

Los operadores nucleares en L^p

Julio C. Delgado

Resumen

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida σ -finita μ . Si $(x, y) \mapsto k(x, y)$ es una función medible de $\Omega \times \Omega$ en $\mathbb{R}$ (núcleo), demostraremos que el operador A definido por $Af(x) = \int k(x, y)f(y)d\mu(y)$ es nuclear si y sólo si $k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)h_n(y)$, con $g_n \in L^p(\mu)$, $h_n \in L^q(\mu)$ ($1/p + 1/q = 1$) y $\sum_n \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$. Adicionalmente, se darán condiciones suficientes para que ciertos núcleos suaves $k(x, y)$ generen operadores nucleares en $L^p(\mu)$.

Palabras y frases claves: Operadores nucleares, ideales de Schatten.

1 Introducción

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida μ . Denotaremos por $L^p(\mu)$ el espacio de Banach de las funciones f tales que $\int |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$, $1 \leq p < \infty$. Si $p > 1$, entonces el dual de $L^p(\mu)$ es $L^q(\mu)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La dualidad entre estos espacios se obtiene por medio de la función bilineal

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) d\mu(x).$$

En realidad, $L^p(\mu)$ es un conjunto de clases de equivalencia $\dot{f} = \{g : g = f \mu - c.t.p.\}$, pero escribiremos, como es usual, f en vez de $\dot{f}$. El dual de $L^1(\mu)$ es $L^\infty(\mu)$ (el conjunto de las funciones μ -acotadas).

Sean E, F espacios de Banach y $A \in \mathcal{L}(E; F)$. Diremos que A es nuclear si existen sucesiones $(x'_n)_n$ en E' (dual topológico) de E y $(y_n)_n$ en F tales que

$$Ax = \sum_n \langle x, x'_n \rangle y_n \quad y \quad \sum_n \|x'_n\|_{E'} \|y_n\|_F < \infty.$$

El conjunto $\mathcal{K}_1(E; F)$ de los operadores nucleares de E en F es un subespacio de $\mathcal{L}(E; F)$. Con la norma usual de $\mathcal{L}(E; F)$, $\mathcal{K}_1(E; F)$ no es un subespacio cerrado. Pero con la norma

$$A \mapsto \nu(A) = \inf \left\{ \sum_n \|x'_n\|_{E'} \|y_n\|_F \right\}, \quad (1)$$

donde el inf se toma sobre el conjunto de todas las sumas del mismo tipo tales que $Ax = \sum_n \langle x, x'_n \rangle y_n$, es un espacio de Banach.

De especial importancia es el estudio de los operadores nucleares en $L^2(\mu)$. Denotaremos por $\mathcal{K}_0(L^2(\mu))$ al conjunto de los operadores compactos de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$. La clase de Schatten $\mathfrak{S}_p$ es el conjunto de los operadores compactos A tales que $\sum_n \lambda_n^p < \infty$, donde $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es, en orden decreciente, la sucesión de los valores propios de $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Para detalles ver [5]. La clase de Schatten $\mathfrak{S}_2$ coincide con la clase de los operadores compactos de la forma

$$Tf(x) = \int k(x, y) f(y) d\mu(y), \text{ donde } \int |k(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

En el contexto general de los espacios de Banach se pueden definir los *números de aproximación*

$$\alpha_n(A) = \inf \{ \|A - B\| : B \in \mathcal{L}(E; F) \text{ y } B \text{ es de rango a lo más } n - 1 \}.$$

