

Caracterización de las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la
Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos
Pedagógicos

Ana María Gómez López

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2022

Caracterización de las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la
Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos
Pedagógicos

Línea de investigación
Prácticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática
(PTICEM)
Ana María Gómez López

201703355

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en
Educación con énfasis en Educación Matemática

Dirigido por:

Dr. Diego Garzón

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ESCUELA DE EDUCACIÓN EN CIENCIAS, TECNOLOGÍAS Y CULTURAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2022

DEDICATORIA

A mi madre Emiliana y a mi hermano Benhur, a ellos todos mis logros.

AGRADECIMIENTOS

A mi profesor y tutor de trabajo de grado Diego Garzón por su constante y exhaustivo acompañamiento, por sus grandes enseñanzas, consejos y motivaciones que hicieron posible la escritura de este informe.

A mi profesor y amigo Jorge Enrique Galeano por sus constantes enseñanzas, por brindarme su espacio de trabajo, y por siempre tener una palabra precisa para todo momento y así animarme a cumplir mis metas personales y profesionales.

A la profesora Myriam Vega por sus grandes consejos y motivación para la culminación de este proceso académico.

A mi amiga y colega Leidy Cumbal por su apoyo y voz de aliento constante en todas las experiencias que hemos compartido e iniciado juntas.

A mi familia, a mi hermano, por su apoyo y comprensión indiscutible para el desarrollo de mis metas personales y profesionales.

A mis compañeros, amigos y colegas por su motivación.

A la Universidad del Valle por ser mi espacio de aprendizaje y forjadora de mis metas.

Tabla de contenido

Capítulo I: Formulación y aspectos generales del problema de investigación	3
1.1 Planteamiento del problema.....	3
1.2 Objetivos.....	9
1.2.1 Objetivo general.....	9
1.2.2 Objetivos específicos	9
1.3 Justificación	10
Capítulo II: Aproximaciones teóricas	13
2.1 Elementos articuladores entre las aproximaciones teóricas MPPME y MOST	13
2.2 De la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (MPPME).....	16
2.3 Sobre las Oportunidades Pedagógicas con Significado Matemático para la Construcción del Pensamiento Matemático (MOST).....	18
2.4 Sobre el sentido numérico	23
2.5 Sobre la perspectiva Instrumental	29
Capítulo III: Diseño Metodológico	36
3.1 Aproximación metodológica	36
3.2 Contextualización y participantes	37
3.3 Recolección de la información	39
3.3.1 Entrevistas.....	40
3.3.3 Videograbaciones.....	44
3.4 Análisis	44
3.4.1 Fase 1	45
3.4.2 Fase 2.....	52
3.4.2.1 Identificación de momentos MOST	53
3.4.2.2 Clasificación de momentos MOST.....	54
3.4.2.3 Identificación de episodios de referencia.....	55
3.4.3 Fase 3.....	60
Capítulo IV: Resultados	62
4.1 Descripción de la MPPME a partir de la asociación de las habilidades de esta y las meta-categorías obtenidas en el proceso de codificación	62
4.2 Identificación y clasificación de momentos MOST	72
4.2.1 Primer momento MOST identificado para la profesora Sara.....	72

4.2.2 Segundo momento MOST identificado para la profesora Sara.....	77
4.2.3 Momento MOST identificado para la profesora Sofía.....	80
4.3 Clasificación de momentos MOST	84
4.3.1 Momento de identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural 86	
4.3.2 Momento de identificación de la representación numérica de una fracción	87
4.4 Articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos.....	90
Capítulo V: Conclusiones y discusiones	99
5.1 La Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas	99
5.2 Tipología de Momentos MOST al orquestar Recursos Pedagógicos.....	103
5.3 Los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas	106
5.4 Limitaciones y recomendaciones	109
Referencias Bibliográficas.....	112

Lista de tablas

Tabla 1. Ejemplificación codificación abierta	47
Tabla 2. Ejemplificación segundo nivel de codificación	49
Tabla 3. Ejemplificación tercer nivel de codificación	50
Tabla 4. Objetivos planificados para la sesión de la profesora Sara	56
Tabla 5. Número de episodios de referencia identificados para Sara	57
Tabla 6. Objetivos planificados para la sesión de la profesora Sofía	59
Tabla 7. Número de episodios de referencia identificados para Sofía	60
Tabla 8. Identificación de las meta-categorías teóricas	62
Tabla 9. Ejemplificación de la meta-categoría Identificación del Recurso Pedagógico	63
Tabla 10. Ejemplificación de la meta-categoría Regulación de las Actividades de Clase	65
Tabla 11. Ejemplificación de la meta-categoría Objeto Matemático que vincula al Recurso Pedagógico	67
Tabla 12. Ejemplificación de la meta-categoría Revisión del Juego	68
Tabla 13. Asociación entre las habilidades de la MPPME y las meta-categorías	69
Tabla 14. Clasificación de momentos MOST	85
Tabla 15. Articulación entre los tipos de orquestación y las meta-categorías construidas en el proceso de codificación	92
Tabla 16. Articulación entre los Tipos de Orquestación y los tipos de momentos MOST	92

Lista de figuras

Figura 1. Configuración Didáctica del Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle	93
--	----

Lista de ilustraciones

Ilustración 1. Ejemplificación del Recurso Pedagógico Dominó de fracciones	38
Ilustración 2. Ejemplificación del Recurso Pedagógico Focus	39
Ilustración 3. Configuración Didáctica para la profesora Sara y Sofía, respectivamente	94
Ilustración 4. Manera escrita en que un estudiante explica lo que ha entendido con el Recurso Pedagógico	96
Ilustración 5. Orquestación Trabaja y Camina Por, de las profesoras Sara y Sofía, respectivamente	98

Resumen

Esta investigación da cuenta de la caracterización de la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. Se realizó una investigación cualitativa. Como método, se realizó un estudio de casos múltiple en el Laboratorio de Educación Matemática de la Práctica Profesional que aborda la Universidad del Valle. La investigación tuvo como objetivo caracterizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. Los instrumentos utilizados para dar cuenta de la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante para cada caso de la investigación fueron las videograbaciones como fuente central de análisis y dos entrevistas semiestructuradas, de planificación y de reflexión.

El análisis de los datos es de carácter inductivo y se realiza con base en la articulación local de tres aproximaciones teóricas: a). La Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante, (b). las Oportunidades Pedagógicas Significativas en una Perspectiva Matemática, y (c). la Orquestación Instrumental.

De esta investigación se obtuvieron tres resultados: el primer resultado se relacionó con las habilidades para Interpretar y para Responder a la comprensión de los estudiantes, y el bajo nivel de desarrollo de éstas en los estudios de caso. El segundo resultado refiere a la identificación de un número reducido de momentos que cumplen con la estructura analítica de Oportunidades Significativas en una Perspectiva Matemática. Y el tercer resultado expuso que, como tendencia, el Tipo de Orquestación *Guía y Explicación* es el más frecuente en la investigación.

Palabras clave: Mirada Profesional, Oportunidades Pedagógicas Significativas en una Perspectiva Matemática, Noticing del Profesor, Prácticas de profesores, Tipos de Orquestación.

Capítulo I: Formulación y aspectos generales del problema de investigación

1.1 Planteamiento del problema

La presente investigación se aborda en el marco del Seminario de Práctica de los estudiantes de las licenciaturas de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, que hace énfasis en que las reflexiones elaboradas por los estudiantes y tutores estén estrechamente relacionadas con la interacción de los estudiantes en el aula en la que realizan su práctica profesional.

Esta investigación parte del interés de aportar a la cualificación de las prácticas de los profesores de matemáticas en formación, especialmente del aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante en Discusiones Matemáticas, cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en el laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

El Laboratorio de Educación Matemática se concibe como una estrategia organizativa y pedagógica, que, con base en las matemáticas experimentales, los profesores de matemáticas en formación construyen o rediseñan Recursos Pedagógicos dirigidos a estudiantes de instituciones oficiales o privadas. Lo que lleva a los profesores de matemáticas en formación a la reflexión continua en relación con las tareas profesionales de orquestar recursos (Universidad del Valle, 2015). Es decir, se orquestan Recursos Pedagógicos que en su mayoría han sido diseñados por los profesores de matemáticas en formación, y que hacen del su uso. El trabajo con estos recursos propicia el aprendizaje de un determinado objeto matemático.

En el Laboratorio de Educación Matemática los profesores de matemáticas en formación dotan de sentido su práctica basándose en las interacciones con los estudiantes, y en aspectos previos a su encuentro, entre otros, la escogencia del recurso pedagógico, objetivos de su

práctica de enseñanza, y posteriormente lo que identifican deben mejorar o fortalecer para sus próximas experiencias.

Los Recursos Pedagógicos que se abordan en esta investigación se relacionan con el Pensamiento Numérico, en especial con la construcción y desarrollo del Sentido Numérico (MEN, 1998), pues los profesores de matemáticas en formación los prefieren durante su práctica profesional en el Laboratorio de Educación Matemática. De estos recursos, según las solicitudes de los profesores de las instituciones educativas, se trabaja con recursos que atiendan al aprendizaje y enseñanza de las fracciones, puesto que resultan difíciles de aprender para los estudiantes, de educación básica primaria, en especial (Ivars, 2019).

En este sentido y como aspecto central del presente trabajo, se propone analizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación, de la Universidad del Valle, en relación con la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (MPPME), determinada por tres habilidades que están articuladas entre sí: *Identificar Aprendizajes de los Estudiantes, Interpretar la Comprensión de los Estudiantes y Responder a las Comprensión de los Estudiantes* (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010), al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. Específicamente, interesa dar cuenta de la toma de decisiones de acción de los profesores, en tanto a las estrategias que plantean con base en las interacciones de los estudiantes, puesto que en la Educación Matemática se reconoce la importancia de éstas en la MPPME (Garzón, 2017b).

En el Seminario de Práctica Profesional se realiza un trabajo exploratorio, colaborativo y de reflexión, en el que se involucra la aplicación de instrumentos para la recolección de datos en relación con la MPPME, especialmente de las acciones docentes como respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante. Los registros de la práctica que analizan los profesores de

matemáticas en formación en este Seminario se obtienen de observaciones de clase, entrevistas semiestructuradas (inicial y final), videograbaciones (al menos dos sesiones de clase) y viñetas de video (Universidad del Valle, 2018).

Santagata y Yeh (2015) manifiestan que la investigación en Educación Matemática, en relación con el desarrollo profesional del profesor aún no deja claro en qué consiste que un maestro haga uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante. Los estudios se han limitado a determinar el impacto del maestro en el aprendizaje del estudiante, sin ahondar en el análisis de sus competencias profesionales; es por ello que resulta importante prestar atención al desarrollo de las competencias profesionales del profesor, en cuanto al aprovechamiento del Pensamiento Matemático, es decir cómo reconocer las estrategias, las matemáticas de los estudiantes, los detalles de cómo éstos dan sentido a una idea matemática y su relación, en otros contextos con otras disciplinas (Loef, Kazemi y Battey, 2007); en un contexto situado, que permita identificar de qué manera el profesor propicia el aprendizaje de sus estudiantes.

Por tanto, existe interés de incluir la MPPME en los programas de formación inicial de profesores en Matemáticas, pues según Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) ésta contribuye al mejoramiento de las prácticas de enseñanza de tal manera que permite dar sentido a momentos en el aula de clase en que se manifiesta el Pensamiento Matemático del Estudiante.

Ya que el desarrollo de las habilidades *Identificar* e *Interpretar* presentan más dificultades en profesores de matemáticas en formación que en profesores de matemáticas en servicio; dada la experiencia que tienen unos sobre los otros. La habilidad de *Responder* presenta dificultades en ambos grupos de profesores de matemáticas. Para los profesores en formación las dificultades se centran en la poca propuesta de estrategias para fomentar el aprendizaje de los

estudiantes; y en los profesores en servicio por su conocimiento, creencias y propuesta de tareas aisladas de documentos curriculares e investigaciones en el campo.

Simpson y Haltiwanger (2017) enuncian que atender al Pensamiento Matemático del Estudiante, no es una habilidad usual que se fortalezca como parte de los procesos de formación de los docentes, por lo que se hace necesario repensar el papel que juega el maestro en el aula como un sujeto activo, que facilita el aprendizaje de sus estudiantes en consideración a los conocimientos previos y las intervenciones de éstos, que monitorea y controla el Pensamiento Matemático del Estudiante para así mismo responder y tomar decisiones frente a sus constructos o errores. Además, la MPPME puede adquirirse a través de distintas formas de trabajo, como por ejemplo los videoclubes y experiencias de aprendizaje continuas; no obstante, el desarrollo de esta mejora con la experiencia docente (Jacobs et al., 2010; Huang y Li, 2012).

Stockero y Stenzelbarton (2017) exponen cómo la investigación relacionada con la MPPME permite repensar un nuevo contexto de enseñanza de las matemáticas, en que el ver por parte de los profesores de matemáticas en formación permite valorar la expresión matemática de los estudiantes y reconocer Momentos de Enseñanza significativos.

Garzón (2017b) analiza las decisiones que toman los profesores en clase, en las que emergen oportunidades pedagógicas, es decir, aquellas discusiones orquestadas por parte del profesor en conjunto con las manifestaciones del Pensamiento Matemático del Estudiante que posibilitan la construcción de significado matemático. Por tanto, interesa reconocer las transformaciones de las acciones del docente, que permiten establecer la clasificación de momentos en que se da respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos.

Fernández, Llinares y Rojas (2020) presentan una investigación acerca del mejoramiento de la MPPME para profesores en formación que cursan su licenciatura en línea, a través del trabajo compartido de narrativas de sus prácticas de enseñanza, que dan cuenta de su reflexión como docentes. Estas narrativas obedecen a las narraciones de los futuros profesores sobre momentos en que se atiende al Pensamiento Matemático del Estudiante. Estas narraciones son compartidas en línea y por tanto reciben retroalimentación por parte de compañeros y profesores del curso, lo que conduce a la reflexión en relación con el desarrollo de las habilidades de la MPPME.

De hecho, se espera que este trabajo de investigación aporte a la cualificación de la MPPME en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle y a otras comunidades en general, a partir de la narrativa resultante sobre la caracterización de las prácticas de los profesores de matemáticas en formación en términos de momentos de enseñanza, con énfasis en la toma de sus decisiones. Si bien, Fernández y Choy (2020) enfatizan en que los registros de práctica como las videgrabaciones son una herramienta potente para desarrollar la MPPME por los profesores, pues el análisis de éstas ayuda a identificar situaciones importantes de aprendizaje, y así el maestro pueda elaborar comentarios interpretativos y evaluativos con base en fundamentos investigativos sobre lo que aprende el estudiante.

Por otro lado, es importante destacar que por ‘Pensamiento Matemático’ se entenderán las estrategias, las matemáticas de los estudiantes, los detalles de cómo estos están creando sentido de una idea matemática y su relación en contextos de otras disciplinas (Loef, et al., 2007). Además, Philipp, Jacobs y Sherin (2014) destacan la MPPME como un proceso interactivo entre el docente y los estudiantes que da cuenta de lo que acontece en la práctica de enseñanza. Esta categoría más

que de orden cognitivo, enfatiza en cómo los profesores interactúan con los estudiantes en una situación de enseñanza de las matemáticas.

En consecuencia, dado que el Seminario de Práctica Profesional inscribe la MPPME como un aspecto formal de las licenciaturas de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, y esta es una situación para fortalecer dentro del campo de la Educación Matemática, específicamente en formación docente, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo los profesores de matemáticas en formación aprovechan el Pensamiento Matemático del Estudiante, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

1.2.2 Objetivos específicos

- ✓ Analizar la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático Estudiantil, de profesores de matemáticas en formación, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.
- ✓ Clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.
- ✓ Identificar distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

1.3 Justificación

En el campo de formación docente, Van Es y Gamoran (2002) señalan la construcción de nuevas formas de enseñanza, que atiendan a la capacidad del profesor de interpretar las distintas interacciones que se presentan en el aula de clase, puesto que a menudo los programas de formación docente no se centran en ayudar al profesor a comprender el Pensamiento Matemático del Estudiante. Es decir, los programas de formación docente han presentado énfasis en el suministro de instrucciones en relación con técnicas o metodologías para su enseñanza. Si bien, estos aportes para la formación del profesorado son importantes, no garantizan que los maestros aprendan a interpretar las distintas interacciones que se presentan en el aula de clases, y así propicien flexibilidad y reflexión sobre sus enfoques de enseñanza.

Santagata y Yeh (2015) enuncian que el tipo de investigación realizado sobre la competencia docente se enfocaba más hacia la naturaleza y tipo de conocimiento del profesor para ser efectivo en su enseñanza de tal forma que promoviera el aprendizaje de los estudiantes, y de cómo sus creencias y concepciones influyen en su proceso de enseñanza. Posteriormente se vio la necesidad de expandir en estos estudios, con base en un enfoque cognitivo que aludiera también a sus conocimientos y creencias, traducidas en sus decisiones y acciones en el aula en Momentos de Enseñanza. Para esto Santagata y Yeh (2015) retoman a Blömeke, Gustafsson, y Shavelson, (2015); Blömeke, Hsieh, Kaiser y Schmidt (2014), quienes refieren a la conceptualización de competencia docente, en torno a una perspectiva cognitiva y situada en el estudio de la práctica del maestro. En esta perspectiva la competencia es vista como un continuo en el que se articulan aspectos cognitivos, afectivos, habilidades y desempeños, en un contexto situado. Son tres habilidades relacionadas entre sí: percibir, interpretar y decidir; sobre actividades y Momentos de Enseñanza.

En un contexto mucho más amplio, la MPPME está determinada por tres habilidades: *Identificar Aprendizajes de los Estudiantes*, *Interpretar la Comprensión de los Estudiantes* y *Responder a la Comprensión de los Estudiantes*. Sobre esta aproximación teórica, investigaciones como la de Simpson y Haltiwanger (2017) resaltan su importancia, además de identificar las fortalezas y debilidades de los maestros en torno a su trabajo, experiencias, creencias y autoevaluación; dado que esto no es un aspecto formal que haga parte de los procesos de formación de futuros docentes, y además amplía la literatura en el campo de educación secundaria puesto que son pocas las investigaciones realizadas en este nivel educativo.

La investigación realizada en la aproximación teórica MPPME ofrece beneficios tanto para el docente como para el estudiante, puesto que permite analizar procesos de interacción y del discurso producidos en el aula que promueven la comprensión conceptual (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti, 1991 ; Wood, Williams, y McNeal, 2006), cualificar mayor rendimiento matemático de los estudiantes, (Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs y Empson, 1996; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey 2007), cambios positivos en las creencias de los docentes en cuanto a lo pedagógico, la enseñanza y el aprendizaje, como también en la capacidad de crear y adaptar distintas tareas para sus estudiantes.

En el currículo propuesto, como tendencia, se ha tratado de favorecer la incorporación de las tecnologías educativas. Sin embargo, en el currículo desarrollado por las instituciones educativas el impacto de la integración de las tecnologías es limitado en relación con los recursos disponibles y la formación de profesores en estas.

De hecho, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) enuncia que “formar en tecnología es mucho más que ofrecer una capacitación para manejar artefactos.” (MEN, 2008, p. 11), además, existe el rechazo que manifiestan ciertos docentes ante el uso e implementación

de tecnologías educativas en sus prácticas de enseñanza, se niegan a realizar una “actualización” de su actividad profesional, como también las concepciones que tiene el profesor acerca del “uso de las tecnologías educativas” en el proceso de enseñanza.

Garzón, Vega, Pabón, Arce, Castrillón G. (2013) presentan una reestructuración de la concepción sobre Recurso Pedagógico, y enuncian que el uso de este constituye un proceso vivo en acción, se transforma de artefacto a instrumento a partir de la transformación de los esquemas de uso y del contexto en que se desarrolla. Por tanto, el profesor a partir de sus prácticas discursivas y gestión didáctica debe proveer de situaciones que conlleven al estudiante a la devolución de un problema propuesto, mediante el empleo de artefactos y su transformación a instrumento en el proceso de enseñanza.

Así, para potenciar el Recurso Pedagógico se requiere de la Orquestación Instrumental que se define como la organización intencional y sistemática del maestro en relación con los artefactos disponibles dentro de un entorno de aprendizaje, en una situación matemática específica, con el objetivo de orientar la génesis instrumental de sus estudiantes. (Trouche, 2004).

Capítulo II: Aproximaciones teóricas

En este trabajo es posible distinguir tres aproximaciones teóricas en relación con la problemática ya planteada anteriormente: la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (MPPME) (Jacobs et al., 2010), las Oportunidades Pedagógicas con Significado Matemático para la Construcción del Pensamiento Matemático (MOST)¹ (Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest, 2015), y la Orquestación Instrumental (Drijvers, 2012; Drijvers, Doorman, Boon, Reed Y Gravemeijer, 2010; Trouche, 2004). Puesto que la primera permite dar cuenta del análisis de la competencia profesional del profesor, la segunda permite analizar los Momentos de Enseñanza que ponen de manifiesto el Pensamiento Matemático del Estudiante y así mismo ser un instrumento de análisis para el desarrollo de las tres habilidades de la MPPME, y la tercera, la articulación de las dos anteriores cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

De manera paralela se presenta la conceptualización de Sentido Numérico, puesto que es un eje teórico transversal a las tres aproximaciones teóricas mencionadas anteriormente y resulta importante su concepción para el desarrollo de este trabajo de investigación.

2.1 Elementos articuladores entre las aproximaciones teóricas MPPME y MOST

Garzón (2017a) destaca en su tesis de doctorado elementos articuladores entre los enfoques teóricos MPPME y MOST. Estos son: la Observación Profesional del Pensamiento Matemático del Estudiante, las Decisiones de Acción, los Momentos de Enseñanza y las Oportunidades Pedagógicas. Estos elementos subyacen de la integración local entre estos dos enfoques, lo que hace referencia a la descripción de las estrategias para conectar teorías (Gellert,

¹ Por su escritura en inglés **M**athematically **S**ignificant **P**edagogical **O**pportunities to **B**uild on **S**tudent **T**hinking (Leatham et al., 2015).

2010), lo que permitió entonces destacar los elementos articuladores mencionados anteriormente, bajo distintos análisis preliminares elaborados sobre revisión y lectura de diversos estudios de investigación. La articulación de las aproximaciones teóricas MPPME y MOST permitió la adopción de elementos conceptuales para atender a la caracterización de las prácticas de enseñanza en relación con el aprovechamiento que hace el profesor sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante.

La MPPME refiere a las competencias profesionales del profesor: *Identificar Aprendizajes de los Estudiantes, Interpretar la Comprensión de los Estudiantes y Responder a la comprensión de los estudiantes* (Jacobs et al., 2010), y la segunda, es decir MOST, permite la caracterización de la Mirada Profesional a través de una estructura analítica de tres componentes: Pensamiento Matemático del Estudiante, lo Significativo de las Matemáticas, y Oportunidades Matemáticas. Esta estructura, junto con sus criterios asociados a sus componentes, con base en un enfoque cualitativo, permite categorizar, describir y evaluar las habilidades del profesor, es decir, se entiende como un instrumento de análisis para el desarrollo de las habilidades de la MPPME.

Según Garzón (2017a), los elementos articuladores y transversales de las dos aproximaciones teóricas son:

La Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático: Definida por tres habilidades articuladas entre sí: *identificación de las estrategias de los estudiantes al solucionar situaciones problemas, interpretación de las comprensiones de los estudiantes, y respuesta a las comprensiones de los estudiantes*. (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011).

