

El método de Descartes para determinar la tangente a una curva

Sergio Alarcón Vasco
Instituto Tecnológico Metropolitano

Carlos Mario Suescún
Universidad de Antioquia

Recibido Feb. 11, 2010 Aceptado Mar. 11, 2011

Abstract

The purpose of this article is to analyse the method developed by Descartes for determining, by means of the previous construction of normal, the tangent to a curve at a given point. In particular, the application of the method is studied in the ellipse and the parabole. The method is studied, like it is performed today, in its application at a general algebraic function, analysing like in a particular case the tangent to the cubic parabole at a point different of $(0, 0)$.

Keywords: Circle method, general algebraic function, cubic parabole, tangent.

MSC(2000): Primary: 01A45, Secondary: 00A35, 97D99.

Resumen

El propósito de este artículo es analizar el método desarrollado por Descartes para hallar, mediante la construcción previa de la normal, la tangente a una curva en un punto dado. En particular se estudia la aplicación del método a la elipse y a la parábola. Se estudia, a la manera de hoy, la aplicación del método a una función algebraica general y se analiza, como caso particular, el de la tangente a la parábola cúbica en un punto distinto de $(0, 0)$.

Palabras y frases claves: Método del círculo, función algebraica general, normal, tangente, parábola cúbica.

1 Introducción

Todo el trabajo de Vieta en el *Arte Analítico* fue fundamental en el desarrollo matemático de Descartes. Siguiendo la idea de éste, de obtener ecuaciones determinadas¹ a partir de construcciones geométricas, Descartes desarrolla *La géométrie*, en donde amplía esta idea a problemas geométricos indeterminados² en dos incógnitas que, al igual que Vieta, son concebidas como segmentos [1] (p.126). La primera, es medida a partir de un punto inicial a lo largo de un eje dado, y los segmentos que representan la otra incógnita son determinados por la ecuación dada y se levantan como ordenadas formando un ángulo determinado con el eje.

En cuanto a la simbología utilizada, Descartes hace ciertas mejoras en el uso de las letras de Vieta, empleando las primeras letras del alfabeto para representar las cantidades conocidas, y las últimas para las incógnitas. Pero, al igual que Vieta, sólo utiliza las letras para representar números positivos. No obstante, usa los signos $+$ y $-$, efectuando sumas y restas entre términos con coeficientes literales. También introduce el signo de la raíz cuadrada $\sqrt{}$ y la notación x^3 , x^4 , x^5 , etc.

¹Que tienen una única solución.

²En los que hay tantos segmentos como soluciones posibles.

para las potencias, pero usa indistintamente la notación xx ó x^2 para la segunda potencia [1] (p.127), [2] (p.3). La igualdad la representa con el símbolo ∞ que es, según Newman [3] (p.170), una ligación que simboliza las dos primeras letras de la palabra “aequare”.

Es importante resaltar que para Descartes los parámetros y las incógnitas son segmentos. Sin embargo, explica Wussing [1] (p.127), estos no son exclusivamente segmentos geométricos sino también valores numéricos correspondientes a dichos segmentos. De esta manera, expresiones como x , x^2 y x^3 representan números y no longitudes, áreas y volúmenes respectivamente. Rompe así con la tradición griega de no admitir en geometría más que la primera, segunda y terceras potencias, siendo posible multiplicar más de tres segmentos [4] (p.427), [5] (p.155). El producto de tres segmentos, por ejemplo, ya no es un rectángulo o un paralelepípedo, sino otro segmento.

Para abordar un problema dado, Descartes trabajaba analíticamente, suponiendo conocida la solución y representando con letras, como se dijo antes, los segmentos, conocidos y desconocidos, necesarios para la solución buscada. Luego, mostrando como se relacionan entre sí los segmentos, va resolviendo el problema, hasta llegar a encontrar una ecuación. Descartes describe este hecho de la siguiente manera:

“Si queremos resolver un problema cualquiera, debe primero suponerse el problema resuelto, y dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para la construcción, tanto a esos que son desconocidos, como a los otros. Después, sin establecer ninguna diferencia entre los segmentos conocidos y los desconocidos, debemos desentrañar la dificultad, según el orden que vaya mostrando, lo más naturalmente, en que forma dependen mutuamente los unos de los otros, hasta encontrar el medio de expresar una misma cantidad en dos formas: esto constituirá una ecuación, pues los términos de una de estas formas son iguales a los de la otra.” [2] (p.8).

