"DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EUCLIDIANO: A TRAVÉS DEL USO DE MAPAS EN NIÑOS DE 4 A 8 AÑOS"

Para optar por el título de Psicólogas:

Silvana Cortés Arboleda

Silvia Sandoval Valencia

Directora

Yenny Otálora Sevilla

Universidad del Valle

Instituto de Psicología

Psicología

2012

"DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EUCLIDIANO: A TRAVÉS DEL USO DE MAPAS EN NIÑOS DE 4 A 8 AÑOS"



Directora Yenny Otálora Sevilla

Universidad del Valle

Instituto de Psicología

Psicología

2012

Tabla de Contenido

Introducción……..……..……...1

Justificación……...4

Revisión de la Literatura……..7

Problemática…….…...30

Objetivos del Trabajo de Grado……35

Método……..36

Diseño…….….36

Participantes……36

Tarea…….……36

Situaciones de Longitud……38

Situaciones de Ángulo……...40

Situaciones de Sentido……..42

Procedimiento…….46

Análisis de Resultados……..47

Resultados……...49

Discusión……62

Conclusiones……..73

Referencias……75

Índice de Figuras

Figura 1. Esquema espacial durante la aplicación de la tarea……..47

Figura 2. Porcentajes de Logro Euclidiano en función de la propiedad euclidiana y la edad ……..….50

Figura 3. Efecto de la edad en los desempeños para cada una de las propiedades……..……...52

Figura 4. Porcentajes de Logro Euclidiano y Topológico en función de la propiedad euclidiana y la edad……..…..53

Figura 5. Efecto de la edad en los desempeños para cada una de las propiedades…….……55

Figura 6. Promedio de acierto en situaciones de Longitud: Larga y corta en Logro Euclidiano……56

Figura 7. Promedio de acierto en situaciones de Longitud: Larga y corta en Logro Euclidiano y Topológico.……57

Figura 8. Promedio de acierto en situaciones de Ángulo: Agudo, Recto y Obtuso en Logro Euclidiano….58

Figura 9. Promedio de acierto en situaciones de Ángulo: Agudo, Recto y Obtuso en Logro Euclidiano y Topológico…….59

Figura 10. Promedio de acierto en situaciones de Sentido: Arriba-Abajo y Derecha-Izquierda en Logro Euclidiano y Topológico….60

Figura 11. Promedio de acierto en situaciones de Sentido: Arriba-Abajo y Derecha-Izquierda en Logro Euclidiano y Topológico…61

Índice de Tablas

Tabla 1. Niveles de desempeño para cada Propiedad (%)……...51

Tabla 2. Niveles de desempeño para cada Propiedad (%)……...54

“A mi gran familia que vivió conmigo todo este proceso formativo,

especialmente a mi madre y a mi padre, es para ustedes.

Y a mis hermanos Laurita y Camilo a quienes adoro”

Silvana Cortés Arboleda

Dedico cada uno de mis esfuerzos para este trabajo, a todas y cada una de las personas que me acompañaron y se preocuparon por este proceso. Principalmente a mi madre y a mi hermmana, quienes han estado conmigo siempre, entregándome lo mejor… y a Majo, por recordarme que siempre hay un motivo para sonreír.

Silvia Sandoval Valencia

Agradecimientos

Para presentar hoy este trabajo como resultado de mi formación profesional, siento la necesidad de agradecer a Dios por tan enormes bendiciones en mi vida. A mi familia que me acompañó en todo este proceso y para quienes soy un ejemplo, gracias por esto. A Carlos Bobadilla por darme la fuerza en momentos difíciles y estar siempre a mi lado. A la Universidad del Valle por brindarme la oportunidad de ser su estudiante, gozando de la alta calidad y excelentes relaciones durante 5 años de mi vida. Al grupo de investigación Matemáticas y Cognición y sus miembros por encargarse de la parte final de mi proceso, la práctica, gracias por todos los aprendizajes tanto académicos como de vida. Gracias en especial a mi compañera de tesis Silvia Sandoval con quien viví cada por menor, nos costó bastante pero lo logramos. Por supuesto gracias a la profesora Yenny Otálora por ser una guía constante (un buen polo norte).

Silvana Cortés Arboleda

Con este documento finaliza uno de tantos procesos que en la vida se inician… Gracias a todas las personas que de alguna u otra manera participaron y aportaron al desarrollo de este trabajo. A todos mis grandes amigos y a mi familia, mil gracias por creer en mí y permitirme disfrutar de su cariño y sabiduría y “por enseñarme y recordarme constantemente cuan insignificante soy yo sola, por recordarme todo el tiempo que no tengo valor alguno si no es porque las cosas que hago adquieren significado en tanto que ustedes están presentes en esas mismas cosas”. Gracias A David Quebradas por su constante e inalcanzable entrega de amor. A la Universidad del Valle y al grupo de Investigación Matemáticas y Cognición, muchas gracias por brindarme una excelente formación y proporcionarme valiosas herramientas para mi vida. Igualmente a la profesora Yenny Otálora por su compromiso y dedicación para dirigir este trabajo.

Silvia Sandoval Valencia

Introducción

De acuerdo con el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE), la geometría se define como “el estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio” y se constituye como un dominio de conocimiento que ha permitido al ser humano, desde hace más de 4.000 años, comprender y organizar el mundo (Beristain & Campos, 1997).

De acuerdo a la literatura, hasta hace algunos años, la adquisición y desarrollo del dominio de conocimiento geométrico y el establecimiento de relaciones espaciales a partir de propiedades como Longitud, Ángulo y Sentido, propias del espacio euclidiano, se encontraba estrictamente relacionado con una capacidad o pensamiento métrico (Piaget e Inhelder 1967) que hace posible la medición de dichas propiedades de manera precisa. En acuerdo con lo anterior, este pensamiento se constituía como una capacidad que se alcanza sólo hasta los 11 años, una vez finalizado el período de las operaciones concretas y establecido otro tipo de relaciones espaciales como las relaciones topológicas y las relaciones proyectivas, que desde un principio, se encuentran guiadas por la experiencia del niño con el espacio y los objetos que en él se encuentran.

Otros autores, desde una posición diferente a la Piagetiana (Dehaene, Izard, Pica & Spelke, 2006; Izard & Spelke, 2009; Liben, 1982; Shusterman, Lee & Spelke, 2008; Spelke, Lee & Izard, 2010; Uttal, 1994 – 2000) plantean el desarrollo del pensamiento geométrico apelando a una sensibilidad más temprana a las tres propiedades euclidianas, reportando la edad de 4 años como el momento desde el

cual es posible evidenciar dicha sensibilidad. Además estos y otros autores (Huttenlocker, Newcombe & Vasilyeva, 1999; Uttal 1994, 1996 y Vasilyeva & Huttenlocher, 2004) reconocen y apoyan sus estudios en el uso e interpretación de mapas como un medio para acceder a las representaciones que los niños adquieren del espacio y movilizar el conocimiento geométrico a partir del establecimiento de relaciones simbólicas. Sin embargo, los estudios que estos autores han realizado, aunque han aportado evidencia de esta sensibilidad, no han permitido establecer con precisión una trayectoria de desarrollo que especifique el momento en el que los niños representan el espacio teniendo en cuenta una propiedad determinada.

A partir de lo anterior, el interés de este trabajo de investigación está orientado a especificar cuáles son los cambios que se dan en el desarrollo de la sensibilidad a las propiedades geométricas euclidianas longitud, ángulo y sentido. En 64 niños entre los 4 y 8 años, estableciendo tres grupos de edad (4, 6 y 8 años). Para responder a esto, el presente estudio implementa la tarea diseñada por Spelke, Gilmore y McCarthy (2011) que como se presentará más adelante permite evaluar las tres propiedades de manera más específica y controlada, en relación con otras tareas que han sido aplicadas. Esto con el objetivo de establecer trayectorias de desarrollo de dicha sensibilidad y aportar al conocimiento acerca del tema. Esperando que sea el punto de partida no sólo para nuevas investigaciones, sino también para nuevas propuestas educativas que favorezcan el aprendizaje de este dominio de conocimiento en la educación formal. En relación a esto, es importante mencionar que este estudio hace parte integral de uno de los proyectos que desarrolla el grupo Matemática y Cognición de la Universidad del Valle, denominado

“Pensamiento Geométrico Infantil y Uso de Mapas como Artefactos Simbólicos para la Representación del Espacio en SRP y Muesos” financiado por Colciencias y la Universidad del Valle (contrato 333 -2011).

Justificación

De la mano con el objetivo de aportar mayor claridad acerca del desarrollo de la sensibilidad a las tres propiedades euclidianas. Se encuentra un interés también por aportar información útil que contribuya al proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de los distintos ambientes escolares en los que se transmite o moviliza el conocimiento geométrico. Esto porque, si bien, a partir de la revisión bibliográfica se ha encontrado evidencia para considerar que la capacidad de representar las propiedades geométricas euclidianas emerge entre los 3 y 4 años de edad, y se desarrolla progresivamente durante la infancia (Dehaene, Izard, Pica & Spelke, 2006; Huttenlocher, Newcombe & Vasilyeva, 1999; Izard & Spelke, 2009; Liben, 1982; Shusterman, Lee &Spelke, 2008; Spelke, Lee & Izard, 2010; Uttal, 1994 – 2000), es usual encontrar que en la mayoría de ambientes escolares, la enseñanza de la geometría, se encuentra permeada directa o indirectamente por una postura clásica en la que los niños entre los 3 y 4 años parecen no estar listos para acercarse a este conocimiento de una manera que trascienda la mera distinción de formas y figuras geométricas (MEN-ASCODAFE, 2003). Esto puede ser atribuido al hecho de que la geometría ha sido considerada generalmente, como uno de tantos dominios de conocimiento o aéreas, con principios y reglas preestablecidos, que se escapan de la comprensión por parte de los niños pequeños; principios y reglas que el sujeto debe aprender a aplicar y a los cuales se ha reducido la enseñanza de este dominio.

Así, la postura anterior deja a un lado la importante consideración de que el desarrollo del conocimiento geométrico, más allá de la aplicación de reglas y principios, implica el desarrollo de un tipo o forma de pensamiento y representación

de las relaciones que el sujeto establece a diario con el mundo que lo rodea. En esa medida, se hace necesario demostrar que los niños poseen una habilidad temprana para desenvolverse en el espacio y representarlo teniendo en cuenta información geométrica y de esta manera contribuir a un cambio en las concepciones que se tienen no solo acerca del sujeto que aprende, sino también acerca del dominio de conocimiento que se pretende movilizar y los medios por los cuales se quiere lograr dicha movilización.

En relación a este último aspecto, varios investigadores como Spelke, Lee, e Izard, (2010); Liben y Yekel (1996) y Uttal (1994) consideran que el desarrollo del pensamiento geométrico euclidiano, entendiendo por este la posibilidad de identificar en los objetos y en las formas visuales las tres propiedades euclidianas de longitud, ángulo y sentido y la posibilidad de navegar en espacios de forma orientada, parece estar influenciado por aspectos variables de la cultura, relacionados con el uso y dominio de representaciones simbólicas como los mapas, afirmando así que desde los 3 años los niños son capaces de establecer relaciones simbólicas básicas entre un modelo y su referente.

Por esto se considera que el desarrollo de este conocimiento geométrico requiere la interacción por parte de los niños con herramientas simbólicas culturales (como maquetas, modelos y mapas) que les proporcionen nuevas formas de representar el espacio; de manera que los niños empiecen a coordinar el conocimiento de cada una de las tres propiedades para desempeñarse en los entornos navegables y en las actividades con formas visuales (objetos).

De esta manera, y a través de su experiencia con la rotación mental, los niños pueden llegar a tener un buen manejo de este dominio de conocimiento, llegando a la comprensión integrada de las propiedades euclidianas fundamentales, en la medida en que intentan establecer la correspondencia entre la representación simbólica y el espacio real.

Por otro lado, son pocas las investigaciones que hasta ahora se han realizado acerca del desarrollo del conocimiento geométrico en Colombia, de manera que el presente trabajo pretende contribuir al desarrollo de esta línea de investigación aportando información de manera sistematizada sobre los logros y comprensiones de los niños entre 4 y 8 años de edad en la utilización de mapas, considerando el aporte de estos artefactos simbólicos, útiles para comunicar, representar y evocar información del espacio y las relaciones geométricas en él entabladas.

Revisión de la Literatura

En el marco de la Psicología Cognitiva el razonamiento espacial es una temática relevante dada su utilidad para que el ser humano logre desarrollarse en varios aspectos de su vida cotidiana, por ejemplo, en actividades relacionadas con la ubicación propia, la ubicación de lugares, la identificación de entidades, el desplazamiento o la navegación, la organización y búsqueda de objetos o espacios, entre otras.

Los seres vivos que se desplazan en el espacio como animales y seres humanos, en su actividad cotidiana navegan los espacios circundantes como una acción esencial e intrínseca de sus procesos vitales: alimentación, interacción, sueño-vigilia, resguardo. Es por esto que tales actividades no pueden ser determinadas por procesos de azar, sino que se deben guiar u orientar a partir de características significativas percibidas en el espacio mismo. Cheng y Gallistel en 1984 (citado por Spelke, Lee & Izard, 2010) prueban en un experimento como los animales se orientan de acuerdo a la forma de la habitación que constituía el ambiente, es decir que la geometría de la habitación era una característica a la que los animales eran sensibles y tenían en cuenta a la hora de desenvolverse en dicho espacio.

Para guiarse en el espacio, los seres humanos se valen de un cuerpo de conocimiento que se ha reunido bajo el nombre de Geometría; este conocimiento permite organizar el espacio en el que las personas se desenvuelven, dando lugar a acciones como: categorizar, identificar, diferenciar, guiar y controlar los objetos, sus

ubicaciones así como también las distintas relaciones que se establecen entre ellos. Dentro de este campo, es posible distinguir la geometría topológica, la geometría proyectiva y la geometría euclidiana (Grize, 1971).

El interés en este caso, se encuentra orientado a los aspectos concernientes a la geometría euclidiana, entendiendo ésta como una rama de la geometría a partir de la cual, se estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. En este sentido, se constituye como un sistema de conocimiento abstracto a partir del cual, el ser humano es capaz de representar el espacio de acuerdo a las propiedades que lo caracterizan. Dichas propiedades corresponden principalmente a las propiedades de longitud, ángulo y sentido. De manera que son estas propiedades las que determinan las diferentes relaciones entre los objetos independientemente del punto de vista del sujeto. En esta medida, las representaciones que el ser humano construya del espacio, teniendo en cuenta las tres propiedades que lo caracterizan, se constituyen en representaciones aloncéntricas, que como ya se mencionó, consisten en representaciones que privilegian las relaciones entre los distintos objetos de un espacio determinado sin tener en cuenta la posición del sujeto respecto a estos.

Teniendo en cuenta lo anterior, Varias investigaciones sobre desarrollo cognitivo han mostrado que los seres humanos desde edades muy tempranas tienen la capacidad de extraer y codificar información de distancia, ángulo ó sentido, bien sea a partir de objetos, formas visuales o de la estructura del espacio (Spelke, Gilmore & MacCarthy, 2011). Como refieren algunos autores (Huttenlocher, Newcombe & Learmonth, 1999) los niños desde los 5 meses de edad pueden codificar relaciones de longitud, reportando mayor tiempo de mirada al ver cuando

recuperan un objeto de una caja de arena rectangular, desde una ubicación distinta a la que previamente lo habían ocultado. Se atribuyó, entonces, la sorpresa a la novedad de la ubicación detectada únicamente por la diferencia en las longitudes de los dos lugares en mención.

Respecto a la codificación de las relaciones de ángulo, estas se han encontrado en niños recién nacidos (M= 3 días y 1 hora), quienes luego de ser habituados a una forma de ángulo aguda u obtusa mantienen la mirada fija sobre un estímulo con un ángulo diferente (Slater A., Mattock A., Brown E., Bremner J. G., 1991). Sandber, E.H. y Huttenlocher, J. (1994) encontraron también que a los 5 años (Rango de 4.6 a 5.6 años) la codificación de esta propiedad es independiente de la información de distancia radial, dado que su experimento exigía la ubicación de un punto en un espacio circular.

Sobre la propiedad de sentido, se afirma que desde los 4 años los niños logran identificar la imagen presentada inicialmente de forma aislada en un momento posterior y desde una matriz con 8 formas en espejo de dicha imagen presentando evidencia de la codificación de esta información (Gregory, Landau & McCloskey, 2011; Wohlwill & Wiener, 1964).

La evidencia reportada anteriormente, ha permitido a otros autores establecer que las relaciones que el sujeto establece para reconocer y organizar un espacio determinado (3D) son susceptibles de ser establecidas para el reconocimiento y organización de otros espacios diferentes (3D y 2D). De acuerdo a esto, se encontrará más adelante, que muchas de las investigaciones centradas en el

desarrollo del pensamiento geométrico euclidiano incluida la presente investigación, han privilegiado el uso de herramientas simbólicas como los mapas, que sirven para representar simbólicamente y a escala cualquier espacio del mundo y sobre los cuales el sujeto también es capaz de organizar el espacio teniendo en cuenta las tres propiedades geométricas euclidianas.