Las decisiones de acción que se relacionan con una de las tres habilidades de la Mirada Profesional del profesor (Van Es y Sherin, 2002; Fortuny y Rodríguez, 2012) y de la conceptualización de la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (Sherin et al., 2011), esto es, a las formas de razonar del profesor para dar respuesta a las comprensiones del estudiante.

Los Momentos de Enseñanza que ocurren en Discusiones Matemáticas² gestionadas por el profesor en las que las manifestaciones observables del Pensamiento Matemático del Estudiante permiten generar Oportunidades Pedagógicas. Los Momentos de Enseñanza contribuyen al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, puesto que ponen en evidencia las acciones del profesor para gestionar las estrategias de los estudiantes, en este caso según Thames y Ball (2003), aquellas estrategias que puedan decir si la Perspectiva Matemática del estudiante es fundamental.

Las Oportunidades Pedagógicas que emergen de los Momentos de Enseñanza. Son “un instrumento para analizar el potencial matemático y pedagógico del Pensamiento Matemático del Estudiante en relación con esos Momentos de Enseñanza” (Garzón, 2017a, p. 25). Suministran una estructura analítica para el desarrollo de las tres habilidades de la MPPME, de tal manera que se comparan y caracterizan entre sí los Momentos de Enseñanza y así posibilitar la construcción de significados matemáticos.

² Da Ponte, Quaresma y Mata Pereira (2017) definen las Discusiones Matemáticas como una forma particular de la comunicación, en que las tareas propuestas por el profesor y las decisiones de acción de éste ofrecen oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas. Se discute entonces cómo los estudiantes dan solución a un problema. Esto a partir de anticiparse a las posibles dificultades que presentan los estudiantes, la selección de aspectos a tener en cuenta en la discusión, las intervenciones y expresiones de los estudiantes durante la discusión, y la vinculación de todas las expresiones o explicaciones que dan éstos en la discusión.

En las Discusiones Matemáticas es importante que el profesor dirija las participaciones de los estudiantes y las aproveche para introducir otro tipo de temáticas alrededor de lo tratado. También es importante el tipo de preguntas que realiza el profesor para que con ello comprometa a los estudiantes en la conversación.

2.2 De la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (MPPME)

El término Mirada Profesional se relaciona de manera cotidiana con la capacidad de notar y destacar aspectos sensoriales de un determinado grupo de individuos. De manera particular las profesiones contemplan sus formas específicas de observar. En el campo de la Educación Matemática, el observar o Mirada Profesional ha tenido gran auge como parte de los procesos de investigación en la disciplina y en procesos de interacción en el aula de clases, tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas (Sherin et al., 2011).

Además de que la MPPME centra interés en el cómo responder al Pensamiento Matemático del Estudiante, existe otra concepción de esta que hace mayor énfasis en el conocimiento matemático del contenido, es decir en el conocimiento profesional del profesor o del estudio de habilidades que se asocian con su conocimiento y de cómo este influye en el aprendizaje del estudiante. Por tanto, en la Mirada Profesional del profesor de matemáticas, es necesario destacar su importancia puesto que se asocia a dos conocimientos: el primero ya mencionado, y el segundo al conocimiento de contenido pedagógico. El primero porque se reconoce como el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phels, 2008), y consiste en la sistematización de los conocimientos del profesor requeridos para la enseñanza de las matemáticas; la Mirada Profesional del profesor aquí enfatiza sobre cómo usa su conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. El segundo conocimiento, particulariza la enseñanza, además de lo que se despliega en esta. (Sherin et al., 2011).

La MPPME es distinta de otros constructos tales como el concepto de conocimiento y el concepto de creencias, puesto que las competencias profesionales del profesor en esta investigación tienen que ver con el estudio de habilidades relacionadas con la percepción, es decir con la identificación, interpretación y toma de decisiones frente a ciertos fenómenos

durante la enseñanza. La MPPME es un proceso interactivo entre docente y estudiantes basado en lo que acontece en la práctica más que una categoría de recurso cognitivo; enfatiza en cómo los profesores interactúan en una situación de enseñanza de las matemáticas, por lo tanto, se vuelve una actividad compleja de desarrollar (Philipp et al., 2014).

La MPPME al ser un proceso complejo de realizar, su desarrollo profesional se ha centrado en el apoyo brindado a los profesores para aprender a observar de manera diferente a la usual en las aulas de clase, tal como la conformación de clubes para observación y análisis de videos, de forma colaborativa entre profesores, en la que a partir de una serie de criterios se destacan segmentos de video relevantes y se enfatiza en el desarrollo de una nueva comprensión de los ambientes de aprendizaje para así tomar decisiones en el aula que estén fundamentadas, es decir, discriminar o filtrar eventos en los que se va a tener una Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante, pues en el aula circula demasiada información y el profesor debe realizar una selección de lo que va a responder y analizar en ella. (Sherin y Van Es, 2002, 2009; Sherin et al., 2011; Sherin y Dyer, 2017).

El proceso de selección por parte del profesor, de aquello a lo que va a dar respuesta en el aula de clases, es al mismo tiempo objeto de su formación, de cómo él construye conocimiento y cómo tiene una acción sistemática para tomar decisiones fundamentadas, por ejemplo, en el desarrollo de la didáctica y de conocimientos curriculares, más que simplemente en las contingencias del aula de clase.

Como se ha nombrado anteriormente, la MPPME es el conjunto de habilidades profesionales del profesor articuladas entre sí: *Identificar Aprendizajes de los Estudiantes*, *Interpretar la Comprensión de los Estudiantes* y *Responder a la Comprensión de los Estudiantes* (Jacobs et al., 2010). La primera habilidad refiere a la identificación de las estrategias de los

estudiantes, lo que hace prestar atención a los aspectos específicos de situaciones de enseñanza y también de los conocimientos matemáticos de los estudiantes.

La segunda, se relaciona con el modo de razonamiento del profesor frente a la caracterización de las estrategias de sus estudiantes, además se fundamenta con base en las investigaciones realizadas sobre el desarrollo del Pensamiento Matemático.

La tercera habilidad, que guarda mayor relación con la toma de decisiones del profesor, se caracteriza también con el modo de razonamiento del profesor frente a cómo responde a las comprensiones del estudiante. Se determina si el razonamiento del profesor es consistente en relación con las estrategias de los estudiantes y los aportes investigativos sobre el desarrollo del Pensamiento Matemático.

2.3 Sobre las Oportunidades Pedagógicas con Significado Matemático para la Construcción del Pensamiento Matemático (MOST)

La escogencia de esta segunda aproximación permite analizar los Momentos de Enseñanza que ponen de manifiesto el Pensamiento Matemático del Estudiante y así mismo será un instrumento de análisis para el desarrollo de las tres habilidades de la MPPME.

Es importante recalcar que de esta aproximación se exponen a continuación sus elementos teóricos y además los elementos metodológicos que esta suministra para caracterizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con el aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante. Dichos elementos metodológicos dotan la estructura de análisis de tal aproximación, que, de manera posterior, en el siguiente capítulo de este trabajo, exponen el diseño del instrumento como estudio del desarrollo de las tres habilidades de la MPPME.

Leatham et al. (2015) conceptualizan las Oportunidades Pedagógicas Significativas en una Perspectiva Matemática, es decir un momento MOST como la intersección de tres características importantes: Pensamiento Matemático del Estudiante, lo Significativo de las Matemáticas y la Oportunidad Pedagógica. Estas se derivan también como un proceso analítico a seguir, en el que su unidad de análisis es un momento identificado como una acción observable del estudiante o una conexión de acciones relacionadas, como por ejemplo una acción verbal acompañada de un gesto. Según Stockero (2008) también puede considerarse como un momento una línea de conversación o una expresión física de un evento, por ejemplo, solucionar de forma escrita un problema en el tablero.

El Pensamiento Matemático del Estudiante es la característica fundamental de una Oportunidad Pedagógica Significativa en la Perspectiva Matemática. En segundo instante se analiza si el Pensamiento Matemático de los estudiantes desarrolla significados matemáticos. “Por último, se considera si el Pensamiento Matemático del Estudiante puede ser construido sobre la comprensión que tienen los estudiantes de los significados matemáticos en el momento en el que emerge una oportunidad pedagógica (Leatham et al., 2015)” (como se citó en Garzón, 2017a, p. 37).

El Pensamiento Matemático del Estudiante es la característica fundamental de una Oportunidad Pedagógica Significativa en una Perspectiva Matemática, es decir que para que un momento sea reconocido como una Oportunidad Pedagógica Significativa, debe fundamentarse en este. Para que el momento se considere portador del Pensamiento Matemático del Estudiante, deben cumplirse dos criterios:

- ✓ La acción del estudiante suministra evidencias suficientes para hacer inferencias razonables (las matemáticas del estudiante). Este criterio se cumple si un observador

infiere lo que el estudiante está expresando matemáticamente. Es importante aclarar que las inferencias sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante se hacen con base en lo que hacen y dicen los estudiantes, es decir, a partir de sus acciones.

- ✓ Se puede articular una idea matemática que vincula al momento con las matemáticas del estudiante (la Perspectiva Matemática). Se cumple si la idea matemática presentada se entiende por los estudiantes y se expresa como una declaración concisa. Por ejemplo, “la multiplicación y la división son operaciones inversas”.

Para los anteriores criterios es pertinente realizar una distinción entre lo observable y lo observado. El primero refiere a lo que el profesor puede observar del Pensamiento Matemático del Estudiante, ya sea por otros al estar presente, o a través del registro de las interacciones en el aula. Y el segundo que denota lo que infiere el profesor a partir de lo que hacen y dicen los estudiantes (Garzón, 2017b).

Para la segunda característica *lo Significativo en una Perspectiva Matemática*, Leatham et al. (2015) afirman que para que un caso sea considerado como una Oportunidad Pedagógica Significativa en una Perspectiva Matemática, la Perspectiva Matemática se debe relacionar con las matemáticas del estudiante. La expresión *lo Significativo de las Matemáticas* se utiliza para señalar a los profesores que participan en el aprendizaje de las matemáticas, en una clase. Y la expresión *Significado Matemático* denota un grupo de estudiantes con una perspectiva específica de su desarrollo matemático.

Esta característica del proceso analítico se cumple a través de dos criterios:

- ✓ La Perspectiva Matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes. Este criterio toma en consideración dos condiciones:

- a. Las matemáticas deben ser accesibles a los estudiantes. Se deben reconocer los conocimientos previos en matemáticas, y considerar que el conocimiento es suficiente para la articulación con la Perspectiva Matemática.
- b. La Perspectiva Matemática no puede ser lo que los estudiantes entienden con su nivel matemático.

Las perspectivas matemáticas accesibles a los estudiantes, se identifican por ejemplo a través de documentos curriculares e investigaciones relacionadas con trayectorias de aprendizaje.

- ✓ La Perspectiva Matemática es uno de los contenidos para el aprendizaje. Este criterio consiste en que la Perspectiva Matemática debe relacionarse con un objetivo matemático central de la clase. Estos objetivos matemáticos pueden ser planteados por el profesor o por documentos curriculares, y ser también específicos para llegar a metas amplias en el aprendizaje de las matemáticas.

La tercera característica *Oportunidad Pedagógica* refiere a un momento en el discurso del aula, en que el Pensamiento Matemático del Estudiante posibilita la construcción de significado matemático (Leatham et al., 2015)., lo que contempla distintos casos.

Según Remillard y Geist (2002), una oportunidad pedagógica resulta cuando en la apertura del currículo³ emerge un momento en que el Pensamiento Matemático del Estudiante se aprovecha y se transforma en objeto de discusión.

Por tanto, para que un momento sea considerado como una Oportunidad Pedagógica, debe cumplir con dos criterios:

³ Esto son desafíos y preguntas a los estudiantes

- ✓ El Pensamiento Matemático del Estudiante, en el momento, crea apertura para construir la Perspectiva Matemática. En este criterio la apertura es considerada como la creación de una necesidad intelectual, con base en una expresión del pensamiento del estudiante para dar sentido a sus matemáticas. Una necesidad intelectual no se determina por la concepción del profesor, sino por la del estudiante. Harel (2013) afirma que la necesidad intelectual se relaciona con el comprender cómo aprende el estudiante y por qué se obtiene un determinado conocimiento. Se han identificado cinco tipos de necesidades intelectuales: de certeza, de causalidad, de cálculo, de comunicación, y de estructura lógica.

La primera necesidad se relaciona con el probar para la eliminación de dudas, la segunda con la explicación para identificar la causa de un fenómeno, la tercera con hacer uso del álgebra para cuantificar valores de las cantidades y las relaciones entre ellas (Garzón, 2017a). La cuarta necesidad se relaciona con la formulación de lo expresado en un lenguaje natural en uno algebraico, y la formalización de ideas mediante una estructura lógica de argumentos. La última necesidad se relaciona con el uso de una estructura lógica para la reorganización de aquello que se ha aprendido.

- ✓ El momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura. La elección de un momento oportuno es aleatoria de otras oportunidades, no consiste en ser solo un momento de apertura sino también en aprovechar las ventajas de este. Dicha elección se determina a partir de la planeación de la clase, sus participantes, y el contexto en que se presenta la apertura.

La aproximación teórica MOST goza de una estructura analítica que permite analizar los Momentos de Enseñanza que ponen de manifiesto el Pensamiento Matemático del Estudiante y

así mismo será un instrumento de análisis para el desarrollo de las tres habilidades de la MPPME.

Por ejemplo, Van Zoest, Stockero, Leatham, Peterson, Atanga y Ochieng (2017) usan la estructura analítica MOST para identificar atributos importantes del Pensamiento Matemático del Estudiante y así las prácticas de enseñanza de los profesores sean productivas en tanto se haga un uso provechoso de este a través de discusiones que fomenten el aprendizaje de los estudiantes.

Stockero, Leatham, Ochieng y Van Zoest (2020) usan la estructura analítica MOST para caracterizar el Pensamiento Matemático del Estudiante como un recurso en las discusiones de clase, es decir se promueven prácticas de enseñanza ambiciosas.

Finalmente, se considera una Oportunidad Pedagógica Significativa en una Perspectiva Matemática a aquel Momento de Enseñanza que cumpla con los tres criterios de la estructura analítica anteriormente descrita: Pensamiento Matemático del Estudiante, lo Significativo en una Perspectiva Matemática, y las Oportunidades Pedagógicas. Es importante recalcar que dicha estructura analítica se estudia de manera secuencial para que el análisis y puesta en práctica de un criterio tenga como prerequisite el cumplimiento del anterior. No obstante, los expertos en didáctica y su diversa formación y experiencia en el análisis de un Momento de Enseñanza podrán concluir diferentes aspectos o juicios en relación con cada una de las características y criterios de la estructura analítica, lo que permite inferir que dicha estructura no es de carácter determinista.

2.4 Sobre el sentido numérico

A partir de una perspectiva curricular, los lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), mencionan que el Pensamiento Numérico se desarrolla a través de los sistemas numéricos, y se analiza a través de conceptos como Sentido Numérico, sentido operacional,

habilidades y destrezas numéricas, comparaciones, estimaciones, órdenes de magnitud, etc. Con base en esto, dicho pensamiento presenta las siguientes características:

- ✓ Se desarrolla de manera gradual en el estudiante y en relación con su manera de pensar acerca de los números y sus usos en contextos cercanos y/o significativos para él. Es decir, lo que comprende en cuánto a qué significan los números, lo que se deriva de su contexto y experiencias escolares y extraescolares.
- ✓ Ayuda a desarrollar habilidades para comprender, apropiar y dar significado a las relaciones y sus propiedades, y operaciones algebraicas entre los números, que se extienden desde los números naturales hacia los números complejos, a partir de actividades que impliquen acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos para la resolución de problemas, y con ello, la comprensión de los algoritmos.
- ✓ El uso de distintas representaciones para los números promueve la identificación del número en distintos escenarios o contextos en que se aplica, como también el hecho de que algunas representaciones resultan ser más útiles que otras. Es importante que el trabajo de representar al número no recaiga solamente sobre las mismas representaciones verbales o modos de enunciar un problema en lengua natural, para el manejo de algoritmos, sino también sobre representaciones concretas en que el dominio de un algoritmo para las operaciones no sea concebido de manera mecánica, sino que se logren otros modos de proceder, métodos informales o propios del estudiante, que den razón de la adquisición del Pensamiento Numérico, esto es la adquisición de destrezas o estrategias del cálculo mental.

- ✓ Favorece actividades que impliquen el desarrollo de técnicas o métodos de cálculo, estimación, algoritmos informales de conteo y reconocimiento de regularidades, en las que se opera con los sistemas numéricos en interacción con los sistemas de numeración, de acuerdo con el valor posicional y operaciones para la resolución de problemas.

Se desarrolla mediante el uso de operaciones y de los números, dentro de la formulación y resolución de problemas, en que el contexto dado se vuelve vital en la medida en que este aporta elementos que generan situaciones significativas para el estudiante. Por otro lado, es importante reconocer que cada una de las operaciones posee sus propios modelos que manifiestan el contexto general del número y la particularidad de cada una de éstas, además sus transformaciones permiten desarrollar habilidades que ayudan a diseñar estrategias para la resolución de problemas.

Así, identificar que, dentro de la resolución de problemas, las operaciones no deben surgir de manera aislada, sino también, mientras sea posible, lograr unas relaciones entre estas que den cuenta de los múltiples algoritmos para la solución de un problema, como también tener conocimiento de las propiedades matemáticas que permiten operar con destreza y eficacia, no como reglas dadas de manera estática en el momento de la clase.

- ✓ Trabaja con conceptos como magnitudes, razones, proporcionalidad, cantidades discretas y continuas, y medidas que permiten establecer relaciones para llevar a cabo acciones entre los números, tal como el conteo, la agrupación-separación, descomposición-recomposición, la estimación y la comparación.

Por otra parte, el Sentido Numérico hace parte de uno de los conceptos, que según los Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), es también necesario para referirse al desarrollo de Pensamiento Numérico, pues según la NCTM (2009) es el intuir sobre los números

a partir de los significados de estos; es decir, es concebido como una forma de pensar en cómo existe una aproximación al trabajo con los números en distintos contextos, así, esta intuición tiene que ver con hechos numéricos que son verdades que de antemano ya existen. Aquellos significados del número se recrean bajo las habilidades y destrezas con diferentes conjuntos numéricos y relaciones, y “diferentes dominios de contenido curricular (numeración, “magnitud de los números”, cálculo mental y estimación en cálculo)” (Llinares, 2001). Por tanto, consiste en la elaboración y apropiación de redes conceptuales del número, basadas en la conexión entre términos como agrupación, valor posicional, y habilidades de uso de las magnitudes absolutas y relativas de los números. Luego, el Sentido Numérico es una habilidad que desarrolla una persona para realizar transformaciones de los números en sus diferentes contextos numéricos, y así diseñar estrategias o algoritmos propios no convencionales para resolver problemas relacionados con experiencias cotidianas y verificar si esos resultados son coherentes con las condiciones dadas en el problema.

La NCTM (2009) enuncia que el Sentido Numérico es primordial para el aprendizaje de las matemáticas puesto que permite la comprensión de algoritmos y la creación de estrategias para solucionar y verificar el razonamiento de una situación problema. De hecho, se enfatiza en el aprendizaje de las fracciones para solucionar dificultades alrededor del aprendizaje de las matemáticas en relación con el desarrollo del Sentido Numérico. Con la propuesta de actividades que implique que los estudiantes compartan su modo de razonamiento de la solución de un problema. Así, se propone el intuir sobre problemas que involucren fraccionarios, radicales y exponentes negativos.

Ahora bien, en relación con la intuición sobre problemas que involucren fracciones, existen múltiples investigaciones alrededor del aprendizaje de éstas, pues es uno de los objetos

matemáticos que más dificultades causa a los estudiantes de básica primaria y secundaria debido a las distintas interpretaciones que tiene este (razón, operador, cociente, medida, parte-todo), y sus distintas maneras de representación (continua y discreta) (Ivars, 2019). De hecho, este fue el objeto matemático que solicitaron los profesores de la institución educativa porque los estudiantes presentaban algunas falencias en su comprensión.

La mayoría de estas dificultades radica en la poca variedad de tareas propuestas a los estudiantes y aún más en los pocos registros de representación semiótica que se usan al respecto, puesto que la enseñanza de las fracciones pareciera ser sólo un ejercicio procedimental del reconocimiento de sus términos y del algoritmo para operar entre ellas. Por ejemplo, en el aprendizaje de la fracción parte-todo se presentan dificultades para identificar el todo o la unidad, en especial la comprensión de que las partes en que se ha dividido la unidad deben de ser iguales, que una parte puede ser también un grupo de partes, esto es la equivalencia entre fracciones. Y el tratamiento adecuado para identificar y representar fracciones impropias.

Por otro lado, Cortina, Zuñiga y Vinosvka (2013) plantean la equipartición como un obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones, pues se oponen a que actividades de partición de objetos visibles, tales como pasteles, pliegues de papel, entre otros, propendan hacia el aprendizaje de las fracciones como el contexto más adecuado para ello. Por lo que exponen tres imágenes de las fracciones que son un obstáculo para el aprendizaje de estas: *la fracción como resultado de transformar un objeto, la fracción como tantos de tantos, y la fracción como incluida en un entero*.

La primera imagen de la fracción enuncia que existe una parte entera susceptible de partirse, lo que no permite recíprocamente comprender que por ejemplo una unidad partida en 5 pedazos, es también que una unidad es cinco veces un quinto.

La segunda imagen refiere a tomar el denominador y numerador “como números que expresan el resultado de un conteo” (Cortina et al., 2013, p. 12), el primero de un conjunto y el segundo de un subconjunto; lo que provoca que se esté manejando una estructura aditiva que no conlleva a la noción de tamaño relativo. Por ejemplo, no identificar que comer dos quintos de una barra de dulce es menor a comer un medio de esa misma barra.

La tercera imagen consiste en la identificación de una fracción contenida en un entero, lo que limitaría la comprensión de situaciones que no comparten algo en común, es decir “del tamaño de una cantidad como siendo una fracción de otra” (p. 13) aun cuando no tienen algo en común físicamente. Esto afecta la comprensión de las situaciones en que se pueden interpretar las fracciones y también las cantidades de las que se puede dar cuenta.

Este tipo de imágenes en relación con la equipartición propicia también que los estudiantes no identifiquen que una fracción cuantifica también a cantidades mayores que uno, es decir el tipo de actividades propuestas a los estudiantes se estaría relacionando solamente con fracciones propias.

Cortina et al. (2013) proponen tres estrategias didácticas para la superación de estas dificultades en el aprendizaje de las fracciones.

La primera estrategia refiere al uso de “situaciones en que las que se reparten equitativamente múltiples enteros” (como se citó en Cortina et al., 2013, p. 16), que consiste en que los estudiantes identifiquen la ración equitativa para cada persona cuando se reparten determinados objetos divisibles, por ejemplo, barras de chocolatinas. Esto conduciría a la exploración de la equivalencia entre fracciones y la identificación y sentido de las fracciones impropias.

La segunda estrategia es la familiarización de las fracciones en situaciones como parte-todo, y así los estudiantes puedan vincular esto con otras interpretaciones de la fracción (razón, medida, operador, cociente).

