugar al que corresponden en la escultura o trazar nuevas circunferencias intentando arrastrar el círculo inicial, como se ve en la Figura 9, recorte B.

¹⁶ Recortes se refieren a una parte que se toma del área de trabajo de la interfaz de Cabri.

Figura 9. Posible modelación en Cabri, Tarea 2 primera parte análisis *a priori*



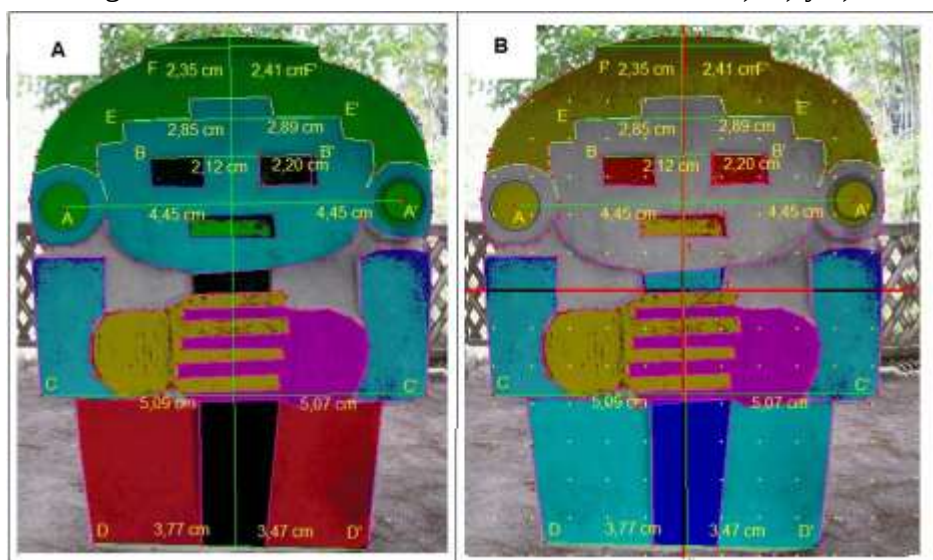
Los estudiantes indagarían al profesor sobre cómo se utilizan algunas herramientas de Cabri, en un *acto de devolución* el docente realizaría una presentación general de las herramientas del AGD Cabri y como se ejecutan correctamente, enfatizando en las herramientas que se utilizarían en el desarrollo de las tareas como: “Arrastre, Nombrar, Rellenar. Espesor, Circunferencia, recta, color de texto, distancia o longitud”, entre otros, teniendo en cuenta que Cabri como *medio* no debe ser un obstáculo para el desarrollo de las tareas. De este modo, los estudiantes pueden avanzar pasando del proceso de *instrumentalización* a *instrumentación*, es decir, sus esquemas de uso evolucionan y no se preocupan por la parte operativa del programa (Rabardel, 2011).

En el primer enunciado de las consignas de la *Guía del estudiante* se pide trazar una recta *l* vertical que divida en dos partes iguales la escultura, esta actividad buscaría que los estudiantes construyan o identifiquen la ubicación del eje de simetría que se utilizó para simetrizar una figura, por ende se movilizaría la relación de congruencia, al realizar esta actividad se trataría de que el estudiante descubriera que la recta que trazó corresponde al eje de simetría en la escultura, validando que los ojos, las orejas, los brazos al igual que el contorno de la escultura son simétricos respecto a la recta, ver Figura 9 recorte B.

También, se esperaría que los estudiantes marquen varios puntos utilizando la notación de la tarea anterior, que, para efectos de este ejercicio, los detalles del lado izquierdo de la escultura los asuma como *figura objeto* y los que están a la derecha en la escultura como *figura imagen*. En esta actividad podrían confundir en el programa la herramienta “texto” con la herramienta “nombrar” por lo que se podría realizar un *acto de devolución* que llevaría a los estudiantes a identificar las diferencias de las herramientas del AGD Cabri.

En el literal a) y b) se esperaría que se movilicen conceptos matemáticos como son: la distancia de una recta a un punto, la construcción de segmentos, punto medio, perpendicularidad, al realizar estas actividades y reconocer estos conceptos geométricos los estudiantes iniciarían la *fase de formulación*, que les permitiría identificar que todos los segmentos trazados entre puntos correspondientes de una simetrización axial forman un ángulo recto o son perpendiculares al eje de simetría, de igual manera los puntos medios de estos segmentos pertenecen a la recta correspondiente al eje de simetría, como se muestra en la Figura 10 recorte A.

Figura 10. Modelación en Cabri, Tarea 2 Literales a), b) y c)



Sobre la realización de esta construcción se plantean cuatro interrogantes a los cuales los estudiantes podrían responder de la siguiente manera:

- ¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí? Posible respuesta: cualquier par de segmentos trazados entre los puntos correspondientes de una simetrización son paralelos.
- ¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta? Posible respuesta: el ángulo que forma cualquier segmento trazado entre puntos correspondientes de una simetrización y la recta que representa el eje de simetría en la escultura forman un ángulo recto de 90° grados.
- ¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta? Posible respuesta: los puntos medios de los segmentos trazados entre los puntos correspondientes en una simetrización pertenecen al eje de simetría.
- ¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta? Posible respuesta: todos los segmentos son cortados por la recta que representa el eje de simetría y la recta es perpendicular a cualquier segmento.

En el literal c), se esperaría que los estudiantes identifiquen de forma visual los movimientos en el plano, diferenciando las propiedades o elementos que intervienen en el movimiento sobre el Plano Euclidiano y las representaciones ligadas a un sistema de coordenadas en el plano cartesiano, al utilizar las herramientas de “rejilla” y “mostrar ejes”, los estudiantes identificarían que un movimiento se puede expresar por medio de coordenadas cartesianas.

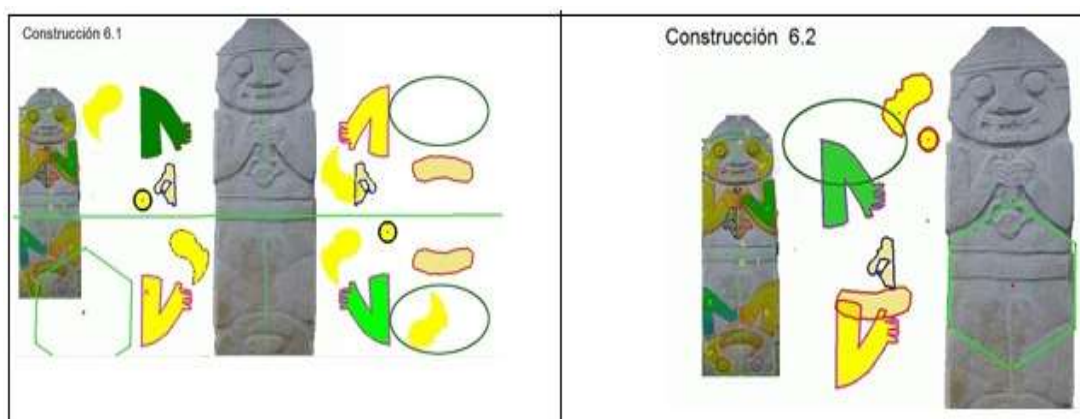
Un obstáculo que se puede presentar está relacionado con la no coincidencia de los puntos de la rejilla, con los vértices de las figuras resaltadas, ver Figura 10 recorte B, en este caso se debería trabajar con aproximaciones a números enteros, posiblemente se presente *dificultades* con el manejo de las coordenadas porque en este nivel sólo se trabaja en el primer cuadrante y no reconocen la posición de los números negativos, en este sentido Moreno (1998), expone que la cuadrícula solo favorece el trabajo con ejes verticales u horizontales, en los demás casos la cuadrícula se convierte en un distractor.

3.4.3 Análisis *a priori* de la Tarea 3: Explorando construcciones en Cabri.

Esta tarea surge de los resultados encontrados en el análisis de las representaciones geométricas en la escultura El partero¹⁷, en ella se observa que las transformaciones de simetría axial se encuentran presentes a partir de un eje horizontal y vertical, se considera que el escultor utilizó un sistema de referencia a partir de ejes perpendiculares cuyo punto de intersección se encuentra en el centro de la escultura, en la mayoría de sus detalles se puede verificar el uso de la simetría axial y central.

Las actividades planteadas para esta tarea corresponden a la exploración de las construcciones (6.1 y 6.2) elaboradas por el profesor en Cabri colocando una fotografía de la escultura El Partero como fondo de pantalla, sobre la imagen de esta escultura resaltó los detalles esculpidos con la herramienta de Cabri como “*polígono, elipse, circunferencia, simetría axial y rectas*”, las figuras modeladas son rellenas con diferentes colores y simetrizadas a partir de un ejes de simetría vertical y otro horizontal, con la herramienta “*arrastre*” de Cabri el docente retira los detalles resaltados de la escultura haciendo que las imágenes construidas simétricamente también queden por fuera de ella. La tarea para el estudiante es reconstruir la escultura de forma similar a una que se presenta como modelo, ver Figura 11.

Figura 11. Modelaciones en Cabri Tarea 3: Construcciones 6.1 y 6.2



En la *Guía del estudiante* se indica cómo mover un polígono en Cabri, para evitar que los polígonos se deformen al momento de ser arrastrados en la interfaz. Con las recomendaciones se busca disminuir las dificultades asociadas a los esquemas de uso del AGD, Brousseau (1986) considera que el *medio* no tiene ninguna intención didáctica.

En la construcción 6.1 realizada en Cabri, se esperaría que los estudiantes identifiquen la dependencia de las figuras simétricas, el movimiento y la posición de los ejes de simetría a partir del arrastre. En la construcción 6.2 además del arrastre deberían trazar ejes de simetría y aplicar simetría axial en algunos polígonos para reconstruir la escultura de acuerdo con el modelo que se le presenta en la interfaz de Cabri.

¹⁷ Ubicada en la mesita B del Parque Arqueológico de San Agustín

Propósitos

- Reconocer algunos fenómenos de visualización del movimiento de dos figuras simétricas en el plano.
- Identificar la dependencia que hay entre dos figuras simetrizadas.
- Identificar las características del movimiento de figuras simétricas respecto al eje de simetría.
- Construir el eje de simetría.
- Identificar las percepciones de los estudiantes en relación al desarrollo geométrico y científico del pueblo escultor.

Consigna

Tabla 7. Consignas de la Tarea 3

Tarea 3: Explorando construcción	
<u>A partir de la construcción 6.1</u> construidas en Cabri realiza las siguientes actividades. Debes tener en cuenta que para arrastrar las construcciones se acerca el cursor al objeto y cuando se nombre polígono lo puedes arrastrar, de lo contrario altera la forma de la figura. Arrastra las figuras y reconstruye la imagen como se muestra en la construcción.	
a.	¿Por qué cuando se arrastra una figura la otra que es congruente se ajusta a los detalles de la escultura?
b.	¿Qué simetría se utilizó en los detalles de los ojos?, ¿Qué simetría se utilizó para la configuración de los brazos?
c.	¿Qué dificultades se presentaron al desarrollar la actividad?
<u>A partir de la construcción 6.2</u> elaborada en Cabri, realiza las siguientes actividades: construye el eje de simetría y coloca cada detalle superpuesto en la escultura, si los detalles no están construidos realiza la transformación geométrica para completar el rediseño de la escultura en Cabri.	
a.	¿Qué dificultades se experimentan si el eje de simetría no está bien definido?
b.	¿Qué transformaciones geométricas utilizó?
c.	¿Qué elementos se deben tener en cuenta en las transformaciones de simetría?
<i>Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.</i>	

En esta actividad de acuerdo con Laborde (2001, p.301) este “tipos de tareas planteadas por el contexto de la computadora, solo pueden llevarse a cabo en el entorno informático”; en la construcción 6.1, los estudiantes realizarían diferentes tipos de tareas: de Tipo I cuando construyen los ejes de simetría y simetrizan algunas figuras, de Tipo III cuando se exploran y arrastran las construcciones y de Tipo IV: Enunciados de teoremas y su validación se evidencian cuando deducen las propiedades geométricas del movimiento de simetría axial en el plano.

Las interacciones del docente están orientadas a facilitar el *medio* a los estudiantes que en esta tarea corresponden al AGD Cabri y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín como un *medio* complementario.

La fase de acción de esta tarea está ligada a la herramienta del arrastre en Cabri, a partir del cual los estudiantes deberían identificar las figuras objeto y organizarlas sobre la escultura, teniendo en cuenta que algunas de estas figuras son imágenes creadas a partir de la aplicación de simetría axial, sólo se mueven cuando se arrastra la figura objeto correspondiente; es posible que los estudiantes

traten de coger una *figura imagen*, notarán que ésta no se deja seleccionar ni mover directamente por lo que manifestarían que la figura “no se pueden mover, que esta mala”, ante esta situación a partir de la exploración, los estudiantes deberían identificar la dependencia de la *figura imagen* de su correspondiente figura objeto. Logrando así, identificar una de las propiedades o elementos fundamentales de la simetría axial, (Acosta *et al.*, 2010).

En los procesos de instrumentación en la evolución de los esquemas de uso los estudiantes deberían reconocer que para arrastrar un objeto se coloca el puntero sobre los bordes de la figura y al emerger el texto (Este polígono o el nombre del objeto) haciendo clic izquierdo sostenido, podrá coger la figura y arrastrarla por el área de trabajo de Cabri, mientras que si se intenta arrastrar desde un vértice de la figura, ésta se deforma.

A partir de los movimientos que se generan con el arrastre y el eje de simetría vertical los estudiantes podrían observar que si el objeto A se desplaza hacia la derecha la imagen A' lo hace hacia la izquierda, si los movimientos se realizan paralelos al eje de simetría la imagen se mueve en la misma dirección paralela al objeto, se debe tener en cuenta que estas situaciones son propias del AGD y sólo se cumplen en los micro mundos de geometría dinámica como Cabri.

La fase de validación se desarrolla cuando los estudiantes interactúan con el *medio*, a partir de la visualización del movimiento de dos figuras simétricas en la interfaz de Cabri, deberían establecer que éstas se tocan cuando coinciden en el eje de simetría, en este ejercicio los estudiantes podrían argumentar que “dos figuras simétricas coinciden a lo largo de una recta llamada eje de simetría”, también validarían que, si el arrastre lo hace sobre el eje de simetría, en cualquiera de estos lugares el objeto y su correspondiente imagen se superponen, además que la figura objeto y su correspondiente *figura imagen* cuando se mueven lo hacen en direcciones contrarias si el movimiento es perpendicular al eje de simetría.

A partir de la identificación de esta propiedad geométrica se esperaría que los estudiantes determinen la ubicación de los ejes de simetría y su orientación, en la construcción 6.1 debe de identificar los ejes que se utilizaron para realizar las transformaciones de simetría axial. En la actividad del literal c) se esperaría que los estudiantes clasifiquen las simetrías que se utilizaron en el ejercicio de acuerdo a los ejes de simetría.

En la actividad correspondiente a la construcción 6.2 el grado de dificultad es mayor porque además de las actividades relacionadas con el arrastre, hallarían los ejes de simetría y determinarían la orientación de éstos, un error que se puede presentar está asociado al trazo incorrecto del eje de simetría, en este caso el docente realizaría un *acto de devolución*, que confronte a los estudiantes para reconocer las características que le permitan trazar los ejes de simetría, vertical y horizontal.

Al finalizar las actividades los estudiantes realizarían la puesta en común o fase de *formulación*, cada grupo discute sobre las respuestas que han dado a las diferentes preguntas y la experiencia de manipular las construcciones 6.1 y 6.2. Se esperaría que expongan los argumentos que tuvieron en cuenta para decidir que la respuesta compartida es la solución óptima.

Con los anteriores elementos registrarían en la *Guía del estudiante*, las conclusiones que se comparten por un representante del grupo a toda la clase en la puesta en común, se esperaría que todos los grupos puedan intervenir.

El docente construye un resumen o esquema de las presentación de los estudiantes y realizaría preguntas tendientes a aclarar algunas confusiones o a reafirmar las posturas expuestas en la puesta en común, en este momento se desarrolla la fase de *formulación y validación*, los estudiantes intervendrían para ratificar sus posiciones o señalar los errores en los que hayan incurrido sus compañeros, si es necesario el docente reorienta las intervenciones para que la discusión gire en torno de la situación propuesta en las tareas.

A partir de las diferentes intervenciones de los estudiantes sobre la realización de las tres tareas y la revisión de los registros de las clases anteriores, el docente realizaría un esquema o resumen, que se utiliza como insumo para la fase de institucionalización del concepto, exponiendo los elementos que intervienen en la transformación de simetría axial, su definición formal, cómo se construye la simetría de un objeto en la geometría euclidiana, los diferentes instrumentos que pueden utilizar para construir simetrías, la aplicación del concepto y una noción de la simetría en el plano cartesiano.

3.4.4 Análisis *a priori* de la Tarea 4: Diseña tu propia escultura.

Esta actividad se plantea como un instrumento de evaluación del concepto de simetría axial, se esperaría que los estudiantes diseñen en Cabri su propia escultura teniendo en cuenta las estrategias utilizadas por el grupo escultor de San Agustín, utilizando figuras geométricas y simetría axial, junto al diseño de la escultura; en un cuadro de texto los estudiante harían una narración escrita de los conceptos geométricos que utilizó asignando un significado a la escultura de acuerdo a los detalles que la conforman.

Al iniciar este encuentro el docente realizará una presentación sobre el arte escultórico y la simbología presente en las esculturas de San Agustín. Las actividades desarrolladas en Cabri según Laborde (2001), corresponden a tareas de Tipo I, las cuales se caracterizan por la posibilidad que tienen los estudiantes de realizar construcciones, en este caso la consigna de la tarea solo establece dos condiciones dejando un espacio amplio a la creatividad de los estudiantes, ver Tabla 8.

Propósitos

- Identificar la apropiación del concepto de simetría axial.
- Reconocer los avances de los estudiantes en los esquemas de uso del AGD.
- Identificar la percepción de los estudiantes sobre el grupo escultor.

Consigna

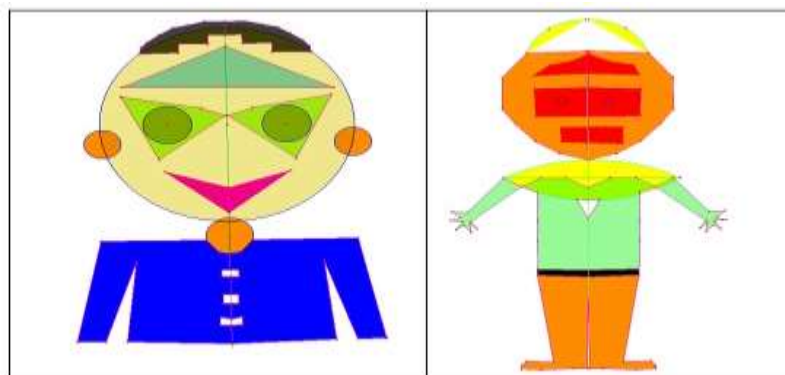
Tabla 8. Tarea 4, diseña tu propia escultura

Tarea 4: Diseña tu propia escultura
Utiliza la transformación de simetría axial, los principios del pueblo escultor, para diseñar tu propia escultura en Cabri, personalízala rellinando los polígonos con colores, denotando los ejes de simetría, los vértices con la notación correspondiente del objeto y su imagen, en un cuadro de texto en la interfaz de Cabri relata los elementos de la geometría que utilizó y que simboliza la escultura.
<i>Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.</i>

En la fase de acción de esta tarea, es posible que los estudiantes restrinjan sus creaciones al uso de figuras básicas por la dificultad que puedan tener para utilizar el AGD Cabri. Se esperaría que realicen las construcciones partiendo del eje de simetría y realizando detalles al lado izquierdo que luego a partir de la aplicación de la herramienta de simetría axial construyan el lado derecho de su diseño, además estos diseños podrían estar asociados a las características del cuerpo humano o rasgos antropozoomorfos, que son característicos de la estatuaria de San Agustín, como se puede observar en la Figura 12.

Durante la realización del ejercicio, el docente observa los avances del trabajo y para aquellos estudiantes con dificultades en el manejo de las herramientas de Cabri, el docente podría dar orientaciones sobre el manejo del ambiente de geometría que les permitan iniciar sus creaciones y representar sus ideas en Cabri.

Figura 12. Posibles diseños en la Tarea 4



Siguiendo con la gestión del docente debería indicar a los estudiantes veinte minutos antes de terminarse la clase que deben utilizar la herramienta texto para que realicen el relato que se pide en la *Guía del estudiante*. Además, antes de finalizar la clase el docente generaría un espacio para que los estudiantes manifiesten su percepción de trabajar con Cabri y sus apreciaciones sobre la cultura de San Agustín.

Capítulo 4

Experimentación

Siguiendo el esquema de la *micro-ingeniería*, en este capítulo se aborda los aspectos relacionados con la experimentación, que contiene las características de la población, la organización de la experimentación y el procesamiento de la información recopilada durante la puesta en acto de la secuencia de tareas.

4.1 Caracterización de la Población

La fase experimental de la investigación se realizó con estudiantes de grado Quinto A de la educación básica primaria en la IEG, ubicada a 10 km al norte del casco urbano de la ciudad de Cali, en el Corregimiento de Golondrinas.

Figura 13. Imágenes de la IIEG



Fuente: fotos propias de trabajo de campo.

El Corregimiento tiene una extensión de 1.046.78 Ha, 2.170 habitantes, el estrato socioeconómico es de nivel 1 y 2, cuenta con servicios de energía, acueducto, telefonía e internet. Planeación municipal Cali (2008).

En el año 2016 la IEG atendió a 565 estudiantes distribuidos desde transición a grado once, los estudiantes de grado quinto están divididos en dos grupos Quinto A en la jornada de la mañana y Quinto B en la jornada de la tarde. La fase de experimentación de esta investigación se realizó con los estudiantes de grado Quinto A, el cual está conformado por 28 estudiantes: 15 niñas y 13 niños, en encuesta¹⁸ realizada a los estudiantes de este grado se encontró que el 97% tienen un dispositivo informático en casa, sea computador o Tablet y el 52% tiene servicio de internet en su lugar de residencia.

Este grupo recibió sus clases en las aulas digitales, las cuales están equipadas con un video proyector, 30 computadores portátiles. Pese a contar con los recursos informáticos en el aula de clase, el uso de estos por parte de los estudiantes es esporádico, los docentes hacen poco uso de estos recursos, argumentan que es muy dispendioso sacar los equipos y entregárselos a cada estudiante y guardarlos al finalizar la actividad.

¹⁸ Encuesta realizada el noviembre 2016 en el marco de la contextualización de la IEG para la actualización del Proyecto Institucional Educativo Rural

Se realizaron algunos encuentros previos a la *puesta en acto* con los estudiantes de Quinto A donde se hizo un acercamiento a la cultura de San Agustín a través de videos y una consulta que los estudiantes efectuaron en casa sobre los aspectos generales del pueblo escultor.

En otro encuentro se llevó a cabo un diagnóstico sobre los conocimientos de geometría que tienen los estudiantes de Quinto A, a partir de la prueba Reto Saber G5-A¹⁹ implementada en el aula por el docente investigador, en esta actividad se evidenció que los estudiantes conocen sobre rectas, segmentos, figuras geométricas y clasificación de polígonos; presentaron dificultades con el manejo de ángulos y sus medidas y en las construcciones con regla y compás.

4.2 Organización de la Experimentación

En la *puesta en acto* de la secuencia de tareas el docente investigador²⁰ orientó las actividades con los estudiantes, por tener el perfil requerido, es decir los conocimientos en el área de geometría, manejo del AGD Cabri en el aula y el reconocimiento de las interacciones con el *medio* y los estudiantes en el marco de la TSD.

Las tareas se desarrollaron en cuatro encuentros entre el 18 de octubre y el 4 de noviembre del año 2016, como se describe en la Tabla 9

Tabla 9. Encuentros de la puesta en acto de la secuencia de tareas, simetrías en el plano.

Tarea realizada	Fechas de los encuentros	No de estudiantes	duración
TAREA 1: Manipulando recursos, presentación de la sesión y se desarrolla la Tarea 1 trabaja en grupos con papel, cartulina y témperas.	18 octubre	26	110 minutos
TAREA 2: Vive tu experiencia en AGD modelación geométrica en las esculturas de San Agustín con el uso de Cabri.	24 Octubre	26	110 minutos
TAREA 3: Explorando construcciones en Cabri y la fase de institucionalización del concepto	3 noviembre	25	110 minutos
TAREA 4: Diseña tu propia escultura, observaciones generales del trabajo realizado con el uso de Cabri y el acercamiento a la cultura de San Agustín.	4 noviembre	24	110 minutos

Se habían planeado tres encuentros de 110²¹ minutos cada uno, pero de acuerdo a las dinámicas presentadas en el desarrollo de las primeras tareas fue necesario extender el tiempo programado, efectuándose un encuentro adicional de 110 minutos en el que se realizó la Tarea 4.

¹⁹ El reto G5-A consta de cuatro preguntas de geometría de opción múltiple las cuales resuelven y a partir de los resultados se indaga sobre los conocimientos empleados para resolver las preguntas, este reto, tiene como referente los siguientes estándares MEN(2006) que plantean: Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños y construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

²⁰ El docente titular del grado Quinto A, no tiene las competencias en el manejo de Cabri, sus conocimientos en geometría son básicos y desconoce las interacciones del docente en la TSD.

²¹ Corresponden a un bloque de dos horas en el horario de las clases habitual de los estudiantes.

4.3 Recolección y Procesamiento de la Información

Durante los encuentros en los que se realizó la puesta en acto de la secuencia de tareas se recopiló información sobre su desarrollo a partir de los apuntes en la *Guía del estudiante*, las construcciones de simetría en cartulina con témperas, los archivos de Cabri y grabación de videos.

Los registros escritos en la *Guía del estudiante* se realizaron durante todos los encuentros, cada grupo de estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas respondió varias preguntas por escrito en los espacios que se habían dispuesto en la *Guía del estudiante*, estas respuestas se organizaron en tablas, donde se registró la síntesis a cada una de las respuestas que proporcionaron los siete grupos de trabajo a cada literal correspondiente a las pregunta planteadas en las consignas, como se pueden observar en las Tablas 10, 12, 13 y 14.

En los registros de las construcciones de simetría en cartulina de la Tarea 1, se analizó cómo los estudiantes ubicaron puntos correspondientes, identificaron el eje de simetría, la figura objeto y la *figura imagen*; estas construcciones se presentan en la Tabla 10 junto con la consolidación de las respuestas de esta tarea.

Se grabaron videos de cada encuentro, haciendo toma panorámica, acercamientos para registrar el trabajo de un grupo o de un estudiante en particular dependiendo del momento de la clase. Estos videos se constituyen en el insumo principal para realizar los análisis *a posteriori*; varios estudios consideran que el uso del video en la formación profesional ayuda a los profesores a valorar, apreciar y analizar más adecuadamente el pensamiento matemático de los estudiantes (Arcavi, 2015).

Según Kazemi & Franke (2004), entre las ventajas que tiene el uso del video están: analizar la reacción de los estudiantes frente a los conceptos matemáticos, las estrategias utilizadas en clase, los procesos de enseñanza en acto, la toma de decisiones del profesor sobre la marcha, el perfeccionamiento de su instrucción y respuesta a las necesidades de los estudiantes.

Los videos grabados en las sesiones de clase se editaron con el propósito de clasificar la información a partir de los fragmentos que se consideraron relevantes, porque las intervenciones de los estudiantes y el profesor giraron en torno al desarrollo de las tareas, luego se transcribieron para establecer los protocolos de observación, que se presentan en los Anexos 2, 3, 4 y 5.

Otro registro que se tuvo en cuenta para recopilar información corresponde a las construcciones realizadas en Cabri, estas *sesiones* se analizaron con la herramienta *revisar construcción* de Cabri, al finalizar las tareas 2 y 4 el docente recogió los archivos realizados en Cabri a un estudiante por grupo, estos se guardaron etiquetados con el grado, numero de tarea y nombre del estudiante o grupo, al revisar las construcciones se observó los diferentes momentos y experiencias que cada estudiante tuvo al trabajar con Cabri, tal como lo expone Gutiérrez (2005) que las *sesiones* permiten guardar y revisar las etapas de una construcción y de esta manera, poder analizar el comportamiento de los estudiantes en la resolución de un problema con Cabri. La información obtenida en la revisión de las secciones de trabajo en Cabri se consolidó en las Tablas 11 y 15.

Capítulo 5

Análisis *a posteriori* y evaluación

Capítulo 5

Análisis *a posteriori* y Evaluación.

Siguiendo el esquema general de la *micro-ingeniería* (Artigue, 1995), en este capítulo se abordaron los aspectos relacionados con los análisis *a posteriori*. Estos análisis se construyeron a partir de lo ocurrido y proyectado en el análisis *a priori*, las situaciones que no fueron contempladas, las interacciones propuestas en la TSD y la información recolectada y procesada; esto, con el propósito de confrontar si son ciertas las hipótesis planteadas en esta investigación. A la luz de los *análisis preliminares* se presentan los análisis *a posteriori* de la experimentación: primero se realizaron los análisis *a posteriori* de la puesta en acto de cada tarea y luego las consideraciones generales teniendo en cuenta la información recopilada en cada una de las rejillas de análisis.

5.1 Análisis *a posteriori* de la Tarea 1

En el desarrollo de esta tarea se destacan tres momentos:

El primer momento se vinculó con la fase de *acción* (Brousseau, 2000), cuando usando recursos manipulativos a partir de una cartulina de (50 cm x 35 cm) en la cual se realizó un doblez que seccionó la cartulina en dos semiplanos, en uno de ellos se pegó la fotocopia de una escultura de San Agustín, se resaltaron los bordes de los detalles de la escultura con témperas, al doblar la cartulina la pintura fresca se estampó en el otro semiplano, creando la *figura imagen*. Estas construcciones se pueden ver en la Tabla 10.

El segundo momento se asoció con la fase de *formulación*. De acuerdo con Brousseau (2000), a partir de la construcción realizada en el momento anterior, cada grupo de estudiante identificó puntos correspondientes, trazó rectas sobre ellos y respondió cuatro preguntas sobre la noción de simetría axial planteadas en la *Guía del estudiante*, Anexo 1.

En el tercer momento se realizó la puesta en común donde un estudiante de cada grupo mostró las construcciones en cartulina, relató la estrategia que utilizó para desarrollar la tarea y compartió las respuestas de su grupo al resto de los compañeros de la clase, esta actividad se vinculó con la fase de *validación* (Brousseau, 2000).

Al inicio de este encuentro, se entregó la *Guía del estudiante* con la *secuencia de tareas* a cada uno de los siete grupos de trabajo que se conformaron, el docente indicó que iniciaran el trabajo a partir de la lectura de la Tarea 1, se observó que algunos grupos esperaban que el profesor les dijera lo que debían hacer, ante esta situación la *devolución* del docente se limitó a sugerir que realizaran una nueva lectura de la Tarea 1, tal como se puede apreciar en el siguiente registro, lo que no se había contemplado en los análisis *a priori*.

E1: ¿qué hay que hacer?

E2: todo

E1: como el profesor no le dice nada a uno, si profe explique ¿qué hay que hacer?

P: lea la Tarea 1 de la guía

E1: Profesor, no entiendo la pregunta

Se observó que cuatro grupos presentaban dificultades para seguir las instrucciones escritas, al acompañar la lectura de algunos grupos se notaron dificultades para realizarla, por lo que se sugirió que varios integrantes del grupo realicen la lectura.

Posteriormente, se entregó a cada grupo el material correspondiente: la cartulina, fotocopia, témpera y un pincel. En las consignas de la Tarea 1 se observó que faltó especificar en qué consistía el Anexo 6.1 en la *Guía del estudiante*, por lo que fue necesario explicar la construcción de este anexo, como se muestra en el siguiente registro.