Luego, continúa diciendo que hay que encontrar tantas ecuaciones como segmentos desconocidos hayan y, si hay varias ecuaciones, estas deben ser combinadas de tal forma que quede un segmento desconocido expresado en términos de segmentos conocidos.

De esta forma, Descartes traduce un problema geométrico en el lenguaje algebraico, obteniendo así una ecuación algebraica que simplifica y resuelve.

Este nuevo método, afirma Bell [5] (p.149), tuvo consecuencias evidentes para la geometría, ya que no solamente posibilitó la investigación sistemática de las curvas conocidas sino que creó en potencia todo un universo de formas geométricas imposibles de concebir por el método sintético. Poncelet reconoce la superioridad del método de Descartes refiriéndose a él en las siguientes palabras:

“Seguramente Descartes no había previsto la fecundidad y el alcance de su método, que entre las manos de Euler, de Clairault, y sobre todo de Lagrange y de Monge, se ha convertido en un instrumento general de demostración y descubrimiento, un lenguaje geométrico universal por así decirlo; ventaja que debe no

sólo a la simplicidad de su algoritmo y de sus notaciones, sino sobre todo a su sistema métrico de representación de los elementos rectos o curvos de las figuras, por la proyección, verdadera transformación lineal o rectilínea de estos elementos, que no altera el grado, las afecciones y las propiedades esenciales de las líneas, y no sale, aparentemente, de las vías del álgebra pura, llamado aquí análisis indeterminado.” [6](p.17)

Hoy día es común escuchar la expresión “sistema de coordenadas cartesianas”, lo cual es erróneo, ya que se atribuyen a Descartes interpretaciones de acuerdo a nuestra mirada de hoy y que él no concebía de esa manera ³

Veamos por qué:

Descartes no elabora un sistema de coordenadas para localizar puntos. Sus coordenadas no son como para nosotros parejas de números que satisfacen una ecuación dada. A él le interesa la posibilidad de construir esos puntos los cuales obtiene de ciertos problemas geométricos.

Descartes no habla de eje x y eje y . Como dijimos antes, las incógnitas son tomadas como segmentos. El primero medido a partir de un punto inicial a lo largo de un eje dado, mientras que el otro segmento se levanta como ordenada formando un determinado ángulo con el eje.

Descartes no tiene en cuenta, como lo hacemos hoy en un sistema de coordenadas, los cuatro cuadrantes. Se limita a suponer que el lugar geométrico en consideración se halla en el primer cuadrante.

Descartes no habla de coordenadas, ni de abscisa. Se expresa de acuerdo con Apolonio. Así, donde ahora usamos abscisa, ordenada y la ecuación de una cónica para deducir propiedades, Apolonio empleaba PV , la ordenada o semicuerda QV y una igualdad geométrica, ya sea $QV^2 = PV \cdot VR$, para la elipse y la hipérbola o $QV^2 = PV \cdot PL$, para la parábola [8] (p.131). Sin embargo, es importante notar que en la exposición de Apolonio no aparece nada del simbolismo algebraico de hoy. (ver Figura 1)

2 El método del círculo de Descartes

En el libro II de *La géométrie*, Descartes desarrolla un método para el trazado de rectas tangentes mediante la construcción previa de la recta normal. Este método, conocido como el *método del círculo*, es puramente algebraico y fue introducido por Descartes aludiendo a los principios de su Geometría analítica y centrando

³ Algunos autores, entre los que se encuentran González [7] (p.56) y Wussing [1] (p.125), consideran a Nicolás de Oresme (1323-1382) como el primero en introducir representaciones gráficas en un sistema de coordenadas similar al que usamos hoy día. Se ocupó especialmente de la representación gráfica de intensidades variables de cantidades. Para esto elegía un punto origen en una recta horizontal que llamaba longitud (nuestra abscisa) que simbolizaba la cantidad buscada, por ejemplo el movimiento, y perpendicular a este colocaba, por medio de segmentos, la intensidad de dicha magnitud, llamada latitud (nuestra ordenada). Si las latitudes son constantes, se obtiene un rectángulo; y si crecen o decrecen en igual medida, se obtiene un trapecio. Es similar a lo que hoy día son, respectivamente, nuestras funciones constantes y afines.