La tercera estrategia tiene que ver con el aprendizaje de las fracciones “representando como longitudes las magnitudes que se van a fraccionar, independientemente de que se traten de masas (la masa de una “papa a la francesa”) u otra cosa.” (p. 18), tal que la iteración ayuda a los estudiantes a razonar sobre el tamaño de las partes en que se ha dividido un entero. Así, un sexto se concibe como una partición equitativa de determinado tamaño, de tal manera que seis iteraciones de su longitud equivaldrían a la longitud de un entero.

Si bien, las fracciones que se abordan en los Recursos Pedagógicos que se trabajan en esta investigación, son fracciones propias, lo que genera tal vez que los estudiantes no puedan identificar el uso de este objeto matemático en otro tipo de situaciones como por ejemplo situaciones de repartición en que se aborden fracciones impropias.

2.5 Sobre la perspectiva Instrumental

Los profesores de matemáticas en formación dinamizan los Recursos Pedagógicos empleados en el Laboratorio de Educación Matemática mediante su gestión didáctica y prácticas discursivas, esto a través de situaciones planteadas en la guía de trabajo del recurso y la transformación que hacen de esta mientras la aplican con los estudiantes citados al laboratorio.

Trouche (2002), da cuenta sobre cómo el docente comprende el uso de un instrumento y qué propósito establece para él en la actividad de enseñanza. Esta perspectiva⁴ es analizada a partir de sus constructos teóricos de base como lo son *Artefacto*, *Instrumento*, *Génesis*

⁴ La Perspectiva Instrumental también guarda estrecha relación con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y la Ergonomía cognitiva, en relación con la llegada de los diversos artefactos tecnológicos a las clases de matemáticas.

Instrumental, y Sistema de instrumentos. Esto con el fin de dar sustento a cómo se usa un objeto cuando se empieza a aprender algo (oficio), y de los esquemas de utilización realizados por la persona para ello.

La Orquestación Instrumental se define como la organización intencional y sistemática del maestro en relación con los artefactos disponibles dentro de un entorno de aprendizaje, en una situación matemática específica, con el objetivo de orientar la génesis instrumental de sus estudiantes (Trouche, 2004). En esta se distinguen tres elementos: una Configuración Didáctica, un Modo de Explotación y un Aprovechamiento Didáctico (Drijvers 2012; Drijvers, Doorman, Boon, Reed, y Gravemeijer, 2010). La primera responde a la organización de los artefactos dentro del entorno de la enseñanza, la segunda, a las decisiones de cómo explotar o trabajar aquella Configuración Didáctica, y la última, a la respuesta del docente frente a las anteriores, es decir a la actuación didáctica del profesor para responder a las manifestaciones del estudiante.

Drijvers et al., (2010), identifican distintos Tipos de Orquestación, en los que algunos se centran en el profesor y otros en el estudiante. Un Tipo de Orquestación es la forma en que el profesor actúa en distintas situaciones de clase. Estos tipos, definidos en un contexto de recursos digitales, y dirigido a todo un grupo de estudiantes, no de manera individual, son: Enlace entre el Tablero y la Pantalla, Discusión de la Pantalla, Explicación de la Pantalla, Lugar y Espectáculo, Estudiante Sherpa, Guía y Explicación, Demostración Técnica y, Trabaja y Camina por.

|Cumbal (2020), en su trabajo de grado de maestría define a cada Tipo de Orquestación de la siguiente manera:

- ✓ Enlace entre la Pantalla y el Tablero: El profesor hace énfasis en la relación existente entre lo sucedido en el entorno tecnológico y la forma en que se representa esto tradicionalmente: papel, libro y tablero. La Configuración Didáctica está dada bajo el ambiente de acceso a la tecnología, el poder proyectar pantalla, y aula de clases. En el Modo de Explotación, el profesor toma como punto de partida el trabajo de los estudiantes.
- ✓ Discusión de la Pantalla: Da cuenta de una discusión grupal acerca de lo acontecido en la pantalla de la computadora. La Configuración Didáctica dada bajo el ambiente con acceso a lo tecnológico y de la proyección de la pantalla, el acceso al trabajo de los estudiantes y un espacio propicio para la discusión. Como Aprovechamiento Didáctico el profesor toma un trabajo de un estudiante, o establece un problema para conocer las reacciones del estudiante.
- ✓ Explicación de la Pantalla: El profesor explica a sus estudiantes, con base en lo que pasa en la pantalla de la computadora, no como un manual de instrucción de barra de herramientas, sino mucho más profundo acerca de lo que sucede con el objeto matemático. La Configuración Didáctica está dada bajo el acceso a la tecnología, la proyección de la pantalla, y el aula de clases que permita que los estudiantes sigan las explicaciones del profesor. El modo de ejecución se refiere a la toma de trabajos de los estudiantes como origen o como el inicio de una solución frente a un problema propuesto por el profesor.
- ✓ Lugar y Espectáculo: Los estudiantes son protagonistas por su razonamiento y aportes para el desarrollo de tareas y las discusiones dadas en clase. La Configuración Didáctica está dada bajo el acceso al trabajo de los estudiantes en el contexto tecnológico durante el

momento de realizar la tarea. Como modo de ejecución, los profesores solicitan a los estudiantes explicar su razonamiento o estrategias, el profesor indaga a los estudiantes sobre sus respuestas o pide comentar el trabajo de otro estudiante.

- ✓ **Estudiante Sherpa:** Es aquel que hace uso de la tecnología mientras explica su trabajo o sigue las instrucciones del profesor. La Configuración Didáctica de este Tipo de Orquestación está dada bajo el ambiente con acceso a lo tecnológico, la proyección de la pantalla, el acceso al trabajo del estudiante y un espacio propicio para la discusión, de tal manera que el estudiante controle el uso de lo tecnológico, y a su vez los otros estudiantes sigan las acciones de este Estudiante Sherpa y del profesor.
Como Aprovechamiento Didáctico, el profesor dispone de los trabajos elaborados por el Estudiante Sherpa o solicita que realice cosas en el contexto tecnológico.
- ✓ **Guía y Explicación:** Es el intercambio entre el profesor y estudiantes, en que el profesor instruye al estudiante, explica el objeto matemático o métodos con base en el trabajo con la pantalla, o indaga al estudiante para conducirlo a la reflexión de sus acciones y resultados.
- ✓ **Demostración Técnica:** Consiste en “la demostración de técnicas de herramientas por parte del profesor, es decir, indicaciones a través del ejemplo en el computador principal o en el dispositivo del estudiante, para realizar un procedimiento” (Cumbal, 2020, p. 16). La Configuración Didáctica de este tipo es muy parecida a la orquestación Explicación de la Pantalla. En el Modo de Explotación, el profesor explica cómo resolver situaciones técnicas y tareas, y también puede anticiparse a las dificultades presentes en los estudiantes.

- ✓ Trabaja y Camina por: Es la gestión del profesor cuando recorre el salón de clases en pro de revisar y supervisar el trabajo de los estudiantes. La Configuración Didáctica de este Tipo de Orquestación consiste en el caminar del profesor observando a los estudiantes mientras estos trabajan con sus dispositivos tecnológicos. Existe también, en algunos casos, la disponibilidad del proyector de pantalla y el tablero.

Como Modo de Explotación los estudiantes trabajan en parejas o individualmente.

Mientras el profesor supervisa el trabajo de los estudiantes responde a las preguntas de estos a través del uso del tablero o la pantalla proyectada. Frecuentemente existe también una interacción individual entre el estudiante y el profesor.

Estos Tipos de Orquestación guardan relación con las acciones de respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante que posee el profesor, en torno a su experiencia o creencias, como también de sus juicios sobre la Educación Matemática y particularmente del uso de tecnologías en clase, en este caso interesa para la investigación cuando se orquestan recursos, aún con la noción de éste. Luego, con base en la aproximación instrumental, un Recurso Pedagógico es aquel artefacto susceptible de ser modificado a partir de la actividad del profesor y de sus concepciones.

Dado que los recursos referenciados en estos Tipos de Orquestación son digitales, y los recursos abordados en este trabajo de investigación son recursos manipulativos, es necesario indicar que los Recursos Pedagógicos creados y trabajados en el Laboratorio de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, son materiales curriculares puesto que los aspectos para su creación y sistematización se relacionan con lo planteado en los documentos curriculares del MEN para la enseñanza de las matemáticas, es decir, su creación y diseño se elaboran con base

en las competencias y estándares a trabajar en un determinado grado escolar, Pensamiento Matemático, procesos, etc.

Gueudet y Pepin (2020) en su trabajo investigativo acerca de los recursos curriculares digitales, a partir de un enfoque documental y el análisis de algunos elementos de orquestación, enuncian la equivalencia entre estos recursos y materiales curriculares, dado que ambos son diseñados y formulados como hojas de trabajo hasta programas curriculares. Según estos autores, un recurso curricular digital cumple con los mismos criterios de diseño y desarrollo que un material curricular; pues ambos son diseñados por un equipo de profesionales de educación con un objetivo claro y determinado que se relaciona con aspectos curriculares particulares, como, por ejemplo, edad del estudiante, grado escolar, objeto de aprendizaje, etc.

Por lo anterior, los Tipos de Orquestación identificados cuando se orquestan recursos curriculares digitales también es posibles encontrarlos cuando se orquestan Recursos Pedagógicos del Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle, en tanto estos últimos también son materiales curriculares.

Ahora bien, según los Tipos de Orquestación presentados anteriormente, en este trabajo de investigación sólo será posible analizar los casos de Tipos de Orquestación de: Explicación de la Pantalla, Lugar y Espectáculo, Guía y Explicación, y Trabaja y camina por.

Finalmente, en este tipo de orquestaciones el lugar de la pantalla es reemplazado por la guía de trabajo con la que cuenta cada Recurso Pedagógico utilizado en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle, en esta investigación. En los Tipos de Orquestación seleccionados el profesor explica a los estudiantes la guía de trabajo del recurso, discute con los estudiantes lo presentado en la guía de trabajo, los estudiantes dan a conocer y exponen sobre sus estrategias para dar solución a un problema, el profesor guía y explica al

estudiante acerca del objeto matemático y lo solicitado en la guía de trabajo del recurso; y supervisa el trabajo de los estudiantes interactuando individualmente con cada uno mientras realiza el recorrido por la mesa de trabajo.

Los cuatro Tipos de Orquestación restantes no se seleccionan puesto que los recursos abordados en la investigación no son susceptibles de ser proyectados ni de explicar detenidamente como un manual de instrucciones como si hubiese botones o herramientas para conocer su funcionamiento, ni tampoco se hace primordial el uso del tablero; tampoco existe un estudiante que explique su razonar mediante un recurso digital.

Capítulo III: Diseño Metodológico

En este capítulo se exponen los elementos característicos del diseño metodológico de la presente investigación.

3.1 Aproximación metodológica

La presente investigación usa una aproximación metodológica cualitativa, puesto que se requiere describir y explicar fenómenos sociales de diversas formas (Angrosino, 2012), a partir del análisis de las experiencias de los individuos o grupos, y de la comunicación y de las interacciones que se producen.

La investigación se describe como un estudio de casos múltiple ya que busca estudiar una situación en un contexto real, además de la interpretación de su complejidad, (Simons, 2011).

Los casos se caracterizaron por el trabajo realizado con dos profesoras de matemáticas en formación: Sara y Sofía, participantes de la práctica profesional y el Seminario de Práctica Profesional de las licenciaturas del área de Educación Matemática, de la Universidad del Valle.

Los casos cumplieron los siguientes criterios:

- Sara y Sofía realizaron su práctica en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle
- Seleccionaron recursos curriculares relacionados con el Pensamiento Numérico y la construcción de Sentido Numérico.

El Seminario de Práctica Profesional orienta las prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas en formación, en uno de sus escenarios como lo es el Laboratorio de Educación Matemática. En este seminario se realiza un trabajo exploratorio, colaborativo y de reflexión, en el que se involucra la aplicación de instrumentos para la recolección de datos en relación con la

MPPME, especialmente a las acciones del profesor como respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante.

3.2 Contextualización y participantes

La investigación se desarrolló en el Laboratorio de Educación Matemática, que es uno de los escenarios de la Práctica Profesional⁵ de las licenciaturas encargadas del área de Educación Matemática de la Universidad del Valle. Los participantes fueron dos profesoras de matemáticas en formación del Seminario de Práctica Profesional, de las licenciaturas del área de Educación Matemática, de la Universidad del Valle, de décimo semestre, que realizaban su práctica profesional en el Laboratorio de Educación Matemática; y un grupo de estudiantes de grado quinto (entre 11 y 12 años) de la institución educativa oficial Pedro Antonio Molina. Cada profesora trabajó según la dinámica de trabajo del laboratorio con 4 estudiantes. Sara trabajó con E1, E2, E3 y E4. Sofía trabajó con E5, E6, E7 y E8.

En el Laboratorio de Educación Matemática los profesores de matemáticas en formación trabajan con una cantidad y variedad de recursos.

La profesora Sara trabajó con el recurso *Dominó de fracciones* y la profesora Sofía trabajó con el recurso *Focus*. Ambos recursos abarcan el objeto matemático de las fracciones⁶ a partir de tres representaciones semióticas: la figural, el lenguaje natural, y la representación numérica.

En el recurso *Dominó de fracciones* (ver ilustración 1), la idea es seguir la secuencia del dominó tradicional, pero a través de la formación de representaciones distintas que signifiquen la

⁵ El Seminario de Práctica Profesional abarca tres tipos de práctica: práctica en colegios, monitorias en la universidad, y el Laboratorio de Educación Matemática.

⁶ En cada uno de los recursos se trabaja sólo con fracciones propias.

misma fracción; por ejemplo, formar pareja entre la representación figural y numérica de una misma fracción.

Ilustración 1. *Ejemplificación del Recurso Pedagógico Dominó de fracciones*



Nota. En la parte izquierda de la imagen se ilustra cómo se colocan las fichas en el juego, es decir formar una pareja de representaciones distintas (figural y numérica) en este caso para la fracción unidad. Posteriormente se forma la secuencia según la fracción y su representación que quedaron en los extremos de las fichas. En la parte derecha de la imagen se ilustra la secuencia del juego a partir de tres cuartos en representación figural.

En el recurso *Focus* (ver ilustración 2) los estudiantes deben formar también parejas de representaciones distintas de una misma fracción, sin embargo, a diferencia del dominó no es un juego en secuencia de la organización de las fichas, pues al inicio se reparten 10 fichas a todos los estudiantes y se dejan fichas libres sobre la mesa. En orden, cada estudiante pone en juego una ficha y de acuerdo con esto, la persona que identifique otra ficha con una representación distinta a la misma fracción dice focus al mismo tiempo que toca la ficha focus. Al final gana la persona que haya recolectado más parejas formadas como se indicó anteriormente.

Ilustración 2. Ejemplificación del Recurso Pedagógico Focus



Nota. En la parte derecha de la imagen se ilustran las fracciones en juego: un medio, cuatro quintos, un cuarto (no visible) y dos tercios. En este caso ningún estudiante puede decir focus porque no hay una pareja de representaciones distintas de una misma fracción. En la parte derecha de la imagen se ilustra que la persona dice focus al mismo tiempo que toca la ficha focus, pues identificó una pareja de representaciones distintas (figural y en lenguaje natural, esta última aparece de color verde) para la fracción cuatro quintos.

3.3 Recolección de la información

Los datos se obtuvieron a través de entrevistas semiestructuradas y videograbaciones. A cada profesora se le realizó una entrevista inicial caracterizada como *entrevista de planificación*, y otra entrevista final llamada *entrevista de reflexión*.

Las videograbaciones fueron realizadas luego de conocer los elementos primordiales de planificación de las profesoras: metas, estrategias del profesor para la resolución de problemas, importancia y selección del recurso, referentes teóricos y tipo de tareas.

A continuación, la descripción de cada uno de los instrumentos que permitieron recolectar la información a analizar:

3.3.1 Entrevistas

Se realizaron dos entrevistas semiestructuradas. La primera aludió a la planificación de una sesión, y la segunda a la reflexión elaborada sobre la interacción con los estudiantes.

La entrevista de planificación tuvo como objetivo identificar aspectos relevantes de la planificación de los profesores de matemáticas: metas, estrategias del profesor para la resolución de problemas, importancia y selección del recurso, referentes teóricos y tipo de tareas. Por tanto, la entrevista inicial se relacionó con el objetivo específico número uno: *analizar la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático Estudiantil, de profesores de matemáticas en formación, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas*; puesto que permitió contemplar algunos rasgos que rastrean parcialmente la MPPME.

La entrevista de planificación incluyó ocho preguntas de referencia:

- ✓ ¿Qué estrategias privilegas en tus prácticas de enseñanza con los estudiantes que llegan al laboratorio? La pregunta potencial fue: ¿De esta estrategia cuál es la parte que consideras que aporta al proceso de aprendizaje del estudiante, ¿por qué?
- ✓ ¿Qué importancia le concedes al uso de recursos en el desarrollo de tu práctica profesional? La pregunta potencial fue: ¿Qué papel le otorgas al uso de recursos para favorecer el desarrollo de Pensamiento Matemático de los estudiantes?
- ✓ ¿Qué recursos del Laboratorio de Educación Matemática privilegas en tus prácticas de enseñanza, en el Laboratorio de Educación Matemática? ¿Por qué? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿Cuál es el recurso a usar en tus prácticas de enseñanza? b) ¿El recurso que privilegas te parece que genera resultados positivos en el aprendizaje?, ¿por qué?

- ✓ ¿Qué criterios orientan la selección de los recursos que tú privilegas para trabajar con los estudiantes que llegan al laboratorio? La pregunta potencial fue: ¿Qué información tienes de los estudiantes que llegan al laboratorio?
- ✓ Según la información suministrada en el material de trabajo del Laboratorio de Educación Matemática, el recurso que seleccionaste para trabajar con los estudiantes; alude al Pensamiento Numérico. ¿Qué entiendes por Sentido Numérico? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿Qué procesos están inmersos o se destacan en el uso del recurso que has seleccionado para el desarrollo del Sentido Numérico? b) ¿Qué objetivos proyectan o guían tus prácticas de enseñanza con el recurso seleccionado, para favorecer el desarrollo y construcción del Sentido Numérico? c) ¿Por qué consideras que el recurso que seleccionas es útil para la enseñanza del número y sus representaciones, u otros aspectos? d) ¿Qué tipo de actividades propones en relación con el recurso seleccionado, para fomentar en los estudiantes el desarrollo y construcción del Sentido Numérico?
- ✓ ¿Privilegas algún referente teórico para adelantar en tus prácticas de enseñanza? La pregunta potencial fue: ¿De qué manera aplicas este referente teórico en tu práctica profesional, en relación con el recurso seleccionado?
- ✓ ¿Qué importancia le concedes a la interacción con los estudiantes? ¿Por qué? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿Qué actividades privilegas para enriquecer la interacción con los estudiantes? b) ¿De qué manera actúas ante una situación de enseñanza que observas o aprecias que no es clara para uno o varios estudiantes? c) ¿De qué manera actúas ante una situación de enseñanza en la que el estudiante denota una mayor comprensión que los demás? d) ¿De qué manera aprovechas las respuestas de los estudiantes frente a las preguntas o actividades que tú le planteas?

La entrevista de reflexión tuvo como objetivo describir el sentido que el profesor de matemáticas en formación asigna a ciertos momentos de la clase, que son una respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante; como también identificar el sentido que toman sus prácticas de enseñanza. Esta última entrevista permitió el contraste de aspectos relevantes que se tuvieron en cuenta para la planificación de una sesión, con lo sucedido en el encuentro con los estudiantes, lo que generó reflexión de parte de las profesoras y dio cuenta de momentos que ellas valoran como importantes durante la enseñanza.

La entrevista final se relacionó con los objetivos específicos dos y tres de esta investigación: *Clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas; e identificar distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas*; puesto que, en su análisis de manera paralela con las videograbaciones, permitieron destacar las relaciones posibles entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor frente a las acciones de los estudiantes.

La entrevista final considera seis preguntas de referencia:

- ✓ ¿Qué estrategias de enseñanza privilegiaste en tu interacción con los estudiantes en el Laboratorio de Educación Matemática, para favorecer la comprensión del objeto matemático tratado en el recurso? ¿Por qué?
- ✓ ¿Qué importancia le otorgas al uso del recurso en el desarrollo de tus prácticas de enseñanza? La pregunta potencial fue: ¿Cómo el uso del recurso fue útil para favorecer el desarrollo del Pensamiento Matemático en los estudiantes? ¿Por qué?

- ✓ ¿Qué procesos del Pensamiento Matemático privilegiaste para usar el recurso que seleccionaste y así favorecer el desarrollo del Sentido Numérico en los estudiantes? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿Consideras que el uso del recurso fue útil para la enseñanza del número y sus representaciones, u otros aspectos? b) ¿Las actividades propuestas por ti en relación con el recurso seleccionado promovieron el desarrollo y construcción del Sentido Numérico? ¿Por qué?
- ✓ ¿Qué importancia le otorgas a la interacción que tienes con tus estudiantes? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿De qué manera la tipología de los estudiantes que tuviste te permite reflexionar frente a las distintas formas en que puedes aprovechar el trabajo de los estudiantes? b) ¿La manera en la que actuaste frente a distintas situaciones que se presentaron con los estudiantes en el laboratorio responde a los objetivos que guiaron tu práctica para favorecer el desarrollo del Sentido Numérico? c) ¿La interacción que tuviste con los estudiantes promovió el aprendizaje del objeto matemático dinamizado en el recurso?
- ✓ ¿Si haces un contraste entre la planificación y la discusión que tuviste con los estudiantes, qué aspectos puedes identificar que se mantuvieron iguales o no? ¿Por qué? Las preguntas potenciales fueron: a) ¿Qué elementos consideras que fueron esenciales para tomar decisiones en acto según el transcurso de tu práctica? b) ¿Qué aspectos de tu práctica de enseñanza consideras que debes mejorar? c) Y en el caso particular de la interacción que tuviste, ¿qué consideras que debes mejorar?
- ✓ ¿Qué sentido otorgas a tus prácticas de enseñanza? La pregunta potencial fue: ¿Qué aprendes de esto para tus futuras experiencias como profesora de matemáticas?

3.3.3 Videgrabaciones

Las videgrabaciones permiten discutir y dar sentido a las interacciones durante las sesiones, especialmente para aquellos momentos en que el profesor responde al Pensamiento Matemático del Estudiante (Gamoran y Dier, 2017). Por tanto, con las videgrabaciones se identificaron y destacaron aquellos Momentos de Enseñanza en que cada una de las profesoras orquestaron los Recursos Pedagógicos y gestionaron las acciones enfocadas (orientadas) al aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante.

Se realizaron dos videgrabaciones en las clases de cada profesora. Cada videgrabación corresponde a una sesión⁷ en el Laboratorio de Educación Matemática. Cada videgrabación tuvo una duración aproximadamente de 40 minutos. De las videgrabaciones, sólo se escogió una de cada profesora, por lo que se analizaron dos videgrabaciones⁸. Los datos obtenidos se analizaron, en paralelo, con los datos de las entrevistas. Además, estos datos fueron utilizados en los instrumentos de análisis para identificar y clasificar los Momentos de Enseñanza MOST.

El propósito de las grabaciones se relacionó con los objetivos específicos dos y tres de esta investigación: *clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas; e identificar distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático Estudiantil*, cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

3.4 Análisis

⁷ Se les llama sesión a aquellos encuentros en que los profesores de matemáticas en formación interactúan con los estudiantes.