P: (muestra el cuarto de cartulina) tengo que corregir eso, está la tengo que pegar en la cartulina (muestra la fotocopia de la escultura), cuando peguemos la fotocopia en la cartulina este sería el Anexo 6.1 y sobre él es que vamos a trabajar, el doblez que dice ahí (muestra la cartulina) lo pueden hacer así, derecho, o en diagonal como quieran, eso depende de la imaginación de cada uno.



Luego de la aclaración, como se observó en el video, los estudiantes realizaron el trabajo con las témperas, modelando las figuras geométricas pintando los bordes de los detalles de la escultura, y los estamparon en la cartulina, como se proyectó en los análisis *a priori*. En el transcurso de este trabajo los estudiantes manifestaron que sus construcciones son obras de arte “*me está quedando una obra de arte*”, además trabajaron de forma ordenada expresando “*estamos bien juiciosos aquí*”. También, se observó que sus construcciones se elaboraron de forma detallada, por lo anterior se puede concluir que los estudiantes se comprometieron con las actividades propuestas (Watson & Mason, 2007).

En este ejercicio los estudiantes reconocieron que la *figura imagen* se construye a partir de la figura objeto, además el eje de simetría que en esta tarea corresponde a la recta trazada por el doblez de la cartulina, como se muestra en el siguiente diálogo.

P: ¿cuál es el objeto?

Es: dos señalan el dibujo imagen y dos el dibujo objeto.

P: ¿y la imagen?

Es: dos señalan el dibujo objeto y una señala el dibujo imagen.

P: uno solo ¿cuál es el objeto?

E3: (coloca la mano sobre el dibujo objeto) este es el objeto.

P: ¿y la imagen?

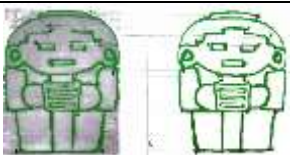
E3: (señala el dibujo imagen), esta es la imagen, profesor.

Del anterior diálogo, además de establecer como identificaron los estudiantes los componentes de la simetría axial, se puede observar sus interacciones en el grupo, y las devoluciones que el docente realizó, de acuerdo con Brousseau (2007), la *devolución* es el acto por el cual el docente hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje y lo motive o guíe a encontrar la solución a partir de la exploración del *medio*.

Para dar paso al segundo momento, fue necesario recoger las témperas y pinceles, además de recordar el manejo del tiempo con el fin de alcanzar a ubicar los puntos correspondientes y trazar las rectas solicitadas en las consignas de la guía, ya que, en el primer momento se utilizó más tiempo del proyectado en los análisis *a priori*.

En este momento los estudiantes identificaron varias parejas de puntos correspondientes, los nombraron, trazaron rectas que unen dichos puntos y respondieron cuatro interrogantes. Teniendo en cuenta los registros escritos en la Guía del estudiante de cada grupo, se construyó la Tabla 10.

Tabla 10: Construcciones en cartulina y consolidación respuestas de la Tarea 1

Grupo	Preguntas de la Tarea 1				
	Las preguntas se relacionan en la Tabla 5. Consignas de la Tarea 1.				
	Construcción en cartulina	a	b	c	d
G1		Si, al pintar los bordes del dibujo de la fotocopia al estamparlo al otro lado dio lo mismo	Sí, son la misma figura	Largas y rectas	Son rectas, son perpendiculares
G2		Sí, se parecen porque al echarles pintura y doblarlo queda el mismo estampado	Sí, tienen el mismo tamaño que el del dibujo el mismo estampado y forma,	Escribe varias medidas que son diferentes	Se relacionan las rectas paralelas y perpendiculares, hay 3 paralelas que no se tocan y dos perpendiculares
G3		No, el objeto es más grande que el dibujo o la imagen	Sí, porque cuando se calcan el dibujo queda igual que el otro	El punto es 48 porque si pasamos la recta nos da 24+24 entonces la imagen puede ser geométrica.	Son distintas porque una está fotocopiada y tiene diferentes puntos y la otra está hecha a mano y los puntos encajan.
G4		Tienen la misma forma porque se cogió el mismo concepto de la imagen.	Sí, porque fue copiado delineando los bordes	Los puntos son A, C, D, E, J, M,	La relación que hay entre todos es que son líneas rectas.
G5		Las dos figuras quedaron iguales, pero hubo problemas cuando se repintó.	Sí, porque al delinear la figura doblarla se estampó	A y A', B y B', C y C', F y F', D y D', R y R'	No hay ninguna similitud en la imagen, ya que algunos son torcidas, lo que hicimos fue repintar con lapicero negro los verdaderos puntos

G6		Sí, porque esta como calcada, ya que mientras doblamos la cartulina y el dibujo quedaba plasmado tal cual la imagen pintada.	Sí, porque lo pintado queda plasmado en la cartulina, pero cuando dejamos secar la pintura, toco repintar y quedo muy grueso.	Del punto T al Punto T'= 27.9 cm, del punto S al punto S'=31.1 del punto K al punto K' 32.1	Que son paralelas, esta relación no se cumple para cualquier par de rectas trazadas porque si se cortan ya no son paralelas.
G7		Sí, porque al estampar la imagen contra la cartulina, los bordes tenían pintura y por eso pasó la figura.	Sí, porque la copia de la figura es una réplica de la original.	La medida de los puntos a la recta son iguales, de I' a L y de La I miden lo mismo 10.5 cm	Son paralelas, si porque son paralelas.

Al revisar las respuestas de los siete grupos del literal a), al comparar la figura objeto con la *figura imagen* que se estampó al doblar la hoja ¿Se puede asegurar que tienen la misma forma?, ¿Por qué? seis grupos respondieron que si, como estaba planteado en los análisis *a priori*, dos grupos argumentaron que la imagen se calca, tres grupos que “*se parecen porque al echar pintura y doblarla queda el mismo estampado*”, un grupo expone “*que tienen el mismo concepto*”.

Pero el G3 dice que no, “*el objeto es más grande que el dibujo o la imagen*”; esta situación se presenta porque al observar la construcción en la cartulina, el eje de simetría que se utilizó es inclinado y la figura objeto quedó en la parte de arriba lo que podría generar el efecto visual de ser más grande en relación con la *figura imagen* que está más abajo, esta situación evidenció los errores que se presentan cuando el estudiante no está familiarizado con la ubicación de los ejes de simetría oblicuos, así como lo afirma Moreno (1998), se considera una dificultad que presentan los estudiantes cuando el eje de simetría no es horizontal o vertical, en este caso el grupo realizó el doblez de la cartulina en diagonal, de ahí que, expresen que está como torcida, en la puesta en común, el vocero de este grupo cambió su respuesta pero en su argumentación insiste en que esta torcida, como se muestra en siguiente fragmento.

P: ¿tienen la misma forma? G3: si, al calcar la imagen con pintura al otro lado se parece, pero sale como torcida. P: ¿por qué, creen que sale como torcido? G3: porque la imagen está torcida. P: ¿y por qué más creen que está torcida? G3: porque la doblamos así (muestra la forma como doblaron la cartulina).	
---	---

En relación con la pregunta del literal b) ¿La fotocopia de la escultura, **el objeto**, tiene el mismo tamaño que el dibujo estampado, **la imagen**, al otro lado de la línea?, ¿Por qué?, esta pregunta solo indaga por el tamaño, todos los grupos respondieron si, cómo se había proyectado en los

análisis *a priori*, argumentando que es una copia que se ha realizado al delinear los bordes y se plasmó en el otro lado o que éste se calcó y por lo tanto tienen el mismo tamaño.

En el literal a) los estudiantes debían marcar puntos correspondientes, trazar rectas sobre estos, luego establecer las distancias de los puntos al eje de simetría, los puntos fueron registrados en todas las construcciones y marcados con la notación correspondiente, un grupo no trazó las rectas y a la pregunta *¿Cómo son estas distancias?* se esperaba que respondieran *iguales*, pero solo el G3 y G7 realizó la actividad correctamente; los demás grupos respondieron *diferentes* porque realizaron las medidas entre los puntos correspondientes; otros solo escribieron las letra que representan los puntos como se puede ver en la Tabla 10, es posible que no comprendieran la pregunta o que estuviera mal redactada, por lo que tuvieron en cuenta la medida de dos rectas sin hacer la relación con el punto medio, esta situación se presenta por la falta de claridad en las consignas y la necesidad de centrar las respuestas en la argumentación como lo propone Pochulu *et al.* (2013) en los criterios para analizar la calidad y la pertinencia en el *diseño de tareas*, que promuevan la argumentación, modelización, comunicación y resolución.

En el literal d) las respuestas fueron diversas, se pidió trazar rectas que pasen por los puntos correspondientes y se plantearon las preguntas: *¿qué relación geométrica hay entre las rectas?*, *¿Esta relación, se cumple para cualquier par de rectas, trazadas entre los puntos del objeto y su correspondiente punto en la imagen?* *¿Por qué?*, a estas preguntas sólo tres grupos respondió que son paralelas, además un grupo también dijo que “hay dos que son perpendiculares, pero hay tres paralelas o sea que no se tocan”, las respuestas dadas por la mayoría de los grupos no corresponden a la esperada, por ejemplo que “no hay ninguna similitud”, que “la relación que hay entre todas es que son líneas rectas”, en esta situación el lenguaje utilizado en la consigna generó confusión cuando se dice que en cualquier par de rectas por lo que sería preferible que tenga pocas preguntas (las más generales) y que los alumnos hagan un proceso de análisis que los lleve a resolver cuestiones intermedias (Pochulu *et al.*, 2013).

De las respuestas anteriores se puede concluir que los grupos que afirmaron que son paralelas solo respondieron al primer interrogante, pero ninguno estableció si esta relación se cumplía para cualquier par de rectas. En el video se aprecia que varios grupos solicitaron explicaciones al profesor para trazar las rectas, dejando en evidencia la dificultad para comprender las indicaciones por escrito, en la devolución el profesor solicitó que se realice nuevamente la lectura, como se aprecia en el siguiente dialogo:

E2: no entendemos esta pregunta.

E1: pero ya vamos bien.

E2: (lee la pregunta de la guía). Trazas rectas que pasen, por el punto en *el objeto* y su correspondiente punto en *la imagen*, ¿qué relación geométrica hay entre las rectas trazadas? *¿Por qué?*

E1: a pues yo digo que eso sería a lo largo y a lo ancho. (Señala la construcción en la cartulina)

P: primero tracen las rectas para que las vean.

E3: pero como.

Estas dificultades observadas en la situación anterior se dan por la complejidad de los objetos y la falta de preconceptos (Moreno, 1998).

En el cierre de esta tarea, se solicitó a cada grupo registrar algunas experiencias y comentarios

en la *Guía del estudiante*, la mayoría registraron su percepción sobre las actividades realizadas y el trabajo colaborativo, por ejemplo “*que la escultura nos quedó bonita y que lo mejor fue que trabajamos en equipo*”, “*nos pareció la actividad muy creativa y divertida porque aprendimos nuevas cosas*”, “*nos pareció muy chévere el trabajo*”, estos comentarios reafirman lo expuesto por Alsina y Planas (2008), que plantean que para los niños, la manipulación de materiales además de ser una manera divertida de acceder al conocimiento, es una forma más eficaz de aprender.

A partir de la *puesta en acto* y la confrontación de los análisis, se pueden evidenciar los siguientes aspectos durante la implementación de la Tarea 1:

- El bajo nivel de lectura de los estudiantes, que se evidenció al inicio, dificultó el desarrollo de las actividades haciendo que se empleara más tiempo del estimado.
- La necesidad de realizar ajustes a las consignas en la Guía del estudiante; en el primer párrafo no se especificó a qué corresponde el Anexo 6.1, las preguntas a y b se pueden agrupar en una sola, la actividad de la pregunta c y d pueden hacer parte de las construcciones y cambiar el trazo de una recta entre los puntos correspondientes por el de un segmento para diferenciarlo de la recta del eje simetría.
- Se evidenció que el trabajo con material manipulativo propicia la integración y fortalece el trabajo en equipo, esta situación se puede ver en los diferentes registros.
- En relación con los materiales utilizados es conveniente entregar a los estudiantes el Anexo 6.1 elaborado, con el doblez realizado con diferentes inclinaciones, para que exploren las diversas posiciones del eje de simetría, las témperas que se utilizan pueden ser de dos colores y entregar por lo menos dos pinceles delgados a cada grupo.
- En la construcción del concepto de simetría axial, los estudiantes identificaron: la figura objeto y la *figura imagen*, los puntos correspondientes, el eje de simetría a partir del doblez de la cartulina, este se realizó en diferentes ángulos lo que facilitó la construcción del concepto y no crear dependencia con los ejes verticales y horizontales.
- Los estudiantes manifestaron en varias oportunidades que las esculturas son obras de arte al igual que algunas de sus construcciones, lo que evidenció un acercamiento al arte escultórico.
- Se observó que la mayoría de los estudiantes estaban comprometidos con la realización de las tareas propuestas, manifestando su agrado por las actividades presentadas, expresando que “*este tipo de actividades son chéveres, que la clase es más dinámica y no se aburren*”.

5.2 Análisis a posteriori de la Tarea 2.

Un factor esencial en el *diseño de tareas* de acuerdo con Godino *et al.* (2003) está determinado por la gestión del profesor en el aula de clase por lo que para el desarrollo de esta tarea fue necesario verificar que los computadores tuvieran la carga completa. Y luego de distribuirlos los portátiles o TDA sin contratiempos se guardó en cada computador la carpeta de la Sesión 6, que contiene la *Guía del estudiante*, las construcciones (6.1 y 6.2) y las imágenes de las esculturas de San Agustín que se utilizaron para las tareas dos y tres.

La actividad se inició con la lectura de las consignas de la Tarea 2 en la *Guía del estudiante*, se observó que un tercio de los estudiantes presentaron dificultades para el manejo del mouse, en algunos computadores emergió el mensaje TEST MODE distribuido en toda la pantalla lo que

dificultó la observación de la interfaz de Cabri, de acuerdo con Trouche (2004), quien considera que en la implementación en el aula, detrás de las dificultades de los profesores y de las deficiencias del uso de los estudiantes, está un importante proceso cognitivo-didáctico que busca transformar una herramienta técnica en un instrumento para el trabajo matemático.

Esta tarea se desarrolló en tres momentos: en el primero los estudiantes exploraron las herramientas de Cabri. Gamboa (2007), destaca la importancia del uso de la tecnología digital como un *medio* que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes no podría desarrollar por la inversión de tiempo; en el segundo momento, a partir de una escultura que se colocó como fondo de pantalla en Cabri, los estudiantes *modelaron* las representaciones geométricas y detalles que conforman la escultura.

Los anteriores momentos se vinculan con la fase de *acción* (Brousseau, 2000). En el tercer momento los estudiantes trabajaron en grupos, donde respondieron cuatro preguntas que se les plantearon sobre conceptos asociados a la noción de simetría axial y validaron si las figuras modeladas son simétricas, por último, realizaron la puesta en común; este momento se asocia con las fases de *formulación y validación*.

A partir de la lectura de la Tarea 2: *Vive tu experiencia en el AGD*, se generaron varios interrogantes acerca de cómo abrir el programa y colocar la imagen de fondo de pantalla en Cabri, la *devolución* del docente fue mostrar haciendo uso del video proyector los pasos que se deben seguir para abrir el programa Cabri y colocar una imagen como fondo de pantalla, además exploró las herramientas del programa, lo que permitió a los estudiantes familiarizarse con el entorno informático y realizar las tareas planteadas, teniendo en cuenta que en esta oportunidad el *medio* no tiene ninguna intención didáctica (Brousseau, 1986).

En relación con el manejo de Cabri, como se había contemplado en los análisis *a priori* los estudiantes lo asociaron al editor de imágenes Paint, por las funciones que este programa tiene para construir figuras geométricas, el manejo del AGD no limitó el desarrollo de las tareas.

Figura 14. TDA en las UCA y Distribución de computadores a los estudiantes



Cuando los estudiantes interactuaron con el recurso informático, esta actividad se vincula con la *fase de acción* (Brousseau, 2000). Partiendo del manejo básico de las funciones de la TDA, se apreció que a pesar de que los computadores se encuentran en el aula de clase, su uso no es habitual, a juzgar por las dificultades que presentaban los estudiantes en el manejo del mouse integrado; varios estudiantes insistentemente solicitaron el mouse periférico, la *devolución* del docente en esta situación fue exhortarlos a desarrollar habilidades para utilizar el computador de acuerdo a su

configuración, como se observa en el siguiente fragmento:

E: ahí, ¿no importa si queda así el círculo?
 P: si quiere bórralo, quítelo de ahí, dele apuntador
 E: ¿es que se borra?
 P: selecciónelo aquí, cójalo del punto, jálelo con la otra mano, saque la otra mano, ya puede borrarlo ahí, no lo borre todo, yo les aconsejo que usen la otra mano, las dos manos son para utilizarlas.

Esta situación permitió analizar los procesos relacionados con la evolución de los esquemas de uso donde se observa que a partir del uso frecuente del recurso tecnológico permite ver como el artefacto es transformado progresivamente en un instrumento (Rabardel, 2011). Una muestra de los procesos de evolución por adaptación, se vio cuando los estudiantes comenzaron a utilizar sus dos manos para trabajar con las TDA, a pesar de que el profesor les había sugerido desde el inicio, sólo lo hicieron cuando se percataron que de esta manera se facilita realizar algunas funciones en el computador, como utilizar segundas funciones del teclado y en Cabri la mayoría de las herramientas como el arrastre y las construcciones, requieren mantener presionada la tecla izquierda del mouse y simultáneamente desplazar la yema del dedo por el trackpad²².

En el segundo momento los estudiantes trabajaron de forma individual en las TDA, en este ejercicio se presentan diferentes situaciones relacionadas con los esquemas de uso, por ejemplo.

E: profesor, pero mira que no pinta, profe no pinta (se observa la pantalla del computador del estudiante)
 P: hay unos estudiantes que están haciendo esto, punto, punto, punto (muestra en el video proyector) y se me queda pegado, para poder terminar (el polígono) hay que darle clic hasta donde iniciamos, cuando yo le doy clic al primer puntico entonces ahí si ya se termina el polígono.

Varios estudiantes, al construir polígonos marcaron puntos cercanos que se interceptaron originando varios polígonos que no cumplían con las características del objeto en Cabri, en este caso, no fue posible rellenar el polígono y manifestaron “*esto se dañó, no se deja pintar*”; también ocurrió que al finalizar el trazado del polígono no marcaron el punto donde inició la construcción y la herramienta seguía activada, ante esta situación la devolución del profesor fue explicar cómo se construye el polígono y sugirió usar los comandos control+z, (ó deshacer la última acción) para agilizar el trabajo, estos actos de devolución no intervienen en la construcción del conocimiento matemático teniendo en cuenta que el *medio* no tiene ninguna intención didáctica (Brousseau, 1986).

²² El Touchpad o Trackpad es una almohadilla táctil que tienen los portátiles para sustituir el mouse periférico tradicional.

Figura 15. Modelación en Cabri, Tarea 2



En la Figura 15, se puede observar el proceso de modelación de las orejas de la escultura usando la herramienta círculo, los estudiantes preguntaron sobre cómo construirlo, desplazarlo o modificar su tamaño, como se ve en el siguiente fragmento:

E: ¿cómo se hace el círculo?

P: Seleccione el círculo, marca un puntico donde quieres el centro das clic, abres y das clic.

E: pero es que mire eso se queda ahí pegado.

Cuando los estudiantes construyeron el círculo, se presentaron dos situaciones adversas, que habían sido previstas en los análisis *a priori*, en la primera los estudiante dieron un clic, arrastraron el cursor sin dar nuevamente clic por lo que la circunferencia cambiaba constantemente de tamaño o el círculo construido no era el conveniente, el estudiante manifestó “*mire eso se queda ahí pegado*”, la segunda situación sucedió cuando el círculo construido no se superpone sobre el detalle en la escultura y al tratar de cambiarlo de lugar sujetándolo desde la circunferencia sólo modificó su tamaño, luego los estudiantes se percataron de que se puede mover cogiéndolo desde el centro del círculo, identificando la posibilidad que tienen de arrastrar la figura y cambiarla de lugar, esta situación, de acuerdo con Santacruz (2011), hace parte de la fase pre-estructurada del Esquema Social de Uso y corresponden al arrastre exploratorio.

En el proceso de modelación, los estudiantes identificaron y resaltaron las representaciones geométricas que conforman la escultura, utilizando diferentes herramientas de Cabri algunas de las cuales no se contemplaron en los análisis *a priori* como son el uso de arcos y polígonos regulares, además decoraron el exterior de la escultura con algunos círculos concéntricos, triángulos y polígonos regulares que asemejan estrellas de varias puntas.

Al finalizar la tarea se guardó la construcción de un estudiante por cada grupo, la cual se analizó a partir de la herramienta de Cabri *revisar construcción*, estos análisis se presenta en la tabla 11.

Tabla 11. Modelaciones Geométricas en Cabri de la Tarea 2

No	Imagen de la Construcción en Cabri	Revisión de la construcción y estrategia utilizada en Cabri
G1		En la revisión de la construcción se nota que modeló las representaciones geométricas a partir de polígonos, primero modeló los detalles de la izquierda, luego la derecha, realizó todas las actividades planteadas y el relleno de color negro que no permitió ver los nombres asignados a algunos puntos marcados.
G2		En esta construcción se identificó que el estudiante utilizó un polígono para definir el contorno de la escultura, las orejas las modeló a partir de circunferencias, se observó que en parte del rostro y las manillas de la escultura utilizaron la herramienta arco. El estudiante realizó los trazos de la recta y el segmento, pero no relleno las figuras porque al intentarlo toda la escultura queda de un único color y oculta las demás construcciones esto ocurrió porque modeló todo su contorno mediante un solo polígono.
G3		Al revisar los pasos de la construcción en Cabri el estudiante utilizó las herramientas polígono y círculo, en el desarrollo de la sesión en varias oportunidades manifestó que la escultura no se deja pintar una posible causa es que definió el contorno y la mayoría de los detalles con un solo polígono por eso cuando la relleno toda quedó de un solo color.
G4		En la mayoría de las construcciones utilizó la herramienta polígono indiscriminadamente, sin definir figuras por separado, luego utilizó la herramienta polígono regular para modelar las dos orejas de la escultura, con un círculo en su mano izquierda modeló las manillas que adornan las muñecas de la escultura, por último, adornó su trabajo con polígonos regulares con un número de lados expresados en Cabri como fracciones que se asemejan a estrellas de muchas puntas.

G5		El estudiante que desarrolló esta construcción es uno de los más adelantados en sus esquemas de uso, al revisar la construcción se verificó que modeló los detalles de la escultura por separado utilizando polígonos, también utilizó la circunferencia y desarrolló las actividades de nombrar puntos, trazar y medir segmentos, medir ángulos y la herramienta de rellenar y dar color.
G6		En esta escultura realizaron la modelación de un detalle en la parte derecha y luego construyó el mismo a la izquierda asociando este aspecto con lo desarrollado en la Tarea 1, aunque realizó la mayoría de las actividades propuestas no termino el trabajo, solo utilizó polígonos y círculos.
G7		Esta construcción se inició a partir de la modelación del ojo izquierdo y la boca, luego modeló un elemento al lado izquierdo y su correspondiente imagen al lado derecho, nombró los puntos trazó la recta y los segmentos y por último determinó las medidas de los ángulos y las longitudes.

En este ejercicio se observó como la escultura permite al estudiante reconocer figuras geométricas e identificar el uso de la transformación geométrica por parte de los escultores prehispánicos de San Agustín; en los diseños realizados por los estudiantes se observó como modelaron las representaciones geométricas y los detalles que forman la escultura con el uso de las herramientas de Cabri, algunos estudiantes realizaron la modelación iniciando con los detalles que están a la izquierda y seguidamente realizaron el mismo a la derecha, semejando la aplicación de simetría axial. Los estudiantes trazaron en la escultura tres rectángulos, dos círculos que dan forma a las orejas, dos estudiantes utilizaron la herramienta “arco” para modelar parte del rostro y las manillas de la escultura.

De acuerdo con lo realizado en la Tarea 2, que se evidenció en el video y los archivos de Cabri, se puede concluir que los estudiantes reconocen, redefinen figuras geométricas en las esculturas y verifican el uso de la transformación de simetría en los detalles que dan forma a los monolitos, lo que coincide con el planteamiento de Laborde (1997), cuando afirma que la geometría:

Puede ser considerada como el resultado de una modelización del dibujo, y que así puede servir de instrumento de producción y de control del dibujo, o incluso de predicción. Pero, inversamente, el dibujo en geometría puede ser considerado como modelo del objeto geométrico. (p.41)

En relación con la definición del eje de simetría en las construcciones G1, G2, G3, G5, y G7 se trazó la recta que permite verificar si los detalles de la escultura son simétricos. En este ejercicio la mayoría de los estudiantes ubicaron puntos correspondientes haciendo uso de la herramienta “Nombrar” marcaron los puntos con la notación establecida.

Para verificar si la escultura es simétrica se pidió a los estudiantes que trazaran segmentos entre los puntos correspondientes, determinaran las medidas de los puntos al eje de simetría y midieran el ángulo formado entre los segmentos y la recta vertical, como se evidenció en las construcciones G1, G2, G5, G6 y G7.

En el tercer momento de esta sesión los estudiantes realizaron el trabajo en grupo para analizar sus construcciones, discutir las preguntas y realizar la puesta en común.

Los análisis de estas actividades se realizaron a partir de los registros en *la Guía del estudiante* y el protocolo de observación de la Tarea 2, teniendo en cuenta las dos primeras preguntas de esta tarea que se pueden ver en el Anexo 1; estaba contemplada otra pregunta literal c) que indagaba sobre las coordenadas de los vértices de las figuras utilizando la herramienta rejilla de Cabri, en los análisis *a priori* se había considerado que tendrían dificultades en esta actividad, al identificar que los estudiantes no reconocen las coordenadas de un punto en el plano se suspendió este punto, las respuestas de los literales a) y b) se presentan en la Tabla 12.

Tabla 12. Consolidación de las respuestas de la Tarea 2

	Pregunta literal a)	Pregunta literal b)			
Grupo / Preguntas	a. Mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta <i>l</i> y de su correspondiente en la derecha a la recta <i>l</i> , puedes utilizar la notación distancia (<i>A</i> , <i>l</i>) o distancia (<i>l</i> , <i>A'</i>), realiza esta misma acción con otros puntos, ¿cómo son las distancias correspondientes?, ¿Por qué?	b. Traza segmentos entre los puntos del objeto y su correspondiente en la imagen, con la herramienta de Cabri halla el punto medio.			
		b.1	b.2	b.3	b.4
		¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí?	¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta?	. ¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta?	. ¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta?
G1	Son parecidas y describe varios ejemplos.	Que los dos quedan con el mismo tamaño.	Que las dos quedan con el mismo tamaño.	Escribe las medidas de los ángulos: 89.5°, 89.8°, 91.2°, 99.0°	Algunos puntos están cerca de la recta y otros están encima
G2	Similares porque la recta no está casi ubicada en la mitad, colca ejemplos	Son paralelas porque no se cortan	Forma una cruz de 90°	Establecen una simetría o una igualdad a ambos lados.	Que son rectas perpendiculares
G3	Del punto B a la recta hay 11,78 cm y de la B' a la recta hay 5,13	Que son las mismas figuras	90°	Que tienen puntos de inicio y no tienen puntos de final	Tienen un punto de inicio y un punto de final
G4	Son similares porque una mide 4,39cm y la otra mide 4,42 cm	Son segmentos de forma paralela que forman 90°	Forman ángulos de 90 grados	Son diferentes porque una mide 4,80 cm y el otro segmento mide 5,01 cm	Que se cortan en la mitad los segmentos por la recta

G5	Las medidas de los puntos no son iguales, pero si son similares porque algunos puntos están más corridos que los otros	Todas son paralelas	Forman un Angulo de 90 grados	La relación que hay es que todos los puntos están en la recta o cerca de ella.	Todos son perpendiculares a la recta
G6	Las distancias son parecidas porque la recta está en el centro de la figura	Que todas empiezan y terminan en un punto	Ángulos de 90°	Que los puntos y las rectas están centradas	Que son líneas perpendiculares porque se cruzan entre ellas.
G7	Igual porque la distancia cuando la medimos es la misma.	Que todos tienen un punto de comienzo y un punto de fin	Ángulos rectos	Que todas se cruzan	No muchas, algunas que se establecen en la figura

De los registros en la *Guía del estudiante* en relación con literal a) se observó que, dos grupos afirmaron que las distancias son iguales, cuatro que son parecidas o similares, un grupo colocó que no son iguales, pero si son similares y otro propuso que son distintas relacionando un ejemplo de medidas que no corresponden, conforme a las respuestas se logró que los estudiantes identificaran que en una simetría axial dos puntos correspondientes son equidistantes del eje de simetría, esta propiedad fue reconocida por los estudiantes y se hizo evidente cuando en los grupos G2 y G5 justificaron su respuesta exponiendo que “*similares porque la recta no está casi ubicada en la mitad*” y “*son parecidas porque la recta está en el centro de la figura*”, en las construcciones en Cabri se observó que la mayoría de los grupos predicen la ubicación del eje de simetría y lo validaron al afirmar que son similares parecidas o iguales las distancias entre puntos correspondientes al eje de simetría donde se evidencia que los estudiantes reconocen las propiedades de la simetría axial de acuerdo con Acosta *et al.* (2010), lograron *definir o predecir el eje de simetría*.

En la pregunta del literal b) en las construcciones realizadas en Cabri, en la Tabla 12, se observa que seis grupos realizaron la actividad trazando como mínimo cuatro segmentos y hallaron sus puntos medios, a partir de estos trazos se responden las preguntas del literal b).

De las respuestas dadas a la pregunta (b.1) *¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí?* tres grupos dijeron que son paralelas, lo que corresponde a la respuesta proyectada en los análisis *a priori*, dos dijeron que son la misma figura o tienen el mismo tamaño y los otros dos las relacionan con el origen y el final de la recta. Los cuatro grupos que no acertaron en la respuesta posiblemente no reconocen el concepto de paralelismo o la consigna no fue muy específica por lo que pudo interpretarse de distintas maneras.

En el literal (b.2) *¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta?* cinco grupos respondieron que un ángulo de 90° grados, uno que un ángulo recto y un grupo solo escribió las medidas de los ángulos obtenidos en Cabri. En esta oportunidad todas las respuestas coincidían con lo proyectado en los análisis *a priori*, en este caso el *medio* proporcionó elementos que les permitió reconocer la medida del ángulo formado entre las rectas cuando utilizaron la herramienta *medir ángulo*.

Las respuestas al literal (b.3) *¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta?* a esta pregunta cinco grupos respondieron que “*están en la recta, muy cerca de ella, encima de la recta o se cruzan*”, un grupo escribió que “*establecen una simetría a ambos lados*”, con esta

actividad los estudiantes reconocieron la relación entre los puntos medios de los segmentos trazados entre puntos correspondientes y el eje de simetría.

En la pregunta (b.4). *¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta?* cuatro grupos respondieron que son perpendiculares, un grupo que los segmentos pasan por encima de la recta y dos grupos colocaron respuestas que no se relacionan con la pregunta. Estas respuestas permitieron establecer que la mayoría de los estudiantes identifican la perpendicularidad entre estas rectas, teniendo en cuenta las respuestas a las preguntas se puede concluir que la mayoría reconocen la relación de movimiento en el plano en una simetría axial (Acosta *et al.*, 2010).

Del desarrollo realizado por los estudiantes en la Tarea 2, se puede afirmar que:

- La recta vertical que trazaron los estudiantes sobre la fotografía de la escultura colocada como fondo de pantalla en Cabri corresponde al eje de simetría axial de la escultura.
- Los estudiantes identificaron los elementos que intervienen en la simetría axial, reconocieron las propiedades que definen la transformación de simetría axial, teniendo en cuenta los fenómenos visuales relativos al movimiento de figuras geométricas en el plano propuestas por Acosta *et al.* (2010), respecto a *Definir o predecir el eje de simetría*:
- A partir de la fotografía colocada como fondo de pantalla en Cabri, modelaron las representaciones geométricas de la escultura, determinaron el eje de simetría y lograron establecer la relación de simetría axial en los grabados de la escultura.