En la medida que el mapa constituya una representación a escala del espacio, se considera como una herramienta que influye considerablemente en el desarrollo de representaciones alocéntricas y en la organización del espacio por parte del sujeto, puesto que permite visualizar el espacio de manera general, plasmando todas las posibles relaciones que se puedan establecer entre los objetos que lo constituyen, exigiéndole al sujeto poner en juego el reconocimientos de las diferentes propiedades (longitud, ángulo y sentido) independientemente de su propia posición. No obstante, lo anterior no excluye la posibilidad de que el uso de mapas movilice igualmente representaciones egocéntricas, pues además de constituir una representación del espacio, también se constituye como una herramienta a través de la cual el sujeto puede orientarse en el mismo y ubicarse en relación a los objetos que lo rodean y se encuentran representados en el mapa.

Así, los mapas como representaciones simbólicas del espacio, influyen de manera considerable en el desarrollo del conocimiento acerca del espacio euclidiano como lo plantea castro:

> Las representaciones de carácter Euclidiano, requieren del conocimiento y manejo de sistemas de representación formales; es decir, de sistemas convencionales de

> representación, que incluyen además de la aceptación de conceptos primitivos como –punto, recta, plano, figura geométrica -…, el uso de instrumentos cognoscitivos de un alto grado de abstracción – lenguaje, símbolos, relaciones, clasificaciones.- (Castro, 2004)

En esta vía, los trabajos de DeLoache sobre la emergencia de la capacidad simbólica han sido trascendentales. La autora afirma que esta es un logro del ser humano y es una de las capacidades responsable del alto desarrollo que ha alcanzado la especie humana en comparación a otras; los niños nacen sin ser capaces de actuar y entender la función simbólica, pero rápidamente la desarrollan al igual que muchas otras habilidades. (DeLoache, 2004). Según la autora, los niños pequeños logran constituir esta función con base a otras dos capacidades primarias como son: la falta de restricción para aceptar objetos simbólicos y la capacidad para comprender las intenciones de los demás. Cuando los niños entienden la relación entre el objeto simbólico y su referente, es cuando empiezan a entender la información que le comunican los diferentes sistemas simbólicos propios de las culturas (Ibídem).

Desde 1987 la autora pretendía caracterizar el origen y el desarrollo de la comprensión y uso de los símbolos como herramientas que proporcionan información sobre la realidad (DeLoache, 1995). Así logró discernir y comprobar una edad determinante para la emergencia de la función simbólica, a partir de las grandes diferencias que encontró en el desempeño de los niños de dos años y medio (M= 31 meses) y los niños de tres años (M= 38 meses) frente a una tarea de ubicación de objeto oculto guiada por un modelo (Ibídem).

De acuerdo a los resultados de esta investigación, los niños menores (2 años y medio) cometieron muchos errores, de forma que en su comportamiento no se apreció huella de un insight representacional o del establecimiento de una relación entre el espacio real y el modelo o símbolo que observaron. Mientras que el desempeño de los niños de tres años fue considerablemente mejor, al lograr encontrar el objeto escondido a partir de las relaciones establecidas a partir del modelo. Así, la autora afirma que desde los 3 años de edad los niños empiezan a usar artefactos culturales como herramientas simbólicas que les comunican, en este caso, información sobre el espacio real. A partir de estos resultados y conclusiones se asume esta edad como punto de partida para la investigación subsiguiente relacionada con el uso e interpretación de símbolos.

La estructura de la tarea utilizada por DeLoache, implica cognitivamente la explicitación de: las relaciones entre el espacio del mapa y el espacio real, la correspondencia entre cada uno de los objetos en los dos espacios, y la no importancia de las diferencias de tamaño. Esta explicitación recibió el nombre de instrucción estándar, extensa y explícita, de forma que se le ayudaba a los niños pequeños indicándoles la necesidad de crear y usar representaciones de la relación modelo-realidad para alcanzar el objetivo de la tarea. La autora también precisa que estas instrucciones son necesarias en edades menores para el éxito de los niños, pero luego, a los 4 años, no son tan determinantes (DeLoache 1995). El desempeño a partir de esta instrucción facilita la representación dual del símbolo (como objeto en sí y cómo referente de otro), el mapping (correspondencia entre cada elemento representado simbólicamente en el mapa y su correlato en el espacio físico) y de esa

manera permite que el niño tenga un insight representacional, que incluye una representación general tanto de la ubicación del objeto escondido en el modelo, pero también las relaciones entre los demás elementos de la estructura representada (Representación Alocéntrica).

Así, se considera que la información mediada simbólicamente, influencia el desarrollo cognitivo en general (Uttal, 2007), puesto que los símbolos son considerados como herramientas para el pensamiento, y en este caso como una vía para el desarrollo del conocimiento del espacio a gran escala. El uso de artefactos simbólicos como los mapas, permite apreciar no solo la comprensión del artefacto mismo, sino también el estado del conocimiento espacial geométrico que los niños poseen y pueden desarrollar. Es por esto que desde hace algunos años la lectura e interpretación de mapas se ha convertido en la vía para investigar sobre el conocimiento geométrico, entendido este como una forma de comprender el espacio. De acuerdo a Uttal (2007); el espacio a gran escala no puede ser aprehendido directamente y captar, de esta manera, toda la información que en él se encuentra. Dado que los mapas constituyen representaciones a escala de dos dimensiones (2D) de un espacio determinado del mundo (3D), estos brindan la posibilidad de acceder a una imagen de ese espacio en la que se integran múltiples ubicaciones, que a través de la experiencia directa solo sería posible experimentar por separado. De esta manera, facilitan una percepción del espacio de forma completa, no parcial como sucede en la navegación directa. Además, el uso de mapas significa una herramienta para el pensamiento, en la medida que le confiere al sujeto una forma de representar el espacio, incluso aquellos de los cuales solo tiene conocimiento a través de la

navegación, es decir, que la interacción con este tipo de herramientas, le brinda elementos al sujeto para reconocer que el espacio que se encuentra transitando, puede ser visto u organizado desde una perspectiva diferente y para esto tiene que poner en juego distintos tipos de información (topológica y euclidiana, por ejemplo).

Es por todo esto que el uso de esta herramienta y la familiarización con ella, ayuda a los niños a hacer explícito el conocimiento espacial que poseen desde una edad temprana a la vez que influencia el desarrollo de la cognición espacial, siendo un referente de representación abstracta a la hora de enfrentarse a nuevos espacios (Uttal, 2000; Liben & Yekel, 1996).

Antes de presentar lo que hasta el momento se sabe acerca de la habilidad de los niños para comprender el espacio, y, específicamente a través del uso de mapas, es necesario presentar la postura clásica Piagetiana sobre el desarrollo del conocimiento espacial. De esta manera es posible contrastar con la línea de investigación quela contraría, al brindar evidencia de la emergencia temprana del conocimiento geométrico Euclidiano.

Piaget en colaboración con Inhelder son unos de los principales autores que en sus investigaciones se han preocupado por el estudio del desarrollo de la noción del espacio en los niños, aportando valiosa información al respecto. De acuerdo a estos autores, la noción de espacio euclidiano se construye una vez el sujeto ha establecido otro tipo de relaciones como las Topológicas y las relaciones Proyectivas. (Piaget e Inhelder, 1967).

Se tiene entonces que en un nivel inicial, que va desde el nacimiento hasta el final del estadio preoperatorio, aproximadamente los 6 o 7 años de edad, la noción del espacio que el niño establece está en función a las relaciones de carácter topológico. En el comienzo de este nivel, la noción de espacio del niño corresponde a un espacio perceptual, determinado por las posibilidades que le brinda su capacidad motriz (Piaget e Inhelder, 1967). Es por lo anterior que se considera que los niños en estas edades aprecian solamente el carácter concreto del espacio (Ness & Farenga, 2007; Castro, 2004). De acuerdo con Piaget e Inhelder el niño pequeño procura organizar el mundo y esto lo logra a partir del establecimiento de relaciones que han sido consideradas primitivas. Dentro de estas, se encuentran las relaciones de *proximidad* y *separación* a través de las cuales los niños ponen en relación los objetos de un espacio determinado y establecen la totalidad de un estimulo, teniendo en cuenta que tan lejos o cerca se encuentra un objeto del otro, sin que esto implique estrictamente una consideración en términos de longitudes. Por otro lado, se encuentran las relaciones de *orden* a partir de las cuales los elementos se distribuyen, uno tras otro (sucesión espacial), sean próximos o separados. Las percepciones siempre se dan en un orden, dentro del espacio y el tiempo, se encuentran también las relaciones de *cierre* y *continuidad* a partir de las cuales el sujeto es capaz de reconocer el cerramiento de un objeto en relación a la ubicación de otros objetos en distintas dimensiones y establecer la continuidad en la medida que es capaz de realizar seriaciones de objetos, reconociendo que esto implica la sucesión de determinadas características que sean susceptibles de ser diferenciadas, pero hagan parte de una sola denominación (Piaget e Inhelder, 1967).

Luego tiene lugar una segunda noción de espacio, que inicia en la fase operatoria, a partir de los 7 u 8 años y corresponde al espacio proyectivo. En este momento el niño comienza a operar mentalmente coordinando la información topológica (propiedades antes mencionadas) para dar lugar a la percepción y representación de los objetos desde múltiples puntos de vista siguiendo las reglas de la geometría proyectiva, como la *perspectiva lineal* y el *tamaño relativo* (Piaget e Inhelder, 1967). Esta movilidad en la percepción de los objetos y en esa medida las persistentes transformaciones de los objetos dan lugar a la constancia de la forma y el tamaño, lo cual permite al niño reconocer un objeto como el mismo a pesar que se lo presenten a escala pequeña, además que le permite comprender por qué de los cambios de tamaño en las representaciones.

De acuerdo con los autores, la noción de espacio Euclidiano se desarrolla simultáneamente con la noción de espacio proyectivo y se logra cercano a los 11 o 12 años, es decir, al terminar el período de operaciones concretas. Esta noción consiste en la puesta en relación o coordinación de distintos objetos entre sí a partir de un sistema de coordenadas (izquierda – derecha; arriba – abajo y delante – atrás), lo que permite percibir la movilidad de los objetos y representar trayectorias, conservando las propiedades métricas de longitud, ángulo y sentido (Castro, 2004). Se puede decir entonces, que en esta etapa, el niño ha de comprender que la variación de ángulo y longitud en el espacio proyectivo obedece a un cambio de perspectiva para percibir los objetos, pero que estas propiedades geométricas en realidad no varían, en tanto que caracterizan a los objetos en un espacio dado así estos sean susceptibles de movimientos.

> Such a coordination of objects naturally assumes the conservation of distance, together with the evolution of the notion of 'displacement' or congruent transformation of spatial figures, culminating in the construction of systems of reference, or coordinates (Piaget e Inhelder, p.375).

De acuerdo a todo lo anterior, el espacio euclidiano se conforma entonces a partir de la transformación de los conceptos topológicos que dan lugar al establecimiento de relaciones espaciales proyectivas y euclidianas. En definitiva, la posición Piagetiana sugiere que las representaciones que los niños tienen del espacio a edad temprana, son basadas exclusivamente en relaciones topológicas [y no razonan con] información que él considera métrica tal como ángulos y distancia (Uttal, 2000).

Sin embargo, recientemente distintos autores han dirigido sus estudios hacia una postura que contraría esta idea Piagetiana, entre ellos las más representativos son Dehaene et al., (2006); Huttenlocher et al., (1999); Izard y Spelke (2009); Liben, Moore y Golbeck (1982); Spelke et al., (2010); Spelke et al., (2011); Shusterman et al., (2008); Uttal, (1994; 1996; 2000) y Vasilyeva y Huttenlocher (2004). Estos autores a través de sus investigaciones, proporcionan información valiosa que permite afirmar la emergencia de una sensibilidad a las relaciones euclidianas desde muy temprana edad (3 años) y la existencia de una habilidad de los preescolares para establecer este tipo de relaciones haciendo uso de representaciones simbólicas como los mapas. Los autores afirman, a su vez, que estas relaciones se harán más conscientes y por lo tanto mucho más elaboradas en el transcurso del desarrollo, por medio de la educación brindada culturalmente (Izard et al., (2009); Uttal et al., (1994).

Para presentar esta posición, se retomarán dos vías que logran identificarse de acuerdo a la revisión. La primera vía estudia el desarrollo para escalar distancias en espacios de diferente tamaño (scaling), su origen, sus límites y mecanismos. La segunda vía estudia el sistema de conocimiento de la geometría euclidiana y la construcción de representaciones alocéntricas.

En la primera vía Huttenlocher, Newcombe y Vasilyeva (1999) desarrollaron una investigación sobre el origen de la habilidad para adquirir información de distancia en el uso de mapas simples y la capacidad para relacionarla con los espacios reales, habilidad conocida como *scaling*. En dos experimentos los autores ponen a prueba niños de 3 y 4 años en una tarea de búsqueda de un disco en una caja de arena. La búsqueda es guiada por las representaciones en un mapa, que ilustran la caja de arena como un rectángulo y el disco con un punto. Los resultados demuestran que estos niños interpretan la información brindada en los mapas simples y de manera exitosa encuentran el disco.

Estos autores afirman que para usar y comprender un mapa es necesario entender la correspondencia de este con el mundo y la correspondencia elemento a elemento que en él se presenta. Es decir que la comprensión de mapas requiere de un proceso de scaling o de transformación de la pequeña escala del mapa, la cual representa una distancia mayor en el mundo real.

Los resultados del experimento 1 demuestran que los niños de 3 y 4 años de edad están capacitados para usar mapas exitosamente, sin embargo, es posible considerar que el desempeño favorable en esa tarea ocurrió por una identificación de

4 cuadrantes distintos y no por una codificación de la distancia. Es por esto, que se llevó a cabo el experimento 2, incluyendo 7 ubicaciones distintas en el espacio y con una distancia menor entre ellas, lo que requeriría mayor precisión. Así, los desempeños en el Experimento 2 con un promedio de error menor, confirman los resultados (para el grupo de 4 años) del primer experimento y la capacidad de usar mapas simples a la edad de 4 años para relacionar el mapa y su correspondencia con el espacio real. Esa comprensión de correspondencias es lo que se denomina scaling, así que los niños desde los 3 años evidencian el desarrollo de una capacidad para llevar a cabo este proceso logrando una mayor estabilidad de la misma a los 4 años. Esto contradice la postura de Piaget e Inhelder (1948/1967 en Huttenlocher, J., Newcombe, N. & Vasilyeva (1999)) que afirma que la distancia es codificada por los niños a los 5 años.

Siendo que el scaling se basa en la codificación de la distancia (Huttenlocher et al., 1999), no puede ser que este sea un logro tardío como reporta alguna literatura, pues se ha demostrado que niños pequeños codifican distancia (Bushnell, McKenzie, Lawrence & Connell, 1995; Huttenlocher, Newcombe, & Sandberg, 1994; Newcombe, Huttenlocher, & Learmonth, 1999 en Huttenlocher, J., Newcombe, N. & Vasilyeva (1999)). Esta afirmación puede deberse a la exigencia de las tareas usadas en la investigación previa sobre el scaling, las cuales además de exigir esta capacidad requerían memoria o correspondencia entre múltiples objetos.

Como ejemplo se puede citar el estudio de Uttal en 1996, en el que se les pide a niños de 4 y 5 años memorizar unas configuraciones del espacio representadas cada una en un mapa y posteriormente reconstruirlas en un espacio de mayor

tamaño (una habitación). Las configuraciones variaron en relación a características específicas como tamaño (grande-pequeña) y simetría (simétrica- asimétrica).

Llevar a cabo la reconstrucción de las configuraciones desde un espacio de pequeña escala a un espacio de mayor tamaño exige el proceso de *scaling* y requiere que el niño comprenda que las relaciones espaciales representadas en el mapa corresponden a las relaciones que deberían existir en la habitación cuando la configuración es reconstruida (Uttal, 1996). El autor concluyó que los niños aun cuando fallaron en el scaling, fueron sensibles a las relaciones angulares y a las distancias, esto es, sus configuraciones mantuvieron el patrón de la configuración (ubicación relativa de los elementos de la estructura), pero las diferencias de tamaño, no fueron ajustadas en sus reconstrucciones, por lo que el desempeño mejoró considerablemente cuando la situación no requería el scaling (Uttal et al., 1996). Sin embargo, como se mencionaba antes, esta conclusión puede no ser válida al evaluar la alta carga de memoria que exige el ejercicio y la cual no es controlada.

Para continuar la investigación sobre el scaling, algunos años después, Vasilyeva & Huttenlocher (2004) llevaron a cabo una investigación sobre el desarrollo temprano de esta habilidad a partir de dos experimentos: el primero con una tarea de uso de mapa (Experimento 1, requerimiento de scaling) y el segundo sin mapa. Esta situación puso a prueba si la habilidad temprana de scaling que se encontró antes en situaciones de una dimensión (Huttenlocher, Newcombee & Vasilyeva, 1999) y es implementada a niños de 4 y 5 años en la resolución de tareas de ubicación en las que deben tener en cuenta dos dimensiones. Además está el interés de saber si el requerimiento de scaling dificulta la resolución de la tarea y el logro de alguna

comprensión de los mecanismos cognitivos subyacentes a esta habilidad. Para conseguir lo anterior, diseñaron una situación experimental en la que propusieron espacios referentes diferentes, para saber si los niños codifican la distancia de manera absoluta o relativa.