⁸ De estas videgrabaciones, debido a la gran cantidad de información que se presenta en cada sesión, sólo se analizó a cada profesora con un grupo de estudiantes; pues en cada sesión cada profesora trabaja alrededor de 8 grupos.

El análisis de los datos es de carácter inductivo y se realiza con base en la articulación local de tres aproximaciones teóricas: (a). La Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante (MPPME), (b). las Oportunidades Pedagógicas Significativas en una Perspectiva Matemática (MOST), y (c). la Orquestación Instrumental.

El análisis de los datos se llevó a cabo en tres fases para caracterizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos. La primera fase se ejecuta alrededor del análisis mediante la teoría fundamentada (Teppo, 2015) para dar cuenta de la MPPME. La segunda, cuando se identifican momentos MOST a través de la estructura analítica MOST y posteriormente la comparación entre éstos para clasificarlos. Y finalmente la tercera fase para establecer articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos.

Los análisis elaborados fueron validados por medio de la triangulación entre estos y su discusión en el seminario de la línea de Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática, de la Universidad del Valle, con docentes y estudiantes de maestría o doctorado. Este seminario se llevó a cabo los miércoles cada quince días en horas de la noche, y se caracterizó por ser un encuentro contemplado para la validación de los datos que se obtienen a partir del análisis de la información.

A continuación, se exponen cada una de las fases:

3.4.1 Fase 1

Se describe la MPPME a través de la asociación de sus habilidades con las meta-categorías que surgen bajo el proceso de teoría fundamentada. Para ello se transcriben las

entrevistas y videgrabaciones de cada una de las profesoras de matemáticas en formación, y posteriormente las transcripciones de estos instrumentos se analizan bajo el uso de teoría fundamentada, en que la codificación⁹ se describe como el modo en que se definen de qué tratan los datos que se analizan (Gibbs, 2012), por lo que resultan categorizaciones.

Los códigos y categorías obtenidas en las entrevistas complementan y se triangulan posteriormente con las categorías también obtenidas en las líneas de transcripción de las videgrabaciones¹⁰, puesto que estas últimas son la fuente de información principal de esta investigación dado que permiten analizar las acciones del maestro en escena.

En un primer momento se llevó a cabo la codificación abierta, cada código fue asignado a las líneas de la transcripción de la videgrabación y con el objetivo de dar cuenta de las acciones de enseñanza de las profesoras (Carrero, Soriano, y Trinidad, 2012). En este nivel de codificación se obtuvieron 98 códigos para la profesora Sara y 100 para la profesora Sofía.

A continuación, la tabla 1 expone un ejemplo de la codificación abierta para el caso de Sara cuando explicó las partes que se toman de la partición de la fracción unidad:

⁹ El proceso de codificación se realizó de manera manual.

¹⁰ La validación de estas categorías resultó también Seminario de la línea de Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática, de la Universidad del Valle. Las categorías se crearon y se validaron según el discurso de las profesoras. Por ejemplo, el discurso de las profesoras cuando se referían a las fracciones se relacionaba más con aspectos de partición de la unidad y el tipo de representación que se usaba.

Tabla 1. Ejemplificación codificación abierta

Código	Líneas de la transcripción de la videograbación
Explicación de las partes que se toman de la fracción unidad	295. Sara: Ah, sería: uno, dos, tres, cuatro. ¿Cierto? ¿Y cuántos están pintados? 64. Sara: tres cuartos. O sea, tres es lo que yo estoy cogiendo y cuatro es el numerito de abajo. 159. Y las partes que tomo es del arriba. ¿Entonces cuántas están coloreadas? 422. Miremos, él tendría pintadito, con este triangulito tendría estos dos cuadros completos (indicando a dos tercios). 423. ... y un cuadro pintado (indicando a un cuarto), ¿cierto? (toma las fichas de dominó que tiene E2, y que contienen a: dos tercios y un cuarto, ambas en representación figural. Se dirige a todos). 438. Sara: Este tiene más pintaditos. (Afirma lo que dicen los estudiantes)

Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se pasa al segundo nivel de codificación que consistió en la agrupación de los códigos obtenidos en la primera fase para luego formar categorías. Esta agrupación se realizó por comparación constante, es decir con base en elementos comunes en los códigos extraídos inicialmente y no a otro tipo de categorías establecidas con anterioridad en relación con lo planteado en este trabajo de investigación.

Según Teppo (2015) el método por comparación constante permite que al identificar elementos comunes en los códigos se formen categorías, y hace que la clasificación y comparación entre estas obtenga un proceso más fino y seguro. Por tanto, mientras surgían categorías se analizaba si era posible incluir una categoría en otra, de lo contrario se formaba una nueva. De manera simultánea esto permitía que la generación de nuevas categorías fuera ajustada

bajo la modificación de códigos para que estos guardaran relación con la temática. Teppo (2015) también menciona que cuando se comprueba la saturación de los datos, es decir cuando no existe información o codificación relevante para la investigación finaliza el proceso de agrupación por categorías. De acuerdo con ello, para el caso de Sara resultaron 16 categorías¹¹ a partir de la unión entre lo extraído de la entrevista inicial, la videograbación, y la entrevista final. Para el caso de Sofía resultaron 13 categorías¹².

A continuación, en la tabla 2 se presentan algunas de las categorías obtenidas para el caso de la profesora Sara:

¹¹ Relevancia del recurso, selección del recurso, objetivos del recurso, uso del recurso, reglas del recurso, reglas para el inicio y la culminación del juego, turno para jugar, usos de la representación, sentidos dados a la fracción, selección del tipo de representación de la fracción a utilizar durante el juego, identificación de las representaciones con que se inicia el juego, importancia de las preguntas de los estudiantes, importancia de preguntar por parte del profesor, recapitulación del juego, rotación por la mesa.

¹² Selección del recurso, relevancia del recurso, objetivo del recurso, concepción del recurso, uso del recurso, culminación del juego, referentes teóricos sobre sentido numérico, sentido dado a la fracción, identificar representaciones del recurso, formación de parejas, importancia de preguntar por parte del docente, importancia de las preguntas de los estudiantes, recapitulación del juego.

Tabla 2. Ejemplificación segundo nivel de codificación

<i>Categoría y descripción</i>	<i>Códigos</i>
<i>Usos de la representación:</i> Abarca las distintas representaciones que se abordan mediante el recurso pedagógico, para denotar una fracción.	Identificar una fracción en representación figural. Ejemplo de las representaciones que no se pueden colocar juntas, de una misma fracción. Explicitación del tipo de representación de una fracción para poder jugar.
<i>Sentidos dados a la fracción:</i> Designa los distintos usos y sentidos dados a la fracción.	Solicitar la lectura de una fracción Explicación de las partes iguales en que se divide a la unidad. Explicación de las partes que se toman de la partición de la unidad. Identificación de fracciones no iguales.
<i>Selección del tipo de representación de la fracción a utilizar durante el juego:</i> Alude a la escogencia del tipo de representación de la fracción a jugar, como también el cuestionar por qué la selección realizada.	Selección de la ficha que contenga a la fracción en un tipo de representación figural. Selección de una ficha. Selección de la ficha que contenga a la fracción en un tipo de representación numérica. Selección de la ficha que contenga a la fracción en un tipo de representación opuesta. Justificar la selección de una ficha
<i>Identificación de las representaciones con que se inicia el juego:</i> Designa las representaciones necesarias para iniciar el juego, a partir de la identificación de la fracción unidad y sus distintas representaciones.	Identificación de la ficha con que se inicia el juego. Identificación de la ficha que contiene a la unidad en distintas representaciones Caracterización de la ficha que contiene a la unidad en distintas representaciones. Justificar la selección de la ficha que no sirve para iniciar el juego. Explicación de cuándo una ficha no sirve para iniciar el juego.
Referentes teóricos: Se identifican los referentes teóricos que abordan las profesoras sobre el sentido numérico y las fracciones	Referentes teóricos sobre sentido numérico Referentes teóricos sobre fracciones

Fuente: Elaboración propia

Terminado lo anterior, se procedió a la construcción de meta-categorías con base en la agrupación de las categorías anteriores y de la conexión entre estas en relación con la identificación de propiedades y relaciones comunes. Esto con el objetivo de construir una categoría central que diera cuenta de las acciones de las profesoras Sara y Sofia en relación con el aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante.

En este nivel de análisis se obtuvieron cuatro meta-categorías para ambas profesoras de matemáticas en formación: *Identificación del Recurso Pedagógico (IRP)*, *Regulación de las Actividades de la Clase (RAC)*, *Objeto Matemático que se vincula al Recurso (OMR)*, y *Revisión del Juego (RJ)*. La tabla 3 expone dichas meta-categorías.

Tabla 3. Ejemplificación tercer nivel de codificación

<i>Meta-categoría, código y definición</i>	<i>Categorías asociadas</i>
Identificación del recurso pedagógico (IRP): Se identifica al recurso con que se trabaja en el laboratorio.	Relevancia del recurso, selección del recurso, objetivos del recurso, uso del recurso.
Regulación de las actividades de clase (RAC) Se identifica cómo se ha de jugar con el recurso, es decir cuáles son las reglas del juego.	Reglas del recurso, reglas para el inicio y la culminación del juego, turno para jugar.
Objeto matemático que se vincula al recurso (OMR) El objeto matemático que se vincula al recurso pedagógico puede ser abordado a través de distintas representaciones semióticas.	Usos de la representación, sentidos dados a la fracción, selección del tipo de representación de la fracción a utilizar durante el juego, identificación de las representaciones con que se inicia el juego, referentes teóricos.
Revisión del juego (RJ) Las profesoras prestan atención al estado del proceso en que se encuentran los estudiantes y revisan sus procesos.	Importancia de las preguntas de los estudiantes, importancia de preguntar por parte del profesor, recapitulación del juego, rotación por la mesa.

Fuente: Elaboración propia

Nótese, que en la tabla 3 se presenta la meta-categoría *Objeto Matemático que se vincula al Recurso* que se formó por las categorías que se ejemplificaron en el segundo nivel de codificación.

Culminado lo anterior, se procede a dar cuenta de la MPPME con base en las asociaciones entre sus habilidades y las meta-categorías construidas.

A continuación, se presenta la manera en que se operativiza en este trabajo de investigación cada una de las habilidades de la MPPME.

El desarrollo de la primera habilidad *Identificar* en este trabajo de investigación refiere a las acciones de Sara y Sofía, las acciones de los estudiantes y las acciones de las profesoras con los recursos, las acciones de los estudiantes con los recursos. Es decir, las acciones de las profesoras por las que identifican cómo los estudiantes por la lectura de la guía de trabajo del recurso entienden su uso, qué concepto tienen de la fracción y cuál es la estrategia frente al juego para colocar o no una ficha.

La habilidad de *Interpretar* se operativiza a partir de las acciones en que Sara y Sofía interpretan las estrategias de los estudiantes a partir de su conocimiento matemático, didáctico y curricular, adquirido en su proceso de formación y basado también en investigaciones y documentos curriculares.

La tercera habilidad *Responder* refiere a la manera en que Sara y Sofía elaboran respuestas a las comprensiones de los estudiantes, es decir ponen en juego su saber a partir de las investigaciones para entonces generar preguntas, seleccionar tareas, plantear situaciones distintas a las enunciadas en las guías de trabajo, etc.

Cada una de estas habilidades es descrita a partir de lo observado e interpretado de los casos de esta investigación a partir de las asociaciones con las meta-categorías construidas de las transcripciones de los instrumentos de recolección de información, en que la fuente principal son las videograbaciones. Los datos de las entrevistas complementan la información que brindan las videograbaciones.

Por tanto, el análisis realizado a partir de la teoría fundamentada sobre estas transcripciones de entrevistas y videograbaciones permiten dar cuenta del primer objetivo específico de esta investigación: *Analizar la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático Estudiantil, de profesores de matemáticas en formación, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas*, en tanto se hace posible la agrupación de las meta-categorías para dar cuenta de la MPPME.

3.4.2 Fase 2

Consistió en la identificación y clasificación de Momentos de Enseñanza MOST, que refieren a las orquestaciones, y discusiones con los estudiantes, gestionadas por el profesor, cuando se manifiestan las estrategias utilizadas por los estudiantes para la resolución de un problema, y se hizo uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante (Garzón, 2017b), es decir, estos momentos cumplen con las características y criterios de la estructura analítica MOST, además de la orquestación de Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas, según este trabajo de investigación. Escudero (2003), enuncia que los momentos MOST son reconocidos como segmentos de enseñanza identificados en episodios de referencia; estos últimos como aquellos que suceden en relación con los objetivos planteados por el profesor.

Esta fase de la investigación se ejecutó a partir de las líneas de las transcripciones de las videograbaciones de cada una de las profesoras Sara y Sofía, pues esta es la fuente de información principal de la investigación ya que se analizan las acciones del profesor en escena. Los datos generados de otras fuentes como las entrevistas iniciales y finales fueron triangulados y son complementarios a lo extraído de la transcripción de los vídeos.

Para el análisis de los videos se hizo uso del instrumento que permite caracterizar las oportunidades pedagógicas, es decir la estructura analítica MOST y posteriormente la matriz de análisis como instrumento que permitió clasificar dichos momentos identificados inicialmente.

En esta segunda fase de análisis, se exponen los episodios de referencia¹³ para cada uno de los casos de esta investigación. La identificación y comparación de los momentos MOST se consideran como resultados ya que se analizan con base en los episodios de referencia identificados y serán presentados en el capítulo siguiente. Por tanto, el análisis realizado en esta segunda fase permitió dar cuenta del objetivo específico número dos de esta investigación:

Clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil al orquestar Recursos Pedagógicos.

3.4.2.1 Identificación de momentos MOST

La identificación de los Momentos de Enseñanza que refieren a las discusiones con los estudiantes, gestionadas por el profesor en relación con el aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante, se realiza a partir de: (a) Identificación de episodios de referencia, y

¹³ Los episodios de referencia son segmentos de la videograbación identificados en correspondencia con los objetivos de la planificación de la sesión rastreados en la transcripción de la entrevista de planificación realizada a cada una de las profesoras (Escudero, 2003).

(b). la aplicación de la estructura analítica MOST, que es el instrumento de análisis para el desarrollo de las tres habilidades de la MPPME, (Leatham, et al., 2015; Garzón, 2017).

Como se presentó en el capítulo de aproximaciones teóricas de esta investigación, la estructura analítica MOST comprende las siguientes características: Pensamiento Matemático del Estudiante, lo Significativo en una Perspectiva Matemática, y oportunidades pedagógicas.

Dichas características se explicitan en el capítulo de resultados de esta investigación para cada uno de los momentos MOST identificados de las profesoras Sara y Sofía.

3.4.2.2 Clasificación de momentos MOST

Después de la identificación de Momentos de Enseñanza MOST, se realizó la clasificación de estos. Peterson et al. (2017), plantean un esquema de categorías de codificación para dar cuenta de las respuestas de los profesores al Pensamiento Matemático del Estudiante. Garzón (2017a) parte de este esquema y hace uso de algunos códigos para la elaboración de un instrumento que permite comparar Momentos de Enseñanza. En el presente trabajo de investigación se adoptó el instrumento de comparación de momentos formulado por Garzón (2017a) de la siguiente manera:

- a. Protagonista (P): Participante que genera el Momento de Enseñanza.
- b. Objetivo (O): Refiere al objetivo del Momento de Enseñanza, identificado a partir del episodio de enseñanza al que pertenece el momento.
- c. Meta-categoría relacionada (CR): Refiere a la relación con las meta-categorías resultantes del proceso de codificación de la primera fase de análisis de esta investigación, esto por la correspondencia uno a uno que se puede establecer entre las habilidades de la MPPME y las características de estudio de la estructura analítica MOST (Garzón, 2017b). Al

realizar esta relación es posible también identificar las acciones predominantes por parte de cada uno de los actores. Las acciones de las profesoras ya fueron identificadas en la primera fase de análisis de este trabajo investigativo.

- d. Las matemáticas del estudiante (ME): Aquella acción o expresión del estudiante que le permite al profesor identificar su concepción o idea del objeto matemático junto con la Perspectiva Matemática (PM) lo acompaña. Al mismo tiempo, da cuenta de cómo el profesor responde a las matemáticas del estudiante, con base en las expresiones que este ha denotado y así potenciar o mejorar su comprensión.
- e. Las oportunidades pedagógicas (OP): Un caso del discurso en el que el Pensamiento Matemático del Estudiante posibilita condiciones para la construcción de significado matemático (Leatham et al., 2015).

3.4.2.3 Identificación de episodios de referencia

Para dar cuenta de los episodios de referencia se identifican los objetivos (general y específicos) de la sesión, que se encuentran plasmados en la transcripción de la entrevista de planificación. Luego, por cada objetivo existe uno o más episodios de referencias asociados a estos.

A continuación, se presenta la descripción de cada uno de los episodios de referencia identificados para las profesoras Sara y Sofía.

Identificación de episodios de referencia de Sara

Los episodios de referencia se identifican de acuerdo con los objetivos planteados por la profesora Sara para su práctica de enseñanza. En este sentido fue posible identificar aquellos

objetivos a partir de las líneas de transcripción de la entrevista de planificación realizada a la profesora. La tabla 4 presenta los objetivos planificados por la profesora Sara.

Tabla 4. *Objetivos planificados para la sesión de la profesora Sara*

<i>Objetivos</i>	<i>Ilustración</i>
General: Identificar cuándo una fracción es mayor que otra	86. ...lo que busco es que cuando se aplique la ficha los estudiantes logren identificar cuándo una fracción es mayor que otra. Me parece que esto es muy importante, porque se confunden mucho con eso. En la ficha aparece como si la intención fuese hacer operaciones.
Específicos:	
a. Comparar fracciones para propiciar la enseñanza de las operaciones entre estas.	108. ...principalmente hago la parte de comparación, porque es más fácil que ellos entiendan la comparación y después entender la suma.
b. Explorar distintas representaciones para aproximarse al sentido de la fracción.	45. El concepto de fracción es algo que cuesta mucho trabajo en los estudiantes, y lo que se busca es reforzar un poco en este concepto; permitir que ellos puedan ver diferentes representaciones.
c. Establecer relaciones entre la fracción y la figura.	84. El objetivo principal del material de trabajo es que los chicos tengan como un repaso o un afianzamiento del concepto de fracción; la intención es que los estudiantes recuerden, logren hacer la relación entre la fracción y la figura.

Fuente: Elaboración propia

Luego de haber identificado los objetivos resultó posible entonces determinar los episodios de referencia de acuerdo con los objetivos planteados para el encuentro con los estudiantes. Por consiguiente, la tabla 5 indica el número episodios de referencia hallados en relación con los objetivos específicos planteados por Sara en la planificación:

Tabla 5. *Número de episodios de referencia identificados para Sara*

<i>Objetivos específicos</i>	<i>Número de episodios de referencia</i>
a	1
b	3
c	3
Total	7

Fuente: Elaboración propia

En relación con el primer objetivo específico, fue posible encontrar un episodio de referencia. Este episodio sucedió en el momento de cierre del juego en el que inicia la comparación entre las fracciones que poseen cada uno de los estudiantes, específicamente en representaciones figural. La discusión de dicha comparación se desarrolla con base en las fichas con las que cuentan dos estudiantes puesto que los otros dos contaban con la unidad, y fueron descartados rápidamente. Un estudiante cuenta con un cuarto y un sexto, ambas en representación figural, en forma triangular y circular respectivamente. El otro estudiante cuenta con dos tercios y también un cuarto, ambas en representación figural y en forma cuadrada.

Para realizar la comparación entre este par de fracciones, Sara solicitó realizar el cambio de las primeras a una forma cuadrada para poder visualizar la partición de la unidad, y con ellos los estudiantes responder e identificar quién tiene la cantidad menor y saber quién será el ganador del juego.

Respecto al objetivo específico 1.2, se identificaron tres episodios de referencia en los que se refiere al tipo de representación de la fracción a colocar según el orden en que va el juego. Estos episodios se caracterizan por el indagar de Sara a sus estudiantes frente a la utilidad de la ficha que ha escogido cada uno de estos, y en los que se obtiene como argumento la identificación de la fracción que se tiene que poner en el juego.

En relación con el objetivo 1.3, se hallaron 3 episodios de referencia casi que, de mayor extensión frente a los anteriores episodios, pues de manera constante se enfatizaba en la identificación y lectura de la fracción en representación figural, a partir del reconocimiento del denominador según la partición de la unidad, y del numerador según las partes que se toman de la partición de la unidad.

Identificación de episodios de referencia de Sofía

Los episodios de referencia se identifican de acuerdo con los objetivos planteados por la profesora Sofía para su intervención. En este sentido fue posible identificar los objetivos a partir de las líneas de transcripción de la entrevista de planificación realizada a la profesora. La tabla 6 presenta los objetivos planificados por la profesora Sofía.

Tabla 6. *Objetivos planificados para la sesión de la profesora Sofía*

Objetivos	Ilustración
General: Identificar parejas de una misma fracción en diferentes representaciones	58. Te voy a hablar un poco del Focus. Este es un juego que permita afianzar, en el estudiante, el significado de la fracción como parte-todo; aunque en este caso, se van a proponer diversas representaciones. Básicamente, el objetivo del Focus es identificar parejas de una misma fracción en diferentes representaciones.
Específicos: a. Indagar por las parejas de fichas formadas por los estudiantes.	67. En ese sentido, mientras se desarrolla el juego, uno como docente puede mirar cuándo hay o no, un aprendizaje, porque la dinámica del Focus te permite eso. Si un estudiante representa o hace una equivalencia que no es correcta, por ejemplo, si relaciona $\frac{3}{5}$ con la gráfica con la gráfica de $\frac{1}{2}$, en ese momento uno puede evidenciar si hay un aprendizaje o no. Si no lo hay, en la dinámica del juego se debe atender ese tipo de dificultades que puede tener el estudiante. 99. La dinámica del juego. Se dice que el docente es solamente un observador, que no está como muy constante, pero, para que se desarrolle ese sentido numérico o, en este caso, dar cumplimiento al objetivo, el docente tiene que estar pendiente a las equivalencias que el estudiante está realizando. Por ejemplo, estar atento a si cuando el estudiante dice “Focus” y lleva la mano al medio, realmente es una equivalencia o no. Si es o no una equivalencia, el docente siempre debe preguntar por qué. 178. Mirar los diferentes pensamientos que tienen los estudiantes, acerca de ‘por qué sí’ o ‘por qué no’, y entre todos llegar a una sola conclusión. Pero que sea siempre con los estudiantes, es decir, no debo darles la respuesta, sino preguntarles por qué.
b. Identificar algunas de las representaciones de la fracción.	143. Teniendo en cuenta que este autor dice que la fracción es algo complejo, con el Focus se propone que el estudiante identifique tres representaciones en que viene dada la fracción: lenguaje natural, simbólico y numérico. Luego, a medida que el juego se va desarrollando, se observa que no es inmediato que el estudiante logre esa equivalencia: es algo que se va desarrollando durante el juego.

Fuente: Elaboración propia

Luego de haber identificado los objetivos resultó posible entonces determinar los episodios de referencia de acuerdo con los objetivos planteados para la intervención. La tabla 7

indica el número episodios de referencia hallados en relación con los objetivos específicos planteados por Sofía en la planificación:

Tabla 7. *Número de episodios de referencia identificados para Sofía*

<i>Objetivos específicos</i>	<i>Episodios de referencia</i>
a.	12
b.	3
Total	15

Fuente: Elaboración propia

En relación con el primer objetivo específico, fue posible encontrar once episodios de enseñanza. Estos episodios suceden, uno al iniciar el juego como momento de exploración, y los restantes en su mayoría durante el desarrollo del juego, puesto que constantemente se forman las parejas de representaciones distintas o no de una misma fracción, o representaciones iguales de una fracción.