5.3 Análisis *a posteriori* de la Tarea 3.

En esta tarea se destacaron dos momentos: El primero correspondió a la exploración de las construcciones 6.1 y 6.2 realizadas en Cabri (ver Figura 11), en la construcción 6.1, los estudiantes a partir del arrastre de las partes modeladas de la escultura dispersas en el plano reconstruyeron la escultura de acuerdo con un modelo dado; esta actividad se vincula con la fase de *acción*, Brousseau (2000), en la construcción 6.2 además de arrastrar algunas figuras también trazaron dos ejes de simetría y utilizaron la herramienta de “*simetría axial*” para crear las figuras que faltaban y reconstruyeron la escultura según el modelo dado, esta actividad se vinculó con la fase de *formulación y validación* (Brousseau, 2000).

El segundo momento, se asoció a la fase de validación, partiendo de la experiencia de trabajar con las construcciones 6.1 y 6.2 los estudiantes respondieron varios interrogantes de la guía del estudiante (ver Tabla 7) referentes a la noción de simetría axial y realizaron la *puesta en común*.

Al finalizar este encuentro se realizó la fase de *institucionalización* (Brousseau, 2000) donde el profesor retomó los aportes realizados por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas anteriores y formalizó o institucionalizó el concepto de simetría axial.

En el primer momento se distribuyeron los computadores portátiles a cada estudiante, posteriormente se les solicitó abrir la *Guía del estudiante* y leer la Tarea 3 donde se pide que abran el archivo construcción 6.1 realizada en Cabri, un estudiante comparte una estrategia para abrir el archivo y a partir de esta intervención el docente orientó a los estudiantes sobre como hacerlo, en esta oportunidad, solo cinco estudiantes presentaron dificultades.

En ese momento las intervenciones de los estudiantes giraron en torno al arrastre de las figuras, por lo que la devolución del profesor fue sugerir que “*lean con atención la Guía del estudiante Tarea 3 y exploren como pueden hacer el arrastre*”, como se muestra en el siguiente diálogo:

E: ¿cómo hago para moverlo?
P: Lean la guía, lean la guía, e imagínense.
E: profe no lo puedo mover ¿Cómo lo muevo?
P: lea la guía que ahí le dice.
E: ya la leí.
P: ¿Qué dice la guía?
E: dice que lo mueva.

En relación con los esquemas de uso del arrastre de las figuras construidas en Cabri se observaron tres dificultades:

La primera, como estaba previsto en los análisis *a priori*: algunos estudiantes intentaron arrastrar las figuras cogiéndolas de un punto o vértice del polígono, en este caso la figura no se mueve, solo se desplazó el punto alterando la forma del polígono:

E: profe yo no entiendo.
P: arrástrelos arrástrelo. Señale uno y lo arrastra...
E: profesor, pero es que está defectuoso.

La segunda dificultad se presentó cuando los estudiantes trataron de realizar el arrastre a partir de un polígono correspondiente a la *figura imagen* de una simetrización, en este caso manifestaron que la figura no se deja coger a pesar de que emerge el mensaje de este polígono, que no se mueve o que está mala.

E: no, pero es que eso no coge.
P: si vamos.
E: ¡no coge ninguna, hace rato le estoy haciendo y no coge!

La tercera dificultad se presentó con el círculo cuando se trata de arrastrar desde el borde, en este caso solo se modifica la longitud de la circunferencia, algo similar ocurrió con la elipse. Frente a esta nueva situación que se presenta Rabardel (2011), propone que la integración de recursos informáticos debe ir orientada a contribuir para que el sujeto construya adecuadamente *esquemas de uso* que le permitan explorar, experimentar los diferentes sistemas de representaciones del concepto con el fin de que surja el conocimiento matemático.

La mayoría de los estudiantes desarrollaron las actividades propuestas sin mayores contratiempos, varios manifestaron que el ejercicio era fácil que se debía leer las indicaciones para poder realizar las actividades, como se observó en el siguiente registro:

E: no profesor, pero es que eso es lo más de fácil si uno sigue ahí las instrucciones, ahí está la figura y como aquí está la gráfica que le muestra cómo tiene que ser y más la instrucción que usted agregó es más fácil hacerlo. Entonces como es esas cosas de geometría es chévere que uno pueda configurar las imágenes y todo eso y como otras se van quejando que no pueden, porque ellos no siguieron las instrucciones, pero yo si pude.

En estos apartes del protocolo se puede apreciar la evolución de los esquemas de uso de la mayoría de los estudiantes en el manejo de Cabri.

En la construcción del concepto de simetría axial, a partir de las acciones de arrastre, los estudiantes exploraron las construcciones en Cabri e identificaron las figuras que permitieron ser cambiadas de lugar para reconstruir la escultura, en esta actividad identificaron de acuerdo con Acosta *et al.* (2010) la *dependencia* que tiene la *figura imagen* de su correspondiente figura objeto, como se apreció en la siguiente intervención de un estudiante.

E: Al principio yo no entendía casi nada, pero después fui entendiendo poco a poco como por ejemplo primero que todo para moverla hay que seleccionar la original ya que, si seleccionamos otra, no se moverá, en cambio cuando seleccionamos la original sí se va a mover. Otra cosa que aprendí es que, para que se mueva no puede señalar este punto porque esto va a hacer que se altere la figura, pero si dice aquí este polígono ahí si se va a poder mover ya que está señalando al polígono. Hubo muchas veces que me toco volver a empezar, pero al final si me quedaba como era y aunque me faltó un ojito yo lo construí.

E2: como correr partes iguales, una es la copia la otra es la original, desde que se mueva y si no se mueve hay que probar con otra figura hasta que se mueva.

En estas intervenciones se estableció que los estudiantes además de que identificaron la dependencia entre la figura objeto y la *figura imagen*, también dedujeron las características del programa para arrastrar la figura objeto. Laborde (2005), define dos tipos construcciones: blandas y robustas, las construcciones de la tarea tres son robustas, a pesar de que la figura se deformó cuando fue arrastrada desde un vértice, las propiedades del objeto geométrico se conservaron y se pueden arrastrar si se hace desde el componente adecuado de cada figura.

En relación con el *movimiento* en el plano de dos figuras simétricas respecto al eje de simetría, este movimiento se evidenció cuando los estudiantes arrastraron las figuras para ubicarlas sobre los detalles de la escultura, además algunas de estas se tocan en el eje de simetría.

En el segundo momento de la tarea tres se realizaron los análisis *a posteriori* teniendo en cuenta los registros realizados en la *Guía del estudiante*, donde se plasmaron las respuestas a varios interrogantes sobre simetría axial que validaron el trabajo en las *Construcciones 6.1* y *6.2*.

Las respuestas a los interrogantes sobre la *construcción 6.1* se presentan en la Tabla 13.

Tabla 13. Respuestas de los estudiantes a la Tarea 3, Construcción 6.1

A partir de la construcción 6.1: en Cabri realiza las siguientes actividades. Debes tener en cuenta que para arrastrar las construcciones se acerca el cursor al objeto y cuando se nombre como polígono lo puedes arrastrar de lo contrario altera la forma de la figura. Arrastre las figuras y

reconstruya la imagen como se muestra en la construcción.			
Preguntas	a.	b.	c.
	<i>¿Por qué cuando se arrastra una figura, la otra que es congruente se ajusta a los detalles de la escultura?</i>	<i>¿Qué simetría se utilizó en los detalles de los ojos?, ¿Qué simetría se utilizó para la configuración de los brazos?</i>	<i>¿Qué dificultades se presentaron al desarrollar la actividad?</i>
G1	Porque tiene un eje que lo comparte y lo ajusta.	Simetría axial.	Muchas veces arrastras por partes difíciles de la estructura
G2	Que puede tener una serie de comandos que al hacer que se muevan los polígonos, hacen que haya un mundo paralelo	En la simetría de los ojos se utilizó la central y en la simetría de los brazos la axial.	Que era casi imposible mover las imágenes y si no se podía mover tenía que mover otra figura.
G3	Porque la recta las divide y así permite que la figura se arrastre de una forma igual	En los ojos se utiliza el punto y en los brazos el polígono	Cuando movemos los ojos se deforman y después los movimos desde el punto y ya se podía mover.
G4	Porque hay que arrastrar el original para que se mueva la imagen.	En los ojos se utiliza un círculo y en los brazos un polígono.	Si tuvimos dificultades en los ojos y una figura que está en las manos.
G5	Porque solo hay una figura original y las demás son copias, porque las copias hacen lo mismo que la original.	Para los ojos simetría central y para los brazos simetría axial	La alteración en las figuras, eliminar por error las figuras y colocarlas en un lugar equivocado.
G6	Porque se construyó con la misma igualdad o simetría	La simetría que se utilizó en los ojos fueron los círculos y en los brazos fueron los polígonos y simetría central, axial.	Al mover las figuras porque al comienzo no se podían mover, pero luego lo logramos.
G7	Porque como se arrastra la original la otra congruente lo hace igual.	Para los ojos solo cogimos el original de la mitad y en los brazos la técnica fue coger la original para que se ajustaran los dos de abajo y la de arriba a la figura.	Pues que si no cogíamos la original no se movía ninguna.

La pregunta *a* indagó sobre, cómo perciben los estudiantes el *Movimiento* en el plano de dos figuras simétricas, los grupos G1 y G3 identificaron que los movimientos dependen del eje de simetría, manifestando que esto se da “*Porque tiene un eje que lo comparte y lo ajusta*” o “*la recta las divide y así permite que la figura se arrastre de una forma igual*”, en estos registros se puede inferir que los estudiantes identificaron los movimientos de acuerdo con el eje de simetría.

El grupo G2 propone “*Que puede tener una serie de comandos que cuando se mueve el objeto, hacen que haya un mundo paralelo*”, este grupo alude a las características del programa, reconoce que esto es posible si se realiza el arrastre en Cabri, además identificaron que hay una dependencia

entre el *objeto* y su *imagen*, el G6 propone que esto ocurre “*Porque se construyó con la misma igualdad o simetría*”, que en los análisis *a priori* era la respuesta que se esperaba.

Los grupos G4, G5 y G7 centran su atención en la *dependencia*, dan sus respuestas asumiendo que la *figura imagen* depende de la *figura objeto*, como lo expresa el G4 “*Porque hay que arrastrar el original para que se mueva la imagen*”, de estas respuestas se puede afirmar que los estudiantes identificaron las características del movimiento de figuras simétricas.

En la pregunta b) se indagó sobre cuál simetría se utilizó en los detalles de los ojos y los brazos, cuatro grupos respondieron como se esperaba, mientras los otros tres grupos respondieron sobre cómo se construyeron los ojos y los brazos.

En el literal c) se preguntó ¿qué dificultades se presentaron al desarrollar la actividad? Todos los grupos coinciden en decir, que fue mover las figuras. Dos grupos la relacionan con los ojos, otros con la deformación de los polígonos o que trataron de mover la figura desde la imagen y uno manifiesta que eliminaron algunos detalles por error, pero que al final todos lograron realizar la actividad, en estas respuestas se puede evidenciar la evolución de los esquemas de uso de los estudiantes en Cabri, cuando al final del ejercicio afirman que sí pudieron realizar las tareas planteadas que involucran el arrastre.

A continuación, se presenta la Tabla 14 donde se consolidó las respuestas de los grupos a las preguntas planteadas en la Tarea 3 relacionadas con la *Construcción 6.2*

Tabla 14. Respuestas de los estudiantes a la Tarea 3, Construcción 6.2.

<i>A partir de las construcciones 6.2</i> construidas en Cabri, realiza las siguientes actividades, determina el eje de simetría y coloca cada detalle superpuesto en la escultura, si los detalles no están construidos realiza las transformaciones necesarias para completar el rediseño de la escultura en Cabri.				
	<i>a.</i>	<i>b.</i>	<i>c.</i>	<i>d.</i>
	<i>¿Qué dificultades se experimentan si el eje de simetría no está bien definido?</i>	<i>¿Qué transformaciones geométricas utilizó?</i>	<i>¿Qué elementos se deben tener en cuenta en las transformaciones de simetría?</i>	<i>¿Qué dificultades encontró al utilizar el AGD Cabri?</i>
G1	Que las figuras no quedan parejas y no se acomodan.	Polígonos, segmentos, etc.	La distancia, puntos y “ajustes”.	La dificultad es que no podían ajustarse las figuras ni las rectas para dividir las partes.
G2	Se amontonan o se abren.	La simetría axial.	Tienen que ubicar el eje de simetría y seguir las indicaciones.	Que algunas partes no las entendíamos y eran muy difícil de moverlas.
G3	Se daña la figura.	Simetría axial, círculos, rectas y polígonos.	Las rectas iguales o centrales.	Los puntos se distribuían en toda la página.
G4	Que no se establecen en la figura ni se aferra o es la misma forma.	Simetría axial	Los polígonos.	Ninguna.
G5	Si el eje de simetría no está bien definido y queremos que las figuras sean iguales a la del	Le dimos clic en simetría axial.	Primero tiene que estar derechas las rectas, acomodar las figuras en el lugar que debe ir y verificar	Una es que la figura quedara torcida y otra es que copiémos la figura en el lugar que no es.

	otro lado esta no va a resultar.		si todo está bien.	
G6	Las figuras no quedan precisas.	La simetría axial.	Líneas paralelas y líneas perpendiculares.	Que al comienzo no sabíamos manejarlo, pero al final lo logramos
G7	Que los polígonos quedan corridos y no cuadran bien.	La simetría axial en todas las figuras de la escultura.	Los elementos que se tienen en cuenta son el eje de simetría, el original y su imagen.	Que al principio no se podía correr nada, pero después ya lo conocimos y si logramos hacer la escultura.

A partir de la pregunta del literal a) se exploró la percepción de los estudiantes sobre la variable micro didáctica correspondiente a *Definir o predecir el eje de simetría*; seis grupos registraron que “*si los ejes de simetría no están bien definidos las figuras no encajan, no se acomodan, que se amontonan o se dispersan, no quedan precisas o que se dañan*”, en estas respuestas se puede inferir que los estudiantes realizaron arrastres del eje de simetría, esta acción se puede considerar como una retroacción del *medio* que les permitió identificar las propiedades del eje y reconstruir la escultura.

En el literal b) se indagó sobre qué transformación geométrica se utilizó, en esta pregunta seis grupos respondieron simetría axial que es la respuesta esperada, la mayoría acertaron en la respuesta, porque los estudiantes al realizar la actividad en Cabri utilizaron la herramienta simetría axial, solo el grupo uno escribió que polígonos, segmentos, etc. Es decir, relacionaron la pregunta con algunos elementos de la geometría.

En el literal c) se preguntó sobre ¿qué elementos se deben tener en cuenta en la transformación de simetría? cinco grupos registraron el eje de simetría que se debe ubicar muy bien, también anotaron que los polígonos y las imágenes, dos grupos dijeron que distancias, puntos y polígonos sin nombrar el eje de simetría, a partir de las tareas realizadas los estudiantes tuvieron la oportunidad de reconocer la importancia del eje de simetría tanto para crear la imagen a partir de aplicar simetría axial y validar el uso de la simetría en los detalles que conforman la escultura.

En el literal d) se preguntó ¿Qué dificultades encontró al utilizar el AGD Cabri? en esta oportunidad las dificultades se asociaron con el desconocimiento del programa pero que después lograron manejarlo

A partir de las respuestas registradas, los estudiantes realizaron la *puesta en común*, en esta actividad se apreció el interés de los estudiantes por compartir sus experiencias, las cuales giraron en torno a las características que se deben tener en cuenta para realizar el arrastre en Cabri y la identificación de los elementos que intervienen en la simetría axial.

En relación con la noción de simetría axial los estudiantes identificaron la dependencia entre la figura objeto y su correspondiente *figura imagen* a partir del trabajo desarrollado en la *Construcción 6.1* realizada en Cabri.

De esta actividad se puede evidenciar como los estudiantes identificaron la importancia de predecir la ubicación del eje de simetría, para que al simetrizar los polígonos estos encajen perfectamente en el otro lado de la escultura, además para validar la ubicación del eje de simetría un estudiante mostró a partir del arrastre del eje que ocurre cuando éste no está ubicado correctamente,

en esta retroacción del *medio*, de acuerdo con Chamorro (2003) se pueden ver en la siguiente intervención de un estudiante:

E: bueno a mí me pareció muy chévere el trabajo, ya que antes era solamente colocar las partes (Construcción 6.1), pero ahora, era primero, colocar las partes que estaban ahí, después de eso hacer una recta vertical y una recta horizontal, una vez hecho esto aplicamos la simetría axial para poder que esta parte sea igual a esta (señala el lado derecho e izquierdo de la escultura), pero para que esta también quede igual así, las rectas también tienen que estar bien acomodadas, de lo contrario puede suceder esto, van a quedar así (el estudiante en este momento arrastra el eje de simetría) entonces lo que hay que tratar de hacer es acomodar bien la recta para que todo quede bien.

Los estudiantes construyeron los dos ejes de diferentes formas, unos trazaron la recta vertical y la horizontal ajustándolas visualmente, otros trazaron la recta vertical y a partir de esta construyeron una recta perpendicular, un estudiante utilizó la herramienta “*mostrar ejes*”, ubicándolos de acuerdo a lo requerido en la tarea, a partir de la construcción de los ejes, los estudiantes aplicaron simetría axial a las figuras que hacen falta para completar el modelo dado, teniendo en cuenta cuál es el eje que deben utilizar, como se muestra en la siguiente intervención de un estudiante.

E: bueno, eso es lo que voy a explicar, bueno, uno le señala aquí se mete en simetría axial, ahora señalamos uno de los polígonos, puede ser cualquiera por ejemplo voy a señalar este y ahora, bueno si queremos que quede igual aquí abajo, tenemos que señalar con respecto a esta recta (señala la recta horizontal) pero si queremos que nuestro polígono quede aquí al lado igual, hay que señalar la recta vertical y ahí quedara igual.

En otra intervención se puede notar como los estudiantes identificaron la posición de la imagen respecto al objeto, que tienen la misma forma y tamaño, pero con dirección contraria, como se aprecia en el siguiente fragmento.

E1: la figura axial uno nomás le hunde una recta, esa cosa de aquí de la mitad, es que no sé cómo llama, bueno uno le hunde y se forma la misma figura, sino que hacia el otro lado.
E2: en dirección contraria.
E1: eso en dirección contraria.

Teniendo en cuenta el desarrollo de las tareas anteriores se observó:

- Que los esquemas de uso de los estudiantes han evolucionado notablemente respecto a los procesos de instrumentalización del AGD Cabri.
- Que el arrastre es una herramienta fundamental que permite a los estudiantes experimentar con los objetos matemáticos, identificar sus características, recibir las retroacciones del *medio*²³ y validar sus propiedades.
- Los estudiantes transitaron por las fases o interacciones de *acción*, *formulación*, *validación* donde identificaron a partir del arrastre de las figuras construidas en Cabri: la dependencia de

²³ El *medio* corresponde al ambiente informático y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín se asumen como un *medio* complementario.

la *figura imagen* de la *figura objeto*, la ubicación y construcción de ejes de simetría, teniendo en cuenta los fenómenos visuales relativos al movimiento de figuras geométricas en el plano propuestas por Acosta *et al.* (2010).

- Al realizar las actividades de la tarea, donde se empleó la fotografía de una escultura como fondo de pantalla, los estudiantes reconocieron la aplicación del concepto de simetría axial en un entorno artístico y cultural (MEN, 2006) y pudieron observar, cómo el grupo escultor también utilizó transformaciones geométricas en el diseño y construcción de las esculturas.

5.3.1 Fase de institucionalización.

De acuerdo con la TSD enunciada por Brousseau (2000), la fase de *institucionalización* es responsabilidad exclusiva del profesor quien a partir de los conocimientos construidos por los estudiantes institucionaliza el saber. Para el desarrollo de esta fase el docente retomó los aportes hechos por los estudiantes y con la ayuda del video proyector expuso el concepto de simetría axial.

Utilizando la construcción 6.1, mostró a los estudiantes en la interfaz de Cabri que hay figuras que no se mueven y preguntó a los estudiantes por qué, ellos respondieron “*hay que mover es la original*”, el profesor enfatizó que se deben llamar *figura objeto* y la figura congruente que depende de esta se llama *figura imagen* (Guerrero, 2006). El maestro, explicó que en Cabri la *figura imagen* se mueve cuando se arrastra la *figura objeto*, porque se crearon a partir del objeto utilizando la herramienta de simetría axial, también se aludió a la primera tarea aclarando que la fotografía pegada a la cartulina corresponde a la *figura objeto* y el dibujo que se estampó, a la *figura imagen*.

En relación con la distancia del eje de simetría a la *figura objeto* y del eje de simetría a la *figura imagen*, el profesor mostró en la construcción que, si el objeto se aleja del eje de simetría, la imagen también lo hace y que las distancias de un punto del objeto al eje y del eje al punto correspondiente en la imagen son iguales, esto se validó utilizando la herramienta “*distancia*” de Cabri, calculadas entre puntos correspondientes y el eje de simetría.

Explicó que la existencia de las imágenes en Cabri también dependen del eje de simetría y preguntó qué pasaría si se borra el eje de simetría, un estudiante indicó que “*se borrarían todas las copias*”, el profesor puntualizó que se borrarían las imágenes, se borró el eje de simetría para mostrar que desaparecen de la interfaz de Cabri todas las imágenes y que esto es propio del AGD.

Finalmente enfatizó que en la simetría se debe identificar la *figura objeto*, la *figura imagen*, el *eje de simetría*, la *dependencia* de la *figura imagen*, la posición de la imagen respecto al objeto, las distancias con relación al eje de simetría, y que los ejes se pueden construir verticales, horizontales o en cualquier dirección.

5.4 Análisis a posteriori de la Tarea 4

Al inicio del encuentro el profesor realizó una exposición sobre los estilos del arte escultórico de San Agustín y su simbología, proyectando sobre el tablero fotografías de las esculturas, e hizo

énfasis en las interpretaciones que algunos investigadores han dado a los detalles esculpidos en los monolitos de esta cultura; durante la presentación planteó preguntas que permitieron explorar la percepción de los estudiantes sobre el pueblo escultor. Las reiteradas participaciones que hacían los estudiantes evidenciaron su interés por el tema.

Después de esta presentación los estudiantes trabajaron de forma individual en los computadores y realizaron los diseños en Cabri de acuerdo con las consignas de la Tarea 4. En la Figura 16 se presentan algunas de las esculturas analizadas.

Figura 16. Esculturas analizadas en la Tarea 4



Inicialmente se presentó la fotografía de la escultura El Flautista²⁴, sin decir el nombre de esta se preguntó a los estudiantes ¿a qué se parece esta escultura? los estudiantes respondieron:

E: a la nariz de un elefante.

P: ¿a quienes les parece que esto sea la nariz de un elefante? (Levanten la mano 24 estudiantes)

Esta pregunta, permitió establecer la interpretación que un grupo de estudiantes hacen sobre la escultura, aportando elementos para dilucidar los detalles esculpidos, esta experiencia se podría proponer como una estrategia de investigación con grupos escolares étnicos, presentándoles los detalles modelados e indagando sobre su percepción. De esta manera se podría contribuir a descifrar el enigma que se ha generado alrededor de muchos de los detalles presentes en las esculturas, teniendo en cuenta que el grupo escultor desapareció del lugar en el siglo VII, sin que se tenga información precisa sobre que ocurrió con ellos o hacia donde emigraron (Duque y Cubillos, 1979).

También se indagó sobre la imagen abstracta que se encuentra en el dorso de la escultura el Dios de la Agricultura²⁵ como se muestra en el siguiente fragmento:

²⁴ Esta escultura está ubicada en el Bosque de las Estatuas, del Parque Arqueológico de San Agustín.

²⁵ Esta escultura está ubicada en el Bosque de las Estatuas, del Parque Arqueológico de San Agustín.

P: ¿Quién me dice que hay aquí?

E: yo ahí veo un corazón y dentro de ese corazón veo la silueta de un águila.

P: ¿Por qué ves la silueta de un águila?

E: porque ahí se ve la cola, las alas.

P: venga y la dibuja acá por favor, que me gustaría que lo hagas
(en este momento un alumno participa dibujando el águila en el tablero)

P: excelente muy bien.

E: es un candelabro, es una paloma.

P: es un águila. Bueno como no tenemos mucho tiempo yo les voy a contar lo siguiente, miren que está realmente si es un águila...

P: yo también voy a hacer mi dibujo, nunca se me había ocurrido, en-
tonces aquí sería la cabeza y estas vienen siendo las alas.

E: ¡ay ve sí!



Esta es una de las imágenes que ha despertado la curiosidad de muchos investigadores sobre el arte escultórico de San Agustín, por tratarse de una representación abstracta. En este ejercicio los estudiantes en su mayoría identificaron que en la escultura la representación tallada corresponde a un águila, tal como fue representada por un estudiante en el tablero, esta actividad permitió que el grupo de estudiantes reconociera el desarrollo artístico del pueblo escultor y la manera en que sintetizaron un evento natural y lo esculpieron en la piedra. En el protocolo de la Tarea 4, en los comentarios que hacen los estudiantes sobre el arte escultórico, se percibe la admiración que despierta en ellos, el desarrollo científico y artístico del pueblo escultor.

Siguiendo esta dinámica les fueron presentadas 8 esculturas y sobre ellas los estudiantes dieron sus diferentes opiniones, en el Templo del Dios del Sol manifestaron que estos representaban personajes muy importantes.

E: profesor de que ellos también lo hacían como lo hacían los egipcios que tiene como esas pirámides que eso cuando se daban cuenta de que una persona era muy importante que tenía que ser sepultada o momificada los tenían en una tumba y los dejaban ahí, eso es lo que ellos quieren representar, que son los importantes como los que salvan vidas como los cirujanos, enfermeros, médicos, todo eso, como digamos el Papa pues como son personas tan importantes les hacen referencia ahí como haciendo un homenaje.

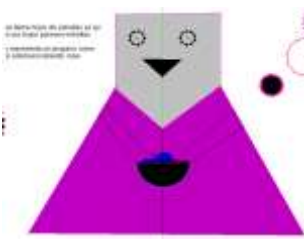
En intervenciones como la anterior se evidenció que los estudiantes reconocen, la importancia que representan los personajes esculpidos para comunidad prehispánica, como también el valor que tienen estos vestigios arqueológicos para muchas personas actualmente.

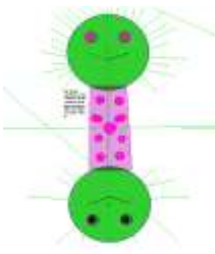
En el segundo momento de este encuentro realizaron la Tarea 4, donde los estudiantes usando la transformación de simetría axial y las características del arte escultórico de San Agustín, diseñaron en Cabri una escultura. Al finalizar la tarea el profesor guardó los archivos realizados en Cabri por los estudiantes.

Para realizar el análisis *a posteriori*, se seleccionaron diez construcciones de acuerdo con el trabajo realizado en la clase, estas construcciones se rotularon de la E1 que corresponde al (estudiante uno) hasta la E10, como se muestra en la Tabla 15. Esta tarea está relacionada con el proceso

de evaluación de la construcción del concepto de simetría axial.

Tabla 15. Esculturas diseñadas por los estudiantes en la Tarea 4.

Esculturas analizadas en la Tarea 4			
Numero/ Texto en Cabri	Construcción	Numero/ Texto en Cabri	Construcción
E1: EL estudiante no registro textos en la interfaz de Cabri		E2: “ESTE OSO REPRESENTA AMOR Y CARIÑO”.	
E3: EL estudiante no registro textos en la interfaz de Cabri		E4: “esta figura se llama Mediahumana está representada e inspirada en la teoría mística y realista de que existen las sirenas por eso en la parte de abajo se puede observar una cola y una humana como en varias películas de mitad sirena y humana y es un arte realista a esta teoría.”	
E5: “esto significa, aunque yo ya más o menos ya se manejar esta aplicación y esto ayuda a soltar la mano o a poder aprender más y es una ayuda muy grande y pues este dibujo no me gustó pero ya se hacer algo ahí medio hecho”.		E6: “se llama ojos de estrellas ya que sus ojos parecen estrellas. y representa un pingüino como si estuviera lavando ropa”.	
E7: “Se llama multicolores por sus distintos colores. Esta figura lo hice porque se me pareció a un robot y al imaginarlo me llamo mucho la atención. Lo que tiene en medio de los brazos es un libro abierto. Lo que significa para mi es que no importa cómo te veas si no cómo te sientes. Me gustó mi figura por sus diferentes colores”.		E8: “representa la fuerza de la naturaleza”	

E9: “sol verde significa un sol doble que es verde lo hice porque me gustan los soles y el color verde”.		E10: “ODIO Y AMOR”	
--	---	----------------------------------	---

Cada una de las construcciones referidas en la Tabla 15, fueron analizadas haciendo uso de la herramienta de Cabri *revisar construcción*, como lo propone Gutiérrez (2005), al afirmar que las *sesiones* de trabajo en Cabri, permiten guardar y revisar las etapas de una construcción para analizar el comportamiento de los estudiantes en la resolución de un problema, esta revisión se enfocó en las estrategias y herramientas utilizadas por los estudiantes para crear sus diseños.

En las construcciones E1 y E2, primó el uso de las herramientas *polígono* y *rellenar* para darle color a los detalles del dibujo, lo primero que se construyó fue la cabeza y a partir de ésta se realizaron las demás partes. Los estudiantes fueron cuidadosos al realizar su trabajo, el cual consistió en reproducir un dibujo en Cabri, utilizando la herramienta *polígono* que les permitió representar todos los detalles que tiene el dibujo, de éstas construcciones se infiere que para ellos no fue necesario explorar las demás herramientas y tal vez no leyeron las consignas de la tarea referentes al uso de simetría axial.

En las construcciones E3, E4 y E5 los estudiantes utilizaron varias herramientas como: *polígono*, *circunferencias*, *segmentos*, *triángulos* y *polígonos regulares*, además usaron una gran variedad de colores para personalizar sus diseños. En las construcciones E4 y E5 al final de la actividad realizaron una descripción sobre el significado que tiene para ellos el diseño; la construcción E5 es la única que no utilizó la herramienta “*polígono*” para realizar los detalles y además mencionó los avances alcanzados en el manejo de Cabri en esta actividad.

Los significados que los estudiantes atribuyeron a sus creaciones están asociados con los elementos presentes en las esculturas de san Agustín, como son las representaciones antropozoomorfas, tal como se ve en la siguiente descripción “*esta figura se llama mediahumana está representada e inspirada en la teoría mística y realista*”.

En la construcción E5, en el texto manifiesta sus avances en el manejo del programa “*yo ya más o menos se manejar esta aplicación y esto ayuda a soltar la mano o a poder aprender más, es una ayuda muy grande*”, estas tareas permitieron a los estudiantes reconocer sus capacidades y las ventajas de trabajar con estos recursos informáticos.

En las construcciones, E6, E7, E8, E9 y E10 los estudiantes siguen las orientaciones dadas en las consignas de la *Tarea 4* y utilizaron distintas herramientas entre ellas la de *simetría axial*, para crear algunos detalles en sus diseños, cada una de estas construcciones está acompañada de un texto que describe el significado de los diseños realizados.