Los resultados demuestran que los niños de 5 años son capaces de desempeñarse bien en la tarea de scaling cuando toman como referencia dos dimensiones, mientras los de 4 años no lo hacen de forma sistemática. Resultó evidente que el tamaño del espacio referente es muy significativo para incrementar el promedio de respuestas de error, ya que en ambos experimentos el error incrementó con el aumento de tamaño, pero en el Experimento 2 no ocurrió de forma proporcional. Para lo anterior, las autoras sugieren que la estrategia cognitiva que usan los niños es un tipo de razonamiento mental basado en la percepción, el cual les permite transformar (es decir, estirar o encoger) las configuraciones preservando relaciones métricas (Huttenlocher et al., (2004). Este proceso es susceptible de mayor error en espacios más grandes de acuerdo a factores psicofísicos.

El uso de la variable edad en el Experimento 1 y teniendo en cuenta experimentos previos, les permite comprobar que: a los 3 años los niños están desarrollando la habilidad de scaling o transformaciones de distancia en situaciones de 1 dimensión, mientras que a los 4 años las realizan exitosamente, para situaciones de 2 dimensiones la habilidad de scaling está aún en desarrollo a los 4 años y a los 5 años ya es lograda con satisfacción. Sin embargo a pesar de este logro, es claro, que no se está hablando aún de la capacidad de *proporción matemática* para resolver problemas.

Otros autores como MacDonald, S., Spetch, M., Kelly, D. y Cheng, K. (2004), realizaron un estudio en el que evidencian errores en el scaling. En este se presentan dos matrices de puntos de referencia, la primera representa la distribución de treinta tazas, una de estas rodeada directamente por cuatro puntos de referencia que la constituyen como el objetivo en el que se ubica un gusano que deberá ser encontrado. Esta matriz debe ser inicialmente aprendida para posteriormente enfrentarse a la segunda matriz, en la que los puntos de referencia se encuentran expandidos, abarcando cada una de las esquinas y quedando ubicadas en la mitad varias tazas, en una de las cuales (centro) está el objetivo.

Los autores concluyeron que los niños entre 5 y 6 años al enfrentarse a la segunda matriz, buscan principalmente en sitios que eran directamente adyacentes a los puntos de referencia tal y como era presentado en la primera matriz, de manera que tuvieron dificultad en establecer la correspondencia entre la primera matriz y la segunda, en la que se amplía la distancia de los puntos de referencia, es decir, requiere de un proceso de *scaling* que los niños no logran realizar.

Establecer una correspondencia sistemática entre la escala del mapa y la escala del espacio real, tal como lo plantean Uttal (2000), Huttenlocher et al., (1999) y Shusterman et al., (2008), requiere comprender que el mapa es un símbolo del espacio, lo cual constituye el principal desafío para los niños.

En cuanto a la segunda vía de estudio, relacionada con la evolución del conocimiento geométrico Euclidiano, y la construcción de representaciones alocéntricas, autores como Spelke, Izard y Lee (2010), han planteado un modelo de

desarrollo sobre la naturaleza de este conocimiento. Según este modelo la geometría natural se fundamenta en dos sistemas cognitivos básicos, de desarrollo muy temprano. Cada sistema se encuentra limitado para atender sólo dos de las tres propiedades euclidianas. De manera que el primer sistema de pequeña escala especializa al ser humano en percibir información de longitud y ángulo, siendo útil para distinguir formas y figuras de objetos y dejando a un lado la propiedad de sentido, mientras que el segundo sistema de gran escala, sirve para navegar en superficies estructuradas, por lo que le permite percibir información de longitud y sentido hábilmente, restringiendo la atención de la propiedad de ángulo.

La combinación de estos dos sistemas principales y distintos implicaría mayor generalidad, pues los dos sistemas integrados, capacitarían al ser humano para percibir todas las propiedades fundamentales de la geometría euclidiana, permitiendo una descripción común de objetos de pequeña escala y de diseños espaciales a gran escala.

En el 2006 Dehaene, Izard, Pica y Spelke evidenciaron la universalidad del sistema de sensibilidad o intuición geométrica que según su hipótesis sería independiente del lenguaje, la cultura o la escolarización. Para esto, aplicaron a una población indígena amazónica y a una americana, ambas subdivididas en grupos de niños y adultos, una tarea de identificación de la desviación en formas visuales según una propiedad geométrica, entre ellas las euclidianas, y una tarea de búsqueda guiada por un mapa.

La primera tarea se compone de 43 agrupaciones de 6 imágenes distintas, cada agrupación tiene 5 imágenes que cumplen con una propiedad geométrica y una imagen que no, de forma que los niños y adultos deben identificar la imagen diferente en todos los casos. El desempeño daría cuenta de su sensibilidad para reconocer esa propiedad geométrica. Por otra parte, la tarea de búsqueda guiada por un mapa, ofrece al participante una hoja con la representación de un mapa en el que hay tres cajas (vistas desde arriba y en dos dimensiones), en una de las cuales se encuentra un objeto oculto que es señalado por una estrella. Las cajas se organizan en forma de triángulo isósceles o triángulo rectángulo y la orientación del mapa varía en tres condiciones: egocéntrica (igual orientación del mapa y el espacio real en relación al participante), alocéntrica (posición del participante distinta frente al mapa y al espacio real) y rotada 90º.

Los resultados fueron favorables al confirmar que los indígenas tanto adultos como niños usaron espontáneamente conceptos geométricos básicos en las dos tareas. Siendo los resultados del grupo indígena similares a los obtenidos por los niños del grupo cultural americano, es decir, al no encontrarse mayores diferencias entre los desempeños de una comunidad que no accede a la formación escolar, que no tiene en su lengua vocabulario para designar aspectos geométricos, que nunca ha usado mapas y que no está relacionada con las medidas, respecto a los desempeños de un grupo que si cumple con todas estas variables, se valida la idea inicial de los autores sobre la universalidad de la sensibilidad geométrica referida a un conocimiento básico. Este conocimiento permite a los indígenas identificar figuras extrañas respecto a una propiedad elemental o relacionar la distancia y ángulos

propuestos en un mapa con las condiciones del espacio o ambiente real, en otras palabras, cumplir con los propósitos de las dos tareas.

Sin embargo, como se ha dicho previamente los resultados de los dos grupos de edad indígena fueron similares a los de los niños americanos, mientras que el desempeño de los adultos americanos fue considerablemente mejor. Entonces los autores sostienen el carácter innato de un conocimiento geométrico básico, pero a la par reconocen la relevancia de la educación y de la culturalización con artefactos sociales para propiciar el desarrollo de ese conocimiento inicial.

No obstante, esta propuesta teórica aún no logra explicar el proceso de integración o combinación de los dos sistemas básicos del conocimiento geométrico, que por el momento sólo describe. Aunque de alguna manera esbozan que a partir de la experiencia los niños van aprendiendo a percibir las formas visuales con la propiedad de sentido, propia del sistema de navegación y a la inversa, los espacios navegables con la propiedad de ángulo, no hay una clara descripción de este proceso de aprendizaje, construcción o socialización, y resulta evidente que este es un aspecto primordial para concluir el modelo.

La réplica de estas tareas en otras poblaciones culturales, en otros grupos de edad y con mayor control de las propiedades geométricas estudiadas, permitió sistematizar resultados e identificar un patrón de desarrollo específico y con ritmos distintos para cada propiedad geométrica, lo cual usaron los autores para sustentar su modelo de la existencia de dos sistemas iniciales y diferenciados (Spelke e Izard,

2009; Shusterman et al., 2008). Sus aportes específicos con respecto a la evolución de las propiedades son:

Longitud

De acuerdo a los resultados con una tarea de identificación de formas visuales, existe una sensibilidad para percibir longitud en representaciones alocéntricas desde los 4 años de edad. Sin embargo, esta sensibilidad madura y se estabiliza cercano a la edad de 8 años. La sensibilidad para la longitud, examinada en la tarea de colocación de un juguete guiada por un mapa, en el que tres elementos estructurales estaban organizados en una configuración de línea recta (Shusterman, Lee & Spelke, 2008), ratifican que los niños (M= 4,2 años) identifican relaciones de distancia, siendo exitosos en su desempeño (idem).

Ángulo

Respecto a la propiedad de ángulo, Spelke e Izard (2009) afirman que el conocimiento de esta tiene lugar de forma sistemática desde los 10 años de edad, sin embargo, desde los 4 años los niños pueden percibir en formas visuales las relaciones geométricas angulares. Además que relacionan la información de distancia y ángulo percibida en un mapa de 2D, cuyos elementos estaban organizados en una configuración de triángulo rectángulo, para dar respuesta a la tarea de ubicar un juguete en el espacio real. Aunque por limitaciones de la tarea, no es muy claro si los niños perciben longitud o ángulos o las dos propiedades de manera conjunta (Shusterman, Lee &Spelke, 2008).

Sentido

Aunque en todas las edades la identificación de esta propiedad resulta difícil, es luego de la adolescencia y entrada la adultez que los seres humanos inician una identificación de acuerdo a esta relación geométrica, de una imagen que no está acorde en un grupo de seis figuras (Spelke e Izard, 2009). En tareas de interpretación de mapas Shusterman, Lee y Spelke (2008) demuestran que los niños de 4 años no usan la información de sentido expresado en su inhabilidad para identificar el lugar correcto en el espacio real con elementos en una configuración de triángulo isósceles, cuya elección debía basarse por la pista de sentido obtenida en el mapa.

Más adelante, en un estudio realizado por Spelke, Gilmore y McCarty (2011), los autores llevan a cabo el diseño y aplicación de una nueva tarea, mejorando aspectos que habían identificado como no controlados en las dos investigaciones previamente reportadas e intentan brindar mayor claridad respecto a la información geométrica a la que los niños son sensibles y pueden extraer de un mapa. En esta tarea se utilizan mapas simples a los que denominan mapas puramente geométricos. Estos permiten, por primera vez, la evaluación del uso de cada una de las tres propiedades de la geometría euclidiana de una manera separada y detallada en la medida que este tipo de mapas privilegia exclusivamente el uso de esta información geométrica y deja por fuera información no geométrica por la que los niños pueden llegar a guiar su comportamiento espacial, sin permitir vislumbrar el tipo de representaciones que construyen en relación a la geometría específicamente.

Esta tarea fue aplicada a niños de 5 y 6 años de edad. Los mapas corresponden a estructuras en “L” que difieren en relación al tipo de propiedad a evaluar, así: En las situaciones para evaluar longitud se usaron comparaciones entre una estructura cuyos dos lados tienen la misma medida y otra estructura en la que la longitud de uno de los lados era diferente. En las situaciones para evaluar ángulo se comparó un ángulo de 90° con un ángulo agudo y en otras situaciones un ángulo de 90° con un ángulo obtuso; los resultados de las dos comparaciones fueron similares. En las situaciones de sentido se implementaron dos tipos una con la distinción de uno de los lados de la estructura por la longitud y otra con la distinción de uno de sus lados por el color, esto como medida para que las dos estructuras a contrastar variaran únicamente en esta propiedad de forma que si los niños la resolvían con éxito no quedara duda que había sido por su comprensión de las orientación de la figura en el mapa y la identificación de esta en el espacio real. En esta ocasión los resultados de estas dos formas en la tarea de sentido también fueron similares.

Las respuestas de los niños se guiaron por las pistas geométricamente importantes en las situaciones de ángulo, seguido de las de distancia, mientras que en las situaciones de sentido no se encontró un desempeño consistente.

Es preciso indicar que todos los estudios descritos anteriormente y en general todos los estudios que soportan esta investigación parten de la comprensión de representaciones simbólicas por parte de los niños. Esto dado que la mayoría de los autores consideran importante resaltar el alto valor del aprendizaje y los procesos de culturalización en la construcción y mejoramiento del conocimiento geométrico euclidiano, como sería el aprendizaje de uso de un mapa. Porque aunque diferentes

autores han defendido la existencia de este conocimiento o por lo menos de un conocimiento parcial que sería básico a edades tempranas, no niegan el efecto potencializador que cumple la educación y la cultura, pues el desempeño de los adultos es siempre considerablemente mejor que el de los niños, destacando el carácter instruido de este conocimiento. En el mismo sentido, Spelke, Lee e Izard (2010) afirmaron que la construcción del sistema general geométrico parece estar influenciado por aspectos variables de la cultura, relacionados con el uso de representaciones simbólicas y su dominio (dibujos, modelos a escala y mapas).

Finalmente tal y como indica esta revisión, distintos autores han aportado investigaciones y resultados específicos sobre el desarrollo del conocimiento geométrico, pero no han elaborado o propuesto otros modelos de desarrollo como la propuesta de Spelke, Izard y Lee (2010), antes revisada.

Problemática

Teniendo en cuenta las consideraciones presentadas en los apartados anteriores, el presente estudio, parte del hecho de que la sensibilidad a las propiedades geométricas euclidianas se constituye como una habilidad temprana que permite a los niños incluso desde los 3 o 4 años, regir su comportamiento en el espacio e interactuar con los objetos que en él se encuentran, a partir del establecimiento de relaciones de longitud, ángulo y sentido. Esto, como ya se ha mencionado en la revisión, sigue una línea diferente a la propuesta inicialmente por Piaget acerca del desarrollo del pensamiento espacial, proporcionando consideraciones diferentes en relación a la habilidad de los niños para representar y desenvolverse en el espacio real, y se aleja de alguna manera de los desempeños ideales para darle relevancia a las capacidades y aproximaciones que los niños hacen en el establecimiento de dichas relaciones geométricas en el transcurso del desarrollo.

De igual manera, este trabajo de investigación, parte también, de que el desarrollo del conocimiento geométrico debe estar mediado por el uso de representaciones simbólicas que lo potencialicen y que, a su vez, permita acceder a las representaciones que los niños establecen acerca del espacio (DeLoache, 1995; Uttal, 2007).

En este sentido, la revisión da cuenta de los diferentes autores que han enfocado su interés en el estudio del desarrollo de la noción del espacio, apelando a la sensibilidad temprana a estas propiedades e intentando aproximarse cada vez

más a una explicación acerca de cómo es que se presenta dicho desarrollo. En relación a esto, se han identificado algunos estudios de base (Dehaene et al., 2006; Shusterman et al., 2008; Spelke e Izard, 2009; Spelke et al., 2010; Spelke, Gilmore & McCarthy, 2011) que presentan especificaciones importantes acerca del surgimiento de las tres propiedades, pero que, sin embargo, presentan también algunas limitaciones que los mismos autores reconocen y sobre las cuales, el presente estudio se propone trabajar, con el fin de aportar información más concisa sobre el desarrollo del conocimiento geométrico euclidiano. Estas limitaciones obedecen a algunas imprecisiones relacionadas con la forma en la que las tres propiedades fueron evaluadas que no permitieron establecer claridad sobre la información geométrica que los niños ponían en juego para desenvolverse en la tarea propuesta.

En cuanto al estudio de Shusterman et al. (2008) en el que se utilizaron mapas geométricos, el experimento permitió conocer el tipo de conocimiento geométrico que los niños usan, así los niños identifican relaciones de distancia, confirmado en los buenos desempeños de las configuraciones de línea recta. Usan distancia y ángulo en la configuración de triángulo recto, sin embargo, no es muy claro si es una sola información la que los niños usan o si son las dos de forma simultánea, y finalmente no usan la información de sentido demostrado en su inhabilidad para identificar el lugar correcto en la configuración de triángulo isósceles.

Spelke et al. (2010) han planteado un modelo para explicar el surgimiento o construcción del sistema geométrico propiamente euclidiano, en el que se encuentran relacionadas las tres propiedades euclidianas. Este modelo propone dos sistemas geométricos básicos, cuyo desarrollo es muy temprano. Cada uno de estos

sistemas, se encuentra especializado para procesar dos de las tres propiedades geométricas en función a un espacio de pequeña o gran escala.

Así, se presenta un sistema de pequeña escala que especializa a los seres humanos para percibir longitud y ángulo para distinguir formas y figuras de objetos, y otro de gran escala para navegar en superficies estructuradas, por lo que permite percibir longitud y sentido hábilmente. La integración de estos dos sistemas básico da lugar a un sistema de conocimiento general de la geometría euclidiana de los seres humanos.

Teniendo en cuenta los dos estudios antes mencionados y el modelo propuesto, Spelke, Gilmore y McCarthy (2011) realizan una investigación intentando especificar el tipo de información geométrica a la que los niños entre 5 y 6 años (m=5.9 años) son sensibles. En este estudio, los autores consideran, que si bien, los estudios del 2006 y 2008 muestran la capacidad de los niños para hacer uso de los mapas geométricos y para atender a las tres propiedades, no resulta muy claro qué tipo de información utilizan para llevar a cabo la tarea, puesto que la ubicación en uno de los triángulos puede estar guiada tanto por la propiedad de distancia como por la propiedad de ángulo o sentido. Por esta razón consideran necesario probar la sensibilidad a cada una de las propiedades por separado, diseñando una tarea que consiste en el uso de mapas puramente geométricos, en los que cada mapa demanda el reconocimiento y uso de una sola propiedad; sin la presencia de ningún tipo de información que interfiriera en el uso del conocimiento geométrico por parte de los niños.