Respecto al objetivo específico 1.2, se identificaron tres episodios de enseñanza. Un primer episodio ubicado en el momento de identificar el recurso, otro en un momento de exploración de reconocer las reglas del recurso, y el restante ubicado en el cierre del juego como el aprendizaje de haber identificado las tres representaciones de la fracción usadas en el recurso.

3.4.3 Fase 3

Consistió en la identificación de distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos. Los Tipos de Orquestación guardan relación con las acciones de respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante que posee el profesor, en torno a su experiencia o creencias, como también de sus juicios sobre la Educación Matemática y

particularmente del uso de tecnologías en clase, en este caso interesa para la investigación cuando se orquestan recursos.

Como ya se indicó anteriormente en el capítulo de aproximaciones teóricas, sólo son tomados en consideración los Tipos de Orquestación: Explicación de la Pantalla, Lugar y Espectáculo, Guía y Explicación, y Trabaja y Camina por.

Los elementos escogidos pertenecientes a la matriz de análisis que permitieron identificar articulaciones entre los anteriores Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos son Tipos de Orquestación, meta-categorías y momentos MOST. Para ello se cruzaron los Tipos de Orquestación con cada uno de los otros dos elementos en que fue posible encontrarlos.

A continuación, la descripción de los elementos:

- a. Tipos de Orquestación: Refiere a los Tipos de Orquestación ya previamente definidos en el capítulo de aproximaciones teóricas de esta investigación.
- b. Meta-categorías: Refiere a las meta-categorías construidas en la fase 1 de análisis de esta investigación y que se asocian con las habilidades de la MPPME.
- c. Momentos MOST: Refiere a los momentos MOST clasificados en la fase 2 de análisis de esta investigación.

Por tanto, el análisis realizado en esta tercera fase permitió dar cuenta del tercer y último objetivo específico de esta investigación: *Identificar distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.*

Capítulo IV: Resultados

Después de las múltiples observaciones y toma de datos, los análisis permitieron identificar cada uno de los siguientes resultados en relación con los objetivos específicos de este trabajo de investigación.

4.1 Descripción de la MPPME a partir de la asociación de las habilidades de esta y las meta-categorías obtenidas en el proceso de codificación

Se presenta el resultado descrito de la fase 1 de esta investigación, es decir se presentan las meta-categorías obtenidas a partir del proceso de codificación por comparación constante, para dar cuenta de la MPPME de las profesoras Sara y Sofía. Dicho proceso de categorización como parte del análisis de este trabajo fue expuesto en el X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática por Gómez y Garzón (2020).

Se obtuvieron cuatro meta-categorías luego de todos los niveles de codificación. La tabla 8 expone las meta-categorías teóricas obtenidas en la investigación.

Tabla 8. *Identificación de las meta-categorías teóricas*

<i>Código y meta-categoría</i>	<i>Descripción</i>
IRP – Identificación del Recurso pedagógico.	Se identifica al recurso con que se trabaja en el laboratorio.
RAC – Regulación de las Actividades de Clase.	Se identifica cómo se ha de jugar con el recurso, es decir cuáles son las reglas del juego.
OMR - Objeto Matemático que vincula al Recurso Pedagógico.	El objeto matemático que se vincula al recurso pedagógico puede ser abordado a través de distintas representaciones semióticas.
RJ – Revisión del Juego	Las profesoras prestan atención al estado del proceso en que se encuentran los estudiantes y revisan sus procesos.

Fuente: Elaboración propia

La primera meta-categoría titulada como Identificación del Recurso Pedagógico refiere a las acciones de las profesoras para dar cuenta si el estudiante ha identificado el recurso pedagógico a trabajar en el Laboratorio de Educación Matemática. Por ejemplo, solicitar la lectura de la guía de trabajo, preguntar cuál es el recurso para trabajar, qué se ha entendido de la lectura de la guía de trabajo del recurso, indagar por el conocimiento y saberes previos que tienen los estudiantes acerca del recurso. La tabla 9 presenta las líneas de las transcripciones de la videograbación¹⁴ de cada una de las profesoras que permiten ejemplificar dicha meta-categoría:

Tabla 9. Ejemplificación de la meta-categoría Identificación del Recurso Pedagógico

<i>Profesora Sara</i>	<i>Profesora Sofía</i>
11. Sara: Listo. ¿Entonces qué nos dice esa hojita que tenemos allí? ¿Qué vamos a jugar?	26. Sofía: No (<i>se dirige a E6</i>), Descripción del juego (<i>señala dicho enunciado en la Ficha de E6</i>).
12. E2: el dominó.	28. E5: El Focus de fracciones (<i>E6 interrumpe, continuando con la lectura correcta</i>)
13. Sara: vamos a jugar un dominó, pero este dominó es un dominó particular. ¿Un dominó de qué?	29. E6: El Focus de fracciones es un juego que consiste en identificar parejas de una misma fracción en distintas representaciones, sea en lenguaje natural, en lenguaje figural o numérico.
15. E4: un dominó de números.	32. Sofía: No te escucho (<i>se dirige a E8, mientras toca su oído con dedo índice derecho</i>)
16. Sara: Dominó de fracciones, muy bien. ¿Qué me dicen las reglas de este juego?	33. Sofía: Muy bien. ¿Cuántas representaciones recordamos? (<i>se dirige a E8</i>). ¿De lo que acabamos de leer? ¿Cuántas representaciones hay? (<i>se dirige a los otros estudiantes</i>)
	35. E6: Tres
	36. Sofía: Tres (<i>afirma, moviendo su cabeza</i>) ¿Cuáles son? (<i>se dirige a E7</i>)

¹⁴ Para cada meta-categoría existen ilustraciones a partir de las líneas de transcripción de la videograbación. Para cada profesora se expone sólo un ejemplo, pues todas las líneas extraídas en la codificación son muchas para cada profesora.

Fuente: Elaboración propia

La segunda meta-categoría enunciada como *Regulación de las Actividades de la Clase* agrupa las acciones en que las profesoras Sara y Sofía piden dar cuenta sobre cómo se ha de jugar con el recurso, con la intención de que los estudiantes logren también dar una explicación de ello. Por ejemplo, las profesoras preguntan cómo se juega el recurso, cómo se inicia el juego, cómo se gana y se pierde en el juego, de qué manera deben ubicarse las fichas del recurso, y cuándo es el turno de un estudiante para jugar. E incluso en algunos momentos, las profesoras hacen aclaraciones o explicaciones para dar a entender cómo se juega.

La tabla 10 presenta las líneas de las transcripciones de la videograbación de cada una de las profesoras que permiten ejemplificar dicha meta-categoría:

Tabla 10. Ejemplificación de la meta-categoría Regulación de las Actividades de Clase

<i>Profesora Sara</i>	<i>Profesora Sofía</i>
66. Sara: ¿Qué más me dice allí? ¿Cómo puedo yo jugar? ¿Cómo coloco las fichas?	94. Sofía: ¿Cómo se juega? (<i>se dirige a E8</i>)
67. E2: El que tenga la misma representación.	95. E8: El número recomendado para jugar es de mínimo tres personas o cinco
68. Sara: Que tengan la misma representación, es decir, si yo tengo esta representación que es la figura (<i>toma una ficha del dominó que contiene a un medio en representación figural</i>), debo buscar una fracción que me indique esta representación de acá. ¿Qué me representa esto, qué me representa esta figura que tengo aquí? ¿En cuántos pedacitos está dividida?	96. Sofía: ¿Podemos jugar? (<i>se dirige a E8</i>)
72. Estudiantes: 2	97. E8: (<i>Afirma, moviendo su cabeza</i>)
73. Sara: ¿Y cuántos cojo?	98. Sofía: ¿Cumplimos con la primera condición? ¿Sí o no? (<i>se dirige a E7</i>)
74. E2: 1	99. E6: Sí
75. Sara: ¿Y entonces qué fracción es esa?	100. Sofía: ¿Por qué? ¿Cuántos estudiantes hay para jugar? (<i>se dirige a E7</i>)
76. E2: un medio.	101. E7: (<i>responde mostrando cuatro dedos de su mano derecha</i>)
77. Sara: entonces debo de buscar el un medio, pero en número, en fracción. Busquen un medio en fracción.	102. Sofía: Cuatro, muy bien. Continúa con el segundo paso (<i>se dirige a E7 mientras toca su mano</i>)
	104. E7: La ficha Focus debe ser ubicada en el centro de la mesa (<i>alza la mirada hacia la ficha Focus que tiene Sofía</i>)
	106. Sofía: Entonces, ¿dónde ubicamos la ficha Focus? (<i>le pasa la ficha Focus a E7</i>)
	107. E7: (<i>toma la ficha Focus</i>)
	108. E6: En el centro
	109. E7: (<i>ubica la ficha Focus en el centro de la mesa</i>)
	110. Sofía: En el centro, muy bien. Tercer paso (<i>se dirige a E6 y toca cerca de su mano</i>).

Fuente: Elaboración propia

La meta-categoría *Objeto Matemático que vincula al Recurso Pedagógico* da cuenta de las acciones de las profesoras Sara y Sofía, relacionadas con la identificación del objeto matemático que se vincula al recurso pedagógico y las distintas representaciones semióticas que se abordan en este. Es decir, las profesoras indagan acerca del conocimiento previo que tienen

los estudiantes sobre las fracciones y las distintas representaciones semióticas para este objeto, principalmente las que se trabajan en cada uno de los recursos¹⁵. Las profesoras preguntan sobre la lectura de una fracción, la ubicación de las fichas del recurso en relación con la fracción en que va el juego y en las representaciones que deben colocarse respecto a esta. Las profesoras también explican sobre cómo leer correctamente una fracción, sobre el tipo de representación que se usa en el recurso, y en algunos momentos explican para introducir una nueva temática de acuerdo con el proceder del juego, por ejemplo, explicar la fracción unidad o cuándo dos fracciones son equivalentes.

La tabla 11 expone las líneas de las transcripciones de la videograbación de cada una de las profesoras que permiten ejemplificar dicha meta-categoría:

¹⁵ En cada uno de los recursos se aborda la representación numérica, figural, y en lenguaje natural; de una fracción.

Tabla 11. Ejemplificación de la meta-categoría Objeto Matemático que vincula al Recurso Pedagógico

<i>Profesora Sara</i>	<i>Profesora Sofía</i>
243. Sara: Un tercio. ¿Y acá? <i>(se dirige a todos los estudiantes, señalando a la ficha puesta por E2 que contiene también a dos tercios de manera figural)</i> .	48. Sofía: ¿En qué grado vemos las fracciones? <i>(se dirige a los otros estudiantes)</i>
245. E2 y E1: Un medio.	49. E5 y E6: {En cuarto.
246. E4: No, un tercio.	50. Sofía: En cuarto. Entonces, vamos a recordar <i>(se dirige a E8 y le muestra las fichas)</i> . Lenguaje natural <i>(alza sólo la ficha de un medio en representación de lenguaje natural)</i> es cuando lo escribimos literalmente, ¿cierto? Un medio en este caso.
247. Sara: Mírenlo bien <i>(se dirige a E2 y E1)</i> .	El lenguaje numérico <i>(se dirige a E8 y alza la ficha de un medio en representación fraccionaria)</i> . ¿Cuál es el lenguaje numérico? <i>(se dirige a los otros estudiantes)</i>
248. E2 y E1: Un tercio.	55. E5: Es la cantidad
249. Sara: Mírenlo bien. ¿En cuánto está dividida esta figura? <i>(se dirige a E2 y E1)</i> .	56. E6: El numérico
250. E2: en tres.	57. Sofía: Es un medio (.) escrito en el número <i>(afirma, moviendo la cabeza)</i>
251. Sara: Tres. ¿Y cuántos cogen? <i>(se dirige a E2 y E1)</i> .	58. E5: Pero eso (...) es la cantidad también
252. E2: Dos.	59. Sofía: ¿Qué significa un medio entonces?
253. E3: Ah, ¿un medio?	60. E5: Un medio es (..) una mitad de una cosa
254. E2: Uno.	61. Sofía: Es la mitad de una cosa, muy bien. En este caso, es la mitad de una figura, ¿cierto? <i>(alza la ficha de un medio en representación figural)</i> . La mitad de nuestro círculo. Entonces, un medio: ¿qué quiere decir el denominador? <i>(señala el dos en la ficha de un medio en representación fraccionaria)</i> .
255. Sara: No ¿Cuántos cogí? Dos. Y está dividida en tres pedacitos.	¿Cuál es el denominador y cuál es el numerador?
256. E2, E3 Y E4: Dos tercios.	66. E6: El numerador es el 1 y el denominador es el 2 <i>(alza su mano e índice derecho)</i>
257. Sara: Ah lo dijeron al mismo tiempo, bien. (5) listo, ahí tiene varias para jugar, ¿cuál escoge? <i>(se dirige a M)</i> .	67. Sofía: Muy bien. ¿Y qué quiere decir este dos? <i>(señala el dos en la ficha de un medio en representación fraccionaria)</i>
	70. E6: El dos es las partes (.) son las dos partes.... <i>(es interrumpido por E5)</i>
	73. Sofía: Muy bien, que se toma.

Fuente: Elaboración propia

La cuarta meta-categoría *Revisión del Juego* hace referencia a las acciones de las profesoras en relación con prestar atención en cómo va el juego y a hacer una pausa respecto a la

manera de proceder de los estudiantes en el uso del recurso. Las profesoras rotan por la mesa, preguntando a estudiantes sobre el juego, y al mismo tiempo escuchan las preguntas de estos de manera individual; retoman y resumen en qué va el juego, es decir, hacen un recuento de lo que hasta el momento se ha jugado o lo que necesita recordar el estudiante para poder jugar o colocar una ficha del recurso. Al finalizar el juego también preguntar lo aprendido con el uso del recurso. Las profesoras motivan al estudiante a seguir jugando, y hacen preguntas que generan que este se interroge a sí mismo cómo está jugando.

La tabla 12 presenta las líneas de las transcripciones de la videograbación de cada una de las profesoras que permiten ejemplificar dicha meta-categoría:

Tabla 12. Ejemplificación de la meta-categoría *Revisión del Juego*

<i>Profesora Sara</i>	<i>Profesora Sofía</i>
307. Sara: ¿Segura que no tienes? ¿y con la figura de acá tienes alguna? (<i>señala la ficha del otro lado en que va el juego, que es un tercio en representación fraccionaria</i>).	785. Sara: Primera pregunta: ¿cuántas representaciones de cada fracción recuerdas? (<i>por un momento, se dirige a E8</i>)
309. E4: Un tercio un tercio.	¿Cuántas representaciones había? (<i>se dirige a E6, mientras indica con su mano, el número uno</i>)
310. E2: Déjala (<i>se dirige a E4</i>).	789. E6: Tres
311. Sara: Un tercio, ¿tienes a un tercio en figura? (<i>se dirige a E3</i>).	790. Sofía: Tres. ¿Cuáles eran? (<i>se dirige a E7</i>)
312. E3: (<i>Escoge la ficha del dominó que contiene a un sexto en representación figural</i>)	792. E5: {Natural, numérica
313. Sara: ¿Esta cuántos pedacitos tiene? (<i>se dirige a E3, preguntándole por la ficha que acaba de escoger</i>).	793. E6: {Numérica (<i>indica con sus dedos, el número uno, para empezar a contar las representaciones</i>)
315. E2: Seis.	795. Sofía: Numérica, natural y figural (<i>se dirige a E6 y señala su hoja</i>). Las escriben ahí
316. Sara: ¿Y cuántos tomo?	796. E5: Lenguaje (<i>mientras lo escribe en su hoja</i>)
317. E2: Uno.	797. Sofía: Muy bien: lenguaje (<i>se dirige a E5</i>). Allí está el chancuco
318. Sara: ¿Entonces qué me representa esta figura?	798. E6: ¿Las escribimos?
320. E2: Un sexto.	799. Sofía: Sí. Escribanlo ahí: primera pregunta y escriben (<i>se dirige a E6</i>)

Fuente: Elaboración propia

A continuación, la tabla 13 presenta las asociaciones entre cada una de las habilidades de la MPPME con las meta-categorías anteriores que permiten caracterizar la MPPME de las profesoras Sara y Sofía.

Tabla 13. Asociación entre las habilidades de la MPPME y las meta-categorías

<i>Habilidades de la MPPME</i>	<i>Meta-categorías</i>
Identificar Aprendizajes de los Estudiantes	IRP, RAC, OMR
Interpretar la Comprensión de los Estudiantes	RAC, OMR
Responder a las Comprensión de los Estudiantes	OMR, RJ

Fuente: Elaboración propia

La primera habilidad de la MPPME se describe a partir de aquellas acciones de las profesoras que permiten identificar cómo los estudiantes por medio de la interacción con el recurso (lectura de la guía de trabajo) entienden a este y su uso, qué concepto tienen de la fracción y cuál es la estrategia frente al juego para el colocar o no una ficha del recurso. En este sentido, se presta atención a los aspectos específicos de situaciones de enseñanza y también de los conocimientos matemáticos de los estudiantes. Por ejemplo, en la meta-categoría IRP, las profesoras identifican qué entienden los estudiantes sobre el recurso a través de preguntas que indican decir cuál es el recurso a trabajar y al mismo tiempo qué conocen los estudiantes sobre el recurso en otros contextos fuera del que van a trabajar que es el Laboratorio de Educación Matemática.

En la meta-categoría RAC la habilidad de Identificar Aprendizajes de los Estudiantes se desarrolla a través de las acciones de Sara y Sofía en que piden dar cuenta de cómo se usa el recurso, esto mediante explicaciones de los estudiantes de cómo proceder en el juego.

En la meta-categoría ORM, las profesoras indagan a los estudiantes si conocen o no del objeto matemático que se vincula al recurso y sus representaciones semióticas. Las profesoras Sara y Sofía, identifican también estrategias de los estudiantes para realizar el juego en tanto deciden sobre la lectura de una fracción, es decir, qué elementos tienen en cuenta los estudiantes para leer una fracción y también cómo escoger el tipo de representación que deben colocar según la secuencia del juego.

La segunda habilidad de la MPPME *Interpretar la Comprensión de los Estudiantes* se logra cuando Sara y Sofía interpretan las estrategias de los estudiantes a partir de su conocimiento matemático, didáctico y curricular; basado también en investigaciones y documentos curriculares. En este caso se relacionan las meta-categorías RAC, OMR y RJ.

En la meta-categoría RAC, a partir de las explicaciones de cómo se interactúa con el recurso en el juego, cómo se inicia el juego, cómo se gana y se pierde en el juego y de qué manera se disponen las representaciones gráficas o numéricas en el recurso; y en la meta-categoría OMR, las profesoras logran rastrear las formas en que un estudiante identifica los términos de una fracción para realizar la lectura de esta. Es decir, en el discurso utilizado por los estudiantes se describe su acercamiento a la fracción, pues el numerador es visto como “las partes pintaditas que tomo de” y el denominador como “la división de la figura”. Las profesoras también logran interpretar, por ejemplo, que, para la selección de la representación de la fracción, los estudiantes se refieren a la representación en lenguaje natural por ver la lectura de la fracción de forma escrita en letras y que si no es en letras lo opuesto es el número y por tanto esto refiere a la representación numérica. La representación figural por el dibujo. Estas interpretaciones con base en el conocimiento matemático a través de su formación durante la licenciatura.

La tercera habilidad de la MPPME: *responder a la comprensión de los estudiantes*, que refiere a la toma de decisiones del profesor para responder a las comprensiones del estudiante, con base en los aportes investigativos sobre el desarrollo del Pensamiento Matemático; se evidenció en la manera en que Sara y Sofía elaboran respuestas a las comprensiones de los estudiantes a través de generar preguntas, seleccionar tareas, plantear situaciones distintas a las enunciadas en la guía de trabajo del recurso. Es decir, en esta habilidad se pone en juego la argumentación del profesor para dar respuesta a la comprensión del estudiante. Esta tercera habilidad se asoció con las meta-categorías OMR Y RJ.

En la meta-categoría OMR las profesoras Sara y Sofía, responden a las comprensiones de los estudiantes cuando explican sobre cómo leer correctamente una fracción y sobre el tipo de representación que se usa en el recurso en el momento en que existen confusiones o equivocaciones al respecto. Esto, se toma también como aprovechamiento cuando las profesoras explican para introducir una nueva temática de acuerdo con el proceder del juego, por ejemplo, explicar la fracción unidad o cuándo dos fracciones son equivalentes.

En la meta-categoría RJ, las profesoras retoman en qué va el juego para que un estudiante pueda realizar su “jugada” según el turno que le corresponda y así mismo pueda decidir qué fracción colocar junto con su respectiva representación. Las profesoras rotan por la mesa y prestan atención en las preguntas de los estudiantes y les interrogan de forma individual sobre su manera de jugar. Al finalizar el juego las profesoras realizan algunas preguntas, indicadas en la guía de trabajo del recurso, para confirmar lo aprendido en la actividad, pero también deciden hacer algunas variaciones de estas preguntas según sus experiencias con otros estudiantes.

Las profesoras Sara y Sofía responden de manera consistente en relación con las estrategias de los estudiantes, puesto que sus acciones están encaminadas a la solución de

confusiones por parte de estos, al mismo tiempo que aprovechar esto como punto de partida para otras temáticas.

4.2 Identificación y clasificación de momentos MOST

Se presentan los resultados descritos de la fase 2 de esta investigación, es decir se identifican los momentos MOST y luego estos se clasifican. Se presentan Momentos de Enseñanza, que refieren a las orquestaciones, y discusiones con los estudiantes, gestionadas por el profesor, cuando se manifiestan las estrategias utilizadas por los estudiantes para la resolución de un problema, se hizo uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante (Garzón, 2017b) y se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

Parte de dicho proceso de identificación de momentos MOST fue expuesto también en el X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática por Gómez y Garzón (2020).

Así, estos resultados corresponden al segundo objetivo específico de esta investigación: *Clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.*

Se encontraron tres Momentos de Enseñanza MOST. Dos momentos pertenecientes al caso de la profesora Sara, y el otro al caso de la profesora Sofía:

4.2.1 Primer momento MOST identificado para la profesora Sara

El Momento de Enseñanza tuvo como fin la identificación de la fracción que se juega en el curso del juego; y se asoció con el objetivo específico del episodio de enseñanza: establecer relaciones entre la fracción y la figura.

Se abordó la temática de la partición de la unidad y de acuerdo con ello determinar el denominador y numerador, según la representación figural con que se cuenta, en este caso, tres cuartos. El protagonista del momento es E3.

Sara pregunta a la estudiante E3 sobre la fracción que debe identificar para poder jugar. La estudiante E3 responde de manera confusa frente a la identificación de la partición de la unidad y con ello no logra de manera inicial identificar la fracción solicitada por Sara.

Las líneas de la transcripción de la videgrabación de este momento son:

288. Sara: OK. ¿Qué me representa esta? *(toma la ficha que contiene a tres cuartos en representación figural, dirigiéndose a E3)*.