A manera de conclusión de la tarea 4, se puede afirmar que:

- Los estudiantes reconocen la transformación de simetría axial y su aplicación para crear los diseños, para la creación de éstos utilizaron en varias oportunidades la herramienta de *simetría axial*, *polígono* y otras,
- En estas construcciones se vio la creatividad de los estudiantes cuando integraron en el diseño diferentes conceptos geométricos, siguiendo patrones de construcción similares a los que utilizó el pueblo escultor. En la construcción E9 el estudiante trazó dos ejes de simetría y generó una imagen bisimétrica que es similar a la escultura El Partero, a partir de estas construcciones también se evidenció el manejo de la transformación geométrica de simetría axial por parte de los estudiantes cuando para la construcción definieron el eje de simetría y construyeron los detalles.
- Los nombres que los estudiantes dieron a sus construcciones guardan semejanza con los de algunas esculturas del parque arqueológico de San Agustín por ejemplo: la escultura denominada como “Ojos en forma de cabeza de águila” con la construcción E6 que el estudiante nombró como “ojos de estrellas” o la llamada “Dios del Sol” con la construcción E9 “El Sol Verde”. Esta relación entre los nombres, los detalles representados, los significados que le dieron a la escultura, permite deducir que los estudiantes reconocen los avances matemáticos, el desarrollo científico, artístico, el valor histórico y cultural del pueblo escultor.

5.5 Consideraciones Generales de los análisis *a posteriori*

Las consideraciones generales se realizaron a partir de las unidades de análisis propuestas en el capítulo 3, las rejillas donde se clasificó la información de los registros de la experimentación y los análisis *a posteriori*, con el propósito de estudiar lo ocurrido en cada unidad de análisis.

En la Tabla 16 se muestra la conformación de cada rejilla a partir de la unidad de análisis, una descripción de la información que se clasificó, las variables que se observan y el anexo al que corresponde cada rejilla.

Tabla 16. Rejillas de las unidades de análisis

Rejillas	Descripción	Variables	Anexo
Rejilla diseño de tareas	En esta rejilla se recopiló la información sobre el diseño de las cuatro tareas presentadas a los estudiantes teniendo en cuenta: las consignas registradas en la <i>Guía del estudiante</i> (Pochulu <i>et al.</i> 2013), la interacción con el <i>medio</i> en torno al diseño de las actividades en Cabri y la estrategia que emplearon los estudiantes para resolver las tareas propuestas.	Variables de diseño	Anexo 6
		Las consignas	
		La interacción con el <i>medio</i>	
		La estrategia de solución.	
Rejilla complemen- taria de recursos	Se clasificaron los registros referentes al uso de recursos manipulativos y cómo el estudiante aborda estos materiales para resolver las tareas propuestas (Alsina y Planas, 2008 y Valenzuela, 2012). Igualmente se	Recursos Manipulativos Recurso informático AGD Cabri.	Anexo 7

	analizó la integración del AGD Cabri como recurso informático que se caracteriza por la interacción con el estudiante, a partir del arrastre (Fernández, 2011 y Laborde, 2001)		
Rejilla construcción del concepto de simetría	Se clasificó la información que hace alusión a los elementos que caracterizan la simetría axial, los cuales se precisan en las variables micro-didácticas establecidas en el Capítulo 3, como son: <i>Dependencia de la figura imagen del objeto, Movimiento y Definir o predecir el eje de simetría</i> , a partir de estas variables se analizó cómo los estudiantes construyen la noción de simetría axial (Acosta <i>et al.</i> , 2010)	Variables micro-didácticas	Anexo 8
		<i>Dependencia</i>	
		<i>Movimiento</i> <i>Definir o predecir el eje de simetría</i>	
Rejilla relación arte escultórico y geometría.	Se identificaron los momentos en que los estudiantes reconocen algunas características del pueblo escultor respecto de su desarrollo científico cultural y la importancia de los vestigios arqueológicos para la humanidad (Blanco, 2017 y Urbano, 2010). De igual manera se identificaron los momentos cuando modelaron representaciones geométricas sobre las fotografías de las esculturas de San Agustín (Laborde 1997; Oldknow 2004 y Zapata 2014).	<i>Modelación</i> <i>Reconocimiento cultural.</i>	Anexo 9

5.5.1 Unidad de análisis diseño de tareas.

Un objetivo de esta investigación fue el diseño y análisis de una secuencia de tareas teóricamente fundamentada, por lo que se tuvo en cuenta lo ocurrido para realizar los ajustes pertinentes y como producto de estos análisis se propone la *versión 2 de la Guía del estudiante* junto con los recursos empleados en el desarrollo de las tareas.

En relación con **las consignas** de la *Guía del estudiante*, se encontró que las competencias lectoras de los estudiantes eran deficientes, lo que dificultó la comprensión de las consignas y por consiguiente el desarrollo de las tareas, situación que no se había contemplado en los análisis *a priori* y se tuvo en cuenta para el rediseño de las consignas.

Como se especificó en los análisis *a posteriori*, se evidenció algunos aspectos puntuales que se ajustaron en la consigna de las tareas como entregar construido el Anexo 6.1, cambiar la distribución de los espacios para las respuestas y reformar algunas preguntas para que no se presenten ambigüedades. En la Tarea 3 se realizaron ajustes en las preguntas orientándolas al reconocimiento de los elementos que intervienen en la transformación de simetría axial, igualmente las construcciones 6.1 y 6.2 en Cabri se rediseñaron para conseguir que las figuras soporten el arrastre desde cualquier parte y evitar situaciones que distraigan la atención de los estudiantes en la construcción del concepto geométrico.

En la **Interacción con el medio**, se analizó a partir de la integración de Cabri donde se diseñaron las actividades y los estudiantes interactuaron con los objetos geométricos. En el desarrollo de las tareas los estudiantes reconocieron varias herramientas de Cabri, a partir de las cuales realizaron las actividades planteadas, las más utilizada por los estudiantes en la modelación de las representaciones geométricas y la construcción de sus diseños fue el “*polígono*”, también utilizaron

otras herramienta con “*circulo, triangulo, polígonos regulares*”, un grupo manifestó que “*(...)no sólo el computador sirve para jugar, sino para aprender qué es la reflexión y lo que se puede hacer con ciertos programas(...)*”.

Al explorar el arrastre en Cabri se presentaron dificultades con las figuras que para ser arrastradas debían cogerlas de un lado del polígono o del centro de la circunferencia, los estudiantes manifestaron que las imágenes se deformaban, lo que ocurrió al tratar de realizar el arrastre de un polígono desde un punto, sin tener en cuenta las indicaciones de la *Guía del estudiante* en las que se describía como realizar estas actividades. Por lo que se rediseñaron las construcciones 6.1 y 6.2, ocultando los puntos de los polígonos con la herramienta “*ocultar mostrar*”, lo que permitirá arrastrar la figura de cualquier parte.

Al inicio de la actividad varios estudiantes intentaron arrastrar figuras a partir de la *figura imagen* lo cual no es posible en Cabri, esta experiencia les permitió comprender la dependencia de la *figura imagen* de la *figura objeto*, las relaciones entre los elementos que intervienen en la simetría axial y las propiedades de esta transformación.

En el desarrollo de la Tarea 4 los estudiantes mejoraron el manejo de los computadores y las herramientas de Cabri, en esta actividad utilizaron varias herramientas y las intervenciones del docente en esta tarea respecto al manejo del AGD fueron muy pocas, por lo que se puede concluir que los estudiantes mejoraron sus esquemas de uso y el medio posibilitó la construcción del concepto de simetría axial.

En relación con **la Estrategia ganadora**, en la Tarea 1, los estudiantes que realizaron la lectura lograron seguir las indicaciones y realizar el doblez, reconocieron que se debía doblar muy bien para que no se corra la pintura, al resolver las preguntas el profesor acompañó la lectura de algunos grupos y realizó las devoluciones pertinentes para que identificaran correctamente los puntos correspondientes, trazaran las rectas y respondieran las preguntas.

En la Tarea 2, los estudiantes centraron su atención en modelar las representaciones geométricas a partir de la herramienta “*polígono*” de forma indiscriminada, posteriormente, a partir de las intervenciones de sus compañeros o por la exploración de los cuadros de herramientas del programa en esta actividad, descubrieron que podían utilizar otras herramientas de Cabri como *triangulo, segmentos, circunferencia, rectángulos* y otros, e inclusive algunos utilizaron herramientas que no estaban contempladas en los análisis *a priori*, como *arco, polígono regular* y *mostrar ejes*.

En la Tarea 3, la mayoría de los estudiantes iniciaron el desarrollo sin hacer la lectura de las consignas donde estaban las orientaciones de cómo realizar el arrastre, generando varias expresiones al no poder arrastrar las figuras como: que las construcciones están malas, que no se mueve, que no se dejan coger o que se deforman, pero un estudiante de los que terminaron la tarea rápido, compartió su experiencia con los compañeros y explícitamente manifestó “*eso es lo más de fácil si uno sigue ahí las instrucciones*”.

En relación con la construcción 6.2 la estrategia de solución requería que se construyeran dos ejes, uno vertical y el otro horizontal y que se aplicara simetría axial para completar las partes de la escultura que hacen falta, los estudiantes manifestaron que se debía ubicar muy bien el eje de

simetría, en algunos casos arrastraron la recta hasta que se logró ubicar donde la *figura objeto* y la imagen encajan perfectamente en la escultura y mostraron a partir del arrastre del eje de simetría que pasaría si no se ubicaba correctamente. En la Tarea 4 la estrategia ganadora se evidenció en varias construcciones que incluyeron en los diseños realizados en Cabri todas las condiciones solicitadas.

En conclusión, la mayoría de las consignas presentadas a los estudiantes fueron comprensibles teniendo en cuenta los trabajos desarrollados por ellos, también se identificó varios ajustes que se debían realizar al diseño de las tareas para aprovechar todas las ventajas del medio, para que el estudiante enfoque su atención en la construcción del concepto matemático, observe su aplicación en un contexto artístico e identifique los saberes matemáticos del pueblo escultor.

5.5.2 Unidad de análisis complementariedad de recursos.

En relación con **los recursos Manipulativos**, en el desarrollo de la Tarea 1, los estudiantes lograron identificar en el pliego de cartulina el doblez como el eje de simetría, la fotocopia de la escultura como la *figura objeto* y el dibujo estampado como la *figura imagen*, marcaron puntos correspondientes.

Este recurso cobra importancia en varios momentos, cuando los estudiantes después de realizar la construcción de la *figura imagen* y responder las preguntas propuestas para esta tarea, al compartir las respuestas en la puesta en común mostraron su construcción a los demás compañeros para explicar sus respuestas señalando en la construcción los elementos que intervienen en la transformación de simetría axial, además expresaron que su trabajo es “*una obra de arte*” y que las actividades realizadas son una buena estrategia para aprender.

Cuando los estudiantes resaltaron con témpera los bordes de la escultura en la fotocopia, para luego estampar en el otro semiplano de la cartulina, experimentaron que era necesario para que la témpera se adhiriera en el otro semiplano, que la *figura objeto* saliera del plano y rotara 180° por el espacio para crear la imagen, de esta manera, el estudiante pudo entender porque la *figura imagen* cambia de dirección en relación a la *figura objeto* en la simetría axial respecto del eje, por ejemplo en un eje vertical, lo que estaba a la izquierda en el objeto, ahora está a la derecha en la imagen.

Visualizaron que el doblez de la cartulina representa el eje de simetría y todos los puntos que pertenecen a la *figura objeto* en el semiplano se reflejan o se estampan en el semiplano de la *figura imagen*, manteniendo la misma distancia respecto a este eje. De igual manera identificaron los puntos correspondientes, al marcar un punto con témpera en la *figura objeto* y realizar el estampado en la *figura imagen*, inequívocamente obtienen un punto correspondiente, a partir de esta acción visualizan la relación entre estos puntos.

En el **recurso informático** se pueden replicar las construcciones que se hicieron con material manipulativo, pero, en la simetrización los estudiantes no experimentaron el momento cuando la *figura objeto* sale del plano que la contiene porque en Cabri todo sucede de forma inmediata. En este recurso se realizaron varias acciones que contribuyeron a la construcción del conocimiento matemático como:

Establecer dos puntos correspondientes en la construcción realizada en Cabri y calcular la distancia con la herramienta *Distancia o longitud*. Al arrastrar la figura se puede ver cómo estas distancias cambian simultáneamente, a partir de esta acción los estudiantes validaron que los puntos correspondientes en la simetría axial son equidistantes del eje.

También se verificó la simetría de dos figuras en el plano, cuando los estudiantes modelaron los detalles de lado izquierdo de la escultura, trazaron una recta ***l*** aproximadamente en la mitad y aplicaron *simetría axial*, en esta situación arrastraron la recta ***l*** hasta que la *figura imagen* se superpuso al grabado de la escultura, esta retroacción del *medio* permitió validar que las representaciones modeladas en las esculturas cumplen con las propiedades de simetría axial.

En el recurso manipulativo, cuando realizaron las acciones directamente sobre la cartulina los estudiantes construyen el conocimiento de los elementos que intervienen en la simetría axial. En el recurso informático a partir del arrastre, el cálculo de medidas, el trazo del eje de simetría los estudiantes reconocen las propiedades de la simetría, en este sentido se puede concluir que en esta secuencia de tareas estos recursos son complementarios.

5.5.3 Unidad de análisis construcción del concepto de simetría.

Para los análisis de esta unidad se tuvieron en cuenta tres variables micro-didácticas que se definieron para los trabajos realizados en los AGD que se extrapolaron al trabajo con recursos manipulativos.

La Dependencia de la *figura imagen*, se observó en las acciones de arrastre, cuando los estudiantes exploraron en Cabri en la construcción 6.1 al realizar las actividades planteadas en las consignas se evidenció que la mayoría identificaron las figuras objeto que son susceptibles de ser arrastradas y la dependencia que tiene la *figura imagen*, además vivenciaron las tensiones respecto a identificar la figura que permite ser cogida y arrastrada.

Al respecto un estudiante manifestó “(...) para moverla hay que seleccionar la original ya que, si seleccionamos otra, no se moverá, en cambio sí seleccionamos la original si se va a mover”. Esta intervención denota que los estudiantes reconocen que el movimiento de la *figura imagen* depende estrictamente de las acciones realizadas sobre la *figura objeto*.

En relación con el **movimiento**, en la Tarea 3 se evidenció esta situación en varios momentos cuando los estudiantes arrastran las figuras objeto, para superponerla en los detalles de la escultura lo que hace que la *figura imagen* también se mueva.

Cuando aplicaron simetría axial en la construcción 6.2 un estudiante expresó que “la *figura axial*, uno nomás le hunde una recta, se divide y se forma la misma figura, sino que, hacia el otro lado, en dirección contraria”, en esta intervención se muestra como el estudiante identificó que las *figura objeto* y la *figura imagen* en la simetría tienen movimientos contrarios respecto al eje de simetría.

En relación con **Definir o predecir el eje de simetría**, en la Tarea 1 los estudiantes identificaron el eje de simetría a partir del doblez de la cartulina que utilizaron para simetrizar la escultura.

En la tarea 2 los estudiantes verificaron si los detalles de la escultura son simétricos trazando el eje de simetría y midiendo las distancias de los puntos correspondientes al eje de simetría, en esta actividad se preguntó si son iguales las distancias, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente.

En la Tarea 3, los estudiantes debían identificar la posición del eje de simetría y además en la construcción 6.2 trazar dos ejes de simetría. En la *puesta en acto* de la Tarea 3 un estudiante experimentó lo que ocurriría si no se traza correctamente el eje de simetría, cuando arrastró el eje de simetría, para mostrar que los detalles de la escultura no encajan en ambos lados, como se apreció en la siguiente intervención “...colocar las partes que estaban ahí (arrastrar las figuras sobre los detalles de la escultura), después de eso, hace una recta vertical y una recta horizontal, una vez hecho esto aplicamos la simetría axial para poder que esta parte sea igual a esta, pero para que esta también quede igual así, las rectas también tienen que estar bien acomodadas (muestra la figura imagen y la figura objeto), de lo contrario puede suceder esto, van a quedar así (el estudiante arrastra el eje de simetría fuera de la posición correcta) entonces lo que hay que tratar de hacer es acomodar bien la recta para que todo quede bien”, en esta intervención también se pudo apreciar **el movimiento** de las figuras cuando se arrastró el eje se observó que la *figura objeto* y la *figura imagen* se alejan o se acercan al eje de simetría.

A partir de estas situaciones se puede concluir que los estudiantes reconocieron los elementos que intervienen en la simetría axial, las propiedades de la transformación de simetría axial, en las construcciones realizadas en cartulina y en Cabri.

5.5.4 Unidad de análisis relación arte escultórico y geometría.

En esta unidad de análisis se tuvieron en cuenta las variables micro-didácticas de *Modelación y Reconocimiento Cultural*.

La modelación se observó en el desarrollo de las dos primeras tareas, cuando los estudiantes modelaron figuras geométricas como *rectángulos, círculos y arcos*, usando témperas en la Tarea 1 y en la Tarea 2 usando las herramientas de Cabri, donde además validaron que los detalles que conforman la escultura son axialmente simétricos. Estos procesos se registran en la Tabla 11.

En relación con el arte escultórico, En la Tarea 4 los estudiantes realizaron sus propios diseños, se encontró que varios de estos diseños se relacionan con el estilo del arte escultórico de San Agustín y utilizan técnicas similares a las que empleo el grupo escultor. Ver Tabla 15.

En varias oportunidades los estudiantes manifestaron la admiración por los vestigios arqueológicos del pueblo, en la socialización del arte escultórico en la Tarea 4, los estudiantes reconocieron que este pueblo se destacó por su habilidad para tallar esculturas, sus conocimientos matemáticos, su desarrollo científico y cultural y la importancia de estos vestigios para la humanidad, como se

pudo notar en las siguientes intervenciones “(...) ellos también lo hacían como lo hacían los egipcios, eso es lo que ellos quieren representar, que son los importantes como los que salvan vidas como los cirujanos, enfermeros, médicos los abogados, todo eso, como digamos el Papa, pues como son personas tan importantes les hacen reverencia ahí como haciendo un homenaje”.

El trabajo realizado con las imágenes de las esculturas, generaron en los estudiantes interés por conocer más sobre este grupo escultor y sus vestigios arqueológicos que hoy son Patrimonio de la humanidad.

Capítulo 6. Resultados y Conclusiones Generales

Capítulo 6

Resultados y Conclusiones Generales

En este capítulo se presentan los resultados y conclusiones, abordando las hipótesis y los objetivos para analizar los hallazgos a la luz de lo compilado en las rejillas de las unidades de análisis.

6.1 En relación con la hipótesis de investigación HI 1

Esta hipótesis plantea que *el diseño de una secuencia de tareas que integra los AGD y la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín, promueven el aprendizaje de la simetría axial*. Evidentemente se puede afirmar que el *diseño de tareas* como se planteó en esta investigación contribuyó a que los estudiantes construyeran el concepto de simetría axial.

Son varios los aspectos que aportan para llegar a esta afirmación:

La integración al aula de clase del ambiente informático a partir del cual los estudiantes interactuaron con las representaciones del objeto matemático manipulándolo en la interfaz de Cabri por medio del arrastre que les permitió explorar los objetos geométricos moviéndolos para verificar propiedades y aplicar el concepto de simetría en un contexto histórico, artístico y cultural.

Al experimentar otros contextos de aprendizaje reconocieron en los recursos tecnológicos la manera de acceder al conocimiento matemático explorando el concepto en los diferentes sistemas de representación del objeto matemático, de esta manera lograron identificar el campo de posibilidades y restricciones de trabajar en los ambientes de geometría dinámica. En varias intervenciones los estudiantes manifestaron que esta es la primera vez que usaban el ambiente informático Cabri y reconocían en las herramientas de éste una ayuda para realizar construcciones y “*poder aprender más*”. De igual manera, expresaron que “*es muy chévere realizar las actividades en el programa y que así se aprende más fácil*”.

Al iniciar el trabajo con el AGD, se observaron dificultades para manipular el panel táctil de los computadores portátiles; varios estudiantes solicitaron reiteradamente que se les prestara un mouse periférico para ellos realizar su trabajo. Esta dificultad fue muy notoria porque trataban de realizar las tareas en Cabri utilizando solo una mano en el manejo del mouse integrado y para construir figuras como polígonos, círculos entre otros, se requiere de clic sostenido²⁶ y arrastrar el cursor por la interfaz del Cabri. Esta situación se presenta debido a los procesos ergonómicos a los que se debe acoplar el estudiante en relación con el manejo del nuevo artefacto y la evolución de los esquemas de uso como lo proponen Rabardel (2011), al finalizar los encuentros la mayoría de los estudiantes habían superado estas dificultades asumiendo una actitud positiva frente al manejo del AGD y desarrollando dinámicas que permitían distribuir y guardar los computadores sin contratiempos.

En relación con los procesos que fundamentaron la propuesta de modelación geométrica que se

²⁶ Clic sostenido: Cuando se mantiene presiona la tecla izquierda del mouse por un tiempo determinado.

asume en esta investigación, se observó que los estudiantes haciendo uso del ambiente informático: exploraron los diferentes elementos que intervienen en la simetría axial, identificaron en las esculturas figuras geométricas, el eje de simetría, las *figura objeto* y su correspondiente *figura imagen* y también validaron las propiedades de la simetría axial presentes en varios detalles de los monolitos, a partir del arrastre, el movimiento y la predicción del eje de simetría.

En correspondencia a la hipótesis de investigación HI 1, se encuentra el primer objetivo específico que propone: diseñar desde los referentes *de la Teoría de las Situaciones Didácticas* una *secuencia de tareas* que integra AGD y las representaciones *geométricas en las esculturas de San Agustín* para la enseñanza de la *simetría axial*.

De acuerdo con los análisis *a posteriori* realizados a partir de las unidades: *Diseño de tareas* y Construcción del concepto de simetría se identificaron las fortalezas del diseño de la secuencia de tareas y algunos aspectos que se deben rediseñar para un mejor aprovechamiento del tiempo y una mayor comprensión del concepto geométrico.

Entre las fortalezas se destaca la complementariedad de recursos que permitió que los estudiantes identificaran los elementos que intervienen en la simetría axial utilizando imágenes de las esculturas de San Agustín, donde observaron la aplicación del concepto geométrico en un contexto artístico y de igual forma, la integración del AGD Cabri que permitió a los estudiantes explorar los diferentes sistemas de representación del objeto matemático a partir de la manipulación de las herramientas del programa, especialmente el arrastre que permitió reconocer la *dependencia* entre las figuras simetrizadas, construir el eje de simetría y verificar la simetría entre figuras.

En la puesta en acto y los análisis correspondientes se identificaron varios ajustes que se deben realizar al diseño:

En relación con la interpretación de las consignas, se observó que los estudiantes presentan bajos niveles de fluidez y comprensión lectora teniendo que utilizarse más tiempo del programado para las tareas. Esta situación, se presenta debido a que las actividades que tradicionalmente desarrollan en clase dan prioridad a la ejercitación de operaciones matemáticas o solución de problemas rutinarios sin que se generen momentos, donde los estudiantes aborden secuencias de tareas que los confronten con la necesidad de realizar análisis complejos e interpretar indicaciones por escrito. En este sentido, es ineludible sintetizar las orientaciones y preguntas que se plantean en las diversas actividades, haciéndolas acordes a las competencias lectoras de cada nivel de escolaridad buscando mejorar progresivamente las mismas.

En el uso de material manipulativo, se propone que antes de la *puesta en acto* de la Tarea 1, el profesor intencionalmente realice el doblez en la cartulina²⁷ priorizando los ejes oblicuos. Esto, ahorraría tiempo y permitiría inducir a los grupos a trabajar posiciones diferentes a los tradicionales ejes verticales y horizontales, con el propósito de evitar que se cometan *errores* asociados a estas direcciones.

En el trabajo con Cabri, se establecieron modificaciones en las consignas de las preguntas sobre

²⁷ Corresponde a una cartulina de 50x35 cm con la fotocopia de una escultura recortada y pegada a uno de los lados de la misma.

los elementos de la simetría axial. En las construcciones (6.1 y 6.2.) para que los detalles modelados que conforman la escultura soporten el arrastre²⁸ desde cualquier parte se ocultaron los puntos de las figuras evitando la alteración de la forma que se presentaba cuando los estudiantes tomaban la figura desde los vértices. En la construcción 6.2, el diseño de las figuras simetrizadas requiere que los estudiantes tracen un eje diagonal, además de los ejes horizontal y vertical.

En la Tarea 2, se permite seleccionar una imagen entre diversas fotografías de esculturas para usar como fondo de pantalla al modelar en Cabri. Esto, con el fin de que los estudiantes se sientan identificados con su trabajo y generar diversas experiencias como el análisis del arte escultórico a partir de la variedad de representaciones geométricas que se encuentran en las estatuas.

A partir de los análisis realizados de la *puesta en acto de la secuencia de tareas* mediante la *validación de la experimentación*, se presenta una nueva versión del diseño con los ajustes correspondientes en el Anexo 10: *Guía del estudiante versión 2*. A partir de estas modificaciones, se espera que los estudiantes tengan más elementos para construir el concepto de simetría axial y un panorama más amplio que permita visibilizar en el arte escultórico el saber matemático que alcanzó el pueblo escultor. En el marco del *diseño de tareas*, se extiende una invitación a los docentes que en sus prácticas de aula utilicen este diseño para que continúen proponiendo ajustes, admitiendo que es el profesor el encargado de seleccionar, diseñar o modificar las tareas de acuerdo al contexto y las necesidades de los estudiantes.

6.2 En relación con la hipótesis de investigación HI 2

La hipótesis de investigación HI 2 estima que: *La incorporación de las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la geometría contribuye al reconocimiento del valor científico y cultural de los pueblos ancestrales de San Agustín*. Esta hipótesis está estrechamente relacionada con el segundo objetivo específico y se aborda a partir de la unidad de análisis Relación arte escultórico y geometría.

Desde la perspectiva Etnomatemática se logró que los estudiantes de grado Quinto A visibilizaran parte del saber matemático que alcanzó el pueblo ancestral que habitó el territorio colombiano en el municipio de San Agustín hace aproximadamente 2000 años. Hay que recordar que la mayoría de las civilizaciones prehispánicas de América Latina en los procesos de colonización han sido menospreciados por quienes narraron desde su filiación religiosa y occidental desconociendo casi por completo los desarrollos científicos y su cosmovisión e instauraron en el pueblo colonizado y su descendencia una serie de creencias que influenciaron hasta el punto de desconocer las raíces y considerar que estos pueblos eran atrasados e ignorantes.

Esta investigación permitió que varios estudiantes conozcan de la existencia de los vestigios arqueológicos y el saber matemático alcanzado por el pueblo escultor de la cultura de San Agustín tal como se ha conocido de los mimos a partir de la publicación de un artículo y la participación en foros y congresos de Educación Matemática por parte del docente investigador.

²⁸ Para evitar que los polígonos contruidos con la herramienta polígono se deformen al momento de ser arrastrados, se debe ocultar los puntos que forman los vértices del polígono, con la herramienta *ocultar mostrar*.

En la puesta en acto del diseño de la secuencia de tareas para el aprendizaje de la simetría axial, los estudiantes de grado Quinto A de la IEG reconocieron parte del conocimiento matemático del pueblo escultor de la siguiente manera:

En las Tareas 1 y 2, se despertó el interés por conocer un poco más del arte escultórico al modelar sobre las imágenes de las esculturas las figuras geométricas que las conforman y verificar cómo los escultores utilizaron la transformación de simetría axial para el diseño y la construcción de las esculturas.

En el desarrollo de la Tarea 3, donde identifican y validan en los detalles de la escultura El Partero cómo el pueblo escultor utilizó la transformación geométrica de simetría axial y un sistema de ejes perpendiculares en la superficie de la piedra, para crear una escultura bisimétrica de cuatro metros de longitud donde la mayoría de sus partes son simétricas y entre los elementos geométricos que esculpidos se pueden identificar dos elipses, un hexágono, un eje de simetría y cuatro circunferencias.

En la Tarea 4, cuando los estudiantes realizan el diseño de una escultura en Cabri siguen patrones de construcción similares a los que utilizó el Pueblo Escultor. Aluden a temáticas asociadas a las interpretaciones del arte escultórico asignando nombres u significados que se relacionan con los diseños analizados en el desarrollo de la secuencia de tareas. Esto, se observa en la tabla 15 donde un estudiante realiza su escultura partiendo del empleo de la simetría axial utilizando dos ejes perpendiculares entre sí, creando una escultura con detalles bisimétricos similar a la escultura El Partero que exploraron en la Tarea 3.

El reconocimiento del valor científico y cultural del Pueblo Escultor es un propósito que requiere de más sesiones de trabajo, sin embargo, en estas actividades donde se involucran las imágenes de las esculturas se propician los espacios para que los estudiantes a través de la exploración reconozcan el saber geométrico que el pueblo prehispánico plasmó en la piedra. Estas actividades, sirven como punto de partida para reconocer el legado de los ancestros y afianzar la identidad latinoamericana.

A partir de este trabajo se genera una invitación a los docentes a continuar estos procesos diseñando sus actividades para las clases de matemáticas teniendo en cuenta los elementos históricos y culturales presentes en los vestigios arqueológicos de las diferentes comunidades prehispánicas de América Latina, donde se encuentran representados varios conceptos matemáticos. Ejemplos de estos procesos son las propuestas de Aroca (2007) y Huapaya y Salas (2008) que se presentaron en los antecedentes.

Al incorporar en el currículo propuestas para la enseñanza de las matemáticas occidentales a partir del conocimiento geométrico del grupo prehispánico, se logra establecer un mecanismo que puede llevar a diferentes instituciones educativas la posibilidad de enseñar geometría desde una perspectiva cultural. Esto, contribuirá a que se reconozca y valore el pensamiento matemático de estos pueblos ancestrales.

En la *puesta en acto*, ocurrió una situación imprevista que permite dilucidar cómo a partir de esta experiencia se puede aportar a los procesos de investigación en aras de descifrar el significado

de varios detalles presentes en las esculturas de San Agustín, que aún son un enigma para muchos investigadores. Esta situación ocurrió cuando se presentó a los estudiantes la escultura El Flautista y se les preguntó ¿qué observan, o a qué se les parece esta escultura?, la mayoría respondió que a la trompa de un elefante, lo que llama la atención y podría ser un punto de partida para repensarse la interpretación que se le han dado a algunos detalles que conforman esta escultura. Este escenario se puede contemplar como una estrategia de investigación, la cual se extrapolaría a otros espacios con grupos escolares de comunidades indígenas que no conocen las esculturas pero tienen saberes ancestrales que aportarían elementos para decodificar algunos detalles presentes en las esculturas de San Agustín que siguen siendo objeto de estudio.

6.3 En relación con la hipótesis de investigación HI 3

En la hipótesis de investigación **HI 3**: *El uso de recursos manipulativos y virtuales propicia el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría axial*. Esta hipótesis está ligada al tercer objetivo específico y se abordan en la unidad de análisis de complementariedad de recursos.

Actualmente, existe una tendencia a integrar ambientes informáticos en la enseñanza de las matemáticas como lo proponen los referentes de calidad del MEN y se refleja en las múltiples investigaciones en Educación Matemática en esta línea. A partir de los resultados de esta investigación, se sugiere que de acuerdo a la edad de los estudiantes, antes de explorar el concepto matemático en los AGD; es conveniente que lo hagan utilizando recursos manipulativos que les aporten experiencias significativas esenciales para el aprendizaje.

En la simetrización de una figura en cartulina, a partir de varias acciones en las que se manipulan los semiplanos al momento de pintar y estampar la imagen se observó como el estudiante experimenta la rotación de 180° del semiplano que contiene la *figura objeto* respecto al eje de simetría. Esta actividad les permitió entender a partir de la manipulación y la visualización el porqué la *figura imagen* tiene dirección contraria a la *figura objeto*, porqué las dimensiones y la forma son iguales entre dos figuras simetrizadas. Asimismo, permitió identificar la función del eje de simetría cuando lo relacionan con el doblez y porqué las distancias de la imagen y el objeto son iguales respecto al eje de simetría. También, identificaron puntos correspondientes cuando pintaron un punto con témpera y lo estamparon en el otro semiplano de la cartulina identificando las características y propiedades de los puntos correspondientes.

En la puesta en común, se evidenció que los estudiantes utilizaban la construcción en cartulina para argumentar al resto de sus compañeros las respuestas que le dieron a las preguntas, señalando los elementos de la simetría axial.