Si $E = F = H$ (espacio de Hilbert) entonces $\alpha_n(A)$ es el n -ésimo valor propio de $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ([3; Cap. II]). La caracterización de los operadores en $\mathfrak{S}_p$, $p = 2$, por propiedades simples de los núcleos $k(x, y)$ no es fácil. Un problema más simple es establecer condiciones suficientes sobre un núcleo $k(x, y)$ para que el operador correspondiente pertenezca a una clase de Schatten $\mathfrak{S}_p$. En [4] K. Nowak analiza en $L^2(0, \infty)$ núcleos de la forma $k(x, y) = \chi_{[0, y]}(x) \frac{g(y)}{y}$ y establece condiciones necesarias y suficientes sobre g para que $A_g \in \mathfrak{S}_p$ si $1 \leq p < \infty$. Si $p = 1$ y $A_g \in \mathfrak{S}_1$, entonces $g = 0$. En [1], Birman y Solomyak establecen criterios sobre la trasformada de Fourier de $k_x(y)$ para que el correspondiente operador integral sea nuclear. A los operadores integrales que son nucleares los llamaremos *operadores integrales nucleares*. En [2] D. Edmunds y V. D. Stepanov estudian ciertos operadores de Volterra y demuestran una desigualdad tipo integral que da una condición suficiente para que el núcleo genere un operador en $\mathfrak{S}_p$ para $2 \leq p < \infty$ ([3; Teorema 2]).

En éste artículo estableceremos condiciones necesarias y suficientes sobre $k(x, y)$ del tipo $k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y)$ para que el operador correspondiente sea nuclear en el contexto de los espacios $L^p(\mu)$ y mostraremos que ciertos núcleos de clase $\mathcal{C}^\infty$ generan operadores nucleares en

$L^p[0, \alpha]$ si $p > 1$ (Teoremas 2.3 y 2.5) y en $L^1[0, \alpha]$ (Teoremas 2.6 y 2.7). Estos resultados, aunque elementales, pueden servir para aclarar la estructura de los núcleos $k(x, y)$ que generan operadores nucleares en los espacios $L^p(\mu)$.

2 Una caracterización de operadores nucleares en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$

En los siguientes enunciados consideraremos $1 \leq p < \infty$ y p, q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, exceptuando los teoremas (2.3) y (2.4) donde se toma $1 < p$.

Lema 2.1 Sean $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida finita μ , $f \in L^p(\mu)$, y $(g_n)_n, (h_n)_n$ sucesiones en $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ respectivamente tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$. Entonces

1. $\lim_n \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y)$ existe y es finito para casi todo (x, y) .
2. $k \in L^1(\mu \otimes \mu)$, donde $k(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) h_j(y)$.
3. $\lim_n \int \left(\sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y) \right) f(y) d\mu(y) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y) \right) f(y) d\mu(y)$,

para casi todo x .

Demostración. 3) Sea $k_n(x, y) = \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y) f(y)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \int \int |k_n(x, y)| d\mu(x) d\mu(y) &\leq \int \int \sum_{j=1}^n |g_j(x) h_j(y) f(y)| d\mu(x) d\mu(y) \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \int \int |g_j(x)| |h_j(y)| |f(y)| d\mu(x) d\mu(y) \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \int |g_j(x)| d\mu(x) \int |h_j(y)| |f(y)| d\mu(y) \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \|g_j\|_{L^p} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|h_j\|_{L^q} \|f\|_{L^p}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \|g_j\|_{L^p} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|h_j\|_{L^q} \|f\|_{L^p} &\leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \sum_{j=1}^n \|g_j\|_{L^p} \|h_j\|_{L^q} \\
&\leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{L^p} \|h_j\|_{L^q} \\
&< M \text{ para todo } n.
\end{aligned}$$

Luego $\|k_n\|_{L^1} < M$ para todo n . Notemos que si tomamos $s_n(x, y) = \sum_{j=1}^n |g_j(x)h_j(y)f(y)|$, entonces $(s_n)_n$ es una sucesión creciente en $L^1(\mu \otimes \mu)$ tal que $\sup_n \int \int |s_n(x, y)| d\mu(x) d\mu(y) < M$. Luego por el teorema de la convergencia monótona de Levi $s(x, y) = \lim_n s_n(x, y)$ existe, es finito para casi todo (x, y) , $s \in L^1(\mu \otimes \mu)$, y podemos introducir el límite dentro del símbolo de integración. Esto era lo que teníamos que demostrar. Para las demostraciones de (1) y (2), observemos que para $f = 1$ en esta demostración, se demuestran (1) y (2), teniendo en cuenta que $|k(x, y)| \leq s(x, y)$.