Los resultados de este estudio, hacen evidente la capacidad de los niños de 5 y 6 años para hacer un uso adecuado de los mapas puramente geométricos. Sin embargo, en relación a la sensibilidad para cada una de las propiedades, los niños son mejores en las situaciones que requieren el reconocimiento y uso de las propiedades de longitud y ángulo, lo que no ocurre con su desempeño respecto a la propiedad de sentido. Estos resultados aclaran lo que previos estudios habían inferido pero no habían confirmado por las dificultades en sus diseños.

Si bien el estudio del 2011 considera las limitaciones de los otros estudios y al ser específico en la evaluación de cada una de las propiedades, proporciona información más confiable respecto a cómo se presentan las mismas; los resultados sólo dan cuenta del conocimiento que poseen los niños de 5 y 6 años. De manera que para continuar el proceso de investigación y profundizar en el desarrollo de las tres propiedades, se encuentra necesario indagar acerca del comportamiento que los niños de diferentes edades, tendrían al desenvolverse en una tarea que requiere el uso de mapas puramente geométricos.

Por lo anterior, el presente trabajo consiste en un estudio transversal desde los 4 a los 8 años, para lo cual se establecieron tres grupos: 4 años, 6 años y 8 años con el objetivo de establecer trayectorias de desarrollo de la sensibilidad a las propiedades geométricas euclidianas en estas edades, a través de situaciones de resolución de problemas de navegación en un espacio a pequeña escala con uso de mapas puramente geométricos; intentando con esto dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Cuáles son los cambios que se dan en la sensibilidad a las propiedades geométricas euclidianas –longitud, ángulo y sentido- en situaciones de interpretación de mapas, en tres grupos de edad: 4 años, 6 años y 8 años?

Para esto, se ha retomado el uso de la tarea propuesta por Spelke et al. (2011) realizando algunas adaptaciones que se consideraron importantes en vía a la obtención de una información más confiable acerca del desarrollo de la sensibilidad a las tres propiedades.

Objetivos

Objetivo General

Explorar los cambios en la sensibilidad a las propiedades geométricas euclidianas –longitud, ángulo y sentido- a través de la interpretación y uso de mapas en niños de 4 a 8 años diferenciados en tres grupos de edad.

Objetivos Específicos

- Determinar el logro de cada grupo de edad respecto a cada una de las propiedades geométricas euclidianas al interpretar y usar mapas.

- Comparar los desempeños de los tres grupos de edad en situaciones de sensibilidad a las tres propiedades euclidianas fundamentales al interpretar y usar mapas.

- Establecer trayectorias de desarrollo del conocimiento geométrico de acuerdo a los resultados en niños de 4, 6 y 8 años.

Método

Diseño

Es un estudio experimental de carácter transversal con tres grupos de edad.. La variable de manipulación es la propiedad euclidiana, con tres condiciones: distancia, ángulo y sentido. A cada grupo de edad se le presentan situaciones que exigen sensibilidad a la longitud, situaciones que exigen sensibilidad al ángulo y situaciones que exigen sensibilidad al sentido, para ser resueltas exitosamente.

Participantes

En este estudio participaron 64 niños, de la siguiente forma: 23 niños de 4 años (m=4.3 años, rango 3,8 a 4,8años), 20 niños de 6 años (m= 6.5 años, rango 6,0 a 6,8 años) y 21 niños de 8 años (m= 8.5 años, rango 8,1 a 9,0 años). Se controló un número equivalente de niños y niñas. Los niños fueron contactados en un colegio público de la ciudad de Cali y en un Jardín Infantil, ambos ubicados en una zona de condición socio-económica media. La participación en la investigación fue voluntaria y con el consentimiento informado de los padres. La población total se distribuye entre niños mestizos, blancos y afrodescendientes.

Tarea

Se utilizó una tarea de ubicación de objetos guiada por un mapa que corresponde a una adaptación de la tarea de Spelke, Gilmore y McCarthy (2011). A los niños se les pidió ubicar en el espacio real un muñeco. Para esto ellos primero debían observar un mapa (2d) que representa de forma simbólica (líneas) una

estructura del espacio y con una estrella designa un lugar de ubicación. Luego, ya sin el mapa, al niño se le presentan dos estructuras (3D) que se diferencian sólo por una de las tres propiedades euclidianas y se le pide que ubique el objeto en la estructura que corresponde a la vista antes en el mapa.

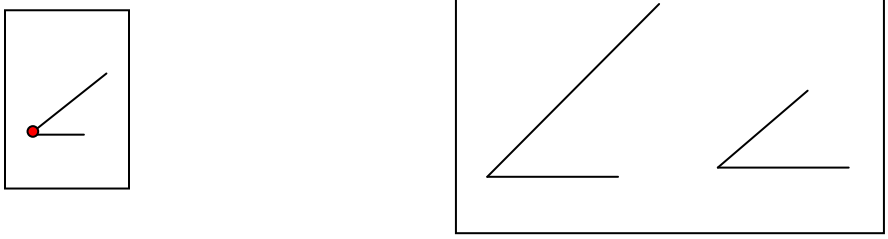
Además, cada una de estas estructuras, presentan dos posibles lugares de ubicación del objeto, uno en el vértice de la estructura y el otro en el extremo de uno de los lados, siendo entonces 4 los posibles lugares de ubicación, pero sólo uno el correcto. De acuerdo a los autores, esto permite controlar si los niños están atentos a las instrucciones de la tarea o por el contrario llegan a desempeñarse azarosamente. En unas situaciones, la ubicación del juguete debe llevarse a cabo por análisis de la longitud, en otras por análisis de los ángulos y en otras por análisis de sentido.

Para elegir la estructura correcta es necesario durante la observación del mapa codificar las tres propiedades euclidianas presentes en la representación para detectar frente a las dos estructuras en el espacio real cuál es la que las hace diferentes y poder, entonces, elegir la estructura correspondiente con la información del mapa. Para saber si el objeto se ubica en el vértice o en la extremo, los niños deben codificar en el mapa esta información de naturaleza topológica y luego recordarla en el espacio real. De esta manera, es posible evaluar el conocimiento de los niños sobre cada una las tres propiedades euclidianas de interés.

A continuación se detalla el diseño de las situaciones dentro de cada propiedad:

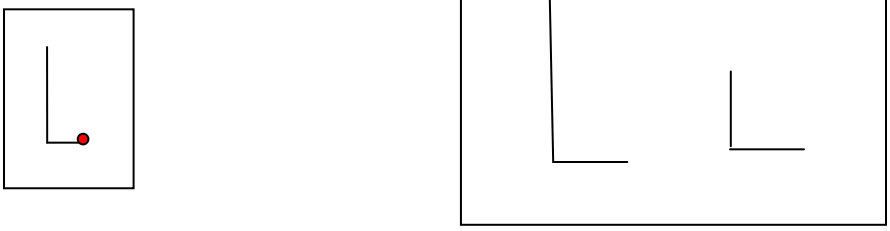
Situaciones de longitud. Cada mapa contiene una figura 2D de dos líneas que se intersectan en ángulos agudos (60°), rectos (90°) y obtusos (120°), en algunas situaciones estas pueden tener la misma medida 6cm (mapa) – 60cm (espacio real) o en otras tener un lado más largo de 12cm (mapa) – 120cm (espacio real). En el espacio real, los niños encuentran 2 estructuras de la forma correspondiente (ángulo) a la del mapa, siendo una de la longitud indicada y la otra no.

Mapa 1[1]*.* Corresponde a una forma de ángulo agudo cuyo lado superior tiene una longitud de 12 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (120 cm) y otra cuyos dos lados miden 60 cms.

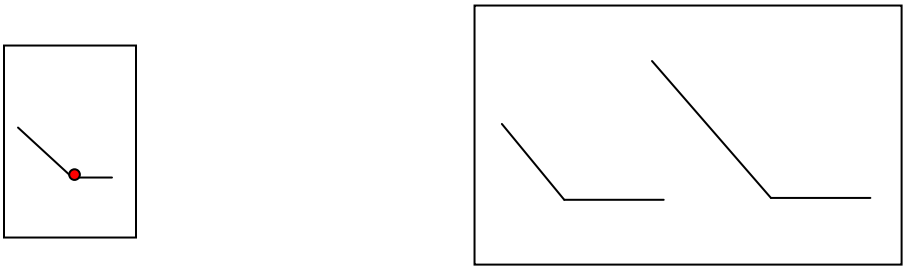


Mapa 2. Corresponde a una forma de ángulo recto cuyo lado superior tiene una longitud de 12 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (120 cm) y otra cuyos dos lados miden 60 cm.

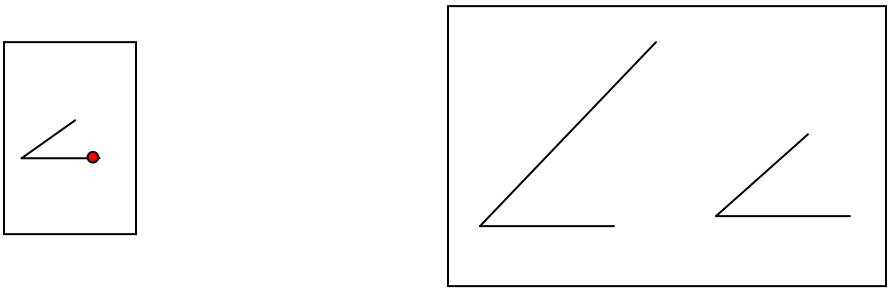
[1]Las figuras a continuación son representaciones de cada una de las situaciones diseñadas, para ilustrar cada uno de los mapas y de las estructuras en el espacio real dispuestas para la comparación. Sin embargo estas no se encuentran hechas a una escala real.



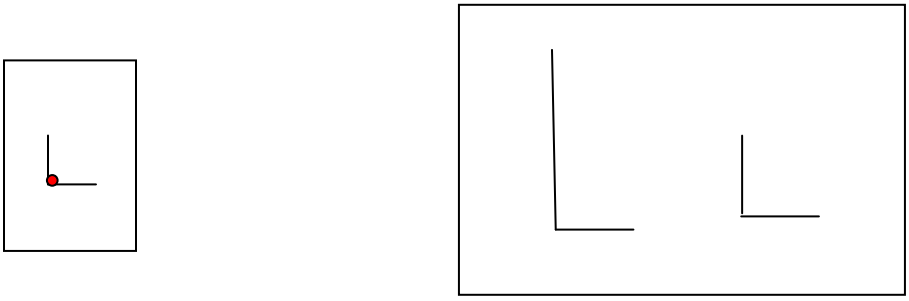
Mapa 3. Corresponde a una forma de ángulo obtuso cuyo lado superior tiene una longitud de 12 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (120 cm) y otra cuyos dos lados miden 60 cm.



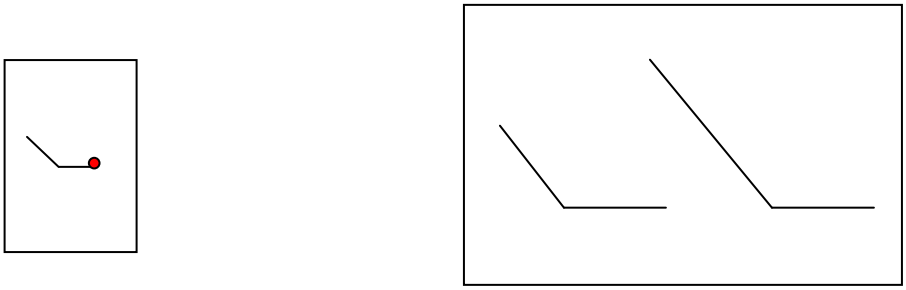
Mapa 4. Corresponde a una forma de ángulo agudo cuyos lados tienen una longitud de 6 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (60 cm) y otra cuyo lado superior mide 120 cm.



Mapa 5. Corresponde a una forma de ángulo recto cuyos lados tienen una longitud de 6 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (60 cm) y otra cuyo lado superior mide 120 cm.

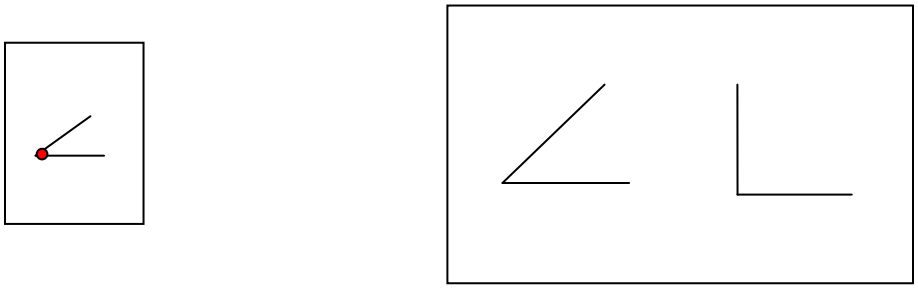


Mapa 6. Corresponde a una forma de ángulo obtuso cuyos lados tienen una longitud de 6 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (60 cm) y otra cuyo lado superior mide 120 cm.

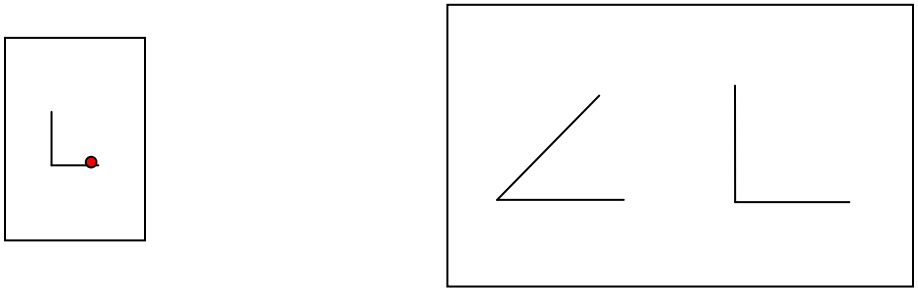


Situaciones de ángulo. Cada niño observa un mapa con una forma 2D que ilustra la unión de dos líneas en ángulos de 75°, 90º y 105º respectivamente, la longitud de ambos lados del ángulo siempre es de 6 cm (mapa) - 60cm (espacio real). Luego en el espacio real se encuentra con dos estructuras, una que constituye el ángulo visto en el mapa y la otra con un ángulo diferente. Se establecen las siguientes comparaciones: ángulo de 75° y 90°, de 90° y 105°, y finalmente de 75º y 105º. Así esta tarea, permite el contraste del conocimiento sobre el ángulo recto, agudo y obtuso.

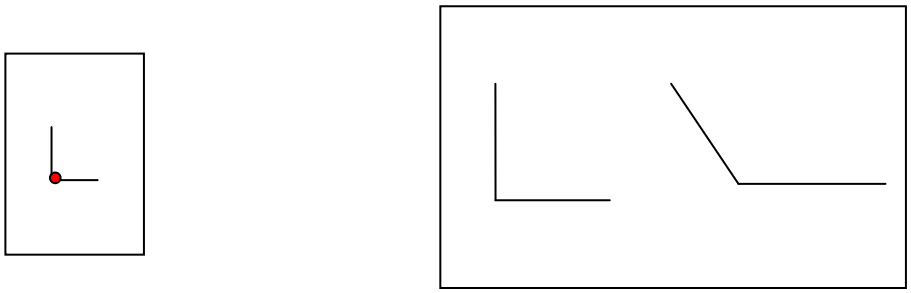
Mapa 7. Corresponde a una forma de ángulo agudo de 75°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (75°) y otra de 90°.



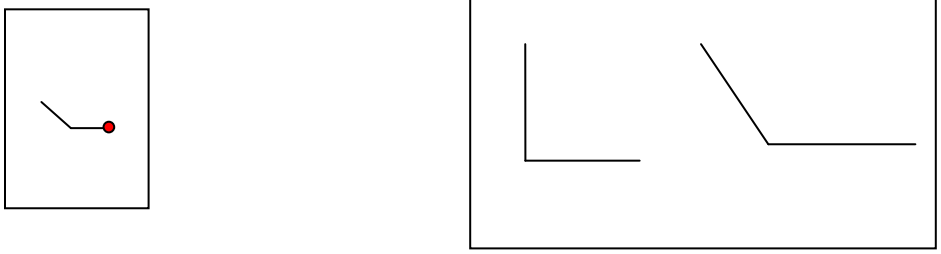
Mapa 8. Corresponde a una forma de ángulo recto de 90°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (90°) y otra de 75°.



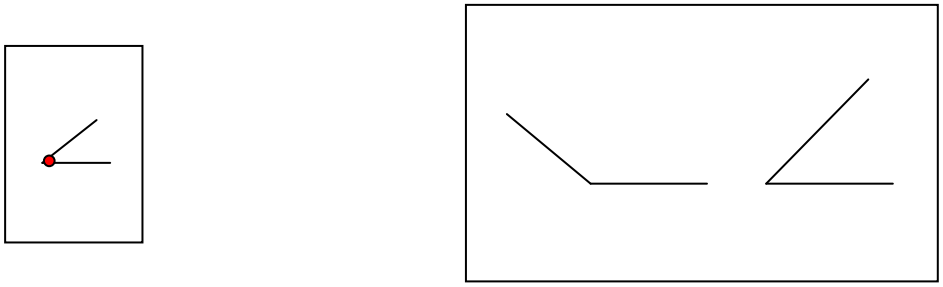
Mapa 9. Corresponde a una forma de ángulo recto de 90°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (90°) y otra de 105°.