Cuando se realizó el trabajo en el ambiente informático los estudiantes ya reconocían los elementos que intervienen en la simetría axial. Al trabajar en la interfaz de Cabri, se tienen otras posibilidades para experimentar en algunos ejercicios dinámicos como arrastrar los objetos matemáticos reconociendo la variación de las distancias del objeto y la imagen respecto al eje de simetría simultáneamente cuando se arrastra la *figura objeto* y que los movimientos de la imagen dependen del eje de simetría y el movimiento de la *figura objeto*.

Una actividad que los estudiantes experimentaron en Cabri, que les permitió identificar la posición del eje de simetría, se vivenció cuando modelaron sobre la escultura colocada como fondo de pantalla las figuras geométricas utilizando simetría y querían validar si la escultura es simétrica respecto a un eje vertical, arrastraron el eje para mostrar que pasaría si el eje no se coloca en el lugar correcto y a partir de esta retroacción del *medio* los estudiantes definieron la ubicación del eje de simetría y validaron que los detalles de la escultura son simétricos.

Con base en las experiencias desarrolladas por los estudiantes en la *puesta en acto* de las tareas se puede afirmar que los recursos manipulativos e informáticos son complementarios y que cada uno de ellos aporta elementos que le permiten al estudiante construir el concepto matemático y alcanzar un aprendizaje significativo.

En la *puesta en acto*, también se observó que los estudiantes rápidamente integraron los recursos tecnológicos en sus prácticas de aula y por tanto, la idea recurrente en los docentes respecto de lo dispendioso que sería la distribución y recogida de los computadores se desvirtúa con la experiencia, puesto que luego de tres encuentros utilizando los computadores portátiles los estudiantes adquirieron rutinas que permitieron distribuir y guardar los equipos sin contratiempos y sin obstaculizar el desarrollo de las actividades curriculares.

6.4 Inquietudes suscitadas a partir de esta investigación y reflexión final.

Por último, se plantean algunos interrogantes y apreciaciones del autor.

Los interrogantes que han surgido en el desarrollo de esta investigación y que pueden ser abordados en futuros trabajos se plantean a continuación.

Relacionadas con el Programa Etnomatemática:

- ¿Cómo estimular a los docentes para que diseñen recursos educativos incorporando resultados de estudios de Etnomatemática que propicien el reconocimiento de los saberes matemáticos ancestrales de los grupos étnicos?

Relacionadas con el Pueblo escultor:

- ¿Qué instrumentos, patrones de medida y numeración utilizó el grupo escultor?
- ¿Este tipo de trabajos pueden ayudar a descifrar enigmas en los vestigios arqueológicos del pueblo escultor de San Agustín que desapareció al rededor del siglo VII d.C.?

Relacionadas con las Instituciones educativas y sus currículos de matemáticas:

- ¿Cuáles son los criterios que se tienen en cuenta para dotar una institución educativa de recursos tecnológicos?
- ¿Cómo superar los prejuicios que algunos docentes tienen sobre la logística que se debe tener al momento de utilizar los computadores?

A manera de reflexión del autor:

En el proceso de formación como educador matemático, el desarrollo de esta investigación permitió reflexionar acerca de las prácticas de aula en torno a la gestión didáctica del docente, quien es el responsable de generar los ambientes apropiados para el aprendizaje donde indiscutiblemente los recursos que se emplean juegan un papel determinante para alcanzar los objetivos propuestos en la clase. Por tal razón, la integración de los recursos informáticos debe hacerse a partir de actividades donde los estudiantes puedan interactuar con las herramientas que ofrecen los ambientes informáticos y puedan identificar en ellas la posibilidad de aplicarlas en otros espacios diferentes al aula de clase y esta integración habitual les permita desarrollar los esquemas de uso necesarios para que el software no limite sus procesos de razonamiento.

En relación con *el diseño de tareas*, esta es una herramienta significativa para la enseñanza de los conceptos matemáticos que permitió reflexionar sobre el aprendizaje de los estudiantes. La fundamentación del diseño teóricamente permite tomar consciencia de la diversidad de elementos que intervienen en el aprendizaje y en la validación de los diseños al realizar los análisis. Con el uso del video, se identificaron diversas situaciones en la forma cómo se enseñó y algunas actitudes del docente que se deben fortalecer, corregir o mejorar en la interacción con los estudiantes.

Otro aspecto relevante en el *diseño de tareas* se relaciona con la planificación para la integración de los recursos que se tienen a disposición. Esta, se puede convertir en una invitación a los demás docentes para desarrollar actividades en las que se explore el uso de recursos tecnológicos más allá de solo utilizarlos para presentar la información a los estudiantes en el video proyector y consolidar Comunidades de aprendizaje (CDA) donde se involucren los docentes de la institución interesados en analizar sus prácticas de aula para mejorar los aprendizajes de los estudiantes y prepararse para la Evaluación de carácter diagnóstico formativo (ECDF)²⁹. Todo esto, teniendo en cuenta que la investigación abordó elementos que pueden ser considerados al momento de registrar las prácticas de aula en video y los respectivos análisis.

En las CDA también se puede plantear la posibilidad de integrar el desarrollo de las tareas con el área de artística, donde se podría utilizar las técnicas estudiadas en matemáticas para que los estudiantes construyan esculturas en diferentes materiales tales como arcilla, plastilina, poliéstereno expandido (EPS)³⁰ entre otros y del área de sociales, donde tradicionalmente se abordan los temas de las culturas indígenas, haciendo un especial énfasis en la cultura de San Agustín.

Los logros alcanzados al realizar los estudios de Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática en la modalidad de profundización, se han visto reflejados en el mejoramiento de las prácticas de aula, el fortalecimiento disciplinar, la optimización en el uso de recursos, la promoción de la cultura de San Agustín en diferentes espacios académicos y el ascenso laboral alcanzado en el marco de la ECDF.

²⁹ La ECDF corresponde a la prueba que presentan los docentes del sector público para ascender en el escalafón docente y mejorar su nivel salarial.

³⁰ Material plástico espumado, derivado del poliestireno y utilizado en el sector del envase y la construcción (Icopor).

Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2015). Promoviendo conversaciones entre docentes acerca de clases filmadas de Matemáticas. *en la XIV CIAEM*, conferencia plenaria celebrada en el Instituto Weizmann de Ciencias Israel, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Acosta, M., Monroy, L., y Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración. Universidad Industrial de Santander*, 2 (2), 173-189. Recuperado de: <http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/viewFil/2174/253>
- Alsina, P., y Planas, N. (2008). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico - manipulativos: Para niños y niñas de 6 a 12 años* (3ª ed.). Madrid: Narcea.
- Aroca, A. (2007). *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: comunidad indígena Ika – sierra nevada de santa marta* (Tesis de maestría). Universidad Del Valle, Cali, Colombia.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R., Douady, L., Moreno, L., y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp.33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana,
- Blanco, H. (2017). *Elementos para la formación de maestros de matemáticas desde la etnomatemática* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Blanco, H., & Oliveras, M. (2016). Ethnomathematics: A political tool for Latin America. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, 6 (1), 112–126.
- Bohorquez, H. J., Boscán, L. F., Hernández, A. I., Salcedo, S., & Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Educere*, 13(45), 477-489.
- Bonell, C. (1999). *La divina proporción*. Cataluña, España: Ediciones UPC
- Brousseau, G. (1986). Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educacion matematica*, 12(1), 5-38.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Vol. 7). Libros del Zorzal.
- Chamorro, M. del C. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp.69–94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.
- D'Ambrosio, U. (1986). Socio-cultural bases for mathematical education. In *Proceedings of the*

- fifth international congress on mathematical education* (pp. 1-6). Birkhäuser, Boston, MA.
- Díaz, D., Sánchez, J., y Mayorga, A. (2014). Cabri II Plus como herramienta para la enseñanza de las Isometrías, *Educación y Tecnología* N° 04, 52-63.
- Gómez, L. D., y Cubillos, J. C. (1979). *Arqueología de San Agustín: Alto de los Ídolos, montículos y tumbas* (No. 4). Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales, Banco de la República.
- Duval. R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano*. Trad. Vega, M., Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo Educación Matemática. Cali.
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus* (Tesis de Maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Franchi, L., y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63-71.
- Gamboa, R. (2007) Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2(3), 11-44.
- Garzón, D., y Vega, M. (2013). *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría: estudio de casos*. Universidad del Valle. Cali, Colombia.
- Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2003). Manual para el Estudiante. En *Matemáticas y su Didáctica para Maestros* (pp.77-82). Proyecto Edumat-Maestros Director: Juan D. Godino, Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 1-15.
- Guerrero, A. (2006). Movimientos en el plano. En A. Gutiérrez (Coord.), *Geometría: Desarrollo Axiomático* (pp.265-403). Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.
- Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, 24(1), 31-42.
- Huapaya, E., y Salas, C. (2008). Uso de las ideas matemáticas y científicas de los Incas en la enseñanza - aprendizaje de la geometría. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 1(1), 4-11.
- Ibarguen, Y., y Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2010). Resultados de

- Colombia en TIMSS 2007- Resumen ejecutivo. Informe de resultados internacionales. Bogotá, D.C. Colombia.
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2013). Pruebas Saber 3°, 5° y 9°, Guía, Orientaciones para la lectura e interpretación de los reportes de resultados para establecimientos educativos. Bogotá, D.C. Colombia.
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2015). Matrices de referencia de matemáticas. Recuperada de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2016). Resultados de Colombia en PISA 2015 - Resumen ejecutivo. Bogotá, D.C. Colombia.
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2017). Reporte histórico de comparación entre los años 2015 – 2016. Institución Educativa Golondrinas Código DANE: 276001022232. Recuperada de <http://www2.icfes.gov.co/item/1813-consulta-de-resultados-historicos-ftp-saber-11-2015>
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1996). El grupo de las isometrías del plano. *Síntesis. Madrid*.
- Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of mathematics teacher education*, 7(3), 203-235.
- Laborde, C. (1997). *Cabri-Géomètre o una nueva relación con la geometría*. En L. Puig y J. Calderón (Eds.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, (pp. 33-48). Bogotá: Una Empresa Docente.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics*. Cheong-Ju: Korea National University of Education.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Panamericana Formas e Impresos. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, D.C., Colombia
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Tecnología Informática: Innovación en el Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media*. Santafé de Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

- Ministerio de Educación Nacional. (2007), Plan decenal de educación 2006-2016. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Plan Sectorial 2010-2014 Educación de calidad el camino para la prosperidad Estrategia de formación docente en cascada*. Bogotá D.C. Colombia.
- Montes, S. (2012), *Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De Transformaciones Geométricas En El Plano con Estudiantes de Grado Séptimo Haciendo Uso del Entorno Visual del Juego Pac-Man*, (Tesis Maestría). Universidad Nacional De Colombia, Bogotá.
- Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales, Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas. *Memorias del Seminario Nacional MEN*, p81.
- Moreno, M. (1998) *Didáctica de la matemática en la educación secundaria: manual para la formación inicial del profesorado de secundaria. Didácticas de las matemáticas y ciencias experimentales*. Almería, España. Universidad de Almería Servicio de publicaciones.
- Oldknow, A. (2004). *GeoGebra Geometry and digital images in bringing geometry to life, and life to mathematics*. University College Chichester, UK.
- Pedrerros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: Una aproximacion desde la Teoria Antropologica de lo Didactico y el Enfoque instrumental* (Tesis de maestria). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Planeación Municipal. (2008). Plan de desarrollo estratégico. Corregimiento de Golondrinas periodo 2004-2008. Cali, Colombia.
- Piaget, J., y García, R. (1982). *Desarrollo Histórico de la Geometría*. En *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. (1era. Ed.). México D.F. Siglo Veintiuno Editores.
- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M (2013). Criterios De Diseño de tareas Para Favorecer El Análisis Didáctico En La Formación De Profesores. *Tema: IV.2 – Formación y Actualización del Profesorado*, (pp. 4999-5009). Montevideo: Actas del VII CIBEM.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Trad. M. Acosta). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1995)
- Rengifo, L. A. (1966). *La proporción armónica en la estatuaria agustiniana*. Bogotá: Impr. Nacional.
- Santacruz, M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria* (Tesis de Maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Trouche, L. (2004). *Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment* (CBLE). Guiding Student's Process command through instrumental orchestrations. University Montpellier II.

- Organización de las Naciones unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, UNESCO. (2008). Estándares de competencias en TIC para docentes. Recuperado de <http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/default.aspx> Londres.
- Urbano, R. (2009). *Transformaciones Isométricas en las Esculturas de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Urbano, R. (2010). Geometría en las esculturas del parque arqueológico de San Agustín. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática* 3(1), 45-66.
- Vasco, C. (1992). *Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones*. En: Ciencia y Tecnología. No. 2. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Valenzuela, M. (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría un estudio sobre algunos colegios de Chile* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.
- Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10:205-215.
- Zapata, F. (2014). *La geometría en las plantas: experiencia de modelación matemática en el pensamiento espacial y sistemas geométricos* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Anexo 1. Guía del estudiante Puesta En Acto.
Guía del estudiante
Sesión 6. Simetría en el plano

Estudiantes: _____

Grado: _____ **fecha:** _____

Con la siguiente actividad podrás identificar los elementos de la geometría que intervienen en la transformación geométrica de la simetría axial, además de cómo se aplican, describen y verifican simetrías en el plano.

Materiales.

- Una cuarto de cartulina
- Fotocopia escultura
- Utensilios cotidianos de la clase de geometría
- Témperas, pinceles tijera, pegante.
- Aula inteligente

Tarea 1: Manipulando Recursos

En la hoja del **Anexo 6.1** realiza un dobléz o pliegue teniendo en cuenta: no tocar la escultura y al doblar la cartulina, la fotocopia de la escultura debe quedar cubierta, luego traza una línea recta por el dobléz que llamaremos ***l***, utilizando la regla y el lápiz. Con témpera pinta el contorno, puntos, rectas y detalles de la fotocopia de la escultura que en adelante la llamaremos el ***objeto***, sin que se haya secado la témpera dobla la hoja por la línea ***l*** que trazaste y desliza suavemente tus dedos sobre el dorso del papel para que la témpera se adhiera en la otra parte de la cartulina, finalmente extiende la cartulina, si es necesario repinta un poco la figura que se estampó la cual llamaremos ***imagen***. (Nota, a medida que pintas puedes doblar y estampar varias veces para que no se seque la pintura)

Teniendo en cuenta la actividad desarrollada anteriormente responde las siguientes preguntas:

- a. Al comparar la figura objeto, con la figura imagen que se estampó al doblar la cartulina ¿Se puede asegurar que tienen la misma forma?, ¿Por qué? _____

- b. ¿La fotocopia de la escultura, el ***objeto***, tiene el mismo tamaño que el dibujo estampado la ***imagen*** al otro lado de la línea? ¿Por qué? _____

- c. Identifica varios puntos en el objeto, márcalos con letras mayúsculas, por ejemplo (R) y su correspondiente punto en la imagen con la misma letra y una comilla, por ejemplo (R'). ¿Cómo son las distancias del punto R a la recta l y del punto R' a la recta l , compara las distancias de los demás puntos en el objeto con la recta y su correspondiente en la imagen? ? _ _ _ _ _

- d. Si trazas rectas que pasen por los puntos en el objeto y su correspondiente imagen, ¿Qué relación geométrica hay entre estas rectas? ¿Esta condición se da para cualquier par de rectas trazadas entre los puntos del objeto y su punto correspondiente en la imagen? _ _ _ _ _

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.

Tarea 2: Vive tu experiencia en AGD

Coloca la imagen de la escultura la Máscara de Quebradillas (Figura 1) como fondo de pantalla en Cabri, resalta los detalles de la escultura utilizando la herramienta polígono, luego traza una recta vertical que divida en dos partes iguales la escultura y nómbrala con la letra l . Marca y nombra varios puntos con letras mayúsculas en el lado Izquierdo de la escultura (objeto A) y su correspondiente a la derecha con la misma letra mayúscula de la forma (A' prima).

- a. Mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta l y de su correspondiente punto en la derecha, a la recta l , puedes utilizar la notación distancia (A, l) o distancia (l , A') para registrar tu respuesta en la guía del estudiante, realiza esta misma acción con otros puntos, ¿cómo son las distancias correspondientes?, ¿Por qué? _ _ _ _ _

- b. Traza segmentos entre los puntos del objeto y su correspondiente en la imagen, con las herramientas de Cabri halla el punto medio.

- ¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí? _ _ _ _ _

- ¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta? _ _ _ _ _

- ¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta? _ _ _ _ _

- ¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta? _____

- d. Utiliza la herramienta Mostrar ejes y rejilla, haga que el eje de simetría de la escultura coincida con el eje vertical (eje Y), identifica varios puntos correspondientes del objeto y la imagen e identifica las coordenadas del punto C:(x,y) y su correspondiente en la derecha C':(x,y). Escribe varios grupos de puntos con su correspondiente imagen. A: (__, __) y A': (__, __) ; B: (__, __) y B': (__, __) _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo.

Tarea 3: explorando construcción.

A partir de las macro 6.1 construidas en Cabri realiza las siguientes actividades. Debes tener en cuenta que para arrastrar las construcciones se acerca el cursor al objeto y cuando se nombre como polígono lo puedes arrastrar, de lo contrario altera la forma de la figura. Arrastra las figuras y reconstruye la imagen como se muestra en la construcción.

- a. ¿por qué cuando se arrastra una figura la otra que es congruente se ajusta a los detalles de la escultura? _____

- b. ¿Qué simetría se utilizó en los detalles de los ojos?, ¿Qué simetría se utilizó para la configuración de los brazos? _____

- c. ¿Qué dificultades se presentaron al desarrollar la actividad? _____

A partir de la construcción 6.2 elaborada en Cabri, realiza las siguientes actividades: construye el eje de simetría y coloca cada detalle superpuesto en la escultura, si los detalles no están contruidos realiza la transformación geométrica para completar el rediseño de la escultura en Cabri.

- a. ¿Qué dificultades se experimentan si el eje de simetría no está bien definido? _____

b. ¿Qué transformaciones geométricas utilizó? _____

c. ¿Qué elementos se deben tener en cuenta en las transformaciones de simetría? _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo. _____

Tarea 4: Institucionalización del concepto y evaluación.

Describe en que consiste la simetría axial y los elementos que intervienen en las transformación de simetría axial. _____

Utiliza las transformación de simetría, los principios del pueblo escultor, para diseñar tu propia escultura en Cabri, personalízala rellinando los polígonos con colores, denotando los ejes de simetría, los vértices con la notación correspondiente del objeto y su imagen, en un cuadro de texto en la interfaz de Cabri relata los elementos de la geometría que utilizó y que simboliza la escultura. _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que haga la puesta en común a la clase de las respuestas y conclusiones de tu grupo. _____

Anexo 2. Protocolo Tarea 1

Protocolo Tarea 1	
Tiempo	REGISTROS
0' 00"	P: Bueno según mis cálculos ahora que vamos a hacer, míreme bien y vamos a levantar las sillas y las mesas porque no se debe escuchar nada, cuando yo termine de contar 10, ustedes cuatro (Se dan las orientaciones de la conformación de los grupos) ustedes cuatro, (señala cuatro estudiantes, luego hace lo mismo con otros cuatro estudiante). Ustedes cuatro... ustedes dos, (ejemplifica la organización de la forma como deben quedar los grupos) mi amiga se va a para y gira la mesa de esta manera lo mismo los demás integrantes de manera, ninguno le da la espalda al tablero. Yo cuento hasta diez y no debo escuchar ningún (ruido) de un pupitre ni una silla.
1' 42"	P: (cuenta) uno, dos, tres diez (los estudiantes conforman los grupos como se indicó inicialmente) esta vez se demoraron mucho, para la próxima se van a demorar menos tiempo. Muy bien ahora les voy a entregar una hoja con el taller, bueno aquí esta.
2' 23"	P: de una vez vamos a aclarar cómo se trabaja en grupos (se hace las recomendaciones sobre la necesidad del silencio) En el trabajo en grupo deben elegir quien se va a encargar de los materiales, quien va hacer el vocero para cuando necesite hablar el grupo esta persona es la que debe hablar entonces ustedes se encargan de elegir quien es el vocero y quien se encarga de los materiales.
3' 30"	P: yo le voy entregando las hojas y en estos momentos pueden escuchar sus voces, pueden estar hablando para ponerse de acuerdo (el profesor reparte la guía a los estudiantes). E: usted materiales y yo el vocero (se distribuyen los materiales). la mayoría tienen dos hojas, lean por favor todo, ustedes van a leer la tarea número uno manipulación de recursos. (se escucha la lectura de los estudiantes y como ellos dicen que se deben hacer las actividades)
4' 46"	P: (explica el Anexo 6.1) el pliegue lo tienen que hacer en la cartulina (muestra el cuarto de cartulina) tengo que corregir eso, está la tengo que pegar en la cartulina (muestra la fotocopia de la escultura), cuando peguemos la fotocopia en la cartulina este sería el Anexo 6.1 y sobre él es que vamos a trabajar, el doblez que dice ahí (muestra la cartulina) lo pueden hacer así, derecho o torcido como quieran, eso está en la imaginación de cada uno. P: ustedes van a leer con atención la tarea número uno manipulando recursos, van hacer lo que dice allí, tienen para eso 10 minutos para pegar ya les paso las témperas. E: (los estudiantes realizan el trabajo correspondiente recortan y pegan la copia en la cartulina) pintar en que parte en la parte de atrás en la parte del frente E2: donde hay que pintar profe E1: que hay que hacer E2: todo E1: como el profesor no le dice nada a uno, si profe explique que hay que hacer P: lea la Tarea 1 de la guía E1: Profesor no entiendo la pregunta
7' 51" al	E: Mejor usted pinte acá y que el pinte allá. E: profesor tiene un pincel delgadito. P: excelente muy bien alguien podría ir repintando acá si quiere tienen otro pincel, voy a conseguir pinceles delgaditos. E: profesor tiene más pinceles P: no tengo más (los estudiantes continúan pintando y doblando, algunos se quejan de lo grueso de los pinceles) E: es que a ellos si les rinde ve. P: les está quedando bonito, deben doblarla bien aquí para que no se corra E: profesor tiene otro pincel.



9'22" al	E: lee A medida que pintas puedes doblar y estampar varias veces para que no se seque la témpera. P: ya sabes dónde pinto. P: (a otro grupo) rápido que si no se le seca.
10'39"	E: lee identifica varios puntos si no en el objeto por ejemplo M y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. P: listo, busca un punto aquí. Un punto cualquiera. E: El del ojo P: bueno el del ojo, listo márcalo t�. E: marca un punto sobre la figura: N P: listo y colócale la letra, eso que es N, donde quedar�a ese punto en el otro lado de la recta E: aquí P: y ese ser�a N que E: lee marca un punto y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. P: entonces N prima, ahora pueden colocar más punticos, el que este aquí y el que este acá. E2: yo, yo , yo
12'00"	P: deben contestar las preguntas, quedan 11 minutos y debemos hacer una discusión sobre los resultados porque se acaba el tiempo. E: profesor ya terminamos. P: (recoge las témperas para que los estudiantes dejen de pintar y se dediquen a responder las preguntas). E: los estudiantes en grupo trabajan en la solución de las preguntas. E: profe P: entonces, tu colocas más punticos por ejemplo a este le colocar�as A, donde estar�a A', �d�nde crees que caiga A' halla? E: un estudiante señala el lugar de A' P: bueno entonces marque más puntos. E2: por ahí veinte. P: por ahí diez
14'40"	E: profe, nosotros no entendemos esta. P: vamos a leerla con calma, léela. E: lee, identifica varios puntos en el objeto por ejemplo M y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. E2: muestra los puntos en la construcción A, B y C, D P: busca un punto aquí cualquiera, pon un punto cualquiera (señala la fotocopia de la escultura) E2: el del ojo. P: bueno el del ojo. E2: que le escribimos P: póngale un punto (que marque el punto con el lapicero), col�quele una letra mayúscula, Acá cual ser�a ese punto. (señala el área donde se estampa la escultura) E2: señala el punto correctamente. P: y que dice que hay que hacer halla, con el punto E2: (el estudiante lee la guía) dice que hay que marcarlo con la misma letra y con una comilla, por ejemplo R con una comilla. P: marquen otros puntos más puntos que tengan esa misma relación. E2: la E. P: eso y esa donde tendr�a su punto halla (señala el área de la figura estampada) eso muy bien, excelente y marquen más. E1: cuál es ese E2: la C. P: eso puedes marcar, aquí adentro y puedes marcar más E2: ese P: si muy bien y puedes marcar más, sigan ahí.
16'19"	E1: estamos bien "juiciecitos" aquí. E2: no entendemos esta pregunta. E1: pero ya vamos bien. E2: (lee la pregunta de la guía). Trazas rectas que pasen, por el punto en <i>el objeto</i> y su correspondiente

	punto en <i>la imagen</i>, ¿qué relación geométrica hay entre las rectas trazadas? ... ¿Por qué? E1: a pues yo digo que eso sería a lo largo y a lo ancho. (señala la construcción en la cartulina) P: primero tracen las rectas para que las vean. E3: pero como pero como P: (sobre la construcción) ustedes ya tienen puntos hacia, de donde a donde trazarían E1: de donde comenzamos (señala con la punta de un lapicero sobre la construcción). De aquí a aquí y acá E3: si aquí a aquí, P: pero como dice en la guía. E2: le nuevamente la pregunta, Trazas rectas que pasen, por el punto en <i>el objeto</i> y su correspondiente punto en <i>la imagen</i>. E1: yo digo que por donde comenzamos. P: por dónde. E3: (señala la figura imagen) aquí a aquí E1: (señala la figura imagen), yo digo que por donde comenzamos “cla cla cla” E2: (señala la figura imagen), no, porque también están estos puntos E4: Empezamos por esta sí, luego bajamos subimos y volvimos a bajar (señala solo la figura objeto) E2: no será mejor que empezáramos de aquí a acá (señala solo la figura objeto) P: vuelva y lea. E2: lee. Trazas rectas que pasen, por el punto en <i>el objeto</i> y su correspondiente punto en <i>la imagen</i>, <i>que relación...</i> P: (repite la lectura), por el punto en el objeto y su correspondiente punto en la imagen ¿cuál es el objeto? Es: señalan dos P: y la imagen dos señalan el dibujo objeto y una señala la figura imagen. P: uno solo cual es el objeto. E3: (palmeando la figura objeto) este es el objeto. P: y la imagen E3: (señala la figura imagen), esta es la imagen, profesor. P: lea nuevamente. E2: (lee nuevamente la pregunta) Trazas rectas que pasen, por el punto en <i>el objeto</i> y su correspondiente punto en <i>la imagen</i>, P: entonces de donde a donde iría la recta. E3: de aquí (señalando un punto en el ojo de la figura objeto), acá (señalando el punto en el ojo correspondiente en la figura imagen). P: eso si tiene sentido E: de aquí (señala un punto en la imagen) a acá (señala su correspondiente punto en la figura objeto repite esta actividad) “cla, cla, cla”.
18' 58"	E: lee, Identifica varios puntos en el objeto, márcalos con letras mayúsculas por ejemplo (R) y su correspondiente punto en la imagen con la misma letra con una comilla por ejemplo (R'). ¿Cómo son las distancias a la recta l, de los puntos en el objeto con su correspondiente imagen? E2: entonces pongamos punticos aquí. P: usted pone un puntico aquí, márkuelo. E: de aquí a aquí. P: bien, entonces póngale la letra R. E: a este la letra R'. P: bueno así, busquen otros punticos más.
20' 20"	P: como van con el taller E: vamos mal. P: ustedes están jugando y deben estar trabajando sobre esto. E: profe una pregunta es que aquí dice coloque la imagen como fondo P: eso ya es otra cosa hoy van hasta aquí no más.

20'57"	P: entonces yo voy a preguntar. P: (en la puesta en común solicita que los trabajos estén sobre la mesa en cada grupo) ¿ustedes creen, sin mirar lo que han escrito, el objeto y la imagen son iguales? Ustedes responden sí y me dicen por qué o no y me dicen por qué. G1: si porque tiene la misma figura y esta calcado y viene siendo lo mismo, bien. P: ustedes G2: No son iguales porque el objeto se puede cortar y la imagen no. (se refiere a que el objeto está en una fotocopia y ellos la recortaron antes de pegarlo a la cartulina P: y de las formas que piensas. G2: si es calcada es la misma forma porque la imagen es el mismo objeto. P: las distancias de la imagen y el objeto a la recta l es la misma, muéstrame la recta l. ¿Cómo son las distancias? G2: (un integrante muestra la recta y señala con un dedo la letra l). Iguales, iguales. P: iguales, interesante, muy bien gracias. P: vamos acá con ustedes, como son las rectas que hay entre los puntos correspondientes G3: torcidas, ¡rectas! P: quien va hablar de este grupo (señalan un estudiante) listo cuéntame. Comencemos de nuevo, como es el objeto y la imagen tienen el mismo tamaño. G3: no son iguales porque a la hora de trazarlos, pues como le digo. Quedaban muchos espacios sin pintar y a nosotras nos tocaba repintar. P: y lo que pintaba tiene el mismo tamaño con lo que se estampó. G3: no porque a nosotros nos tocaba repintar. P: muy bien.
23' 12"	P: ahora ustedes la primera cuéntenme ¿el objeto y la imagen son iguales? G4: si porque al pintarla y al estamparla quedarían de las mismas dimensiones. P: muy bien excelente y la forma. G4: si porque se hacen pintando y se estampan igual. P: muy bien. P: bueno ustedes, quien va hablar el. P: ¿tienen la misma forma el mismo tamaño? G5: un estudiante dice que sí y otro dice que no. ¿Cómo es la pregunta? P: tienen la misma forma y el mismo tamaño. G5: si P: y tú dices que no, recuerden escribir eso. P: bueno, como están, ustedes dicen que tienen la misma forma y el mismo tamaño. G6: si porque al calcar la imagen con pintura al otro lado aparece igual. G6E2: pero sale como torcido. P: ¿por qué creen que sale como torcido? G6E2: porque la imagen esta torcida. P: y solamente porque la imagen esta torcida. G6E2: no porque la doblamos así P: a ya, como se llama eso. G6E2: pingüino. P: el eje de... el punto por donde doblamos se llama eje de simetría, muchas gracias. Muy bien.
25'32"	P: como son las distancias del punto R a la recta l y del punto R' a la recta l. Muestren la imagen. G7: N prima la distancia es de 12,5 cm, K' 30,5 cm, A' 37,6 cm P: escuchen lo que dice acá (señala la guía Tarea 1 literal c) alguien comparo la distancia que hay de aquí a la recta (señala del punto en el objeto al eje de simetría) de la recta al otro punto (señala del eje de simetría al punto correspondiente en la imagen). Así era que debían compararla, no era de un punto al otro punto sino del punto a la recta y su correspondiente. ¿Alguien lo hizo así?, nadie, no hay problema para aproxima, hay que aclarar ese punto.



