

Modelamiento matemático de la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* y su impacto en los brotes de cultivos comerciales y trampa a largo plazo

Naren Samir Herrera Erazo.

Directora: Juddy Heliana Arias Castro, PhD.

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático



Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2025

Resumen

En este trabajo de grado se analiza la dinámica poblacional del psílido asiático de los cítricos (*Diaphorina citri*) y su impacto sobre los cultivos de cítricos teniendo en cuenta que este actúa como insecto vector de la enfermedad Huanglongbing (HLB). Esta enfermedad, de origen bacteriano, provocando deformación de los frutos, debilitamiento general del árbol y, en muchos casos, su muerte. En particular, se describen las características generales del insecto, así como su distribución geográfica en el mundo y en especial en Colombia. Asimismo, se explica cómo el estímulo de crecimiento de la planta permite la generación de nuevos brotes, creando condiciones adecuadas para el desarrollo y propagación del psílido; también se indaga por estrategias de control importantes como el uso de cultivos trampa. Teniendo en cuenta lo anterior se propuso un primer modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias que explica la interacción entre *Diaphorina citri* y los brotes de la planta huésped, tomando como referencia un modelo previamente planteado en otro trabajo. Se realiza el análisis cualitativo del sistema, determinando los puntos de equilibrio, su estabilidad y un análisis de sensibilidad que permite identificar los parámetros del modelo que presentan mayor incidencia en el sistema. Finalmente, se planteó un segundo modelo donde se introduce el cultivo trampa, realizando el mismo análisis, acompañado de simulaciones que permiten visualizar posibles dinámicas a partir de condiciones previamente establecidas.

Palabras clave: *Diaphorina citri*, modelamiento matemático, análisis cualitativo, cultivos.

Agradecimientos

Primero que nada, agradezco a mis padres y a mi familia por su apoyo incondicional, por su cariño y motivación a lo largo de este camino.

A la universidad, por brindarme la oportunidad de crecer no solo académicamente, sino también personalmente. A los distintos profesores que conocí durante mi carrera, quienes, con su dedicación, paciencia y orientación, dejaron una huella en mi formación. En particular, agradezco a la profesora Juddy Heliana Arias por recordarme siempre la importancia de la perseverancia y el esfuerzo, no solo en lo académico, sino también en lo personal. Sus enseñanzas, consejos y hasta sus regaños en forma de consejo siempre estarán presentes en mi vida, tanto en el ámbito personal como profesional.

Extiendo mi gratitud a mis compañeros y amigos, quienes han hecho de esta carrera una experiencia enriquecedora, llena de aprendizajes, desafíos y momentos inolvidables. A todas las personas que he conocido en este camino universitario, gracias por las conversaciones, el apoyo mutuo y por compartir esta etapa que ha marcado mi vida. En particular, agradezco la amistad de Camilo Andrés Velasco, Aarom Marcell, John Ericson, Lina Marcela, Jorge Leandro y Deissy Marcela, por estar siempre ahí y hacer de esta experiencia algo aún más valioso.

A mi novia Bibiana Mosquera, por estar presente, por su apoyo incondicional, su amor y por ser mi compañera en este proceso.

Agradezco también al Semillero de la Universidad del Valle y a todos sus integrantes por su amabilidad, hospitalidad y por haber estado presentes en mi formación. Gracias por tratarme como parte de su familia y hacerme sentir siempre bienvenido.

Finalmente, a todos aquellos que, de manera directa o indirecta, han contribuido a la culminación de este trabajo, les expreso mi más sincero agradecimiento.

Contenido

Resumen	II
Agradecimientos	III
Introducción	x
1. Preliminares	1
1.1. Psílido asiático <i>Diaphorina citri</i>	1
1.1.1. Biología y Morfología de <i>Diaphorina citri</i>	1
1.1.2. Interacción de <i>Diaphorina citri</i> con la planta huésped	3
1.1.3. Distribución Geográfica a nivel mundial	4
1.1.4. Distribución Geográfica en Colombia	5
1.1.5. Cultivo Trampa	6
1.2. Modelo matemático	6
1.2.1. Modelo base	7
1.2.2. Modelo presa-depredador tipo Kolmogorov	8
1.2.3. Análisis cualitativo del sistema	10
2. Modelo de interacción de <i>Diaphorina citri</i> y los brotes de un cultivo.	13
2.1. Descripción del Modelo	13
2.2. Región de interés biológico (Ω)	15
2.3. Análisis Cualitativo	19
2.3.1. Puntos de equilibrio	19
2.3.2. Estabilidad del sistema.	24
2.4. Análisis de sensibilidad	28
2.5. Simulaciones	30
3. Modelo de interacción de <i>Diaphorina citri</i> en presencia de dos cultivos, trampa y comercial	37
3.1. Descripción del Modelo	37
3.2. Región de interés biológico (Ω)	39
3.3. Puntos de equilibrio	41

3.4. Estabilidad de los puntos de equilibrio	45
3.5. Simulaciones	49
4. Conclusiones	55
Bibliografía	57

Índice de figuras

1.1.	Tiempo de duración de los diferentes estados de desarrollo de <i>Diaphorina citri</i> sobre mirto <i>Murraya paniculata</i> bajo condiciones de invernadero. Palmira, Valle del Cauca, Colombia. Tomado de [6].	2
1.2.	(A) Agrupación de psílicos adultos alimentándose de brotes. (B) Hembra adulta con los huevos. (C) Huevos y primer estado ninfal en brotes. Tomado de [15].	3
1.3.	(A) Daños a las nuevas hojas por la alimentación. (B) Muerte de brote por alimentación. (C) Efecto de enfermedades sobre hojas de la planta. Tomado de [15].	4
1.4.	Distribución geográfica del Psílido asiático de los cítricos <i>Diaphorina citri</i> con datos de CAB International, 2019 y EPPO, 2018. Tomado de [7].	4
1.5.	Ubicación de las regiones citrícolas en Colombia. La escala de colores señala el área plantada y las líneas rojas enmarcan las zonas donde previamente se ha informado la detección de la bacteria asociada a la enfermedad HLB. Tomada de [13].	5
2.1.	Estabilidad del sistema en términos de Q_0 y Q_B . Los puntos de equilibrio en azul son los asintóticamente estables, mientras que los rojos son los inestables, en cada una de las situaciones, donde $\lambda = \left(1 - \frac{1}{Q_D}\right)^{-1}$	28
2.2.	Persistencia de <i>Diaphorina citri</i> del modelo (2.1). Población de estados inmaduros y maduros (izq.) y comportamiento del brote y el estímulo (der.).	32
2.3.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.05$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	33
2.4.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.08$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	33
2.5.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.2$, aumento respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	34
2.6.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.045$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	34

2.7.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.09$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	35
2.8.	Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.25$, aumento respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.	35
3.1.	Persistencia de <i>Diaphorina citri</i> del modelo (3.1). Al lado izquierdo el comportamiento de las poblaciones en el cultivo comercial. Al lado derecho, el comportamiento de las poblaciones del cultivo trampa. . .	50
3.2.	Presencia exclusiva de plantas ancianas en ambos cultivos	52
3.3.	Presencia de plantas productivas en ambos cultivos.	52
3.4.	Presencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa.	53
3.5.	Presencia de plantas ancianas en el cultivo comercial y plantas productivas en el cultivo trampa.	54

Índice de tablas

1.1. Parámetros del modelo (1.1). El parámetro φ_d representa la cantidad de brotes por planta por estado inmaduro.	7
2.1. Parámetros del modelo (2.1)	14
2.2. Sentido Biológico de los puntos de equilibrio.	23
2.3. Resultados de las ejecuciones del algoritmo. Clave de lectura: EJE: Ejecución. P.E: Puntos de equilibrio. SB: Sentido biológico. VPN: Valores propios negativos. NCC: No cumplen las condiciones establecidas en la Tabla 2.2.	27
2.4. Estabilidad de los puntos de equilibrio.	27
2.5. Índice de sensibilidad de los umbrales respecto a los parámetros. . . .	29
2.6. Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones. .	31
3.1. Parámetros del modelo (3.1) donde x toma los valores de c o n , según corresponda	39
3.2. Descripción de los puntos de equilibrio del modelo (3.1). P.E: Punto de equilibrio.	42
3.3. Resultados de las ejecuciones del algoritmo para encontrar una única raíz real positiva. Clave de lectura: SCC: Cantidad de raíces que resultan del paso 6 del algoritmo anterior.	45
3.4. Resultados de las ejecuciones del algoritmo. Clave de lectura: EJE: Ejecución. P.E: Puntos de equilibrio. SB: Sentido biológico. VPN: Valores propios negativos. NCN: No es un caso que se presente en la naturaleza. .	49
3.5. Parámetros del modelo (3.1) para el caso de coexistencia entre los dos cultivos (comercial y trampa).	50
3.6. Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia exclusiva de plantas ancianas en ambos cultivos.	51
3.7. Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas productivas en ambos cultivos. .	51
3.8. Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa.	53

3.9. Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas ancianas en el cultivo comercial y plantas productivas en el cultivo trampa.	54
--	----

Introducción

La industria citrícola en la actualidad enfrenta desafíos significativos a nivel mundial. Entre los problemas más urgentes está la presencia del psílido asiático de los cítricos (*Diaphorina citri* Kuwayama). Este diminuto pero devastador insecto plaga, cuyo tamaño no es mayor que un grano de arroz, ha demostrado ser el portador de la enfermedad Huanglongbing (HLB), una amenaza significativa para los cultivos de cítricos. La enfermedad HLB, de origen bacteriano, provoca daños directos e indirectos, afectando la salud de los árboles y ocasionando pérdidas millonarias en las principales zonas citrícolas del mundo [3].

El desarrollo poblacional de *Diaphorina citri* está estrechamente ligado a la brotación de la planta huésped, un proceso regulado por el estímulo de brotación. Este estímulo promueve la aparición de nuevos brotes tiernos, que no solo son esenciales para el crecimiento de la planta, sino que también constituyen un recurso indispensable para el insecto, siendo esta una condición necesaria para la oviposición y el desarrollo de *Diaphorina citri*. Los tejidos jóvenes de los nuevos brotes contienen una mayor concentración de nutrientes, lo que crea unas condiciones ideales para la alimentación del insecto. Los daños directos resultan de su alimentación, que debilita los brotes tiernos, los vuelve más propensos a fracturarse y provoca deformaciones en las hojas, afectando el crecimiento normal de la planta. Además, la extracción de savia y la producción de mielcilla propicia el desarrollo de fumagina, un patógeno fúngico que interfiere con la fotosíntesis [4], [18].

El daño indirecto, sin embargo, alcanza niveles significativos, ya que el psílido asiático de los cítricos es el vector de la enfermedad HLB, la cual debilita las raíces, malforma los frutos y desencadena la acumulación excesiva de almidón, bloqueando el floema y provocando la muerte de las plantas [12].

A nivel mundial, el psílido asiático de los cítricos ha extendido su presencia por Asia, América del Sur, América del Norte, África y el Caribe. En Colombia, la presencia del psílido asiático de los cítricos se registró por primera vez en el año 2007, seguido por la detección de la enfermedad HLB en 2015 [4]. Desde entonces, su propagación ha sido constante, afectando diferentes regiones del país y generando una creciente preocupación en la citricultura nacional [13].

La principal afectación se evidencia en los cultivos comerciales que son productos agrícolas plantados y cultivados con el propósito principal de ser vendidos o exportados para obtener ganancias. Dentro de estos, se encuentran las especies de la familia *Rutaceae* como las naranjas, mandarinas, limas ácidas, limones, tangelos y pomelos, las cuales representan un componente crucial de la agricultura mundial [10].

Para enfrentar este tipo de plagas en los cultivos se recurre a distintas técnicas, que pueden ser de tipo biológico, químico o genético. El control químico hace referencia principalmente al uso de insecticidas, mientras que el control genético se refiere a modificaciones de las plantas que las hagan resistentes a ciertas enfermedades [15]. El control biológico incluye la liberación de depredadores naturales de los insectos plaga y el uso de cultivos trampa. Esta última técnica se basa en la colocación estratégica de plantas atrayentes que actúan como señuelo. Estas plantas son seleccionadas por su capacidad para desviar la atención de las plagas lejos del cultivo comercial manipulando los patrones de comportamiento de los insectos perjudiciales, atrayéndolos hacia un cultivo específico y reduciendo así los daños causados a los cultivos de interés. Un ejemplo de plantas trampa incluye la *Murraya paniculata*, utilizada como planta ornamental y de barrera ya que es preferido por el psílido asiático [17].

Para el año 2018 en Colombia, donde alrededor del 90 % de las áreas productoras de cítricos se encuentran libres de HLB, la presencia significativa de poblaciones de *Diaphorina citri* plantea un riesgo inminente de propagación de la enfermedad [13]. Comprender detalladamente la dinámica poblacional de este insecto vector y su interacción con la brotación de las plantas cítricas es esencial para mitigar eficazmente dicho riesgo y preservar la salud de los cultivos en el país.

De acuerdo con lo anterior, este trabajo de grado tiene como objetivo fundamental abordar la compleja interacción entre el psílido asiático de los cítricos (*Diaphorina citri*) y los cultivos de cítricos. Para lograr una comprensión más profunda de esta dinámica, primero se plantea un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias, considerando un solo cultivo de cítricos, teniendo en cuenta el ciclo de brotación de la planta a largo plazo (siguiendo un patrón cíclico). Posteriormente, se extenderá el modelo para analizar la interacción con dos cultivos: comercial y trampa. Además, se realiza un análisis cualitativo que permite comprender el comportamiento general de ambos modelos, incluyendo la identificación de patrones.

En este contexto, también se harán simulaciones numéricas para contrastar y validar los resultados obtenidos en el análisis cualitativo. Este enfoque matemático busca proporcionar una visión más clara de la dinámica de la interacción entre el psílido asiático de los cítricos y los cultivos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecen algunos fundamentos necesarios para el desarrollo de este trabajo de grado. En primer lugar, se presenta una introducción del psílido asiático de los cítricos *Diaphorina citri*; luego, se introducen los modelos a usar, como los modelos tipo Kolmogorov, y en particular, el modelo Lotka-Volterra, que será utilizado con el fin de modelar el comportamiento cíclico de los brotes a largo plazo. Finalmente, se brinda una descripción del análisis cualitativo del sistema.

1.1. Psílido asiático *Diaphorina citri*

El psílido asiático de los cítricos *Diaphorina citri* es considerado una de las plagas más relevantes a nivel mundial en la actualidad, ya que este genera daños directos e indirectos sobre la planta huésped. Los daños directos resultan de la alimentación tanto de ninfas como de adultos, lo que debilita los brotes jóvenes, haciéndolos propensos a deformarse o fracturarse, afectando el crecimiento normal de la planta. Durante este proceso, el insecto extrae gran cantidad de savia, lo que provoca que las ninfas segreguen una mielcilla que favorece el desarrollo de varios tipos de hongos que son productores de la fumagina, un patógeno fúngico que interfiere con la fotosíntesis.

Por otro lado, los daños indirectos están asociados a su papel como insecto vector. El mayor riesgo que representa el psílido radica en su capacidad para transmitir la enfermedad HLB, considerada la más dañina que afecta a los cultivos cítricos. Esta enfermedad, de origen bacteriano, debilita las raíces, malforma los frutos y desencadena la acumulación excesiva de almidón, bloqueando el floema y provocando la muerte de las plantas [4], [9].

1.1.1. Biología y Morfología de *Diaphorina citri*

El ciclo de vida de *Diaphorina citri* tiene una estrecha relación con su planta hospedante, siendo la familia Rutaceae su principal hábitat, con preferencias marcadas

por los géneros *Citrus* y *Murraya*. Las condiciones medioambientales, en particular la temperatura y la humedad, influyen significativamente en su desarrollo. La temperatura óptima para su supervivencia se encuentra entre los 25°C y 28°C; fuera de este rango, ya sea por un aumento o una disminución, su supervivencia disminuye; mientras que a mayores niveles de humedad, la supervivencia tiende a aumentar [8].

Este ciclo de vida consta de tres fases distintas: huevo, cinco estadios ninfales y adulto, como se ilustra en la Figura 1.1.

- **Huevos:** las hembras ovipositan más de 800 huevecillos en brotes tiernos, exhibiendo una forma ovoide inicial de color amarillo claro, que posteriormente se torna anaranjado antes de la eclosión. Este estadio tiene una duración de dos a cinco días, influenciado por la temperatura con un rango óptimo. [8], [11].
- **Ninfas:** *Diaphorina citri* atraviesa cinco instares ninfales, cada uno con características específicas. Desde el cuerpo elongado en el primer instar hasta las ninfas con esbozos alares más desarrollados en el quinto instar; las ninfas muestran una alimentación en tejidos tiernos y una movilidad limitada en los primeros estadios. La duración de esta fase fluctúa entre 8 y 17 días, dependiendo de la temperatura que oscila entre 25°C y 37.1°C [6],
- **Adultos:** son caracterizados por su posición de reposo inclinada a 45° respecto a la superficie de contacto, sus alas moteadas de color castaño, antenas pequeñas con puntas negras y una longevidad superior a 76 días, hacen de *Diaphorina citri* un insecto de relevancia prolongada en el ecosistema. Su longevidad es más notable a temperaturas entre 25°C y 37.1°C [4], [6], [8].

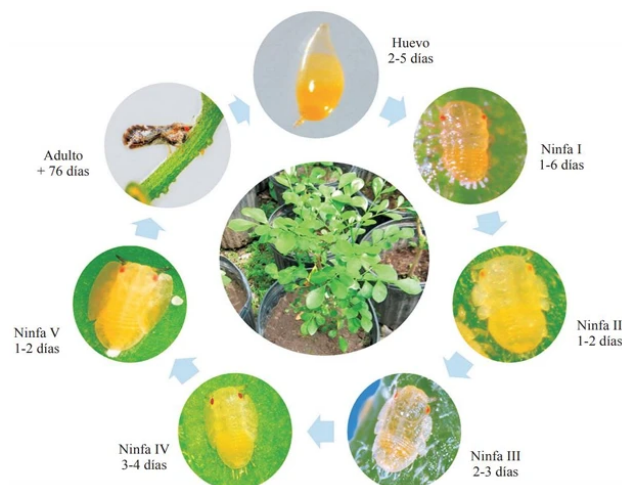


Figura 1.1: Tiempo de duración de los diferentes estados de desarrollo de *Diaphorina citri* sobre mirto *Murraya paniculata* bajo condiciones de invernadero. Palmira, Valle del Cauca, Colombia. Tomado de [6].

1.1.2. Interacción de *Diaphorina citri* con la planta huésped

La brotación de la planta huésped actúa como un potente atrayente para *Diaphorina citri*; este proceso está influenciado por un estímulo de brotación. Dicho estímulo regula y promueve la generación de nuevos brotes, los cuales son esenciales para el crecimiento y desarrollo de la planta. Por esta razón, serán tenidos en cuenta para el modelamiento de la dinámica de *Diaphorina citri* y los brotes de una planta.

Por otra parte, la brotación es un factor determinante para el desarrollo poblacional de *Diaphorina citri*, ya que los brotes recién formados se convierten en una fuente de alimento altamente apetecible debido a la mayor concentración de nutrientes en los tejidos jóvenes.

La combinación de estos factores convierte a los brotes en un blanco ideal para la oviposición y la alimentación de los psílicos, estableciendo así una estrecha relación entre el insecto y la planta. Este ciclo asegura la disponibilidad constante de hospederos adecuados, lo que intensifica la relación de dependencia entre la plaga y la planta huésped: mientras mayor sea la brotación estimulada, más se intensifica el impacto poblacional de la plaga.

Los adultos de *Diaphorina citri* se agrupan en los brotes tiernos, para alimentarse y aparearse (Figura 1.2 A). Después del apareamiento, las hembras requieren alimentarse de estos brotes para producir huevos maduros. Cuando los huevos están listos para ser depositados, las hembras presentan un característico color anaranjado en su abdomen (Figura 1.2 B). Las hembras insertan sus huevos en los tejidos tiernos de los brotes, como los pliegues de las hojas jóvenes o la base de las yemas en formación, lo que asegura un entorno óptimo para el desarrollo de las ninfas (Figura 1.2 C). Una vez que los brotes se han expandido y ya no son adecuados para la oviposición, los adultos pueden continuar alimentándose de hojas maduras o buscar otras plantas hospedantes.