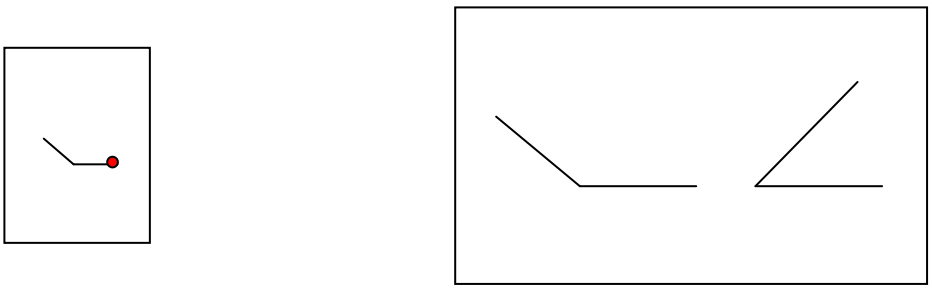
*Mapa 10.*Corresponde a una forma de ángulo obtuso de 105°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (105°) y otra de 90°.



Mapa 11. Corresponde a una forma de ángulo agudo de 75°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (75°) y otra de 105°.



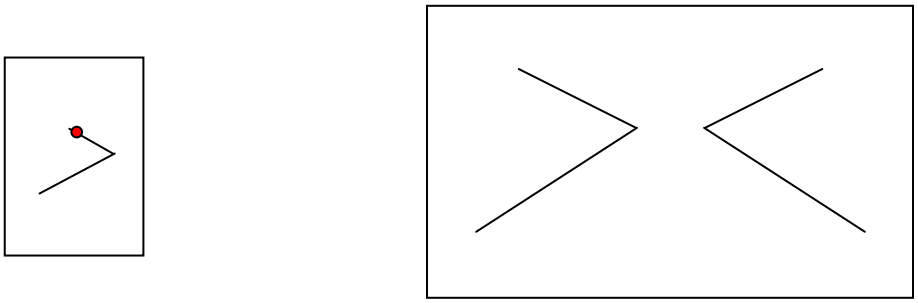
Mapa 12. Corresponde a una forma de ángulo obtuso de 105°. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (105°) y otra de 75°.



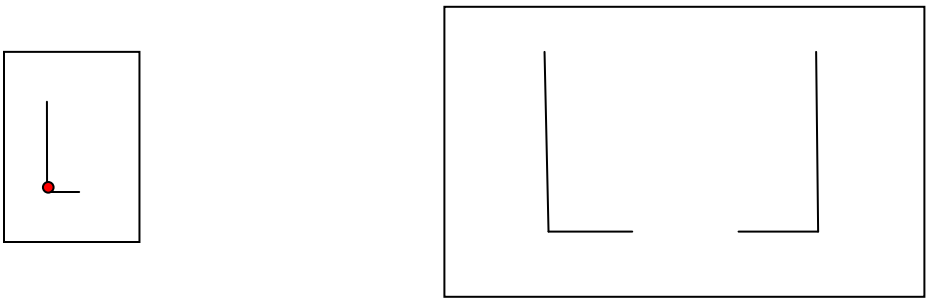
Situaciones de sentido. Cada niño observa un mapa con una forma 2D que ilustra la unión de dos líneas en distintos ángulos (60°, 90° y 120°). Las dos líneas tienen longitudes distintas, una de 6cm (mapa) – 60cm (espacio real) y la otra de

12cm (mapa) – 120cm (espacio real). Luego en el espacio real, cada niño se encuentra con dos estructuras, una que constituye la forma en la orientación indicada y otra de la misma forma en una orientación distinta. Las dos estructuras a comparar se presentan ya sea como imagen en espejo para discriminar la orientación: derecha e izquierda, o la orientación: arriba- abajo.

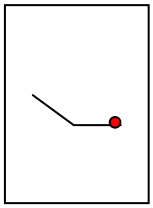
Mapa 13. Corresponde a una forma de ángulo agudo (60°) cuya apertura apunta hacia la izquierda. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (120 cm) y otra en imagen en espejo horizontal.

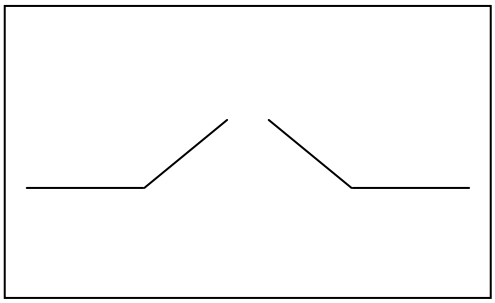


Mapa 14. Corresponde a una forma de L en ángulo. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente (120 cm) y otra en imagen en espejo horizontal.

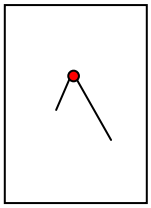


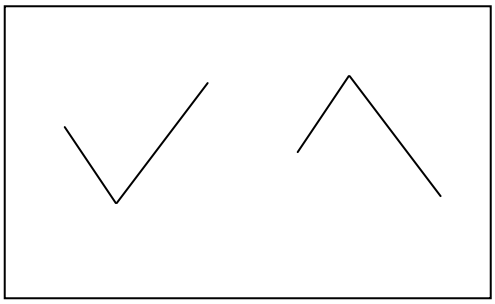
Mapa 15. Corresponde a una forma de ángulo obtuso (120°) cuyo lado superior tiene una longitud de 12 cm. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente y otra en imagen en espejo horizontal.



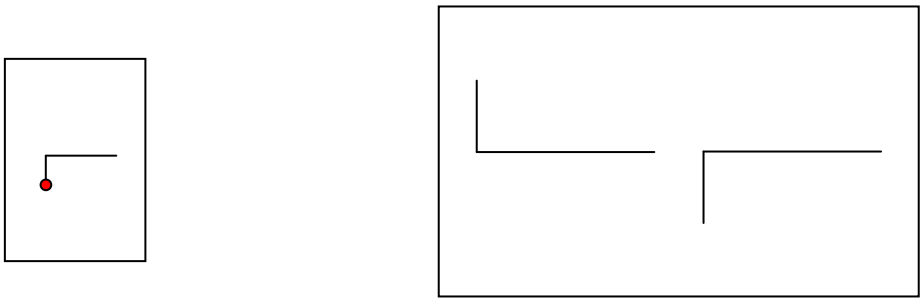


Mapa 16. Corresponde a una forma de ángulo agudo cuya apertura apunta hacia abajo. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente y otra en imagen en espejo vertical.

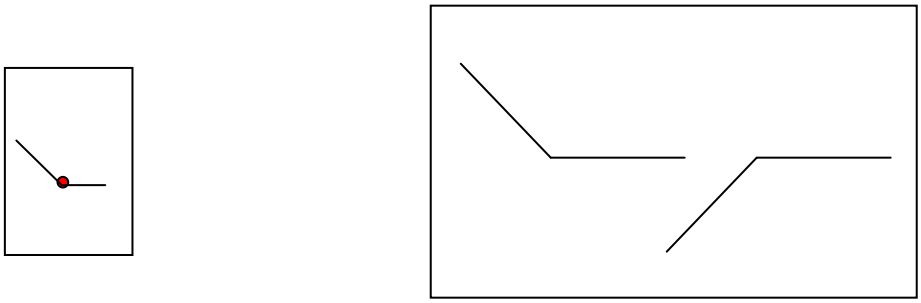




Mapa 17. Corresponde a una forma de L en ángulo recto cuyo lado más corto apunta hacia abajo. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente y otra en imagen en espejo vertical.



Mapa 18. Corresponde a una forma de ángulo obtuso cuyo lado más largo apunta hacia arriba. En el espacio real cada niño encontrará una estructura correspondiente y otra en imagen en espejo vertical.



En el caso de la tarea original de Spelke y colaboradores (2011), en todas las situaciones las estructuras a comparar y por tanto sus representaciones en los mapas correspondieron a formas de L, es decir, dos líneas intersectadas en un ángulo de 90°. En la presente investigación a lo largo de las tres propiedades las formas variaron en agudas, rectas y obtusas. En las situaciones de ángulo, la tarea original comparó formas rectas con agudas y obtusas, el presente estudio además contrastó la forma aguda con la obtusa y en cuanto al sentido, la relación que se evaluó a través de la exposición de las estructuras en imagen en espejo por Spelke et al fue la relación izquierda derecha, mientras que en el presente estudio se evaluó también la relación arriba- abajo.

Procedimiento

Los niños realizaron el experimento en un salón de clases dispuesto para este fin lo hicieron de manera individual pero con el acompañamiento del experimentador quien observó el desempeño en todo momento y registró las respuestas.

Primero se presenta al niño dos situaciones de ensayo cada una con información de sentido, y similares a los que van trabajar en las tareas experimentales. En estas el niño siempre fue retroalimentado, tanto si respondía correcta o incorrectamente. La retroalimentación consistió en mostrar simultáneamente el mapa y las estructuras reales, llamando la atención sobre la correspondencia entre mapa y espacio y entre la ubicación de la estrella en el mapa y el objeto en el espacio. Después a los niños se les presentaron las 18 situaciones experimentales sin recibir retroalimentación. El mapa y el objeto se presentaron bajo la siguiente consigna *"Tío Conejo* (se muestra el peluche) *necesita que tú lo ayudes a encontrar su madriguera. Este dibujo* (se muestra el mapa) *representa una madriguera y la "estrellita" representa la entrada, pero Tío Conejo no entiende este dibujo, este mapa, así que tú lo vas a ayudar a encontrar su casa de acuerdo a lo que ves aquí* (señala el mapa)".

Transcurren 12 segundos aproximadamente y en un espacio ubicado atrás del niño, están organizadas dos estructuras similares: una correspondiente a la representada en los mapas y otra estructura que no lo es. De acuerdo a esto, al niño se le dice:"*Mira, acá hay dos madrigueras, aunque son parecidas no son iguales, sólo una es la casa de Tío Conejo la otra es la casa de otro animal, debes elegir la*

que es como viste en el dibujo; Además cada madriguera tiene una entrada y una salida, debes elegir la entrada, recuerda que la estrellita te indicaba la entrada en el dibujo". Cada niño debe elegir la estructura indicada y en ella ubicar el juguete que recibió, de acuerdo a la información percibida y representada del mapa (Ver figura 2).

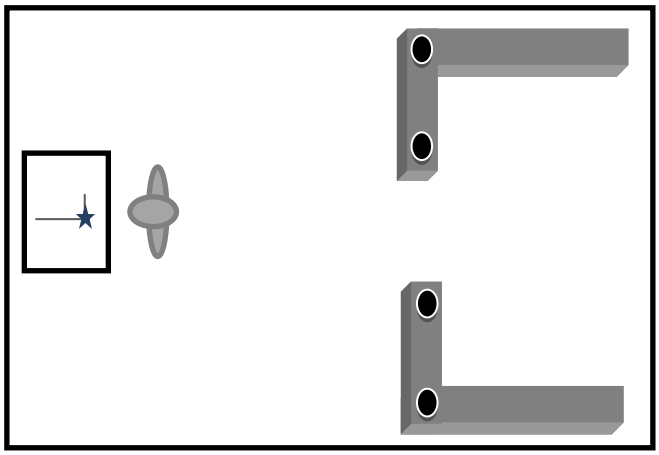


Figura 1. *Esquema espacial durante la aplicación de la tarea.*

Análisis de Resultados

Para realizar un análisis cuantitativo de los datos se obtuvo el puntaje de logro, calificando cada respuesta o ubicación correcta con 1, mientras las respuestas erradas recibieron 0. De manera que el máximo puntaje o mejor desempeño en la totalidad de la tarea es 18 y para cada propiedad sería 6, el más bajo en ambos casos es 0.

Se llevaron a cabo dos tipos de análisis de los resultados: *Logro Euclidiano y Logro Euclidiano y Topológico.* En el primero se estableció que la discriminación correcta de la estructura de acuerdo con la información del mapa, sería determinado como correcto, independientemente de si el niño ubicó el objeto en el vértice de la

estructura o en el extremo. En el análisis de *Logro Euclidiano y Topológico* se estableció como acierto tanto la elección de la estructura correcta, como la ubicación del objeto en el lugar correcto (vértice o extremo), de acuerdo con la información del mapa.

Para ambos tipos de análisis se realizaron estudios estadísticos descriptivos para establecer el porcentaje de éxito general y porcentajes de desempeño de acuerdo a cada propiedad. Se realizó una caracterización de los desempeños de los niños por niveles, de acuerdo al alcance en la resolución de las 6 situaciones correspondientes a cada propiedad. También se realizaron análisis de varianza para establecer la interacción de las variables propiedad y edad, luego se realizó un Anova de un factor para cada propiedad y así poder determinar con precisión la influencia de la variable edad. Finalmente y sólo para la categoría de Logro Euclidiano y Topológico, se realizaron t-student al interior de las propiedades de longitud y sentido para analizar los efectos de variaciones como: discriminación de la longitud corta o larga y discriminación del sentido arriba-abajo e izquierda-derecha.

Resultados

Logro euclidiano (LE)

El análisis de Logro Euclidiano General permite apreciar la capacidad de los niños de atender a la propiedad indicada, de manera que los resultados en esta categoría expresan el conocimiento geométrico de los niños. De acuerdo a lo anterior estos resultados muestran que todos los niños alcanzaron un porcentaje del 66,1% (nivel de azar 50%) en la totalidad de tareas. Sin embargo el porcentaje de logro general del grupo de 4 años (54.6%) aunque superó el azar no estuvo considerablemente por encima, mientras que los niños de 6 años obtuvieron un 69,2% de acierto y el grupo de 8 años alcanzó un 75.7%.

En cuanto al análisis del logro euclidiano para cada una de las propiedades, longitud, ángulo y sentido (Ver Figura 1), los resultados indican que cada uno de los grupos de edad 4, 6 y 8 años, alcanzan un porcentaje de acierto del 52,9%, 71,7% y 69,8% respectivamente, cuando la propiedad a evaluar corresponde a la propiedad de longitud; cuando la propiedad a evaluar corresponde a ángulo, los niños de 4 años alcanzan un 55,8%, los de 6 años un 63,3% y los de 8 años se desempeñan alcanzando un 74,6%; finalmente para la propiedad de sentido, se obtiene un 55,1% para el grupo de 4 años, 72,5% para los de 6 años y 82,5% para el grupo de 8 años. De esta manera, los resultados muestran un desempeño azaroso por parte de los niños de 4 años, el cual va mejorando, en la medida que se da un incremento en los desempeños de los niños de 6, así como un incremento en el desempeño de los

niños de 8 años respecto a los dos grupos de edad anteriores. Esta misma situación se aprecia en cada una de las tres propiedades.

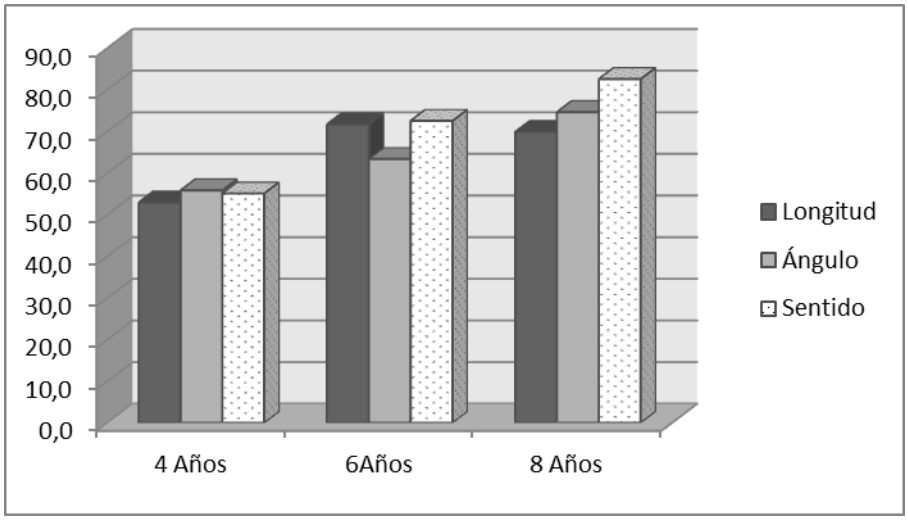


Figura 2. *Porcentajes de Logro Euclidiano en función de la propiedad euclidiana y la edad.*

Una caracterización de los desempeños de los niños por niveles para facilitar el manejo de los datos se realizó de acuerdo al alcance en la resolución de las 6 situaciones correspondientes a cada propiedad. Esto reveló que la mayoría de los niños de 4, 6 y 8 años alcanzan un Nivel Medio de desempeño para las tres propiedades y sólo el 5% de los niños de 6 años, en la propiedad de sentido, expresa un nivel de no resolución, lo cual indica que fallaron en todas las tareas de la propiedad indicada. No obstante, también es posible observar, en las tres propiedades, que un alto porcentaje de niños de 6 y 8 años se ubican en el Nivel Alto (Ver Tabla 1).