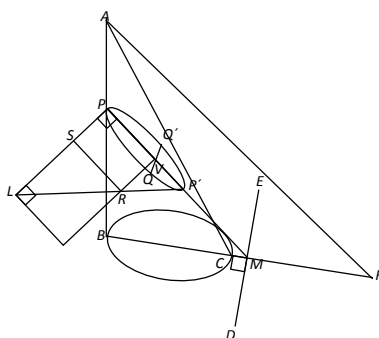


Figura 1: Notación de Apolonio

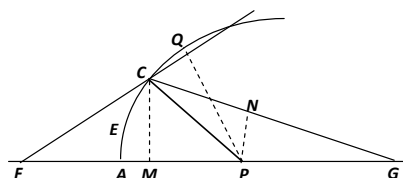


Figura 2: Normal a la curva CE

su importancia en la resolución de problemas sobre curvas. Descartes afirma que muchas propiedades de las curvas planas dependen únicamente de los ángulos que ellas forman con otras líneas, pero como el ángulo entre dos curvas es el ángulo entre las normales a las curvas en el punto de intersección de estas, Descartes añade lo siguiente:

“Esta es la razón por la cual creo que habré dado aquí una introducción suficiente al estudio de las curvas cuando haya dado un método general para trazar la recta que forma un ángulo recto con una curva en un punto arbitrariamente escogido sobre ésta. Y me atrevo a decir que éste no es sólo el problema más útil y más general que conozco en la geometría, sino incluso que yo haya deseado conocer”. [2] (p.93).

Descartes entra a resolver el problema razonando de la siguiente manera:

Llama CE la curva y se propone trazar por el punto C la normal a dicha curva, como se muestra en la Figura 2.

Escoge la recta AG de modo que los puntos de la curva estén relacionados con los de la recta mediante una expresión polinomial en x y y , donde $CM \propto x$ y $AM \propto y$, expresión polinomial que se denominará ecuación de la curva.

Supóngase, con Descartes, el problema resuelto y sea CP la recta buscada. Hágase $CP \propto s$, $AP \propto v$ y, por tanto, $PM \propto v - y$. En vista de que el punto C es dado, se sigue que x y y son conocidos; las incógnitas son v y s , que determinan

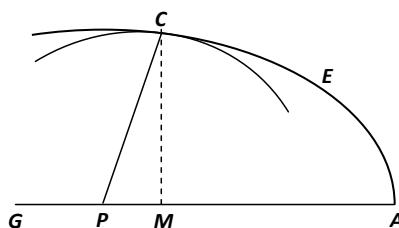


Figura 3: Círculo con centro en P, tangente a la curva CE

el punto P pedido.

Como el triángulo PMC es rectángulo, se tiene:

$$ss \propto xx + vv - 2vy + yy$$

donde,

$$x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy} \quad (1)$$

y

$$y \propto v + \sqrt{ss - xx} \quad (2)$$

Por medio de las ecuaciones 1 y 2 se despeja, de la ecuación de la curva, una de las dos indeterminadas x o y ; así, colocamos $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ en lugar de x , y el cuadrado de esta raíz en lugar de xx , y el cubo en lugar de x^3 , obteniendo así una ecuación en v , s y y ; o si es y , colocamos $v + \sqrt{ss - xx}$ en su lugar, el cuadrado en lugar de yy , y el cubo en lugar de y^3 , hasta obtener una ecuación en v , s y x .

Como P es el punto donde la normal corta a la recta AG , el círculo con centro P y que pasa por el punto C , tocará a la curva CE en C , sin cortarla (ver Figura 3).

Pero si P no coincidiera exactamente con el pie de la normal, el círculo cortaría a la curva, pues pasaría por C y por algún otro punto de la curva, digamos E (Figura 4). En este caso, cada una de las ecuaciones resultantes debería tener dos raíces distintas.

Descartes continúa diciendo:

“Pero cuanto más se aproximan los dos puntos, C y E , el uno del otro, menor será la diferencia entre las dos raíces; y, finalmente, ellas serán exactamente iguales si ellos dos coinciden en uno, es decir, cuando el círculo que pasa por C toque a la curva CE sin cortarla”. [2] (p.102).

De esta forma, la recta CP será normal a la curva en C cuando P (es decir, v) sea determinado de modo tal que cualquiera de las ecuaciones resultantes tenga dos raíces iguales.