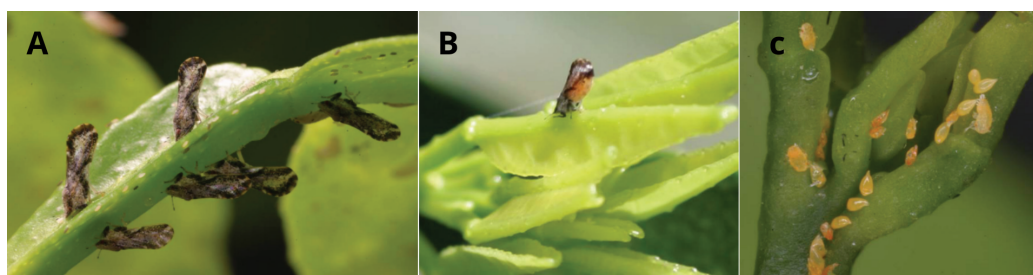


Figura 1.2: (A) Agrupación de psílicos adultos alimentándose de brotes. (B) Hembra adulta con los huevos. (C) Huevos y primer estado ninfal en brotes. Tomado de [15].

La alimentación de ninfas y adultos provoca una serie de daños en los brotes, que pueden afectar significativamente el crecimiento y desarrollo de la planta. Entre los daños más comunes se encuentran la formación de estructuras anormales, la muerte de los meristemos apicales y la abscisión de hojas y brotes enteros (Figura 1.3 A y B). Estos daños reducen la superficie foliar, afectan la fotosíntesis y debilitan la planta,

haciéndola más susceptible a otras plagas y enfermedades (Figura 1.3 C). (Tomado de [15], [18]).

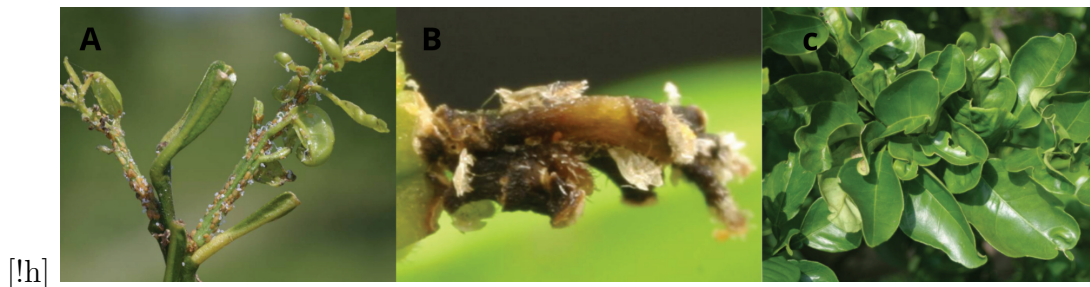


Figura 1.3: (A) Daños a las nuevas hojas por la alimentación. (B) Muerte de brote por alimentación. (C) Efecto de enfermedades sobre hojas de la planta. Tomado de [15].

1.1.3. Distribución Geográfica a nivel mundial

El psílido asiático de los cítricos *Diaphorina citri* se distribuye ampliamente en las regiones tropicales y subtropicales de Asia y ha sido reportado en países como China, India, Malasia, y Arabia Saudita, entre otros [7]. En América, se detectó por primera vez en Brasil, en 1942, y luego se expandió a Argentina, Uruguay, Venezuela y varios países del Caribe y América del Norte, incluyendo Estados Unidos, México y Colombia. Desde su primera detección en Taiwán en 1908, el insecto ha logrado dispersarse a prácticamente todas las áreas productoras de cítricos en todo el mundo, convirtiéndose en una amenaza significativa para la agricultura de cítricos [7]. En la Figura 1.4, se presenta su distribución geográfica para el año 2018.

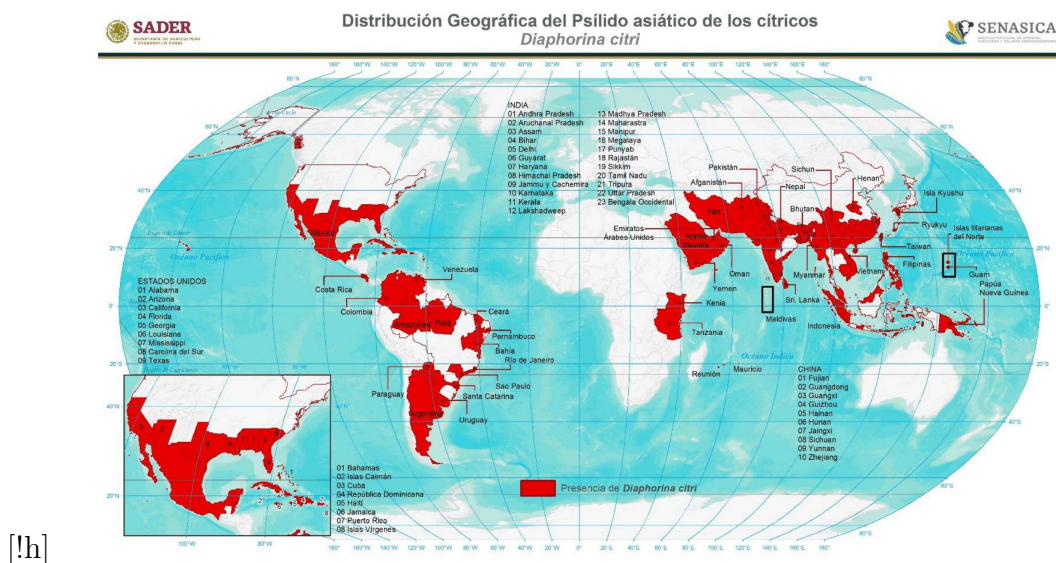


Figura 1.4: Distribución geográfica del Psílido asiático de los cítricos *Diaphorina citri* con datos de CAB International, 2019 y EPPO, 2018. Tomado de [7].

La rápida expansión de *Diaphorina citri* en nuevas regiones se ha visto facilitada por el aumento del comercio internacional de plantas y frutas, así como por el cambio climático, que ha creado condiciones favorables para su supervivencia en áreas previamente no colonizadas. Las regiones más afectadas incluyen América Latina y América del Norte, donde la producción de cítricos es una actividad económica clave. La amenaza que representa *Diaphorina citri* continúa creciendo, y se espera que su distribución geográfica se expanda aún más en los próximos años.

1.1.4. Distribución Geográfica en Colombia

En Colombia, la presencia del psílido asiático de los cítricos se registró por primera vez en el año 2007, seguido por la detección de la enfermedad HLB en 2015 [4]. Desde entonces, su propagación ha sido constante, afectando diferentes regiones del país y generando una creciente preocupación en la citricultura Colombiana debido al riesgo de dispersión de la enfermedad HLB a través de psílicos infectivos y material vegetal contaminado. La Figura 1.5 presenta la distribución geográfica de la enfermedad HLB en Colombia para el año 2018, destacando las zonas más afectadas por la enfermedad.

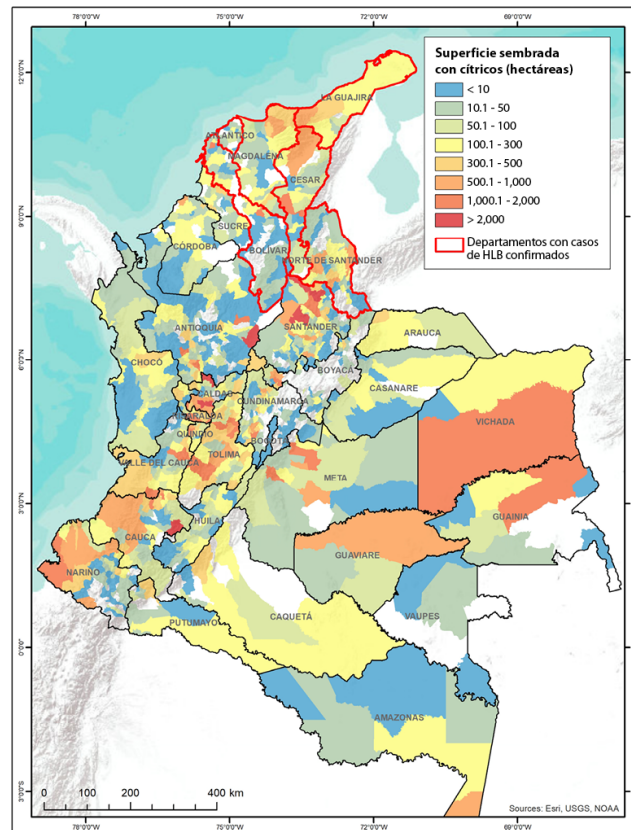


Figura 1.5: Ubicación de las regiones citrícolas en Colombia. La escala de colores señala el área plantada y las líneas rojas enmarcan las zonas donde previamente se ha informado la detección de la bacteria asociada a la enfermedad HLB. Tomada de [13].

Esta distribución es preocupante debido al impacto económico y agrícola en estas áreas, especialmente considerando la rápida expansión del insecto desde su detección inicial en 2007. Dado el comportamiento expansivo de *Diaphorina citri* en las regiones cítricas, es muy probable que, en la actualidad, su presencia haya aumentado considerablemente, afectando más zonas del país y elevando el riesgo de propagación de la enfermedad HLB.

1.1.5. Cultivo Trampa

El daño más significativo que causa *Diaphorina citri* ocurre en los cultivos de carácter comercial. En este grupo se incluyen especies pertenecientes a la familia *Rutaceae*, tales como las naranjas, mandarinas, limas ácidas, limones, tangelos y pomelos, destinados a la venta y exportación [10].

Para su control se emplean diversas estrategias, que pueden clasificarse en: químicas, genéticas y biológicas. Dentro de estas últimas, se incluye la liberación de depredadores naturales de los insectos plaga y el uso de cultivos trampa. Esta última técnica se basa en la colocación estratégica de plantas atrayentes que actúan como señuelo. Las plantas son seleccionadas por su capacidad para desviar la atención de las plagas lejos del cultivo comercial manipulando los patrones de comportamiento de los insectos perjudiciales, atrayéndolos hacia un cultivo específico y reduciendo así los daños causados a los cultivos de interés. Un ejemplo de plantas trampa es la *Murraya paniculata* utilizada como planta ornamental y de barrera, ya que es preferida por el psílido asiático de los cítricos [17].

Entre las ventajas que representa el uso del cultivo trampa, se incluyen la reducción en el uso de pesticidas, menores costos en comparación con el control genético, y la facilidad de complementarlo con otras estrategias de control biológico (como la liberación de depredadores naturales) para unos resultados más efectivos.

1.2. Modelo matemático

En este trabajo de grado se disponen de algunos modelos como referencia para plantear un nuevo modelo y analizar la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* en los cultivos de cítricos. El punto de partida es el modelo previamente estudiado en [18], el cual se centra en caracterizar la dinámica poblacional en periodos cortos de tiempo, referentes al ciclo de vida del insecto plaga. A partir de esta base, se hace uso de los modelos tipo Kolmogorov, que permiten extender y generalizar el enfoque hacia periodos más largos de tiempo, en donde se considera el estímulo de brotación de una planta como variable adicional. Así, la transición de un modelo a otro permite el análisis de las dinámicas poblacionales en escenarios más generales.

1.2.1. Modelo base

El modelo que se plantea y analiza para la dinámica poblacional en [18], es:

$$\begin{aligned} D_i'(t) &= f\phi D_m(B - \varphi_d D_i) - (\delta_i + vB)D_i, \\ D_m'(t) &= vBD_i - \delta_m D_m, \\ B'(t) &= \rho B \left(1 - \frac{B}{\kappa}\right) - B(\varphi_i \lambda D_i + \varphi_m D_m), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

- $D_i(t)$ es el número promedio de individuos en estado inmaduro de *Diaphorina citri* en el momento t .
- $D_m(t)$ es el número promedio de individuos en estado maduro de *Diaphorina citri* en el momento t .
- $B(t)$ es el número promedio de brotes sin afectación de la planta hospedante en el momento t .

Los parámetros del modelo (1.1) son no-negativos y se describen en la siguiente tabla.

Parámetro	Descripción
f	Proporción de hembras adultas de <i>Diaphorina citri</i> .
ϕ	Tasa de oviposición de la hembra adulta de <i>Diaphorina citri</i> por brote.
$1/\varphi_d$	Capacidad de carga de estados inmaduros por brote.
v	Tasa de transición de estado inmaduro a estado maduro por brote.
δ_i	Tasa de mortalidad del estado inmaduro.
δ_m	Tasa de mortalidad del estado maduro.
ρ	Tasa intrínseca de crecimiento de los brotes de la planta.
λ	Proporción del estado inmaduro que son ninfas de <i>Diaphorina citri</i> .
φ_i	Tasa de afectación al brote por alimentación del estado inmaduro.
φ_m	Tasa de afectación al brote por alimentación del estado maduro.
κ	Capacidad de carga de brote por planta.

Tabla 1.1: Parámetros del modelo (1.1). El parámetro φ_d representa la cantidad de brotes por planta por estado inmaduro.

Según la primera ecuación en el sistema (1.1), el estado inmaduro (D_i) aumenta debido a la tasa de oviposición de las hembras maduras y entran en contacto con los brotes para la maduración de sus huevos ($\phi f D_m B$), y que son depositados sobre los brotes no afectados disponibles de *Diaphorina citri* $\left(1 - \frac{\varphi_d D_i}{B}\right)$. Lo que es equivalente a la expresión $f\phi D_m(B - \varphi_d D_i)$. Al mismo tiempo, los estados inmaduros decrecen por la mortalidad natural ($\delta_i D_i$), y la transición de individuos al estado maduro que depende de los brotes que están siendo depredados (vBD_i).

La segunda ecuación en el sistema (1.1) describe la dinámica del estado maduro (D_m), que aumenta con la transición del estado inmaduro a maduro (vBD_i), y decae por su mortalidad natural ($\delta_m D_m$).

Para los brotes, $B(t)$, representados por la tercera ecuación en (1.1), se supone un crecimiento logístico con tasa intrínseca de crecimiento (ρ) y capacidad de carga (κ), y decae por la afectación causada por la alimentación de ninfas ($\varphi_i \lambda BD_i$) y el estado adulto ($\varphi_m BD_m$).

El modelo anterior supone que los brotes alcanzan su capacidad de carga y se mantienen en ese nivel de manera constante, un supuesto que solo es válido en periodos cortos de tiempo. No obstante, en escalas de tiempo más largas, este planteamiento no es realista, ya que los brotes no permanecen indefinidamente en su capacidad máxima, sino que pueden continuar su desarrollo hasta convertirse en ramas, lo que implica fluctuaciones en su cantidad a lo largo del tiempo.

Debido a esta limitación, se hace necesario analizar la dinámica en periodos de tiempo largos, donde se observa un comportamiento cíclico en los brotes de una planta. Para este propósito se consideran los modelos tipo Kolmogorov [1].

1.2.2. Modelo presa-depredador tipo Kolmogorov

Los modelos de dos especies, x e y , cuyas tasas de crecimiento per cápita son funciones del tamaño de la población, son descritos generalmente por modelos de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) &= x f(x, y), \\ y'(t) &= y g(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

a veces denominados modelos de Kolmogorov [1]. Modelamos el comportamiento depredador-presa mediante los siguientes supuestos:

- i) $f_y(x, y) < 0$, $g_x(x, y) > 0$, $g_y(x, y) \leq 0$.
- ii) Para cierta (capacidad de carga de las presas) $K > 0$, $f(K, 0) = 0$ y $f(x, y) < 0$, si $x > K$; para cierta (población mínima de presas para mantener a los depredadores) $J > 0$, $g(J, 0) = 0$.

Como ejemplo, el modelo Lotka-Volterra describe la interacción entre dos especies, en este caso, peces ($x(t)$) y tiburones ($y(t)$). Las ecuaciones del modelo están dadas de la siguiente manera

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x(\lambda - by), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\mu + cx), \end{cases} \quad (1.3)$$

donde

- $x(t)$ es el número de peces en el tiempo t .
- $y(t)$ es el número de tiburones en el tiempo t .
- λ es la tasa de crecimiento intrínseca de los peces.
- b es la eficiencia con la que la presencia de tiburones reduce la tasa de crecimiento de los peces.
- μ es la tasa de mortalidad intrínseca de los tiburones.
- c es la eficiencia con la que la presencia de peces aumenta la tasa de crecimiento de los tiburones.

Los parámetros λ , b , μ y c son no-negativos. La interpretación de las ecuaciones en (1.3) para cada caso, es la siguiente:

Según la primera ecuación, la tasa de crecimiento de los peces $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ depende de dos factores:

- Crecimiento intrínseco (λx): aumento natural de la población en ausencia de tiburones.
- Depredación ($-bxy$): disminución de la población debido a la acción de tiburones, donde b representa la eficiencia de la depredación.

Por su parte, la segunda ecuación indica que la tasa de crecimiento de los tiburones $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ también depende de dos factores:

- Mortalidad intrínseca ($-\mu y$): disminución natural de la población de tiburones por muerte.
- Reproducción (cxy): aumento de la población de tiburones debido a la captura y consumo de peces, y c determina la magnitud del efecto de la población de peces sobre la tasa de reproducción.

El modelo Lotka-Volterra intenta reproducir las fluctuaciones en la dinámica de la pesquería, sus ecuaciones predicen un comportamiento cíclico de las poblaciones de peces y tiburones con estos parámetros. Este comportamiento se debe a la interacción entre las dos especies:

- Cuando la población de peces es alta, la de tiburones aumenta (más comida).
- El aumento de tiburones reduce la población de peces (más depredación).
- La disminución de peces reduce la población de tiburones (menos comida).
- La baja cantidad de tiburones permite que la población de peces se recupere.

Este ciclo se repite continuamente. Consúltase [1].

1.2.3. Análisis cualitativo del sistema

Con frecuencia, la mayoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no tiene soluciones analíticas y, además, su resolución puede ser costosa desde el punto de vista computacional. Sin embargo, es posible extraer información relevante sobre el comportamiento de dichas soluciones sin necesidad de obtenerlas directamente. Esto se conoce como análisis cualitativo. En este análisis se busca determinar aspectos como la estabilidad de sus soluciones, sus puntos de equilibrio y el comportamiento asintótico de estas.

El primer aspecto del análisis cualitativo consiste en la identificación de los puntos de equilibrio, los cuales representan soluciones del sistema que son susceptibles de experimentar cambios. Matemáticamente, se definen como:

Definición 1.2.1. Sea $X' = F(X)$ un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, donde $X \in \mathbb{R}^n$ y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Una **solución de equilibrio** de este sistema es un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x^*) = 0$.

Para el ejemplo dado por las ecuaciones (1.3), se tiene que las soluciones de equilibrio están dados por los puntos (x, y) tales que

$$\begin{aligned}x(\lambda - by) &= 0, \\y(-\mu + cx) &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right)$.

Resulta de interés estudiar la estabilidad de dichos puntos de equilibrio; esto se refiere a determinar si pequeñas variaciones alrededor del punto de equilibrio conducirán a cambios significativos en las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (capítulo 3 de [16]). Para ello, se define:

Definición 1.2.2. Sea $x^*(t)$ una solución de equilibrio del sistema $X' = F(X)$. Se dice que $x^*(t)$

- es **estable (o Lyapunov estable)**, si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que, para cualquier otra solución, $y(t)$, del sistema $X' = F(X)$ se satisface que $|x^*(t_0) - y(t_0)| < \delta$, entonces $|x^*(t) - y(t)| < \epsilon$ para todo $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.
- es **asintóticamente estable** si es estable (o Lyapunov estable) y para cualquier otra solución, $y(t)$, del sistema $X' = F(X)$, existe una constante $b > 0$ tal que, si $|x^*(t_0) - y(t_0)| < b$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x^*(t) - y(t)| = 0.$$

- es **inestable**, si $x^*(t)$ no es estable.

Para establecer si un punto de equilibrio es asintóticamente estable o inestable, también se tiene el siguiente teorema, (ver [5]).

Teorema 1.2.3.1. *Sea x^* una solución de equilibrio de $X' = F(X)$ y sea $DF(x^*)$ la matriz jacobiana del campo vectorial F , evaluada en x^* . Suponga que todos los valores propios de $DF(x^*)$ tienen parte real negativa, entonces x^* es **asintóticamente estable**.*

Si una solución de equilibrio es asintóticamente estable, esto indica que cuando las condiciones iniciales de otra solución están cerca de ese punto de equilibrio, el sistema eventualmente converge hacia el equilibrio a medida que t crece. Esto significa que, cualquier pequeña perturbación inicial se disipa cuando t crece y el sistema regresa al punto de equilibrio. Por otro lado, si un punto de equilibrio es inestable, entonces para soluciones con condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio, cualquier perturbación las alejará de este a medida que t crece.