Tabla 1 Niveles de desempeño para cada Propiedad (%)

Puntaje	Tipo de situación para cada edad								
	Longitud			Ángulo			Sentido		
	4 Años	6 Años	8 Años	4 Años	6 Años	8 Años	4 Años	6 Años	8 Años
No Resolución	0	0	0	0	0	0	0	5	0
Nivel Bajo (1-2)	17,4	0	19	21,7	15	0	17,4	0	4,8
Nivel Medio (3- 4)	73,9	65	61,9	60,9	55	61,9	78,3	50	33,3
Nivel Alto (5-6)	8,7	35	19	17,4	30	38,1	4,3	45	61,9

Un análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA) 3 (Propiedad) x 3 (Edad) con propiedad como variable intrasujeto y edad como variable intersujeto, se realizó para determinar la influencia del tipo de propiedad y de la edad en los desempeños (Ver Figura 2). El análisis mostró que no hay un efecto significativo del tipo de propiedad ($f(2) = 1.755$, $p > 1$), ni tampoco mostró interacción de esta variable con la edad ($f(4) = 1,228$, $p > 1$). Sin embargo, la variable edad si se mostró como un factor altamente influyente ($f(2) = 15,665$, $p < ,001$). Una prueba Post-hoc (Bonferroni-corregida) permitió establecer que las diferencias significativas se encuentran entre los niños de 4 años respecto a los de 6 y 8 años ($p < ,001$), teniendo estos últimos grupos un comportamiento similar en la tarea.

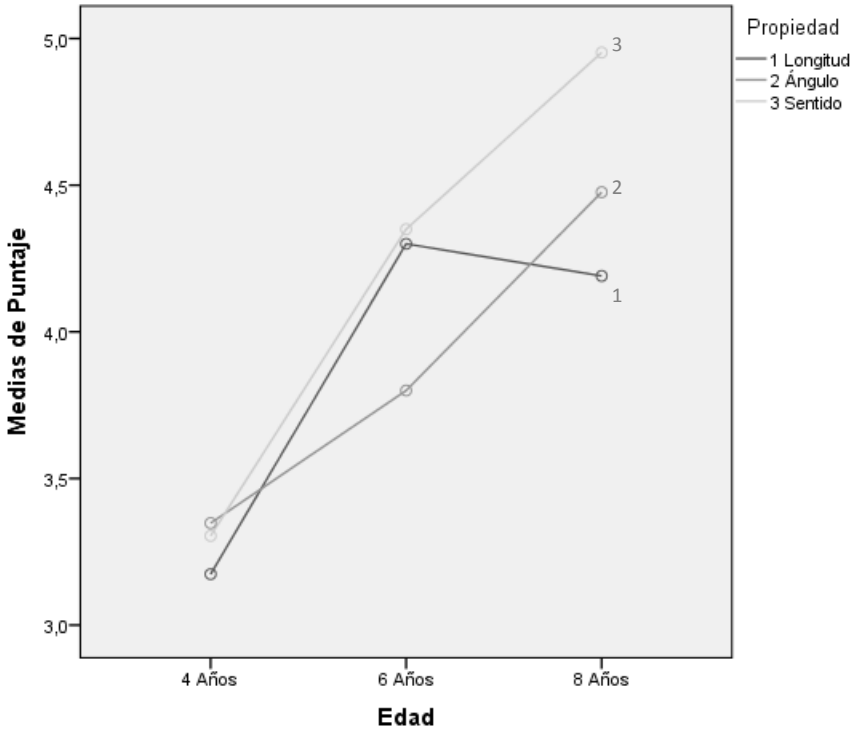


***Figura 3**. Efecto de la edad en los desempeños para cada una de las propiedades.*

Logro Euclidiano y Topológico (LEyT)

Los mismos análisis presentados para el tipo de Logro Euclidiano, fueron realizados para este caso. El análisis de logro euclidiano y topológico general mostró que todos los niños alcanzaron un 45% de acierto en la totalidad de las tareas (nivel de azar 25%). El grupo de 4 años alcanzó un 34.3% de acierto mientras los niños de 6 y 8 años se desempeñaron correctamente en un 51,1% y 63% respectivamente, en toda la tarea (Ver Figura 3).

En cuanto al logro euclidiano y topológico en cada una de las propiedades, el grupo de 4 años obtuvo un 37%, 35,5% y 30,4% de acierto en las propiedades

Longitud, Ángulo y Sentido respectivamente. En cuanto a los niños de 6 años, se obtuvo un 51,7% para la propiedad de longitud, 47,5% en ángulo y 54,2% en las situaciones de sentido; finalmente para el caso de los niños de 8 años, el porcentaje de acierto en longitud fue del 59,5%, para ángulo 61,9% y para sentido un 67,5%.

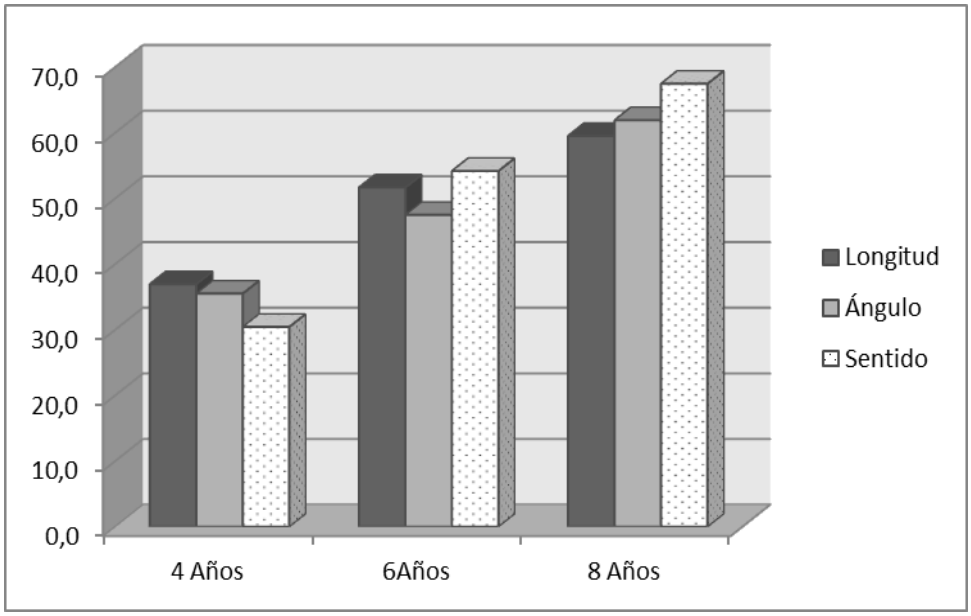


Figura 4. *Porcentajes de Logro Euclidiano y Topológico en función de la propiedad euclidiana y la edad.*

La caracterización de los desempeños en este tipo de logro (Euclidiano y Topológico) permite observar que la mayor parte de los niños de 4 años se desempeñan en un nivel bajo, mientras que la mayoría de los niños de 6 y 8 años se ubican en un Nivel Medio mostrando una tendencia hacia el Nivel Superior (Nivel Alto).

Tabla 2 Niveles de desempeño para cada Propiedad (%).

Puntaje	Tipo de situación								
	Longitud			**Ángulo**			**Sentido**		
	4 Años	6 Años	8 Años	4 Años	6 Años	8 Años	4 Años	6 Años	8 Años
No Resolución	4,3	5	0	8,7	5	0	17,4	5	0
Nivel Bajo (1-2)	56,5	30	19	52,2	40	19	47,8	25	9,5
Nivel Medio (3- 4)	39,1	50	61,9	39,1	40	52,4	34,8	50	52,4
Nivel Alto (5-6)	0	15	19	0	15	28,6	0	20	38,1

Un análisis de varianza de medidas repetidas (ANOVA) 3 (Propiedad) x 3 (Edad) con propiedad como variable intrasujeto y edad como variable intersujeto para el logro euclidiano y topológico mostró que la variable Propiedad no resultó ser significativa ($f(2) = 0.258$, $p > 1$) y no se encontró una interacción entre Propiedad x Edad ($f(4) = 1{,}102$, $p > 1$). Por el contrario, la variable Edad mostró tener un efecto significativo en los desempeños ($f(2) = 16{,}777$, $p < ,001$) (Ver Figura 4). Igualmente las comparaciones post-hoc (Bonferroni-corregida) mostraron diferencias significativas entre los niños de 4 años y los niños de 6 y 8 años ($p < ,001$), en tanto que las dos edades mayores resultan de comportamiento similar en la tarea ($p < ,001$).

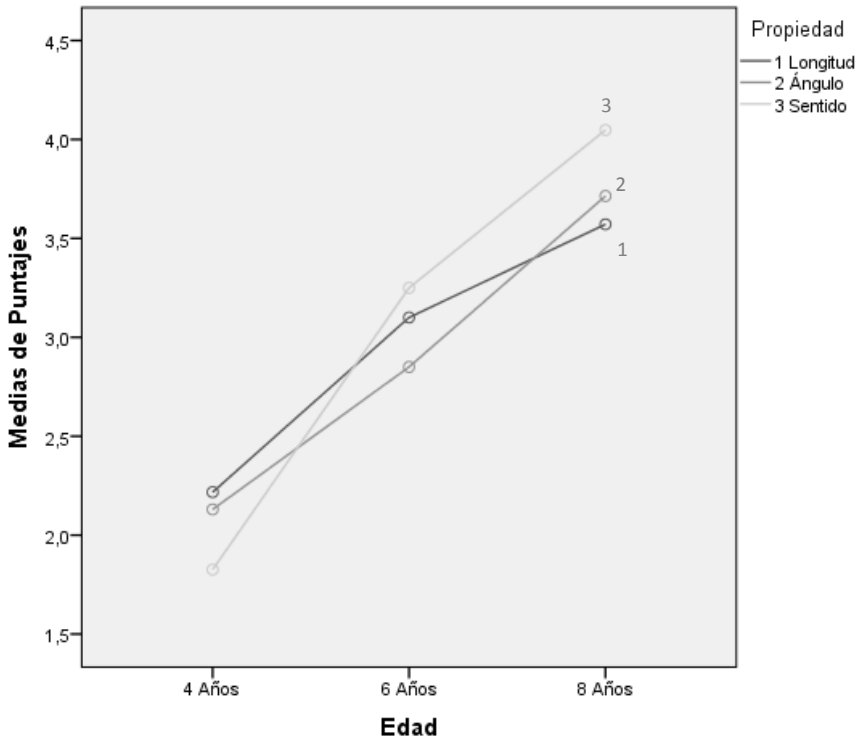


Figura 5. *Efecto de la edad en los desempeños para cada una de las propiedades.*

Análisis al interior de la propiedad de longitud. En la categoría Logro Euclidiano se llevó a cabo una T-Student al interior de la propiedad de longitud para determinar si se presentan diferencias en la sensibilidad euclidiana cuando la longitud representada en el mapa corresponde a la distancia larga o corta de las estructuras a comparar (Ver *Figura 5*). De acuerdo con esto, los niños de 4 años se desempeñaron indistintamente en relación a estas dos características (t (22)=1.141 p > 1), mientras que a los 6 y 8 años los niños tienen mayor acierto cuando la información representada en el mapa corresponde a la distancia larga ((t (19)=.916 p=.021) y (t (20)=1.713 p<.001)).

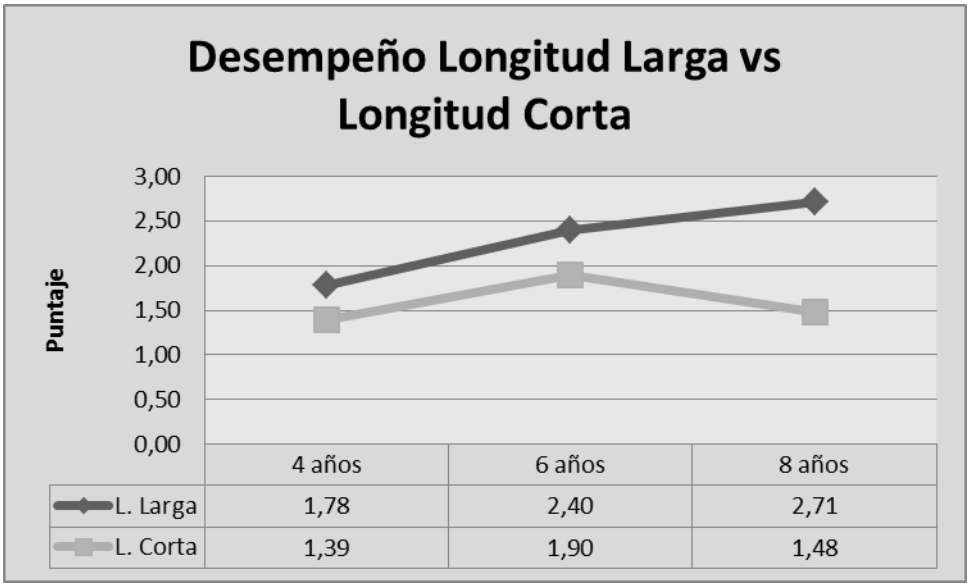


Figura 6. *Promedio de acierto en situaciones de Longitud: Larga y corta en Logro Euclidiano.*

En la categoría Logro Euclidiano y Topológico se llevó a cabo una T-Student al interior de la propiedad de longitud se llevó a cabo para determinar si se presentan diferencias en la sensibilidad euclidiana cuando la longitud representada en el mapa corresponde a la distancia larga o corta de las estructuras a comparar (Ver *Figura 6*). De acuerdo con esto, los niños de 4 años se desempeñaron indistintamente en relación a estas dos características ($t(22)=.794$ $p > 1$), mientras que a los 6 y 8 años los niños tienen mayor acierto cuando la información representada en el mapa corresponde a la distancia larga (($t(19)=2.896$ $p=.009$) y ($t(20)=3.873$ $p=.001$)).

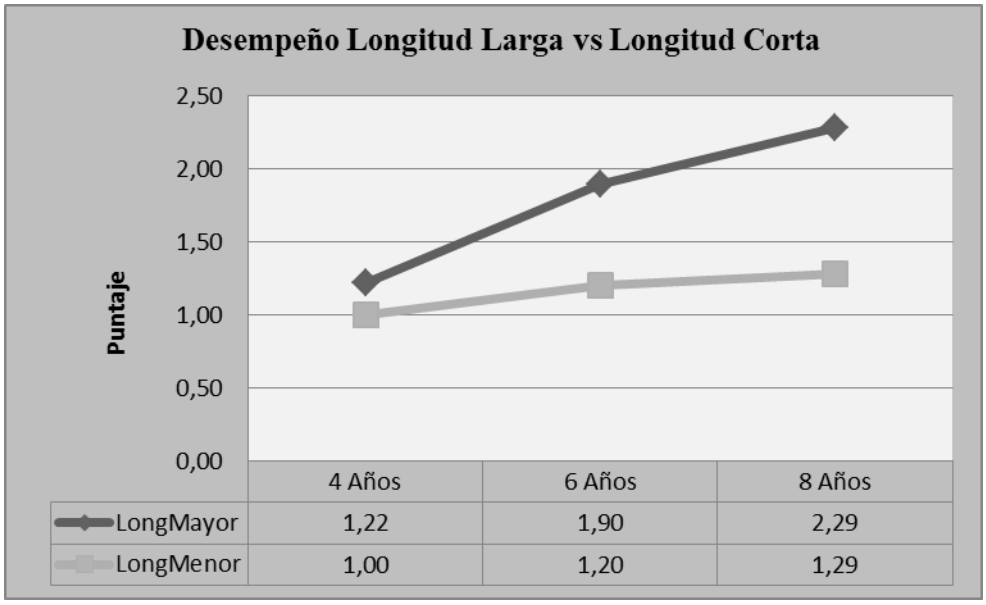


Figura 7. *Promedio de acierto en situaciones de Longitud: Larga y corta en Logro Euclidiano y Topológico.*

Análisis al interior de la propiedad de ángulo. En la categoría Logro Euclidiano se analizó a partir de un Anova de 1 factor si existe diferencia en los desempeños de acuerdo a cada tipo de ángulo. Se obtuvo que en los ángulos rectos si hay diferencias en el desempeño de los tres grupos de edad ($f(2) = 8{,}286$ $p = {,}001$); mientras que en los ángulos agudos y obtusos no se encontró esto ($f(2) = 3{,}239$ $p = {,}051$ y $f(2) = {,}944$ $p > {,}001$). La prueba Bonferroni corregida revela que en el ángulo recto el desempeño de los niños de 4 y 6 años es similar a la vez que es diferente al desempeño de los niños de 8 años (Ver figura 7).