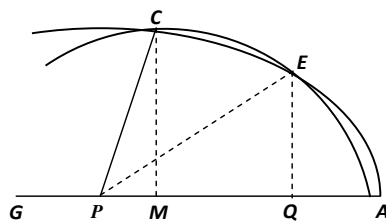


Figura 4: Círculo con centro en P, secante a la curva CE

De acuerdo con Descartes, el procedimiento que se debe de llevar para hallar las raíces, si el círculo cortara la curva en dos puntos C y E , es el siguiente:

Supóngase que el círculo corta a la curva en dos puntos C y E , como se muestra en la Figura 4. De acuerdo con Descartes, trázese EQ paralelo a CM y, hágase $EQ \propto d$ y $QA \propto e$.

Obsérvese, que $PE \propto PC$, ya que son radios del mismo círculo. Si se buscan EQ y QA , suponiendo que PE y PA son dados, se tendría que obtener la misma ecuación que la que se obtuvo buscando CM y MA , suponiendo PC y PA dados. Si el valor de d es el buscado, entonces una de las raíces será CM y la otra EQ ; pero si e es el valor buscado, las raíces serán MA y QA . Ahora, en el triángulo rectángulo PQE , se tiene:

$$ss \propto dd + vv - 2ev + ee$$

y, siguiendo el mismo procedimiento para hallar CM y MA , en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$d \propto \sqrt{ss - vv + 2ev - ee} \quad (3)$$

ó

$$e \propto v + \sqrt{ss - dd} \quad (4)$$

que son los valores de las raíces EQ y QA respectivamente.

Cuando los puntos C y E coinciden, entonces x , en (1), se hace exactamente igual a d , en (3), similarmente y , en (2), se hace exactamente igual a e , en (4). Por lo tanto, el círculo que pasa por C , tocaría a la curva CE en el punto C sin cortarla. De esta forma, CP sería una normal a la curva en C .

3 Normal a una elipse

Descartes aplica su método, hallando la normal a una elipse (Figura 5). Transcribe la ecuación de ésta, dada por Apolonio, a su propia notación. Al respecto dice lo siguiente:

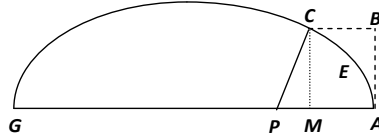


Figura 5: Normal a una elipse

“Si CE fuese una elipse y MA el segmento de su diámetro, al cual CM se aplica por ordenada, y siendo r su lado recto, y q el transverso, por el teorema 23 del libro I de Apolonio $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$ ”. [2], (p.97)

Al reemplazar la ecuación de la elipse en (1), para eliminar xx , obtenemos:

$$ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$$

donde

$$yy - \frac{r}{q}yy \propto ss - vv + 2vy - ry$$

Luego,

$$\frac{qyy - ryy}{q} \propto ss - vv + 2vy - ry$$

y así,

$$yy \frac{q - r}{q} \propto ss - vv + 2vy - ry$$

llegando a

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r} \propto 0 \quad (5)$$

Descartes continúa diciendo que esta última ecuación debe tener la misma forma que la que se obtiene al hacer e igual a y y multiplicar $y - e$ por sí misma. Así, $y \propto e$, de donde $y - e \propto 0$ y por tanto, $(y - e)(y - e) \propto 0$, resultando:

$$yy - 2ey + ee \propto 0 \quad (6)$$

Comparando cada uno de los términos en (5) y (6), se obtiene:

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r} \propto -2ey \quad (7)$$

y

$$\frac{qvv - qss}{q - r} \propto ee \quad (8)$$

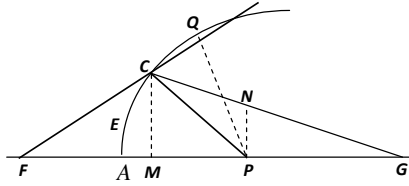


Figura 6: Normal a una parábola

Despejando v en (7), se obtiene:

$$v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r \quad (9)$$

Como se había supuesto que $y \propto e$, entonces (9) queda:

$$v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r \quad (10)$$

Luego v , que es la línea AP , determina el punto P . Como el punto C está dado, se conoce el valor de y . Por tanto, despejando en (10), se obtiene:

$$v - y \propto \frac{1}{2}r - \frac{r}{q}y \quad (11)$$

que es la subnormal que permite hallar la pendiente de la normal CP a la elipse en un punto C .