De acuerdo a lo anterior, para el sistema (1.3), la matriz jacobiana es

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda - by & -bx \\ cy & -\mu + cx \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Evaluando la matriz jacobiana en cada uno de los puntos de equilibrio del sistema (1.3) se tiene,

- Punto de equilibrio (0,0)

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Sus valores propios son λ y $-\mu$. Como λ es positivo, entonces (0, 0) es inestable por el Teorema 1.2.3.1.

- Punto de equilibrio $\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right)$

$$DF\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b\mu}{c} \\ \frac{c\lambda}{b} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

En este caso, los valores propios son puramente imaginarios, luego el Teorema 1.2.3.1 no es aplicable para determinar la estabilidad de este punto de equilibrio.

La linearización del sistema en torno al punto de equilibrio sugiere un comportamiento oscilatorio debido a la presencia de autovalores puramente imaginarios. Sin embargo, este análisis no es suficiente para determinar la estabilidad del equilibrio, ya que no indica si las soluciones permanecen en órbitas cerradas alrededor del punto (como en

un centro), o si las oscilaciones crecen o decrecen con el tiempo (como en un foco estable o inestable).

Por esta razón, es necesario analizar el sistema no lineal completo para comprender la naturaleza exacta del punto de equilibrio. Siguiendo la metodología presentada en Brauer y Castillo en [1], donde se analiza directamente el sistema no lineal. En particular, se identifica una función conservada que permanezca constante a lo largo de las trayectorias, lo que indica que las soluciones están confinadas a órbitas cerradas alrededor del punto de equilibrio en el plano fase, lo que caracteriza al equilibrio como un centro no lineal.

En este tipo de sistemas, particularmente en el modelo clásico de Lotka-Volterra, en el cual las órbitas alrededor del punto de equilibrio son cerradas y periódicas. Así, el comportamiento oscilatorio observado no es espiral, sino exactamente cíclico, lo que confirma que el punto de equilibrio es un centro.

Este resultado refleja la naturaleza conservativa del modelo, donde no se pierde ni se gana energía en el sistema presa-depredador, y subraya la necesidad de ir más allá del análisis lineal cuando los autovalores son puramente imaginarios.

Capítulo 2

Modelo de interacción de *Diaphorina citri* y los brotes de un cultivo.

En este capítulo, se presenta un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la interacción entre *Diaphorina citri* y una planta huésped, teniendo en cuenta el ciclo de brotación de la planta a largo plazo. Posteriormente, se realiza un análisis cualitativo del sistema donde se calculan sus puntos de equilibrio y los umbrales del sistema, los cuales establecen condiciones para la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por último, se realiza un análisis de sensibilidad y algunas simulaciones numéricas para mostrar el comportamiento general del sistema.

2.1. Descripción del Modelo

En esta sección, se presenta el modelo que describe la interacción entre el insecto *Diaphorina citri*, los cultivos de una planta huésped y los factores biológicos relevantes, como los brotes y el estímulo intrínseco de una planta, basado en el sistema (1.1).

Para representar adecuadamente el comportamiento cíclico de los brotes, se incorporan los modelos tipo Kolmogorov. Estos son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias donde la tasa de cambio de cada variable depende del estado actual del sistema, lo que permite capturar de manera más precisa las fluctuaciones en la población de brotes y su impacto sobre la dinámica de *Diaphorina citri*, lo cual se puede evidenciar en las ecuaciones que describen la evolución de los brotes y del estímulo intrínseco, cuyas interacciones reflejan el carácter cíclico del proceso. El modelo propuesto es:

$$\begin{cases} D_i'(t) &= f\phi D_m(B - \varphi_d D_i) - (\delta_i + v)D_i, \\ D_m'(t) &= vD_i - \delta_m D_m, \\ B'(t) &= \alpha BS - \mu B - \varphi_i B D_i, \\ S'(t) &= \rho S \left(1 - \frac{S}{\kappa}\right) - \beta BS, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde

- $D_i(t)$ es el número promedio de individuos en estado inmaduro de *Diaphorina citri* en el momento t .
- $D_m(t)$ es el número promedio de individuos en estado maduro de *Diaphorina citri* en el momento t .
- $B(t)$ es el número promedio de brotes de la planta huésped en el momento t .
- $S(t)$ es la concentración promedio del estímulo del brote en el momento t .

Cabe señalar que al hablar de estados inmaduros, se incluye en estos a los huevos y ninfas. Los parámetros del modelo (2.1) son no-negativos y se describen en la siguiente Tabla 2.1.

Parámetro	Descripción
f	Proporción de hembras adultas de <i>Diaphorina citri</i> .
ϕ	Tasa de oviposición de la hembra adulta de <i>Diaphorina citri</i> por brote.
φ_d	Cantidad de brotes por planta por estado inmaduro.
v	Tasa de transición de estado inmaduro a estado maduro por brote.
δ_i	Tasa de mortalidad del estado inmaduro.
δ_m	Tasa de mortalidad del estado maduro.
α	Tasa efectiva de interacción del estímulo con los brotes.
μ	Tasa de transición de brote a rama de la planta.
φ_i	Tasa de afectación al brote por alimentación del estado inmaduro.
ρ	Tasa de producción intrínseca del estímulo del brote de la planta.
κ	Capacidad de carga del estímulo por planta.
β	Tasa de afectación al estímulo por los brotes.

Tabla 2.1: Parámetros del modelo (2.1)

La primera ecuación describe la dinámica de la población inmadura (D_i) teniendo en cuenta que $f\phi D_m B$ es la cantidad total de huevos que las hembras adultas ponen en los brotes de la planta, y $\left(1 - \frac{\varphi_d D_i}{B}\right)$ es la cantidad de brotes que no están siendo afectados por los estados inmaduros. Esto es equivalente a la expresión $f\phi D_m(B - \varphi_d D_i)$, donde lo anterior representa el aumento de individuos en estados inmaduros teniendo en cuenta la cantidad de brotes que están disponibles para la oviposición.

Al mismo tiempo, los estados inmaduros decrecen $(\delta_i + v)D_i$ por mortalidad natural y su transición de estado inmaduro a maduro.

La segunda ecuación describe la dinámica de la población madura (D_m), la cual aumenta con la transición de estado inmaduro a maduro vD_i , y decrece con la mortalidad natural de la población madura $\delta_m D_m$.

Por su parte, la tercera ecuación del modelo (2.1) describe cómo cambia la cantidad de brotes en el tiempo; esta aumenta con el crecimiento natural de los brotes αBS , y disminuye con la transición natural de los brotes a ramas μB . También se ve afectada por la alimentación de los estados inmaduros sobre los brotes, $\varphi_i BD_i$.

Por último, la cuarta ecuación describe cómo cambia la cantidad de estímulo en el tiempo; aquí se tiene en cuenta que $\rho S \left(1 - \frac{S}{\kappa}\right)$ es el crecimiento de la concentración del estímulo, el cual está limitado por la capacidad de carga de la planta y disminuye por la afectación que tiene la producción de brotes sobre el estímulo βBS .

El modelo propuesto presenta varias diferencias con respecto al modelo base, planteado en [18]. En primer lugar, se introduce una nueva variable, $S(t)$, que representa la concentración promedio del estímulo de los brotes en el momento t . Esta variable permite capturar de manera más precisa el efecto del estímulo de los brotes en la dinámica poblacional de *Diaphorina citri*. Además, a diferencia del modelo base, que supone un crecimiento logístico de los brotes con capacidad de carga constante, el modelo propuesto se aleja de esta suposición al incorporar un comportamiento cíclico en la población de brotes.

Para lograr esto, se modela la interacción entre $S(t)$ y $B(t)$ mediante un sistema de tipo Lotka-Volterra. Esta formulación permite incorporar una dinámica oscilatoria que simula los ciclos de brotación inducidos por estímulos intrínsecos. Como resultado, el sistema presenta soluciones periódicas que reflejan con mayor realismo los patrones observados en el crecimiento intermitente de brotes a lo largo del tiempo.

2.2. Región de interés biológico (Ω)

La región de interés biológico para un modelo dado, por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se refiere al conjunto de valores que pueden tomar las variables del modelo para que este tenga sentido, en términos de la realidad biológica que se quiere representar. Esto es esencial para delimitar el análisis cualitativo, centrando la atención en aquellas soluciones o valores que son relevantes para el fenómeno biológico en cuestión.

La región de interés biológico del modelo (2.1) está dada por

$$\Omega = \left\{ (D_i, D_m, B, S) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq D_i \leq R, 0 \leq D_m \leq \frac{vR}{\delta_m}, 0 \leq B \leq \varphi_d R, 0 \leq S \leq \kappa \right\}, \quad (2.2)$$

donde $R = \frac{\mu(Q_B - 1)}{\varphi_i}$ y $Q_B = \frac{\alpha\kappa}{\mu}$. Aquí, $\alpha\kappa$ representa la tasa máxima a la que la población de brotes puede llegar a crecer, y $\frac{1}{\mu}$ representa la duración de un brote en la planta. Por lo tanto, Q_B actúa como un umbral que representa la presencia de brotes. Además, para que las variables tengan sentido biológico, se debe cumplir que $Q_B > 1$.

Para que Ω tenga sentido biológico, es necesario que las variables sean no negativas, esto es, $D_i \geq 0$, $D_m \geq 0$, $B \geq 0$ y $S \geq 0$. Además, en el campo de direcciones descrito por el modelo (2.1), se observa que S presenta un crecimiento logístico modificado por un término negativo adicional. En particular, el término $\rho S \left(1 - \frac{S}{\kappa}\right)$ corresponde a un crecimiento logístico clásico, cuya capacidad de carga es κ , es decir, el valor máximo hacia el cual tiende S en ausencia de otros factores. Dado que el término $-\beta BS$ reduce aún más la tasa de crecimiento, esto implica que $S \leq \kappa$ cuando t crece, siendo κ una cota superior. Con esto en cuenta se delimitan las demás variables.

Los estados inmaduros D_i dependen de los brotes que están disponibles para la oviposición, lo cual está representado en el modelo (2.1) por $B - \varphi_d D_i$. Para determinar una frontera positiva, necesario analizar cuando esto se vuelve cero, es decir, cuando $D_i = \frac{B}{\varphi_d}$.

En el caso de D_m , esta depende de D_i . De la misma manera, se tiene que

$$\begin{aligned} vD_i - \delta_m D_m &= 0, \\ D_m &= \frac{vD_i}{\delta_m}, \\ D_m &= \frac{vB}{\delta_m \varphi_d}. \end{aligned}$$

Ahora, se analiza la cota superior de B

$$\begin{aligned} \alpha BS - \mu B - \varphi_i B D_i &= 0, \\ B(\alpha S - \mu - \varphi_i D_i) &= 0. \end{aligned}$$

Esto da lugar a dos posibles soluciones: $B = 0$ y $\alpha S - \mu - \varphi_i D_i = 0$. De esta última, tenemos que

$$D_i = \frac{\alpha S - \mu}{\varphi_i} \leq \frac{\alpha\kappa - \mu}{\varphi_i}$$

Ahora, como $D_i = \frac{B}{\varphi_d}$,

$$\begin{aligned} \frac{B}{\varphi_d} &\leq \frac{\alpha\kappa - \mu}{\varphi_i}, \\ B &\leq \frac{\varphi_d \mu (Q_B - 1)}{\varphi_i}. \end{aligned}$$

Por otra parte, para encontrar la cota de los brotes, se toma $R = \frac{\mu(Q_B - 1)}{\varphi_i}$, de esta manera $B \leq \varphi_d R$, $D_i = \frac{B}{\varphi_d} \leq R$, $D_m = \frac{vB}{\delta_m \varphi_d} \leq \frac{vR}{\delta_m}$, resultando la región Ω .

Estas cotas definen los límites dentro de los cuales las variables biológicas permanecen realistas, garantizando que las variables del modelo tengan sentido biológico.

Para una región de interés biológico es importante garantizar que esta sea **positivamente invariante**; es decir, dada una condición inicial del sistema dentro de la región de interés, las trayectorias solución permanecen siempre dentro de esta misma región a lo largo de la variación de t . En otros términos, si se parte de una condición inicial que tenga sentido biológico, el comportamiento del modelo permanecerá acorde con los valores que son relevantes en el contexto biológico específico. Luego; tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1.0. *La región de interés biológico Ω dada en (2.2) correspondiente al modelo (2.1) es positivamente invariante, con $1 \leq Q_B$.*

Demostración. De la definición de Ω dada en (2.2) está delimitada por lo siguiente

$$0 \leq D_i \leq R, \quad 0 \leq D_m \leq \frac{vR}{\delta_m}, \quad 0 \leq B \leq \varphi_d R, \quad 0 \leq S \leq \kappa.$$

A continuación, se consideran las ocho caras tridimensionales del hipercubo que se definen mediante estas restricciones en las cuatro variables. En cada caso, se asume que las demás variables se encuentran dentro de sus respectivas cotas, con esto se tiene:

- **Cara 1:** $S = 0$, en la cuarta ecuación del modelo (2.1) se tiene que $S'(t) = 0$, lo que indica que los vectores del campo direccional permanecen en la superficie de la cara.
- **Cara 2:** $S = \kappa$, en la cuarta ecuación del modelo (2.1) se tiene que $S'(t) = -\beta B \kappa$, por lo que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia el interior de Ω o permanecen en la cara.
- **Cara 3:** $B = 0$, en la tercer ecuación del modelo (2.1) se tiene que $B'(t) = 0$, lo que indica que los vectores del campo direccional permanecen en la superficie de la cara.
- **Cara 4:** $B = \varphi_d R$, en la tercer ecuación del modelo (2.1) se tiene que $B'(t) = \varphi_d R(\alpha S - \mu - \varphi_i D_i)$, es necesario que los vectores del campo de direcciones

permanezcan dentro de Ω o esten en la cara. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
S &\leq \kappa, \\
S &\leq \frac{\mu Q_B}{\alpha} \quad \text{con} \quad Q_B = \frac{\alpha \kappa}{\mu}, \\
\alpha S - \mu &\leq \mu Q_B - \mu = \mu(Q_B - 1), \\
\alpha S - \mu &\leq \frac{\varphi_i \mu (Q_B - 1)}{\varphi_i} = \varphi_i D_i, \quad \text{con} \quad R = D_i \\
\alpha S - \mu - \varphi_i D_i &\leq 0,
\end{aligned}$$

lo que indica que los vectores del campo direccional apuntan hacia el interior de Ω o permanecen en la cara.

- **Cara 5:** $D_m = 0$, en la segunda ecuación del modelo (2.1) se tiene que $D'_m(t) = vD_i$. Luego $D'_m(t) \geq 0$, los vectores del campo de direcciones apuntan hacia el interior, o permanecen en la cara.
- **Cara 6:** $D_m = \frac{vR}{\delta_m}$, en la segunda ecuación del modelo (2.1) se tiene que

$$D'_m(t) = v(D_i - R) \leq v(R - R) = 0,$$

puesto que $D_i \leq R$, lo que indica que los vectores del campo direccional apuntan hacia el interior de Ω o permanecen en la cara.

- **Cara 7:** $D_i = 0$, en la primer ecuación del modelo (2.1) se tiene que $D'_i(t) = f\phi D_m B \geq 0$. Esto indica que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia adentro en Ω o se quedan en la cara.
- **Cara 8:** $D_i = R$, en la primer ecuación del modelo (2.1) se tiene que

$$D'_i(t) = f\phi D_m (B - \varphi_d R) - (\delta_i + v)R.$$

Por tanto, nótese que

$$\begin{aligned}
B &\leq \varphi_d R, \\
B - \varphi_d R &\leq 0, \\
f\phi D_m (B - \varphi_d R) &\leq 0, \\
f\phi D_m (B - \varphi_d R) - (\delta_i + v)R &\leq f\phi D_m (B - \varphi_d R) \leq 0, \\
f\phi D_m (B - \varphi_d R) - (\delta_i + v)R &\leq 0.
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$D'_i(t) \leq 0,$$

los vectores del campo de direcciones permanezcan dentro de Ω o en la cara.

Por lo tanto, los vectores del campo de direcciones permanecen en Ω . $\square$

2.3. Análisis Cualitativo

En esta sección se presenta el análisis cualitativo del sistema (2.1), con el objetivo de caracterizar su comportamiento a largo plazo restringiendo el análisis a la región invariante Ω . Para ello, se calculan los puntos de equilibrio y se estudia su estabilidad mediante el cálculo de los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en cada punto de equilibrio.

2.3.1. Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio, se determinan las soluciones constantes del modelo (2.1), es decir, resolvemos el siguiente sistema

$$f\phi D_m(B - \varphi_d D_i) - (\delta_i + v)D_i = 0, \quad (2.3)$$

$$vD_i - \delta_m D_m = 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha BS - \mu B - \varphi_i B D_i = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho S \left(1 - \frac{S}{\kappa}\right) - \beta BS = 0. \quad (2.6)$$

De la ecuación (2.5), se tiene que

$$B(\alpha S - \mu - \varphi_i D_i) = 0$$

obteniéndose que $B = 0$ ó $S = \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha}$

Caso 1: $B = 0$

Al reemplazar en la ecuación (2.6), se tiene que,

$$\rho S \left(1 - \frac{S}{\kappa}\right) = 0$$

obteniéndose $S = 0$ ó $S = \kappa$

- Si $S = 0$, de la ecuación (2.3) se tiene que $D_i = 0$ y de la ecuación (2.4) $D_m = 0$. Así, se determina el primer punto de equilibrio $\varepsilon_1 = (0, 0, 0, 0)$, que representa la extinción, es decir, no hay presencia de plantas ni de insectos.
- Si $S = \kappa$, de la ecuación (2.3) se tiene que $D_i = 0$ y de la ecuación (2.4) $D_m = 0$. Así, se determina el segundo punto de equilibrio $\varepsilon_2 = (0, 0, 0, \kappa)$, el cual representa la planta en el final del ciclo productivo.

Caso 2: $S = \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha}$

Al reemplazar en la ecuación (2.6), se tiene que

$$\rho \left(1 - \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha \kappa} \right) - \beta B = 0,$$

$$\frac{\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha \kappa} \right) = B.$$

Para que B tenga sentido biológico, se debe cumplir que

$$1 - \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha \kappa} > 0,$$

lo que es equivalente a

$$D_i < \frac{\mu(Q_B - 1)}{\varphi_i},$$

donde $Q_B = \frac{\alpha \kappa}{\mu}$. Por tanto, se requiere que $Q_B > 1$.

Al reemplazar B en la ecuación (2.3), se tiene que

$$f\phi D_m \left(\frac{\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu + \varphi_i D_i}{\alpha \kappa} \right) - \varphi_d D_i \right) - (\delta_i + v) D_i = 0,$$

$$\frac{f\phi D_m \rho}{\beta} - \frac{f\phi D_m \rho \mu}{\alpha \kappa \beta} - \frac{f\phi D_m \rho \varphi_i D_i}{\alpha \kappa \beta} - f\phi D_m \varphi_d D_i - (\delta_i + v) D_i = 0,$$

$$\frac{f\phi D_m \rho (\alpha \kappa - \mu)}{\alpha \kappa \beta} = \left(\frac{f\phi D_m \rho \varphi_i + f\phi D_m \alpha \kappa \beta \varphi_d + \alpha \kappa \beta (\delta_i + v)}{\alpha \kappa \beta} \right) D_i,$$

$$D_i = \frac{f\phi D_m \rho (\alpha \kappa - \mu)}{f\phi D_m (\rho \varphi_i + \alpha \kappa \beta \varphi_d) + \alpha \kappa \beta (\delta_i + v)}.$$

Para que D_i tenga sentido biológico, se debe cumplir que $\alpha \kappa - \mu > 0$, lo que se garantiza con $Q_B > 1$.

Al reemplazar D_i en la ecuación (2.4), se tiene que

$$\frac{v f\phi D_m \rho (\alpha \kappa - \mu)}{f\phi D_m (\rho \varphi_i + \alpha \kappa \beta \varphi_d) + \alpha \kappa \beta (\delta_i + v)} - \delta_m D_m = 0,$$

$$D_m \left(\frac{v f\phi \rho (\alpha \kappa - \mu)}{f\phi D_m (\rho \varphi_i + \alpha \kappa \beta \varphi_d) + \alpha \kappa \beta (\delta_i + v)} - \delta_m \right) = 0,$$

De aquí se obtiene $D_m = 0$ ó $D_m = \frac{f\phi \rho v (\alpha \kappa - \mu) - \alpha \kappa \beta \delta_m (\delta_i + v)}{f\phi \delta_m (\rho \varphi_i + \varphi_d \alpha \kappa \beta)}$.