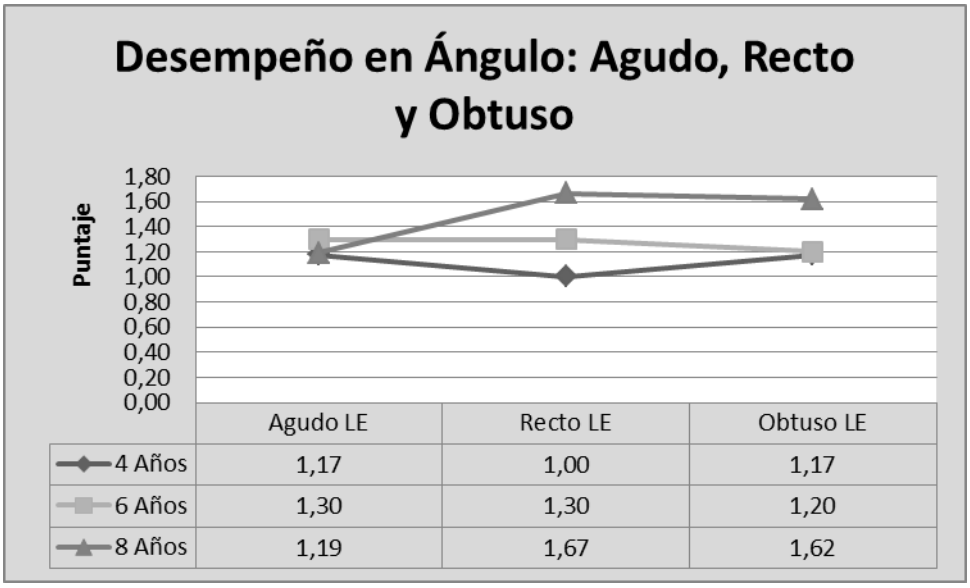


Figura 8. *Promedio de acierto en situaciones de Ángulo: Agudo, Recto y Obtuso en Logro Euclidiano.*

En la categoría Logro Euclidiano y Topológico se analizó a partir de un Anova de 1 factor si existe diferencia en los desempeños de acuerdo a cada tipo de ángulo. Se obtuvo que en los ángulos agudos no hay diferencias en el desempeño de los tres grupos de edad (f(2) = ,222 p > ,001); mientras que en los ángulos recto y obtuso si es afectado por la edad (f(2) = 2,442 p = ,009 y f(2) =3,771 p = ,029). La prueba Bonferroni corregida revela que tanto en el ángulo recto como en el obtuso el desempeño de los niños de 4 años es diferente al desempeño de los niños de 8 años mientras que los niños de 6 presentan un desempeño intermedio similar al grupo menor y al grupo mayor.

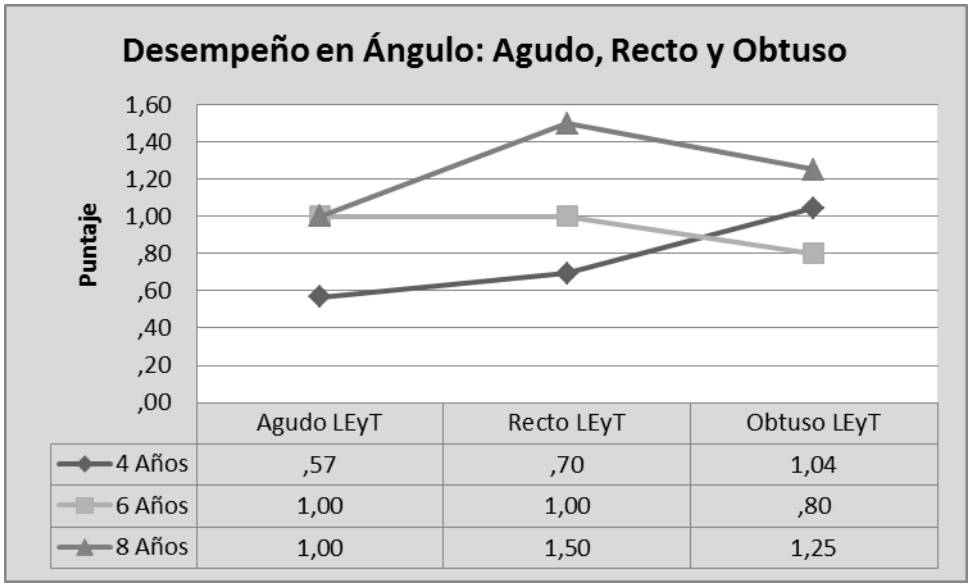


Figura 9. *Promedio de acierto en situaciones de Ángulo: Agudo, Recto y Obtuso en Logro Euclidiano y Topológico.*

Análisis al interior de la propiedad de sentido. En la categoría Logro Euclidiano se realizó una T-Student para evaluar si existen diferencias en la identificación de las relaciones arriba-abajo y derecha-izquierda en la propiedad de Sentido (Ver *Figura 9*). Se obtuvo que en ninguno de los grupos de edad el desempeño es afectado por esta característica (a los 4 años $t(22)=1.030$ $p < .001$, a los 6 años $t(19)=1.505$ $p > 1$ y a los 8 años $t(20)=1.000$ $p > 1$).

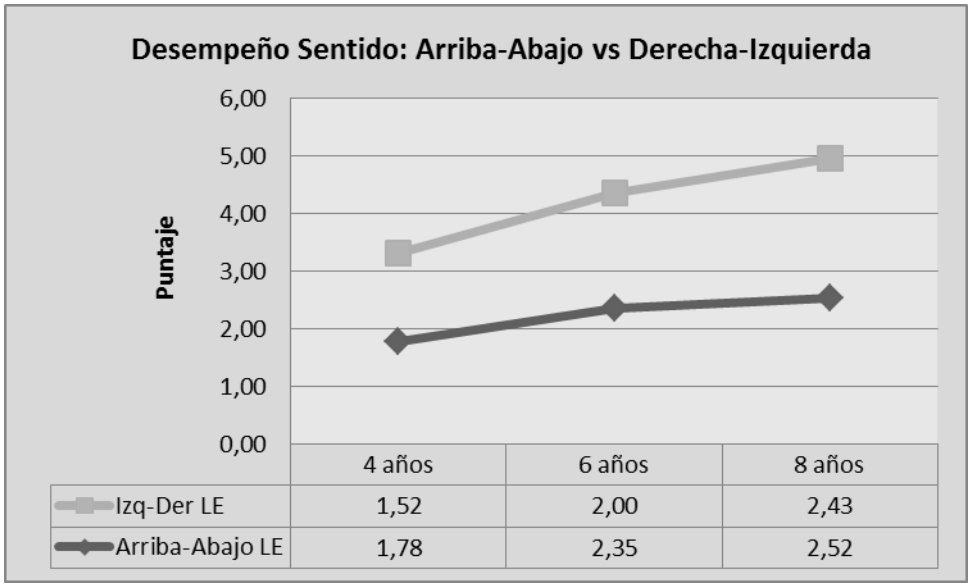


Figura 10. *Promedio de acierto en situaciones de Sentido: Arriba-Abajo y Derecha-Izquierda en Logro Euclidiano y Topológico.*

En la categoría Logro Euclidiano y Topológico también se realizó una T-Student para evaluar si existen diferencias en la identificación de las relaciones arriba-abajo y derecha-izquierda en la propiedad de Sentido (Ver *Figura 10*). Se obtuvo que a los 4 años el desempeño de los niños si depende del tipo de relación presentada ($t\ (22)=4.159\ p < .001$) presentando mayor acierto cuando la discriminación requerida es de tipo arriba-abajo. Por el contrario, el desempeño de los niños de 6 y 8 años no es afectado por esta característica (($t\ (19)=.188\ p > 1$) y ($t\ (20)=.252\ p > 1$)).

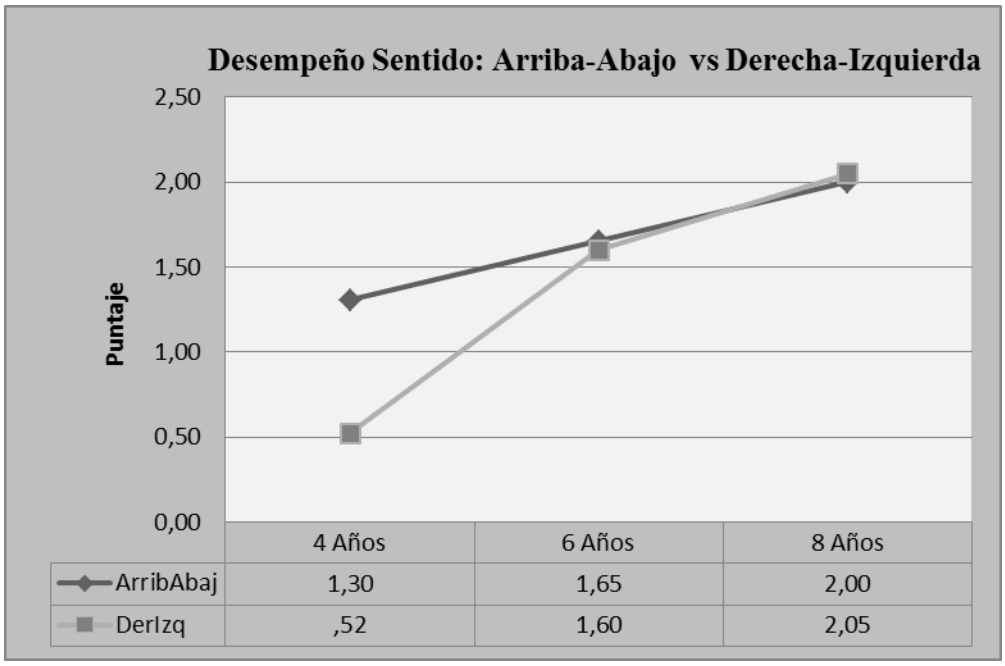


Figura 11. *Promedio de acierto en situaciones de Sentido: Arriba-Abajo y Derecha-Izquierda en Logro Euclidiano y Topológico.*

Discusión

Los resultados de esta investigación muestran que desde los 4 años, los niños atienden a la información geométrica representada en un mapa y son capaces de usar esta información en espacios reales, como habían afirmado estudios previos (Dehaene, Izard, Pica y Spelke, 2006; Huttenlocher, Newcombe y Vasilyeva, 1999; Izard y Spelke, 2009; Liben, 1982; Shusterman, Lee y Spelke, 2008; Spelke, Lee yIzard, 2010; Uttal, 1994, 1996, 2000). Es indispensable considerar las categorías de análisis que se plantearon para analizar los resultados: LE y LEyT. La primera permite examinar el logro puramente euclidiano, el cual es el interés principal de este estudio, sin embargo la segunda categoría planteada desde la forma original de la tarea (Spelke et al., 2011), evalúa la capacidad de los niños para atender a la vez tanto a la información geométrica como a la información topológica, dado la característica de ser desarrollada primero de esta última información los autores consideran que codificarla y recordarla es una exigencia cognitiva mínima que determinará la disposición de los niños para enfrentar la tarea y sus niveles de concentración.

El porcentaje general de acierto, tanto para el Logro Euclidiano (66,1%), como para el Logro Euclidiano y Topológico (45,5%), considerando el nivel de azar de 50% y de 25% respectivamente, se constituye como un indicador confiable de un buen desempeño por parte de los niños. Demostrando desde muy temprana edad cierta sensibilidad a las propiedades ya sea de longitud, ángulo o sentido para resolver la tarea, a la vez que dan cuenta de la habilidad que poseen para establecer relaciones

simbólicas, haciendo la correspondencia entre la información representada en un mapa (2D) y el espacio real (3D).

Lo anterior brinda elementos que permiten discutir la teoría piagetiana (Piaget e Inhelder, 1964), demostrando que los niños de 4 años logran construir una representación del espacio, que no se encuentra reducida únicamente a la experiencia inmediata con los objetos que lo constituyen, como debería esperarse por considerar que el niño en ese momento privilegia sólo las relaciones espaciales de carácter topológico, sino que este estudio demuestra que también pueden representar el espacio de forma simbólica, y en esa medida ir estableciendo las relaciones implicadas en el uso de mapas, las cuales atienden a nociones propiamente euclidianas (de longitud, ángulo y sentido).

De acuerdo a la categoría de análisis Logro Euclidiano, los porcentajes de éxito fueron muy similares en las tres propiedades para los niños de 4 años, dicho porcentajes de acierto en relación al 50% de azar, reflejan un comportamiento azaroso por parte de los niños menores, mientras que los niños mayores (6 y 8 años) muestran mejores desempeños en cada una de las propiedades. Además es posible identificar diferencias en el logro referido a cada propiedad, así los niños de 6 años presentaron sus mejores desempeños en las propiedades de longitud y sentido; en cuanto a los niños de 8 años sus mejores desempeños fueron en la propiedad de sentido seguida de ángulo.

A pesar de estas diferencias en los porcentajes de logro referidos a cada propiedad, el análisis de varianza no determinó como significativa la influencia de esta variable.

En cuanto al tipo de análisis de Logro Euclidiano y Topológico se observan porcentajes de éxito referidos a cada propiedad que son diferentes a los del tipo de análisis de Logro Euclidiano, antes mencionados. Así para el grupo de 4 años el desempeño en las tres propiedades ya no fue tan similar sino que longitud presentó mayor logro, seguida de ángulo y luego sentido. Sin embargo, considerando también el nivel de azar (25%) para este tipo de logro, los desempeños de los niños de 4 años continúan siendo azarosos respecto a el desempeño de los niños de 6 años quienes presentaron el mismo patrón que en la primera categoría, siendo el porcentaje de éxito en longitud y sentido similares y mejores que el porcentaje de logro referido al ángulo. El desempeño de los niños de 8 años también es similar al que se obtuvo en el análisis previo. De forma que presentaron un desempeño mejor que los niños de 4 y 6 años y sus mejores resultados fueron para la propiedad de sentido, seguida del ángulo y luego longitud. No obstante, el Anova tampoco reveló que la variable propiedad fuese significativa para este caso.

Estudios previos (Shusteman et al., 2008; Spelke e Izard, 2009; Spelke et al., 2011; Uttal, 1996) permitieron observar diferencias significativas entre propiedades, mostrando mayores desempeños en las situaciones que requieren el uso de las propiedades de longitud y de ángulo; contrario a la propiedad de sentido para la cual presentaron bajos desempeños. Estas diferencias también fueron esperadas para el presente estudio, sin embargo y a pesar de las diferencias resaltadas arriba en los

porcentajes de LE y LEyT, los desempeños de los niños en las tres propiedades manifiestan un comportamiento estadísticamente homogéneo al interior de cada grupo de edad.

La anterior divergencia del presente estudio con la literatura previa, encontrada en los dos tipos de análisis, podría ser explicada al considerar el tipo de información evaluada en las situaciones correspondientes a la propiedad de sentido. Así, los estudios antes citados evaluaban el reconocimiento de figuras (2D) o configuraciones (3D) en espejo con un eje vertical, obteniendo únicamente, la evaluación de la relación izquierda - derecha. Contrario a esto, el presente estudio, evaluó tanto el sentido izquierda - derecha, como el sentido arriba - abajo resultado de una forma en espejo con un eje horizontal. De manera que los niños obtuvieron mayores desempeños cuando la tarea le requería establecer la relación arriba-abajo que cuando debían establecer la relación izquierda-derecha. Esto podría explicar el por qué en el presente estudio no se encontraron diferencias respecto en el desempeño de los niños en esta propiedad respecto a longitud y ángulo.

Por otro lado, el Anova si mostró a la variable edad como un factor significativo, las comparaciones post-hoc (Bonferoni-corregida) para LE y LEyT, mostraron trayectorias de desarrollo. Se obtuvo entonces que a los 4 años ya hay evidencia de la existencia de un conocimiento geométrico euclidiano sobre cada una de las propiedades fundamentales, aunque no es un conocimiento consolidado, es posible rescatar el inicio de un proceso de desarrollo de este conocimiento. Es así como respecto a cada propiedad (longitud, ángulo y sentido), el conocimiento

manifiesta una tendencia a mejorar que sufre un gran desarrollo en el paso de 4 a 6 años de edad.

Es importante resaltar que los porcentajes de logro respecto a cada propiedad obtenidos en la presente investigación, son un poco más altos que los presentados en investigaciones previas (Shusteman et al., 2008; Spelke e Izard, 2009), especialmente en el estudio de Spelke y colaboradores (2011) del cual se derivó el presente trabajo. Esto puede ser sustentado en los distintos tipos de retroalimentación que recibieron los niños en cada caso, así en el estudio original los niños simplemente fueron corregidos en caso de equivocación en los ensayos, mientras que en la presente investigación la retroalimentación durante los ensayos consistió en un proceso que puede ser considerado de entrenamiento, en el que se le mostraba al niño a qué debía atender y se le daba una idea de qué relaciones debía establecer y tener en cuenta para desarrollar la tarea.