26' 32"	P: continuamos con la pregunta D lee la pregunta “ Si trazas rectas que pasen por los puntos en el objeto y su correspondiente imagen, que relación geométrica hay entre las rectas? Y ¿Esta condición se da para cualquier par de rectas trazadas entre los puntos del objeto y su punto correspondiente en la imagen” bueno ahora si era de lado a lado? G6: la relación que hay entre las rectas es paralela oblicua o perpendiculares porque se trata en te las distancias de los puntos. P: que dice el grupo cinco G5: que son paralelas y no se cruzan ni se cortan porque son paralelas. P: De todos modos hay una situación que hay que corregir, el grupo número cinco esta en lo correcto porque las rectas son Paralelas, claro son paralelas no se puede pensar que son perpendiculares ni son oblicuas, son paralelas no se cortan, ahora vamos con los comentarios
---------	--

Anexo 3. Protocolo Tarea 2

Protocolo Tarea 2	
Tiempo	Diálogos
0'00" al	P: ahí, dice Cabri Plus, volvemos y abrimos la carpeta, esa que estoy señalando yo acá el tercero lo abrimos ¿les salió la mismo que a mí? E: si, no (algunos alumnos dicen si y otros no) P: si eso, muy bien (el profesor se dirige al puesto de una alumna para explicarle el procedimiento) ¿ya abrieron el tercero todos? Les repito nuevamente para los que no han hecho la actividad, voy a cerrar el programa (muestra en el video proyector las carpetas que se deben abrir) le damos Cabri plus ejecute y abrimos la tercera carpeta, este es un programa que se ejecuta sin ser instalado en el computador, esto se llama un ejecutable. Ahora van hacer lo siguiente, le vamos a dar clic (el profesor pregunta) ¿esta que mano es? (alzando la mano derecha). Está que es la mano derecha le doy clic aquí y ¿Qué les aparece? E: color de fondo o imágenes fondo. P: entonces vamos a decir imagen de fondo. E: ¿Qué? ¿Qué fue lo que hizo? P: (el docente repite los pasos a seguir a los estudiantes que presentaron dificultades) escuchen todos van a buscar en el escritorio, van a buscar la carpeta que dice sección 6 y van a buscar la imagen que dice figura 1 y le damos clic a la figura 1 y ahí ya la tiene como fondo de pantalla (el docente se cerciora de que les haya quedado bien), pongan atención (el docente repite los pasos de cómo poner la imagen de fondo para cambiar de imagen y explicar algo nuevo).
3'32"	P: Después de que tiene la figura 1 La máscara pueden ampliar la imagen, subir o bajar y que es lo que yo les pido que hagan ahora con esta escultura, miren bien, ahora sí, conéctense porque ya los voy a dejar solos, lo último que les digo es lo siguiente , se van a meter acá donde está la recta, hay una que dice polígono entonces con el polígono yo vengo acá, le doy puntico, arrastro le doy puntico, arrastro le doy puntico, arrastro y vuelvo y lo pongo acá y ahí ya tengo el polígono, supongamos que le quiero dar color entonces vengo acá a la última y le digo color, miren acá por favor, si quiero darle color le doy rellenar, entonces ahora ustedes que van hacer, le voy a hacer la orejita, a este le (muestra la herramienta circulo) doy clic y lo abro hasta que me cubra la orejita, supongamos que voy a hacer algo más complejo, voy a hacer este bracito de aquí, miren (el profesor muestra como le hizo el brazo) y digamos que le quiero dar color. E: profesor color rojo, rojo, no mejor verde, verde. P: del color que ustedes quieran. Le voy a enseñar como borrar, una forma fácil es decir, elegimos acá punteros y vengo y hago como en Paint y selecciono y le doy simplemente... ¿Qué le doy? E: clic. P: suprimir E: ¿Que qué? P: selecciono y bueno le voy a dar otra vez control + Z para que me aparezca. E: con cual selección con el izquierdo o con el derecho. P: eso, con el izquierdo, presiono aquí y bueno primero le doy apuntador y presiono el clic izquierdo y arrastro y ya ahí le doy suprimir, la otra es que ustedes simplemente hagan esto niños, tengo el apuntador voy a seleccionar este polígono y le digo suprimir, también me lo borra pero me borra todos los punticos y listo muchachos quiero que ustedes hagan el ejercicio que lean muy bien la tarea número uno, para eso tiene 2 minutos y vamos a darle 25 minutos para que ustedes trabajen ahí. (el profesor explica a una alumna personalmente que no entendió muy bien la explicación general y se muestra en el video a los otros estudiantes trabajando con las imágenes de las esculturas de San Agustín)
10'17"	E: profe todo eso que estamos haciendo viene como nota en matemáticas y todo eso. P: si tengo que mirar a ver como lo trabajamos como nota en geometría ahí miramos. E: ha bueno.



	P: hay que utilizar ambas manos niños. E: profesor, profesor. P: yo también voy hacer el mío acá miren este, primero seleccionó, rellenar, selecciono el color y lo relleno. E: profesor pero mira que no pinta, profe no pinta. P: hay una cosa muy interesante, les voy a contar algo, hay unos que están haciendo esto, punto, punto, pun y se me queda pegado, para poder terminar hay que darle clic hasta donde iniciamos, al primer puntico cuando yo le doy clic al primer puntico entonces ahí si ya se termina el polígono, listo? Bueno o le voy hacer ese polígono ahí otro polígono acá, la idea es que hagan a ambos lados. (el docente toma la cámara, para grabar el trabajo de los estudiantes, tendiendo algunas dudas de los estudiantes y felicitándolos por su trabajo)
15'23"	(el docente se centra en ayudar y explicar a una estudiante que no puede realizar unas acciones) P: listo como aquí esto está como todo des configurado, entonces yo le doy clic acá afuera y ahora voy a seleccionar esto aquí, apuntador con esto puedo borrar esos puntos así presiono y arrastro, le doy suprimir, entonces vamos hacer el otro ojito, ya vamos a seleccionar nuevamente polígono, le doy puntico aquí arrastro, vuelvo a dar puntico aquí arrastro... y termino donde comencé, lo mismo acá (se refiere a otra parte de la figura) siempre termina donde se comienza. E: profesor esto no pinta. P: ya te digo. Muy bien. E: ¿cómo se hace el círculo? P: ¿El círculo? Pues se seleccione el círculo. Le das un puntico donde quieres das clic y abres. E: pero es que mire eso se queda ahí pegado. (se muestra el trabajo de los estudiantes con las figuras dándole forma geométrica a diferentes partes de su estructura y color a cada una de las formas) (el profesor orienta a algunos estudiantes en su actividad y felicita a los estudiantes por sus excelentes desempeño) P2: usted no quiere que le trace completa la línea, ahí que figura está haciendo E: si, ahora ya se.
19'08"	E: Como hago para borrar la recta P: dale clic y le dad suprimí. E: ahí no importa si queda así el circulo P: si quiere bórralo, quítelo de ahí, dele apuntador E: es que se borra P: selecciónelo aquí, cójalo del punto, jálalo con la otra mano, saque la otra mano eso ya puede borrarlo ahí, no lo borre todo, yo les aconsejo que saquen la otra mano, las dos manos son para utilizarlas. (los estudiantes continúan realizando el trabajo en las TDA)
27'10"	P: para algunos que ya han resaltado los detalles, recuerden que hay que colocarle el puntico, entonces para colocar los puntos. Suspendan un momento y miren acá por favor, bueno entonces vamos hacer lo siguiente primero le doy clic por acá... cuando tenga este poco de rayas damos clic afuera y ahí ya se desaparecen. E: ah P: porque a muchos les he visto que estaban así con esas rayitas. Voy a marcar puntos entonces voy donde está la letra A en la penúltima ventana, aquí aparece nombrar, doy clic en nombrar y ahí me dice nombrar ¿Qué? Entonces le doy en este punto y le voy a dar la letra A, entonces vuelvo y le doy acá en el apuntador y resulta que yo no quiero que quede ahí encima, quiero que me quede a un ladito, allí, entonces otra vez vuelvo y le doy nombre y vengo y le digo este punto ¿ahí está diciendo que este punto, cierto? E: sí. P: entonces le doy clic en este punto y también le doy nuevamente A pero como es A prima (A') entonces como saldrá la prima aquí. E: las comillas profesor.

	P: no porque son dos comillas y solo quiero que sea una. Listo entonces ya me queda A prima, como está muy amontonado aquí vuelvo y selecciono apuntador y vengo y la corro un poquito, de que objeto me pregunta, entonces yo le digo del punto A, vengo y muevo el punto A, ¿se dan cuenta? E: Si P: listo cuando ya tenga marcados varios puntos. Ah entonces yo quiero marcar este punto de aquí también, círculo, hago un círculo aquí y le voy a dar nombres a este círculo y nombro a este número que se llamara B y el otro será B prima (B') y le pongo color para que se vea mejor, entonces le digo color ¿Qué color se vería bien? E: azul P: azul, entonces vengo a donde dice color de texto y ya me cambia de color la letra. E: se puede pintar todo el muñequito. P: claro ustedes pintan todo lo que quieran, ahora para terminar, dice que hay que trazar un recta L, entonces hago lo siguiente, selecciono aquí recta, entonces doy un punto por acá afuera y hago así y hago un punto por acá abajo esos dos puntos, si yo necesito mover esa recta L vuelvo y coloco apuntador y la selecciono y la puedo mover para cualquier lado, entonces yo digo, no, quiero que me quede en el centro y con el punto también lo pueden mover, ustedes van aprendiendo poco apoco (el profesor repite de nuevo la explicación) si quieren ponerla más gruesa entonces le dan en espesor y ahora le quiero cambiar el color, le pongo el color amarillo y los dejo para que sigan practicando (el profesor revisa el trabajo de cada alumno felicitando y aclarando dudas sobre el tema)
39'58"	P: muy bien hágale. E: no por esta raya. P: ha bueno vamos a ver cómo es que es. Bueno hay que volver a comenzar porque ya hiciste algo que no, bueno tengamos aquí, siempre hay que trabajar con las dos manos para evitarnos problemas, yo presiono aquí y con la otra mano le doy clic hasta acá afuera, le damos clic en apuntador y voy a borrar lo que tienes aquí. E: vale. P: esta partecita. E: tienes que darle doble clic. P: ya sabes más tú que yo, le hundo suprimir. E: uff. P: y vuelvo y hago polígono pero lo hago en orden para que no me pase lo que te paso a ti. E: vale. P: entonces comenzamos, ah mira se me pego allá, yo no quiero nada de eso en ese punto, entonces inicio nuevamente, vuelvo y selecciono otra vez polígono, listo, vengo aquí así sin tocar nada, ahora si estoy aquí comencemos desde este punto que ya estaba ¿no? E: aja P: comienzo por aquí. E: ah no importa si queda un punto más arriba que otro. P: no, aquí, luego aquí, digamos que yo le hago aquí así, bueno yo le voy hacer el bracito de esta manera pero usted lo puedo cambiar. E: ah no si, tranquilo profe. P: entonces donde inicias tiene que terminar ¿de acuerdo? E: sí señor. (en este punto del video se ve como los estudiantes manejan el programa y modelan los detalles de la escultura) P: por favor vea, vamos hacer lo siguiente, voy hacer lo siguiente pongan mucha atención por favor, porque el tiempo se nos va agotar, por favor tomen aire allá y mírenme todos, como algunos han avanzado un poco más que otros eso es normal no pasa nada. Por favor niña usted levántese del puesto del pues, coge tu maletín. Listo van hacer grupitos de cuatro así, pero en línea, bueno ustedes 3 hacen una línea porque les voy a pasar algo, muy bien y usted por favor. E: ay por favor con mi prima.



	P: bueno con su prima allá pues. (en este punto el profesor termina de organizar a los estudiantes en grupos de tres y cuatro estudiantes)
47'10"	P: bueno entonces escúchenme bien acá vamos a continuar con el trabajo que ustedes venían desarrollando, ahora van hacer la actividad 2, donde esta los estudiantes que realizaron la primera parte, listo ellos hicieron la primera parte entonces en la segunda parte acá arriba le colocan el nombre de los que están, vamos hacer solamente la Tarea 2, listo, entonces leen y respondan lo que está ahí por favor. (en esta parte del video el docente reparte la guía de cada estudian en la cual ya habían hecho previamente la Tarea 1 y les dice que por favor marque los nombres de los nuevos integrantes que constituyen los grupos y aclara dudas que tienen algunos estudiantes)
53'22"	P: miren acá por favor niños, miren esto, las tareas que tiene que hacer, dice: mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta L y de su correspondiente en la derecha a la recta L. todos miren acá porque o si no después no van a entender ¿Cómo medimos la distancia? Entonces les voy a mostrar, aquí en Cabri voy a medir la distancia, aquí me aparece una cosita de centímetros, lo despliego y ahí me aparece distancia o longitud, le doy clic y vengo y le digo distancia desde este punto hasta esta recta y ahí ya me parece un numerito, luego le digo desde este punto hasta esta recta y ahí ya me parece otro numerito, también puedo medir desde este punto hasta la recta y desde este punto hasta la recta. E: profe y no se puede punto de acá y punto de acá sin la recta. P: pero es que ahí están dando una orientación, hay que seguir las orientaciones. (en este punto el docente lee con los estudiantes las preguntas de la Tarea 2 y les explica bien como trazar las líneas que unen un punto del otro y aclara dudas a cada uno de los grupos) 
1 00'00"	P: por favor escúchenme bien lo que les voy a decir, esta información es muy importante para que no les pase lo que le paso a un amigo van hacer lo siguiente, van a entrar acá donde dice archivo, todos por favor hagan esto, miren acá al tablero donde dice archivo ¿si lo ven? Le dicen guardar como, entonces ahí le colocan nombre, después de que dice figura 1 le colocan su nombre, por ejemplo el mío es Ricardo y le colocan 6 rayita (-) 1 entonces le dan guardar. E: profe Ricardo, se me reinicio. P: ah ahí si nada que hacer, claro que el a veces se lo guarda. Recuerden que computador tiene para la próxima vez que trabajemos.
1h 2' 30"	E: profe esto no me aparece mire. P: pues tiene que abrir el programa primero E: ¿Cuál programa? P: Cabri, ah no te parece. E: no. P: K G, figura 1, esa es. E: mire! P: abre acá, listo ahí está. E: pero ya está guardado. P: si ya está guardado, solo que después les enseño como abrirlo. E: entonces ya. P: si, sigue trabajando. E: ¿Qué trabajo? P: ¡ah! Ahora si lo cerraste, entonces abre Cabri nuevamente, pero hay que contestar las preguntas, ábrelo. E: aquí, ¿no? P: si, dele abrir, archivo, ahora entonces miren acá por favor, para mostrar ejes, por aquí en esta le doy mostrar. Niños miren acá por favor, alguien se va a ganar una pequeña anotación. Para el último punto van hacer lo siguiente.
1:07'25"	P: coloco un punto, digamos es que ese punto lo coloco aquí, entonces yo quiero que me diga cuales con las coordenadas de ese punto, entonces para eso miro los sellos. Entonces ¿Cuál es las coordenadas

	de ese punto? Entonces las coordenadas de los puntos se miden así por favor. Entonces quiero saber las coordenadas de ese punto, entonces miro el eje x entonces sería menos $(-1,-2),(3,-4)$ Eso ya lo vieron ¿cierto? E: si P: bueno niño vamos a recoger porque ya van a salir a descanso. E: mire vea. P: voy hacer lo siguiente, antes de eso voy a guardar lo de unos 4 niños en mi memoria. E: el mío profe. P: ya, ya voy para allá, venga guardo el tuyo por favor. P: ¿alguien conocía algo hacer de las esculturas que utilizamos como fondo de pantalla? E: no. P: bueno esas esculturas pertenecen a la cultura de San Agustín, escriban en su cuaderno allí, escriban parque arqueológico de San Agustín, escriban ahí consultar acerca de las esculturas del parque arqueológico de San Agustín. Una preguntica ¿Cómo les pareció el programa? E: ¡BIEN! P: será que si pueden aprender a manejarlo. E: sí. P: hoy como fue la primera vez es complicado pero eso después. ¿Alguno ha manejado Paint aquí? E: si. P: es muy parecido. E: es fácil. P: bueno listo, quedamos en lo siguiente por favor vea, la próxima semana yo me voy a poner de acuerdo con el profesor Éibar y revisarles la tarea, la tarea es consultarles acerca de San Agustín, pueden ver videos y hay mucha información escrita, hacen un resumen de la historia de la antigüedad de las esculturas, más que todo de las esculturas.
--	---

Anexo 4. Protocolo Tarea 3

	Protocolo Tarea 3
Tiempo	Diálogos
0'00"	P: Todos vamos a leer ahí mental mente por favor, entonces leemos, bueno entonces dice allí ¿qué les dice? E: es como una construcción. P: hay que ir abrir la construcción entonces vuelvan nuevamente a la carpeta y en la carpeta hay una que dice construcción 6.1, entonces que vamos hacer para poder abrir, póngame cuidado por favor, antes de abrir, esa no nos va abrir directamente entonces quien me dice que hay que hacer para poder abrirla. E: profe primero que toco hay que abrir el programa Cabri, una vez hecho esto uno se puede meter en esta parte de acá en el programa Cabri o si no le dan en control + O y eso lo va a enviar a una selección de los documentos guardados el cual usted quiere abrir. P: eso muy bien, quien más me puede decir? Entonces bueno, vamos hacer una aclaración, lo que dijo él está bien, vamos a la carpeta de Cabri ejecutable, Cabri 2 plus ejecutable, listo abrimos esa carpeta y ustedes ya saben cómo abrir Cabri allí, Cabri os plus el tercer archivo le damos clic, abrimos y hacemos lo que nuestro amigo dice, vamos ahí donde dice archivo le damos abrir. E: el coso 6.1 (construcción 6.) P: aja el coso 6.1 entonces ahí ustedes van a ver una imagen (el profesor ayuda a algunos estudiantes que tienen dificultades para encontrar el archivo) ahí ya mirar, vuelvan y lean nuevamente E: profe profe, que hago aquí. P: abrir. E: a mí me aprecio esto vea. P: eso, claro, eso es lo que les aparece a todos. Usted no abrió la que era, usted abrió otra, vuelva nuevamente a archivo. E: teacher cual es, porque yo no he podido. P: vuelva a la carpeta, muy bien con esa es con la que hay que comenzar. No sé qué estás haciendo tú, archivo 6.1 ese ese ese, el tercero, mijo el tercero, devuélvase, este el 6.1, no no no ninguno de eso, bájalo por acá, súbalo, no es que estamos mal tienes que abrir primero esta carpeta, ah no salgase cierre ahí, usted se metió por donde no era, archivo nuevamente, abrir, entonces ahora sí. E: ¿este? P: si ese, doble clic, eso muy bien, como sea pero la abrió. Eso muy bien, entonces vamos hacer. E: ¿cuál profe? P: 6.1 eso muy bien, entonces vamos hacer lo siguiente por favor, archivo abrir 6.1 (el docente le indica a la estudiante cual es el archivo). Eso muy bien, lean con atención lo que hay que hacer y comienzan a explorar como pueden arrastrar.
4'50"	E: ¿Cómo hago para moverlo? P: ah como hago para moverlo? Lean la guía, lean la guía, he imagínense. E: profe no lo puedo mover ¿Cómo lo muevo? P: lea la guía que ahí le dice. E: ya la leí, ya la leí. P: ¿Qué dice la guía? E: dice que lo mueva. P: ah que lo mueva. E2: ¿tengo que mover todo? P: si todo, ah ya movió, trate de mover esa. E3: ¿profe así? P: eso muy bien, por ahí ya veo a algunos que ya lo van haciendo.

	E: Profesor, yo puedo mover los ojos. E2: yo puedo mover los brazos. P: bueno pero entonces cada uno vaya tratando de explorar allí. E: ¿cuál es? Yo no yo no. P: ah todavía usted está, vea mira baja esto eh abre aquí Cabri... E: profe! P: ya voy. Ah y cuál es la que vas a leer, la tarea número 3. P: dime. E: no se quiere meter. P: ah este esté no no no, devuélvete un poquito por favor, usted ya abrió Cabri? No, abre aquí Cabri plus ejecute, Cabri 2 plus, ahora Cabri, el tercero, ahora si dele clic, eso maximícelo, dele archivo, abrir. E: ¿y ya? P: ahí está.
6' 22"	P: esa no, por Dios, hágalo mismo, archivo, es que tienes que utilizar las dos manos. E: es que no me gusta. P: ahora si señale construcción 6.1, eso esa. E: profe, aquí me dice que lo señale y que lo arrastre. P: aja. Vea para poder arrastra casi que hay que utilizar las dos manos, si ustedes no utilizan las dos manos les queda muy difícil (comentario general para todos los estudiantes) E: profesor pero es que eso no se mueve (muchos estudiantes lo dicen) P: como que no se mueve, vean. ¡Ah! Miren acá a mi amiga, miren lo que ya ha hecho, ningún raro, si ven que se pueden mover. E: profe pero es que... profe eso no se mueve. P: sigan el ejercicio, escuchen acá vea, esperen les digo una cosita. Muy bien, ah bueno ella ya termino ósea que los demás también deben de poder. E: ¿profesor pero como se hace? No entiendo. P: arrástrelo, lea lea la guía E: ¿y cómo se voltea? P: lea la guía. E: ¿así? P: no hay que ponerlos acá, así como esta acá pero ponerlo acá. E: ah ya. P: eso muy bien, si los pudo colocar ahí, los puede colocar acá. E: profe yo no entiendo. P: arrástrelos, señale uno y lo arrastra, señale este de aquí, no no suelte ese punto, suéltelo, suéltelo y vuelva y dele aquí en apuntador, listo, coja este esté de aquí. E: ¿este? P: no pero pues. Es que usted no ha leído la guía. Si no leen la guía no se van a dar cuenta como es, por favor vea, hagamos un pare aquí. Mi amigo allá el que está de pie haga el favor y abre la guía, entra a la Tarea 3 y vamos a leer entre todos ¿listo?
8' 27"	E: Profe mire vea. P: eso !Muy bien! E: no sé dónde está el otro ojo. P: ¿el otro ojo no sabe dónde está? Ah quizás no haya otro ojo, algo habría que hacer para construirlo. Por favor nadie se levante del pues, eso es lo primordial, vamos a ver quién está fuera del pues. ¿Quién está fuera del pues? Dice así la guía, por favor escuchemos acá, lea. (una alumna del salón participa leyendo la actividad) P: dame un segundito que voy anotar dos estudiantes acá en el tablero, es que no están prestando atención. Miren niños y niñas la compañera va a leer entonces todos vamos a prestar atención. (la estudiante realiza la lectura) P: listo para un momentico, se acerca el cursor al objeto. ¿Ustedes saben que es el cursor?

11'15"	E: sii P: ¿Quién me dice que es el cursor? E: es la flechita pues. P: la flechita, lo acercas al objeto, listo, ¿Qué más dice? (sigue leyendo a la alumna) P: listo ¿Qué ha pasado cuando ustedes acercan el curso al objeto? A veces emerge una que dice este punto y otra que dice este polígono, si ustedes cogen cuando, ¿que dice la guía?, lea usted a ver que dice la guía. Tiene que aparecer que diga polígono, entonces cuando dice polígono yo llego y oprimo con una mano y con la otra arrastro, tengo que tener clic sostenido para poder arrastrar. E: ah ya entendí P: listo, tenga clic sostenido y después si lo arrastro. Ahora puede existir la otra situación que hay unas que no se pueden mover, que hay que mover otra para que se mueva esa, eso ya les paso a algunos entonces tienen que seguir, si esta no se movió pues busco otra hasta que encuentre la que se mueve ¿cierto? Bueno vamos a trabajar ahí dos minuticos más y comenzamos a desarrollar la guía (los estudiantes se concentran en poder desarrollar la actividad de organizar las figuras que componen la parte anatómico de la figura) 
11' 15"	E: Listo profe. P: ¿ya? Vamos a ver. E: lo que yo no entiendo es ¿estos dos donde irían? P: ¿Cuáles dos? E: estoy buscando aquí en el ejemplo pero no sé. P: ah no, no están en el ejemplo, pues donde faltarían, acá abajo, mira aquí hay una entonces le falta la del otro lado o a lo mejor sobre, trata de moverla a ver. Ah la cogió del punto ¿no? E: aja P: donde haya como una rectica larga la puedes tratar de coger. Trata de mover la de acá entonces, ahora sí. E: profe una pregunta ¿construyo un ojo? P: sí, construya un ojo, puede construirlo. Bueno muy bien. Amiga ponga el computador sobre la mesa, no puedes jugar con el porque se te cae y eso vale mucho.
12' 40"	E: Profe P: ¿lo quieres abrir? ¿no lo has abierto todavía? E: no, si pero es que se me corrió. P: ah pues vuelva y ábralo tal cual como lo hizo antes. E: no, se me corrió. P: ha entonces mira, puede ser porque se te paso para acá. Mira hay que poner estas cosas como en el medio (botón de la barra de desplazamiento), súbalo a ver usted que tiene las dos manos libres. Vamos, todavía no lo ha encontrado. P: Bueno párate cerca de este a ver qué pasa. E: profesor pero es que esta defectuoso. P: no pero es que tienes que pararte en los bordecitos, ahí donde dice este polígono presiónalo y trata de arrastrarlo. Sigue sigues, intenta con este de aquí párate aquí al ladito, pero ahí como en la recta la recta, ah eso listo entonces presiona con uno – ahh si ya pudo, así mismo con los demás. Eso muy bien.
13'50"	E: lo que pasa es que los ojos no se me mueven. P: ¿no se me mueven? Hay que cogerlos desde el centro para que puedan moverse, ese no se

	mueve entonces mire el otro a ver si se mueve, ah ese si se movió, eso muy bien. E: ¿y el otro? P: ¿el otro? Pues seguramente hay que hacerlo si no está por ahí. P: ¿Cómo vas? E: no profe mal. P: venga que paso, por ahí hay unos. Oh! Dios ¿Qué paso? Venga yo miro a ver que le paso a usted ¿Qué cree que le paso? ¿Por qué se le puso así? E: yo no sé yo no sé. P: ah bueno. E: profesor, mire que el mío solo da vueltas y nada más. P: aja solo da vueltas y nada más, no pues suéltalo suéltelo y vuelve y coge uno a ver cuál se puede mover E: el mío ni vueltas da.	
14' 45"	P: Ha bueno listo. Bueno les voy a decir lo siguiente vea, para que ustedes se motiven un poco. E: profe yo ya lo termine. P: niños observen acá, su compañera ya lo armo todo, le falta solamente correr los ojitos, los ojos para poder mover. Ah miren, ella ya corrió los ojos, para poder correr los ojos, ay ¿Qué hay que hacer? E: hay que arrastrar uno y si no es ese hay que mover el otro. P: hay que mover el otro y también ¿desde dónde hay que arrastrar los ojos? E: desde el punto del centro. P: desde el punto del centro muy bien, eso muy bien. E: es que yo no sé dónde va P: ay pues mira y busca donde los puedes poner. Muy bien E: y que hago con esta cosa amarilla P: ah miren donde lo pueden colocar. También encajan allí E: profe y este elipse. P: ¿Cuál elipse? Claro pues esa ya va ahí, perfecto. Ahí van reconociendo algunas figuras.	
16' 05"	E: ¿Cómo llevo esto para acá arriba? P: no sé, póngale, no sé cómo tú puedas yo no te puedo decir nada. Huy! Que paso con las imágenes ¿Dónde están? Las desapareció todas y esa era la 6.1, usted le borro todo no, dele cerrar y no le da guardar, ciérrelo y dígame no, ahora si vuelva y abra nuevamente todo. Amigo usted está mirando para allá y no está haciendo lo suyo. E: no pero es que eso no coge. P: si, vamos. E: ¡no coge ninguna hace rato le estoy haciendo y no coge! P: listo vamos a ver, coja este de aquí de esa rectica a ver, vamos a ver qué pasa. Ah esto está bloqueado ya, le has dado mucho, entonces cierra el programa, se bloqueó porque de pronto le mandaste hacer muchas tareas a la vez y espérate un momentico. E: es no puedo acomodarlas, puede explicarme. P: no relájate, vamos por partes, por favor, muy bien, mire vea es normal que les cueste un poco de dificultad pero síganlo intentándolo. E: se ancha profe. P: ha pues entonces cójalo de otro puntico, donde diga este polígono, esta elipse esta elipse eso sí de ahí, no suéltelo suéltelo totalmente de acá, ahora si cójalo otra vez, cójalo de acá arriba no será mejor, pero es que tiene que presionar con un lado, no esa no es entonces yo creo que es la de abajo la que se mueve. Ha se le ensancha hay que buscar un puntico donde se pueda mover. Bueno muy bien muy bien	

18' 21"	E: Eso ya o qué. P: si usted ya termino, vayan leyendo la guía vayan leyendo los puntos de la guía que ya los voy a organizar en grupos. Listo por favor vea vamos a hacer lo siguiente, vamos a escuchar acá a los compañeros que ya terminaron para que nos cuenten como lo hicieron, ahora sí, escuchemos acá a mi compañera para que nos cuente como fue su experiencia, cómo logro reconfigurar la escultura. (una alumna da su opinión acerca de cómo le pareció el trabajo con la figura) E: no profesor, pero es que eso es lo más de fácil si uno sigue ahí las instrucciones, ahí está la figura y como aquí está la gráfica que le muestra cómo tiene que ser y más la instrucciones que usted agrego es más fácil hacerlo. Entonces como es esas cosas de geométrica es chévere que uno pueda configurar las imágenes y todo eso y como otras se van quejando que no pueden, depende porque ellos no siguieron las instrucciones, pero yo si pude no. P: ha entonces tú crees que trataron de hacerlo sin leer. E: eso aja. P: bueno, acá su compañera dice que hay que leer muy bien las instrucciones 
19' 58"	P: Eso muy bien mueva ese hexágono. E: este a no P: trate de moverlo de otra manera E: tiene que decir este punto, este polígono P: si muy bien E: profe me saco la rabia. P: esto no tiene que sacarle la rabia. E2: se le apago el equipo. P: listo amigo, cuéntanos tú como hiciste. E: lo reinicie, es que no se movía ninguna. P: bueno cuentes su experiencia paso a paso. E: lo reinicie y después me volví a meter a Cabri y pude mover todas las figuras P: lo reinicio porque se le estaba bloqueando cierto, bueno muy bien.
21' 13"	P: Otro alumno nos da su punto de vista acerca del trabajo con la figura de la escultura de San Agustín E: para mí fue una experiencia pues mejor dicho como aprender ya que al principio yo no entendía casi nada pero después fui entendiendo poco a poco como por ejemplo primero que todo para moverla hay que seleccionar la original ya que si seleccionamos otra, no se moverá, en cambio si seleccionamos la original si se va a mover. Otra cosa que aprendí es que, para que se mueva no puede señalar este punto porque esto va hacer que se altere la figura, pero si dice aquí este polígono ahí si se va a poder mover ya que esa señalando al polígono. Hubo muchas veces que me toco volver a empezar, pero al final si me quedaba como era y aunque me faltó un ojito yo lo construí
22' 07"	P: Muy bien. ¿Alguien más nos quiere contar? ¿Tú nos quieres contar? Está bien pregunta pues. Ah muy bien, eso es lo que quiero que le digas a él, que solamente los brazos se pueden mover... E: solo del original. P: ¿Quién más nos quería contar? Acá mi amiga cuéntanos a ver.