- Analizando el primer subcaso $D_m = 0$, entonces $D_i = 0$, $B = \frac{\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu}{\alpha \kappa} \right) = B^*$ y $S = \frac{\mu}{\alpha} = S^*$. Así, el tercer punto de equilibrio es $\varepsilon_3 = (0, 0, B^*, S^*)$, el cual representa la planta en su etapa productiva.

- El segundo subcaso $D_m = \frac{f\phi\rho v(\alpha\kappa - \mu) - \alpha\kappa\beta\delta_m(\delta_i + v)}{f\phi\delta_m(\rho\varphi_i + \varphi_d\alpha\kappa\beta)} = \overline{D_m}$ para que tenga sentido biológico, se debe cumplir

$$\begin{aligned}
f\phi\rho v(\alpha\kappa - \mu) - \alpha\kappa\beta\delta_m(\delta_i + v) &> 0, \\
\Leftrightarrow \frac{f\phi\rho v(\alpha\kappa - \mu)}{\alpha\kappa\beta\delta_m(\delta_i + v)} &> 1, \\
\Leftrightarrow \frac{f\phi\rho v\left(1 - \frac{1}{Q_B}\right)}{\beta\delta_m(\delta_i + v)} &> 1, \quad \text{con } Q_B = \frac{\alpha\kappa}{\mu} > 1.
\end{aligned}$$

Se define el umbral $Q_0 = \frac{f\phi\rho v\left(1 - \frac{1}{Q_B}\right)}{\beta\delta_m(\delta_i + v)}$.

Observe que el factor $\left(1 - \frac{1}{Q_B}\right)$ representa la carga remanente del sistema de los brotes, es decir, cuánto le queda al sistema para poder sostener el crecimiento de *Diaphorina citri*. Este término controla la expansión de la población de brotes y, por ende, influye en la reproducción de *Diaphorina citri*.

Por otro lado, el término $\frac{\phi}{\delta_m}$ representa el número de huevos promedio que deposita una hembra adulta durante su vida, mientras que $\frac{v}{\delta_i + v}$ denota la probabilidad de que los estados inmaduros logren desarrollarse hasta la etapa adulta. El cociente $\frac{\rho}{\beta}$ puede interpretarse como el nivel de estímulo disponible por brote, lo que incide directamente en la capacidad del sistema para sostener la reproducción de la plaga.

Finalmente, al multiplicar la combinación de los factores anteriores (número de huevos por hembra adulta, probabilidad de alcanzar la adultez, estímulo por brote y carga remanente del sistema de brotes) con f se concluye que Q_0 representa el número promedio de hembras adultas de *Diaphorina citri* producidas por una hembra adulta durante su vida. Asimismo, se define $Q_D = \frac{f\phi\rho v}{\beta\delta_m(\delta_i + v)}$ como un umbral de descendencia de *Diaphorina citri*.

Entonces, el punto de equilibrio en términos de estos umbrales es, $\varepsilon_4 = (\overline{D_i}, \overline{D_m}, \overline{B}, \overline{S})$ donde

$$\begin{aligned}\overline{D_i} &= \frac{\delta_m \overline{D_m}}{v} = \frac{\rho \mu Q_B (Q_0 - 1)}{Q_D (\alpha \kappa \beta \varphi_d + \rho \varphi_i)}, \\ \overline{D_m} &= \frac{f \phi \rho v (\alpha \kappa - \mu) - \alpha \kappa \beta \delta_m (\delta_i + v)}{f \phi \delta_m (\alpha \kappa \beta \varphi_d + \rho \varphi_i)} = \frac{\rho \mu v Q_B (Q_0 - 1)}{\delta_m Q_D (\alpha \kappa \beta \varphi_d + \rho \varphi_i)}, \\ \overline{B} &= \frac{\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu v + \varphi_i \delta_m \overline{D_m}}{v \alpha \kappa} \right) = \frac{\rho}{Q_D} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\varphi_d \mu Q_B (Q_0 - 1)}{\alpha \kappa \beta \varphi_d + \rho \varphi_i} \right), \\ \overline{S} &= \frac{\mu v + \varphi_i \delta_m \overline{D_m}}{v \alpha} = \frac{\kappa}{Q_D} \left(Q_D - 1 - \frac{\varphi_d \beta \mu Q_B (Q_0 - 1)}{\alpha \kappa \beta \varphi_d + \rho \varphi_i} \right).\end{aligned}$$

Este cuarto punto de equilibrio representa la persistencia de *Diaphorina citri*.

Tenemos las expresiones de los umbrales:

$$Q_B = \frac{\alpha \kappa}{\mu}, \quad Q_D = \frac{f \phi \rho v}{\beta \delta_m (\delta_i + v)} \quad \text{y} \quad Q_0 = \frac{f \phi \rho v \left(1 - \frac{1}{Q_B} \right)}{\beta \delta_m (\delta_i + v)} = Q_D \left(1 - \frac{1}{Q_B} \right).$$

Cabe destacar que no tiene mucha relevancia biológica considerar valores de $Q_D < 1$, ya que en ese caso Q_D llevaría inevitablemente a la extinción de la población de *D. citri*. Por lo cual, el análisis se centra principalmente en el caso $Q_D > 1$, que garantiza la persistencia de la población de insectos.

A continuación, se establece un resultado que relaciona estos tres umbrales.

Teorema 2.3.1.1. *Dado el modelo (2.1) y los umbrales Q_B , Q_0 y Q_D , se tiene las siguientes consecuencias:*

- I. $Q_0 < 0$ si y sólo si $0 < Q_B < 1$.
- II. $0 < Q_0 < 1$ si y sólo si $1 < Q_D$ y $1 < Q_B < \left(1 - \frac{1}{Q_D} \right)^{-1}$.
- III. $Q_0 > 1$ si y sólo si $1 < Q_D$ y $Q_B > \left(1 - \frac{1}{Q_D} \right)^{-1}$.

Demostración. Se sabe que $Q_B > 0$ y $Q_D > 1$

- Para la primera parte

$$Q_0 < 0$$

$$Q_D \left(1 - \frac{1}{Q_B} \right) < 0 \Leftrightarrow Q_B < 1$$

- Ahora, para la segunda parte

$$\begin{aligned}
0 < Q_0 < 1 &\Leftrightarrow 0 < Q_D \left(1 - \frac{1}{Q_B}\right) < 1, \\
&\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{Q_B} < \frac{1}{Q_D}, \\
&\Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{Q_B} < \frac{1}{Q_D} - 1, \\
&\Leftrightarrow 1 > \frac{1}{Q_B} > 1 - \frac{1}{Q_D} > 0 \quad \text{y} \quad Q_D > 1, \\
&\Leftrightarrow 1 < Q_B < \left(1 - \frac{1}{Q_D}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

- Por último,

$$\begin{aligned}
Q_0 > 1 &\Leftrightarrow Q_D \left(1 - \frac{1}{Q_B}\right) > 1, \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{Q_B} > \frac{1}{Q_D}, \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{Q_D} > \frac{1}{Q_B} \quad \text{y} \quad Q_D > 1, \\
&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{Q_D}\right)^{-1} < Q_B.
\end{aligned}$$

□

Al analizar los puntos de equilibrio con relación al Teorema 2.3.1.1. Se observa que para que ε_3 tenga sentido biológico (SB) se requiere que $0 < Q_0$. Caso contrario, no tiene sentido biológico (NO SB). Por otro lado, para que ε_4 tenga sentido biológico, es necesario que se cumpla $Q_0 > 1$, de acuerdo a lo anterior.

En la Tabla 2.2 se resumen las condiciones dadas anteriormente.

P. Equilibrio	$Q_0 < 0$	$0 < Q_0 < 1$	$1 < Q_0$
ε_1	SB	SB	SB
ε_2	SB	SB	SB
ε_3	NO SB	SB	SB
ε_4	NO SB	NO SB	SB

Tabla 2.2: Sentido Biológico de los puntos de equilibrio.

A continuación, se realiza el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio, calculando los valores propios de la matriz jacobiana.

2.3.2. Estabilidad del sistema.

Se determina la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.1) examinando el cumplimiento de las condiciones del Teorema 1.2.3.1. Con este objetivo vamos a estudiar los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio ε_1 , ε_2 , ε_3 y ε_4 . Apartir de ahora vamos a renombrar la matriz jacobiana $DF(x^*) = J(x^*)$.

Matriz jacobiana

La matriz jacobiana del sistema (2.1), está dada por:

$$J(D_i, D_m, B, S) = \begin{pmatrix} -(f\phi D_m \varphi_d + \delta_i + v) & f\phi(B - \varphi_d D_i) & f\phi D_m & 0 \\ v & -\delta_m & 0 & 0 \\ -\varphi_i B & 0 & \alpha S - \mu - \varphi_i D_i & \alpha B \\ 0 & 0 & -\beta S & \rho \left(1 - \frac{2S}{\kappa}\right) - \beta B \end{pmatrix}.$$

Evaluando el punto de equilibrio ε_1 , resulta

$$J(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} -(\delta_i + v) & 0 & 0 & 0 \\ v & -\delta_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_{11} = -(\delta_i + v)$, $\lambda_{12} = -\delta_m$, $\lambda_{13} = -\mu$ y $\lambda_{14} = \rho$. Todos ellos tienen parte real negativa a excepción de λ_{14} . Por tanto, del Teorema 1.2.3.1 concluimos que ε_1 es inestable.

Para el punto de equilibrio ε_2 , la matriz jacobiana está dada por:

$$J(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -(\delta_i + v) & 0 & 0 & 0 \\ v & -\delta_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\kappa - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\kappa & -\rho \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_{21} = -(\delta_i + v)$, $\lambda_{22} = -\delta_m$, $\lambda_{23} = \alpha\kappa - \mu$ y $\lambda_{24} = -\rho$. Como $\lambda_{23} = \alpha\kappa - \mu$, implica

$$\begin{aligned} \alpha\kappa - \mu &< 0, \\ \frac{\alpha\kappa}{\mu} &< 1, \\ Q_B &< 1. \end{aligned}$$

Luego, si $Q_B < 1$, ε_2 del Teorema 1.2.3.1 concluimos que es asintóticamente estable. En caso contrario, ε_2 es inestable.

Para el punto de equilibrio ε_3 , la matriz jacobiana está dada por:

$$J(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} -(\delta_i + v) & \frac{f\phi\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu}{\alpha\kappa}\right) & 0 & 0 \\ v & -\delta_m & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_i\rho}{\beta} \left(1 - \frac{\mu}{\alpha\kappa}\right) & 0 & 0 & \left(\alpha - \frac{\mu}{\kappa}\right) \frac{\rho}{\beta} \\ 0 & 0 & -\frac{\beta\mu}{\alpha} & -\frac{\rho\mu}{\kappa\alpha} \end{pmatrix}.$$

De esto, se obtienen los siguientes valores propios

$$\lambda_{31} = \frac{-\kappa^2\alpha\beta^2\mu\rho - \sqrt{-\kappa^4\alpha^2\beta^4\mu\rho(4\kappa^2\alpha^2 - 4\kappa\alpha\mu - \mu\rho)}}{2\kappa^3\alpha^2\beta^2}, \quad (2.7)$$

$$\lambda_{32} = \frac{-\kappa^2\alpha\beta^2\mu\rho + \sqrt{-\kappa^4\alpha^2\beta^4\mu\rho(4\kappa^2\alpha^2 - 4\kappa\alpha\mu - \mu\rho)}}{2\kappa^3\alpha^2\beta^2}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_{33} = \frac{1}{2} \left(-\delta_i - \delta_m - v - \sqrt{\frac{\kappa\alpha\beta(\delta_i - \delta_m + v)^2 + 4fv\rho\phi(\kappa\alpha - \mu)}{\kappa\alpha\beta}} \right), \quad (2.9)$$

$$\lambda_{34} = \frac{1}{2} \left(-\delta_i - \delta_m - v + \sqrt{\frac{\kappa\alpha\beta(\delta_i - \delta_m + v)^2 + 4fv\rho\phi(\kappa\alpha - \mu)}{\kappa\alpha\beta}} \right). \quad (2.10)$$

Se observa que (2.7) y (2.9) son valores reales negativos. Ahora, al analizar (2.8), se tiene que reescribiendo en términos de Q_B , resulta

$$\lambda_{32} = \frac{-\kappa^2\alpha\beta^2\mu\rho + \sqrt{-\kappa^4\alpha^2\beta^4\mu\rho(4\kappa^2\alpha^2 - 4\kappa\alpha\mu - \mu\rho)}}{2\kappa^3\alpha^2\beta^2},$$

Ahora, $\lambda_{32} < 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2Q_B} \left(-1 + \sqrt{\frac{\rho + 4\kappa\alpha - 4\kappa\alpha Q_B}{\rho}} \right) &< 0, \\ \Leftrightarrow \rho + 4\kappa\alpha - 4\kappa\alpha Q_B &< \rho, \\ \Leftrightarrow 1 &< Q_B. \end{aligned}$$

Por tanto, para que λ_{32} sea negativo, $1 < Q_B$ del Teorema (2.3.1.1) equivale a que $0 < Q_0 < 1$.

Por otra parte, al analiza (2.10) de la misma manera, reescribiendo en términos de Q_B , Q_D y Q_0 , resulta:

$$\lambda_{34} = \frac{1}{2} \left(-\delta_i - \delta_m - v + \sqrt{\frac{\kappa\alpha\beta(\delta_i - \delta_m + v)^2 + 4fv\rho\phi(\kappa\alpha - \mu)}{\kappa\alpha\beta}} \right),$$

Ahora, para que sea negativo $\lambda_{34} < 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\kappa\alpha\beta(\delta_i - \delta_m + v)^2 + 4fv\rho\phi(\kappa\alpha - \mu)}{\kappa\alpha\beta} &< (\delta_i + \delta_m + v)^2, \\ (\delta_i - \delta_m + v)^2 - (\delta_i + \delta_m + v)^2 + \frac{4fv\rho\phi\left(1 - \frac{1}{Q_B}\right)}{\beta} &< 0, \\ -4\delta_m(\delta_i + v) + 4\delta_m(\delta_i + v)Q_D\left(1 - \frac{1}{Q_B}\right) &< 0, \\ (\delta_i + v)(Q_0 - 1) &< 0. \end{aligned}$$

Por tanto, para que λ_{34} sea negativo, $0 < Q_0 < 1$. En conclusión, si para ε_3 se cumple que $0 < Q_0 < 1$ del Teorema 1.2.3.1 concluimos que es asintóticamente estable. En caso contrario, ε_3 es inestable.

Para el punto de equilibrio ε_4 se realizó un análisis similar, en el cual la matriz jacobiana está dada por:

$$J(\varepsilon_4) = \begin{pmatrix} -(\beta v(\delta_i + v)N + \varphi_i + v) & \frac{(\delta_i + v)\delta_m}{v} & \frac{\beta(\delta_i + v)N}{\varphi_d} & 0 \\ v & -\delta_m & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\varphi_i\rho}{\beta Q_D} + \frac{\rho\varphi_i N}{Q_D}\right) & 0 & 0 & \frac{\alpha\rho}{\beta Q_D} + \frac{\alpha\rho N}{Q_D} \\ 0 & 0 & -\beta\kappa\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\beta N}{Q_D}\right)S & \frac{-\rho}{\lambda} + \frac{\beta\rho N}{Q_D} \end{pmatrix},$$

donde $N = \frac{\mu\varphi_d Q_B(Q_0 - 1)}{\alpha\kappa\beta\varphi_d + \rho\varphi_i}$. Debido a la complejidad de las expresiones asociadas a los valores propios de la matriz, se optó por una estrategia alternativa basada en simulación. En particular, se utiliza el método de Monte Carlo. Se realiza un programa en MATLAB para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, siguiendo los pasos que se presentan a continuación:

1. Definir los parámetros del modelo y un rango adecuado para cada uno.
2. Dar valores aleatorios para cada uno de los parámetros dentro del rango.
3. Calcular los umbrales Q_B , Q_0 , Q_D y definir la matriz jacobiana.
4. Calcular los puntos de equilibrio del sistema y escoger aquellos que tienen sentido biológico.
5. Se evalúa la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio con sentido biológico y se calculan sus valores propios.
6. Se determina la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio con sentido biológico y se verifica que cumplan las condiciones encontradas en la Tabla 2.2, para ε_2 , ε_3 y ε_4 .

7. Se repiten 10.000 veces los pasos dos al seis.

Este algoritmo se ejecutó diez veces, obteniendo los resultados que se presentan en la Tabla 2.3.

EJE	1		2		3		4		5	
P.E	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN
ε_2	10.000	7.398	10.000	7.519	10.000	7.461	10.000	7.505	10.000	7.507
ε_3	2.602	201	2.481	205	2.539	193	2.495	192	2.493	184
ε_4	306	306	265	265	292	292	304	304	276	276
NCC	2.095		2.011		2.054		1.999		2.033	
EJE	6		7		8		9		10	
P.E.	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN
ε_2	10.000	7.521	10.000	7.572	10.000	7.501	10.000	7.540	10.000	7.519
ε_3	2.479	195	2.428	224	2.499	218	2.460	171	2.481	190
ε_4	281	281	257	257	304	304	259	259	282	282
NCC	2.003		1.947		1.977		2.030		2.009	

Tabla 2.3: Resultados de las ejecuciones del algoritmo. Clave de lectura: EJE: Ejecución. P.E: Puntos de equilibrio. SB: Sentido biológico. VPN: Valores propios negativos. NCC: No cumplen las condiciones establecidas en la Tabla 2.2.

Al analizar los resultados obtenidos, en las 10 ejecuciones del algoritmo, se tiene que, de cada 10.000 repeticiones del algoritmo, en promedio 10.000, 2.495, 7 y 282, 6 puntos tienen sentido biológico, para ε_2 , ε_3 y ε_4 , respectivamente. Al evaluar la matriz jacobiana en estos puntos, y verificar las condiciones de los umbrales establecidos en la Tabla 2.2, se evidencia que en promedio 7.504, 3; 197, 3 y 282, 6 puntos corresponden a valores propios con parte real negativa, de ε_2 , ε_3 y ε_4 , respectivamente lo que sugiere estabilidad asintótica. Por otro lado, se identificaron en promedio 2015, 8 puntos que no cumplen con las condiciones de los umbrales.

Los resultados obtenidos permiten evidenciar que, en todos los casos en los que ε_4 tiene sentido biológico y es asintóticamente estable.

Del análisis anterior, se resume la información en la siguiente tabla

P. Equilibrio	$Q_0 < 0$	$0 < Q_0 < 1$	$1 < Q_0$
ε_1	Inestable	Inestable	Inestable
ε_2	A. Estable	Inestable	Inestable
ε_3	NO SB	A. Estable	Inestable
ε_4	NO SB	NO SB	A. Estable

Tabla 2.4: Estabilidad de los puntos de equilibrio.

Lo anterior presenta un panorama claro sobre el comportamiento de la evolución de la dinámica del modelo (2.1) en periodos largos de tiempo.

Así, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.3.2.1. *Dado Q_0 se tiene que*

1. *Si $Q_0 < 0$, entonces ε_2 es asintóticamente estable y ε_1 es inestable.*
2. *Si $0 < Q_0 < 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son inestables y ε_3 es asintóticamente estable.*
3. *Si $Q_0 > 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ son inestable y sugiere que ε_4 es asintóticamente estable.*

A partir de la Tabla 2.2, la Tabla 2.4 y el Teorema 2.3.2.1, se recopila la información en la Figura 2.1

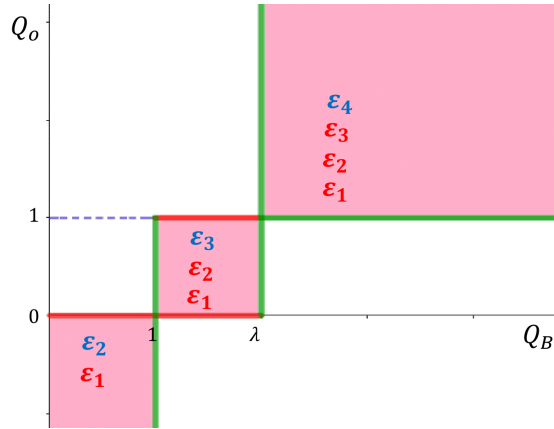


Figura 2.1: Estabilidad del sistema en términos de Q_0 y Q_B . Los puntos de equilibrio en azul son los asintóticamente estables, mientras que los rojos son los inestables, en cada

una de las situaciones, donde $\lambda = \left(1 - \frac{1}{Q_D}\right)^{-1}$.