Teorema 2.2 (Caracterización de operadores nucleares en $L^p(\mu)$ para una medida finita μ). Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida finita μ . Entonces A es un operador nuclear en $L^p(\mu)$ si y sólo si existen sucesiones (g_n) en $L^p(\mu)$, (h_n) en $L^q(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$, y, para todo $f \in L^p(\mu)$,

$$Af(x) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y) \right) f(y) d\mu(y), \text{ para casi todo } x.$$

Demostración. Sea A un operador nuclear en $L^p(\mu)$. Entonces existen sucesiones $(g_n)_n$ en $L^p(\mu)$ y $(h_n)_n$ en $L^q(\mu)$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$$

y

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, h_n \rangle g_n.$$

Observemos que

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, h_n \rangle g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int h_n(y) f(y) d\mu(y) \right) g_n$$

(convergencia en $L^p(\mu)$). Luego

$$(Af)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, h_n \rangle g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int h_n(y) f(y) d\mu(y) \right) g_n(x)$$

para casi todo x . Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int h_n(y) f(y) d\mu(y) \right) g_n(x) &= \lim_n \sum_{j=1}^n \left(\int h_j(y) f(y) d\mu(y) \right) g_j(x) \\ &= \lim_n \int \left(\sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y) f(y) \right) d\mu(y). \end{aligned}$$

Por (2.1) podemos introducir el límite dentro del símbolo de integración.

Ahora, supongamos que existen sucesiones $(g_n)_n$ en $L^p(\mu)$, $(h_n)_n$ en $L^q(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$ y para todo $f \in L^1(\mu)$

$$Af(x) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y) \right) f(y) d\mu(y) \quad \mu - c.t.p.$$

Por (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y) \right) f(y) d\mu(y) &= \lim_n \int \left(\sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y) f(y) \right) d\mu(y) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^n \left(\int h_j(y) f(y) d\mu(y) \right) g_j(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int h_n(y) f(y) d\mu(y) \right) g_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, h_n \rangle g_n(x) = (Af)(x). \end{aligned}$$

Como una aplicación del teorema anterior, los siguientes resultados muestran ciertos núcleos suaves que generan operadores nucleares. En el siguiente teorema se consideran $p > 1$ y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 2.3 Sean I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $F : I \mapsto \mathbb{R}$ una función suave que admite una representación en serie de Taylor en el intervalo $[o, \alpha] \subset I$ tal que $|D^n F(0)| < M(pn + 1)^{\frac{1}{p}}(qn + 1)^{\frac{1}{q}}(n!)^s$ para alguna

constante $M > 0$, algún $s \in (0, 1)$, y para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el núcleo $k(x, y) = F(xy)$ genera un operador integral nuclear en $L^p([0, \alpha])$.

Demostración. Escribamos

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j F(0)}{j!} t^j, \text{ para todo } t \in [0, \alpha].$$

Entonces

$$k(x, y) = F(xy) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j F(0)}{j!} (xy)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j F(0)}{j!} x^j y^j,$$

para todo $(x, y) \in [0, \alpha] \times [0, \alpha]$. Tomemos $g_j(x) = \frac{D^j F(0)}{(j!)^s} x^j$, $h_j(y) = \frac{y^j}{(j!)^w}$. Donde $w = 1 - s$. Calculemos $\|g_j\|_{L^p}$ y $\|h_j\|_{L^q}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{L^p} &= \left(\int_0^\alpha \left(\frac{D^j F(0)}{(j!)^s} x^j \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{|D^j F(0)|}{(j!)^s} \left(\int_0^\alpha x^{pj} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{|D^j F(0)|}{(j!)^s} \frac{(\alpha^{pj+1})^{\frac{1}{p}}}{(pj+1)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

En forma similar

$$\|h_j\|_{L^q} = \frac{(\alpha^{qj+1})^{\frac{1}{q}}}{(qj+1)^{\frac{1}{q}} (j!)^w}.$$