290. E3: Eh ¿Tres tercios?...

291. Sara: ¿En cuántos está dividido... Cuántos triangulitos hay allí?

293. Sara: ¿Tres?

294. E3: Pues como hay un cuadrito en blanco.

295. Sara: Ah, sería: uno, dos, tres, cuatro. ¿Cierto? ¿Y cuántos están pintados?

296. E3: Tres.

297. Sara: ¿Entonces qué fracción sería esa?

298. E3: Tres cuartos, ay, es que no me dejan pensar *(se dirige a E4)*

299. Sara: Sí, así es. Es esa. Tres cuartos. ¿Y la que pusiste aquí cuál es? *(Toma la ficha del dominó que ha puesto E3 en el juego)*

301. E3: Un medio.

302. Sara: No, esta. *(Indica la otra parte de la ficha que contiene a la unidad en representación figural)*.

304. E2: Una unidad *(se dirige a E3)*

305. Sara: Una unidad. Y no es lo mismo que tres cuartos. Entonces busca entre las que tienes allí. *(Se dirige a E3)*

306. E3: No tengo.

307. Sara: ¿Segura que no tienes? ¿y con la figura de acá tienes alguna? *(señala la ficha del otro lado en que va el juego, que es un tercio en representación fraccionaria)*.

De acuerdo con la estructura analítica MOST, el momento se caracterizó de la siguiente manera:

- a. **Primera característica: Pensamiento Matemático del Estudiante.** Se identificaron declaraciones verbales de la estudiante como respuesta a la solicitud de la profesora Sara. El criterio *la acción del estudiante permite inferir las matemáticas del estudiante*, pudo identificarse a través de las respuestas del estudiante como declaraciones verbales en

relación con la identificación de la fracción según la representación figural de ésta. Así como se ilustra con las siguientes líneas la transcripción:

290. E3: ¿Tres tercios?...

El segundo criterio *articulación de una idea matemática con las ideas matemáticas del estudiante*: Sara manifestó tres expresiones cercanas al discurso del estudiante, dos para la lectura de una fracción, y una aproximación a la comparación de fracciones: “¿En cuántos está dividido... Cuántos triangulitos hay allí?”, “¿Y cuántos están pintados?”, “Una unidad. Y no es lo mismo que tres cuartos”; respectivamente. Lo anteriormente expuesto se puede ilustrar con las siguientes líneas de la transcripción:

291. Sara: ¿En cuántos está dividido... Cuántos triangulitos hay allí?

295. Sara: Ah, sería: uno, dos, tres, cuatro. ¿Cierto? ¿Y cuántos están pintados?

305. Sara: Una unidad. Y no es lo mismo que tres cuartos. Entonces busca entre las que tienes allí. (*Se dirige a E3*)

b. Segunda característica: Lo Significativo en una Perspectiva Matemática. La

Perspectiva Matemática se relaciona con las matemáticas del estudiante. Esto en tanto que el primer criterio *la perspectiva matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes con antecedentes similares* es posible identificar puesto que el concepto e identificación de una fracción, según los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), emerge en los grados primero a tercero en el contexto de medición a través de fracciones comunes; en los grados cuarto a quinto se interpretan las fracciones en sus diferentes contextos y la aproximación a sus propiedades, relaciones y operaciones. Esto se ilustra con la siguiente línea de la transcripción:

297. Sara: ¿Entonces qué fracción sería esa?

En el segundo criterio *la perspectiva matemática se relaciona con un objetivo central para los estudiantes de la clase*, la Perspectiva Matemática enunciada por Sara se realiza acorde con sus objetivos general y específicos para el desarrollo de la sesión. En relación con el desarrollo del Sentido Numérico y el objetivo específico planteado por Sara que se conecta con la elección de este Momento de Enseñanza, los lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), enuncian que el desarrollo del Sentido Numérico se desarrolla de manera gradual en el estudiante a través de contextos cercanos y significativos para él, como también del uso de distintas representaciones para la identificación del número en distintos escenarios. También mediante el uso de operaciones en el que se puedan diseñar estrategias para desarrollar un problema. En este caso, Sara enuncia que su objetivo de la sesión es poder comparar las fracciones para aproximarse a las operaciones de adición y sustracción. Esto ilustrado por las siguientes líneas:

305. Sara: Una unidad. Y no es lo mismo que tres cuartos. Entonces busca entre las que tienes allí. (*Se dirige a E3*)
 307. Sara: ¿Segura que no tienes? ¿y con la figura de acá tienes alguna?

Dicha comparación entre fracciones se enuncia a partir de lo que gráficamente se observa en estas, es decir de las “partes pintadas”, lo que infiere que se tiene una imagen de las fracciones como *tantos de tantos* (Cortina et al., 2013), y además no se tuvo presente el tamaño de las unidades.

- c. **Tercera característica: Oportunidades pedagógicas.** Un caso del discurso en el que el Pensamiento Matemático del Estudiante posibilita condiciones para la construcción de significado matemático.

En el primer criterio *el pensamiento matemático del estudiante crea apertura para construir la perspectiva matemática*, se crea una apertura en el momento en que la estudiante E3 estableció un conteo equívoco sobre la partición de la unidad al Sara preguntarle en cuántos “triangulitos está dividido”. Luego de esto la profesora realiza nuevamente el conteo y pregunta posteriormente por la cantidad que alude al numerador de la fracción, siendo finalmente exitosa la respuesta de la estudiante E3. Lo anterior ilustrado con las siguientes líneas:

291. Sara: ¿En cuántos está dividido... Cuántos triangulitos hay allí?

293. Sara: ¿Tres?

294. E3: Pues como hay un cuadrito en blanco.

El segundo criterio *el momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura*, se hace uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante al valorar la respuesta inicial equivocada de la estudiante E3 para insistir con la lectura de la fracción y al mismo tiempo a partir de esta respuesta poder introducir a la comparación entre fracciones indicando de manera muy leve que la unidad no es igual a tres cuartos, a lo que la estudiante parece comprender y se evidencia con su respuesta de no tener la ficha solicitada y de diferenciarla de la unidad. Las siguientes líneas lo ilustran:

295. Sara: Ah, sería: uno, dos, tres, cuatro. ¿Cierto? ¿Y cuántos están pintados?

296. E3: Tres.

297. Sara: ¿Entonces qué fracción sería esa?

298. E3: Tres cuartos, ay, es que no me dejan pensar (*se dirige a E4*)

305. Sara: Una unidad. Y no es lo mismo que tres cuartos. Entonces busca entre las que tienes allí. (*Se dirige tengo. a E3*)

306. E3: No

4.2.2 Segundo momento MOST identificado para la profesora Sara

El Momento de Enseñanza tuvo como fin la identificación de la fracción que se juega en el curso del juego. Se asoció con el objetivo específico del episodio de enseñanza: establecer relaciones entre la fracción y la figura.

Se abordó la temática de la partición de la unidad y de acuerdo con ello determinar el denominador y numerador, según la representación figural con que se cuenta, en este caso, tres cuartos. Sara estableció una discusión con los estudiantes E2, E3 y E4 acerca de la fracción que se tiene que jugar. Los estudiantes responden de manera confusa frente a la identificación de la partición de la unidad y con ello no logran de manera inicial identificar la fracción solicitada por Sara. El protagonista es E2.

351. Sara: ¿Estás seguro? Míralas bien (se dirige a E2). Recordemos, ¿esta qué representación es? *(Se dirige a todos, preguntando por la ficha de un lado en que va el juego).*

353. E2: Dos tercios.

354. Sara: No, esta. La figura. ¿La figura qué representación es? *(se dirige a todos).*

355. E2: cuatro tercios o tres cuartos.

356. Sara: Acuérdense, ¿los triangulitos en que se dividen cuántos son?

357. E2: Cuatro.

358. Sara: Cuatro. Y ese es el numerito que voy a poner abajo.

359. E3: ¿Un tercio?

360. Sara: ¿Y el que cogí? ¿Cuántos cogí? *(se dirige a E3)*

361. E3: Tres, ve, cuatro.

362. Sara: ¿No, ¿cuántos cogí? ¿Cuántos están pintaditos? *(se dirige a todos)*

363. E2: Cuatro

364. E3: Tres.

365. Sara: ¿O sea que cuál es la fracción? *(se dirige a todos)*

366. E4: Tres cuartos.

367. Sara: Tres cuartos. Sí. Como son tres cuartos mira si en fracción tienes tres cuartos allí. *(se dirige a E2)*

369. E2: *(Asienta, y ubica la ficha del dominó que contiene a tres cuartos en representación fraccionaria, junto con su equivalente en representación figural).*

De acuerdo con la estructura analítica MOST, el momento se caracteriza de la siguiente manera:

- a. **Primera característica: Pensamiento Matemático del Estudiante.** Se identificaron declaraciones verbales de los estudiantes como respuesta a la solicitud de la profesora Sara. El primer criterio *la acción del estudiante permite inferir las matemáticas del estudiante*, fue posible identificarlo a partir de las respuestas de los estudiantes que son declaraciones verbales en relación con la identificación de la fracción según la representación figural de ésta. Dicho criterio se ilustra con las siguientes líneas de transcripción:

351. Sara: ¿Estás seguro? Míralas bien (se dirige a E2). Recordemos, ¿esta qué representación es? (*Se dirige a todos, preguntando por la ficha de un lado en que va el juego*).
 353. E2: Dos tercios.
 354. Sara: No, esta. La figura. ¿La figura qué representación es? (*se dirige a todos*).
 355. E2: cuatro tercios o tres cuartos.

El segundo criterio *articulación de una idea matemática con las ideas matemáticas del estudiante*, se identificó cuando Sara manifiesta una expresión cercana al discurso del estudiante para dar a entender quién es el denominador de la fracción: “Y ese es el numerito que voy a poner abajo”. Y se ilustra con las siguientes líneas de transcripción:

356. Sara: Acuérdense, ¿los triangulitos en que se dividen cuántos son?
 358. Sara: Cuatro. Y ese es el numerito que voy a poner abajo.

- b. **Segunda característica: Lo Significativo en una Perspectiva Matemática.** La Perspectiva Matemática se relaciona con las matemáticas del estudiante.

El primer criterio *la perspectiva matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes con antecedentes similares*, se reconoce a partir del concepto e identificación de una fracción, según los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), y que emerge en los grados primero a tercero en el contexto de medición a través de fracciones comunes; en los grados cuarto a quinto se interpretan las fracciones en sus diferentes contextos y la aproximación a sus propiedades, relaciones y operaciones. Lo anterior ilustrado con las siguientes líneas de transcripción:

354. Sara: No, esta. La figura. ¿La figura qué representación es? (*se dirige a todos*).

365. Sara: ¿O sea que cuál es la fracción? (*se dirige a todos*)

En el segundo criterio *la perspectiva matemática se relaciona con un objetivo central para los estudiantes de la clase*, la Perspectiva Matemática enunciada por Sara se realizó acorde con sus objetivos, general y específicos, para el desarrollo de la sesión. En lo concerniente con el desarrollo del Sentido Numérico y el objetivo específico planteado por Sara que se conecta con la elección de este Momento de Enseñanza, los lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), enuncian que el Sentido Numérico se desarrolla de manera gradual en el estudiante a través de contextos cercanos y significativos para él, como también del uso de distintas representaciones para la identificación del número en distintos escenarios.

Pese a que el objetivo propuesto por Sara para su sesión era comparar fracciones, no es tan explícito en este momento, puesto que se centró más en la identificación de representaciones que surgen para una fracción en el juego. Si bien las líneas que ilustran dicho criterio lo hacen no como la comparación entre cantidades, al contrastar la representación figural de tres cuartos y la representación distinta que se necesita de esta misma fracción. Lo que logra entonces que seleccione la fracción tres cuartos y no otra.

Dicho criterio se ilustra con las siguientes líneas:

351. Sara: ¿Estás seguro? Míralas bien (*se dirige a E2*). Recordemos, ¿esta qué representación es? (*Se dirige a todos, preguntando por la ficha de un lado en que va el juego*).

354. Sara: No, esta. La figura. ¿La figura qué representación es? (*se dirige a todos*).

- c. **Tercera característica: Oportunidades pedagógicas.** Un caso del discurso en el que el Pensamiento Matemático del Estudiante posibilita condiciones para la construcción de significado matemático.

En el primer criterio *el pensamiento matemático del estudiante crea apertura para construir la perspectiva matemática*, se crea una apertura en el momento en que el estudiante E2 da una respuesta equívoca sobre la identificación de una fracción.

Posteriormente Sara enfatizó en ello e hizo referencia a la identificación del denominador de la fracción en relación con la partición de la unidad, según la representación figural.

Dicho criterio lo ilustran las siguientes líneas:

354. Sara: No, esta. La figura. ¿La figura qué representación es? (*se dirige a todos*).
 356. Sara: Acuérdense, ¿los triangulitos en que se dividen cuántos son?

El segundo criterio *el momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura*, se identificó a partir del uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante al valorar la respuesta equívoca inicial del estudiante E2 para insistir con la lectura de la fracción para los tres integrantes del Momento de Enseñanza. Esto se ilustra con las siguientes líneas:

362. Sara: ¿No, ¿cuántos cogí? ¿Cuántos están pintaditos? (*se dirige a todos*)
 365. Sara: ¿O sea que cuál es la fracción? (*se dirige a todos*)
 367. Sara: Tres cuartos. Sí. Como son tres cuartos mira si en fracción tienes tres cuartos allí. (*se dirige a E2*)

4.2.3 Momento MOST identificado para la profesora Sofía

El Momento de Enseñanza tuvo como fin la identificación de algunas de las distintas representaciones de una fracción, según las que se manejan en el recurso pedagógico. Se asoció con el objetivo específico de identificar alguna de las distintas representaciones de la fracción.

Dicho momento surge en el instante en que Sofía pregunta qué es el lenguaje numérico, a lo que E5 y E6 respondieron que es el número y la cantidad, respectivamente. Posteriormente E5 hace énfasis a que se refiere a la cantidad y Sofía decide continuar indagando qué es entonces la

fracción un medio, como también del significado de su denominador y fracción. La protagonista es Sofía.

Las líneas que ilustran este momento son:

53. El lenguaje numérico (*se dirige a E8 y alza la ficha de un medio en representación fraccionaria*). ¿Cuál es el lenguaje numérico? (*se dirige a los otros estudiantes*)
55. E5: Es la cantidad
56. E6: El numérico
57. Sofía: Es un medio escrito en el número (*afirma, moviendo la cabeza*)
58. E5: Pero eso es la cantidad también
59. Sofía: ¿Qué significa un medio entonces?
60. E5: Un medio es una mitad de una cosa
61. Sofía: Es la mitad de una cosa, muy bien. En este caso, es la mitad de una figura, ¿cierto? La mitad de nuestro círculo.
63. Entonces, un medio: ¿qué quiere decir el denominador? ¿Cuál es el denominador y cuál es el numerador?
65. E6: El numerador es el 1 y el denominador es el 2 (*alza su mano e índice derecho*)
66. Sofía: Muy bien. ¿Y qué quiere decir este dos? (*señala el dos en la ficha de un medio en representación fraccionaria*)
68. E5: Ese dos es la... (es interrumpido por E6)
69. E6: El dos son las dos partes... (es interrumpido por E5)
70. E5: Vea, son dos partes y una (.) una es la cantidad que debemos tomar
71. Sofía: Muy bien, que se toma.

De acuerdo con la estructura analítica MOST, el momento se caracteriza de la siguiente manera:

a. Primera característica: Pensamiento Matemático del Estudiante. Se identifican

declaraciones verbales de los estudiantes como respuesta a lo indagado por Sofía.

El primer criterio *la acción del estudiante permite inferir las matemáticas del estudiante*,

las respuestas de los estudiantes son declaraciones verbales en relación con la

identificación de lo que es el lenguaje numérico. Las líneas de la transcripción que

ilustran lo anterior son:

58. E5: Pero eso es la cantidad también
60. E5: Un medio es una mitad de una cosa

En el segundo criterio *articulación de una idea matemática con las ideas matemáticas del estudiante*, Sofía indica de manera cercana al discurso del estudiante la siguiente expresión: “Es un medio escrito en el número”.

De la misma manera acepta la respuesta de E5 al afirmar lo siguiente: “Muy bien, que se toma”, para indicar que se refiere al numerador de la fracción.

Las siguientes líneas ilustran lo anterior:

57. Sofía: Es un medio (.) escrito en el número (*afirma, moviendo la cabeza*)
71. Sofía: Muy bien, que se toma.

b. Segunda característica: Lo Significativo en una Perspectiva Matemática. La

Perspectiva Matemática se relaciona con las matemáticas del estudiante.

El primer criterio *la perspectiva matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes con antecedentes similares*, dado a partir del concepto e identificación de una fracción, según los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), emerge en los grados primero a tercero en el contexto de medición a través de fracciones comunes; en los grados cuarto a quinto se interpretan las fracciones en sus diferentes contextos y la aproximación a sus propiedades, relaciones y operaciones. Lo anterior ilustrado con las siguientes líneas de la transcripción, en que Sofía pregunta por los términos de un número fraccionario.

63. Entonces, un medio: ¿qué quiere decir el denominador? ¿Cuál es el denominador y cuál es el numerador?

En el segundo criterio *la perspectiva matemática se relaciona con un objetivo central para los estudiantes de la clase*, la Perspectiva Matemática enunciada por Sofía se realiza acorde con sus objetivos, general y específicos, para el desarrollo de la sesión. En relación con el desarrollo del Sentido Numérico y el objetivo específico que se conecta con la elección de

este Momento de Enseñanza, los lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), enuncian que el desarrollo del Sentido Numérico se desarrolla de manera gradual en el estudiante a través de contextos cercanos y significativos para él, como también del uso de distintas representaciones para la identificación del número en distintos escenarios.

Las líneas que ilustran lo anterior son:

53. El lenguaje numérico (*se dirige a E8 y alza la ficha de un medio en representación fraccionaria*). ¿Cuál es el lenguaje numérico? (*se dirige a los otros estudiantes*)

c. Tercera característica: Oportunidades pedagógicas. Un caso del discurso en el que el Pensamiento Matemático del Estudiante posibilita condiciones para la construcción de significado matemático.

En el primer criterio *el pensamiento matemático del estudiante crea apertura para construir la perspectiva matemática*, la apertura es creada en el momento en que el estudiante E5 insiste en darle continuidad a su respuesta “Pero eso es la cantidad también”.

Las siguientes líneas ilustran lo anterior:

58. E5: Pero eso es la cantidad también
59. Sofía: ¿Qué significa un medio entonces?

Y el segundo criterio *el momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura*, se hace uso provechoso del Pensamiento Matemático del Estudiante al valorar el énfasis que realiza E5 sobre su respuesta. Así, Sofía continúa hablando sobre el significado de un medio, su denominador y numerador.

Las siguientes líneas ilustran lo anterior:

58. E5: Pero eso es la cantidad también
59. Sofía: ¿Qué significa un medio entonces?
59. Sofía: ¿Qué significa un medio entonces?

60. E5: Un medio es una mitad de una cosa

61. Sofía: Es la mitad de una cosa, muy bien. En este caso, es la mitad de una figura, ¿cierto? La mitad de nuestro círculo.

63. Entonces, un medio: ¿qué quiere decir el denominador? ¿Cuál es el denominador y cuál es el numerador?

4.3 Clasificación de momentos MOST

Los Momentos de Enseñanza MOST posteriormente fueron clasificados a través de la matriz de análisis ya descrita en la fase 2, con el fin de establecer una tipología de estos. La tabla 14 expone la clasificación entre los momentos:

Tabla 14. *Clasificación de momentos MOST*

<i>Momento (M). Protagonista (P). Objetivo (O). Meta-categoría relacionada (CR).</i>	<i>Matemáticas del estudiante (ME) y Oportunidades pedagógicas (OP)</i>
M1 de Sara. P: E3. O: Identificar una fracción a partir de las relaciones entre esta y su representación figural. CR: OMR	ME: El estudiante reconoce al denominador de la fracción como las partes no pintadas. La perspectiva matemática se asocia al concepto de los términos de una fracción. OP: Se hace necesario que el estudiante realice nuevamente el conteo de la participación de la unidad para así interpretar de forma correcta el sentido de la representación, y así la profesora introduce a la comparación entre fracciones.
M2 de Sara. P: E2. O: Identificar una fracción a partir de las relaciones entre esta y su representación figural. CR: OMR	ME: El estudiante lee la fracción intercambiando los términos de la fracción. La perspectiva matemática se asocia al concepto de los términos de la fracción. OP: Es necesario que el estudiante comprenda el objeto matemático en sus distintas representaciones, pues no es capaz de pasar de la representación figural a la numérica de forma correcta. La profesora. Sara persiste en la lectura correcta de la representación.
M de Sofía. P. Sofía. O: Identificar algunas de las distintas representaciones de la fracción. CR: IRP, RAC, OMR	ME: El estudiante asocia la cantidad con la representación numérica y figural de la fracción. La perspectiva matemática se asocia con el sentido que se le asigna a la representación de la fracción. OP: La profesora enfatiza en los términos de una fracción.

Fuente: Adaptación Tabla Características para comparar momentos con oportunidades pedagógicas significativas. (Garzón, p. 81, 2017a)

De la tabla 14 se establecieron dos tipos de momentos a partir de los objetivos descritos en estos: a) identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural, y b) Identificación de la representación numérica de una fracción.

A continuación, una descripción sobre estos momentos:

4.3.1 Momento de identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural

Estos momentos son pertenecientes a la profesora Sara y tienen como protagonista a los estudiantes. En este caso a E3 y E2, respectivamente.

Ambos momentos pueden ser también descritos por la meta-categoría OMR en que se referencia al objeto matemático vinculado al recurso pedagógico, y la profesora Sara realiza preguntas para la identificación del objeto matemático y sus distintas representaciones. En este caso, la profesora Sara en ambos momentos indagó por la lectura de una fracción según su representación figural, y lo explicó nuevamente, frente a las respuestas de los estudiantes E3 y E2, respectivamente. Más adelante a la profesora Sara le fue posible introducir una nueva temática en su intervención: comparación entre fracciones.

Ambos momentos son generados a partir de las respuestas erróneas de los estudiantes cuando la profesora Sara preguntó por la lectura de una fracción. E3 respondió $\frac{3}{3}$ y E2 respondió $\frac{4}{3}$, y en ambos casos lo correcto debió ser $\frac{3}{4}$.

En el primer momento, las matemáticas del estudiante caracterizan al denominador de la fracción como las partes no pintadas de una representación figural. En el segundo momento, las matemáticas del estudiante intercambian al numerador y denominador de la fracción. Para ambos casos la Perspectiva Matemática se asocia al concepto de los términos de una fracción.

En ambos momentos se hizo necesario que la profesora Sara enfatizará de nuevo en la lectura correcta de la fracción. Así, en el caso de E3 se enfatizó y explicó en el conteo de la partición de la unidad, y en el caso de E2 en la acomodación correcta del numerador y el denominador de la fracción. Así, la apertura es generada a partir de las preguntas que conducen la identificación de una fracción y con ello introducir a la comparación entre fracciones. En el caso de E3, la fracción unidad con $\frac{3}{4}$, y en el caso de E2, $\frac{4}{3}$ con $\frac{3}{4}$.

Para ambos momentos, la profesora Sara hace referencia a las fracciones como *tantos de tantos* (Cortina et al., 2013), pues su discurso está más encaminado al hacer énfasis en el conteo de la partición de la unidad.

4.3.2 Momento de identificación de la representación numérica de una fracción

Este momento corresponde a la profesora Sofía. Según Garzón (2017b) el protagonista de un momento MOST puede ser el estudiante o el profesor. Entonces, aquí la protagonista es la profesora, Sofía.