La relación entre los umbrales Q_B y Q_0 dadas por el Teorema 2.3.1.1 permite entender la dinámica del sistema. En particular, estos umbrales permiten identificar escenarios críticos en los cuales un pequeño cambio en los parámetros pueden desencadenar cambios abruptos en la población de *Diaphorina citri*.

2.4. Análisis de sensibilidad

Los umbrales Q_B , Q_0 y Q_D están en términos de los parámetros del modelo (2.1). Al variar estos parámetros los umbrales podrían verse afectados en mayor o menor manera. Por esta razón, se realiza un análisis de sensibilidad y así se determina qué parámetro tiene mayor afectación en los umbrales y por ende en el comportamiento del sistema.

Este tipo de análisis es fundamental para sugerir el diseñar estrategias de manejo más eficientes que reduzcan el riesgo de infestaciones severas. Para realizar este análisis se usa el índice de sensibilidad normalizado en cada uno de los parámetros, el cual se

presenta a continuación (ver [2]).

$$\Upsilon_{p_x} = \frac{\partial Q_x}{\partial p} \frac{p}{Q_x},$$

donde $x \in \{B, O, D\}$.

Cuando el índice de sensibilidad es positivo, se tiene una relación directa entre el parámetro y el umbral; cuando es negativo, se tiene una relación inversa. El parámetro que genera la mayor afectación en cada caso es el de mayor magnitud.

De acuerdo a lo anterior, se presenta la Tabla 2.5 donde se resumen los resultados de los índices de sensibilidad de los parámetros del modelo (2.1).

Índice de sensibilidad	Q_B	Q_0	Rango Q_0	Q_D	Rango Q_D
Υ_f	—	1	—	1	—
Υ_ϕ	—	1	—	1	—
Υ_v	—	$\frac{\delta_i}{\delta_i + v}$	$\Upsilon_v \in (0, 1)$	$\frac{\delta_i}{\delta_i + v}$	$\Upsilon_v \in (0, 1)$
Υ_{δ_i}	—	$\frac{-\delta_i}{\delta_i + v}$	$\Upsilon_{\delta_i} \in (-1, 0)$	$\frac{-\delta_i}{\delta_i + v}$	$\Upsilon_{\delta_i} \in (-1, 0)$
Υ_{δ_m}	—	—1	—	—1	—
Υ_α	1	$\frac{\mu}{\alpha\kappa - \mu}$	$\Upsilon_\alpha \notin [-1, 0]$	—	—
Υ_μ	—1	$\frac{-\mu}{\alpha\kappa - \mu}$	$\Upsilon_\mu \notin [0, 1]$	—	—
Υ_ρ	—	1	—	1	—
Υ_κ	1	$\frac{\mu}{\alpha\kappa - \mu}$	$\Upsilon_\kappa \notin [-1, 0]$	—	—
Υ_β	—	—1	—	—1	—

Tabla 2.5: Índice de sensibilidad de los umbrales respecto a los parámetros.

El análisis de sensibilidad presentado en la Tabla 2.5 proporciona una visión detallada sobre cómo diferentes parámetros afectan los umbrales Q_B , Q_0 y Q_D .

Para Q_B , los índices Υ_α y Υ_κ influyen directamente en el umbral, mientras que Υ_μ lo hace inversamente. En el caso de Q_0 , se observa una tendencia similar, los índices Υ_α , Υ_μ y Υ_κ presentan una variabilidad significativa dentro de los rangos establecidos, destacando su relevancia en el comportamiento del umbral, finalmente, para Q_D , los índices de mayor relevancia son Υ_f , Υ_ϕ , Υ_{δ_m} , Υ_β y Υ_κ .

En particular, se observa una relación entre α (tasa efectiva de interacción del estímulo con los brotes) que tiene una alta relevancia en la sensibilidad del sistema y β (tasa de afectación al estímulo por los brotes) desempeñan un papel clave. Un aumento en α implica un mayor crecimiento de los brotes, lo que a su vez incrementa la disponibilidad de sitios de oviposición para *Diaphorina citri*, favoreciendo su crecimiento poblacional. Sin embargo, β actúa en sentido contrario, ya que un incremento en su

valor reduce la cantidad del estímulo para los brotes, lo que puede limitar el desarrollo de la plaga.

Aunque ajustar estos parámetros es una vía teóricamente válida para controlar el sistema, ambos son parámetros intrínsecos de la planta huésped y, por lo tanto, difíciles de modificar. No obstante, pueden verse influenciados por condiciones ambientales, como la temperatura y la humedad, que impactan el crecimiento de los brotes. En la práctica, es posible intervenir en ellos de manera indirecta mediante prácticas agronómicas, como la poda de rejuvenecimiento [14], que puede modificar la densidad de los brotes y, en consecuencia, su interacción con la plaga. Estas estrategias, en conjunto con la regulación de factores ambientales, podrían contribuir al control de *Diaphorina citri*.

Por otro lado, otros parámetros también pueden influir en el comportamiento del sistema. Por ejemplo, la tasa de oviposición de las hembras adultas (ϕ) podría reducirse mediante estrategias que limiten la disponibilidad de brotes adecuados para la oviposición, mientras que el aumento en la tasa de mortalidad de los estados inmaduros (δ_i) y maduros (δ_m) podría lograrse mediante el uso de enemigos naturales o bio plaguicidas. Asimismo, la tasa de producción intrínseca del estímulo del brote (ρ) y la capacidad de carga del estímulo por planta (κ) podrían verse afectadas por el manejo de la nutrición y la fisiología de la planta. Estas estrategias combinadas permitirían un manejo más efectivo de *Diaphorina citri*, reduciendo su impacto sobre los cultivos y minimizando el riesgo de infestaciones severas.

2.5. Simulaciones

En esta sección, se presentan las simulaciones numéricas realizadas para analizar el comportamiento del sistema bajo distintas condiciones iniciales y parámetros. Estas simulaciones permiten visualizar la dinámica del modelo (2.1).

Los valores establecidos para los parámetros se obtuvieron de la literatura, como se detalla en [8] y [18], donde se estiman rangos para los parámetros a temperaturas específicas. Además, se utilizaron datos obtenidos en las investigaciones del grupo Análisis numérico, optimización y problemas inversos (ANOPI) en conjunto con Agrosavia. A continuación se presenta una breve descripción de la estimación de los parámetros.

- f : Proporción de hembras en la población de *Diaphorina citri*, considerando una relación de casi 1:1 entre hembras y machos.
- ϕ : Tasa de oviposición por brote. Estimada a partir del número de huevos depositados por hembra durante su vida y el promedio de brotes por planta, basado en datos de campo.
- φ_d : Capacidad de brotes por planta por estado inmaduro, que representa el número máximo de huevos que un brote puede contener antes de ser considerado

lleno. Calculado con el número máximo de huevos por hembra y el promedio de brotes por planta.

- v : Tasa de transición del estado inmaduro a maduro por brote, estimada a partir del promedio de días de desarrollo desde huevo hasta adulto.
- δ_i y δ_m : Tasas de mortalidad del estado inmaduro y del adulto, respectivamente. La tasa de mortalidad del estado inmaduro se estimó a partir del porcentaje de supervivencia y el número de días de desarrollo, mientras que la mortalidad del estado adulto se calculó como el inverso de la esperanza de vida de la hembra.
- φ_i : Tasas de afectación de brotes por el estado inmaduro. Estimadas de los datos sobre el número de ninfas por brote y el número de brotes afectados por alimentación y oviposición.
- Los parámetros α , μ , ρ , κ y β así como otros parámetros relacionados con la dinámica de brotes y el estímulo, fueron determinados a partir de datos experimentales proporcionados por el grupo de investigación ANOPI. En particular, estos valores se ajustaron mediante métodos de mínimos cuadrados para obtener una estimación precisa acorde con las condiciones observadas.

En la Tabla 2.6 se presentan los valores utilizados para los parámetros.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
f	0.49	α	0.1472
ϕ	4.09	μ	0.0914
φ_d	0.058	φ_i	5×10^{-6}
v	0.05	ρ	0.1829
δ_i	0.139	κ	20
δ_m	0.0272	β	0.1829

Tabla 2.6: Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones.

Con los valores de los parámetros en la Tabla 2.6, se realizó una simulación numérica del modelo (2.1), con valores iniciales de $(D_i(0) = 3, D_m(0) = 3, B(0) = 3, S(0) = 9)$, se observó la coexistencia de las poblaciones de insecto y los brotes de la planta. Los umbrales toman los siguientes valores: $Q_D = 19.4921$, $Q_0 = 18.8869$ y $Q_B = 32.2101$, que corroboran los resultados de los Teoremas 2.3.1.1 y 2.3.2.1.

Las simulaciones indican que bajo las condiciones establecidas, existe un equilibrio en el que ambas poblaciones coexisten. El comportamiento ondulatorio de las poblaciones que se va amortiguando con el tiempo sugiere que el sistema puede estar acercándose al equilibrio estable $\varepsilon_4 = (15.7373, 28.9288, 0.96893, 0.62146)$, esto implica que, si bien la presencia de *Diaphorina citri* afecta los brotes, el sistema puede alcanzar un balance y coexistir entre ellas.

En la práctica, lo ideal es lograr la transición de la situación representada por el punto de equilibrio ε_4 que es la presencia de *Diaphorina citri* al punto de equilibrio ε_3 , este

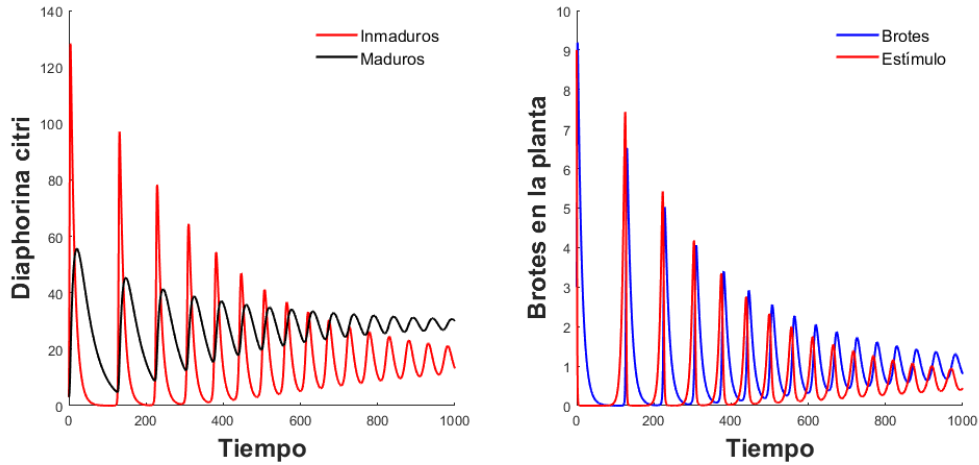


Figura 2.2: Persistencia de *Diaphorina citri* del modelo (2.1). Población de estados inmaduros y maduros (izq.) y comportamiento del brote y el estímulo (der.).

punto corresponde a una situación en la cual no hay presencia de *Diaphorina citri*, permitiendo que los brotes de la planta se mantengan en niveles saludables sin sufrir daños significativos y evitar el riesgo de contraer la enfermedad.

Para lograr este propósito, se propone la implementación de estrategias de control que consideren tanto el índice de sensibilidad como los umbrales críticos del sistema. Estas estrategias podrían incluir la modificación de parámetros clave, como el aumento de la mortalidad de *Diaphorina citri* o la protección de los brotes mediante métodos físicos o químicos, que reduzcan la interacción entre la plaga y la planta. Al ajustar los parámetros más influyentes, identificados a través del análisis de sensibilidad en la Tabla 2.5, se podría desplazar el sistema hacia el equilibrio deseado en ε_3 , reduciendo la presión de la plaga y promoviendo un ambiente más favorable para el cultivo. Con estrategias de control bien diseñadas, es posible dirigir el sistema hacia un estado más ideal, minimizando el impacto de la plaga y optimizando la producción.

En el análisis de sensibilidad, se observa que el parámetro α es altamente sensible y presenta una relación con β , lo que significa que pequeñas variaciones en estos parámetros pueden tener un gran impacto en el comportamiento del sistema. Dado que estos parámetros no han sido estimados, se tomaron de forma arbitraria, realizamos algunas variaciones en ellos y analizamos cómo estas perturbaciones afectan al sistema.

Para ilustrar lo discutido, se presenta a continuación una serie de simulaciones que muestran cómo varían las dinámicas poblacionales de *Diaphorina citri* y los brotes de la planta bajo diferentes valores de los parámetros α ó β . En las simulaciones, α toma los valores de 0.05, 0.08 y 0.2, mientras que β adopta los valores de 0.045, 0.09 y 0.25. Estas simulaciones permiten visualizar cómo el ajuste de estos parámetros puede

influir en el comportamiento del sistema. A continuación, se muestran las figuras correspondientes para cada escenario.

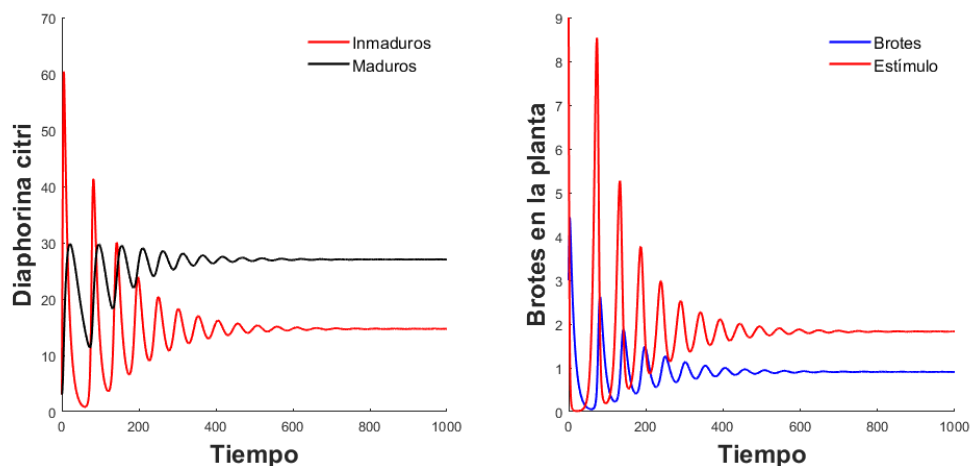


Figura 2.3: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.05$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

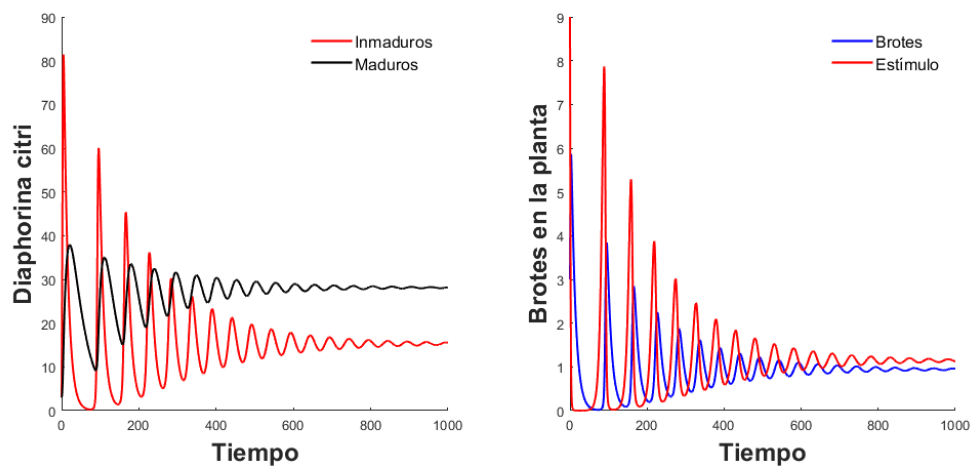


Figura 2.4: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.08$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

En el análisis de las simulaciones realizadas, se observa que la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* y los brotes de la planta cambia notablemente al ajustar el parámetro α que representa la tasa de crecimiento intrínseca de los brotes. Este parámetro juega un papel clave en determinar el tiempo en que las oscilaciones de ambas poblaciones se amortiguan. Cuando el valor de este parámetro es relativamente bajo, las poblaciones alcanzan la estabilidad en un tiempo más corto, aproximadamente entre un año y medio. A medida que se incrementa ligeramente, el tiempo de amortiguamiento se extiende, llegando a estabilizarse entre un año y medio y poco más de dos años. Sin

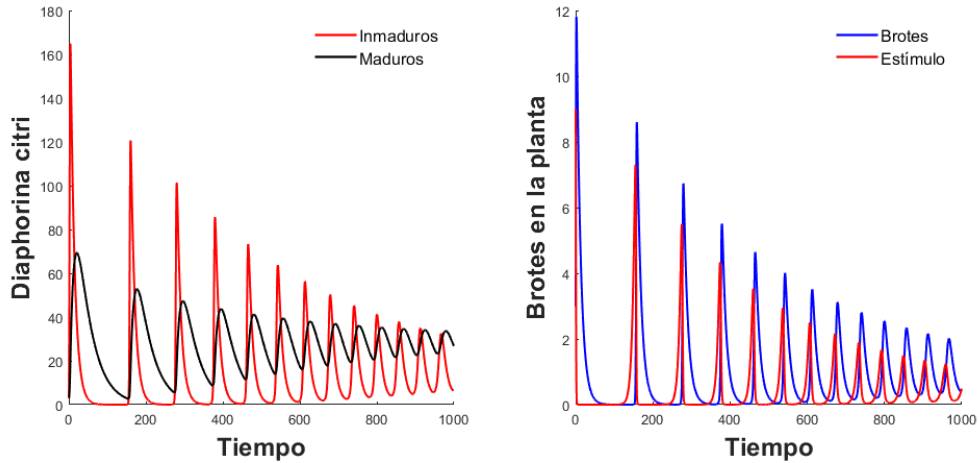


Figura 2.5: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\alpha = 0.2$, aumento respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

embargo, con un valor mucho más alto, las oscilaciones persisten durante varios años, superando incluso los tres años sin mostrar signos claros de estabilización (Figuras 2.3, 2.4 y 2.5).

La estrategia de variar este parámetro se centra en extender la vida útil de la planta. Dado que un árbol de cítricos puede tener una vida productiva de hasta quince años, ajustar este aspecto del modelo permite simular y entender cómo prolongar su vitalidad y producción al controlar la interacción con la plaga. Este enfoque es fundamental para diseñar prácticas agrícolas sostenibles que aseguren una mayor longevidad y productividad de las plantas.

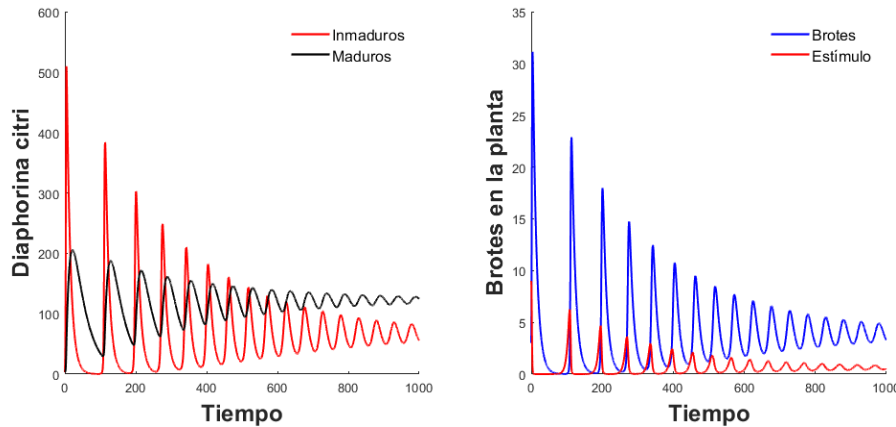


Figura 2.6: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.045$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

En un segundo análisis, se examinó la influencia del parámetro β , el cual resulta clave en la dinámica del sistema ya que representa la afectación al estímulo por los brotes.