Luego

$$\|g_j\|_{L^p} \|h_j\|_{L^q} = \frac{|D^j F(0)|}{(j!)^s} \frac{\alpha^{(2j+1)}}{(pj+1)^{\frac{1}{p}} (qj+1)^{\frac{1}{q}} (j!)^w} < M \frac{\alpha^{(2j+1)}}{(j!)^w}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{L^p} \|h_j\|_{L^q} < \sum_{j=1}^{\infty} M \frac{\alpha^{(2j+1)}}{(j!)^w} < \infty.$$

Entonces, por (2.2), $k(x, y) = F(xy)$ genera un operador integral nuclear en $L^p([0, \alpha])$.

La anterior proposición sugiere una generalización a núcleos suaves ya que la expresión en serie de Taylor del núcleo no difiere sustancialmente de la serie de Taylor de $F(xy)$. Como en el teorema anterior, en el siguiente teorema se considera $p > 1$ y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 2.4 *Sea $k(x, y)$ un núcleo suave que admite una representación en serie de Taylor en $[0, \alpha] \times [0, \alpha] \subset I \times I$ tal que*

$$|\partial_x^n \partial_y^m k(0, 0)| < M(pn + 1)^{\frac{1}{p}}(qn + 1)^{\frac{1}{q}} (n!)^s,$$

para alguna $M > 0$, algún $s \in (0, 1)$, y todo $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces k genera un operador integral nuclear en $L^p([0, \alpha])$.

Demostración. Como

$$k(x, y) = \sum_{m,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \partial_x^n \partial_y^m k(0, 0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \partial_x^n \partial_y^m k(0, 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \partial_x^n \partial_y^m k(0, 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^w} \frac{1}{(n!)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \partial_x^n \partial_y^m k(0, 0), \quad w = 1 - s. \end{aligned}$$

Consideremos

$$g_n(x) = \frac{x^n}{(n!)^w}, \quad x \in [0, \alpha], \quad w = 1 - s,$$

y

$$h_n(y) = \frac{1}{(n!)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \partial_x^n \partial_y^m k(0, 0), \quad y \in [0, \alpha].$$

En forma similar a la demostración de la proposición anterior tenemos que

$$\|g_n\|_{L^p} = \frac{(\alpha^{pn+1})^{\frac{1}{p}}}{(pn + 1)^{\frac{1}{p}} (n!)^w}.$$

Por otro lado, observemos que

$$|h_n(y)| \leq \frac{1}{(n!)^s} M(pn+1)^{\frac{1}{p}}(qn+1)^{\frac{1}{q}} (n!)^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \leq M(pn+1)^{\frac{1}{p}}(qn+1)^{\frac{1}{q}} e^y$$

para todo $y \in [0, \alpha]$. Luego

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\alpha |h_n(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} &\leq M(pn+1)^{\frac{1}{p}}(qn+1)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\alpha e^{qy} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{M(pn+1)^{\frac{1}{p}}(qn+1)^{\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} (e^{q\alpha} - 1)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Así que

$$\|h_n\|_{L^q} \leq \frac{M(pn+1)^{\frac{1}{p}}(qn+1)^{\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} (e^{q\alpha} - 1)^{\frac{1}{q}}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} \leq \frac{M(e^{q\alpha} - 1)^{\frac{1}{q}}}{q^{\frac{1}{q}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qn+1)^{\frac{1}{q}} (\alpha^{pn+1})^{\frac{1}{p}}}{(n!)^w} < \infty.$$

Luego, por (2.2) k genera un operador integral nuclear.

Los dos resultados anteriores son válidos para $p = 1$ y sus demostraciones son similares. Este caso $p = 1$ lo enunciamos en los siguientes teoremas (2.5) y (2.6).

Teorema 2.5 Sean I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $F : I \mapsto \mathbb{R}$ una función suave que admite una representación en serie de Taylor en el intervalo $[0, \alpha] \subset I$, tal que $|D^n F(0)| < M(n+1)(n!)^s$ para alguna constante $M > 0$, algún $s \in (0, 1)$, y para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el núcleo $k(x, y) = F(xy)$ genera un operador integral nuclear en $L^1([0, \alpha])$.