Al comparar los porcentajes de éxito referidos a cada propiedad, correspondientes al Logro Euclidiano y al Logro Euclidiano Topológico, se tiene que, para el primer caso, los porcentajes son mayores en las tres propiedades, en contraste con los porcentajes obtenidos en el logro euclidiano topológico, los cuales disminuyen significativamente. Teniendo que la disminución de porcentajes de éxito, también vista en el análisis de niveles de desempeño, se da de forma equivalente para cada propiedad dentro de cada grupo de edad, consideramos que dicha disminución se debe a la mayor demanda cognitiva que implica el hecho de reconocer a la vez dentro de un espacio, tanto la información euclidiana, como la información topológica, reconociendo que ambas son necesarias para lograr el éxito,

además de las implicaciones evidentes en la carga de memoria siendo dos aspectos por recordar. Esto explica el incremento en los desempeños de los niños para el Logro Euclidiano correspondiente únicamente a la elección de la estructura correcta (independiente del lugar vértice o extremo) pues esta categoría agrupó a los niños que lograron atender a una sola información de interés pensando el espacio solamente desde sus nociones euclidianas. Mientras que cuando se consideraron los datos de los niños que habían logrado el acierto al elegir tanto la estructura correcta como el lugar topológico correctos, estos razonablemente obtuvieron menores desempeños. No obstante, es posible observar que el progreso del conocimiento sobre las tres propiedades se mantiene igual al comparar los tres grupos; de manera que los niños mejoran sus desempeños a medida que avanzan en edad de forma independiente a la categoría de análisis. El análisis de varianza para los dos tipos de logro, comprobó esto, siendo la variable propiedad no significativa mientras que la variable edad sí. Estos resultados, favorecen la hipótesis relacionada con la edad, en la que se esperaba que esta variable fuera significativa, y encontrar que la sensibilidad a las tres propiedades geométricas euclidianas se hace cada vez más notable y se consolida en el transcurso del desarrollo influenciado, entre otras, por los aprendizajes culturales (Dehaene et al., 2006). Sin embargo, es prudente destacar que aún a los 8 años (mayor edad en el presente estudio) no se ha concluido el desarrollo del conocimiento geométrico euclidiano siendo posible mayor estabilidad en los desempeños acertados.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, las regularidades y diferencias que este estudio encuentra respecto a la evidencia ya existente acerca de la sensibilidad a las tres propiedades indican que:

Propiedad de Longitud

Esta propiedad ha sido una de las más estudiadas y de la cual se reportan más datos confiables, dado que las situaciones experimentales a partir de las cuales se ha evaluado lograron eliminar la interferencia de otro tipo de información que posibilitara solucionar la tarea. Es así como se tenía que los niños desde los 3 años de edad (Huttenlocher et al., 1999) representaban la longitud de una ubicación en una caja de arena para luego encontrar un objeto oculto. El estudio de Spelke e Izard (2010) había concluido que este conocimiento presentaba un desarrollo considerable en la edad de 4 a 8 años y de allí en adelante continuaba con una pequeña tendencia creciente que se tornaba estable cercano a los 10 años. Nuestro estudio es coherente con lo anterior, de forma que se obtuvo que los niños de 4 años logran solucionar las situaciones de acuerdo a la pista de longitud y a mayor edad mejor el desempeño, encontrándose un gran desarrollo a la edad de 6 años.

Además se encontraron algunas particularidades en el desarrollo, siendo que la comparación de las distancias 12cm en el mapa o 120cm en el espacio real con 6cm – 60cm resultó más fácil en unas situaciones que en otras, dependiendo de la estructura designada como la correcta (mapa). De manera que al tener las mimas dos estructuras para comparar en el espacio real hubo mayor porcentaje de éxito cuando la estructura que se debía identificar correspondía a la formada por un lado

largo de 12 – 120cm y uno corto de 6-60cm. La literatura (Newcombe, Huttenlocher y Learmonth, 1999) reporta que los niños desde los 5 meses de edad están capacitados para identificar y codificar de forma diferenciada una distancia amplia (30cm) y una más fina (20cm), de manera que en este estudio se esperaba que no hubiese habido diferencias al discriminar la longitud corta o larga. Sin embargo, la presente tarea, a diferencia del estudio anterior, les exigía a los niños codificar dos longitudes relacionadas (dos lados) en lugar de una. De manera que los niños debían razonar, que los dos lados de la figura eran iguales cuando se les presentaba la longitud corta en el mapa, y que un lado era más largo (el doble) que el otro lado cuando se les presentaba la longitud larga. Los resultados de manera clara mostraron que en las tres edades resultó más difícil establecer la igualdad de los lados que la evidente relación de diferencia proporcionada por las situaciones de longitud larga, quizás precisamente la información perceptual evidente que ofrecían estas situaciones facilitaron su reconocimiento.

Propiedad de Ángulo

En cuanto al conocimiento de la propiedad de ángulo la evidencia reportada (Shusterman et al., 2008; Uttal, 1996; Sandberg, Huttenlocher y Newcombe, 1996) no era confiable en la medida que al ser evaluada siempre había presentado la interferencia de otro tipo de información (landmark u otra propiedad euclidiana), así estos resultados no reportaban información específica respecto a la sensibilidad a esta propiedad. Como ya se mencionó en la revisión, la tarea de Spelke et al. (2011) permitió controlar dicha interferencia a la hora de evaluar las tres propiedades, por lo que se hizo posible obtener resultados más precisos acerca de la propiedad de

ángulo, mostrando que los niños de 6 años tenían un buen desempeño (por encima de nivel de azar) en estas situaciones incluso similar al desempeño en longitud. Pero dichos resultados sólo dan cuenta del comportamiento de los niños de 6 años. Por esto el presente estudio al considerar otros grupos de edad (4 y 8 años) proporciona un conocimiento más amplio acerca del surgimiento y desarrollo de la sensibilidad al ángulo. Teniendo evidencia que desde los 4 años los niños son sensibles a esta propiedad y manejan este tipo de representaciones para solucionar problemas, además esta sensibilidad se hace mejor con el desarrollo siendo los niños de 8 años más exitosos. Específicamente, se encontró que el conocimiento sobre ángulo agudo, que permitió a los niños identificar esta propiedad euclidiana entre otras y diferenciar este tipo particular de ángulo de otros, no varía mucho en los tres grupos de edad como si ocurre con los otros dos tipos de ángulo (recto y obtuso), lo que indica que el conocimiento de estos dos depende más de la educación formal y cultura.

Propiedad de Sentido

Respecto a esta propiedad, la investigación llevada a cabo a partir del procedimiento de reorientación (Hermer & Spelke, 1994; Cheng & Gallistel, 1984 citado en Spelke, Lee e Izard, 2010; Nardini, Atkinson & Burgess, 2008) había afirmado que desde muy temprana edad (18 a 24 meses) los niños atienden a la propiedad de sentido para ubicarse en un cuarto y encontrar un objeto en una de las esquinas donde previamente lo vieron ocultar. Sin embargo, otros estudios (Shusterman et al., 2008; Spelke & Izard, 2009; Spelke et al., 2011; Vasilyeva & Bowers, 2006) desarrollados con el uso de representaciones simbólicas (formas

dibujadas, tareas de mapas) siempre habían reportado poca sensibilidad incluso menor que los niveles de azar determinados. Lourenco y Huttenlocher (2007) afirman que la exigencia en la tarea del primer tipo puede ser solucionada por formas primitivas de conocimiento siendo que otras especies distintas de la humana también pueden resolverla. Los mismos autores (Huttenlocher & Lourenco, 2007) discutieron la posibilidad que esta tarea no fuese resuelta por pistas de sentido sino por una facultad de orden, así pared más larga primero y pared más corta después. Otros autores como Spelke, Lee e Izar (2009) explicaron esta diferencia en las evidencias al afirmar que inicialmente hay dos sistemas de conocimiento geométrico básico uno para usar en formas de 2D y otro para navegar en espacios 3D, luego con la unión de estos se consolidaría el sistema general. Así que los niños podrían identificar el sentido sólo en los espacios 3D hasta no haber desarrollado el sistema general. Sin embargo, este modelo no ofrece explicaciones sobre el proceso de integración de los dos sistemas básicos. Dado lo anterior, se tiene que la segunda tarea es más precisa al permitir interactuar con “modelos” y símbolos y no sólo con los objetos o el espacio real de manera directa, de esta forma remite a los sujetos al campo de las representaciones que es lo que en realidad interesa para determinar el desarrollo de este conocimiento.

Sin embargo el presente estudio obtuvo resultados que contrarían la evidencia de los estudios realizados con tareas similares, ocurriendo que los niños desde los 4 años obtienen resultados que muestran el uso de su conocimiento sobre la propiedad sentido. Esto se explica, como se mencionó antes, por la inclusión de situaciones para la evaluación del sentido arriba-abajo, las cuales resultaron más fáciles para los

niños menores (LEyT). Así se encontró que este conocimiento también mejora con la edad, habiendo un desarrollo substancial a la edad de 6 años.

Esta particularidad sobre el desarrollo de la propiedad de sentido, estableció que el conocimiento sobre los distintos tipos de sentido se construyen a diferentes edades. Esto ha sido reportado por Gregory, Landau y McCloskey (2011) quienes encontraron que los niños de 4 y 5 años cometen más errores en imágenes en espejo a partir de un eje vertical extrínseco y a partir de un eje vertical del objeto (Eje Principal) lo que para ellos se sustenta en que el mundo ofrece características fácilmente distinguibles para asignar valores a los ejes verticales, así arriba cielo abajo tierra por ejemplo; mientras que asignar valores al eje horizontal es más complicado por lo cual no es fácil distinguir entre izquierda y derecha.

Finalmente, es importante destacar la importancia de investigar en esta temática dada la funcionalidad de la geometría euclidiana para interpretar y modelizar el espacio físico, permitiendo así apropiaciones del mismo que permiten interpretarlo de una mejor o quizás más eficiente manera y posibilitando habilidades de diferentes tipos (visuales, verbales, de dibujo y lógicas) relacionadas con el espacio. Se espera entonces, que futuras investigaciones continúen resolviendo las dudas que aún subsisten sobre el desarrollo de este conocimiento, quizás implementando unos grupos de mayor edad para hacer más extensivas las trayectorias, implementando diseños específicos para la propiedad de ángulo y sentido donde aún quedan interrogantes.

Conclusiones

Esta investigación exploró a partir de un experimento el desarrollo del conocimiento científico en los niños de 4 a 8 años, de manera general los resultados permiten afirmar que desde los 4 años (m=4.3 años, rango 3,8 a 4,8años) los niños comprenden relaciones simbólicas que les comunican aspectos sobre el espacio, de forma que logran interpretar herramientas de desarrollo cultural para codificar una ubicación de interés y satisfactoriamente llevan a cabo el mismo proceso en el espacio físico o real.

La garantía de esta facultad permitió entonces evaluar el estado de conocimiento sobre las propiedades euclidianas que relacionaban los elementos y los objetos en el espacio simbólico (mapa) y en el espacio real. Siendo principal primero destacar que se confirmó lo que la evidencia previa afirmaba sobre un desarrollo con una tendencia progresiva, es decir, a mayor edad los niños demuestran una mayor sensibilidad a las propiedades incrementando sus desempeños en cada una de las situaciones, independientemente del tipo de información que se estuviera evaluando (longitud, ángulo o sentido). Lo que quiere decir, que el tipo de propiedad no influye en los desempeños.

Incluso, al especificar las trayectorias de desarrollo, el desempeño de los niños de 4 años se mostró siempre diferente al de los grupos de edad mayores. Esto se hizo evidente para las propiedades de longitud y sentido. Sin embargo, aun cuando la trayectoria desarrollo para la propiedad de ángulo se mostró diferente en el caso de los niños de 6 años, quienes manifestaron un comportamiento intermedio

siendo similar tanto a los niños de 4 como a los de 8 años, la tendencia progresiva se sigue manteniendo.

Ahora bien, este estudio también permite concluir que dentro de cada propiedad es posible distinguir características a las que los niños pueden atender con mayor o menor facilidad. Esto se muestra a través de las comparaciones realizadas en relación a las propiedades de longitud y sentido. De esta manera, en cuanto a la propiedad de longitud, los niños revelan una mayor sensibilidad cuando la longitud a discriminar, corresponde a la longitud más larga en comparación a la longitud corta.

Finalmente para la propiedad de sentido, la discriminación dela relación arriba-abajo resulta más fácil que la discriminación de la relación izquierda-derecha.

La diferenciación de ciertas características para cada propiedad, en este caso longitud y sentido, se constituye en una información concluyente, especialmente para la propiedad de sentido, teniendo en cuenta que la literatura la reporta como una propiedad ante la cual los niños presentan mayor dificultad; algo que se contraría con los resultados obtenidos en este estudio y que se explica precisamente por el hecho de que los niños son más sensibles al sentido cuando la relación que le requiere establecer corresponde a arriba-abajo. Relación que los estudios previos no tienen en cuenta a la hora de evaluar esta propiedad.

Referencias

Bang, V; Greco, P; Grize, J; Hatwell, Y; Piaget, J; Seagrim, G & Vurpillot, E. (1971). *Epistemología del Espacio*. Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Beristain, E. y Campos, Y. (1997). Matemáticas McGraw–Hill 7º. Bogotá: McGraw–Hill Intermericana S.A.

Castro, J. (2004). El Desarrollo de la Noción de Espacio en el Niño de Educación Inicial. *Acción Pedagógica, 13*, (2), 162-170.

Davies, C.& Uttal, D. (2007). Map Use And The Development of spatial Cognition. Publicado en *The Emerging Spatial Mind*.: 219-247

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. & Spelke, E. (2006).Core Knowledge of Geometry in an Amazonian Indigene Group. *Science*, *311*, (5759), 381 – 384.

DeLoache, J. (1995). Early Symbol Understanding and Use. In Douglas L. Medin (Ed.).*The Psychology of Learning and Motivation: Advances in research and theory, 33*, 65–114. New York: Academic Press.

DeLoache, J. (2004). Becoming Symbol-Minded. Trends in Cognitive Sciences, 8, 66-70.

Gregory, E., Landau, B. & McClosky, M. (2011).Representation of object orientation in children: Evidence from mirror-image confusions. *Visual Cognition*, 19 (8), 1035 – 1062.

Hermer, L., & Spelke, E. (1994). A geometric process for spatial reorientation in young children. *Nature, 370*, 57–59.

Huttenlocher, J., & Lourenco, S. F. (2007). Coding location in enclosed spaces: Is geometry the principle?. *Developmental Science, 10*, 741–746.

Huttenlocher, J., Newcombe, N. &Vasilyeva, M. (1999).Spatial Scaling in Young Children. *Psychological Science*, *10,* (5), 393 – 398.

Izard, V & Spelke, E. (2009).Development of Sensitivity to Geometry in Visual Forms. *Human Evolution*, *23*, (3), 213 – 248.

Liben, S., Moore, L. & Golbeck, L. (1982) Preschoolers´ Knowledge of their Classroom Environment: evidence from Small- Scale and Life- Size Spatial Tasks. *Child Development*, *53,* (5), 1275-1284.

Liben, L., & Yekel, C. (1996).Preschoolers' Understanding of Plan and Oblique Maps: The Role of Geometric and Representational Correspondence. *Child Development, 67*, (6), 2780-2796.

Lourenco, S. F., & Huttenlocher, J. (2007).Using geometry to specify location: implications for spatial coding in children and nonhuman animals. *Psychological Research, 71*, 252–264

MacDonald, S; Spetch, M; Kelly, D & Cheng, K. (2004).Strategies in Landmark Use by Children, Adults and Marmoset Monkeys. *Learning and Motivation*, 35, 322-347.

MEN-ASCODAFE. (2003). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Nardini, M.; Atkinson, J & Burgess, N. (2008). Children reorient using the left/right sense of coloured landmarks at 18-24 months. Cognition, 106, 519-527.

Ness, D. & Farenga, S. (2007). Developmental Perspectives on Spatial and Geometric Thinking. *In Knowledge Under Construction: The Importance of Play*

in Developing Children's Spatial Geometric Thinking. Estados Unidos: Rowman & Littlefield Publishers, Inc.

Newcombe, N. S., Huttenlocher, J., &Learmonth, A. E. (1999).Infants' coding of location in continuous space. *Infant Behavior and Development , 22*, 483-510.

Piaget, J & Inhelder, B. (1967). The Child's Conception of Space. (F.J. Langdon & J.L.Lunzer, Trans.). New York: Norton. (Original work published 1948)

Sandber, E.H. & Huttenlocher, J. (1996).The Development of Hierarchical Representation of Two-Dimensional Space. *Child Development, 67*, 721 – 739.

Shusterman, A., Lee, V. & Spelke, E. (2008).Young children's spontaneous use of geometry in maps. *Developmental Science,* F1–F7.

Slater A., Mattock A., Brown E., Bremner J. G., 1991, *Form Perception at Birth: Cohen and Younger (1984) Revisited*, Journal of Experimental Child Psychology, 51: 395-406.

Spelke, E., Lee, A. e Izard, V. (2010). Beyond Core Knowledge: Natural Geometry. *Cognitive Science,* 1-22.

Spelke, E., Gilmore, C. & McCarthy, S. (2011). Kindergarden Children's Sensitivity to Geometry in Maps. Developmental Science, 14, (4), 809 – 821.

Universidad del Valle. (2010). Banco de Proyectos de Investigación Científica o Tecnológica. *Pensamiento Geométrico Infantil y Uso de Mapas como Artefactos Simbólicos para la Representación del Espacio en SRP y Museos*.

Uttal, D. y Wellman, H. (1989) Young Children´s Representation of Spatial Information Acquired From Maps. D*evelopmental Psychology, 25,* (1)*,* 128-138.

Uttal, D. (1994). Preschooler´s and Adults' Scale Translation and Reconstruction of Spatial Information Acquired from Maps. *British Journal of Developmental Psychology, 12*, 259-275.

Uttal, D. (1996). Angles and Distances: Children´s and Adult´s Reconstruction and Scaling of Spatial Configurations. *Child Development, 67,* 2763-2779.

Uttal, D. (2000). Seeing the big picture: map use and the development of special cognition. *Development Science*, 247-286.

Vasilyeva, M. & Bowers, E. (2006).Children's Use of Geometry Information in Mapping Task. Journal of Experimental Child Psychology, 95, 255 - 277.

Vasilyeva, M. & Huttenlocher, J. (2004).Early Development of Scaling Ability, Developmental Psychology, 40 (5), 682 – 690.

Wohlwill, J. & Wieiner, M. (1964).Discrimination of Form Orientation in Young Children. *Child Development, 35,* 1113 – 1125.