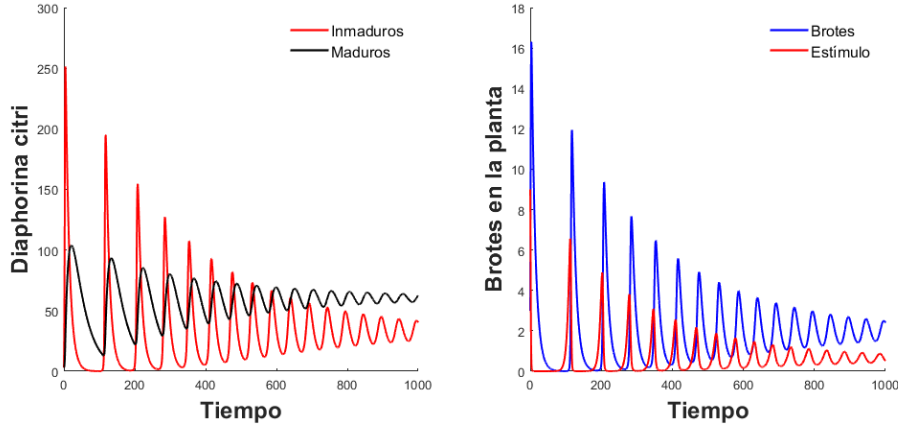


Figura 2.7: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.09$, disminución respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

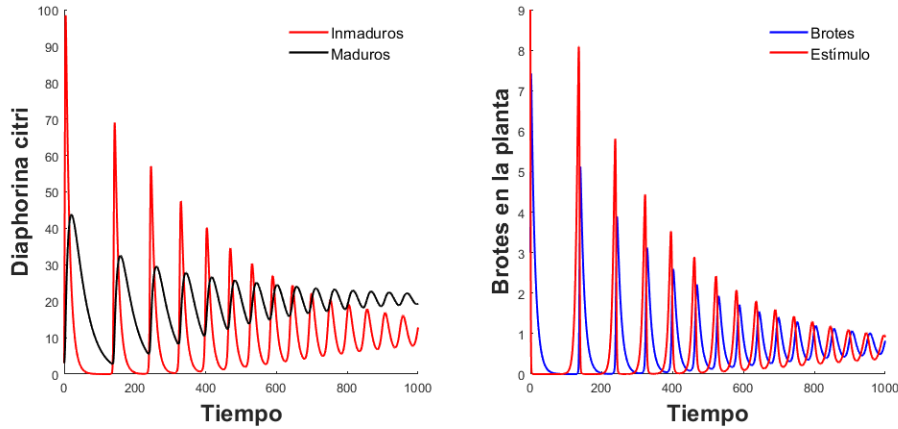


Figura 2.8: Simulación de coexistencia del modelo (2.1) con $\beta = 0.25$, aumento respecto al valor de referencia de la Tabla 2.6.

Los resultados mostraron que el comportamiento oscilatorio se mantuvo constante con el tiempo, sin evidenciarse cambios significativos en los gráficos con respecto a la simulación de referencia (Figura 2.2). Sin embargo, las amplitudes de las oscilaciones experimentaron variaciones significativas.

Al reducir el valor de β , las poblaciones de *Diaphorina citri* alcanzaron picos más altos tanto en su estado inmaduro como maduro, al igual que los brotes y el estímulo de la planta (Figura 2.6). De otro lado, cuando se incrementó el valor de β , se observó una reducción en los picos máximos de las poblaciones de insectos y de los brotes (Figura 2.8). En particular, las poblaciones de insectos disminuyeron considerablemente en sus picos, mientras que el estímulo mostró una variación más sutil.

El análisis anterior sugiere que el ajuste del parámetro β puede influir significativamente en las magnitudes de las poblaciones máximas dentro del sistema, proporcio-

nando una herramienta fundamental para el manejo de la interacción entre la plaga y la planta huésped. Un valor pequeño de β indica una baja afectación del estímulo por los brotes, lo que resulta en una mayor producción de brotes y, por lo tanto, en una mayor población de *Diaphorina citri*. A medida que β aumenta, la afectación del estímulo crece, reduciendo tanto el número de brotes como las poblaciones de la plaga, lo que puede ayudar a regular la interacción y favorecer un equilibrio más controlado en el sistema. Estos resultados evidencian la importancia de poder estimar los parámetros α y β para cultivos específicos.

En el capítulo siguiente se extiende el modelo (2.1) donde se desea analizar la interacción de *Diaphorina citri* con los brotes de dos cultivos: el de producción y el de trampa. El cultivo trampa actúa como una estrategia de control que podría reforzar la protección de los brotes y facilitar el manejo de la plaga.

Capítulo 3

Modelo de interacción de *Diaphorina citri* en presencia de dos cultivos, trampa y comercial

En este capítulo, se presenta un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la interacción entre *Diaphorina citri* y dos tipos de cultivos, teniendo en cuenta el ciclo de brotación de la planta a largo plazo. Posteriormente, se realiza un análisis cualitativo del sistema donde se identifican los puntos de equilibrio y algunos umbrales los cuales se describen adelante. Asimismo, se establecen condiciones para la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio en función de los umbrales. Además, se realizan algunas simulaciones numéricas para comprender el comportamiento general del sistema.

3.1. Descripción del Modelo

En esta sección, se presenta un modelo que describe la interacción entre el insecto *Diaphorina citri*, los cultivos de dos tipos de plantas y los factores biológicos relevantes, como los brotes y el estímulo de la planta, a partir del modelo (2.1). El modelo propuesto está representado por el siguiente sistema de EDO

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D'_{i_c}(t) & = & f\phi D_{m_c}(B_c - \varphi_d D_{i_c}) - (\delta_{i_c} + v)D_{i_c} \\ D'_{m_c}(t) & = & vD_{i_c} - (\delta_m + \gamma)D_{m_c} + \lambda D_{m_n} \\ B'_c(t) & = & \alpha_c B_c S_c - \mu_c B_c - \varphi_i B_c D_{i_c} \\ S'_c(t) & = & \rho_c S_c \left(1 - \frac{S_c}{\kappa_c}\right) - \beta_c B_c S_c \\ D'_{i_n}(t) & = & f\phi D_{m_n}(B_n - \varphi_d D_{i_n}) - (\delta_{i_n} + v)D_{i_n} \\ D'_{m_n}(t) & = & vD_{i_n} - (\delta_m + \lambda)D_{m_n} + \gamma D_{m_c} \\ B'_n(t) & = & \alpha_n B_n S_n - \mu_n B_n - \varphi_i B_n D_{i_n} \\ S'_n(t) & = & \rho_n S_n \left(1 - \frac{S_n}{\kappa_n}\right) - \beta_n B_n S_n \end{array} \right. \quad (3.1)$$

donde $D'_{i_c}(t)$, $D'_{m_c}(t)$, $B'_c(t)$ y $S'_c(t)$ son las ecuaciones que describen la dinámica del psílido con el cultivo comercial, mientras que $D'_{i_n}(t)$, $D'_{m_n}(t)$, $B'_n(t)$ y $S'_n(t)$ corresponden a las ecuaciones que describen la dinámica del psílido con el cultivo trampa, correspondientes a las variables definidas en el modelo (2.1), destacando dos nuevos parámetros γ y λ los cuales representan las tasas de migración del adulto del cultivo comercial al cultivo trampa y viceversa. Se observa que las poblaciones adultas del psílido son las que se ven afectadas por los términos γD_{m_c} y λD_{m_n} , que representan la migración al cultivo trampa y migración hacia el cultivo de producción, respectivamente, dado que son los únicos que pueden desplazarse a otras plantas o cultivos.

Las condiciones iniciales son

$$\begin{array}{llll} D_{i_c}(0) = D_{i_{c_0}}, & D_{m_c}(0) = D_{m_{c_0}}, & B_c(0) = B_{c_0}, & S_c(0) = S_{c_0}, \\ D_{i_n}(0) = D_{i_{n_0}}, & D_{m_n}(0) = D_{m_{n_0}}, & B_n(0) = B_{n_0}, & S_n(0) = S_{n_0}, \end{array}$$

Se espera que el cultivo trampa resulta ser más atractivo para los estados adultos de *Diaphorina citri*. Por esta razón, se supone que la tasa de migración hacia el cultivo trampa debe ser mayor que la tasa de migración hacia el cultivo comercial. Además, se considera que el cultivo trampa debe tener una mayor capacidad de carga que el cultivo comercial para albergar una mayor población de *Diaphorina citri*, así como una tasa de mortalidad de los estados inmaduros superior, ya que el objetivo es controlar al insecto erradicándolo del cultivo trampa. También se asume que el cultivo trampa tiene una tasa de producción intrínseca del estímulo más alta para fomentar la generación de más brotes, así como una mejor afectación del estímulo a los brotes. Estas condiciones se representan mediante las siguientes desigualdades

$$\gamma > \lambda, \quad \kappa_n > \kappa_c, \quad \delta_{i_n} > \delta_{i_c}, \quad \rho_n > \rho_c \text{ y } \alpha_n > \alpha_c.$$

Los parámetros del modelo (3.1) son no-negativos y se describen en la siguiente tabla.

Parámetro	Descripción
f	Proporción de hembras adultas de <i>Diaphorina citri</i> .
ϕ	Tasa de oviposición de la hembra adulta de <i>Diaphorina citri</i> por brote.
φ_d	Cantidad de brotes por planta por estado inmaduro.
v	Tasa de transición de estado inmaduro a estado maduro por brote.
δ_{i_x}	Tasa de mortalidad del estado inmaduro del cultivo x .
δ_m	Tasa de mortalidad del estado maduro.
γ	Tasa de migración del adulto al cultivo trampa.
λ	Tasa de migración del adulto al cultivo comercial.
α_x	Tasa efectiva de interacción del estímulo con los brotes de la planta del cultivo x .
μ_x	Tasa de transición de brote a rama de la planta del cultivo x .
φ_i	Tasa de afectación al brote por alimentación del estado inmaduro.
ρ_x	Tasa de producción intrínseca del estímulo del brote de la planta del cultivo x .
κ_x	Capacidad de carga del estímulo por planta del cultivo x .
β_x	Tasa de afectación al estímulo por los brotes del cultivo x .

Tabla 3.1: Parámetros del modelo (3.1) donde x toma los valores de c o n , según corresponda

3.2. Región de interés biológico (Ω)

Para este modelo la región de interés biológico del modelo (3.1) está dada por

$$\Omega = \left\{ (D_{i_c}, D_{m_c}, B_c, S_c, D_{i_n}, D_{m_n}, B_n, S_n) \mid \begin{array}{l} 0 \leq D_{i_x} \leq R_x, \ 0 \leq D_{m_x} \leq A_x, \ 0 \leq B_x \leq \varphi_d R_x, \ 0 \leq S_x \leq \kappa_x \end{array} \right\}.$$

en donde $x \in \{c, n\}$ y

$$\begin{aligned} Q_{B_x} &= \frac{\alpha_x \kappa_x}{\mu_x} & R_x &= \frac{\mu_x(Q_{B_x} - 1)}{\varphi_i} \\ A_n &= \frac{(\delta_m + \gamma)vR_n + \gamma vR_c}{(\delta_m + \gamma)(\delta_m + \lambda) - \gamma\lambda} & A_c &= \frac{vR_c + \lambda A_n}{\delta_m + \gamma} \end{aligned}$$

Teorema 3.2.0.1. *La región de interés biológico Ω del modelo (3.1) es positivamente invariante, con $1 \leq Q_{B_x}$.*

Demostración. Se observa que Ω está delimitada por las siguientes condiciones:

$D_{i_x} = D_{m_x} = B_x = S_x = 0$, $S_x = \kappa_x$, $B_x = \frac{\varphi_d \mu_x (Q_{B_x} - 1)}{\varphi_i}$, $D_{i_x} = \frac{\mu_x (Q_{B_x} - 1)}{\varphi_i}$ y $D_{m_x} = A_x$. A continuación, se examina cada uno de los casos para demostrar que el campo de direcciones apunta hacia adentro de Ω ó es igual a cero:

- $S_x = 0$. Aquí se tiene que $S'_x(t) = 0$, lo que indica que los vectores del campo direccional permanecen en la superficie de la cara.
- $S_x = \kappa_x$. Se tiene que $S'_x(t) = -\beta_x B_x \kappa_x \leq 0$, por lo que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia el interior de Ω ó permanecen en la cara.
- $B_x = 0$. Aquí se tiene que $B'_x(t) = 0$, lo que indica que los vectores del campo direccional permanecen en la superficie de la cara.
- $B_x = \varphi_d R_x$. Se obtiene que $B'_x(t) = \varphi_d R_x (\alpha_x S_x - \mu_x - \varphi_i D_{i_x})$. Es necesario que los vectores del campo de direcciones se mantengan dentro de Ω o en la cara. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
S_x &\leq \kappa_x, \\
S_x &\leq \frac{\mu_x Q_{B_x}}{\alpha_x}, \\
\alpha_x S_x - \mu_x &\leq \mu_x Q_{B_x} - \mu_x = \mu_x (Q_{B_x} - 1), \\
\alpha_x S_x - \mu_x &\leq \frac{\varphi_i \mu_x (Q_{B_x} - 1)}{\varphi_i} = \varphi_i D_{i_x}, \quad \text{con} \quad D_{i_x} = R_x \\
\alpha_x S_x - \mu_x - \varphi_i D_{i_x} &\leq 0.
\end{aligned}$$

lo que indica que los vectores del campo direccional apuntan hacia el interior de Ω o permanecen en la cara.

- $D_{i_x} = 0$. Aquí se tiene que $D'_{i_x}(t) = f\phi D_{m_x} B_x \geq 0$, por lo que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia adentro positivamente en Ω ó permanecen en la cara.
- $D_{i_x} = R_x$. Se obtiene que

$$D'_{i_x}(t) = f\phi D_{m_x} (B_x - \varphi_d R_x) - (\delta_{i_x} + v) R_x.$$

Por tanto, nótese que

$$\begin{aligned}
B_x &\leq \varphi_d R_x, \\
B_x - \varphi_d R_x &\leq 0, \\
f\phi D_{m_x} (B_x - \varphi_d R_x) &\leq 0, \\
f\phi D_{m_x} (B_x - \varphi_d R_x) - (\delta_{i_x} + v) R_x &\leq f\phi D_{m_x} (B_x - \varphi_d R_x) \leq 0, \\
f\phi D_{m_x} (B_x - \varphi_d R_x) - (\delta_{i_x} + v) R_x &\leq 0.
\end{aligned}$$

Se concluye que $D'_{i_x}(t) \leq 0$, los vectores del campo de direcciones permanezcan dentro de Ω o en la cara.

- $D_{m_c} = 0$. Aquí se tiene que $D'_{m_c}(t) = v D_{i_c} + \lambda D_{m_n} \geq 0$, por lo que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia el interior ó permanecen en la cara.
- $D_{m_n} = 0$. Aquí se tiene que $D'_{m_n}(t) = v D_{i_n} + \gamma D_{m_c} \geq 0$, por lo que los vectores del campo de direcciones apuntan hacia el interior o permanecen en la cara.

- $D_{m_c} = A_c$. Es necesario que los vectores del campo de direcciones permanezcan dentro de Ω ó en la cara. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
D'_{m_c}(t) &= vD_{i_c} - (\delta_m + \gamma)A_c + \lambda D_{m_n}, \\
&= vD_{i_c} - (vR_c + \lambda A_n) + \lambda D_{m_n}, \\
&\leq v(R_c - R_c) + \lambda(D_{m_n} - A_n), \\
&= \lambda(D_{m_n} - A_n) \leq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, los vectores del campo de direcciones apuntan hacia adentro o permanecen en la cara.

- $D_{m_n} = A_n$. de manera similar a los casos anteriores, es necesario que los vectores de direcciones permanezcan dentro de Ω ó en la cara. Luego

$$\begin{aligned}
D'_{m_n}(t) &= vD_{i_n} - (\delta_m + \lambda)A_n + \gamma A_c \\
&\leq vR_n - (\delta_m + \lambda)A_n + \gamma \left(\frac{vR_c + \lambda A_n}{\delta_m + \gamma} \right), \\
&\leq \frac{1}{\delta_m + \gamma} (v(R_n(\delta_m + \gamma) + \gamma R_c) - v(R_n(\delta_m + \gamma) + \gamma R_c)) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los vectores del campo de direcciones permanecen en Ω . □

3.3. Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio, se determinan las soluciones constantes del modelo (3.1), es decir, resolvemos el siguiente sistema

$$f\phi D_{m_c}(B_c - \varphi_d D_{i_c}) - (\delta_{i_c} + v)D_{i_c} = 0, \quad (3.2)$$

$$vD_{i_c} - (\delta_m + \gamma)D_{m_c} + \lambda D_{m_n} = 0, \quad (3.3)$$

$$\alpha_c B_c S_c - \mu_c B_c - \varphi_i B_c D_{i_c} = 0, \quad (3.4)$$

$$\rho_c S_c \left(1 - \frac{S_c}{\kappa_c} \right) - \beta_c B_c S_c = 0, \quad (3.5)$$

$$f\phi D_{m_n}(B_n - \varphi_d D_{i_n}) - (\delta_{i_n} + v)D_{i_n} = 0, \quad (3.6)$$

$$vD_{i_n} - (\delta_m + \lambda)D_{m_n} + \gamma D_{m_c} = 0, \quad (3.7)$$

$$\alpha_n B_n S_n - \mu_n B_n - \varphi_i B_n D_{i_n} = 0, \quad (3.8)$$

$$\rho_n S_n \left(1 - \frac{S_n}{\kappa_n} \right) - \beta_n B_n S_n = 0, \quad (3.9)$$

A partir de los resultados de la sección 2.3.1, los puntos de equilibrio que se obtienen por inspección son:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\varepsilon_2 &= (0, 0, 0, \kappa_c, 0, 0, 0, 0) \\
\varepsilon_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa_n) \\
\varepsilon_4 &= (0, 0, 0, \kappa_c, 0, 0, 0, \kappa_n) \\
\varepsilon_5 &= \left(0, 0, \frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}}\right), \frac{\mu_c}{\alpha_c}, 0, 0, 0, 0\right) \\
\varepsilon_6 &= \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\rho_n}{\beta_n} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_n}}\right), \frac{\mu_n}{\alpha_n}\right) \\
\varepsilon_7 &= \left(0, 0, \frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}}\right), \frac{\mu_c}{\alpha_c}, 0, 0, \frac{\rho_n}{\beta_n} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_n}}\right), \frac{\mu_n}{\alpha_n}\right) \\
\varepsilon_8 &= \left(0, 0, \frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}}\right), \frac{\mu_c}{\alpha_c}, 0, 0, 0, \kappa_n\right) \\
\varepsilon_9 &= \left(0, 0, 0, \kappa_c, 0, 0, \frac{\rho_n}{\beta_n} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_n}}\right), \frac{\mu_n}{\alpha_n}\right)
\end{aligned}$$

Cada uno de estos de estos puntos de equilibrio tiene interpretación biológica, dada a continuación.

P.E.	Descripción
ε_1	Extinción
ε_2	Presencia exclusiva de plantas ancianas en el cultivo comercial
ε_3	Presencia exclusiva de plantas ancianas en el cultivo trampa
ε_4	Presencia exclusiva de plantas ancianas en ambos cultivos
ε_5	Presencia de plantas productivas en el cultivo comercial
ε_6	Presencia de plantas productivas en el cultivo trampa
ε_7	Presencia de plantas productivas en ambos cultivos
ε_8	Presencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa
ε_9	Presencia de plantas ancianas en el cultivo comercial y plantas productivas en el cultivo trampa.

Tabla 3.2: Descripción de los puntos de equilibrio del modelo (3.1). P.E: Punto de equilibrio.