Teorema 2.6 Sea $k(x, y)$ un núcleo suave que admite una representación en serie de Taylor en $[0, \alpha] \times [0, \alpha] \subset I \times I$ tal que $|\partial_x^n \partial_y^m k(0, 0)| < M(n+1)(n!)^s$ para alguna $M > 0$, algún $s \in (0, 1)$, y todo $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces k genera un operador integral nuclear en $L^1([0, \alpha])$.

A continuación generalizaremos la caracterización (2.2) para las medidas σ -finitas. Para esto se generaliza el Lema (2.1), con el Lema (2.7).

Lema 2.7 Sean $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida σ -finita μ . Sean $f \in L^p(\mu)$, y $(g_n)_n$ en $L^p(\mu)$, $(h_n)_n$ en $L^q(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$. Entonces

1. $\lim_n \sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y)$ existe, y es finito para casi todo (x, y) .
2. $\lim_n \int \left(\sum_{j=1}^n g_j(x) h_j(y) \right) f(y) d\mu(y) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) h_n(y) \right) f(y) d\mu(y),$

para casi todo x .

Demostración. (1) Como μ es σ -finita, entonces existe una sucesión $(\Omega_k)_k$ de subconjuntos de Ω tales que $\mu(\Omega_k) < \infty$ y $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$. Consideremos el espacio de medida finita $(\Omega_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ que se obtiene al restringir Ω a Ω_k para cada k , y restringiendo las funciones g_n, h_n a Ω_k . Entonces, para cada k

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p(\mu_k)} \|h_n\|_{L^q(\mu_k)} < \infty.$$

Luego, por (2.1(1)) tenemos que $\lim_n \sum_{j=1}^n g_j(x)h_j(y)$ existe, y es finito para casi todo $(x, y) \in \Omega_k \times \Omega_k$. Por lo tanto $\lim_n \sum_{j=1}^n g_j(x)h_j(y)$ existe, y es finito para casi todo $(x, y) \in \Omega \times \Omega$.

(2) En forma similar a (1) se considera la sucesión $(\Omega_k)_k$ y se aplica (2.1(3)).

Ahora, el siguiente teorema es consecuencia del lema anterior, y su demostración es similar a (2.2).

Teorema 2.8 Sean $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida σ -finita μ . Entonces, A es un operador nuclear en $L^p(\mu)$ si y sólo si existen sucesiones $(g_n)_n$ en $L^p(\mu)$ y $(h_n)_n$ en $L^q(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L^p} \|h_n\|_{L^q} < \infty$, y A es de la forma:

$$Af(x) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)h_n(y) \right) f(y) d\mu(y).$$

Reconocimiento Este artículo es parte de la tesis de maestría *Caracterización de operadores nucleares en L^p* realizada bajo la dirección del profesor Guillermo Restrepo en el Programa de Posgrado de Matemáticas de la Universidad del Valle. El autor desea expresar su agradecimiento al profesor Restrepo por su dirección y su estímulo durante la realización de este trabajo.

Referencias

- [1] Birman, M. Sh.; Solomyak, M. Z. *Estimates of Singular Numbers of Integral Operators*. Russian Math. Surveys 32:1, 15-89, 1977.
- [2] Edmunds, D. E.; Stepanov, V. D. *On the Singular Numbers of Certain Integrals Operators*. Journal of Functional Analysis 134, 222-246, 1995.

- [3] Hogbe-Nlend, Henri.; Moscatelli, Vincenzo Bruno. *Nuclear and Conuclear Spaces*. North-Holland. Amsterdam. 1981.
- [4] Nowak, Krzysztof. *Schatten Ideal Behavior of a Generalized Hardy Operator*. Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993) 479-483.
- [5] Schatten, Robert. *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Springer-Verlag. Berlin. 1970.

Dirección del autor: Julio C. Delgado Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia cesar.delgado.valencia@cicrp.jussieu.fr.