4 Normal a una parábola

Ahora, se verá cómo aplicar el método para hallar la normal a una parábola (Figura 6). En efecto, al usar la notación de Descartes, la ecuación de la parábola, dada por Apolonio en la Proposición 11 del libro I, viene dada por:

$$xx \propto ry$$

donde r es su lado recto.

Ahora, reemplazando (1) en la ecuación de la parábola, se tiene:

$$ss - vv + 2vy - yy \propto ry \quad (12)$$

y así,

$$yy + ry - 2vy - ss + vv \propto 0 \quad (13)$$

Comparando, como Descartes, (13) con (6), es decir, con $yy - 2ey + ee \propto 0$, se tiene:

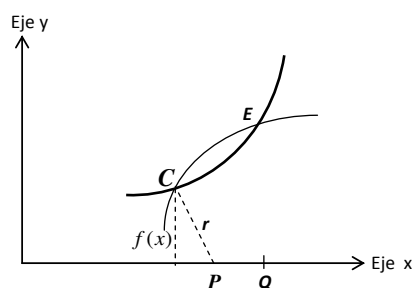


Figura 7: Normal a una función algebraica general

$$ry - 2vy\infty - 2ey \quad (14)$$

y

$$vv - ss\infty ee \quad (15)$$

Despejando v en (14), se obtiene:

$$v\infty e + \frac{r}{2} \quad (16)$$

Pero como $e\infty y$, (16) queda:

$$v\infty y + \frac{r}{2} \quad (17)$$

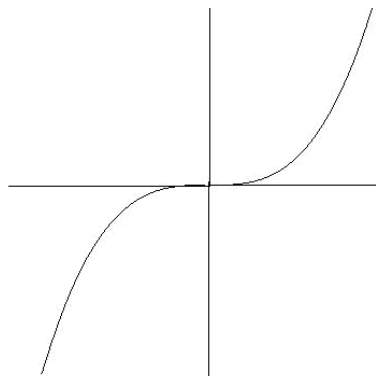
y por tanto, $v - y\infty \frac{r}{2}$ es la subnormal buscada.

5 Aplicación del método de Descartes a una función algebraica general

Es interesante ver, a la manera de hoy, cómo sería aplicar el método de Descartes a una función algebraica general. Esta presentación se fundamenta en la versión de González Urbaneja. [9] (p.190).

Considérese la curva $y = f(x)$, cuya representación gráfica con respecto al sistema de ejes xy y, perpendiculares, se muestra en la Figura 7.

Sea C un punto cualquiera de la curva, cuya abscisa es x y donde se traza la normal. Supóngase, como Descartes, el problema resuelto y que la solución es la recta CP , donde P , de coordenadas $(v, 0)$, es el punto de intersección de la normal con el eje de abscisas. Cualquier círculo con centro en un punto Q , próximo a P y que pase por C , cortará a la curva no sólo en C sino también en un punto E , muy cerca de C ; pero si CP es normal a la curva en el punto C , este punto será un punto doble de la intersección de la curva $y = f(x)$ y el círculo

Figura 8: Parábola cúbica $y = x^3$

$y^2 + (x - v)^2 = r^2$, de centro en P y radio r . Si se elimina y de ambas ecuaciones, se obtiene:

$$(f(x))^2 + (x - v)^2 - r^2 = 0 \quad (18)$$

con v y r fijos.

Pero esta última ecuación debe tener la abscisa x de C como una raíz doble. Sea $x = e$ dicha raíz. Una ecuación con una raíz doble como ésta, debe de tener la forma:

$$(x - e)^2(ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \dots) = 0 \quad (19)$$

donde n es el grado de $(f(x))^2$.

Luego, de (18) y (19), se tiene:

$$(f(x))^2 + (x - v)^2 - r^2 = (x - e)^2(ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \dots) \quad (20)$$

Comparando coeficientes, en esta última ecuación, se encuentra el valor de v , en términos de la raíz doble e .

Al determinar la subnormal $v - x$, es posible hallar la pendiente de la normal $m = \frac{-f(x)}{v-x}$ y la de la tangente $m = \frac{v-x}{f(x)}$.

Supóngase, por ejemplo, que se quiere aplicar esta técnica, a la manera de hoy, para hallar la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$, en un punto diferente de $(0, 0)$ y cuya representación gráfica se ilustra en la Figura 8.