Es importante destacar que no es viable la eliminación de la población de *Diaphirina citri* en un solo cultivo. Al analizar su presencia en ambos cultivos, se obtiene lo siguiente:

A partir de la ecuación (3.5), se concluye que $S_c^* = \kappa_c \left(1 - \frac{\beta_c B_c}{\rho_c}\right)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.4), se obtiene $B_c^* = \frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}} - \frac{\varphi_i D_{i_c}}{\mu_c Q_{B_c}}\right)$. Luego, al reemplazar en (3.2) y proceder de manera análoga para las ecuaciones del cultivo trampa, se deriva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$f\phi D_{m_c} \left(\frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}} - \frac{\varphi_i D_{i_c}}{\mu_c Q_{B_c}}\right) - \varphi_d D_{i_c} \right) - (\delta_{i_c} + v) D_{i_c} = 0, \quad (3.10)$$

$$v D_{i_c} - (\delta_m + \gamma) D_{m_c} + \lambda D_{m_n} = 0, \quad (3.11)$$

$$f\phi D_{m_n} \left(\frac{\rho_n}{\beta_n} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_n}} - \frac{\varphi_i D_{i_n}}{\mu_n Q_{B_n}}\right) - \varphi_d D_{i_n} \right) - (\delta_{i_n} + v) D_{i_n} = 0, \quad (3.12)$$

$$v D_{i_n} - (\delta_m + \lambda) D_{m_n} + \gamma D_{m_c} = 0. \quad (3.13)$$

Con esto en cuenta, al despejar D_{i_c} de la ecuación (3.11), se obtiene

$$D_{i_c} = \frac{(\delta_m + \gamma) D_{m_c} - \lambda D_{m_n}}{v},$$

sustituyendo en (3.10) tenemos que

$$f\phi D_{m_c} \left(\frac{\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}} - \frac{\varphi_i}{\mu_c Q_{B_c}} \left(\frac{(\delta_m + \gamma) D_{m_c} - \lambda D_{m_n}}{v} \right) \right) - \varphi_d \left(\frac{(\delta_m + \gamma) D_{m_c} - \lambda D_{m_n}}{v} \right) \right) - (\delta_{i_c} + v) \left(\frac{(\delta_m + \gamma) D_{m_c} - \lambda D_{m_n}}{v} \right) = 0,$$

$$D_{m_c} \left(\frac{f\phi\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}}\right) \right) - D_{m_c}^2 \left(\frac{f\phi\rho_c\varphi_i(\delta_m + \gamma)}{\mu_c v \beta_c Q_{B_c}} \right) + D_{m_c} D_{m_n} \left(\frac{f\phi\rho_c\varphi_i\lambda}{\mu_c v \beta_c Q_{B_c}} \right) -$$

$$D_{m_c}^2 \left(\frac{f\phi\varphi_d(\delta_m + \gamma)}{v} \right) + D_{m_c} D_{m_n} \left(\frac{f\phi\varphi_d\lambda}{v} \right) - D_{m_c} \frac{(\delta_{i_c} + v)(\delta_m + \gamma)}{v} + D_{m_n} \left(\frac{(\delta_{i_c} + v)\lambda}{v} \right) = 0.$$

Luego, tomando

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f\phi\rho_c}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{Q_{B_c}}\right) - \frac{(\delta_{i_c} + v)(\delta_m + \gamma)}{v}, \\ A_2 &= \frac{f\phi\rho_c\varphi_i(\delta_m + \gamma)}{\mu_c v \beta_c Q_{B_c}} + \frac{f\phi\varphi_d(\delta_m + \gamma)}{v}, \\ A_3 &= \frac{f\phi\rho_c\varphi_i\lambda}{\mu_c v \beta_c Q_{B_c}} + \frac{f\phi\varphi_d\lambda}{v}, \\ A_4 &= \frac{(\delta_{i_c} + v)\lambda}{v}, \end{aligned}$$

se obtiene lo siguiente

$$-A_2 D_{m_c}^2 + A_3 D_{m_c} D_{m_n} + A_1 D_{m_c} + A_4 D_{m_n} = 0.$$

Análogamente, procedemos con las demás ecuaciones y las condiciones del cultivo trampa y así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, donde $\overline{A}_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ representan cantidades simétricas para las ecuaciones del cultivo trampa.

$$-A_2 D_{m_c}^2 + A_3 D_{m_c} D_{m_n} + A_1 D_{m_c} + A_4 D_{m_n} = 0, \quad (3.14)$$

$$-\overline{A}_2 D_{m_n}^2 + \overline{A}_3 D_{m_n} D_{m_c} + \overline{A}_1 D_{m_n} + \overline{A}_4 D_{m_c} = 0. \quad (3.15)$$

Despejando D_{m_n} de la ecuación (3.14), obtenemos

$$D_{m_n} = \frac{A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}}{A_3 D_{m_c} + A_4}. \quad (3.16)$$

Para que tenga sentido biológico $A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c} = D_{m_c} (A_2 D_{m_c} - A_1) > 0$, por tanto

$$D_{m_c} > \frac{A_1}{A_2} \quad y \quad D_{m_c} > 0. \quad (3.17)$$

Al sustituir (3.16) en (3.15), se llega a lo siguiente

$$-\overline{A}_2 \left(\frac{A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}}{A_3 D_{m_c} + A_4} \right)^2 + \overline{A}_3 D_{m_c} \left(\frac{A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}}{A_3 D_{m_c} + A_4} \right) + \overline{A}_1 \left(\frac{A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}}{A_3 D_{m_c} + A_4} \right) + \overline{A}_4 D_{m_c} = 0,$$

$$-\overline{A}_2 (A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c})^2 + \overline{A}_3 D_{m_c} (A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}) (A_3 D_{m_c} + A_4) + \overline{A}_1 (A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}) (A_3 D_{m_c} + A_4) + \overline{A}_4 D_{m_c} (A_3 D_{m_c} + A_4)^2 = 0,$$

$$-\overline{A}_2 D_{m_c} (A_2 D_{m_c} - A_1)^2 + \overline{A}_3 (A_2 D_{m_c}^2 - A_1 D_{m_c}) (A_3 D_{m_c} + A_4) + \overline{A}_1 (A_2 D_{m_c} - A_1) (A_3 D_{m_c} + A_4) + \overline{A}_4 (A_3 D_{m_c} + A_4)^2 = 0,$$

la ecuación resultante es

$$F_1 D_{m_c}^3 + F_2 D_{m_c}^2 + F_3 D_{m_c} + F_4 = 0 \quad (3.18)$$

con

$$\begin{aligned} F_1 &= -\overline{A}_2 A_2^2 + \overline{A}_3 A_2 A_3 \\ F_2 &= 2\overline{A}_2 A_1 A_2 + \overline{A}_3 A_2 A_4 - \overline{A}_3 A_1 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + \overline{A}_4 A_3^2, \\ F_3 &= -\overline{A}_2 A_1^2 - \overline{A}_3 A_1 A_4 + \overline{A}_1 A_2 A_4 - \overline{A}_1 A_1 A_3 + 2\overline{A}_4 A_3 A_4, \\ F_4 &= -\overline{A}_1 A_1 A_4 + \overline{A}_4 A_4^2. \end{aligned}$$

Dado que analíticamente no se pudo mostrar que (3.18) tiene una única raíz real positiva, mediante el método de Monte Carlo se determina que existe una única raíz real positiva para la ecuación (3.18) que satisface la condición (3.17), Por lo tanto, sólo existe un único punto de equilibrio de coexistencia, ε_{10} .

Para ello se desarrolla un programa en MATLAB, siguiendo los pasos que a continuación se presentan

1. Definir los parámetros del modelo y un rango adecuado para cada uno.
2. Dar valores aleatorios para cada uno de los parámetros dentro del rango.
3. Calcular los umbrales Q_{B_c} , Q_{B_n} , también A_i y $\bar{A}_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Calcular los coeficientes F_i con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y encontrar las raíces de la ecuación cúbica.
5. Filtrar las raíces reales y positivas.
6. Elegir la raíces que cumplen la condición $D_{m_c} > \frac{A_1}{A_2}$.
7. Se repiten 10.000 veces los pasos del dos al seis.

Este algoritmo se ejecutó 12 veces, y los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 3.3. En cada una de las ejecuciones, se encontró que, en todas las iteraciones, siempre que las condiciones establecidas hasta el paso seis del algoritmo se cumplían, se obtenía una única raíz real positiva para esa iteración. Además, se calculó que el número promedio de casos en los que se cumplen las condiciones es de aproximadamente 296,7. Esto indica que, en cada conjunto de 10.000 iteraciones, alrededor de 296,7 casos cumplen las condiciones establecidas en el algoritmo.

Ejecución	SCC	Ejecución	SCC	Ejecución	SCC
1	317	5	309	9	306
2	311	6	295	10	309
3	285	7	291	11	283
4	290	8	287	12	277

Tabla 3.3: Resultados de las ejecuciones del algoritmo para encontrar una unica raíz real positiva. Clave de lectura: SCC: Cantidad de raíces que resultan del paso 6 del algoritmo anterior.

3.4. Estabilidad de los puntos de equilibrio

En esta sección se estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio descritos en la Sección 3.3, usando el Teorema 1.2.3.1. En particular, se analiza la matriz jacobiana de sistema (3.1), la cual está dada por:

$$J(D_{i_c}, D_{m_c}, B_c, S_c, D_{i_n}, D_{m_n}, B_n, S_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & f\phi D_{m_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & -(\delta_m + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\varphi_i B_c & 0 & a_{33} & \alpha_c B_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_c S_c & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & f\phi D_{m_n} & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & v & -(\delta_m + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varphi_i B_n & 0 & a_{77} & \alpha_n B_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_n S_n & a_{88} \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(f\phi D_{m_c} \varphi_d + \delta_{i_c} + v), & a_{55} &= -(f\phi D_{m_n} \varphi_d + \delta_{i_n} + v), \\ a_{12} &= f\phi(B_c - \varphi_d D_{i_c}), & a_{56} &= f\phi(B_n - \varphi_d D_{i_n}), \\ a_{33} &= \alpha_c S_c - \mu_c - \varphi_i D_{i_c}, & a_{77} &= \alpha_n S_n - \mu_n - \varphi_i D_{i_n}, \\ a_{44} &= \rho_c \left(1 - \frac{2S_c}{\kappa_c}\right) - \beta_c B_c, & a_{88} &= \rho_n \left(1 - \frac{2S_n}{\kappa_n}\right) - \beta_n B_n. \end{aligned}$$

El cálculo de los valores propios asociados a cada matriz se hizo con Wolfram Mathematica.

Evaluando la matriz jacobiana en el punto de equilibrio ε_1 tenemos que

$$J(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} -(\delta_{i_c} + v) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & -(\delta_m + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{i_n} + v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & v & -(\delta_m + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -(\delta_{i_c} + v) & \lambda_{12} &= -(\delta_m + \gamma) - \lambda & \lambda_{13} &= -\mu_c & \lambda_{14} &= \rho_c \\ \lambda_{15} &= -(\delta_{i_n} + v) & \lambda_{16} &= -\delta_m & \lambda_{17} &= -\mu_n & \lambda_{18} &= \rho_n \end{aligned}$$

Todos tienen parte real negativa, a excepción de λ_{14} y λ_{18} . Por tanto, se concluye que el punto de equilibrio ε_1 es inestable deacuerdo al Teorema 1.2.3.1.

Evaluando en la matriz jacobiana en el punto de equilibrio ε_2 tenemos que

$$J(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -(\delta_{i_c} + v) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & -(\delta_m + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_c \kappa_c - \mu_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_c \kappa_c & -\rho_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{i_n} + v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & v & -(\delta_m + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_{21} &= -(\delta_{i_c} + v) & \lambda_{22} &= -(\delta_m + \gamma) - \lambda & \lambda_{23} &= \kappa_c \alpha_c - \mu_c & \lambda_{24} &= -\rho_c \\ \lambda_{25} &= -(\delta_{i_n} + v) & \lambda_{26} &= -\delta_m & \lambda_{27} &= -\mu_n & \lambda_{28} &= \rho_n \end{aligned}$$

Todos tienen parte real negativa, a excepción de λ_{28} , el cual siempre es positivo. Por tanto, se concluye que el punto de equilibrio ε_2 es inestable de acuerdo con el Teorema 1.2.3.1. El caso de ε_3 es análogo, ya que ρ_c también es siempre positivo, por lo que este punto de equilibrio también resulta inestable.

Evaluando en la matriz jacobiana en el punto de equilibrio ε_4 tenemos que

$$J(\varepsilon_4) = \begin{pmatrix} -(\delta_{i_c} + v) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & -(\delta_m + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_c \kappa_c - \mu_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_c \kappa_c & -\rho_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{i_n} + v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & v & -(\delta_m + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \kappa_n - \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_n \kappa_n & -\rho_n \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_{41} &= -(\delta_{i_c} + v) & \lambda_{42} &= -(\delta_m + \gamma) - \lambda & \lambda_{43} &= \kappa_c \alpha_c - \mu_c & \lambda_{44} &= -\rho_c \\ \lambda_{45} &= -(\delta_{i_n} + v) & \lambda_{46} &= -\delta_m & \lambda_{47} &= \kappa_n \alpha_n - \mu_n & \lambda_{48} &= -\rho_n \end{aligned}$$

Todos tienen parte real negativa, a excepción de λ_{43} y λ_{47} . Por tanto, se analiza $\kappa_x \alpha_x - \mu_x$, implica

$$\begin{aligned} \alpha_x \kappa_x - \mu_x &< 0, \\ \frac{\alpha_x \kappa_x}{\mu_x} &< 1, \\ Q_{B_x} &< 1, \end{aligned}$$

con $x \in \{c, n\}$. Si se cumple lo anterior, se concluye que el punto de equilibrio ε_4 es asintóticamente estable, de acuerdo con el Teorema 1.2.3.1.

Evaluando en la matriz jacobiana en el punto de equilibrio ε_5 tenemos que

$$J(\varepsilon_5) = \begin{pmatrix} -(\delta_{ic} + v) & \frac{f\phi\rho_c}{\beta_c}N_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & -(\delta_m + \gamma) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_i\rho_c}{\beta_c}N_c & 0 & 0 & \frac{\alpha_c\rho_c}{\beta_c}N_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_c\mu_c}{\alpha_c} & -\frac{\rho_c\mu_c}{\kappa_c\alpha_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\delta_{in} + v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & v & -(\delta_m + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n \end{pmatrix}$$

donde $N_c = 1 - \frac{\mu_c}{\alpha_c\kappa_c}$. Al calcular los valores propios, se observa que uno de ellos toma el valor de ρ_n . Por tanto, el punto de equilibrio ε_5 es inestable por el Teorema 1.2.3.1. Análogamente, para ε_6 , uno de los valores propios toma el valor de ρ_c , por lo que también se concluye que ε_6 es inestable.

Para los puntos de equilibrio restantes, ε_7 , ε_8 , ε_9 y ε_{10} , Debido a la la complejidad de las expresiones asociados a los valores propios de la matriz (nótese que esto implica encontrar las raíces de un polinomio de grado 8). Al igual que en el capítulo anterior se opta por una estrategia alternativa. En particular, se utiliza el método de Monte Carlo. Para ello, se implementa el siguiente algoritmo.

1. Definir los parámetros del modelo y un rango adecuado para cada uno.
2. Dar valores aleatorios para cada uno de los parámetros dentro del rango.
3. Calcular los umbrales Q_{B_c} , Q_{B_n} , A_i , $\overline{A_i}$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y definir la matriz jacobiana.
4. Calcular los puntos de equilibrio del sistema y escoger aquellos que tienen sentido biológico.
5. Calcular ε_{10} , determinar los coeficientes y hallar la única raíz positiva de la ecuación (3.18).
6. Verificar que la raíz cumple la condición $D_{m_c} > \frac{A_1}{A_2}$.
7. Se evalúa la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio con sentido biológico y se calculan sus valores propios.
8. Se determina la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio con sentido biológico.

9. Se repiten 10.000 veces los pasos dos al seis.

El proposito del programa es obtener, en cada iteración, qué puntos de equilibrio es estable y cuáles son inestable. Este algoritmo se ejecutó diez veces, obteniendo los resultados que se presentan en la Tabla 3.4.

EJE	1		2		3		4		5	
P.E	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN
ε_4	10.000	5.612	10.000	5.512	10.000	5.667	10.000	5.634	10.000	5.681
ε_7	615	541	679	574	615	536	589	506	607	531
ε_8	2.477	1.716	2.560	1.726	2.496	1.719	2.427	1.709	2.516	1.743
ε_9	2.526	1.769	2.607	1.785	2.452	1.697	2.528	1.791	2.410	1.655
ε_{10}	74	74	105	105	79	79	83	83	76	76
NCN	288		298		302		277		314	

EJE	6		7		8		9		10	
P.E	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN	SB	VPN
ε_4	10.000	5.613	10.000	5.652	10.000	5.631	10.000	5.607	10.000	5.638
ε_7	642	539	631	551	619	529	625	542	668	563
ε_8	2.483	1.695	2.493	1.714	2.446	1.690	2.526	1.751	2.545	1.733
ε_9	2.546	1.778	2.486	1.693	2.542	1.769	2.492	1.724	2.485	1.686
ε_{10}	103	103	80	80	90	90	83	83	105	105
NCN	272		310		291		293		275	

Tabla 3.4: Resultados de las ejecuciones del algoritmo. Clave de lectura: EJE: Ejecución. P.E: Puntos de equilibrio. SB: Sentido biológico. VPN: Valores propios negativos. NCN: No es un caso que se presente en la naturaleza.

Al analizar los resultados obtenidos en las 10 ejecuciones del algoritmo, en cada 10.000 repeticiones del algoritmo, en promedio 10.000, 629, 2.496, 9, 2.510, 2 y 87, 8 puntos tienen sentido biológico, para ε_4 , ε_7 , ε_8 , ε_9 y ε_{10} , respectivamente. Al evaluar la matriz jacobiana en estos puntos, se verifica que 5.624, 7, 541, 2, 1.719, 6, 1.734, 7 y 87.8 puntos presentan todos sus valores propios con parte real negativa, de ε_4 , ε_7 , ε_8 , ε_9 y ε_{10} , respectivamente lo que sugiere estabilidad asintótica. Por otro lado, se identificaron aproximadamente 292 puntos no se presentan en la naturaleza.

Los resultados obtenidos permiten evidenciar que, en todos los casos en los que ε_{10} tiene sentido biológico, este es asintóticamente estable.

3.5. Simulaciones

En esta sección se presentan las simulaciones, las cuales permiten visualizar la dinámica del modelo (3.1). Los valores asignados a los parámetros corresponden a los establecidos en la Sección 2.5, junto con algunos datos adicionales que cumplen con los supuestos del modelo dados en la Sección 3.1.

A lo largo de todas las simulaciones, se utilizaron las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{array}{llll} D_{i_c}(0) = 3 & D_{m_c}(0) = 3 & B_c(0) = 3 & S_c(0) = 9 \\ D_{i_n}(0) = 2 & D_{m_n}(0) = 2 & B_n(0) = 2 & S_n(0) = 8 \end{array}$$

En la Tabla 3.5 se presentan los valores de los parámetros utilizados para la simulación.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
f	0.49	α_c	0.1472	α_n	0.2235
ϕ	4.09	μ_c	0.0914	μ_n	0.1828
φ_d	0.058	κ_c	20	κ_n	60
δ_m	0.0272	ρ_c	0.1829	ρ_n	0.3658
v	0.05	β_c	0.1829	β_n	0.3658
φ_i	5×10^{-6}	γ	0.6	λ	0.1
		δ_{i_c}	0.139	δ_{i_n}	0.278

Tabla 3.5: Parámetros del modelo (3.1) para el caso de coexistencia entre los dos cultivos (comercial y trampa).

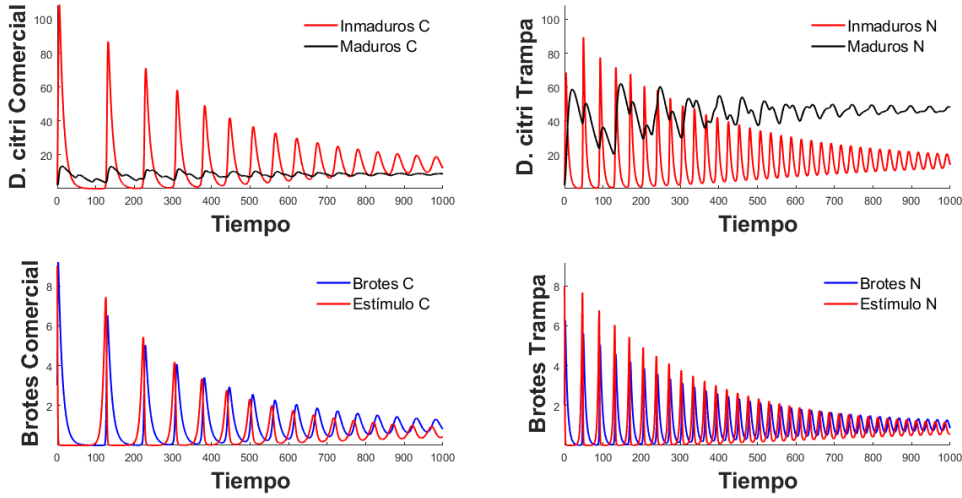


Figura 3.1: Persistencia de *Diaphorina citri* del modelo (3.1). Al lado izquierdo el comportamiento de las poblaciones en el cultivo comercial. Al lado derecho, el comportamiento de las poblaciones del cultivo trampa.