El momento es descrito también por las meta-categorías IRP, RAC y OMR.

El momento emerge cuando inicialmente se ha pedido a los estudiantes leer la guía de trabajo del recurso, y posteriormente Sofía quiere identificar lo que han comprendido los estudiantes y así también saber si entendieron el tipo de representaciones que se usan en el recurso. Para ello la profesora Sofía solicita que los estudiantes expliquen lo que han logrado interpretar de esta lectura. Esta es entonces la meta-categoría IRP.

La meta-categoría RAC puede también verse implícita en el momento descrito para Sofía, porque, al terminar de leer la guía de trabajo del recurso, Sofía pidió a los estudiantes dar cuenta de cómo se usa este, en este caso con la acomodación de las representaciones para jugar. E

incluso la profesora Sofía hizo aclaraciones o explicaciones para dar a entender cómo se juega con el recurso.

En la meta-categoría OMR, la profesora Sofía preguntó por las representaciones que se abordan en el Recurso Pedagógico para el objeto matemático que se vincula a este, y estableció una importante discusión acerca de lo que significa la cantidad en relación con la identificación de la representación numérica de la fracción.

El momento es generado a partir de la pregunta de Sofía “¿Qué significa un medio entonces?” (Línea 59 de la transcripción de la videograbación) frente a la insistencia de E5 al responder varias veces que el lenguaje numérico es también la cantidad.

Las matemáticas del estudiante están dadas bajo la asociación de la cantidad con la representación numérica y figural de la fracción, pues E5 respondió que “un medio es la mitad de una cosa”.

La Perspectiva Matemática se asocia con el sentido que se le asigna a la representación numérica y figural de la fracción.

En este momento se hizo necesario que Sofía enfatizara por los términos de una fracción cuando E5 respondió que un medio es la mitad de una cosa, preguntando entonces qué es y qué significa el numerador y denominador de una fracción.

Contrario a los momentos identificados para Sara, E5 interpreta correctamente la representación figural de $\frac{1}{2}$, y es capaz de pasar de la representación figural a la numérica. Es decir, comprende el objeto matemático en sus distintas representaciones.

La respuesta insistente de E5 al reconocer la representación numérica también como la cantidad explicando que de la fracción $\frac{1}{2}$ toma 1 de 2, deja ver el concepto que tiene de la relación parte todo, con base en lo figural; pues E5 asume correctamente que las partes en que ha sido dividido el círculo, que se toma como ejemplo, tienen la misma área.

Ivars (2019) plantea que uno de los conceptos que plantea más dificultades para los estudiantes son las fracciones, debido a las distintas interpretaciones que estas toman (razón, cociente, operador, medida o parte - todo). Este autor retoma que uno de los niveles de dificultad para reconocer la fracción como parte – todo, es que las partes en que se divide el todo deben ser de igual área, sin importar la forma.

Finalmente, en relación con todos los momentos MOST hallados en la investigación, Ivars (2019), propone el uso de materiales manipulativos, que en este caso es el recurso pedagógico, para generar distintas representaciones para una misma fracción¹⁶. Los Recursos Pedagógicos aplicados por las profesoras Sara y Sofía cuentan con distintas representaciones para una misma fracción, incluso la representación figural a través diferentes formas para una misma fracción.

En lo que refiere a la identificación de la fracción en relación con la lectura según el numerador y denominador de esta, para ambos casos de las profesoras Sara y Sofía las fracciones utilizadas en cada uno de los recursos son fracciones propias. Si bien, los estudiantes parecen intercambiar los valores de los términos de la fracción en algunos casos, por ejemplo, pueden leer tres cuartos como cuatro tercios o viceversa como sucede con el estudiante E2. Ivars (2019) expone que, en el caso de fracciones propias, lo recomendable es que un estudiante pueda

¹⁶ Ivars (2019) propone el doblado de una misma hoja de papel para representar de distintas formas una misma fracción.

comprender que una parte puede estar también dividida en otras partes, lo que conlleva al reconocimiento e identificación de fracciones equivalentes.

De igual forma, el autor anterior menciona que en el caso de distintas representaciones para una misma fracción se pueda discutir sobre la igualdad de las áreas de las partes, por ejemplo, si la fracción fuese un medio y las partes no estuvieran divididas de manera equitativa, elaborar una discusión de qué es lo que significa la otra parte que no tiene la misma área de la otra.

Si bien Ivars (2019) centra su trabajo en la equipartición de la unidad, al mencionar la importancia de las partes. No obstante, deja de lado que para la comparación entre fracciones la equivalencia entre las áreas debe realizarse sobre unidades del mismo tamaño. Algo que es cuestionado por Cortina et al., (2013), en relación con la enseñanza de las fracciones ya que esto no permitiría que el estudiante comprenda las distintas interpretaciones y usos de la fracción (medida, cociente, razón, operador).

Cabe destacar también que además de que el discurso de las profesoras se relaciona mucho con identificar la fracción como *tantos de tantos* (Cortina et al., 2013), es necesario interrogar también el diseño de ambos Recursos Pedagógicos pues las fracciones que se manejan todas son propias y las representaciones figurales de la fracción son distintas en figura y tamaño lo que no permite una clara y fácil comparación entre fracciones, debido a las áreas de las partes.

4.4 Articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos

Se presenta lo obtenido de la fase 3 de análisis de esta investigación, es decir se presentan las distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al

Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos. Por tanto, dicha fase se asocia con el objetivo específico tres: *Identificar distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.*

El Tipo de Orquestación *Explicación de la Pantalla* fue modificado en relación con el contexto en que se realiza este trabajo de investigación, además de haber considerado que la pantalla es reemplazada aquí por la guía de trabajo del recurso pedagógico. Por tanto, el nombre de *Explicación de la Pantalla* es reemplazado por *Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso*.

Las tablas 15 y 16 dan cuenta de las articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante. Es decir, el Tipo de Orquestación que se puede evidenciar en las meta-categorías enunciadas y tipología de momentos MOST. Esto porque las meta-categorías permitieron describir la MPPME en asociación con las habilidades de esta. Y los tipos de momentos MOST porque ponen de manifiesto el Pensamiento Matemático del Estudiante para dar cuenta del desarrollo de las tres habilidades de la MPPME.

Tabla 15. *Articulación entre los tipos de orquestación y las meta-categorías construidas en el proceso de codificación*

<i>Tipos de orquestación</i>	<i>Meta-categorías</i>
Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso	IRP, RAC, OMR
Lugar y Espectáculo	OMR y RJ
Guía y Explicación	IRP, RAC, OMR Y RJ
Trabaja y Camina Por	OMR y RJ

Fuente: Elaboración propia

Tabla 16. *Articulación entre los Tipos de Orquestación y los tipos de momentos MOST*

<i>Tipos de orquestación</i>	<i>Tipología de momentos MOST</i>
Explicación de la Guía de trabajo del Recurso	(Ninguno)
Lugar y Espectáculo	Identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural. Identificación de la representación numérica de una fracción.
Guía y Explicación	Identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural. Identificación de la representación numérica de una fracción.
Trabaja y Camina Por	Identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural. Identificación de la representación numérica de una fracción.

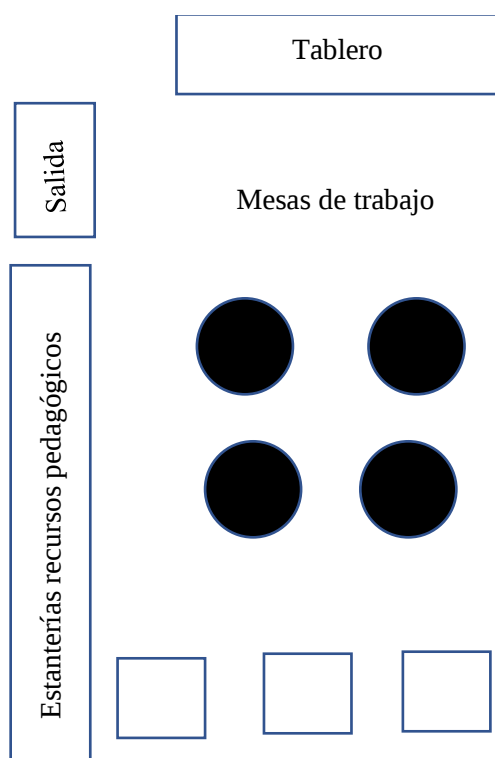
Fuente: Elaboración propia

Antes de describir cada una de las articulaciones encontradas, en preciso enunciar lo siguiente:

- a. La Configuración Didáctica para todos los Tipos de Orquestación fue la misma: Las profesoras de matemáticas en formación y sus estudiantes, todos sentados alrededor de una misma mesa redonda, al interior del Laboratorio de Educación Matemática. En el centro de la mesa se ubica al recurso pedagógico¹⁷.

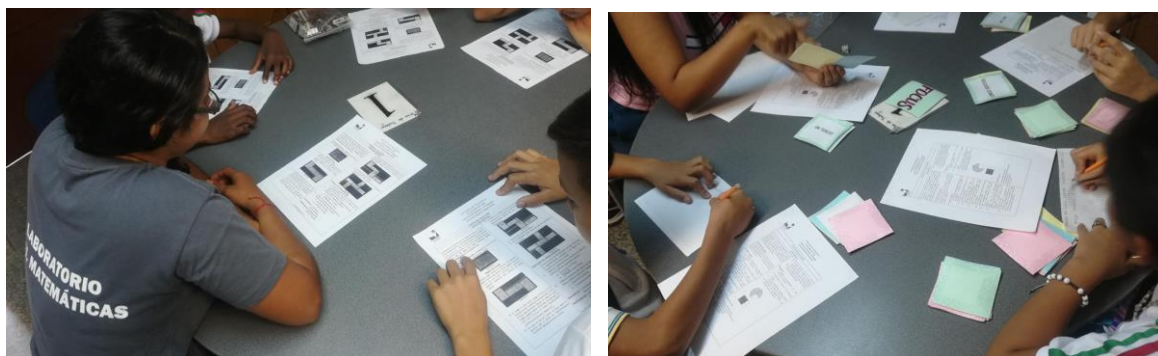
A continuación, la figura 1 indica la configuración didáctica del Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle; y la ilustración 3 muestra la configuración didáctica para cada una de las profesoras Sara y Sofía.

Figura 1. Configuración Didáctica del Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle



¹⁷ Esta organización es ya predispuesta por el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle. El Laboratorio de Educación Matemática es un salón conformado por seis mesas redondas de trabajo, un tablero, y estanterías en que se guardan los Recursos Pedagógicos.

Ilustración 3. *Configuración Didáctica para la profesora Sara y Sofía, respectivamente*



Fuente: Elaboración propia

- b. El Modo de Explotación en cada uno de los Tipos de Orquestación, es decir la manera en que cada profesora trabajó aquella Configuración Didáctica, ocurrió a través del retomar las respuestas de los estudiantes para enfatizar, insistir o ampliar lo tratado al respecto. Todo ello a través de una interacción discursiva de manera grupal e individual entre las profesoras Sara y Sofía, y los estudiantes, respectivamente.

A continuación, se presentan cada una de las articulaciones ilustradas en las tablas 15 y 16:

La orquestación *Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso* sucedió a partir de las acciones de las profesoras de matemáticas en formación en que solicitan leer a todos los estudiantes la guía de trabajo del recurso para así identificar el modo de jugar y las regulaciones de clase y del juego alrededor de este.

Las profesoras Sara y Sofía realizaron preguntas a los estudiantes con el fin de identificar aquello que habían entendido los estudiantes de la guía de trabajo del recurso, y posteriormente explicaron aquellos elementos constituyentes de la guía de trabajo, además de aclarar lo que manifestaron no entender los estudiantes. Esto es ilustrado en las meta-categorías IRP, RAC y

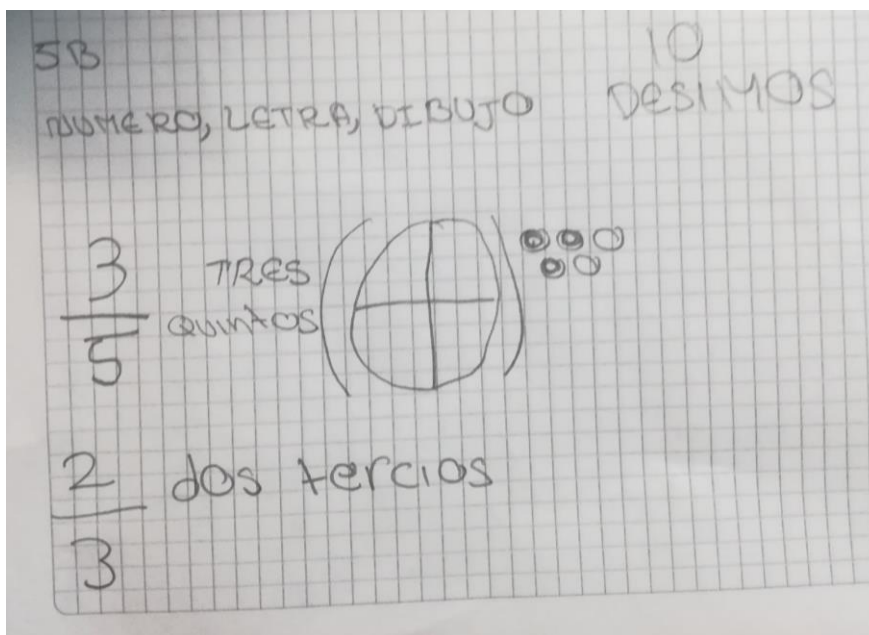
OMR que anteriormente ya fueron descritas e ilustradas en el primer grupo de resultados de esta investigación. Además, la explicación por parte de las profesoras va mucho más allá de dar instrucciones de cómo usar el recurso, pues también se involucra al objeto matemático en tanto se indaga por el concepto de fracción, se explican los términos de una fracción, y las distintas representaciones semióticas que se abordan en el recurso, y también indicaron cómo ubicar las fichas del recurso según el objetivo del juego.

La orquestación *Lugar y Espectáculo*, en que se destaca el razonamiento de los estudiantes, fue posible identificar que los estudiantes de las profesoras Sara y Sofía exponen su manera de proceder en el juego cuando las profesoras preguntan por qué han decidido poner alguna ficha y no otra, o sobre por qué una fracción se lee como estos lo han hecho, ya ilustrado anteriormente en la meta-categoría OMR.

En la meta-categoría RJ, el Tipo de Orquestación mencionado se ilustra cuando las profesoras al finalizar el juego preguntaron lo aprendido o no con el uso del recurso, de tal manera que los estudiantes dan cuenta de sus estrategias para haber jugado.

Al finalizar el juego, las profesoras Sara y Sofía realizaron las preguntas que aparecen en la guía del trabajo, para que los estudiantes den cuenta de cómo han interpretado lo visto en la sesión, y deban explicarlo de manera escrita y verbal. La ilustración 4 muestra la manera en que un estudiante resuelve por escrito las preguntas planteadas por la profesora Sofía.

Ilustración 4. *Manera escrita en que un estudiante explica lo que ha entendido con el Recurso Pedagógico*



La orquestación *Lugar y Espectáculo* también sucedió en los dos tipos de momentos clasificados en el segundo grupo de resultados de esta investigación, pues los estudiantes dan cuenta de su modo de proceder según sus respuestas. Esto ya anteriormente ilustrado en cada uno de los momentos.

La orquestación *Guía y Explicación*, fue posible identificarla a través de interacciones entre cada profesora y un estudiante, o un par de estudiantes, en que sus acciones estuvieron referenciadas en el instruir u orientar al estudiante para identificar la fracción o el tipo de representación que se necesitaba para poder jugar. Las profesoras también plantearon preguntas alrededor del proceder de cada estudiante, con el fin de que estos reflexionaran sobre si estaba bien o no la ficha puesta en el juego. Este Tipo de Orquestación fue posible relacionarlo con todas las meta-categorías y momentos identificados, puesto que consistió en aquellas explicaciones y orientaciones particularizadas entre cada una de las profesoras y un estudiante, o un par de estudiantes. Por ejemplo, en los momentos MOST clasificados anteriormente, existió

un intercambio individual entre la profesora Sara y E3, y E2, respectivamente. En el caso de la profesora Sofía, entre esta y E5.

Este Tipo de Orquestación junto con la orquestación *Explicación de la Guía de Trabajo* es una de las más repetitivas durante el uso del recurso pedagógico, la primera desarrollada a nivel individual como una interacción entre cada profesora y un estudiante, y la segunda a nivel grupal entre cada profesora y sus estudiantes. La Orquestación *Explicación de la Guía de Trabajo* como aquella que se realizó en el inicio y como de exploración para comprender el uso del recurso y la orquestación *Guía y Explicación* como aquella que se realizó durante todo el transcurso del uso del recurso pedagógico.

Finalmente, el último Tipo de Orquestación *Trabaja y Camina por*, es identificado por las profesoras Sara y Sofía, ya que en algunos momentos caminan alrededor de la mesa para observar el trabajo de los estudiantes y al mismo tiempo para responder a las preguntas de estos. En especial cuando algún estudiante presentaba dificultades para jugar y poner una ficha correcta en el juego. No obstante, dado que la Configuración Didáctica para cada profesora¹⁸ fue ella y cuatro estudiantes sentados en una misma mesa redonda, el desplazarse de pie a revisar el proceso de cada estudiante no resultaba tan necesario porque la distancia entre cada profesora y un estudiante era muy mínima, razón por la que las revisiones del juego se hicieron sin el caminar por el Laboratorio de Educación Matemática. Este tema ya relacionado e ilustrado en las meta-categorías RJ y OMR y todos los momentos identificados. En la primera meta-categoría porque las profesoras revisaban el proceso de los estudiantes, sobre todo al final cuando plantearon las preguntas de la guía de trabajo del recurso. Y en la meta-categoría OMR y los dos tipos de momentos MOST en relación con la revisión y supervisión del proceder de los

¹⁸ Sara y E1, E2, E3 y E4. Sofía y E5, E6, E7 y E8.

estudiantes. Esto es responder por medio de explicaciones a las preguntas de los estudiantes en relación con el objeto matemático y sus representaciones. La ilustración 5 muestra el Tipo de Orquestación Trabaja y Caminar Por, de las profesoras Sara y Sofía.

Ilustración 5. *Orquestación Trabaja y Camina Por, de las profesoras Sara y Sofía, respectivamente*



Capítulo V: Conclusiones y discusiones

La presente investigación planteó como objetivo general caracterizar las prácticas de profesores de matemáticas en formación en relación con la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. Para dar cumplimiento a este objetivo, se plantearon tres objetivos específicos.

Este capítulo expone tres apartados en que se describe el cumplimiento del anterior objetivo a través de cada uno de los tres objetivos específicos. Así, el primer apartado corresponde al primer objetivo específico que fue el analizar la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático Estudiantil al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. El segundo apartado que corresponde al segundo objetivo específico que fue clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático Estudiantil, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas. Y el tercer apartado que corresponde al tercer objetivo específico que fue la identificación de distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante, al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.

Este capítulo expone finalmente limitaciones del trabajo de investigación, y al mismo tiempo recomendaciones para próximas investigaciones al respecto.

5.1 La Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático del Estudiante al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas

En relación con el primer objetivo de la investigación que fue el analizar la Mirada Profesional sobre el Pensamiento Matemático Estudiantil al orquestar Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas; las habilidades de la MPPME del estudiante se caracterizan en esta investigación de la siguiente manera:

La habilidad *Identificar Aprendizajes de los Estudiantes* de las profesoras Sara y Sofía, se desarrolla en el inicio y exploración del juego como aquella que da cuenta de cómo las profesoras identifican lo que conocen los estudiantes en relación al recurso y sobre el objeto matemático vinculado a este, aquello que los estudiantes han entendido de la interacción con el recurso al mismo tiempo que por la indagación del objeto matemático y sus representaciones semióticas que se vinculan al recurso.

La habilidad *Interpretar la Comprensión de los Estudiantes* de la profesora Sara y Sofía destacada en la manera en que a través de sus conocimientos matemáticos se acercan a las estrategias de los estudiantes por medio de un discurso familiar al de estos. Para esta habilidad fue posible identificar a través de los datos complementarios a la videograbación, como la entrevista inicial, que las profesoras Sara y Sofía mencionaron lo que entienden por Sentido Numérico y referentes teóricos de este concepto y de las fracciones, de manera poco amplia y sin precisiones para llevar a cabo la intervención con los estudiantes; y por tanto se podría inferir que el desarrollo de esta habilidad podría potenciarse con el conocimiento pedagógico que adquieran próximamente como profesoras en servicio para así entonces interpretar las estrategias de los estudiantes a partir de otros matices, con base en investigaciones al respecto.

Con base en lo anterior, Fernández y Choy (2020) mencionan que el uso de trayectorias de aprendizaje permite analizar la MPPME, sobre todo para la interpretación del Pensamiento Matemático del Estudiante, puesto que proporcionan un modelo cognitivo para el profesor para interpretar y decidir frente a los aprendizajes de los estudiantes. Por ejemplo, la investigación de Ivars, Fernández y Llinares (2017) enuncia que el uso de una trayectoria de aprendizaje generó en los profesores de matemáticas en formación una mejor interpretación acerca del razonamiento fraccional de los estudiantes, propiciando también una mejoría en las actividades propuestas de

acuerdo con la evolución conceptual de estos. Esta mejoría de la segunda habilidad de Interpretar la Comprensión de los Estudiantes se evidenció también en el progreso del discurso detallado de los profesores para dar cuenta del Pensamiento Matemático del Estudiante, pues dan cuenta de más comentarios matemáticos sobre las respuestas de los estudiantes.

La habilidad *Responder a la Comprensión de los Estudiantes*, de las profesoras Sara y Sofía, caracterizada a partir de las acciones de respuesta frente a procedimientos incorrectos, dudas o preguntas de los estudiantes que permitían también introducir nuevas temáticas. Como por ejemplo poner en discusión lo manifestado por los estudiantes en relación con la identificación de una fracción y a partir de estos poder indicar también relaciones de orden de este objeto matemático.

Como se mencionó para la segunda habilidad de la MPPME, si bien, el planteamiento de trayectorias de aprendizaje y el conocimiento pedagógico que adquieran Sara y Sofía como de matemáticas en servicio, también podrá potenciar la tercera habilidad de la MPPME, sobre todo en la propuesta de tareas y actividades que propicien el aprendizaje del objeto matemático en cuestión; pues Según Fernández y Choy (2020) la habilidad de la MPPME más compleja a desarrollar en los profesores es la de *Responder a las Comprensión de los Estudiantes*, puesto que el conocimiento de los profesores en relación con la forma de entender cómo los estudiantes aprenden matemáticas no es suficiente para que los profesores tomen decisiones sólidas en cuanto al aprovechamiento matemático de los estudiantes.

La meta-categoría OMR fue posible asociarla a todas las habilidades de la MPPME de las profesoras Sara y Sofía, pues obedece al objeto matemático, es decir a las fracciones que se trabaja durante todo el uso del recurso que se puede caracterizar en distintos momentos de la

interacción con este: identificación y exploración del recurso, inicio y desarrollo del juego, preguntas finales sobre el juego.