Si se reemplaza $y = x^3$ en la ecuación (20), se tiene:

$$x^6 + (x - v)^2 - r^2 = (x - e)^2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + g)$$

Luego, identificando coeficientes, se llega a que $v = 3e^5 + e$ y, sustituyendo $e = x$, la subnormal vendrá dada por $v - x = 3x^5$ y la pendiente a la tangente en un punto (x, y) , será:

$$m = \frac{v - x}{f(x)} = \frac{3x^5}{x^3} = 3x^2$$

De aquí, resulta que la ecuación de la recta tangente a la parábola cúbica en un punto (x_1, y_1) de esta, será:

$$y - y_1 = 3x_1^2(x - x_1)$$

Algunos argumentan que, para hallar la tangente en el punto de coordenada $(0, 0)$, basta con hacer $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$, en la ecuación anterior, obteniendo $y = 0$ como la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$. Ellos deben tener en cuenta que la división por cero es inadmisibles.

Descartes no aceptaba la tangente a la parábola cúbica en lo que para nosotros es el punto $(0, 0)$, es decir, en el punto donde la curva y el diámetro coinciden. Aunque a raíz de los resultados obtenidos con su método el concepto de recta tangente como posición límite de una secante variable cobró gran importancia, él se mantuvo fiel a la concepción euclídea de tangente al círculo, como “una recta que toca al círculo y prolongada no lo corta” (Elementos Definición III-2) [10] (p.750). Esto se le convirtió en un obstáculo que le impidió hallar tangentes, por ejemplo, por puntos de inflexión. Sierpínska se refiere a esto de la siguiente manera:

“Se sabe que la utilización, hasta el siglo XVII, de una definición para la generalización a una curva arbitraria de la definición de la tangente del círculo dada por Euclides (Elementos, Libro III, def.2) ha sobrevivido a pesar del desarrollo de los métodos de construcción de tangentes. Por ejemplo, Descartes (Juszkiewicz II, 1969, p.117) aunque haya interpretado la tangente como posición límite de la secante, no utilizó esta interpretación para proponer una definición correspondiente; el rehusó así de hablar de tangente en un punto de inflexión.” [11] (p.24)

Descartes con su método del círculo contribuyó en gran medida al desarrollo de métodos infinitesimales que propiciaron el desarrollo del cálculo infinitesimal ya que, a causa de sus resultados, el concepto de tangente como límite de una secante variable tomó gran valor. Sin embargo, él no utilizó límites ni infinitesimales, su método era puramente algebraico, basado en la igualdad de raíces, para obtener la coincidencia de puntos. Debido a esto, asegura González Urmanaja [9] (p.273), Descartes fue incapaz de aplicar su método algebraico a las curvas mecánicas, por ejemplo la cicloide, por lo que inventa el concepto de *centro instantáneo de rotación*, donde aplica la idea de velocidad instantánea para sustituir a los límites y a los infinitesimales.

Referencias

- [1] Wussing, H. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI Editores; 1998.
- [2] Descartes, R. *The Geometry*, New York: Dover; 1954. (Traducido al inglés por D. E. Smith y M. L. Latham.)
- [3] Newman, J. R. *SIGMA: El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Grijalbo, Vol. I; 1994.
- [4] Boyer B., Carl *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial; 2007.
- [5] Bell, E.T. *Historia de las matemáticas*. Ponc-64 México D.F.: Fondo de Cultura Económica; 1949.
- [6] Rabbu-Boyé, A. *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*, Bucaramanga: Ed. Universidad Industrial de Santander; 2009. (Traducido por Martín Acosta Gempeler).
- [7] González Urbaneja, Pedro M. *Los orígenes de la geometría analítica*. La Orotava, Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia; 2004.
- [8] Kline, Morris *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial, Vol I; 1994.
- [9] González Urbaneja, Pedro M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza Editorial S. A.; 1992.
- [10] Euclides. *Elementos de geometría*, en: VERA, F. *Científicos griegos*, Vol. I, Madrid: Aguilar; 1970.
- [11] Sierpinski, A. *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, en: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6(1); 1985 Madrid: Alianza Editorial; 2007.

Dirección de los autores

Sergio Alarcón Vasco — Instituto Tecnológico Metropolitano. ITM, Departamento de Ciencias Básicas, Medellín-Colombia

e-mail: sergioalarcon@itm.edu.co

Carlos Mario Suescún — Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia

e-mail: cmsuescun@matematicas.udea.edu.co