Los resultados de las simulaciones muestran que, bajo las condiciones establecidas, el sistema tiende hacia un equilibrio en el que las poblaciones pueden coexistir. El comportamiento oscilatorio observado en las poblaciones, que se atenúa con el tiempo, evidencia que el sistema está convergiendo hacia el equilibrio asintóticamente estable cuyos valores son $\varepsilon_{10} = (13.9669, 8.5235, 0.9689, 0.6214, 15.9527, 46.4757, 0.9864, 0.8183)$.

A pesar de la estabilización observada, la persistencia de *Diaphorina citri* en ambos cultivos plantea la necesidad de implementar estrategias de control que dirijan el

sistema hacia los puntos de equilibrio ε_7 y ε_8 , caracterizados por la ausencia del insecto y la presencia exclusiva de brotes en el cultivo comercial. Alcanzar estas situaciones permitiría mitigar los daños en el cultivo comercial y mejorar la estabilidad de la producción agrícola.

Para analizar la situación de los puntos de equilibrio ε_4 , ε_7 , ε_8 y ε_9 , se realizaron simulaciones con las mismas condiciones iniciales que ε_{10} , esto con el fin de observar la dinámica del sistema en cada caso. Para ello, se determinaron los valores de los parámetros que garantizan la estabilidad asintótica de cada punto de equilibrio. Estos datos fueron obtenidos a través del algoritmo planteado en la Sección 3.4.

Para ε_4 , en la Tabla 3.6 se presentan los valores utilizados para esta simulación. A partir de estos valores, se analiza el comportamiento de las poblaciones

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
f	0.44622	α_c	0.0036799	α_n	0.0037011
ϕ	4.303	μ_c	0.090808	μ_n	0.89109
φ_d	0.050981	κ_c	18.9551	κ_n	55.5663
δ_m	0.023499	ρ_c	0.157	ρ_n	0.71699
v	0.047006	β_c	0.1638	β_n	0.56545
φ_i	4.8545×10^{-6}	γ	0.88293	λ	0.18124
		δ_{ic}	0.10788	δ_{in}	0.94229

Tabla 3.6: Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia exclusiva de plantas ancianas en ambos cultivos.

Con esto, el punto de equilibrio $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 18.9551, 0, 0, 0, 55.5663)$. En este caso, se observa que la población de *Diaphorina citri* se extingue en ambos cultivos, mientras que la dinámica de los brotes y el estímulo muestra un comportamiento estable. En la Figura 3.2 se observa que, en el cultivo comercial y trampa, el estímulo alcanza un valor constante y los brotes tienden a cero, sin oscilaciones significativas.

Para ε_7 , en la Tabla 3.7 se presentan los valores utilizados para esta simulación.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
f	0.43011	α_c	0.12061	α_n	0.40342
ϕ	4.3877	μ_c	0.090844	μ_n	0.76451
φ_d	0.052138	κ_c	16.0634	κ_n	31.7745
δ_m	0.024562	ρ_c	0.17402	ρ_n	0.20427
v	0.048138	β_c	0.17043	β_n	0.79249
φ_i	4.381×10^{-6}	γ	0.56711	λ	0.00036872
		δ_{ic}	0.12327	δ_{in}	0.98184

Tabla 3.7: Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas productivas en ambos cultivos.

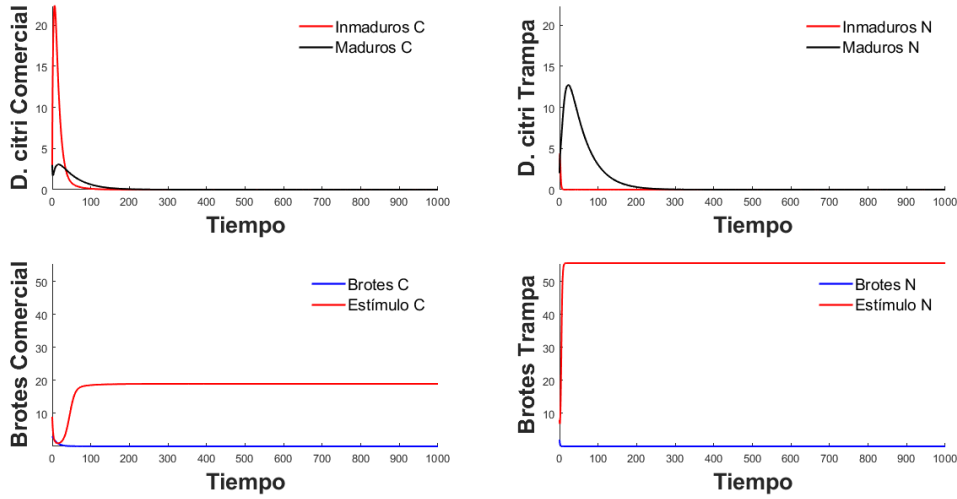


Figura 3.2: Presencia exclusiva de plantas ancianas en ambos cultivos

El punto de equilibrio $\varepsilon_7 = (0, 0, 0.9732, 0.7532, 0, 0, 0.2424, 1.8951)$. En este caso, se observa que tanto el cultivo comercial como el cultivo trampa presentan oscilaciones en la dinámica de los brotes y el estímulo. La Figura 3.3 ilustra este comportamiento, donde se genera una respuesta oscilatoria más marcada en comparación con los casos anteriores y eventualmente la población de *Diaphorina citri* desaparece.

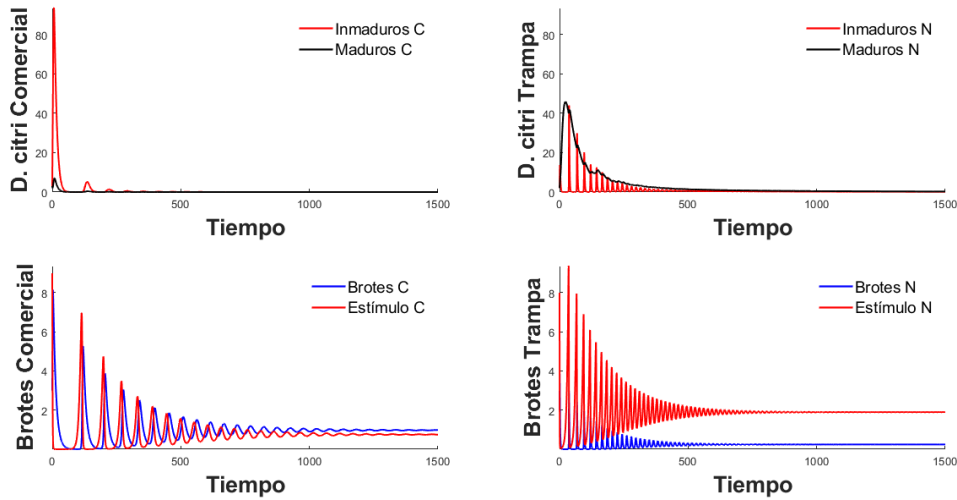


Figura 3.3: Presencia de plantas productivas en ambos cultivos.

Para ε_8 , en la Tabla 3.8 se presentan los valores utilizados para esta simulación.

El punto de equilibrio $\varepsilon_8 = (0, 0, 0.4305, 10.6463, 0, 0, 0, 38.9372)$. En este caso, se observa la coexistencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa. La población de *Diaphorina citri* se extingue en ambos

Parámetro	Valor
f	0.48725
ϕ	4.8544
φ_d	0.051294
δ_m	0.0246
v	0.043087
φ_i	4.0469×10^{-6}

Parámetro	Valor
α_c	0.0085721
μ_c	0.091261
κ_c	19.7888
ρ_c	0.15299
β_c	0.16418
γ	0.89368
δ_{ic}	0.12101

Parámetro	Valor
α_n	0.010639
μ_n	0.98188
κ_n	38.9372
ρ_n	0.42126
β_n	0.25956
λ	0.0053996
δ_{in}	0.33802

Tabla 3.8: Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa.

cultivos. En la Figura 3.4, se observa que, en el cultivo comercial, el estímulo presenta una pequeña oscilación antes de estabilizarse, mientras que los brotes tienden a un valor positivo. En contraste, en el cultivo trampa, el estímulo y los brotes se estabilizan sin fluctuaciones.

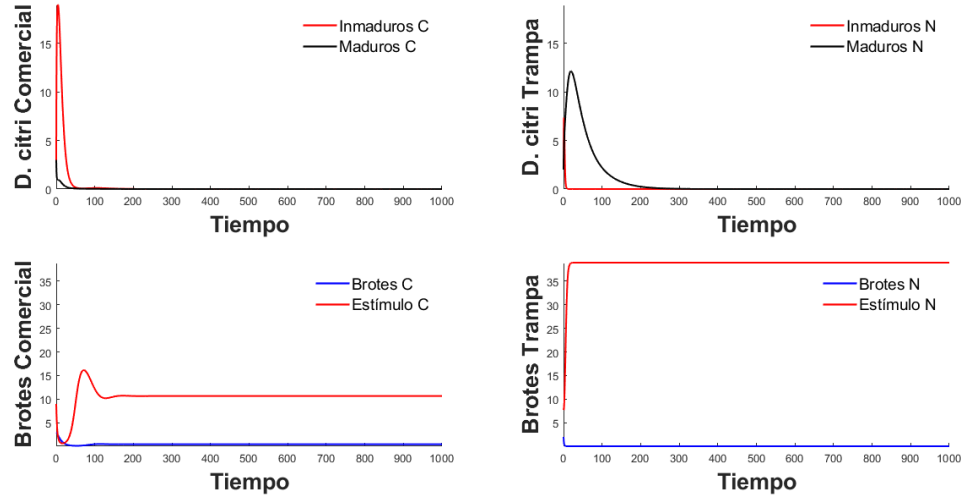


Figura 3.4: Presencia de plantas productivas en el cultivo comercial y plantas ancianas en el cultivo trampa.

Para ε_9 , en la Tabla 3.9 se presentan los valores utilizados para esta simulación.

El punto de equilibrio $\varepsilon_9 = (0, 0, 0, 0.7133, 0, 0, 0.1993, 0.0408)$. En este escenario, las plantas ancianas persisten en el cultivo comercial, mientras que en el cultivo trampa predominan las plantas productivas. La población de *Diaphorina citri* se extingue en ambos cultivos. La Figura 3.5 muestra que, en tiempos largos, los brotes en el cultivo trampa presentan oscilaciones, a diferencia del cultivo comercial, donde el estímulo se mantiene en un valor constante y los brotes tienden a cero.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
f	0.41776	α_c	0.060389	δ_{ic}	0.10028
ϕ	4.3093	α_n	0.90498	δ_{in}	0.42388
φ_d	0.05643	μ_c	0.070209	κ_c	0.71329
v	0.034696	μ_n	0.036955	κ_n	29.9031
δ_m	0.018	λ	0.3723	γ	0.6188
φ_i	3.745×10^{-6}	ρ_c	0.077384	ρ_n	0.18677
		β_c	0.035656	β_n	0.93596

Tabla 3.9: Valores de los parámetros del modelo utilizados en las simulaciones dos cultivos, caso de presencia de plantas ancianas en el cultivo comercial y plantas productivas en el cultivo trampa.

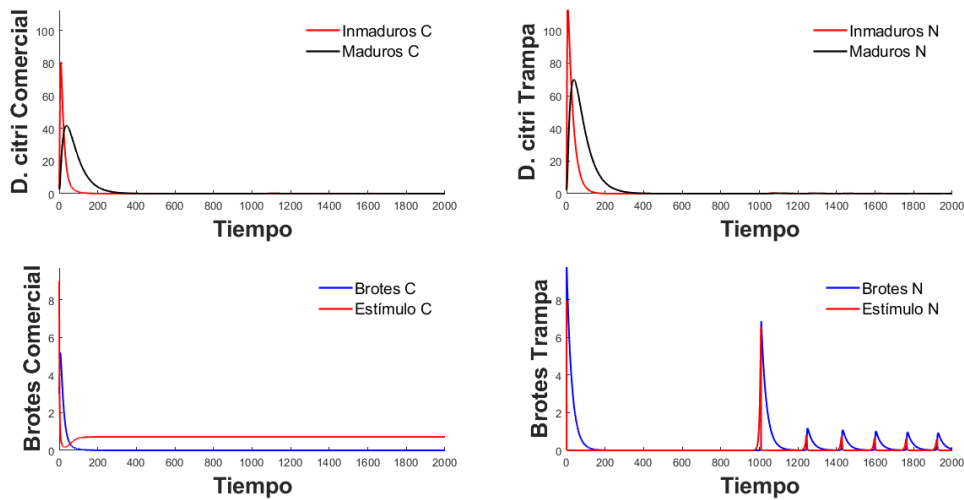


Figura 3.5: Presencia de plantas ancianas en el cultivo comercial y plantas productivas en el cultivo trampa.

Los resultados indican que, dependiendo de los valores de los parámetros, el sistema puede evolucionar naturalmente hacia equilibrios sin *Diaphorina citri*, con diferentes distribuciones de plantas productivas y ancianas entre los cultivos.

Las simulaciones numéricas confirman que es posible dirigir el sistema hacia equilibrios libres de plaga mediante una selección adecuada de parámetros. En particular, el análisis de sensibilidad de los parámetros revela cuáles de ellos tienen un mayor impacto en la estabilidad de los equilibrios y en la erradicación de *Diaphorina citri*. Alterando parámetros clave, como tasas de crecimiento, mortalidad y reproducción, es posible diseñar estrategias de control más efectivas que reduzcan la presencia de la plaga y minimicen su impacto en la producción agrícola.

Capítulo 4

Conclusiones

Se plantea un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias para representar la dinámica poblacional de *Diaphorina citri* y su interacción con los brotes a largo plazo. A partir de este modelo, se realiza un análisis cualitativo que incluye la determinación de los puntos de equilibrio y se analiza su estabilidad, identificando condiciones necesarias para dirigir el sistema hacia estados donde la población de *Diaphorina citri* sea baja o nula.

El análisis de sensibilidad evidencia que los umbrales del sistema son altamente susceptibles a cambios en los parámetros, lo que permitió identificar aquellos con mayor influencia en la dinámica del sistema. En particular, se identifica que la tasa efectiva de interacción del estímulo con los brotes (α), la capacidad de carga del estímulo la planta huésped (κ), la tasa de transición de brote a rama (μ) son los parámetros que tienen una mayor incidencia sobre el umbral Q_O que es el número promedio de hembras adultas de *Diaphorina citri* producidas por una hembra. Por su parte, el umbral Q_B , que representa el período de vida de los brotes, también se ve afectado significativamente por los mismos parámetros.

Las simulaciones muestran que, bajo ciertas condiciones, el sistema puede alcanzar equilibrios en los que *Diaphorina citri* se extingue de manera natural sin la necesidad de controles externos. La clave para lograrlo radica en una selección adecuada de parámetros, lo que sugiere que es posible mitigar la plaga sin recurrir a medidas químicas. Los resultados obtenidos permiten identificar parámetros clave en la dinámica del sistema donde pueden implementarse estrategias de control. En particular, el análisis de sensibilidad de los parámetros proporciona información valiosa sobre cuáles influyen más en el sistema, lo que facilita la selección de intervenciones más efectivas.

Posteriormente, se amplía el modelo introduciendo el cultivo trampa como una estrategia de control. Se realiza el análisis cualitativo del sistema y se obtiene que este posiblemente evolucione hacia determinados puntos de equilibrio (ε_4 , ε_7 , ε_8 , ε_9 , y ε_{10}).

En futuros trabajos, estos resultados podrán utilizarse para diseñar estrategias de manejo más eficientes, optimizando el uso de cultivos trampa, ajustando prácticas agrícolas y evaluando intervenciones que reduzcan la presencia de la plaga con un menor impacto ambiental y económico.

Bibliografía

- [1] F. Brauer y C. Castillo-Chavez, “Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,” vol. 2, 2012.
- [2] N. Chitnis, J. M. Hyman y J. M. Cushing, “Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model,” *Bulletin of mathematical biology*, vol. 70, págs. 1272-1296, 2008.
- [3] CropLife. “Candidatus Liberibacter spp” - Dragón Amarillo / Huanglongbing (HLB). Una enfermedad cítrica devastadora.” (Abril de 2022), dirección: <https://www.croplifela.org/es/plagas/listado-de-plagas/dragon-amarillo> (visitado 25-02-2024).
- [4] E. H. V. Devia, Á. M. V. Berdugo, E. R. Polanco et al., *Métodos de detección de HLB y de monitoreo y control biológico del vector Diaphorina citri en cultivos de cítricos en el Tolima*, Editorial AGROSAVIA, 2020.
- [5] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.
- [6] Y. García, Y. Patricia Ramos, P. Andrea Sotelo y T. Kondo, “Biología de Diaphorina citri (Hemiptera: Liviidae) bajo condiciones de invernadero en Palmira, Colombia,” *Revista Colombiana de Entomología*, vol. 42, n.º 1, págs. 36-42, 2016.
- [7] R. Hernández Lara, “El psílido asiático de los cítricos Diaphorina citri Kuwayama vector del Huanglongbing (HLB) en el estado de Hidalgo,” 2020.
- [8] F. Hortifrutícola, *Identificación de la dinámica poblacional de Diaphorina citri (Hemiptera: Liviidae) en los cultivos de cítricos de Colombia: una herramienta para implementar un sistema piloto de seguimiento de poblaciones del insecto vector del HLB*. Editorial AGROSAVIA, Cartilla, 2011.
- [9] M. Ibarra Avendaño et al., “SUSCEPTIBILIDAD DE Diaphorina citri VECTOR DEL HLB A INSECTICIDAS EN EL ESTADO DE VERACRUZ,” 2024.
- [10] Instituto Colombiano Agropecuario (ICA). “Todos unidos contra el Huanglongbing (HLB) de los cítricos y su vector Diaphorina citri, Kuwayama.” (Mayo de 2019), dirección: <https://www.ica.gov.co/Multimedia/swf/RevistaVirtual/2015/alerta8.pdf> (visitado 12-02-2024).
- [11] Y. H. Liu y J. H. Tsai, “Effects of temperature on biology and life table parameters of the Asian citrus psyllid, Diaphorina citri Kuwayama (Homoptera: Psyllidae),” *Annals of applied biology*, vol. 137, n.º 3, págs. 201-206, 2000.
- [12] M. A. Moncayo-Donoso, M. I. Alanza-Pinzón, A. M. Caicedo-Vallejo, J. E. Muñoz-Flórez, J. Montoya-Lerma y A. Carabalí-MUñoz, “Diversidad genética

- de *Diaphorina citri* en cultivos cítricos del Valle del Cauca y Quindío (Colombia),” *Bioteología en el Sector Agropecuario y Agroindustrial*, vol. 12, n.º 2, págs. 106-114, 2014.
- [13] L. A. Olvera-Vargas, Á. d. J. Quiroz Gaspar, D. I. Contreras-Medina, N. Aguilar-Rivera et al., “Análisis de riesgo potencial de Huanglongbing a través de tecnología geoespacial en Colombia,” *Ciencia y Tecnología Agropecuaria*, vol. 21, n.º 3, págs. 1-23, 2020.
 - [14] J. Rodríguez-Pagazaurtundua, D. Villalba et al., “Poda de los cítricos,” 1998.
 - [15] M. E. Rogers y P. A. Stansly, *Biology and Management of the Asian Citrus Psyllid, Diaphorina citri Kuwayama, in Florida Citrus1*, 2012.
 - [16] M. M. Seron, “Sistemas no lineales: notas de clase,” *Universidad Nacional de Rosario, Lab. de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de Señales*, págs. 1-161, 2000.
 - [17] A. Tomaseto, R. Krugner y J. R. S. Lopes, “Effect of plant barriers and citrus leaf age on dispersal of *Diaphorina citri* (Hemiptera: Liviidae),” *Journal of Applied Entomology*, vol. 140, n.º 1-2, págs. 91-102, 2016.
 - [18] M. A. Valderrama Quiñones, “Interacción Poblacional de *Diaphorina citri* y los brotes de la planta hospedante,” *Trabajo de grado en Matemáticas, Universidad del Valle*, 2020.