	E: profe es que lo de los ojos se me dificulto, porque si uno le da en este círculo no da, tiene que darle en el punto, entonces si yo le daba en el círculo se agrandaba, se ponía pequeño, entonces cuando ya nos explicó que era del punto yo ya lo organice y lo puse donde era P: ¿Quién más nos quiere contar su experiencia? Bueno, los felicito han hecho un gran trabajo la mayoría y los que han querido participar muy bien. Bueno, vamos hacer lo siguiente ahora por favor, esta clase va hasta las 8:50 entonces vamos a organizarnos en pequeños grupos, no quiero mover todo así porque sería muy complejo. La vez pasa uno subía, entonces vamos hacer lo siguiente, yo acá tengo los grupos y vamos a tratar de organizarnos, por favor mucho cuidado con los computadores cuando nos estemos moviendo que no se nos vayan a caer, entonces había un grupo que estaba integrado por (en este punto del video el docente con una lista dedica tiempo para organizar a los estudiantes en respectivos grupo como había ocurrido anteriormente). (en la imagen se muestra como los estudiantes discuten en sus respectivos grupos sobre el desarrollo de las preguntas) P: ella utilizó una estrategia diferente, guardo los computadores y trabajan con uno solo. E: a si pasen el mío, es que yo si soy experta	
30'40"	P: ¿Quién nos quiere contar como les pareció el trabajo? Vaya, para que él le va hacer la toma porque yo necesito, pero no la graba a usted si no a su computador mientras usted habla, ahora si vaya contando, cuénteles cuéntenos que paso a ver, cuente la experiencia. E: como correr partes iguales, desde una es la copia la otra es la original desde que se mueva y si no se mueve hay que probar con otra figura hasta que se mueva. E2: profe y también como usar la simetría axial para dividir una imagen entre dos. P: eso muy bien, cuentos a ver usted E: lo que dijo ella, la figura axial uno nomás le hunde una recta y en la paralela, esa cosa de aquí de la mitad, es que no sé cómo llama, bueno uno le hunde y se divide y se forma la misma figura, si no que hacia el otro lado. E2: En dirección contraria, eso en dirección contraria.	
32' 05"	P: Ella también nos quiere contar. ¿Quiénes acá hicieron los dos ejercicios? Como como quedo el trabajo a ver. E: ay profe me lo hizo dañar. P: listo muéstrenos pues. E: no el de allá. P: ¿Cómo hiciste para colocar la boca en la parte de abajo? E: pues trazamos una línea perpendicular y de ahí le hundimos simetría en la boca y ahí lo colocamos en la recta y ya aprecio abajo. P: listo muy bien.	
33' 01"	P: vamos por acá, bueno cuente el trabajo que hizo ahorita. E: bueno a mí me pareció muy chévere el trabajo ya que antes era solamente colocar las partes pero ahora era, primero, colocar las partes que estaban ahí después de eso hacer una recta vertical y una recta horizontal, una vez hecho esto aplicamos la simetría axial para poder que esta parte sea iguala esta, pero para que esta también quede igual así, las rectas también tienen que estar bien acomodadas, de lo contrario puede suceder esto, van a quedar así (el estudiante en este momento muestra que se pueden presentar defectos en la imagen) entonces lo que hay que tratar de hacer es acomodar bien la recta para que todo quede bien. P: sube un poco la parte de acá, para poder ver bien la cara. Listo, como hiciste para hacer la boca de la parte de abajo. E: bueno, eso es lo que voy a explicar, bueno, uno le señala aquí se mete en simetría axial, ahora	

	señalamos uno de los polígonos, puede ser cualquiera por ejemplo voy a señalar este y ahora, bueno si queremos que quede igual aquí abajo, tenemos que señalar con respecto a esta recta (señala la recta horizontal) pero si queremos que nuestro polígono quede aquí al lado igual, hay que señalar la recta vertical y ahí quedara igual. P: listo muy bien
34' 50"	P: Yo quiero preguntarle a alguien por acá. Ella trabajo una cosa muy interesante porque ella no hizo los ejes así. Vamos por acá. P: ¿alguien más nos quiere dar su opinión? Ah usted si lo hizo todo, cuéntenos a ver. E: a mí bien, porque apenas lo reinicie me cogió todo. P: pero cuéntenos que hizo paso a paso, pero cuéntenos. E: primero le hice los ojos, le hice esta parte de acá después los brazos después esta cosa que tiene acá (señalando un objeto que la figura tiene en sus manos) después ya después la boca y me quedo bien bonito el muñeco. Y después le hice las decoraciones por fuera.
36' 48"	P: bueno niños por favor guarden ahí en el computador, denle guardar. P: empezamos la recta, entonces desplazamos el eje de simetría un poco hacia abajo y ahí ya nos coincide, listo, ustedes identificaron unos aspectos que eran muy important36' 40"es, ustedes decían que el original, en el anterior ejercicio vamos a abrirlo por acá, bueno entonces ¿de este que quedo claro? Que necesitamos ejes verticales y ejes horizontales, que la simetría axial lo que hace es, lo que está al lado derecho lo gira y lo pone al lado izquierdo, esto que tenemos acá la vamos a llamar siempre la figura objeto lo que nos dan y lo que creamos lo llamamos la figura imagen, entonces ahora voy abrir el 6.1 para explicarles algunas cositas, aquí estaban un poco más perdidos algunos, decían "ha es que esto no se mueve" entonces ¿Por qué no se movía este? Por ejemplo ¿Quién me dice porque nunca podíamos mover este? E: tenía que moverse el original. P: tenía que moverse el original, la figura objeto porque esta es una imagen y la imagen depende del objeto original, entonces miren que todas han sido creadas a partir de una simetría axial, por eso todo son dependientes de ese objeto, luego, entonces vamos a mover este, este era el primerito que había allí, mire que si mueve el objeto la imagen se te acerca acá, recuerden que la distancia que hay del objeto al eje de simetría y del eje de simetría a la imagen siempre será la misma. Miren que este tiene algo interesante, si yo lo muevo de este lado él se me para al otro lado ahí aplicamos otra simetría, la simetría central, entonces simetría central es con respecto a este punto de aquí, entonces recuerden que siempre hay el objeto y la imagen, acá como decía el compañero era solo mover. Entonces ¿Qué hemos reconocido de la simetría axial? 1. Que debe de existir un eje de simetría horizontal o vertical. 2. Que hay unos que se llaman objetos y otras que se llaman imágenes. ¿Qué pasa si borramos el eje de simetría? ¿Ustedes que creen que ocurre si borro este? E: pues se quita todo. P: se quitarían todas las imágenes, porque las imágenes dependen del objeto y del eje de simetría, entonces miremos a ver qué pasa, perfecto solamente quedo esa partecita, entonces ahora le pueda dar control + z y todo vuelve aparecer (por último, se recoge la información de los archivos de Cabri y los registros escritos)

Anexo 5. Protocolo Tarea 4

	Protocolo Tarea 4
Tiempo	Diálogos
0'00"	Inicialmente se distribuyeron los computadores y se inició la presentación de las esculturas. P: A que se les parece esta escultura. E: a la nariz de un elefante. P: bueno, vuelvo y les cuento, un amigo dice que esto se parece a qué. E: a la nariz de un elefante. P: a la nariz de un elefante ¿a quienes les parece que esto se parece a la nariz de un elefante? (Levanten la mano 24 estudiantes) , excelente muy bien ¿levanten la mano a los que les parece que esto es una flauta? (Levanten la mano 2 estudiantes) Muy bien, entonces les voy a contar mi historia. Yo soy guía de turismo en el parque nacional de San Agustín, la idea es que de pronto podamos hacer un viaje allá, eso es muy complicado, pero lo pensaremos, entonces vea les cuento, cuando yo hago los recorridos (Como guía de turismo del parque arqueológico) allá ocurre lo siguiente, los niños siempre dicen que eso es un elefante, siempre, yo voy y les pregunto a los niños ¿Qué ve usted allí? A niños pequeñitos hasta de 5 años y los adultos se preguntan, pero ¿dónde? Casi que ni observan el elefante entonces eso tiene que ver como con la construcción mental de cada uno, entonces en esta escultura, muchos dicen que es un elefante, que esta es la trompa y que están son las orejas, otros dicen que es un ángel porque primero a San Agustín fueron muchos católicos, cuando los curas iban a evangelizar ellos describieron como un ángel, lo que se ve aras son las alas del ángel y que es un ángel de los que toca flauta como los querubines que son los que tocan los instrumentos, entonces decían que era un ángel. El hecho es que en esta figura se puede mirar como la relación de varias culturas, este tocado es de tipo hindú si han visto imágenes tipo hindú, los que cogen a la serpiente cobra y la hipnotizan con la música, entonces también tiene relación con eso. E: como los árabes. P: exactamente como los árabes, miren que hay un poco de elementos allí y ya les dije que era una cultura que estuvo hace más o menos 2000 años de antigüedad ósea que no había llegado Cristóbal Colon pero ellos ya tenían una serie de elementos que se pueden relacionar.
2' 20"	P: bueno, esta que esta acá abajo también hace parte de las estatuas ¿Quién me dice que hay aquí? E: un corazón. P: un corazón ¿cuéntanos? E: yo ahí veo un corazón y dentro de ese corazón veo la silueta de un águila. P: muy bien, tan increíble ¿Por qué es la silueta de un águila? E: porque ahí se ve la cola, las alas. P: venga y la dibuja acá por favor, que me gustaría que lo hagas (en este momento un alumno participa dibujando el águila en el tablero) P: excelente muy bien. E: es un candelabro, es una paloma. P: es un águila. Bueno como no tenemos mucho tiempo yo les voy a contar lo siguiente, miren que está realmente si es un águila, pero ustedes ya habían visto que acá hay un águila, ¿cierto? Entonces tiene relación, que ocurre, imagínenselo de esta manera piénsenlo bien ósea como para que miremos el valor y la inteligencia que ellos tenían, yo lo que trato de hacer es que ustedes reconozcan el avance científico que tuvo el grupo escultor, son más o menos 400 esculturas de estas las que hay en San Agustín entonces imagínense todo el esfuerzo que hicieron y todo lo que nos Si es un águila pero un águila ¿Cuándo? Es un águila cuando



	va alzar el vuelo, ustedes saben que el águila es un animal muy pesado entonces si él está así (el profesor hace la representación de un águila agachada) entonces que hace, levanta las alas y cuando ya despegue sube su cabeza y al aletear duro, las puntas se unen abajo, entonces aquí veríamos eso, lo que él hizo está bien. P: y yo también voy a hacer mi dibujo, nunca se me había ocurrido hacerlo, muy bien entonces aquí sería la cabeza y estas vienen siendo las alas. E: ¡ay ve sí! P: y esta es como la parte del ala más grande que se empunta hasta acá y esta que está aquí ¿Qué vendría siendo? La cola, entonces miren todo el poder de sintetizar que ellos tenían. 
5' 50"	P: Esta es la cultura del pueblo escultor de San Agustín, ustedes pueden investigar, en internet hay videos en cantidades, listo, la idea ahora es que ustedes diseñen su propia escultura ya tienes algunas ideas ahí, les voy a mostrar más, esta que está aquí mide alrededor de dos metros ósea que llegaría hasta acá a la altura del televisor y pesa alrededor de 3 toneladas. Estas que están aquí se llaman templos, que significa un templo en la cultura de San Agustín. E: son para protegerlos. P: muy bien, ella dice que era para protegerlos, entonces los templos tiene la siguiente función, observen este templo, miren que hacia atrás hay un vacío y hay un hueco de aproximadamente 5 metros de profundidad, entonces eso que está allí es como la lápida que le colocan a los difuntos, la escultura del medio representa a la persona que estaba siendo sepultado en ese espacio, bueno entonces todas esas esculturas estaban asociadas a las tumbas, aquí había una tumba aquí había una escultura que estaba representando la persona que fue sepultada. E: el del centro era el más importante y los de los lados eran sus guardianes. P: ellos también tienen como una pirámide donde estaban los que mandaban o los chamanes, para ellos los que mandaban eran los chamanes que son lo que tenían el conocimiento de la medicina de la astronomía eran los que hacían las cuentas y dividían los recursos para la comunidad. Listo pregunta. E: profesor de que ellos también lo hacían como lo hacían los egipcios que tiene como esas pirámides que eso cuando se daban cuenta de que una persona era muy importante que tenía que ser sepultada o momificada los tenían en una tumba y los dejaban ahí, eso es lo que ellos quieren representar, que son los importantes como los que salvan vidas como los cirujanos, enfermeros, médicos los abogados, todo eso, como digamos el Papa pues como son personas tan importantes las hacen referencia ahí como haciendo un homenaje. P: entonces los personajes más importantes tenían un lugar privilegiado dentro de la comunidad. P: este que está aquí era el Dios del Sol y este de acá se conoce como el Dios De La Guerra el que era el encargado de defender la comunidad de los otros grupos indígenas porque como ustedes saben los grupos indígenas siempre estuvieron peleando. San Agustín en un sitio que está situado en el Macizo Colombiano, donde nace la cordillera central y la cordillera oriental, también es la estrella fluvial de Colombia, ahí nace el río Magdalena, Cauca, Patía Y Caquetá entonces es un sitio muy importante.
10' 00"	P: esta se llama La Fuente Ceremonial de la Quebrada Lava Patas, el sitio no es para lavarse los pies, si no que los primeros que la descubrieron llegaron y levantaron la vegetación que la cubría por 1800 años en los cuales le cayeron hojas de árboles, arboles entonces eso estaba lleno de vegetación, abrieron y se dieron cuenta de que tenía forma de fuente y la quebrada que pasaba por ahí la llamaban los pobladores, la Quebrada Del Lava Patas porque ahí se lavaban los pies, cuando iban al pueblo y se colocaban las alpargatas, se supone que este sitio era para rendirle culto a la vida, ya les voy a explicar porque, todas las esculturas estaban asociadas a la muerte y la Fuente de lava patas está asociada a la vida miren que aquí hay tres banquitos, en esos tres banquitos ellos representaron el proceso de metamorfosis de la rana, ustedes han escuchado el proceso de la rana, que primero es una renacuajo como un pescado, luego le salen las extremidades superiores y aquí en el medio están las extremidades superiores e inferiores. Quiero que pongas mucha atención, miren acá, se supone que esta es la mujer que va a dar a luz, están son las piernas que está en forma de V y aquí está el rostro

	si lo alcanzan a observar, con los ojitos, la nariz y la boquita, bueno, aquí a este lado hay un indio que esta con las manos levantadas y ahí tiene un canguro, como si fuera un canguro como los que nosotros utilizamos. Se supone que en ese canguro el chamán llevaba los medicamentos o instrumentos que iba a utilizar para asistir el parto y un poco más acá hay una ardilla, que es la mascota que le otorgan al recién nacido para que esta persona desarrolle las habilidades de este animal y pueda integrarse armónicamente con la naturaleza, ustedes han visto documentales de los indígenas que siempre los niños o los nombres tiene que ver con animales como mano de tigre, ojos de águila, entonces esos nombre eran para que el hombre y los animales vivan en armonía con la naturaleza, bueno entonces todo eso (la Fuente) se llena de agua, ellos dejaron pasar por acá la quebrada, entonces hay un canal que llega y riega toda la fuente, eso es muy bonito después les traigo un video. Esos se llaman metales ellos cavaron en la piedra y ahí eran donde preparaban los medicamentos y las pinturas para sus fiestas y sus rituales, yo después les traigo un video para que puedan mirar como es. 
14' 18''	P: Bueno entonces este que esta acá se llamaba el obispo, es el primero que aparece referenciado en un escrito de 1756 casi 300 años y el cura que lo referencio se llamaba Fray Juan De Santa Gertrudis dicen que la escultura tenía levantado en la mano un cáliz, miren que la mano derecha ahí se ve que se la partieron, entonces desde que el la vio hasta que la volvieron a referenciar en 1913 ya se había perdido la mano y dice que en la mano izquierda tiene el báculo pastoral que es una cinta que utilizan los sacerdotes y por la parte de atrás remata como si tuviera un sotana entonces como él era un religioso, lo llamo el obispo y así quedo bautizada la escultura. P: Este de aquí se llama el Dios de la lluvia ¿Por qué se llamaría el dios de la lluvia? ¿Qué representación hay ahí relacionada con la lluvia? E: el arcoíris. P: el arcoíris exactamente mire que acá tiene un arcoíris y en cada extremo remata con figuras de un mono, es muy bonita y es total mente simétrica y en la parte de atrás tiene un triángulo rectángulo.
15' 48''	P: vamos a hacer lo siguiente, le voy a mostrar algunas figuras rápidamente. Este es el trabajo que yo realicé cuando hice el pregrado en la universidad cuando me gradué de licenciado en Educación Matemática yo realicé este trabajo, entonces esta escultura se llama o yo la bauticé como escultura con ojos en forma de águila, bueno observen acá. E: profesor qué clase de águila es P: un águila real, esta escultura tiene una particularidad, cuando iba y la miraba, esta tiene el eje de simetría que no lo difuminaron, si uno mira la escultura mira la línea que ellos utilizaron como eje, entonces uno simplemente puede observar que ellos tallaron este lado (señalando el lado derecho) y después con algún elemento hacían simetría axial. Esta otra escultura tiene un característica, tiene un punto medio y arriba y abajo siempre tiene que las longitudes son congruentes, entonces mire que acá (arriba) tiene el rostro y en la parte de abajo tiene la falda, luego tiene como un tipo de cinta aquí entre el rostro y el gorro y acá entre los pies y el cuerpo también tiene un espacio, luego la longitud del gorro es igual a la longitud de los pies, eso significa que como es abajo es arriba, ellos manejaron mucho el concepto de dualismo ¿ustedes saben que es el dualismo, cierto? E: no. P: es como el día y la noche, lo bueno lo malo, lo alto lo bajo y eso lo representaron en las esculturas
17' 50''	P: miren que esta de acá también tiene la misma estructura, arriba esta lo mismo y abajo esta lo mismo, entonces a esta le llaman el partero, porque aquí están representando el momento de un parto, arriba está el chamán o el sacerdote que asiste el parto, miren que tiene el niño cogido de los pies. E: yo pensé que eso era un mico. P: es un niño, bueno yo no lo hice muy bien y acá abajo invertida esta la persona que está dando a luz, además de eso en esta escultura ustedes pueden ver que está el plano cartesiano y me parece muy

	bien, todo encaja entonces además de ser simétrica de forma vertical ustedes se dieron cuenta de que era simétrica de forma horizontal, eso en matemáticas se llama bisimétrica, para que haya simetría tiene que haber un plano cartesiano entonces es muy probable de que ellos hayan manejado el plano cartesiano. El plano cartesiano aparece en matemáticas con Rene Descartes alrededor del siglo XV después de Cristo, pregunta la niña E: el plano cartesiano es ese que tiene dos rectas y que se ubican las direcciones. P: sí. Miremos esta escultura mide 4 metros, la más alta tiene 7 metros de longitud, entonces imagínense, 7 metros de longitud es más o menos una casa de 3 pisos. Ahí se ven las esculturas, el águila dicen que el águila para ellos representaba un ser de poder de luz, un mensajero de los dioses y la serpiente así como para nosotros representaba algo malo que se arrastra sobre el piso entonces ahí mostraban como el bien dominaba el mal, como lo de lo alto domina lo bajo, como lo celeste domina lo terreno entonces siempre pensando en el concepto de dualismo. E: ¿él que tiene en la mano? Tiene como una cara. P: aquí tiene como una especie de cráneo trofeo, que representa al dios de la guerra.
20' 30"	En ese momento se cierran las imágenes y cambia de actividad) P: bueno entonces por favor, estábamos en la sección 6 guía del estudiante, por favor escúchenme bien, vamos a hacer esta parte niños y niñas, les voy a leer lo que hay que hacer. Tarea 4, yo ya les había explicado en la clase anterior que quería decir la simetría axial, que intervenía la simetría axial, entonces ahora vamos hacer esta, dice. Utiliza las transformaciones isométricas, para diseñar tu propia escultura y personalízala rellenando los polígonos con colores, marcando los vértices de algunas figuras geométricas junto con su correspondiente en su imagen, utiliza la notación correspondiente para los vértices y el eje de simetría. Comente brevemente que transformaciones utilizó en algunos detalles de su escultura y que representa la escultura P: ban a decir donde utilizaron simetría axial y que significan los detalles y como los construyeron y que representa la figura para ustedes yo les explique que significaba el águila, el dualismo, como les explique la que parecía un elefante que para otros les parecía un músico
23' 15"	P: Por favor entonces ahora abren el computador. En mi reloj son exactamente las 11:20, cuando sean en mi reloj las 11:50 paramos y yo comienzo a guardas las imágenes, entonces ahora si comienzen a trabajar. E: profesor me aparece Test Moden. P: si, ese letrero no se puede quitar. E: para dejarlo normal como hago. P: control z E: profe eso no me borro E2: ahora la voy a colorear P: yo no les aconsejo que trabajen con animación. E: profesor y se hago una cabeza redonda P: claro puede hacer la cabeza redonda como quiera. E: ...como se quita esto (el letrero de Test Moden, yo digo es este letrero E2: no se puede P: están muy bonitas chéveres y yo ya les di la idea de cómo hacerlo. P: vea les voy a mostrar un video que hizo mi hija para un trabajo del colegio. (en el video se relata sobre diferentes localidades de San Agustín y en especial el parque arqueológico) E: profesor mire el mío. P: eso muy bien, aparte de estar haciendo la escultura, estas aprendiendo a manejar el programa, recuerden que en el programa pueden ir bajando o subiendo.



	Vamos niños que ya quedan 15 o 20 minutos. (aquí podes ver a los estudiantes trabajar en el diseño de su propia escultura) E: profe uno pude hacer dibujos animados P: tal vez si E: profesor ese quedo mejor. (Un estudiante muestra la animación una circunferencia). 	de
	(en este punto los estudiantes trabajan individualmente en el diseño de su escultura y el profesor ayuda a resolver dudas que tengan los alumnos) (El profesor felicita a los estudiantes por los avances en sus diseños) y al final se recoge la información de los computadores con una memoria USB.	

Anexo 6. Rejilla Diseño de tareas

Rejilla Diseño de tareas	
Momento del registro	Las consignas
T1 4'46"	P: (explica el Anexo 6.1) el pliegue lo tienen que hacer en la cartulina (muestra el cuarto de cartulina) tengo que corregir eso, está la tengo que pegar en la cartulina (muestra la fotocopia de la escultura), cuando peguemos la fotocopia en la cartulina este sería el Anexo 6.1 y sobre él es que vamos a trabajar, el doblez que dice ahí (muestra la cartulina) lo pueden hacer así, derecho o torcido como quieran, eso está en la imaginación de cada uno. P: ustedes van a leer con atención la tarea número uno manipulando recursos, van hacer lo que dice allí, tienen para eso 10 minutos para pegar ya les paso las témperas. E: (los estudiantes realizan el trabajo correspondiente recortan y pegan la copia en la cartulina) pintar en que parte en la parte de atrás en la parte del frente E2: donde hay que pintar profe E1: que hay que hacer E2: todo E1: como el profesor no le dice nada a uno, si profe explique que hay que hacer P: lea la Tarea 1 de la guía E1: Profesor no entiendo la pregunta 
T1 9'22"	E: lee A medida que pintas puedes doblar y estampar varias veces para que no se seque la témpera. P: ya sabes dónde pinto. P: (a otro grupo) rápido que si no se le seca.
T2 59'59"	E: profe y no se puede, punto de acá y punto de acá sin la recta. P: pero es que ahí están dando una orientación, hay que seguir las orientaciones. (en este punto el docente lee con los estudiantes las preguntas de la Tarea 2)
T3 3' 20"	E: ¿cómo hago para moverlo? P: ah como hago para moverlo? Lean la guía, lean la guía, he imagínense. E: profe no lo puedo mover ¿Cómo lo muevo? P: lea la guía que ahí le dice.
Momento del registro	La interacción con el medio
T1 10'21"	E: me está quedando, una obra de arte, (los estudiantes realizan las actividades y cada uno participa de diferentes manera)
T3 6' 2"	E: ya la leí, ya la leí. P: ¿Qué dice la guía? E: dice que lo mueva. P: ah que lo mueva. E2: ¿tengo que mover todo? P: si todo, ah ya movió, trate de mover esa. E3: ¿profe así? P: eso muy bien, por ahí ya veo a algunos que ya lo van haciendo. E: teacher yo puedo mover los ojos. E2: yo puedo mover los brazos. P: bueno pero entonces cada uno vaya tratando de explorar allí.

T3 6'22"	E: no se quiere meter. P: ah este esté este no, no, no, devuélvete un poquito por favor, usted ya abrió Cabri? No, abre aquí Cabri plus ejecute, Cabri II plus, ahora Cabri, el tercero, ahora si dele clic, eso maximícelo, dele archivo, abrir. E: ¿y ya? P: ahí está.
T3 6'26"	P: esa no, por Dios, hágalo mismo, archivo, es que tienes que utilizar las dos manos. E: es que no me gusta. P: ahora si señale construcción 6.1, eso esa. E: profe, aquí me dice que lo señale y que lo arrastre. P: aja. Vea para poder arrastra casi que hay que utilizar las dos manos, si ustedes no utilizan las dos manos les queda muy difícil (comentario general para todos los estudiantes)
T3 14' 24"	P: ¿Cómo vas? E: no profe mal. P: venga que paso, por ahí hay unos. Oh! Dios ¿Qué paso? Venga yo miro a ver que le paso a usted ¿Qué cree que le paso? ¿Por qué se le puso así?
	
T3 16' 55"	E: no, pero es que eso no coge. P: si, vamos. E: ¡no coge ninguna hace rato le estoy haciendo y no coge! P: listo vamos a ver, coja este de aquí de esa rectica a ver, vamos a ver qué pasa. Ah esto está bloqueado ya, le has dado mucho, entonces cierra el programa, se bloqueó porque de pronto le mandaste hacer muchas tareas a la vez y espérate un momentico.
T 319' 58	P: eso muy bien mueva ese hexágono. E: este a no P: trate de moverlo de otra manera E: tiene que decir este polígono P: si muy bien E: profe me saco la rabia. P: esto no tiene que sacarle la rabia.
T4 23' 15"	E: profesor me aparece Test Modem. P: si, ese letrero no se puede quitar. E: para dejarlo normal como hago. P: control z E: profe eso no me borro
Momento del registro	La estrategia de solución
T3 2' 13"	E: Profesor cual es, porque yo no he podido. P: vuelva a la carpeta, muy bien con esa es con la que hay que comenzar. No sé qué estás haciendo tú, archivo 6.1
T3 7' 02"	E: profe yo no entiendo. P: arrástrelos, señale uno y lo arrastra, señale este de aquí, no, no suelte ese punto, suéltelo, suéltelo y vuelva y dele aquí en apuntador, listo, coja este de aquí. E: ¿este? P: no pero pues. Es que usted no ha leído la guía. Si no leen la guía no se van a dar cuenta como es, por favor vea, hagamos un pare aquí. Mi amigo allá el que está de pie haga el favor y abre la guía, entra a la Tarea 3 y vamos a leer entre todos ¿listo?

T3 11' 20"	E: lo que yo no entiendo es ¿estos dos donde irían? P: ¿Cuáles dos? E: estoy buscando aquí en el ejemplo pero no sé. P: ah no, no están en el ejemplo, pues donde faltarían, acá abajo, mira aquí hay una entonces le falta la del otro lado o a lo mejor sobre, trata de moverla a ver. Ah la cogió del punto ¿no? E: aja P: donde haya como una rectica larga la puedes tratar de coger. Trata de mover la de acá entonces, ahora sí.
T3 12' 32"	E: profe una pregunta ¿construyo un ojo? P: si, construya un ojo, puede construirlo
T3 19' 05"	E: no profe pero es que eso es lo más de fácil si uno sigue ahí las instrucciones, ahí está la figura y como aquí está la gráfica que le muestra cómo tiene que ser y más la instrucciones que usted agrego es más fácil hacerlo. Entonces como es esas cosas de geometría es chévere que uno pueda configurar las imágenes y todo eso y como otras se van quejando que no pueden, depende porque ellos no siguieron las instrucciones, pero yo si pude no. P: ha entonces tú crees que trataron de hacerlo sin leer. E: eso aja.
T3 33' 01"	E: bueno a mí me pareció muy chévere el trabajo ya que antes era solamente colocar las partes pero ahora era, primero, colocar las partes que estaban ahí después de eso hacer una recta vertical y una recta horizontal, una vez hecho esto aplicamos la simetría axial para poder que esta parte sea iguala esta, pero para que esta también quede igual así, las rectas también tienen que estar bien acomodadas...



Anexo 7. Rejilla Complementariedad de Recursos

Rejilla Complementariedad de Recursos	
Momento del registro	Recursos Manipulativos
4'46''	P: (explica el Anexo 6.1) el pliegue lo tienen que hacer en la cartulina (muestra el cuarto de cartulina) tengo que corregir eso, está la tengo que pegar en la cartulina (muestra la fotocopia de la escultura), cuando peguemos la fotocopia en la cartulina este sería el anexo 6.1 y sobre él es que vamos a trabajar, el doblez que dice ahí (muestra la cartulina) lo pueden hacer así, derecho o torcido como quieran, eso está en la imaginación de cada uno. 
T1 7'51''	E: Mejor usted pinte acá y que el pinte allá. E: profesor tiene un pincel delgadito. P: excelente muy bien alguien podría ir repintando acá si quiere tienen otro pincel, voy a conseguir pinceles delgaditos. E: profesor tiene más pinceles P: no tengo más E: es que a ellos si les rinde ve. P: les está quedando bonito, deben doblarla bien aquí para que no se corra E: profesor tiene otro pincel. 
T1 11' 30''	P: listo y colócale la letra, eso que es N, donde quedaría ese punto en el otro lado de la recta E: aquí P: y ese sería N que E: lee marca un punto y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla, por ejemplo M' P: entonces N prima, ahora pueden colocar más punticos, el que este aquí y el que este acá. E2: yo, yo, yo
T1 18' 02''	Es: (dos estudiantes señalan un lado de la cartulina y dos el otro lado) P: ¿y la imagen? dos señalan el dibujo objeto y una señala la figura imagen. P: uno solo ¿cuál es el objeto? E3: (palmoteando la figura objeto) este es el objeto. P: ¿y la imagen? E3: (señala la figura imagen), esta es la imagen, profesor. P: lea nuevamente. E2: (lee nuevamente la pregunta) Trazas rectas que pasen, por el punto en <i>el objeto</i> y su correspondiente punto en <i>la imagen</i>, P: entonces de donde a donde iría la recta. E3: de aquí (señalando un punto en el ojo día figura objeto), acá (señalando el punto en el ojo correspondiente en la figura imagen). P: eso si tiene sentido E: de aquí (señala un punto en la imagen) a acá (señala su correspondiente punto en la figura objeto repite esta actividad) “cla, cla, cla”.
T1 27' 57''	P: entonces yo voy a preguntar. P: (en la puesta en común solicita que los trabajos estén sobre la mesa en cada grupo) ¿ustedes que creen, sin mirar lo que han escrito, el objeto y la imagen son iguales? Ustedes responden sí y ¿me dicen por qué o no y me dicen por qué? G1: si porque tiene la misma figura y esta calcado y viene siendo lo mismo, bien. P: ustedes G2: No son iguales porque el objeto se puede cortar y la imagen no. (se refiere a que el objeto está

	en una fotocopia y ellos la recortaron antes de pegarlo a la cartulina P: y de las formas que piensas. G2: si es calcada es la misma forma porque la imagen es el mismo objeto.	
T1 24' 50"	P: bueno, como están, ustedes dicen que tienen la misma forma y el mismo tamaño. G6: si porque al calcar la imagen con pintura al otro lado aparece igual. G6E2: pero sale como torcido. P: porque creen que sale como torcido. G6E2: porque la imagen esta torcida. P: y solamente porque la imagen esta torcida. G6E2: no porque la doblamos así P: a ya, como se llama eso. G6E2: pingüino. P: el eje de... el punto por donde doblamos se llama eje de simetría, muchas gracias. Muy bien.	
T1 25' 52"	P: como son las distancias del punto R a la recta l y del punto R' a la recta l. Muestren la imagen. G7: N prima la distancia es de 12,5 cm, K' 30,5 cm, A' 37,6 cm P: escuchen lo que dice acá (señala la guía Tarea 1 literal c) alguien comparo la distancia que hay de aquí a la recta (señala del punto en el objeto al eje de simetría) y de la recta al otro punto (señala del eje de simetría al punto correspondiente en la imagen). Así era que debían compararla	
Momento del registro	Recurso Informático	
T2 0'00" al 3'32"	P: ahí, dice Cabri Plus, volvemos y abrimos la carpeta, esa que estoy señalando yo acá el tercero lo abrimos ¿les salió la mismo que a mí? E: si, no (algunos alumnos dicen si y otros no) P: si eso, muy bien (el profesor se dirige al puesto de una alumna para explicarle el procedimiento) ¿ya abrieron el tercero todos? Les repito nuevamente para los que no han hecho la actividad, voy a cerrar el programa (muestra en el video proyector las carpetas que se deben abrir)	
T2 3'33" al 4'10"	P: Después de que tiene la figura 1 La máscara pueden ampliar la imagen, subir o bajar y que es lo que yo les pido que hagan ahora con esta escultura, miren bien, ahora sí, conéctense porque ya los voy a dejar solos lo último que les digo es lo siguiente , se van a meter acá donde está la recta, hay una que dice polígono entonces con el polígono yo vengo acá, le doy puntico, arrastro le doy puntico, arrastro le doy puntico, arrastro y vuelvo y lo pongo acá y ahí ya tengo el polígono, supongamos que le quiero dar color entonces vengo acá a la última y le digo color, miren acá por favor, si quiero darle color entonces le doy rellenar, entonces ahora ustedes que van hacer, le voy a hacer la orejita a este le doy clic y lo abro hasta que me cubra la orejita	
T2 10'17" A 15'23"	E: profesor pero mira que no pinta, profe no pinta. (en el computador del estudiante) P: hay una cosa muy interesante, les voy a contar algo, hay unos que están haciendo esto, punto, punto, punto (muestra en el video proyector) y se me queda pegado, para poder terminar (el polígono) hay que darle clic hasta donde iniciamos, al primer puntico cuando yo le doy clic al primer puntico entonces ahí si ya se termina el polígono, listo?	
T2 19'08"	E: Como hago para borrar la recta P: dale clic y le dad suprimí.	
T2 19' 42"	E: ahí no importa si queda así el circulo P: si quiere bórralo, quítelo de ahí, dele apuntador E: es que se borra P: selecciónelo aquí, cójalo del punto, jálelo con la otra mano, saque la otra mano, eso ya puede	

	borrarlo ahí, no lo borre todo, yo les aconsejo que saquen la otra mano, las dos manos son para utilizarlas.
T2 29'30"	P: entonces le doy clic en este punto y también le doy nuevamente A pero como es A prima (A') entonces como saldrá la prima aquí. E: las comillas profesor. P: no porque son tos comillas y solo quiero que sea una. Listo entonces ya me queda A prima, como está muy amontonado aquí vuelvo y selecciono apuntador y vengo y la corro un poquito, de que objeto me pregunta, entonces yo le digo del punto A, entonces vengo y muevo el punto A, se dan cuenta? E: Si
T2 39'58"	P: muy bien hágale. E: no por esta raya. P: ha bueno vamos a ver cómo es que es. Bueno hay que volver a comenzar porque ya hiciste algo que no, bueno tengamos aquí, siempre hay que trabajar con las dos manos para evitarnos problemas entonces yo presiono aquí y con la otra mano le doy clic hasta acá afuera, le damos clic en apuntador y voy a borrar lo que tienes aquí. E: vale. P: esta partecita. E: tienes que darle doble clic. P: ya sabes más tú que yo, le hundo suprimir. E: uf, uf. P: y vuelvo y hago polígono pero lo hago en orden para que no me pase lo que te paso a ti. E: vale.
T2 40' 28"	P: comienzo por aquí. E: ah no importa si queda un punto más arriba que otro. P: no, no, aquí, luego aquí, digamos que yo le hago aquí así, bueno yo le voy hacer el bracito de esta manera pero usted lo puedo cambiar. E: ah no si, tranquilo profe. P: entonces donde inicias tiene que terminar ¿de acuerdo? E: sí señor. (en este punto del video se ve como los estudiantes manejan el programa y le dan un diseño propio a la figura)
T2, 1h 00'00"	P: por favor escúchenme bien lo que les voy a decir, esta información es muy importante para que no les pase lo que le paso a un amigo van hacer lo siguiente, van a entrar acá donde dice archivo, todos por favor hagan esto, miren acá al tablero donde dice archivo ¿si lo ven? Le dicen guardar como, entonces ahí le colocan nombre, después de que dice figura 1 le colocan su nombre, por ejemplo el mío es Ricardo y le colocan 6 rayita (-) 1 entonces le dan guardar. E: profe Ricardo, se me reinicio. P: ah ahí si nada que hacer, claro que el a veces se lo guarda. Recuerden que computador tiene para la próxima vez que trabajemos. E: profe esto no me aparece mire. P: pues tiene que abrir el programa primero
T3 6' 35"	E: profe, aquí me dice que lo señale y que lo arrastre. P: aja. Vea para poder arrastra casi que hay que utilizar las dos manos, si ustedes no utilizan las dos manos les queda muy difícil (comentario general para todos los estudiantes) E: profesor pero es que eso no se mueve (muchos estudiantes lo dicen) P: como que no se mueve, vean. Ah!! Miren acá a mi amiga, miren lo que ya ha hecho, ningún raro, si ven que se pueden mover. E: profe pero es que... profe eso no se mueve. P: sigan el ejercicio, escuchen... Muy bien, ah bueno ella ya termino ósea que los demás también deben de poder.