Finalmente, a través de la entrevista final realizada a cada profesora, fue posible rastrear el sentido y significado que toma la práctica profesional para estas, en tanto reflexionan sobre aspectos que deben corregir o fortalecer para sus próximas intervenciones y prácticas como futuras profesoras de matemáticas en servicio. La reflexión de las profesoras Sara y Sofía se caracterizó por ser una manera en que estas describen el sentido que asignan a cada uno de los momentos de su intervención y de su práctica profesional.

Por ejemplo, en la entrevista final la profesora Sara reflexiona acerca del tratamiento que tuvo del objeto matemático en representaciones figurales en relación con la comparación entre fracciones: *“Luego yo hice el cambio, que está bien, por ejemplo, estaba un sexto en una figura triangular y el mismo un sexto, pero en un cuadrado. Está bien, pasé de un sexto de una representación en un triángulo, a un sexto de una representación en un cuadrado, el problema fue cuando yo empecé a comparar entre cuadrado y cuadrado, porque yo no podría comparar el un sexto que tengo en un cuadrado con él un cuarto que tengo en una representación de otro cuadrado, pues las áreas son diferentes.”*¹⁹

De dicha reflexión es importante destacar que el tratamiento que se hace del objeto matemático en las representaciones figurales ya mencionadas no es el correcto. Si bien, son representaciones de unidades de tamaños distintos, el cuadrado de la representación de un sexto era más pequeño que el otro cuadrado. Y se realizó una comparación de las fracciones más de

¹⁹ Línea 204 de la transcripción de la entrevista final realizada a la profesora Sara.

carácter visual de acuerdo con lo preguntado por Sara en ese momento: *“Quién tiene más pintaditos”*.

La profesora Sofía reflexiona acerca de aquellos aspectos que limitaron la planificación y las dificultades de los estudiantes respecto a las situaciones propuestas para el aprendizaje del objeto matemático: *“Bueno, aprendo que no todo tiene que estar planificado, sino que hay situaciones que nos ponen a prueba como docente. Es allí cuando llega el aterrizaje de todas las teorías que se ven en la carrera: de mirar qué estrategias puedes utilizar para motivar a un estudiante, y que no tenga dificultades matemáticas. También aprendí cómo, con diferentes estrategias, afrontar los obstáculos que se presentan con los estudiantes.”*²⁰

5.2 Tipología de Momentos MOST al orquestrar Recursos Pedagógicos

De acuerdo con el segundo objetivo específico que fue clasificar Momentos de Enseñanza que promueven el aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestran Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas, fue posible establecer dos tipos de momentos MOST: a) *Identificación de una fracción a partir de la relación entre esta y su representación figural* y b) *Identificación de la representación numérica de una fracción*.

La primera tipología de momentos MOST abarcó los dos momentos pertenecientes a la profesora Sara, y refiere al tratamiento de la representación figural para así identificar la fracción que se está representando, y la segunda tipología abarcó un momento que refiere a la identificación del objeto matemático en su representación figural. Esta tipología de momentos MOST en total abarca tres momentos. Dos pertenecientes a la profesora Sara y que conforman el

²⁰ Línea 166 de la transcripción de la entrevista final realizada a la profesora Sofía.

primer grupo de momentos. Y la segunda tipología está conformada por un momento perteneciente a la profesora Sofía.

La meta-categoría OMR fue también común a los dos tipos de momentos porque obedece al objeto matemático que se trabaja durante todo el uso del recurso que se puede caracterizar en distintos momentos del juego: identificación y exploración del recurso, inicio y desarrollo del juego, preguntas finales sobre el juego.

Si bien la cantidad obtenida en total de momentos no hace referencia a un número grande, lo que podría inferirse por dos razones: a) las pocas sesiones de intervención que se observaron y grabaron de las profesoras Sara y Sofía en relación con el uso de recursos. Y b) en el momento de analizar los episodios de referencia varios Momentos de Enseñanza no cumplían con los criterios establecidos el marco MOST principalmente en la tercera característica de esta. Es decir, la característica de las Oportunidades Pedagógicas.

El no cumplimiento de la tercera característica que trata de las Oportunidades Pedagógicas da cuenta de la ausencia de acciones de las profesoras para aprovechar la expresión del Pensamiento Matemático del Estudiante, acciones que ponen en discusión lo dicho por el estudiante (Remillard y Geist 2002); es decir no existe una trascendencia sobre lo manifestado equivocadamente por el estudiante, y por tanto no se hace énfasis en las necesidades intelectuales de este para introducir otras temáticas de estudio alrededor del objeto matemático en cuestión.

En el apartado anterior a este, se mencionó que una de las habilidades de la MPPME a potenciar más en las profesoras Sara y Sofía es la de *Responder a las Comprensión de los Estudiantes*. En este apartado que trata de la tipología de momentos MOST de esta investigación, se halló también que la cantidad obtenida en total de momentos MOST no hace referencia a un

número grande probablemente porque al analizar los episodios de referencia, varios Momentos de Enseñanza no cumplían con los criterios establecidos el marco MOST principalmente con la tercera característica: *las Oportunidades Pedagógicas*. Esta tercera característica como se ha mencionado anteriormente también hace referencia acciones de respuesta de las profesoras para aprovechar las estrategias o expresiones del Pensamiento Matemático del Estudiante.

Si bien, uno de los aspectos a mejorar para las prácticas de las profesoras Sara y Sofía son las acciones de respuesta para el aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante, lo que conlleva a pensar en el planteamiento de una propuesta para los programas de formación que haga énfasis en ello. Por ejemplo, Fernández et al., (2020) plantean una propuesta para mejorar la MPPME de los profesores en formación, a través del compartir en línea narrativas de momentos MOST escritas por estos mismos, de tal manera que se pueda establecer una retroalimentación de estas a partir de colegas y expertos en el campo educativo. Estas narrativas son entendidas como las narraciones que hacen los profesores en formación sobre sus prácticas de enseñanza y que toma en consideración aspectos significativos de la interacción entre profesores y estudiantes, con el fin de reflexionar sobre su actuar docente. La retroalimentación emergente apunta a que se establezcan reflexiones con relación al desarrollo de las habilidades para aprovechar el Pensamiento Matemático del Estudiante a partir del análisis de las tres características de la estructura analítica MOST de una situación presentada en el aula de clases.

Lo anteriormente descrito propiciaría en los profesores de matemáticas en formación el desarrollo de habilidades para aprovechar el Pensamiento Matemático del Estudiante y por tanto durante su práctica atender a instancias de este en consideración con las tres características de la estructura analítica MOST.

5.3 Los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas

De acuerdo con el tercer y último objetivo específico de esta investigación que fue la identificación de distintas articulaciones entre los Tipos de Orquestación y las respuestas del profesor al Pensamiento Matemático del Estudiante cuando se orquestan Recursos Pedagógicos en Discusiones Matemáticas.; fueron cuatro los Tipos de Orquestación posibles de rastrear en este trabajo: *Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso*, *Lugar y Espectáculo*, *Guía y Explicación*, y *Trabaja y Camina Por*. Cada uno de estos fue posible asociarlos también con las meta-categorías obtenidas en la fase 1 de análisis y la clasificación de momentos MOST obtenidos en esta investigación.

Los Tipos de Orquestación *Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso* y *Guía y Explicación* son los más frecuentes durante el uso del recurso pedagógico. El primero porque sucede al inicio del juego como una identificación de este, a nivel grupal, es decir cada una de las profesoras se dirige a todos sus estudiantes para explicar cómo usar el recurso. Y el segundo Tipo de Orquestación sucede durante todo el juego, pero se realiza a nivel individual como una interacción entre cada profesora y un estudiante.

De hecho, según la asociación establecida entre los Tipos de Orquestación y las meta-categorías obtenidas en la fase 1 de análisis de esta investigación, el Tipo de Orquestación *Guía y Explicación* se asocia a todas las meta-categorías. Y todas estas meta-categorías, en asociación, permiten dar cuenta de la habilidad MPPME; por tanto, se puede deducir que en este Tipo de Orquestación se llevan a cabo las tres habilidades de la MPPME cuando se orquesta el recurso.

La meta-categoría OMR fue común también a todos los Tipos de Orquestación anteriormente mencionados, dado que es el objeto matemático que se trabaja en el recurso.

Para todos los Tipos de Orquestación fue posible articular los dos momentos MOST categorizados para las profesoras Sara y Sofía, a excepción del Tipo de Orquestación *Explicación de la Guía de Trabajo del Recurso*, pues la tipología de momentos obtenida no abarca un momento en que se haya desarrollado la lectura de la guía de trabajo del recurso.

Los Recursos Pedagógicos orquestados por las profesoras Sara y Sofía cuentan con distintas representaciones para una misma fracción: la representación figural, numérica y en lenguaje natural; incluso la representación figural a partir de diferentes formas para una misma fracción. De hecho, Ivars (2019) propone el uso de materiales manipulativos para generar distintas representaciones para una misma fracción²¹ y así fomentar el aprendizaje de esta. Las acciones orquestadas por las profesoras para el uso del recurso hacen referencia al aprovechamiento de este para el aprendizaje de la fracción y el objetivo de clases propuesto por cada una de las profesoras para su sesión, así como en el desarrollo de cada una de las habilidades de la MPPME.

Datos complementarios a la videograbación, como la entrevista inicial y final realizada a cada profesora dieron cuenta de la importancia del recurso para recrear el aprendizaje de un objeto matemático, esto a partir de expresiones como por ejemplo en el caso de Sara: “...*el utilizar un material concreto, un recurso concreto, manipulable; genera más interés y motivación en ellos, puesto que es algo diferente a lo que ven en el salón de clases y expresan que vienen a jugar.*”²² Y en el caso de Sofía: “*El papel del recurso toma importancia mediante el discurso que el docente realiza. Aunque se pretende que la ficha hable por sí sola, en muchas*

²¹ Ivars (2019) propone el doblado de una misma hoja de papel para representar de distintas formas una misma fracción.

²² Línea 30 de la transcripción de la entrevista inicial de Sara.

ocasiones la ficha no es muy clara para los estudiantes. Por lo tanto, el juego va a tomar un sentido mediante el discurso del docente.”²³

En lo expresado por Sara se percibe el uso del recurso como un atractivo para los estudiantes frente a que se presenta como algo diferente al aula común de clases. En lo expresado por Sofía, se expresa la transformación que tiene el recurso para ella en tanto lo hace por medio de su discurso y de las variaciones que hace en el uso de este según las respuestas de los estudiantes.

Los Tipos de Orquestación hallados en esta investigación guardan relación con las acciones de respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante que poseen las profesoras Sara y Sofía, pues se desarrollan en torno a sus propias experiencias o creencias, como también de sus juicios sobre la Educación Matemática y particularmente del uso y aprovechamiento que hacen de los Recursos Pedagógicos que se manejan en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

En el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle, los profesores de matemáticas en formación realizan su práctica profesional con base en el diseño de Recursos Pedagógicos, la interacción con los estudiantes y la sistematización de esta experiencia. Si bien resulta importante destacar la transformación que se logra hacer de los recursos para que estos no se conciban sólo como artefactos; además de las acciones que orquestan para propiciar el aprendizaje de las matemáticas en un contexto muy distinto al aula regular de clases. Por tanto, es interesante identificar cómo este trabajo aporta al desarrollo de las prácticas de profesores no

²³ Línea 43 de la transcripción de la entrevista inicial de Sofía.

sólo en el Laboratorio de Educación Matemática sino también en otros contextos escolares, para así aprovechar el Pensamiento Matemático de los Estudiantes.

5.4 Limitaciones y recomendaciones

En el desarrollo de este trabajo de investigación se pudo identificar como una limitación que el análisis de solo una videograbación para cada una de las profesoras en relación con el uso de un solo recurso²⁴, logre dar cuenta de manera definitiva de la MPPME. Si bien el contar con el análisis de más videograbaciones de las profesoras con el uso de otros recursos pudo haber brindado una mayor descripción de sus acciones de respuesta al Pensamiento Matemático del Estudiante, como también de la interacción y orquestación de los recursos; y haber generado una tipología de momentos MOST mucho más amplia que dé cuenta de las acciones de los profesores orientadas al aprovechamiento del Pensamiento Matemático del Estudiante.

No obstante, los datos y resultados obtenidos en esta investigación logran dar cuenta del campo de estudio aquí tratado y ser un aporte al plan de estudios o lineamientos de la práctica profesional de los programas de las licenciaturas en matemáticas, en especial de la Universidad del Valle.

Para futuras investigaciones queda el campo abierto para realizar un análisis mucho más profundo de las tres aproximaciones teóricas que se abordan en este trabajo de investigación: la MPPME, los momentos MOST y la aproximación instrumental. Principalmente la manera en que se vinculan los Tipos de Orquestación a la caracterización de las acciones de respuesta de los profesores para aprovechar el Pensamiento Matemático del Estudiante y el uso de Recursos

²⁴ Es importante recordar que, en el Laboratorio de Educación Matemática, los profesores de matemáticas en formación trabajan con estudiantes que rotan por las mesas de este. Por tanto, los estudiantes a analizar para varias sesiones no son los mismos como puede pasar en una investigación realizada en un aula de clases.

Pedagógicos digitales. Si bien, Fernández y Choy (2020) reportan pocos estudios de la MPPME con base en el análisis del uso de materiales curriculares escritos y digitales y las oportunidades pedagógicas.

Otro campo de estudio abierto a realizar, en el marco de la estructura analítica de los momentos MOST, es el análisis de la segunda característica de esta: *lo Significativo en una Perspectiva Matemática* a través de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, puesto que normalmente el estudio de esta característica se realiza con base en aspectos curriculares locales y contextualizados de las prácticas de enseñanza. De hecho, Fernández y Choy (2020) enuncian que las trayectorias de aprendizaje se han convertido en una perspectiva de aprendizaje para dar cuenta de la MPPME, puesto que proporcionan un modelo cognitivo para el profesor para interpretar y decidir frente a los aprendizajes de los estudiantes.

También es necesario mencionar que si bien, en el Laboratorio de Educación Matemática de la Universidad del Valle se realiza un arduo trabajo de orquestación con los Recursos Pedagógicos que se cuentan en éste, no obstante, resultaría interesante hacer un análisis del diseño de las guías de trabajo de éstos; principalmente de los Recursos Pedagógicos que se abordaron en esta investigación. Pues la manera en cómo se aborda el objeto matemático limita a la comprensión de la fracción en otros contextos, sobre todo la identificación de fracciones impropias. Aún más cuando las actividades propuestas por las profesoras se centran en concebir la fracción como *tantos de tantos* (Cortina et al., 2013) al enfatizar en el conteo de las partes en que se divide la unidad y se toman de ésta. Además, no es posible comparar fracciones cuando las áreas de las unidades comparadas son distintas, según las representaciones figurales de la fracción.

Finalmente, como se indicaba anteriormente hace unos pocos párrafos, otro tema de estudio abierto a partir de esta investigación, radica en la propuesta de lineamientos para la práctica profesional en relación con la MPPME para los programas de formación de licenciatura en matemáticas.

Referencias Bibliográficas

- Angrosino, M. (2012). *Etnografía y observación participante en Investigación Cualitativa*.
<http://www.digitaliapublishing.com.bd.univalle.edu.co/visor/24043>
- Ball, D. L., Thames, M H. y Phelps, G. (2008). Content knowlegde for teaching. *Journal of teacher education*, 59, 389- 407.
- Blömeke, S., Gustafsson, J. E., y Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Viewing competence as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13.
- Blömeke, S., Hsieh, F., Kaiser, G., y Schmidt, W. H. (Eds.). (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results*. Dordrecht: Springer.
- Carrero, V., Soriano, R., y Trinidad. A. (2012). *Cuadernos metodológicos: Teoría Fundamentada*. Madrid, España: Centro de Investigaciones Sociológicas SIS.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., et al. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 3–29.
- Cortina, J., Zúñiga, C., y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40528961002>
- Cumbal, L. (2020). *Caracterización de las prácticas de profesores nóveles que integran recursos digitales con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la enseñanza de la traslación*. Universidad del Valle.
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/18487/Caracterizacion-Practicas-Profesores-Cumbal-Leydi-7412-C969.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Da Ponte, J., Quaresma, M., y Mata Pereira, J. The challenge of mathematical discussions in teachers' professional practice. *DIDACTICAE*, (1), 45-59.
<https://doi.org/10.1344/did.2017.1.45-59>
- Drijvers, P. (2012). Teachers transforming resources into orchestrations. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 265–281). New York/Berlin: Springer.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool; instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), 213–234. doi: [10.1007/s10649-010-9254-5](https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5)
- Escudero, I. (2003). La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. *La semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, España.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403–434.
- Fernández, C., & Choy, B. H. (2020). "12 Theoretical Lenses to Develop Mathematics Teacher Noticing". En S. Llinares y O. Chapman. (Eds). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2*. (pp. 337-360) Leiden, The Netherlands: Brill.
 doi: https://doi.org/10.1163/9789004418967_006
- Fernández, C., Llinares, S. & Rojas, Y. (2020) Prospective mathematics teachers' development of noticing in an online teacher education program. *ZDM Mathematics Education* 52, 959–972. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01149-7>

- Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). Digital Curriculum Resources in/for Mathematics Teacher Learning". En S. Llinares y O. Chapman. (Eds). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2*. (pp. 139-161) Leiden, The Netherlands: Brill. doi: https://doi.org/10.1163/9789004418967_006
- Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 1, pp. 23-32.
- Gamoran, M y Dier, E. (2017). Mathematics teachers' self-captured video and opportunities for learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 20(5), 477-495. doi: [10.1007/s10857-017-9383-1](https://doi.org/10.1007/s10857-017-9383-1)
- Garzón, D., Vega, M., Pabón, O., Arce, J. y Castrillón G. (2013). Un Marco Teórico para la conceptualización de los Recursos Pedagógicos. En Garzón, D., Vega, M., Pabón, O., Arce, J. y Castrillón G. (Ed.) Recursos Pedagógicos y enseñanza de la geometría. Una perspectiva al estudio del desarrollo profesional del profesor de matemáticas (pp. 95-114). Santiago de Cali, Valle del Cauca: En proceso de publicación.
- Garzón, D. (2017a). *Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula*. (Tesis doctoral, Universidad de Barcelona). <https://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/458678/dgc1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Garzón, D. (2017b). Análisis de las decisiones del profesor de matemática en su gestión de aula. *Educación Matemática*, 29(3), 131-160. doi: [10.24844/EM2903.05](https://doi.org/10.24844/EM2903.05)
- Gellert, U. (2010). Integrating different perspectives to see the front and the back: The case of explicitness. *CERME 6 – WORKING GROUP 9*, 1575.

- Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos cualitativos en investigación cualitativa*.
<http://www.digitaliapublishing.com.bd.univalle.edu.co/visor/24050>
- Gómez, A. M., Garzón, D. (2020). Prácticas de enseñanza de profesores de matemáticas en formación y la mirada profesional del Pensamiento Matemático del Estudiante. *X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática*. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
- Harel G. (2013). Intellectual Need. En K. R. Leatham (Ed). *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119-153). New York: Springer.
- Huang, R., & Li, Y. (2012). What matters most: A comparison of expert and novice teachers' noticing of mathematics classroom events. *School Science and Mathematics*, 112(7), 420–432. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00161.x>
- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2017). Pre-service teachers' uses of a learning trajectory to notice students' fractional reasoning. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25–32). Singapore: PME.
- Ivars, P. (2019). Trayectoria hipotética de aprendizaje para evaluar la comprensión de fracción como parte-todo. *Uno: Revista de didáctica de las Matemáticas*. (86), pp. 32-37
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.

- Leathman, K. R., Peterson, B.E., Stockero S. L: y Van Zoest, L.R. (2015). Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46 (1), pp. 188-124
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151 - 175). Madrid: Síntesis.
- Loef, M., Kazemi, E., y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En K. Frank y Jr. Lester. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 225 - 256). United States of America: Information Age Publishing Inc.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Documento N. 3. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN, (2008). *Orientaciones generales para la educación en tecnología. Ser competente en tecnología ¡Una necesidad para el desarrollo!* Bogotá, Colombia: Espantapájaros Taller.
- NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*. Estados Unidos: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
- Philipp, R., Jacobs, V., & Sherin, M. (2014). Noticing of Mathematics Teachers. *Encyclopedia of Mathematics Education*. [versión electrónica]. London, UK: Springer Science+Business Media Dordrecht 2014. <https://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-94-007-4978-8%2F1.pdf>. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8
- Remillard, J. T., y Geist, P. K. (2002). Supporting teacher's professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (1), 7-34.

- Santagata, R. y Yeh, C. (2015). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginning teachers' competence. *ZDM Mathematics Education*, (48), 153-165. doi: [10.1007/s11858-015-0737-9](https://doi.org/10.1007/s11858-015-0737-9)
- Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60(1), 20–37.
- Sherin, M.G., Jacobs V. R y Philip R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G Sherin, V. R. Jacobs and R. A. Philipp (eds). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher's eyes* (pp. 3 - 13). New York: Routledge.
- Sherin, M. G., & Dyer, E. B. (2017). Teacher self-captured video: Learning to see. *Phi Delta Kappan*, 98(7), 49–54. doi:10.1177/0031721717702632
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica. [the case study: theory and practice]*. Madrid: Ediciones Morata. S.L. <https://www-digitaliapublishing-com.bd.univalle.edu.co/visor/24100>
- Simpson, A. y Haltiwanger, L. (2017). This is the First Time I've Done This'': Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20 (4), 335-355. doi:[10.1007/s10857-016-9352-0](https://doi.org/10.1007/s10857-016-9352-0)
- Stahnke, R., Schueler, S., y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education* 48, 1-27. <https://link-springer-com.bd.univalle.edu.co/article/10.1007/s11858-016-0775-y>

- Stockero, S. L. (2008). Using a video-based curriculum to develop a reflective stance in prospective mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 373–394. doi:[10.1007/s10857-008-9079-7](https://doi.org/10.1007/s10857-008-9079-7)
- Stockero, S. L., y Stenzelbarton, A. D. (2017). An Exploration of How Aspects of a Noticing Intervention Supported Prospective Mathematics Teacher Noticing. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 39. <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=ED581343&lang=es&site=ehost-live>
- Stockero, S. L., Leatham, K. R., Ochieng, M. A., Van Zoest, L. R., & Peterson, B. E. (2020). Teachers' orientations toward using student mathematical thinking as a resource during whole-class discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(3), 237-267.
- Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. En A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 3–21). Dordrecht: Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Thames, M. H., y Ball, D. L. (2013). Making Progress in U.S. Mathematics Education: Lessons learned Past, Present and Future. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 15-44). New York, NY: Springer. doi: [10.1007/978-1-4614-6977-3_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_6)
- Trouche, D. (2002) Les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques: une evolution rapidedes matériels, des effetsdifférencies. En: GUIN, D. & TROUCHE, D. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Trouche, D. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.

Universidad del Valle, (2015). Instituto de Educación y Pedagogía – Laboratorio de Matemática.
<http://iep.univalle.edu.co/laboratorio-de-matematica>

Universidad del Valle, (2018). Seminario de práctica profesional II. Cali, Colombia.

Van Es, E., y Gamoran, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.494.1619&rep=rep1&type=pdf>

Van Es, E. y Sherin, M. E: (2002). “Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions”. *Journal of tecnology and teacher education*, 10(4), pp. 575-596

Van Zoest, L. R., Stockero, S. L., Leatham, K. R., Peterson, B. E., Atanga, N. A., & Ochieng, M. A. (2017). Attributes of instances of student mathematical thinking that are worth building on in whole-class discussion. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(1), 33-54.

Wood, T., Williams, G., y McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(3), 222–25