T3 10'2"	E: ah ya entendí P: listo, tenga clic sostenido y después si lo arrastro. Ahora puede existir la otra situación que hay unas que no se pueden mover, que hay que mover otra para que se mueva esa, eso ya les paso a algunos entonces tienen que seguir, si esta no se movió pues busco otra hasta que encuentre la que se mueve
T3 12'45"	E: profe P: ay lo quieres abrir ¿no lo has abierto todavía? E: no, si pero es que se me corrió. P: ah pues vuelva y ábralo tal cual como lo hizo antes. E: no, se me corrió. P: ah entonces mira, puede ser porque se te paso por acá, mira hay que poner estos cosos como en el medio, súbalo a ver usted que tiene las dos manos.
T3 22' 52"	E: profe es que lo de los ojos se me dificulto, porque si uno le da en este círculo no da, tiene que darle en el punto, entonces si yo le daba en el círculo se agrandaba, se ponía pequeño, entonces cuando ya nos explicó que era del punto yo ya lo organice y lo puse donde era.
T4 29' 04"	E: profesor mire el mío. P: eso muy bien, aparte de estar haciendo la escultura, estas aprendiendo a manejar el programa, recuerden que en el programa pueden ir bajando o subiendo.

Anexo 8. Rejilla Construcción del Concepto de Simetría

Rejilla Construcción del Concepto de Simetría	
Momento del registro	<i>Dependencia de la figura imagen del objeto</i>
T1 10'39" al 11'46" al 12'10"	E: lee identifica varios puntos en el objeto por ejemplo M y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. P: listo, busca un punto aquí. Un punto cualquiera. E: El del ojo P: bueno el del ojo, listo márcalo tú. E: marca un punto sobre la figura P: pero márcalo(con el lapicero) E:N P: listo y colócale la letra, eso que es N, donde quedaría ese punto en el otro lado de la recta E: aquí P: y ese sería N que E: lee marca un punto y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. P: entonces N prima, ahora pueden colocar más punticos, el que este aquí y el que este acá. E2: yo, yo , yo
T1 13'16" al 14'2"	E1: Profe no entiendo este punto. E2: mira los puntos que tienes P: Tu le colocas este punto aquí, y a este punto le colocas A, donde estaría A' prima. E1: aquí P: bueno entonces marque más puntos. E2: por ahí veinte. P: por ahí diez
T1 14'40" al 16'18"	E: profe, nosotros no entendemos esta. P: vamos a leerla con calma, léela. E: lee, identifica varios puntos en el objeto por ejemplo M y su correspondiente en la imagen con la misma letra y una comilla. E2: muestra los puntos en la construcción A, B y C, D P: busca un punto aquí cualquiera, pon un punto cualquiera (señala la fotocopia de la escultura) E2: el del ojo. P: bueno el del ojo. E2: que le escribimos P: póngale un punto (que marque el punto con el lapicero), colóquele una letra mayúscula, Acá cual sería ese punto. (señala el área donde se estampa la escultura) E2: señala el punto correctamente. P: y que dice que hay que hacer halla, con el punto E2: (el estudiante lee la guía) dice que hay que marcarlo con la misma letra y con una comilla, por ejemplo R con una comilla. P: marquen otros puntos más puntos que tengan esa misma relación. E2: la E. P: eso y esa donde tendría su punto halla (señala el área de la figura estampada) eso muy bien, excelente y marquen más. E1: cuál es ese E2: la C. P: eso puedes marcar, aquí adentro y puedes marcar más E2: ese P: si muy bien y puedes marcar más.
T1 20'57"	P: (en la puesta en común solicita que los trabajos estén sobre la mesa en cada grupo) ¿ustedes creen, sin mirar lo que han escrito, que el objeto y la imagen son iguales? Ustedes responden sí y me dicen por qué o no y me dicen por qué. G1: si porque tiene la misma figura y esta calcado y viene siendo lo mismo, bien. P: ustedes.

	G2: No son iguales porque el objeto se puede cortar y la imagen no. (se refiere a que el objeto está en una fotocopia y ellos la recortaron antes de pegarlo a la cartulina) P: y de las formas que piensas. G2: si es calcada es la misma forma porque la imagen es el mismo objeto.
T3 5' 10"	E3: ¿profe así? P: eso muy bien, por ahí ya veo a algunos que ya lo van haciendo. E: Profesor, yo puedo mover los ojos. E2: yo puedo mover los brazos. P: bueno pero entonces cada uno vaya tratando de explorar allí. E: ¿cuál es? Yo no yo no.
T3 6' 35"	E: profesor pero es que eso no se mueve (muchos estudiantes lo dicen) P: como que no se mueve, vean. ¡Ah! Miren acá a mi amiga, miren lo que ya ha hecho, ningún raro, si ven que se pueden mover. E: profe pero es que... profe eso no se mueve.
T3 21' 13"	P: otro estudiante nos da su punto de vista acerca del trabajo con la figura de la escultura de San Agustín E: para mí fue una experiencia pues mejor dicho como aprender ya que al principio yo no entendía casi nada pero después fui entendiendo poco a poco como por ejemplo primero que todo para moverla hay que seleccionar la original ya que si seleccionamos otra, no se moverá, en cambio sí seleccionamos la original si se va a mover. Otra cosa que aprendí es que, para que se mueva no puede señalar este punto porque esto va hacer que se altere la figura, pero si dice aquí este polígono ahí si se va a poder mover ya que esa señalando al polígono. Hubo muchas veces que me toco volver a empezar, pero al final si me quedaba como era y aunque me faltó un ojito yo lo construí
T3 31' 08"	E: como correr partes iguales, desde una es la copia la otra es la original desde que se mueva y si no se mueve hay que probar con otra figura hasta que se mueva.
Momento del registro	Movimiento
T1 14' 40"	E1: profesor no entiendo esta pregunta P: que dice la pregunta E1: lee, identifica un punto cualquiera en el objeto y márcalo con una letra mayúscula y su correspondiente en la imagen con la misma letra y comilla. 
T3 13' 50"	E: lo que pasa es que los ojos no se me mueven. P: ¿no se me mueven? Hay que cogerlos desde el centro para que puedan moverse, ese no se mueve entonces mire el otro a ver si se mueve, ah ese si se movió, eso muy bien.
T3 31' 50"	E: ... la figura axial uno nomás le hunde una recta y en la paralela, esa cosa de aquí de la mitad, es que no sé cómo llama, bueno uno le hunde y se divide y se forma la misma figura, si no que hacia el otro lado. E2: En dirección contraria, eso en dirección contraria.
T 33' 52"	P: sube un poco la parte de acá, para poder ver bien la cara. Listo, como hiciste para hacer la boca de la parte de abajo. E: bueno, eso es lo que voy a explicar, bueno, uno le señala aquí se mete en simetría axial, ahora señalamos uno de los polígonos, puede ser cualquiera por ejemplo voy a señalar este y ahora, bueno si queremos que quede igual aquí abajo, tenemos que señalar con respecto a esta recta (señala la recta horizontal) pero si queremos que nuestro polígono quede aquí al lado igual, hay que señalar la recta vertical y ahí quedara igual.

Momento del registro	Definir o predecir el eje de simetría
T1 22'12" al 22'28"	P: las distancias de la imagen y el objeto a la recta l es la misma, muéstrame la recta l. G2: (un integrante muestra la recta y señala con un dedo la letra l). Iguales, iguales. P: como son el objeto y la imagen tienen el mismo tamaño. G3: no son iguales porque a la hora de trazarlos, pues como le digo. Quedaban muchos espacios sin pintar y a nosotras nos tocaba repintar. P: ¿el objeto y la imagen son iguales? G4: si porque al pintarla y al estamparla quedarían de las mismas dimensiones, P: ¿tienen la misma forma el mismo tamaño? G5: un estudiante dice que si y otro dice que no.
T1 25'20 al 26'08"	P: ¿tienen la misma forma el mismo tamaño? G3: si, al calcar la imagen con pintura al otro lado va a aparecer, pero sale como torcido P: porque, creen que sale como torcido. G3: porque la imagen esta torcida. P: y porque más creen que esta torcida. G3: porque la doblamos así (muestra la forma como doblaron la cartulina).
T1 27'25" al 28'00"	P: como son las distancias del punto R a la recta l y del punto R' a la recta l. Muestran la imagen. G7: N prima la distancia es de 12,5 cm, K' 30,5 cm, A' 37,6 cm P: escuchen lo que dice acá (señala la guía Tarea 1 literal c) alguien comparo la distancia que hay del punto en el objeto al eje de simetría y del eje de simetría al punto correspondiente en la imagen. Así era que debían compararla, no era de un punto al otro punto sino del punto a la recta y su correspondiente. ¿Alguien lo hizo así?, nadie, no hay problema para aproximar se especificara mejor. 
T2 Guía del estudiante Tarea 2	Ver Tabla 11
T3 32' 05"	P: ¿Cómo hiciste para colocar la boca en la parte de abajo? E: pues trazamos una línea perpendicular y de ahí le hundimos simetría en la boca y ahí lo colocamos en la recta y ya aprecio abajo.
T3 33'20"	E: colocar las partes que estaban ahí (sobre la escultura) después de eso hacer una recta vertical y una recta horizontal, una vez hecho esto aplicamos la simetría axial para poder que esta parte sea iguala esta, pero para que esta también quede igual así, las rectas también tienen que estar bien acomodadas, de lo contrario puede suceder esto, van a quedar así (el estudiante arrastra el eje de simetría fuera de la posición correcta) entonces lo que hay que tratar de hacer es acomodar bien la recta para que todo quede bien.

Anexo 9. Rejilla Arte Escultórico y Geometría

Rejilla Arte Escultórico y Geometría	
Momento del registro	Modelación
T2 15' 25"	E: es que yo no sé dónde va P: ay pues mira y busca donde los puedes poner. Muy bien E: y que hago con esta cosa amarilla P: ah miren donde lo pueden colocar. También encajan allí E: profe y este elipse. P: ¿Cuál elipse? Claro pues esa ya va ahí, perfecto. Ahí van reconociendo algunas figuras.
T2 19' 15"	E: ¿cómo se hace el círculo? P: ¿El círculo? Pues se seleccione el círculo. Le das un puntico donde quieres das clic y abres.
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.	 1. En la revisión de la construcción se observó, que modelo las representaciones geométricas presentes en la escultura a partir de polígonos, iniciando con por la parte izquierda y continuando con la derecha, las orejas de la escultura la realizo con una circulo, en esta escultura reconoce tres rectángulo. El estudiante realizo todas las actividades plantea- das pero el rellenó de color negro no permite ver los nombres de los pun- tos correspondientes de algunos detalles.
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.	 2. En esta construcción se identificó que el estudiante utilizó un polí- gono para definir el contorno de la escultura, los orejas la modelo a partir de circulo y se observó que parte del rostro y las manillas de la escultura las modelo utilizando la herramienta arco. El estudiante realizo el trazo de la recta vertical y los segmentos entre los puntos correspondientes, pero no rellenó las figuras porque al intentarlo toda la escultura queda de un único color y oculta las demás construcciones esto ocurre porque mo- delo su contorno mediante un solo polígono
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.	 3. Al revisar los pasos de la construcción en Cabri el estudiante utilizó solo la herramienta polígono y circunferencia, en el desarrollo de la se- sión en varias oportunidades manifestó que la escultura no se deja pintar una de las posibles causa es que definió el contorno y la mayoría de los detalles con un solo polígono, por eso cuando la rellenó, toda la cons- trucción queda de un solo color.
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.	 4. Al revisar la construcción en Cabri se observó que en la mayoría de las construcciones utilizó la herramienta “polígono” sin definir figuras por separado, luego utiliza la herramienta “polígono” regular para mo- delar los círculos que forman las orejas y un circulo en su mano iz- quierda que delimita las manillas que adornan la muñeca del brazo iz- quierdo, por ultimo adorna su trabajo con polígonos regulares con un numero de lados expresados en Cabri como fracciones que se asemejan a estrellas de muchas puntas.
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.	 5. El estudiante que desarrollo esta construcción es uno de los más ade- lantados en su desarrollo de los esquemas de uso, al revisar la construc- ción se verificó que modelo los detalles de la escultura por separado uti- lizando polígonos, también utilizó la circunferencia y desarrollo las acti- vidades de nombrar puntos, trazar y medir segmentos, medir ángulos y la herramienta de “rellenar” y dar “color”.

T2 Archivos de Construcciones en Cabri.		6. Al revisar el trabajo desarrollado en esta escultura se notó que realizaba la modelación de un detalle en la parte derecha y luego construía el mismo a la izquierda asociando este aspecto con lo desarrollado en la Tarea 1, aunque realizó la mayoría de las actividades propuestas no terminó el trabajo, solo utilizó polígonos y círculos.
T2 Archivos de Construcciones en Cabri.		7. Esta construcción se inició a partir de la modelación del ojo izquierdo y la boca, luego modela un elemento al lado izquierdo y su correspondiente imagen al lado derecho, nombra los puntos traza la recta y los segmentos y por último determina las medidas de los ángulos y las longitudes.
Momento del registro	<i>Reconocimiento Cultural.</i>	
T1 10'21"	E: me está quedando, una obra de arte, (los estudiantes realizan las actividades y cada uno participa de diferentes maneras)	
T4 0' 30"	P: bueno, vuelvo y les cuento, un amigo dice que esto se parece a qué. E: a la nariz de un elefante. P: a la nariz de un elefante ¿a quienes les parece que esto se parece a la nariz de un elefante? (Levanten la mano 24 estudiantes), excelente muy bien ¿levanten la mano a los que les parece que esto es una flauta? (Levanten la mano 2 estudiantes)	
T4 2' 40"	P: ¿Quién me dice que hay aquí? E: un corazón. P: un corazón ¿cuéntanos? E: yo ahí veo un corazón y dentro de ese corazón veo la silueta de un águila. P: muy bien, tan increíble ¿Por qué es la silueta de un águila? E: porque ahí se ve la cola, las alas. P: venga y la dibuja acá por favor, que me gustaría que lo hagas (en este momento un alumno participa dibujando el águila en el tablero) P: excelente muy bien. E: es un candelabro, es una paloma. P: es un águila.	
8'20	E: el del centro era el más importante y los de los lados eran sus guardianes. P: ellos también tienen como una pirámide donde estaban los que mandaban... Listo pregunta. E: profesor de que ellos también lo hacían como lo hacían los egipcios que tiene como esas pirámides que eso cuando se daban cuenta de que una persona era muy importante que tenía que ser sepultada o momificada los tenían en una tumba y los dejaban ahí, eso es lo que ellos quieren representar, que son los importantes como los que salvan vidas como los cirujanos, enfermeros, médicos los abogados, todo eso, como digamos el Papa pues como son personas tan importantes las hacen referencia ahí como haciendo un homenaje. P: entonces los personajes más importantes tenían un lugar privilegiado dentro de la comunidad.	

Anexo 10. Guía del estudiante Versión 2.

Sesión 6. Simetría en el plano Versión 2

Profesor: Ricardo Alexander Urbano Meneses

Estudiantes: _____

Grado: _____ fecha: _____

Con la siguiente actividad podrás identificar los elementos de la geometría que intervienen en la transformación geométrica de la simetría axial, además de cómo se aplican, describen y verifican simetrías en el plano.

Materiales.	• Utensilios cotidianos de la clase de geometría • Témperas, pinceles, tijera, pegante. • Aula inteligente • Anexo 6.1 (Fotocopia de la escultura pegada en un cuarto de cartulina)
--------------------	--

Tarea 1: Manipulando recursos

En el **Anexo 6.1**, realiza un doblez teniendo en cuenta que no toque la escultura y al doblar la hoja la fotocopia de la escultura quede cubierta, luego sobre el doblez traza una línea recta que llamaremos l utilizando la regla y el lápiz. Con témpera pinta el contorno, puntos, rectas y detalles de la fotocopia de la escultura, que en adelante la llamaremos **figura objeto**, sin que se haya seco la témpera, dobla la hoja por la línea l que trazaste y desliza suavemente tus dedos sobre el dorso de la cartulina para que la témpera se adhiera en la otra cara de la cartulina, si es necesario repinta un poco la figura que se estampó, la cual llamaremos **figura imagen**. (Nota, a medida que pintas puedes doblar y estampar varias veces para que no se seque la pintura). Teniendo en cuenta la actividad desarrollada anteriormente responde las siguientes preguntas.

- Al comparar la figura objeto, con el dibujo Imagen que se estampó al doblar la hoja ¿Se puede asegurar que tienen la misma forma?, ¿Por qué? _____

- ¿La fotocopia de la escultura, el objeto, tiene el mismo tamaño que el dibujo estampado al otro lado de la línea, la imagen?, ¿Por qué? _____

- Marca varios puntos en la figura objeto, nómbralos con letras mayúsculas por ejemplo (R) y su correspondiente punto en la imagen utilizando la misma letra con una comilla por ejemplo

(R' que se lee R prima). Mide las distancias del punto R a la recta l y del punto R' a la recta l , realiza esta misma actividad con las demás parejas de puntos, ¿estas distancias son iguales? _____
 ¿Por qué? _____

- d. Trazas segmentos que pasen, por un punto en el objeto y su correspondiente punto en la imagen, ¿qué relación geométrica hay entre los segmentos? _____ ¿Por qué? _____

Comenta con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las respuestas y conclusiones de tu grupo. Registra algunos aspectos comentados en el grupo: _____

Tarea 2: Vive tu experiencia en AGD

Coloca la imagen de la escultura la Máscara de Quebradillas (Figura 1) como fondo de pantalla en el AGD, resalta los detalles de la escultura utilizando la herramienta “*polígono*” de Cabri, luego traza una recta l vertical que divida en dos partes iguales la escultura. Marca y nombra varios puntos con letras mayúsculas en el lado Izquierdo de la escultura (objeto. A) y su correspondiente a la derecha con la misma letra mayúscula de la forma (A' prima).

- a. Mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta l y de su correspondiente en la derecha a la recta l , puedes utilizar la notación distancia (A, l) o distancia (l , A'), realiza esta misma acción con otros puntos, ¿cómo son las distancias correspondientes?, ¿Por qué? _____

- b. Traza segmentos entre los puntos del objeto y su correspondiente en la imagen, con la herramienta de Cabri halla el “*punto medio*”.

b.1. ¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí? _____

 _____.

b.2. ¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta? _____

b.3. ¿Qué relación geométrica se establece entre los puntos medios y la recta? _____

b.4. ¿Qué relación geométrica se establece entre los segmentos y la recta? _____

- c. Utiliza la herramienta mostrar ejes y rejilla, haga que el eje de simetría de la escultura coincida con el eje vertical (eje Y), identifica varios puntos indica las coordenadas C:(x,y) y su correspondiente en la derecha C':(x, y). Escribe varios grupos de puntos con su correspondiente imagen. A: (__, __) y A':(__, __) ; B:(__, __) y B': (__, __) _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las respuestas y conclusiones de tu grupo. Registra algunos aspectos comentados en el grupo: _____

Tarea 3: explorando construcciones en Cabri

A partir de los archivos contruidos en Cabri (Construcción 6.1 y construcción 6.2)

Abre el archivo **Construcción 6.1** que se encuentra en la carpeta Sesión 6. Tu tarea consiste en colorear la escultura arrastrando las figuras que están dispersas y reconstruye la escultura como se muestra en la imagen pequeña. Debes tener en cuenta que para arrastrar las construcciones se acerca el cursor al objeto y cuando emerge el nombre de polígono, puedes arrastrar el dibujo. Teniendo en cuenta la actividad anterior responde las siguientes preguntas.

- a. ¿Por qué algunas figuras no se pueden mover con la función del puntero haciendo clic izquierdo sostenido? _____

- b. ¿Por qué cuando se arrastra una figura F, otra que es congruente se mueve en dirección opuesta o paralela a la trayectoria de la figura F? _____

- c. Nombra las figuras que se pueden arrastrar *el objeto* con una letra mayúscula (A) y la figura dependiente de este *la Imagen* con la misma letra y comilla (A') De acuerdo a los nombres

dados a los polígonos.

¿Cuáles figuras son simétricas respecto a un eje vertical?: _____

¿Cuáles figuras son simétricas respecto a un eje horizontal?: _____

¿Cuáles figuras son simétricas respecto a un eje oblicuo?: _____

- d. Una construcción es bisimétrica cuando tiene simetría respecto a dos planos perpendiculares entre sí ¿Qué polígonos o detalles de la escultura son bisimétricos?

A partir de la **construcción 6.2**, Realiza las siguientes actividades, traza los ejes de simetría necesarios para reconstruir la escultura y superpone cada detalle en la escultura, si los detalles no están contruidos, realiza las transformaciones geométricas de simetría axial necesarias para completar el diseño de la escultura en Cabri.

- a. ¿qué dificultades se experimentan al trazar los eje de simetría? _____

- b. ¿Qué elementos intervienen en las transformaciones de simetría axial? _____

Dialoga con los integrantes de tu grupo sobre las dificultades que se presentan al utilizar el AGD Cabri, analiza las preguntas y sus respuestas, registra algunos aspectos comentados y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las conclusiones de tu grupo.: _____

Institucionalización del concepto por parte del profesor.

Tarea 4: Diseña tu propia escultura

- a. Describe en que consiste la simetría axial y los elementos que intervienen en las trasformación de simetría axial. _____

- b. Utiliza la transformación geométrica de simetría axial, para diseñar tu propia escultura, inicialmente traza el eje de simetría y personalízala rellenando los polígonos con colores, define cuales son las figuras objeto y marca los vértices de algunas de ellas y su correspondiente en la figura imagen, utilizando la notación correspondiente. En un cuadro de texto en Cabri describe que transformaciones utilizó en algunos detalles y que representa la escultura: _____

Anexo 11. Guía del estudiante, Cursillo VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016

VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016.
Universidad de Medellín, 12, 13 y 14 de Octubre.

Taller:

Modelaciones Geométricas en las Esculturas de San Agustín para la enseñanza de la Simetría Axial Alrededor del Diseño de Tareas con Cabri

Por:

Ricardo Alexander Urbano Meneses

Estudiante de Maestría en Educación Matemática, U. del Valle.

Edinsson Fernández M.

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, U. de Nariño.

Resumen:

El presente cursillo se construye a partir del diseño de tareas que integran el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri y el proceso de modelación geométrica en las esculturas de San Agustín, inscritas en una Secuencia Didáctica (SD) siguiendo la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto de la Educación Básica Primaria de Colombia.

El objetivo de este cursillo es dar cuenta de la manera en la que las características del diseño de tareas, que integran Cabri, para la enseñanza de la simetría axial, promueven el desarrollo del pensamiento geométrico con estudiantes de grado 5° de la IE Golondrinas de Cali.

Momentos del desarrollo del cursillo

1. Presentación del contexto histórico de la cultura de San Agustín y los resultados de la investigación de Urbano (2010) alrededor de la modelación geométrica tomando como referente a Oldknow (2004).
2. Los participantes al cursillo realizarán un ejercicio de modelación geométrica utilizando como fondo de pantalla en Cabri, algunas fotografías de las Esculturas de San Agustín. Para el desarrollo de esta actividad se proporcionará una carpeta digital con los archivos correspondientes a las fotografías seleccionadas y otra carpeta con los recortes en Paint ajustados a la interfaz del programa para monitores de 15 a 21 pulgadas, para agilizar la puesta de la imagen como fondo de pantalla.
3. Al finalizar la actividad anterior se realizará una puesta en común de la experiencia de modelar las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín.
4. Se realizará una breve presentación del concepto de simetría axial desde Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) para presentar una propuesta de diseño de tareas sobre la simetría axial (Urbano & Fernández, 2015). (Ver Anexo 1). En la carpeta se encuentran las construcciones en Cabri 6.1 y 6.2 que se requieren para explorar las actividades del (Anexo 1).
5. Por último, se propondrá a los docentes asistentes que realicen su propio diseño siguiendo los principios del pueblo escultor y le asignen un significado a su creación.

Gracias por su participación.

Página 1 de 3

Taller: **Modelaciones Geométricas en las Esculturas de San Agustín para la enseñanza de la Simetría Axial Alrededor del Diseño de Tareas con Cabri.**
Por: *Ricardo Alexander Urbano Meneses*, U. del Valle & *Edinsson Fernández M.*, U. de Nariño.

VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016.
Universidad de Medellín, 12, 13 y 14 de Octubre.

Tarea 1: Vive tu experiencia en AGD

Coloca la imagen de la escultura la Máscara de Quebradillas (Figura 1) como fondo de pantalla en el AGD, resalta los detalles de la escultura utilizando la función polígono de Cabri, luego traza una recta l vertical que divida en dos partes iguales la escultura. Marca y nombra varios puntos con letras mayúsculas en el lado izquierdo de la escultura (objeto. A) y su correspondiente a la derecha con la misma letra mayúscula de la forma (imagen. A').

- a. Mide la distancia de los puntos de la izquierda a la recta l y de su correspondiente en la derecha a la recta l , puedes utilizar la notación distancia (A, l) o distancia (l , A'), realiza esta misma acción con otros puntos, ¿cómo son las distancias correspondientes?, ¿Por qué? _____

- b. Traza segmentos entre los puntos del objeto y su correspondiente en la imagen, con la función de Cabri halla el punto medio.

¿Qué relación geométrica tienen los segmentos entre sí? _____

¿Qué ángulo forman los segmentos y la recta? _____

¿Qué relación se puede establecer entre los puntos medios y la recta? _____

- c. ¿Qué relación se establece entre los segmentos y la recta? _____

- d. Utiliza la herramienta mostrar ejes y rejilla, haga que el eje de simetría de la escultura coincida con el eje vertical (eje Y), identifica varios puntos indica las coordenadas C:(x,y) y su correspondiente en la derecha C':(x,y)
Escribe varios grupos de puntos con su correspondiente imagen.

A: (,) y A': (,); B: (,) y B': (,) _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las respuestas y conclusiones de tu grupo.

Tarea 2: explorando construcciones en Cabri.

A partir de la construcción 6.1 construidas en Cabri realiza las siguientes actividades. Debes tener en cuenta que para arrastrar las construcciones se acerca el cursor al objeto y cuando se nombre como polígono lo puedes arrastrar de lo contrario altera la forma de la figura. Arrastre las figuras y reconstruya la imagen como se muestra en la macro.

- a. ¿Porque cuando se arrastra una figura la otra que es semejante se ajusta a los detalles de la escultura? _____

- b. ¿Qué simetría se utilizó en los detalles de los ojos?, ¿Qué simetría se utilizó para la configuración de los brazos? _____

- c. ¿Qué dificultades se presentaron al desarrollar la actividad? _____

VIII Congreso Iberoamericano Cabri 2016.
Universidad de Medellín, 12, 13 y 14 de Octubre.

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las respuestas y conclusiones de tu grupo.

A partir de la construcción 6.2 construidas en Cabri, realiza las siguientes actividades, determina el eje de simetría y coloca cada detalle superpuesto en la escultura, si los detalles no están construidos realiza las transformaciones necesarias para completar el rediseño de la escultura en Cabri.

a. ¿qué dificultades se experimentan si el eje de simetría no está bien definido? _____

b. ¿Qué transformaciones geométricas utilizó? _____

c. ¿Qué elementos se deben tener en cuenta en las transformaciones de simetría? _____

d. ¿Qué dificultades encontró al utilizar el AGD Cabri? _____

Tarea 3: Institucionalización del concepto y evaluación.

Describe en que consiste la simetría axial y los elementos que intervienen en las transformación de simetría axial. _____

Utiliza las transformaciones isométricas, para diseñar tu propia escultura y personalízala relleno los polígonos con colores, marcando los vértices de algunas figuras geométricas junto con su correspondiente en su imagen, utiliza la notación correspondiente para los vértices y el eje de simetría. Comente brevemente que transformaciones utilizó en algunos detalles de su escultura y que representa la escultura: _____

Comparte con los compañeros de tu grupo las respuestas y elige un relator para que comparta con todos los compañeros de la clase las respuestas y conclusiones de tu grupo.